

Математическое моделирование физических процессов

Научная статья
УДК 532.5.013.4
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16405>

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ПОДХОДОВ К ГЛОБАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА

В. Д. Голубков ✉, **А. В. Гарбарук**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
✉ golubkovvd@gmail.com

Аннотация. В работе впервые проведено прямое сравнение двух основных подходов к вычислению якобиана уравнений Навье – Стокса: континуального (КП) и дискретного (ДП). На базе собственного конечно-объемного кода для моделирования течений реализован ДП к вычислению якобиана (в дополнение к уже существующему КП). ДП был успешно верифицирован путем сравнения полученного численного результата с решением нестационарных уравнений Навье – Стокса. Сравнение двух подходов проведено на примере ламинарного обтекания цилиндра идеальным газом при околокритических числах Рейнольдса ($Re = 50$ и 60). Установлено, что КП точнее предсказывает показатель роста возмущений, а ДП – их частоту и амплитуду в целом. Полученные результаты позволяют утверждать, что КП и ДП равнозначны по порядку точности и выбор конкретного подхода для проведения анализа устойчивости может определяться другими критериями (например, простота реализации, вычислительные затраты и др.).

Ключевые слова: глобальный анализ устойчивости, якобиан уравнений Навье – Стокса, автоматическое дифференцирование

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00041).

Для цитирования: Голубков В. Д., Гарбарук А. В. Сравнение двух подходов к глобальному анализу гидродинамической устойчивости на примере задачи обтекания цилиндра // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 50–62. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16405>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16405>

A COMPARISON OF TWO APPROACHES TO THE GLOBAL STABILITY ANALYSIS USING THE EXAMPLE OF THE CYLINDER FLOW PROBLEM

V. D. Golubkov ✉, **A. V. Garbaruk**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
✉ golubkovvd@gmail.com

Abstract. In the paper, the two main approaches to calculating the Jacobian of the Navier–Stokes equations, namely, the continuum (CA) and discrete (DA) approaches, have been

directly compared for the first time. The DA to calculating this Jacobian was implemented based on in-house finite-volume code for hydrodynamics simulation (in addition to the already existing CA). The DA was successfully verified by comparison between the obtained numerical result and that of solving the transient Navier–Stokes equations. The comparison of these approaches was carried out using the example of a laminar flow past a cylinder by a perfect gas at the near-critical Reynolds numbers ($Re = 50$ and 60). It was established that the CA predicted the growth rate of perturbations more accurately, while the DA did their frequency and amplitude in toto. The results obtained allow to assert that both CA and DA are equivalent in terms of accuracy, and the choice of a particular approach for analyzing the stability may be determined by other criteria, e. g., ease of implementation, computational work and so on.

Keywords: global stability analysis, Navier–Stokes equations, Jacobian, automatic differentiation

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 22-11-00041).

For citation: Golubkov V. D., Garbaruk A. V., A comparison of two approaches to the global stability analysis using the example of the cylinder flow problem, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (4) (2023) 50–62. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16405>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Одним из наиболее мощных и развитых инструментов исследования устойчивости течений вязкой жидкости является линейная теория устойчивости, в рамках которой рассматривается развитие малых возмущений, не взаимодействующих друг с другом. В XX веке большинство исследований базировалось на линейной теории гидродинамической устойчивости в рамках локально-параллельного подхода (уравнение Орра – Зоммерфельда) или двумерных параболизированных уравнений (см. книги [1, 2] и обзорную статью [3]). Развитие вычислительной техники позволило к концу XX века проводить линейный анализ устойчивости двумерных и даже трехмерных решений уравнений Навье – Стокса; такой подход получил в литературе название глобального анализа устойчивости (ГАУ) [4].

В рамках ГАУ динамика развития малых возмущений определяется матрицей производных от определяющих уравнений по всем переменным, т. е. якобианом стационарных уравнений Навье – Стокса (точнее, его дискретной формой). В настоящее время применяются два различных подхода к вычислению этого якобиана. Так, в работах [5 – 9], охватывающих широкий круг задач ГАУ двух-, трех- и квазитрехмерных течений, использовался подход, названный в статье [10] континуальным. Его суть состоит в первоначальной линеаризации уравнений Навье – Стокса, приводящей к получению аналитического выражения для их якобиана, для которого затем формируется дискретное приближение при помощи той или иной разностной схемы. В противоположность этому методу, в работах [11 – 18] использовался подход, называемый дискретным, в котором изначально дискретизируются определяющие уравнения, затем проводится их линеаризация.

Матрицы якобианов, полученные с помощью этих подходов, различаются, так как в общем случае операции линеаризации и дискретизации некоммутативны [10]. Однако по мере измельчения сетки разница между результатами этих подходов должна уменьшаться. Аспекты применения континуального и дискретного подходов были исследованы в контексте решения сопряженных уравнений для задач оптимизации [19, 20]. Но сравнение этих подходов при проведении ГАУ не было освещено в литературе и выбор конкретного подхода в работах [5 – 18] не был обоснован.

Этот факт и определил цель настоящей работы, состоящую в сравнении результатов ГАУ при использовании различных способов расчета матрицы якобиана на примере ламинарного обтекания цилиндра совершенным газом при околокритических числах Рейнольдса.

Глобальный анализ устойчивости стационарных ламинарных течений

Методика исследования глобальной устойчивости ламинарных течений содержит два основных этапа.

На первом находится численное решение обобщенной системы стационарных уравнений Навье – Стокса, включающей уравнения неразрывности, сохранения количества движения и энергии, которую можно записать в операторной форме:

$$R(q) = 0, \quad (1)$$

где $q = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho E\}^T$ – вектор консервативных переменных; R – нелинейный дифференциальный оператор стационарных уравнений Навье – Стокса.

Решение стационарных уравнений Навье – Стокса, удовлетворяющее уравнению (1) и получаемое при анализе течения на устойчивость, часто называют базовым. Устойчивость этого решения, обозначаемого как \bar{q} , и подлежит нашему рассмотрению.

На втором этапе рассматривается эволюция возмущений базового решения во времени. Уравнение для возмущений можно получить из нестационарных уравнений Навье – Стокса; они записываются в следующей операторной форме:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -R(q). \quad (2)$$

В ГАУ используется подход, традиционный для линейного анализа устойчивости, который базируется на представлении решения системы уравнений (2) в виде суммы ее стационарного решения \bar{q} и малых возмущений q' :

$$q = \bar{q} + q'. \quad (3)$$

Для получения уравнений, линейных относительно q' , проводится линеаризация оператора $R(q)$ в окрестности базового решения по этим возмущениям:

$$R(\bar{q} + q') = R(\bar{q}) + \frac{\partial R}{\partial q}(\bar{q})q', \quad (4)$$

где $\frac{\partial R}{\partial q}(\bar{q}) \equiv J(\bar{q})$ – якобиан уравнений Навье – Стокса (дифференциальный оператор, зависящий от базового решения).

Уравнение относительно малых возмущений получается в результате подстановки разложения (3) в уравнение (2) с учетом уравнений (1) и (4):

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + J(\bar{q})q' = 0. \quad (5)$$

В силу линейности системы дифференциальных уравнений (5), ее общее решение представляется в виде суммы слагаемых (мод возмущений), каждое из которых также является решением системы (5). Каждую моду можно представить в виде

$$q'(x, y, t) = \hat{q}(x, y) \exp(\omega t), \quad (6)$$

где \hat{q} – комплексный вектор амплитуд возмущения; ω – комплексное число $\omega_r + i\omega_i$, действительная часть которого ω_r – скорость роста/затухания возмущения, а мнимая часть ω_i – его частота (физический смысл имеет только действительная часть соотношения (6)).

Подстановка равенства (6) в систему (5) приводит к задаче на собственные значения для якобиана определяющих уравнений:

$$J\hat{q} = \omega\hat{q}. \quad (7)$$

Численное решение этой задачи проводится на конечно-разностной сетке, поэтому все непрерывные векторы и операторы заменяются своими дискретными приближениями. Дискретизация производных в каждой точке расчетной сетки по заранее известному



шаблону численной схемы определяет зависимость этих производных от значений переменных в соседних точках. Таким образом, задача (7) сводится к задаче на собственные значения дискретного приближения якобиана J – матрицы M_{kl} :

$$M_{kl}\hat{\alpha}_l = \omega\hat{\alpha}_k. \quad (8)$$

Здесь вектор $\hat{\alpha}_l$ является дискретизированным полем амплитуды возмущений \hat{q} , а дискретизированный якобиан M_{kl} – матрицей производных уравнений по всем переменным во всех точках расчетной сетки, поэтому индексы k и l в уравнении (8) принимают значения от 1 до $N_p \times N_v$, где N_p – количество узлов расчетной сетки, N_v – количество переменных.

Следует отметить, что в граничных точках расчетной области вместо линеаризации выражения (7) используется линеаризация соответствующих граничных условий, поэтому для этих точек вместо выражения (8) используется уравнение

$$M_{kl}\hat{\alpha}_l = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) можно объединить, если сформулировать обобщенную задачу на собственные значения:

$$M_{kl}\hat{\alpha}_l = \omega T_{km}\hat{\alpha}_m, \quad (10)$$

где T_{km} – диагональная матрица с $T_{ii} = 0$ в граничных точках и $T_{ii} = 1$ во внутренних точках.

Таким образом, определение устойчивости течения в рамках ГАУ сводится к решению обобщенной задачи (10) на собственные значения. Собственные числа матрицы M_{kl} соответствуют различным модам возмущений, причем вещественная часть собственных чисел равна скорости роста возмущений, а мнимая – частоте их колебаний.

Собственные векторы соответствуют пространственным распределениям амплитуд мод. Течение является неустойчивым, если хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть (т. е. существует растущая мода возмущений), и устойчивым в противном случае.

Как уже отмечено во введении, в настоящее время используются два различных подхода для определения элементов матрицы M_{kl} во внутренних точках расчетной области. По способу вычисления этой матрицы ГАУ называется соответственно континуальным либо дискретным.

В рамках первого из них (см., например, статью [5]), называемого в работе [10] континуальным, для якобиана J выводится аналитическое выражение, а потом проводится его дискретизация с помощью той или иной численной схемы, которая, вообще говоря, может отличаться от таковой, используемой для решения системы уравнений (1) при получении базового решения.

В отличие от этого, в рамках второго подхода (см., например, работы [11, 12]), называемого в статье [10] дискретным, вычисление якобиана в задаче (7) проводится не на дифференциальном, а на дискретном уровне, т. е. дифференцируется не сам оператор R , а его дискретная форма, используемая для получения базового решения, называемая правой частью системы (2) (*англ.* Right-Hand Side, традиционно обозначаемая как RHS_k); индекс k принимает значения от 1 до $N_p \times N_v$, как и в уравнении (10).

Дискретная форма якобиана в этом случае есть матрица частных производных RHS_k по переменным α_l (дискретная форма вектора основных переменных q) в каждой внутренней точке расчетной сетки:

$$M_{kl} = \frac{\partial RHS_k}{\partial \alpha_l}. \quad (11)$$

Существуют два подхода для реализации дифференцирования формы (11). В рамках первого из них для используемой численной схемы необходимо выписать явную зависимость $RHS_k(\alpha_l)$ и продифференцировать ее аналитически. Несмотря на то, что эта задача весьма трудоемка, особенно для современных схем повышенного порядка

точности, она была решена в работе [21], и разработанный подход с успехом применялся в статьях [11, 13, 16, 18].

В данной работе используется альтернативный подход, базирующийся на технологии автоматического дифференцирования (*англ.* Automatic Differentiation (AD)). Несмотря на достаточно давнее появление идеи AD [22], ее активное развитие началось только в последние два десятилетия, в связи с интересом к решению сопряженных задач, связанных прежде всего с оптимизацией формы аэродинамических профилей [23].

Метод AD базируется на том, что алгоритм вычисления любой сложной функции (в том числе и RHS) состоит из последовательного применения элементарных операций φ_i (сложение, умножение, возведение в степень и т. п.):

$$\text{RHS} = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n. \quad (12)$$

Значения производной от элементарной функции на каждом шаге известны аналитически, поэтому якобиан функции RHS можно вычислить по правилу дифференцирования сложной функции:

$$J = \varphi'_1 \circ \varphi'_2 \circ \dots \circ \varphi'_n. \quad (13)$$

Библиотеки, реализующие AD (см., например, работы [24, 25]), накапливают результаты этого дифференцирования в ходе расчета исходной функции и вычисляют дискретизированный якобиан. Важно отметить, что метод AD не является автоматическим в полном смысле этого слова и требует вмешательства в исходный код программы.

В отсутствие газодинамических разрывов, теоретически (т. е. при использовании вычислительных сеток, обеспечивающих получение сеточно-независимых решений для возникающих возмущений), континуальный и дискретный подходы должны обеспечивать одинаковый результат. Однако на практике результаты, полученные с использованием различных подходов на конечных сетках, могут заметно различаться.

Следует отметить, что эволюцию возмущений можно рассматривать не только в рамках ГАУ, но и в рамках прямого численного моделирования нестационарных уравнений Навье – Стокса (2). В таком случае в качестве начального приближения используется решение стационарных уравнений Навье – Стокса (1). Начальные возмущения определяются погрешностью численного решения нестационарных уравнений. Если течение неустойчиво, то в результате расчета наблюдается рост амплитуды возмущений. На линейной стадии, когда наблюдается экспоненциальный характер роста возмущений, их развитие должно быть согласовано с результатами ГАУ при дискретном вычислении якобиана.

В настоящей работе на основе такого сравнения проводилась верификация выполненной нами реализации дискретного подхода к вычислению якобиана.

Постановка задачи устойчивости стационарного обтекания цилиндра и ее вычислительные аспекты

Сравнение результатов двух методов анализа устойчивости проводилось на примере задачи ламинарного обтекания цилиндра совершенным газом, с использованием сеток, последовательно измельчающихся в обоих направлениях. Задача рассматривалась в сжимаемой постановке при числе Маха $M = 0,2$ и двух значениях числа Рейнольдса, $Re = 50$ и 60 , незначительно превышающих число Рейнольдса потери устойчивости, $Re \approx 47$ (см., например, статью [26]), когда число Рейнольдса построено по скорости набегающего потока U_0 и диаметру цилиндра D .

Размер расчетной области составлял $120D$. Такой размер был достаточным, чтобы устранить влияние граничных условий на базовое решение и результаты ГАУ. В этой области была построена серия расчетных сеток O -типа (пример такой сетки приведен на рис. 1) с равномерным распределением узлов по угловой координате и сгущением к стенке по радиальной координате (параметры построенных сеток приведены в табл. 1).

В настоящей работе для проведения расчетов использовался конечно-объемный CFD-код “Numerical Turbulence Simulation” (код NTS) [27]. В этом коде для нахождения стационарных решений определяющих уравнений применяется метод установления. Для аппроксимации невязких потоков при расчете сжимаемых течений используется гибридная схема:



Таблица 1

Параметры использованных расчетных сеток O-типа и их значения

Сетка	N_ϕ	N_r	$\Delta h_i/D$	$\Delta h_{i+1}/\Delta h_i$	$\Delta h_{\max}/D$
L1	80		$1,0 \cdot 10^{-2}$	1,098	2
L2	160		$5,0 \cdot 10^{-3}$	1,040	2
L3	240		$2,5 \cdot 10^{-3}$	1,028	2
L4	320		$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,023	2
L5	800		$1,0 \cdot 10^{-4}$	1,011	1

Обозначения: N_ϕ , N_r – количество узлов в окружном и радиальном направлениях, соответственно; Δh_i – шаг сетки, Δh_{\max} – его максимальное значение; D – диаметр цилиндра.

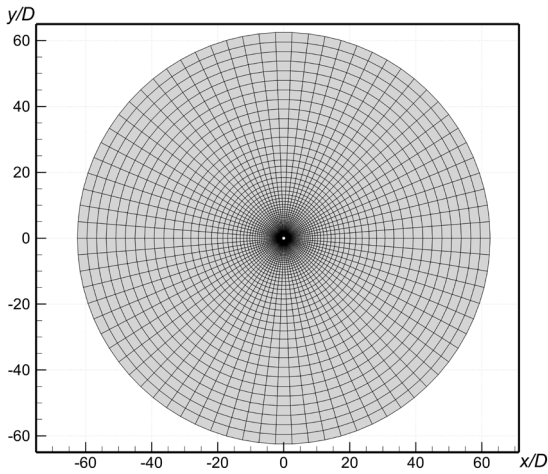


Рис. 1. Пример расчетной сетки O-типа (сетка L1)

$$\Delta_H = \alpha_U \Delta_{Roe} + (1 - \alpha_U) \Delta_{4C}, \tag{14}$$

где α_U – вес противопоточной аппроксимации; Δ_{Roe} , Δ_{4C} – конечно-разностные операторы противопоточной схемы Роу третьего порядка и центрально-разностной схемы четвертого порядка точности, соответственно.

Вязкие составляющие потоков аппроксимируются с помощью центрально-разностной схемы второго порядка.

При расчете развития малых возмущений методом решения нестационарных уравнений Навье – Стокса численное интегрирование по времени осуществлялось с помощью неявной схемы Эйлера второго порядка с шагом по времени $\Delta t = 0,3 \cdot D/U_0$, что обеспечивало значения числа Куранта меньше единицы практически во всей расчетной области и приблизительно 1 тыс. точек на период колебаний дорожки Кармана для всех сеток.

Показатели роста или затухания возмущений и их частота определялись путем обработки зависимостей поперечной скорости от времени, полученных в результате нестационарных расчетов в нескольких точках пространства. При этом выделяли линейный этап развития возмущений, на котором их амплитуда возрастает экспоненциально.

При решении спектральной задачи расчет дискретной формы якобиана осуществлялся обоими методами (дискретным и континуальным). В рамках континуального метода, реализованного ранее в коде NTS, для дискретизации якобиана J использовалась конечно-разностная схема (подробнее она описана в статье [5]), которая представляет собой взвесь противопоточной схемы третьего и центральной схемы четвертого порядков:

$$\Delta_H = \alpha_U \Delta_{3U} + (1 - \alpha_U) \Delta_{4C}, \tag{15}$$

где α_U – вес противопоточной аппроксимации; Δ_{3U} , Δ_{4C} – конечно-разностные операторы противопоточной схемы и центрально-разностной схемы, соответственно.

Чтобы использовать дискретный подход, реализованный нами в настоящей работе, мы применяли метод автоматического дифференцирования (с помощью библиотеки ADF95 [25]). Для численного решения задачи на собственные значения использовали метод Крылова – Шура, который реализован с помощью открытой библиотеки SPEPC/PETSc [28]. Указанный метод предназначен для решения задач на собственные значения с разреженными неэрмитовыми матрицами большого размера (именно к этому типу относится рассматриваемая матрица). Он является модификацией неявно перезапускаемой версии метода Арнольди, который принадлежит классу методов Рэлея – Ритца, основанных на проектировании на подпространство Крылова (см., например, монографию [29]). Метод Крылова – Шура позволяет получать запрашиваемое количество наибольших по модулю

собственных чисел и соответствующих им собственных векторов. Поэтому при его использовании исходная матрица предварительно преобразуется таким образом, чтобы наиболее важные с точки зрения устойчивости собственные числа, имеющие наибольшую действительную часть, становились наибольшими по модулю. Это преобразование представляет собой комбинацию сдвига и обращения матрицы (такой подход в англоязычной литературе называют “Shift-Invert Approach” [30]).

Верификация результатов ГАУ, полученных при дискретном подходе к вычислению якобиана

На рис. 2 представлены пространственные распределения возмущений продольной скорости U' при числе Рейнольдса $Re = 60$ на сетке $L4$, полученные по дискретному ГАУ и прямым численным решением нестационарных уравнений Навье – Стокса. Для последних локальные амплитуды возмущений получены в результате вычитания полей мгновенного и базового решения с нормировкой на максимальное значение $|U'_{max}|$.

В рамках дискретного ГАУ пространственное распределение возмущений определяется вещественной компонентой собственного вектора, соответствующего наиболее неустойчивому собственному числу. Для сравнения комплексные компоненты векторов E_U , соответствующие возмущениям продольной скорости, были приведены по фазе и амплитуде к значению в точке, где амплитуда возмущений $|U'_{max}|$ максимальна. Анализ данных на рис. 2 позволяет заключить, что на сетке $L4$ дискретный ГАУ не только правильно предсказывает форму возмущений, развивающихся ввиду неустойчивости, но и обеспечивает хорошее количественное согласие.

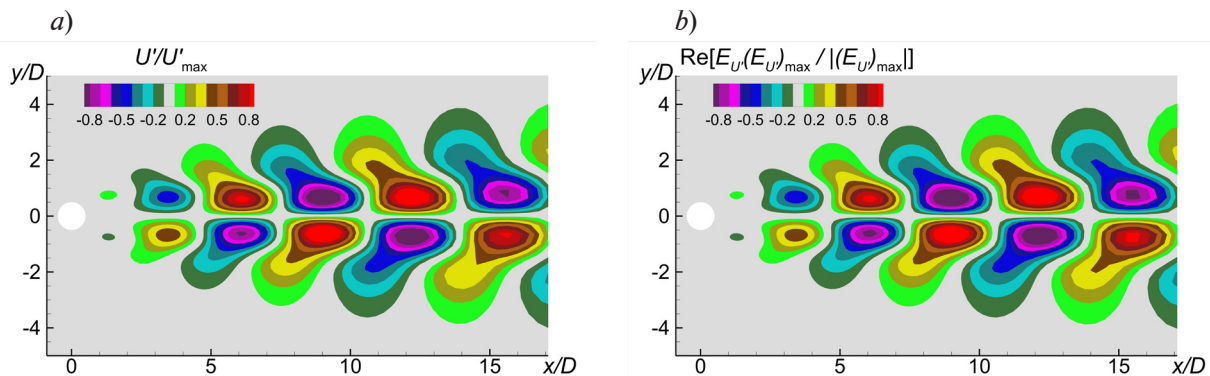


Рис. 2. Пространственные распределения возмущений продольной скорости, полученные на сетке $L4$ прямым численным решением нестационарных уравнений Навье – Стокса (a) и с помощью дискретного ГАУ (b). Число Рейнольдса $Re = 60$, число Маха $M = 0,2$

Таблица 2

Сравнение результатов расчета параметров наиболее неустойчивых возмущений, полученных двумя методами на серии сеток

Сетка	Расчетное значение параметра			
	Показатель роста ω_r		Частота ω_i	
	I	II	I	II
$L1$	0,0132		0,754	0,753
$L2$	0,0389		0,740	0,741
$L3$	0,0420	0,0421	0,738	
$L4$	0,0430	0,0431	0,737	
$L5$	0,0437		0,736	

Обозначения: I – прямое численное решение нестационарных уравнений Навье – Стокса; II – применен ГАУ, дискретный подход.

Примечание. Число Рейнольдса $Re = 60$, число Маха $M = 0,2$.

Показатель роста и частота развития наиболее неустойчивых возмущений при $Re = 60$ на серии сеток $L1 - L5$ приведены в табл. 2. Показатель роста и частота, полученные по дискретному подходу, совпадают с высокой точностью (на всех сетках для обтекания ошибка не превышает 0,4 %) с решением нестационарных уравнений Навье – Стокса, что свидетельствует о правильной реализации подхода.

Сравнение результатов двух методов глобального анализа устойчивости

Непосредственное сравнение дискретного и континуального подходов, реализованных в коде NTS, затруднено различиями как в способах вычисления якобиана, так и в численных схемах, используемых для вычисления невязки части потоков.

В дискретном ГАУ используется такая же вычислительная схема, как и при вычислении базового течения – гибридная схема с противопоточной добавкой P_{ou} . Эта поправка

существенно нелинейная, что не позволяет ее использовать в рамках континуального ГАУ, поэтому в нем используется упрощенная линейная противопоточная добавка. Избежать различия схем можно было бы через применение одинаковых центрально-разностных схем, однако на практике это невозможно из-за потери устойчивости при получении базового решения. Тем не менее, если снизить вес противопоточной добавки, то можно кардинально уменьшить различие используемых схем.

Указанная возможность проиллюстрирована рис. 3, где представлена зависимость от шага сетки модуля разности показателей роста $|\omega_r^d - \omega_r^c|$ в окрестности цилиндра, полученных по результатам дискретного и континуального ГАУ. С уменьшением веса противопоточной добавки эта разность снижается. Далее представлены результаты, полученные с использованием гибридных схем с весом противопоточной добавки $\alpha = 0,05$.

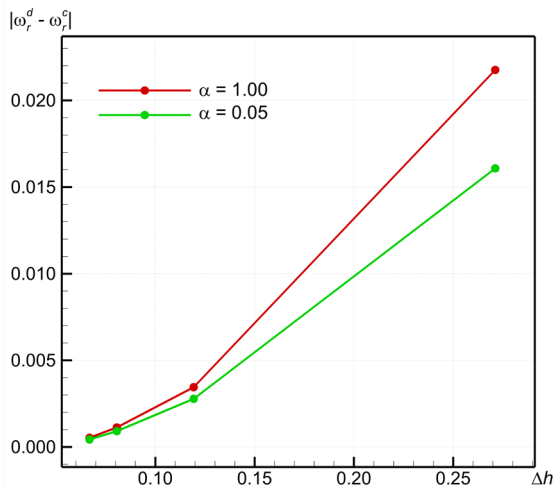


Рис. 3. Влияние шага сетки на разность показателей роста ω_r , рассчитанных по дискретному (d) и континуальному (c) методам ГАУ.

Использованы гибридные схемы с двумя значениями веса противопоточной добавки α

Таблица 3

Результаты расчета параметров неустойчивой моды возмущений, полученных двумя методами на сетке L5 при варьировании числа Рейнольдса, а также сравнение с литературными данными

Метод расчета	Расчетное значение параметра			
	ω_r		ω_i	
	Re = 50	Re = 60	Re = 50	Re = 60
ГАУ, подход дискретный	-0,01099	-0,04368	0,72965	0,73637
континуальный	-0,01093	-0,04372	0,72955	0,73633
[26], ГАУ, дискретный подход	-0,013	-0,047	0,745	0,754
[31], прямое численное решение уравнений Навье – Стокса	-0,012	-0,050	0,750	0,757

На самой мелкой сетке $L5$ показатель роста и частота, полученные с помощью континуального и дискретного подходов (табл. 3), практически совпадают. В этой же таблице приведено сравнение с результатами работ [26, 31], подтверждающее репрезентативность результатов ГАУ.

Для оценки погрешности вычисления показателя роста и частоты неустойчивой моды возмущений на более грубых сетках в качестве «референсного» значения $\omega^{ref} = (\omega_r^{ref}, \omega_i^{ref})$ использовалось среднее арифметическое собственных чисел, полученных с использованием дискретного и континуального подходов на сетке $L5$.

Зависимости погрешности результатов ГАУ

$$\Delta\omega = \frac{(\omega - \omega^{ref})D}{U_0}$$

от характерного шага сетки Δh , определяемого как средний шаг по угловой координате на расстоянии $4D$ от поверхности цилиндра, представлены на рис. 4 и позволяют сделать следующие выводы.

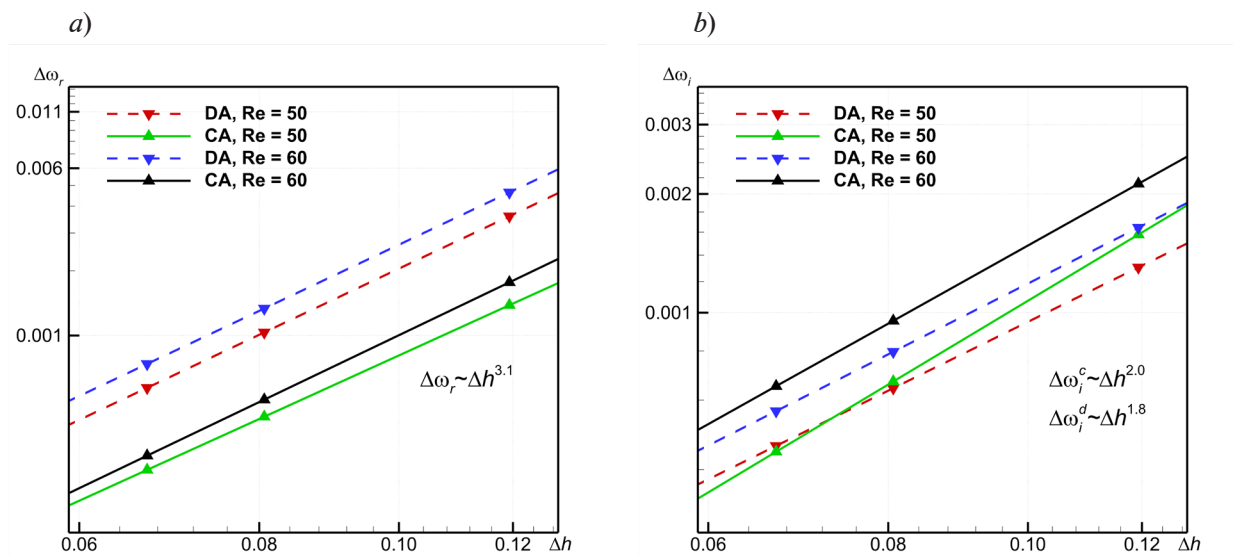


Рис. 4. Шаговые зависимости погрешностей вычисления показателя роста (a) и частоты (b). Получены дискретным (DA) и континуальным (CA) методами на сетках $L1 - L4$, при варьировании значения числа Рейнольдса (зависимости даны символами), и их аппроксимация экспоненциальными функциями (прямые в логарифмическом масштабе)

Погрешность расчета практически одинакова для обоих рассмотренных чисел Рейнольдса. Реальный порядок точности ГАУ, который определялся по степенным аппроксимациям зависимости ошибки от шага сетки, оказался примерно одинаковым для обоих методов: его значение составляет примерно 3,1 для скорости роста, а также 1,8 (дискретный ГАУ) и 2,0 (континуальный ГАУ) для частоты. Эти значения согласуются с формальным порядком используемых схем, в которых конвективные слагаемые аппроксимируются по третьему порядку, а вязкие – по второму. Кроме того, следует учитывать, что на неравномерных сетках (а именно такие сетки используются в настоящей работе) реальный порядок схем может снижаться. Анализ данных на рис. 4 также позволяет заключить, что ошибка в предсказании показателя роста оказалась меньше примерно в три раза при использовании континуального подхода, а ошибка в предсказании частоты возмущений – меньше при использовании дискретного подхода.

Заключение

На примере задачи о ламинарном обтекании цилиндра при числах Рейнольдса, близких к критическим, было проведено сравнение двух методов глобального анализа устойчивости (ГАУ), которые различаются способами вычисления якобиана уравнений Навье – Стокса: дискретного (линеаризация этих дискретизированных уравнений) и континуального (дискретизация этих линеаризованных уравнений).

Реализованный нами дискретный подход ГАУ был верифицирован путем сравнения с результатами прямого численного моделирования нестационарного ламинарного



обтекания цилиндра при числе Рейнольдса $Re = 60$. Результаты сравнения продемонстрировали, что показатель роста и частота колебаний наиболее неустойчивой моды совпали с высокой точностью на всех рассмотренных сетках.

При использовании континуального и дискретного методов к вычислению якобиана порядок точности ГАУ оказался одинаковым и соответствовал формальному порядку точности пространственной дискретизации по численным схемам, используемым для получения решения, устойчивость которого исследуется. При этом ошибка предсказания показателя роста возмущений меньше при использовании континуального подхода, а ошибка предсказания частоты колебаний возмущений меньше при использовании дискретного подхода.

Таким образом, можно утверждать, что континуальный и дискретный методы равнозначны по порядку точности и выбор конкретного подхода для проведения анализа устойчивости может определяться другими критериями (простота реализации, вычислительные затраты и др.).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 22-11-00041). Все расчеты проведены на высокопроизводительном кластере «Торнадо» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (<http://www.spbstu.ru>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.** Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 304 с.
2. **Schmid P. J., Henningson D. S.** Stability and transition in shear flows. Book Series “Applied mathematical Sciences”, Vol. 142. New York: Springer, 2001. 556 p.
3. **Theofilis V.** Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows // Progress in Aerospace Sciences. 2003. Vol. 39. No. 4. Pp. 249–315.
4. **Theofilis V.** Global linear instability // Annual Review of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 43. Pp. 319–352.
5. **Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D.** Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 224. No. 2. Pp. 924–940.
6. **Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D., Travin A.** Origin of transonic buffet on aerofoils // Journal of Fluid Mechanics. 2009. Vol. 628. 10 June. Pp. 357–369.
7. **Garbaruk A., Crouch J. D.** Quasi-three-dimensional analysis of global instabilities: Onset of vortex shedding behind a wavy cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 677. 25 June. Pp. 572–588.
8. **Crouch J. D., Garbaruk A., Strelets M.** Global instability in the onset of transonic-wing buffet // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 881. 25 December. Pp. 3–22.
9. **Garbaruk A., Strelets M., Crouch J. D.** Effects of extended laminar flow on wing buffet-onset characteristics // AIAA Journal. 2021. Vol. 59. No. 8. Pp. 2848–2854.
10. **De Pando M. F., Sipp D., Schmid P. J.** Efficient evaluation of the direct and adjoint linearized dynamics from compressible flow solvers // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231. No. 23. Pp. 7739–7755.
11. **Thormann R., Widhalm M.** Linear-frequency-domain predictions of dynamic-response data for viscous transonic flows // AIAA Journal. 2013. Vol. 51. No. 11. Pp. 2540–2557.
12. **Mettot C., Renac F., Sipp D.** Computation of eigenvalue sensitivity to base flow modifications in a discrete framework: Application to open-loop control // Journal of Computational Physics. 2014. Vol. 269. 15 July. Pp. 234–258.
13. **Xu S., Timme S., Badcock K. J.** Krylov subspace recycling for linearized aerodynamics analysis using DLR-TAU // Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD 2015). 28 June–2 July, 2015. St. Petersburg, Russia. In 3 volumes. Vol. 2. Pp. 1462–1479.
14. **Sartor F., Metot C., Bur R., Sipp D.** Unsteadiness in transonic shock-wave/boundary-layer interactions: experimental investigation and global stability analysis // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 781. 25 October. Pp. 550–577.

15. **Busquet D., Marquet O., Richez F., Juniper M., Sipp D.** Global stability analysis of turbulent flows around an airfoil near stall // Proceedings of the Eurogen 2017 Conference. September 13–15, 2017. Madrid, Spain. Pp. 1–7.
16. **Timme S.** Global instability of wing shock-buffet onset // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 885. 25 February. P. A37.
17. **Plante F., Dandois J., Beneddine S., Laurendeau E., Sipp D.** Link between subsonic stall and transonic buffet on swept and unswept wings: From global stability analysis to nonlinear dynamics // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 908. 10 February. P. A16.
18. **He W., Timme S.** Triglobal infinite-wing shock-buffet study // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 925. 25 October. P. A27.
19. **Giles M. B., Pierce N. A.** An introduction to the adjoint approach to design // Flow, Turbulence and Combustion. 2000. Vol. 65. No. 3–4. Pp. 393–415.
20. **Peter J. E. V., Dwight R. P.** Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches // Computers & Fluids. 2010. Vol. 39. No. 3. Pp. 373–391.
21. **Dwight R. P.** Efficiency improvements of RANS-based analysis and optimization using implicit and adjoint methods on unstructured grids // Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt – Forschungsberichte. 2006. Nr. 11. S. 1–162.
22. **Wengert R. E.** A simple automatic derivative evaluation program // Communications of the ACM. 1964. Vol. 7. No. 8. Pp. 463–464.
23. **Lyu Z., Kenway G. K. W.** Automatic differentiation adjoint of the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations with a turbulence model // Proceedings of the 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. June 24–27, 2013. San Diego (USA), Pp. 1–24.
24. **Hascoët L., Pascual V.** TAPENADE 2.1 user’s guide. INRIA Technical Report No. 0300. September, 2004. 78 p. <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0300.html>
25. **Straka C. W.** ADF95: Tool for automatic differentiation of a FORTRAN code designed for large numbers of independent variables // Computer Physics Communications. 2005. Vol. 168. No. 2. Pp. 123–139.
26. **Gianetti F., Luchini P.** Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake // Journal of Fluid Mechanics. 2007. Vol. 581. 25 June. Pp. 167–197.
27. **Shur M. L., Strelets M. K., Travin A. K.** High-order implicit multi-block Navier – Stokes code: Ten-year experience of application to RANS / DES / LES / DNS of turbulence // Proceedings of the 7th Symposium on Overset Grids & Solution Technology. October 5–7, 2004. Huntington Beach, CA, USA. 2004. Pp. 1–52.
28. **Hernandez V., Roman J. E., Vidal V.** SLEPC: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems // ACM Transactions of Mathematical Software. 2005. Vol. 31. No. 3. Pp. 351–362.
29. **Голуб Дж., Лоун Ван Ч.** Матричные вычисления. Пер. с англ. Под ред. Воеводина В. В. М.: Мир, 1999. 548 с.
30. **Mack C. J., Schmid P. J.** A preconditioned Krylov technique for global hydrodynamic stability analysis of large-scale compressible flows // Journal of Computational Physics. 2010. Vol. 229. No. 3. Pp. 541–560.
31. **Canuto D., Taira K.** Two-dimensional compressible viscous flow around a circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 785. 25 December. Pp. 349–371.

REFERENCES

1. **Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.,** Physics of transitional shear flows: Instability and laminar-turbulent transition in incompressible near-wall shear layers, Book Ser. “Fluid Mechanics and its Applications”, Springer, 2012.
2. **Schmid P. J., Henningson D. S.,** Stability and transition in shear flows, Book Series “Applied Mathematical Sciences”, Vol. 142. Springer, New York, 2001.
3. **Theofilis V.,** Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows, Prog. Aerosp. Sci. 39 (4) (2003) 249–315.
4. **Theofilis V.,** Global linear instability, Annu. Rev. Fluid Mech. 43 (2011) 319–352.
5. **Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D.,** Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability, J. Comput. Phys. 224 (2) (2007) 924–940.

6. **Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D., Travin A.**, Origin of transonic buffet on aerofoils, *J. Fluid Mech.* 628 (10 June) (2009) 357–369.
7. **Garbaruk A., Crouch J. D.**, Quasi-three-dimensional analysis of global instabilities: Onset of vortex shedding behind a wavy cylinder, *J. Fluid Mech.* 677 (25 June) (2011) 572–588.
8. **Crouch J. D., Garbaruk A., Strelets M.**, Global instability in the onset of transonic-wing buffet, *J. Fluid Mech.* 881 (25 Dec.) (2019) 3–22.
9. **Garbaruk A., Strelets M., Crouch J. D.**, Effects of extended laminar flow on wing buffet-onset characteristics, *AIAA J.* 59 (8) (2021) 2848–2854.
10. **De Pando M. F., Sipp D., Schmid P. J.**, Efficient evaluation of the direct and adjoint linearized dynamics from compressible flow solvers, *J. Comput. Phys.* 231 (23) (2012) 7739–7755.
11. **Thormann R., Widhalm M.**, Linear-frequency-domain predictions of dynamic-response data for viscous transonic flows, *AIAA J.* 51 (11) (2013) 2540–2557.
12. **Mettot C., Renac F., Sipp D.**, Computation of eigenvalue sensitivity to base flow modifications in a discrete framework: Application to open-loop control, *J. Comput. Phys.* 269 (15 July) (2014) 234–258.
13. **Xu S., Timme S., Badcock K. J.**, Krylov subspace recycling for linearized aerodynamics analysis using DLR-TAU, *Proc. Int. Forum Aeroelasticity Struct. Dyn. (IFASD 2015)*. 28 June–2 July, 2015. St. Petersburg, Russia. In 3 Vols. 2 (2016) 1462–1479.
14. **Sartor F., Metot C., Bur R., Sipp D.**, Unsteadiness in transonic shock-wave/boundary-layer interactions: experimental investigation and global stability analysis, *J. Fluid Mech.* 781 (25 Oct.) (2015) 550–577.
15. **Busquet D., Marquet O., Richez F., et al.**, Global stability analysis of turbulent flows around an airfoil near stall, *Proc. Eurogen 2017 Conf.*, Sept. 13–15, 2017, Madrid, Spain. Pp. 1–7.
16. **Timme S.**, Global instability of wing shock-buffet onset, *J. Fluid Mech.* 885 (25 Febr.) (2020) P. A37.
17. **Plante F., Dandois J., Beneddine S., et al.**, Link between subsonic stall and transonic buffet on swept and unswept wings: From global stability analysis to nonlinear dynamics, *J. Fluid Mech.* 908 (10 Febr.) (2021) A16.
18. **He W., Timme S.**, Triglobal infinite-wing shock-buffet study, *J. Fluid Mech.* 925 (25 Oct.) (2021) A27.
19. **Giles M. B., Pierce N. A.**, An introduction to the adjoint approach to design, *Flow, Turbul. Combust.* 65 (3–4) (2000) 393–415.
20. **Peter J. E. V., Dwight R. P.**, Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches, *Comput. Fluids.* 39 (3) (2010) 373–391.
21. **Dwight R. P.**, Efficiency improvements of RANS-based analysis and optimization using implicit and adjoint methods on unstructured grids, *Dtsch. Zent. für Luft-und Raumfahrt–Forschungsberichte.* (11) (2006) 1–162.
22. **Wengert R. E.**, A simple automatic derivative evaluation program, *Commun. ACM.* 7 (8) (1964) 463–464.
23. **Lyu Z., Kenway G. K. W.**, Automatic differentiation adjoint of the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations with a turbulence model, *Proc. 21st AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf.*, June 24–27, 2013. San Diego (USA) (2013) 1–24.
24. **Hascoët L., Pascual V.**, TAPENADE 2.1 user’s guide, INRIA Tech. Rep. No. 0300. Sept. 2004. 78 p. <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0300.html>.
25. **Straka C. W.**, ADF95: Tool for automatic differentiation of a FORTRAN code designed for large numbers of independent variables, *Comput. Phys. Commun.* 168 (2) (2005) 123–139.
26. **Gianetti F., Luchini P.**, Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake, *J. Fluid Mech.* 581 (25 June) (2007) 167–197.
27. **Shur M. L., Strelets M. K., Travin A. K.**, High-order implicit multi-block Navier – Stokes code: Ten-year experience of application to RANS / DES / LES / DNS of turbulence, *Proc. 7th Symp. Overset Grids Solut. Technol.* Oct. 5–7, 2004. Huntington Beach, CA, USA (2004) 1–52.
28. **Hernandez V., Roman J. E., Vidal V.**, SLEPC: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems, *ACM Trans. Math. Softw.* 31 (3) (2005) 351–362.
29. **Golub G. H., van Loan C. F.**, *Matrix computations*, 3-rd Ed., John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 1996.

30. Mack C. J., Schmid P. J., A preconditioned Krylov technique for global hydrodynamic stability analysis of large-scale compressible flows, *J. Comput. Phys.* 229 (3) (2010) 541–560.

31. Canuto D., Taira K., Two-dimensional compressible viscous flow around a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* 785 (25 Dec.) (2015) 349–371.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОЛУБКОВ Валентин Денисович — инженер лаборатории «Вычислительная гидроакустика и турбулентность» Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

golubkovvd@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9473-7430

ГАРБАРУК Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории «Вычислительная гидроакустика и турбулентность» Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

agarbaruk@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2775-9864

THE AUTHORS

GOLUBKOV Valentin D.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

golubkovvd@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9473-7430

GARBARUK Andrey V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

agarbaruk@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2775-9864

Статья поступила в редакцию 20.12.2022. Одобрена после рецензирования 26.09.2023. Принята 26.09.2023.

Received 20.12.2022. Approved after reviewing 26.09.2023. Accepted 26.09.2023.