Научная статья
УДК 532.5.013.4
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18103

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ И ЛОКАЛЬНЫХ НЕРЕГУЛЯРНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. В. Гарбарук, В. Д. Голубков ✉, М. Х. Стрелец

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

✉ golubkovvd@gmail.com

Аннотация. В статье представлены результаты расчетного исследования влияния продольного градиента давления (ГД) на положение ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) в пограничном слое на гладкой пластине и на пластине с локальной нерегулярностью поверхности. Для гладкой пластины расчеты выполнены с использованием как разработанной авторами методики, основанной на глобальном анализе устойчивости (ГАУ) ламинарного пограничного слоя, так и других известных методов, учитывающих ЛТП. Полученные результаты существенно различаются для разных методов и отличны от более надежных результатов ГАУ, что ставит под сомнение точность этих методов. Проведенные исследования доказали возможность выполнять суммарную оценку сдвига положения ЛТП путем сложения сдвига для гладкой пластины, имеющего место ввиду изменения величины ГД, и сдвига для пластины с нерегулярностью на ее поверхности в отсутствие ГД.

Ключевые слова: волны Толлмина – Шлихтинга, глобальный анализ устойчивости, ламинарно-турбулентный переход, продольный градиент давления

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00041).

Для цитирования: Гарбарук А. В., Голубков В. Д., Стрелец М. Х. Влияние градиента давления и локальных нерегулярностей поверхности на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 1. С. 30–41. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.18103

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18103

THE INFLUENCE OF PRESSURE GRADIENT AND LOCAL SURFACE IRREGULARITIES ON THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN THE BOUNDARY LAYER

A. V. Garbaruk, V. D. Golubkov ✉, M. Kh. Strelets

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ golubkovvd@gmail.com

Abstract. The paper presents the results of a computational study of the effect of the longitudinal pressure gradient (PG) on the position of the laminar-turbulent transition (LTT) in the boundary layer on a smooth plate and on a plate with local surface irregularity. For a smooth plate, the calculations were performed using both the method developed by the authors, based on the Global Stability Analysis (GSA) of the laminar boundary layer, and other known methods that take into account the LTT. The results obtained varied significantly for different methods and differed from the more reliable GSA results, which questions the accuracy of these

© Гарбарук А. В., Голубков В. Д., Стрелец М. Х., 2025. Издатель: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

methods. The studies have proved that it is possible to perform a total evaluation of the LTT position shift by adding the shift for a smooth plate due to changes in the PG value and the shift for a plate with irregularity on its surface in the absence of PG.

Keywords: Tollmien – Schlichting waves, global stability analysis, laminar-turbulent transition, longitudinal pressure gradient

Funding. The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 22-11-00041).

For citation: Garbaruk A. V., Golubkov V. D., Strelets M. Kh., The influence of pressure gradient and local surface irregularities on the laminar-turbulent transition in the boundary layer, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 30–41. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18103

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Введение

Создание надежных расчетных методов, позволяющих находить положение ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП), является важной задачей для многих отраслей промышленности (авиация, турбо- и машиностроение и др.), поскольку аэродинамические силы, действующие на обтекаемое потоком тело, в значительной степени зависят от протяженности ламинарного участка пограничного слоя, формирующегося на его поверхности. Так, например, в задачах внешней аэродинамики увеличение протяженности ламинарного участка пограничного слоя приводит к снижению силы сопротивления и, следовательно, к уменьшению расхода топлива [1, 2]. ЛТП представляет собой сложный физический процесс, связанный с потерей устойчивости ламинарного течения при высоких (выше критического значения) числах Рейнольдса. При низких уровнях турбулентности внешнего потока, типичных для внешних задач аэродинамики, в пограничном слое развиваются волны Толлмина – Шлихтинга (ТШ), конвективная неустойчивость которых приводит к возникновению развитой турбулентности [3], т. е. реализуется так называемый естественный сценарий ЛТП. На эволюцию волн ТШ оказывает влияние целый ряд факторов, среди которых важную роль играют различные технологические неоднородности обтекаемой поверхности (шероховатость, небольшие уступы и выемки) и наличие продольного градиента давления (см., например, статьи [4 – 6]). Учет этих факторов в рамках параллельного и квазипараллельного приближений классической линейной теории устойчивости [7] не обеспечивает приемлемой для практики точности расчета положения ЛТП, в связи с чем в последние годы широкое применение получили методы расчета, базирующиеся на так называемом глобальном анализе устойчивости (ГАУ) [8], которые активно развиваются и используются для решения широкого круга задач аэродинамики (см., например, работы [9 – 11]).

Методические проблемы, связанные с применением ГАУ для расчета процесса эволюции волн ТШ в пограничном слое, на плоской гладкой поверхности, при нулевом градиенте давления, в настоящее время в основном решены (см. работы [12 – 14]), а примеры успешного применения ГАУ для исследования развития возмущений в присутствии двумерных и трехмерных неоднородностей поверхности содержатся в работах [15 – 17].

В работе [18] предложена методика постпроцессинга результатов ГАУ, позволяющая определять положение ЛТП на основе рассчитанного продольного распределения показателя темпа роста волн ТШ в пограничном слое на гладкой пластине, а в работе [19] эта методика обобщена и применена для расчета положения ЛТП в пограничных слоях на пластине с локальными геометрическими нерегулярностями.

Настоящая работа, продолжающая публикации [18, 19], посвящена применению этой методики для расчета положения ЛТП при одновременном влиянии на него нерегулярностей поверхности обтекаемой стенки и градиента давления.

© Garbaruk A. V., Golubkov V. D., Strelets M. Kh., 2025. Published by Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

Методика определения положения ЛТП на основе ГАУ

Данная трехэтапная методика подробно изложена в статьях [18 – 20], в связи с чем ниже представлено лишь ее краткое описание.

На первом этапе находится стационарное решение двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса для сжимаемого совершенного газа:

$$\partial \mathbf{q} / \partial t = \mathbf{RHS}(\mathbf{q}), \tag{1}$$

где $\mathbf{q}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{RHS}(\mathbf{q})$ – правая часть уравнений Навье – Стокса.

Для получения этого решения $\bar{\mathbf{q}}(x, y)$, устойчивость которого исследуется в дальнейшем с помощью ГАУ (его принято называть базовым решением), используется конечно-объемный CFD-код NTS [21]. При этом пространственная аппроксимация невязких составляющих векторов потоков в правой части выражения (1) осуществляется с помощью противопоточной схемы Роу третьего порядка точности, а их вязкие составляющие аппроксимируются с помощью центрально-разностной схемы второго порядка. Для интегрирования по времени используется неявная схема первого порядка, причем для ускорения сходимости к стационарному решению применяется локальный (зависящий от локальных шагов сетки) шаг по времени, определяемый задаваемым числом Куранта, в сочетании с технологией выборочного подавления возмущений [22].

На втором этапе выполняется ГАУ базового решения, найденного на первом этапе, что предполагает решение задачи на собственные значения для якобиана правой части уравнений Навье – Стокса (1) $\mathbf{J} = \partial(\mathbf{RHS}) / \partial \mathbf{q}\,|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}$:

$$\mathbf{J}\hat{\mathbf{q}} = \omega \hat{\mathbf{q}}. \tag{2}$$

Решение этой задачи, т. е. набор комплексных собственных чисел и векторов $(\omega, \hat{\mathbf{q}})$, описывает волны ТШ, распространяющиеся вдоль пластины. Каждая пара $(\omega, \hat{\mathbf{q}})$ соответствует одной волне (моде) ТШ. При этом вещественная часть собственного числа ω_r представляет собой скорость затухания или роста амплитуды этой волны во времени, его мнимая часть ω_i равна частоте этой моды, а вещественная часть собственного вектора $\hat{\mathbf{q}}(x, y)$ представляет собой пространственное распределение амплитуды волны.

Задача (2) решается численно для дискретного аналога якобиана, способ вычисления которого приведен в нашей статье [23]. При этом используется метод Крылова – Шура, который реализован в открытой библиотеке SPEPc/PETSc [24].

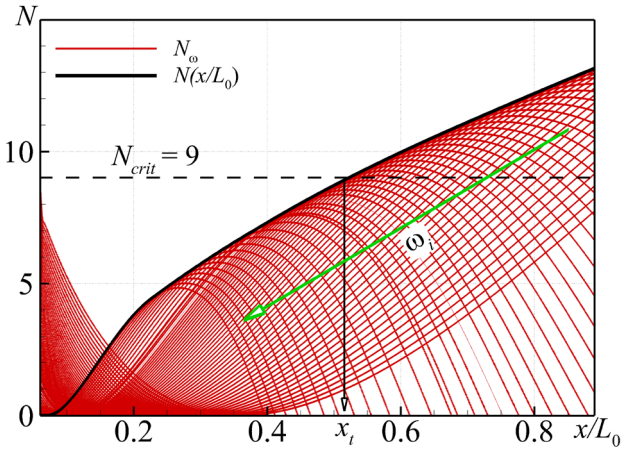

Рис. 1. Построение огибающей показателей темпа роста волн Толлмина – Шлихтинга $N(x)$ в пограничном слое на плоской пластине и определение положения перехода x_t при $N_{crit} = 9$. Зеленая стрелка указывает направление роста частоты

Наконец, на третьем, завершающем этапе осуществляется постпроцессинг результатов ГАУ (пар собственных чисел и векторов), позволяющий определить положение ЛТП. Этот постпроцессинг, подробно описанный в статье [19], предполагает вычисление показателей темпа роста отдельных волн ТШ $N_\omega(x)$ и построение их огибающей $N(x)$. После этого положение ЛТП определяется как координата x_t, при которой $N(x_t)$ достигает критического значения N_{crit}.

В настоящей работе предполагается, что это значение зависит только от уровня турбулентности набегающего потока и определяется по формуле Мака [25]:

$$N_{crit} = -8{,}43 - 2{,}4 \cdot \ln(Tu).$$

На рис. 1 представлен пример определения вышеописанным образом

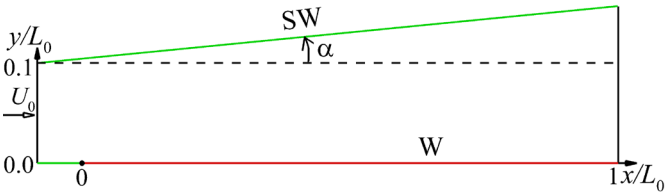

Рис. 2. Схематическое изображение расчетной области. Задача: вычислить базовое решение для пограничного слоя на плоской пластине (длиной L_0) с градиентом давления;
W, SW (slip wall) – стенка и стенка с проскальзыванием, соответственно; α – угол наклона верхней границы расчетной области; U_0 – входная скорость сжимаемого совершенного газа

положения ЛТП x_t в пограничном слое на гладкой плоской пластине при значении $N_{crit} = 9$, соответствующем уровню турбулентности набегающего потока $Tu = 0{,}07\%$.

Постановка рассматриваемых задач

Рассмотрен пограничный слой на плоской поверхности при наличии продольного градиента давления, создаваемого путем наклона верхней границы расчетной области (рис. 2), на которой задано граничное условие свободного проскальзывания.

Расчетная область для первого этапа расчета (получение базового решения) включает собственно пластину длиной L_0 и участок «скользкой» стенки перед ней ($-0{,}1 \le x/L_0 < 0{,}0$), который необходим для правильного описания формирования ламинарного пограничного слоя на начальном участке пластины [19].

Характерные числа Рейнольдса (Re_0) и Маха (M), построенные по входной скорости U_0 и длине пластины L_0, составляют

$$\mathrm{Re}_0 = U_0 L_0/\nu = 6\cdot 10^6;\ \mathrm{M} = 0{,}05,$$

где ν – динамическая вязкость газа.

Высота входного сечения канала фиксирована ($y/L_0 = 0{,}1$), а отношение высот его выходного и входного сечений изменяется от 0,975 до 1,050 с шагом 0,025, что соответствует изменению угла наклона верхней границы расчетной области α примерно от –0,13 до +0,26° и, как показали расчеты, обеспечивает практически постоянное значение безразмерного градиента давления σ:

$$\sigma = \frac{\nu}{\rho U_0^3}\frac{dp}{dx},$$

где ρ – плотность газа; dp/dx – размерный градиент давления.

Величина σ изменяется в диапазоне от $-4{,}8\cdot 10^{-9}$ до $6{,}1\cdot 10^{-9}$. Конкретные расчеты проведены при четырех значениях σ, равных

$$-4{,}8\cdot 10^{-9};\ 0{,}0;\ 2{,}8\cdot 10^{-9};\ 6{,}1\cdot 10^{-9},$$

т. е. при благоприятном (отрицательном), нулевом и двух неблагоприятных (положительных) градиентах давления.

Наряду с гладкой нижней пластиной были проведены расчеты при наличии на ней обратного уступа, расположенного при значении $x/L_0 = 0{,}25$ и имеющего варьируемую высоту

$$h/\delta_0^* = 0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75,$$

где $\delta_0^* = 3{,}5\cdot 10^{-4} L_0$ – локальная величина вытеснения пограничного слоя в пограничном слое без градиента давления при $x/L_0 = 0{,}25$.

Граничные условия для расчета базового решения задавались следующим образом.

На входной границе задавались однородные профили скорости и температуры, а остальные переменные экстраполировались на нее изнутри расчетной области.

На верхней (наклонной) границе и на нижней при $-0{,}1 \le x/L_0 < 0{,}0$ задавалось условие свободного проскальзывания, а на остальной части нижней границы ($x/L_0 \ge 0$) использовались условия прилипания и непроницаемости для скорости, а также адиабатичности для температуры.

Наконец, на выходной границе задавалось постоянное давление, а остальные переменные экстраполировались на нее изнутри расчетной области.

При наличии обратного уступа размеры расчетной области и граничные условия оставались неизменными, за исключением того, что нижняя граница при $x/L_0 \geq 0{,}25$ сдвигалась вниз на величину h, образуя уступ.

Шаги расчетных сеток задавались приблизительно равными шагам сеток, использовавшихся в работе [19], где было показано, что они обеспечивают получение сеточно-независимого базового решения. В результате размеры сетки изменялись в диапазоне от 2,4 млн. узлов (для гладкой пластины) до 3,7 млн. (для пластины с уступом).

Расчетная область для проведения ГАУ составляет часть расчетной области, используемой для получения базового решения. Так, ее входная граница смещается вниз по потоку до $x/L_0 = 0{,}05$, выходная граница располагается при $x/L_0 = 0{,}90$, а верхняя – при $y/L_0 = 0{,}06$. Кроме того, в качестве граничных условий для возмущений использовались однородные условия Дирихле на всех границах. Обоснование такого выбора размера расчетной области и граничных условий для ГАУ приведено в работе [19].

Сравнение результатов ГАУ с результатами других методов расчета ЛТП при наличии продольного градиента давления

В данном разделе представлены результаты сравнения положений ЛТП в пограничном слое на гладкой плоской поверхности при различных значениях продольных градиентов давления, рассчитанных с помощью ГАУ, с результатами применения других методов (локально-параллельное приближение классической линейной теории устойчивости [7] и метод Дрела [26], базирующийся на корреляциях, построенных с использованием решений уравнения Фолкнера – Скэн). Кроме того, проведено сравнение результатов ГАУ с аналогичными результатами двух наиболее популярных полуэмпирических моделей турбулентности для уравнений Рейнольдса, учитывающих ЛТП, а именно – дифференциальной модели SST γ-Re_θ [27] и алгебраической модели SST alg-γ [28]. При этом граничные условия на входной границе расчетной области для уравнений переноса турбулентных характеристик в этих моделях задавались исходя из соотношения турбулентной и молекулярной вязкостей $\nu_t/\nu = 1$ и уровня турбулентности $Tu = 0{,}07$ %, который, как уже было сказано, соответствует критическому значению N-фактора $N_{crit} = 9$.

Результаты сравнения представлены на рис. 3 и 4.

На рис. 3 сравниваются, в частности, зависимости показателя темпа роста волн ТШ от числа Рейнольдса, построенного по локальной толщине потери импульса Re_θ, которые рассчитаны с использованием трех из рассматриваемых методов, базирующихся на анализе устойчивости. Видно, что все три метода правильно отражают хорошо известную тенденцию к стабилизации пограничного слоя (к падению показателя темпа роста N) с уменьшением градиента давления. Однако метод Дрела предсказывает заметно более медленный рост величины $N(\mathrm{Re}_\theta)$ с уменьшением градиента давления, чем ГАУ и локально-параллельное приближение, что, вероятно, связано с использованием в методе Дрела корреляций, построенных на основе решения уравнения Фолкнера – Скэн.

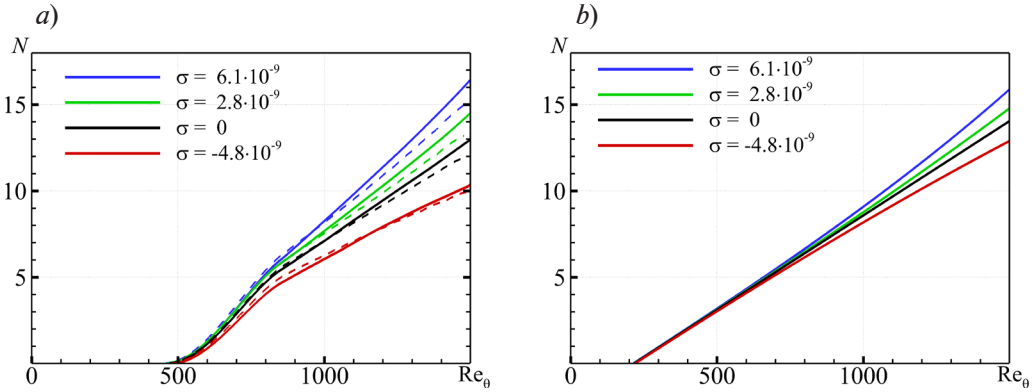

Рис. 3. Расчетное влияние градиента давления на продольное распределение показателей темпа роста волн ТШ $N(\mathrm{Re}_\theta)$ на плоской пластине: *a* – использованы ГАУ и локально-параллельное приближение (сплошные и штриховые кривые, соответственно); *b* – расчеты методом Дрела

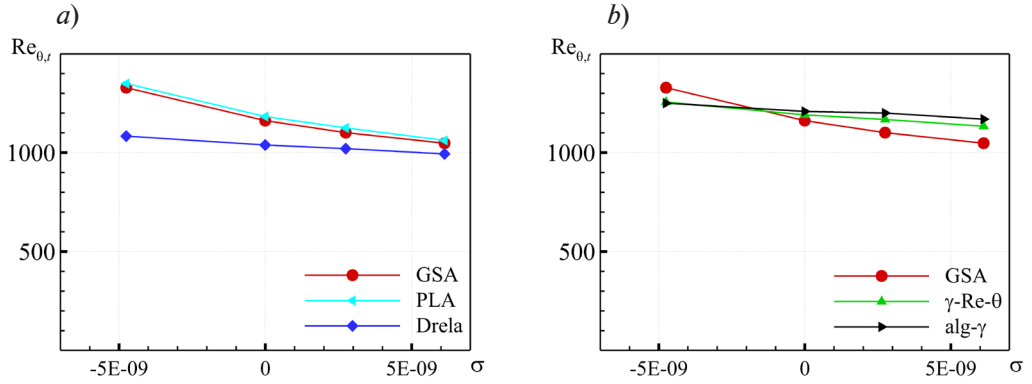

Рис. 4. Сравнение зависимостей положения ЛТП $Re_{\theta,t}$ от безразмерного градиента давления σ (получены по результатам ГАУ(GSA)) с аналогичными, полученными с использованием результатов локально-параллельного приближения (PLA) и метода Дрела (*a*), а также моделей ЛТП для уравнений Рейнольдса (*b*)

На рис. 4 представлены зависимости числа Рейнольдса ЛТП $Re_{\theta,t}$ от безразмерного градиента давления, которые определяются по соответствующим кривым $N(Re_\theta)$, полученным с использованием различных методов при критическом значении N-фактора, равном 9. Рис. 4,*a*, на котором сравниваются результаты ГАУ, локально-параллельного подхода и метода Дрела, полностью отражает тенденции, которые обсуждались выше при анализе рис. 3: результаты первых двух методов близки между собой, в то время как метод Дрела предсказывает более ранний ЛТП при всех рассмотренных градиентах давления и более слабую к ним чувствительность. Что касается моделей ЛТП для уравнений Рейнольдса (SST γ-Reθ и SST alg-γ), то они предсказывают близкие между собой значения положения ЛТП $Re_{\theta,t}$ при всех рассмотренных градиентах давления (см. рис. 4,*b*), причем в пограничном слое со слабым градиентом давления (значение σ близко к нулевому) эти значения практически совпадают с результатами ГАУ, а при отклонении σ от нуля значительно от них отличаются. Иными словами, ГАУ предсказывает гораздо более сильное влияние градиента давления на положение ЛТП, чем модели ЛТП для уравнений Рейнольдса. Отметим также, что в этом отношении результаты последних близки к результатам метода Дрела.

Анализ совместного влияния градиента давления и нерегулярности поверхности в форме обратного уступа на положение ЛТП

Совместное влияние указанных факторов на продольное распределение показателя темпа роста волн ТШ иллюстрирует рис. 5. Видно, что при любой высоте уступа этот показатель монотонно растет с увеличением градиента давления и, кроме того, резко возрастает в окрестности уступа, а далее, вниз по потоку, зависимость $N(Re_\theta)$ вновь становится близкой к линейной, как и в отсутствие уступа.

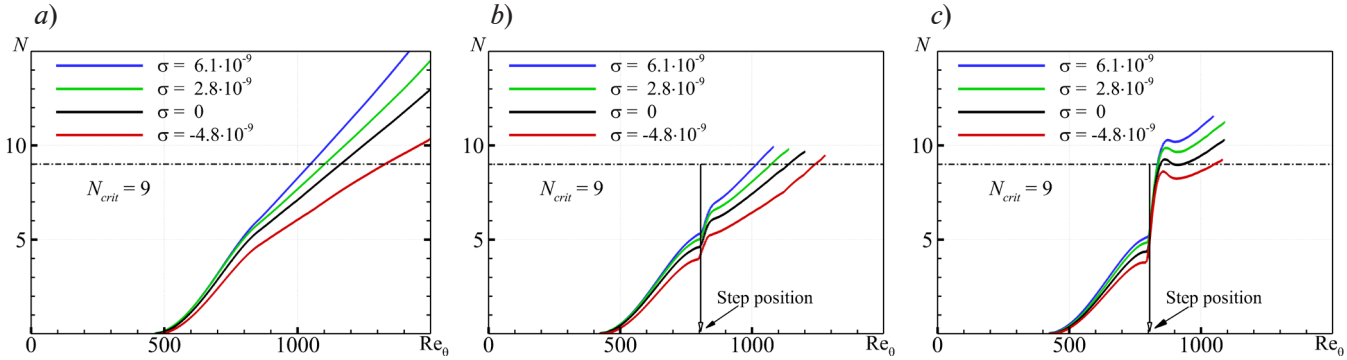

Рис. 5. Зависимости показателя темпа роста волн ТШ от локального числа Рейнольдса Re_θ при разных градиентах давления для пограничного слоя на плоской пластине без уступа (*a*) и с уступами высотой $h/\delta_0^* = 0{,}25$ (*b*) и 0,75 (*c*)

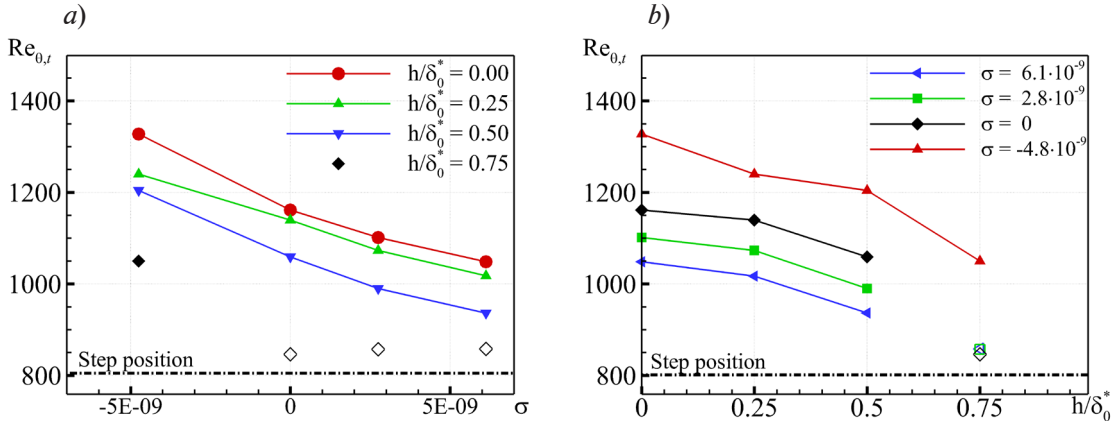

Рис. 6. Влияние на положение ЛТП градиента давления при различных высотах уступа (*a*) и высоты уступа при различных градиентах давления (*b*)

На рис. 6 приведены зависимости числа $\mathrm{Re}_{\theta,t}$, соответствующего положению ЛТП, от величины градиента давления σ при фиксированных значениях h/δ_0^* и от высоты уступа h/δ_0^* при фиксированных значениях σ. Эти результаты получены по данным, представленным на рис. 5 при значении критического показателя темпа роста, равном 9. Анализ зависимостей на рис. 6 позволяет заключить, что на поверхности с уступами могут реализовываться два сценария ЛТП: естественный (связанный с развитием неустойчивости ТШ) и байпасный [4], который происходит в непосредственной близости от уступа (незатушеванные символы на рис. 6).

Второй сценарий наблюдается для уступа высотой $h/\delta_0^* = 0{,}75$ при неотрицательных градиентах давления. При этом для всех случаев естественного ЛТП (затушеванные символы на рис. 6) кривые $\mathrm{Re}_{\theta,t}(\sigma)$ при различных фиксированных высотах уступов (см. рис. 6,*a*) и $\mathrm{Re}_{\theta,t}(h/\delta_0^*)$ при фиксированных значениях градиента давления (см. рис. 6,*b*) качественно аналогичны друг другу. Это позволяет предположить, что влияние градиента давления и высоты уступа на положение естественного ЛТП оказывается независимым (аддитивным), т. е. его можно приближенно описать следующим соотношением:

$$\Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma, h/\delta_0^*\right) = \Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma, 0\right) + \Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(0, h/\delta_0^*\right), \tag{3}$$

где $\Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma, h/\delta_0^*\right) = \mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma,\ h/\delta_0^*\right) - \mathrm{Re}_{\theta,t}\left(0,0\right)$ – это полное изменение $\mathrm{Re}_{\theta,t}$ ЛТП ввиду влияния как градиента давления σ, так и высоты уступа h/δ_0^*, а $\Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma,0\right)$ и $\Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(0, h/\delta_0^*\right)$ – его изменения только под влиянием градиента давления при нулевой высоте уступа и только высоты уступа при нулевом градиенте давления, соответственно.

В таблице приведены относительные погрешности расчетов по соотношению (3), которые найдены по формуле

$$\Delta, \% = \left[\Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma, h/\delta_0^*\right) - \Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(\sigma,0\right) - \Delta\mathrm{Re}_{\theta,t}\left(0, h/\delta_0^*\right)\right] \Big/ \mathrm{Re}_{\theta,t}\left(0,0\right) \cdot 100\%. \tag{4}$$

Таблица

Зависимость относительной погрешности расчетов по формуле (3) от безразмерных градиента давления σ и высоты уступа h/δ_0^*

σ, 10^{-9}	Относительная погрешность Δ, %		
	$h/\delta_0^* = 0{,}25$	$h/\delta_0^* = 0{,}50$	$h/\delta_0^* = 0{,}75$
−4,8	−5,6	−1,8	3,3
2,8	−0,5	−0,8	Байпасный ЛТП
6,1	−0,8	−0,8	

Примечание. Значения Δ найдены по формуле (4).

Из данных таблицы следует, что для положительных (неблагоприятных) градиентов давления погрешность составляет менее 1%, для отрицательного градиента – 3,3%, что в целом подтверждает предположение об аддитивном воздействии градиента давления и высоты уступа на положение естественного ЛТП в рассмотренном диапазоне параметров.

Заключение

В работе представлены результаты расчетных исследований, выполненных с использованием методики глобального анализа устойчивости (ГАУ) и направленных на оценку влияния продольного градиента давления и наличия локальной нерегулярности в форме обратного уступа на положение естественного (возникающего вследствие неустойчивости Толлмина – Шлихтинга) ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской поверхности. Указанная методика уже была разработана авторами данной работы ранее, и представленное исследование есть дальнейший шаг на пути ее развития.

Проведено сравнение результатов, рассчитанных для пограничных слоев на гладких поверхностях при наличии градиента давления, с аналогичными результатами, полученными с помощью приближенных методов классической теории устойчивости и наиболее точных из известных в настоящее время моделей замыкания уравнений Рейнольдса, учитывающих переход.

Это сравнение показало, что результаты ГАУ значительно отличаются от таковых, полученных методом Дрела [26], базирующегося на корреляциях, построенных на анализе устойчивости семейства профилей Фолкнера – Скэн, и от результатов, полученных с использованием моделей, учитывающих переход в рамках уравнений Рейнольдса (модели SST γ-Re_θ [27] и SST alg-γ [28]). Данный вывод весьма важен, так как он ставит под сомнение точность указанных методов, которые в настоящее время широко используются в практических расчетах.

Результаты параметрического исследования влияния на переход одновременного воздействия градиента давления и наличия уступа на поверхности свидетельствуют о том, что в рассмотренном диапазоне этих двух факторов их воздействие на положение ламинарно-турбулентного перехода можно приближенно считать независимым (аддитивным).

Все расчеты выполнены на высокопроизводительном кластере «Торнадо» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (http://www.spbstu.ru).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crouch J. D.** Boundary-layer transition prediction for laminar flow control (Invited report) // Proceedings of the 45th AIAA Fluid Dynamics Conference. 22–26 June, 2015. Dallas, TX, American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA 2015-2472, 2015.

2. **Malik M. R, Crouch J. D., Saric W., Lin J. C, Whalen E. A.** Application of drag reduction techniques to transport aircraft (Chapter) // R. Blockley, W. Shyy (Eds.) Encyclopedia of Aerospace Engineering. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Ltd., 2015. December. Pp. 1–10.

3. **Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.** Physics of transitional shear flows: Instability and laminar–turbulent transition in incompressible near-wall shear layers (Book Series "Fluid Mechanics and Its Applications", Vol. 98). Dordrecht, Netherlands: Springer Science+Business Media B.V., 2011. 272 p.

4. **Crouch J. D., Kosorygin V. S., Sutanto M. J., Miller G. D.** Characterizing surface-gap effects on boundary-layer transition dominated by Tollmien – Schlichting instability // Flow. 2022. Vol. 2. 22 March. P. E8.

5. **Heintz A., Scholz P.** Measurements on the effect of steps on the transition of laminar boundary layers // Experiments in Fluids. 2023. Vol. 64. No. 4. P. 76.

6. **Teng M., Piomelli U.** Instability and transition of a boundary layer over a backward-facing step // Fluids. 2022. Vol. 7. No. 1. P. 35.

7. **Reed H. L., Saric W. S., Arnal D.** Linear stability theory applied to boundary layers // Annual Review of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 28. No. 1. Pp. 389–428.

8. **Theofilis V.** Global linear instability // Annual Review of Fluid Mechanics 2011. Vol. 43. January. Pp. 319–352.

9. **Swaminathan G.** Global stability analysis of non-parallel flows: PhD Thesis. Bangalore, India: Jawaharlal Nehru Centre for Advanced Scientific Research, 2010. 152 p.

10. **Bucci M. A., Puckert D. K., Andriano C., Loiseau J.-Ch., Cherubini S., Robinet J.-Ch., Rist U.** Roughness-induced transition by quasi-resonance of a varicose global mode // Journal of Fluid Mechanics. 2018. Vol. 836. 10 February. Pp. 167–191.

11. **Timme S.** Global instability of wing shock-buffet onset // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 885. 25 February. P. A37.

12. **Ehrenstein U., Gallaire F.** On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows: the flat-plate boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 536. 10 August. Pp. 209–218.

13. **Ekervik E., Ehrenstein U., Gallaire F., Henningson D. S.** Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow // European Journal of Mechanics-B/Fluids. 2008. Vol. 27. No. 5. Pp. 501–513.

14. **Alizard F., Robinet J.-C.** Spatially convective global modes in a boundary layer // Physics of Fluids. 2007. Vol. 19. No. 11. P. 114105.

15. **Garicano-Mena J., Ferrer E., Sanvido S., Valero E.** A stability analysis of the compressible boundary layer flow over indented surfaces // Computers & Fluids. 2018. Vol. 160. 4 January. Pp. 14–25.

16. **Mathias M., Medeiros M. F.** Global instability analysis of a boundary layer flow over a small cavity // AIAA Aviation 2019 Forum. 17–21 June, 2019. Dallas, Texas, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA 2019-3535,15 June, 2019.

17. **Kuester M. S.** Growth of Tollmien – Schlichting waves over three-dimensional roughness // AIAA Scitech 2020 Forum. 6–10 January, 2020. Orlando, FL, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA 2020-1580, 5 January, 2020.

18. **Беляев К. В., Гарбарук А. В., Голубков В. Д., Стрелец М. Х.** Расчет эволюции волн Толлмина – Шлихтинга на основе глобального анализа устойчивости // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. № 9. С. 45–60.

19. **Belyaev K., Garbaruk A., Golubkov V., Strelets M.** Prediction of effect of small local surface irregularities on natural transition to turbulence based on Global Stability Analysis // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2024. Vol. 107. July. P. 109358.

20. **Belyaev K. V., Garbaruk A. V., Golubkov V. D., Strelets M. Kh.** Application of global stability analysis to predicting characteristics of Tollmien – Schlichting waves // St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. 2023. Vol. 16. No. 1.1. Pp. 218–224.

21. **Shur M., Strelets M., Travin A.** High-order implicit multi-block Navier – Stokes code: Ten-2025 experience of application to RANS/DES/LES/DNS of turbulence // Proceedings of the 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology. October 5–7, 2004, Huntington Beach, CA, USA. 2004. Pp. 5–7.

22. **Richez F., Leguille M., Marquet O.** Selective frequency damping method for steady RANS solutions of turbulent separated flows around an airfoil at stall // Computers & Fluids. 2016. Vol. 132. 25 June. Pp. 51–61.

23. **Голубков В. Д., Гарбарук А. В.** Сравнение двух подходов к глобальному анализу гидродинамической устойчивости на примере задачи обтекания цилиндра // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 50–62.

24. **Hernandez V., Roman J.E., Vidal V.** SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems // ACM Transactions on Mathematical Software. 2005. Vol. 31. No. 3. Pp. 351–362.

25. **Mack L. M.** Transition and laminar instability. 15 May, 1977. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118505937.

26. **Drela M., Giles M. B.** Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils // AIAA Journal (American Institute of Aeronautics and Astronautics). 1987. Vol. 25. No. 10. Pp. 1347–1355.

27. **Langtry R. B., Menter F. R.** Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes // AIAA Journal. 2009. Vol. 47. No. 12. Pp. 2894–2906.

28. **Menter F. R., Matyushenko A., Lechner R., Stabnikov A., Garbaruk A.** An algebraic LCTM model for laminar–turbulent transition prediction // Flow, Turbulence and Combustion. 2022. Vol. 109. No. 4. Pp. 841–869.

REFERENCES

1. **Crouch J. D.,** Boundary-layer transition prediction for laminar flow control (Invited report), Proc. 45th AIAA Fluid Dynamics Conf. 22–26 June, 2015, Dallas, TX, AIAA 2015-2472, 2015.

2. **Malik M. R, Crouch J. D., Saric W., et al.,** Application of drag reduction techniques to transport aircraft (Chapter), In book: R. Blockley, W. Shyy (Eds.), Encyclopedia of Aerospace Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., Hoboken, New Jersey, USA, December (2015) 1–10.

3. **Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.,** Physics of transitional shear flows: Instability and laminar–turbulent transition in incompressible near-wall shear layers (Book Series "Fluid Mechanics and Its Applications", Vol. 98), Springer Science & Business Media B.V., Dordrecht, Netherlands, 2011.

4. **Crouch J. D., Kosorygin V. S., Sutanto M. J., Miller G. D.,** Characterizing surface-gap effects on boundary-layer transition dominated by Tollmien – Schlichting instability, Flow. 2 (22 March) (2022) E8.

5. **Heintz A., Scholz P.,** Measurements on the effect of steps on the transition of laminar boundary layers, Exp. Fluids. 64 (4) (2023) 76.

6. **Teng M., Piomelli U.,** Instability and transition of a boundary layer over a backward-facing step, Fluids. 7 (1) (2022) 35.

7. **Reed H. L., Saric W. S., Arnal D.,** Linear stability theory applied to boundary layers, Annu. Rev. Fluid Mech. 28 (1) (1996) 389–428.

8. **Theofilis V.,** Global linear instability, Annu. Rev. Fluid Mech. 43 (Jan) (2011) 319–352.

9. **Swaminathan G.,** Global stability analysis of non-parallel flows: PhD Thesis, Jawaharlal Nehru Centre for Advanced Scientific Research, Bangalore, India, 2010.

10. **Bucci M. A., Puckert D. K., Andriano C., et al.,** Roughness-induced transition by quasi-resonance of a varicose global mode, J. Fluid Mech. 836 (10 Febr) (2018) 167–191.

11. **Timme S.,** Global instability of wing shock-buffet onset, J. Fluid Mech. 885 (25 Febr) (2020) A37.

12. **Ehrenstein U., Gallaire F.,** On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows: the flat-plate boundary layer, J. Fluid Mech. 536 (10 Aug) (2005) 209–218.

13. **Ekervik E., Ehrenstein U., Gallaire F., Henningson D. S.,** Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow, Eur. J. Mech. B. Fluids. 27 (5) (2008) 501–513.

14. **Alizard F., Robinet J.-C.,** Spatially convective global modes in a boundary layer, Phys. Fluids. 19 (11) (2007) 114105.

15. **Garicano-Mena J., Ferrer E., Sanvido S., Valero E.,** A stability analysis of the compressible boundary layer flow over indented surfaces, Comput. Fluids. 160 (4 Jan) (2018) 14–25.

16. **Mathias M., Medeiros M. F.,** Global instability analysis of a boundary layer flow over a small cavity, Proc. AIAA Aviation 2019 Forum, 17–21 June, 2019. AIAA 2019-3535, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Dallas, Texas, USA, 15 June, 2019.

17. **Kuester M. S.,** Growth of Tollmien – Schlichting waves over three-dimensional roughness, Proc. AIAA Scitech 2020 Forum, 6–10 Jan., 2020, AIAA 2020-1580, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Dallas, Texas, USA, 5 January, 2020.

18. **Belyayev K., Garbaruk A., Golubkov V., Strelets M.,** Computation of evolution of Tollmein – Schlichten waves based on the global stability analysis, Math. Models Comput. Simul. 16 (1) (2024) 29–38.

19. **Belyaev K., Garbaruk A., Golubkov V., Strelets M.,** Prediction of effect of small local surface irregularities on natural transition to turbulence based on Global Stability Analysis, Int. J. Heat Fluid Flow. 107 (July) (2024) 109358.

20. **Belyaev K. V., Garbaruk A. V., Golubkov V. D., Strelets M. Kh.,** Application of global stability analysis to predicting characteristics of Tollmien – Schlichting waves, St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. 16 (1.1) (2023) 218–224.

21. **Shur M., Strelets M., Travin A.,** High-order implicit multi-block Navier – Stokes code: Ten-2025 experience of application to RANS/DES/LES/DNS of turbulence, Proc. 7th Symp. Overset Composite Grids and Solution Technology. Oct. 5–7, 2004, Huntington Beach, CA, USA (2004) 5–7.

22. **Richez F., Leguille M., Marquet O.,** Selective frequency damping method for steady RANS solutions of turbulent separated flows around an airfoil at stall, Comput. Fluids. 132 (25 June) (2016) 51–61.

23. **Garbaruk A., Golubkov V.,** A comparison of two approaches to the global stability analysis using the example of the cylinder flow problem, St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. 16 (4) (2023) 50–62 (in Russian).

24. **Hernandez V., Roman J.E., Vidal V.,** SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems, ACM Trans. Math. 31 (3) (2005) 351–362.

25. **Mack L. M.,** Transition and laminar instability. 15 May, 1977. https://api. semanticscholar.org/CorpusID:118505937.

26. **Drela M., Giles M. B.,** Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils, AIAA J. 25 (10) (1987) 1347–1355.

27. **Langtry R. B., Menter F. R.,** Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes, AIAA J. 47 (12) (2009) 2894–2906.

28. **Menter F. R., Matyushenko A., Lechner R., et al.,** An algebraic LCTM model for laminar–turbulent transition prediction, Flow, Turbul. Combust. 109 (4) (2022) 841–869.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГАРБАРУК Андрей Викторович – *доктор физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
agarbaruk@mail.ru
ORCID: 0000-0002-2775-9864

ГОЛУБКОВ Валентин Денисович – *младший научный сотрудник Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
golubkovvd@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9473-7430

СТРЕЛЕЦ Михаил Хаимович – *доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией «Вычислительная гидроакустика и турбулентность» Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
strelets@mail.rcom.ru
ORCID: 0000-0002-4608-388X

THE AUTHORS

GARBARUK Andrey V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
agarbaruk@mail.ru
ORCID: 0000-0002-2775-9864

GOLUBKOV Valentin D.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
golubkovvd@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9473-7430

STRELETS Michael Kh.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
strelets@mail.rcom.ru
ORCID: 0000-0002-4608-388X

Статья поступила в редакцию 14.08.2024. Одобрена после рецензирования 11.09.2024. Принята 12.09.2024.
Received 14.08.2024. Approved after reviewing 11.09.2024. Accepted 12.09.2024.

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2025