

Научная статья

УДК 532.517.4

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18104>

**РАСЧЕТ ОКОЛОКРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ОБТЕКАНИЯ  
НЕПОДВИЖНОГО И ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРОВ  
И ТАНДЕМА ЦИЛИНДРОВ ПО МЕТОДУ DDES  
С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ МОДЕЛИ  
ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА**

**А. С. Стабников <sup>□</sup>, А. В. Гарбарук**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

<sup>□</sup> [an.stabnikov@gmail.com](mailto:an.stabnikov@gmail.com)

**Аннотация.** Работа посвящена оценке возможностей вихреразрешающего гибридного RANS-LES-подхода DDES в сочетании с алгебраическими RANS-моделями перехода SST KD и SST alg- $\gamma$ , описывающими ламинарно-турбулентный переход (ЛТП), применительно к расчету обтекания неподвижного и вращающегося цилиндров, а также тандема неподвижных цилиндров. Установлено, что при расчете рассмотренных течений этот подход значительно превосходит стандартный SST DDES, в рамках которого ЛТП не учитывается (предполагается, что течение является полностью турбулентным). Наряду с этим, результаты расчетов, полученные с его использованием, существенно зависят от выбора модели ЛТП, и в плане согласования расчета с экспериментом ни одна из двух моделей не имеет явного преимущества.

**Ключевые слова:** турбулентность, глобальные гибридные RANS/LES-подходы, DDES, кризис сопротивления, эффект Магнуса

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00031).

**Для цитирования:** Стабников А. С., Гарбарук А. В. Расчет околокритических режимов обтекания неподвижного и вращающегося цилиндров и тандема цилиндров по методу DDES с привлечением модели ламинарно-турбулентного перехода // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 1. С. 42–57. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18104>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18104>

**COMPUTATION OF FLOWS AROUND STATIONARY AND  
ROTATING CYLINDERS AND A TANDEM OF CYLINDERS  
AT NEAR-CRITICAL REGIMES USING DDES COUPLED  
WITH A LAMINAR-TURBULENT TRANSITION MODEL**

**A. S. Stabnikov <sup>□</sup>, A. V. Garbaruk**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

<sup>□</sup> [an.stabnikov@gmail.com](mailto:an.stabnikov@gmail.com)

**Abstract.** The objective of this paper is to assess the capabilities of a hybrid RANS-LES approach DDES coupled with algebraic RANS turbulence transition models SST KD and SST alg- $\gamma$ , allowing the prediction of the laminar-turbulent transition (LTT). The approach is applied to calculations of flows around stationary and rotating cylinders as well as a tandem of

stationary cylinders. It is shown that for the simulations of the flows under consideration, this approach significantly outperforms the standard SST DDES (within the standard SST DDES it is assumed that the flow is completely turbulent, and the LTT is not taken into account). At the same time, the obtained computational results depend significantly on the choice of the LTT model, and neither of the two models has a clear advantage in terms of agreement between the computational results and experimental data.

**Keywords:** turbulence, global hybrid RANS/LES approaches, DDES, drag crisis, Magnus effect

**Funding:** The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 23-21-00031). <http://www.spbstu.ru>.

**For citation:** Stabnikov A. S., Garbaruk A. V., Computation of flows around stationary and rotating cylinders and a tandem of cylinders at near-critical regimes using DDES coupled with a laminar-turbulent transition model, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 42–57. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18104>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

С ростом производительности вычислительных ресурсов для проведения инженерных расчетов все чаще применяются глобальные гибридные RANS-LES-подходы, среди которых наиболее известным и широко используемым является метод Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [1]. Точность этого, как и других аналогичных подходов, существенно зависит от точности расчета присоединенного пограничного слоя, которая обеспечивается базовой RANS-моделью. В случае, когда значительная часть пограничного слоя является ламинарной, эту точность можно радикально повысить, если использовать базовые модели, учитывающие ламинарно-турбулентный переход (ЛТП). Об этом свидетельствуют, в частности, результаты авторов данной статьи, полученные ранее в работе [2] при расчете обтекания сферы и поперечного обтекания цилиндра при околоскритических числах Рейнольдса, а также аналогичные результаты работ [3 – 8] и др., посвященных расчету поперечного обтекания цилиндра, крыловых профилей и турбинных лопаток. При этом предпочтительным является использование RANS-моделей ЛТП, не содержащих дополнительных дифференциальных уравнений переноса для вспомогательных величин, отвечающих за предсказание ЛТП (далее такие модели будем называть алгебраическими моделями ЛТП), в связи с чем их применение практически не влечет за собой увеличения вычислительных затрат, по сравнению с базовыми моделями, не описывающими ЛТП. Однако вопрос о влиянии выбора той или иной базовой модели ЛТП на точность получаемого решения остается открытым.

Настоящая работа призвана отчасти прояснить этот вопрос путем детального сравнения результатов расчетов околоскритических режимов обтекания различных плохобтекаемых тел (неподвижного цилиндра, вращающегося цилиндра и тандема неподвижных цилиндров) с использованием метода DDES, базирующегося на двух алгебраических моделях ЛТП: SST KD [2] и SST alg- $\gamma$  [9].

### Методы SST KD DDES и SST alg- $\gamma$ DDES

Формулировки указанных подходов построены на основе уравнений полуэмпирической RANS-модели турбулентности  $k$ - $\omega$  SST [10]. В обоих случаях уравнение переноса удельной диссипации энергии турбулентности  $\omega$  модели SST сохраняет свою форму без изменений, а все ее модификации, направленные на учет ЛТП, касаются уравнения для переноса кинетической энергии турбулентности  $k$ , которое в применяемых подходах можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i k)}{\partial x_i} = \gamma P_k + P_{bubble} - \frac{\beta^* \rho \omega k^{3/2}}{l_{DDES}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right], \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность;  $\mu$ ,  $\mu_t$  – динамические коэффициенты молекулярной и турбулентной

вязкостей;  $x_i$  – компоненты системы координат;  $u_i$  – компоненты скорости;  $\sigma_k, \beta^*$  – константы модели SST;  $P_k$  – генерационное слагаемое.

Линейный масштаб турбулентности  $l_{DDES}$  представляет собой комбинацию линейного масштаба турбулентности модели SST

$$l_{RANS} = k^{1/2}/\beta^* \omega$$

и подсеточного линейного масштаба  $\Delta_{SLA}^{DDES}$ , адаптированного к слоям смешения [11];  $l_{DDES}$  вычисляется по формуле, представленной в работе [1]:

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max \left\{ 0, \left( l_{RANS} - C_{DES} \Delta_{SLA}^{DDES} \right) \right\}, \quad (2)$$

где защитная функция  $f_d$ , определяемая как

$$f_d = 1 - \tanh \left[ \left( C_{d1} r_d \right)^{C_{d2}} \right], \quad r_d = (v_t + v) / \left[ \kappa^2 d_w^2 \sqrt{0,5 \cdot (S^2 + \Omega^2)} \right], \quad (3)$$

обеспечивает работу DDES в режиме RANS во всем присоединенном пограничном слое.

Входящие в формулу (3) величины определяются следующим образом:  $v_t, v$  – кинематические коэффициенты турбулентной и молекулярной вязкости;  $d_w$  – расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей стенки;  $S, \Omega$  – модули тензоров скоростей деформаций и завихренности; эмпирические константы имеют следующие значения:

$$C_{DES} = F_1 \cdot C_{DES1} + (1 - F_1) \cdot C_{DES2},$$

$$C_{DES1} = 0,78, C_{DES2} = 0,61, C_{d1} = 20,0, C_{d2} = 3,0, \kappa = 0,41, \beta^* = 0,09,$$

где  $F_1$  – функция модели SST [10], являющаяся детектором пограничного слоя.

Приведенные значения совпадают со значениями соответствующих констант метода SST DDES [1].

Дополнительные (по сравнению со стандартным уравнением переноса  $k$ -модели SST) члены, введенные в уравнение (1) для учета ЛТП, а именно – коэффициент перемежаемости  $\gamma$  и генерационный член  $P_{bubble}$ , предназначенный для описания отрывного («пузырькового») перехода, определяются по тем же формулам, что и в RANS-моделях ЛТП SST KD [2] или SST alg- $\gamma$  [9]. Однако с учетом того, что эти члены должны функционировать только в RANS-области DDES, в тех областях, где значение весовой функции модели SST  $F_1$  удовлетворяет условию  $F_1 < 0,9$  (т. е. вне RANS-области), эти члены деактивируются, т. е. величина  $\gamma$  полагается равной 1, а величина  $P_{bubble}$  – нулю.

### Постановки задач

Для оценки влияния модели ЛТП на точность построенного на ее основе метода DDES были выбраны три течения, в которых ЛТП играет ключевую роль.

Первое из них – поперечное обтекание неподвижного цилиндра в широком диапазоне значений числа Рейнольдса, включающем докритические, критические и закритические режимы. Исследование этой задачи позволяет оценить способность вихререзающих подходов предсказывать явление кризиса сопротивления.

Второе течение – поперечное обтекание вращающегося цилиндра (рис. 1,а) при режимах, характеризующихся возникновением так называемого «обратного эффекта Магнуса». Широко известен «прямой» эффект Магнуса, который состоит в возникновении подъемной силы, вызванной повышением давления в окрестности нижней части цилиндра, движущейся против потока, и понижением давления в окрестности его верхней части, движущейся по потоку (предполагается вращение цилиндра по часовой стрелке и направление потока слева направо). Однако при определенном сочетании скоростей вращения цилиндра и числа Рейнольдса в экспериментах наблюдается смена направления подъемной силы, что и называется обратным эффектом Магнуса. Его причина состоит в возникновении ЛТП в пограничном слое на нижней стороне цилиндра, что приводит к смещению отрыва вниз по потоку и к соответствующему снижению локального давления. На верхней же стороне цилиндра ЛТП не происходит и имеет место ламинарный отрыв, а следовательно, более высокое давление, чем на нижней поверхности. Именно такие режимы рассмотрены в настоящей работе.

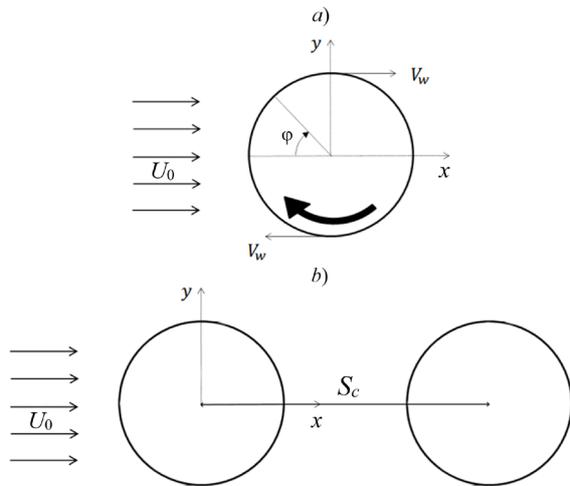


Рис. 1. Схема двух из исследованных течений: обтекание вращающегося круглого цилиндра (a) и тандема неподвижных цилиндров (b);  $V_w$  – линейная скорость вращения стенки цилиндра,  $S_c$  – расстояние между осями цилиндров. Тонкими стрелками указано направление набегающего потока ( $U_0$  – его скорость)

Третье исследованное течение – поперечное обтекание тандема неподвижных цилиндров (рис. 1,b), подробно изученное в экспериментальной работе [12]. В зависимости от расстояния между цилиндрами  $S_c$  и числа Рейнольдса  $Re$  можно выделить три характерных режима [12], проиллюстрированных рисунком 2 на примере значения  $S_c/D = 2,8$  ( $S_c/D$  – безразмерное расстояние между цилиндрами тандема,  $D$  – диаметр цилиндра).

В первом режиме наблюдается докритическое обтекание переднего цилиндра тандема, ЛТП происходит в оторвавшемся слое смешения, а в области между цилиндрами формируется глобальная (без формирования дорожки Кармана) отрывная зона с низким давлением, что влечет за собой низкое или даже отрицательное сопротивление заднего цилиндра тандема. При таком обтекании за цилиндрами формируется единая вихревая дорожка, показанная на рис. 2 синим цветом.

Второй режим соответствует закритическому характеру обтекания переднего цилиндра, при котором в следе за ним формируются выраженная дорожка Кармана, а ширина следа значительно уменьшается. При этом коэффициент сопротивления заднего цилиндра становится выше, чем переднего, и в следе за ним формируется отдельная (показана на рис. 2 зеленым цветом) дорожка Кармана.

При дальнейшем повышении числа Рейнольдса (транскритический режим) происходит постепенное расширение следа за первым цилиндром, что сопровождается ростом его сопротивления и падением сопротивления второго.

Таким образом, правильное определение положения ЛТП при обтекании переднего цилиндра тандема является критически важным для определения сопротивления заднего цилиндра.

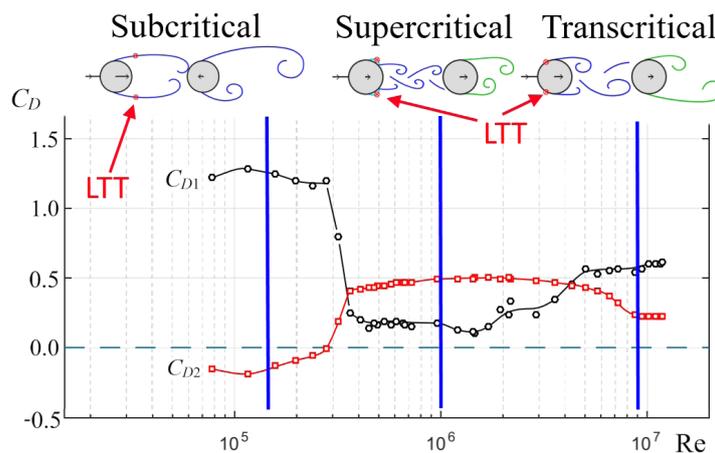


Рис. 2. Экспериментальные зависимости коэффициентов сопротивления переднего ( $C_{D1}$ ) и заднего ( $C_{D2}$ ) цилиндров тандема от  $Re$  при  $S_c/D = 2,8$  [12], а также схема трех режимов обтекания: докритического (Subcritical), закритического (Supercritical) и транскритического (Transcritical); ЛТП – ламинарно-турбулентный переход.

Вертикальными линиями показаны три значения числа Рейнольдса, рассмотренные в настоящей работе

Значения определяющих параметров трех описанных выше течений, а именно числа Рейнольдса  $Re = U_0 D / \nu$ , построенного по диаметру цилиндра  $D$  и скорости набегающего потока  $U_0$ , относительной скорости вращения цилиндра  $\alpha = V_w / U_0$  ( $V_w$  – линейная скорость вращения стенки цилиндра) и безразмерного расстояния между цилиндрами тандема  $S_c / D$  приведены в табл. 1.

Расчетная область для обтекания одиночного цилиндра (как неподвижного, так и вращающегося) представляет собой цилиндр с радиусом  $25D$  и центром в точке  $(x, y) = (0, 0)$ , совпадающей с центром цилиндра (поток направлен в положительном направлении оси  $x$ ). Расчетная область для обтекания тандема цилиндров представляет собой прямоугольный параллелепипед, высота которого  $L_y / D = 10$  равна высоте аэродинамической трубы в эксперименте [12], а координата  $x$  изменяется в пределах от  $-20,0D$  до  $+27,3D$ .

Таблица 1

**Ключевые расчетные параметры трех выбранных течений и их значения**

Поперечное обтекание	Re, $10^5$	Второй параметр
неподвижного одиночного цилиндра	0,5 – 9,0	–
вращающегося одиночного цилиндра	3,65	$0 \leq \alpha \leq 0,6$
тандема неподвижных цилиндров	1,5; 10,0; 80,0	$S_c / D = 2,8; 4,0$

Обозначения: Re – число Рейнольдса, равное  $U_0 D / \nu$ , построенное по диаметру цилиндра  $D$  и скорости набегающего потока  $U_0$  ( $\nu$  – коэффициент молекулярной вязкости);  $\alpha$  – относительная скорость вращения цилиндра, равная  $V_w / U_0$  ( $V_w$  – линейная скорость вращения стенки цилиндра);  $S_c / D$  – безразмерное расстояние между цилиндрами тандема.

На поверхности неподвижного цилиндра все компоненты скорости задавались равными нулю, а на поверхности вращающегося полагались равными компонентам локальной скорости движения поверхности. Градиент давления по нормали к стенке и кинетическая энергия турбулентности  $k$  полагались равными нулю, а ее удельная скорость диссипации  $\omega$  вычислялась по формуле, рекомендуемой в статье [13]:

$$\omega_w = \frac{60\nu}{\beta_1 (\Delta d_1)^2}, \tag{4}$$

где  $\beta_1$  – константа модели SST,  $\beta_1 = 0,075$ ;  $\Delta d_1$  – размер первого пристеночного шага сетки.

На входной части границы расчетной области задавались постоянные значения скорости  $u = U_0$ , кинетической энергии турбулентности  $k$  и ее удельной скорости диссипации  $\omega$  (табл. 2). Эти значения подбирались таким образом, чтобы при их «заморозке» в области  $x \leq -2,0D$  и расчете далее вниз по потоку значения интенсивности турбулентности  $Tu = 100 \cdot u'^2 / U_0^2$  в окрестности обтекаемых цилиндров совпадали с соответствующими значениями в работах [14, 15, 12] (табл. 3).

Наконец, давление на входной части границы определялось путем линейной экстраполяции его значений из внутренних точек расчетной области.

Кроме того, при расчете обтекания тандема цилиндров на верхней и нижней границах расчетной области задавались условия свободного скольжения («симметрии»).

Что касается граничных условий по поперечной координате  $z$ , то при расчете всех течений предполагалось, что они статистически однородны в поперечном направлении  $z$

Таблица 2

**Граничные условия для турбулентных характеристик на входной границе**

Обтекаемое тело	Re, 10 <sup>5</sup>	Значение величины на границе	
		$k/U_0^2, 10^{-4}$	$\omega D/U_0$
Круглый неподвижный цилиндр	0,5	0,240	4,0
	1,3	0,614	10,9
	1,7	0,799	24,3
	2,5	1,350	42,8
	3,0	1,500	47,9
	4,0	1,560	49,9
	5,0	1,980	64,0
	7,0	2,730	88,6
9,0	3,600	11,8	
Круглый вращающийся цилиндр	3,65	1,380	4,78
Тандем неподвижных цилиндров	1,5	1,220	20,3
	10,0	6,000	120
	80,0	9,380	174

Обозначения: Re – число Рейнольдса,  $k/U_0^2$  – нормированная кинетическая энергия турбулентности,  $\omega D/U_0$  – нормированная удельная скорость диссипации  $k$ .

Таблица 3

**Выбранные значения интенсивности турбулентности Tu в окрестности обтекаемых цилиндров**

Обтекаемое тело	Tu, %
Круглый неподвижный цилиндр	0,30 [14]
Круглый вращающийся цилиндр	0,90 [15]
Тандем неподвижных цилиндров	0,45 [12]

Примечание. Значения Tu в окрестности обтекаемых цилиндров должны были совпадать с соответствующими значениями в работах [14, 15 и 12].

(«квазидвумерные»), в связи с чем на боковых границах расчетной области, размер которой в направлении  $z$  составлял во всех расчетах  $L_z = 5D$  (это несколько превышает ширину расчетной области  $\pi D$ , обычно используемую при расчетах обтекания цилиндров в квазидвумерном приближении (см., например, работы [16, 17])) ставились периодические граничные условия.

В качестве начального приближения, для всех искомым переменных, кроме давления, задавались однородные поля со значениями, равными значениям соответствующих величин на входной границе расчетной области, а давление в начальном приближении полагалось равным давлению на выходной границе.

Для расчета обтекания одиночного цилиндра использовались расчетные сетки O-типа со сгущением в областях присоединенного пограничного слоя и следа за цилиндром.

Было построено три таких сетки с размерами 56, 65 и 73 млн. ячеек, которые различались величиной первого пристеночного шага в радиальном направлении для обеспечения выполнения условия  $\Delta d_1^+ < 1$  во всех расчетах. Сетка размером 56 млн. ячеек удовлетворяет этому условию при значении  $Re < 2,5 \cdot 10^5$ , сетка размером 65 млн. ячеек – при  $Re < 6,0 \cdot 10^5$ , а сетка размером 73 млн. ячеек – при  $Re < 1,0 \cdot 10^6$ . Выборочные расчеты на измельченных сетках показали, что построенные сетки обеспечивают сеточную независимость осредненных по времени решений.

Для всех расчетов обтекания вращающегося цилиндра использовалась средняя из построенных сеток (65 млн. ячеек).

Размеры шагов сеток для расчетов обтекания тандема цилиндров приблизительно совпадали с размерами шагов наиболее подробной сетки для одиночного цилиндра (73 млн. ячеек), а количество ячеек в этих сетках составило 86 и 89 млн. для  $S_c/D = 2,8$  и  $4,0$ , соответственно.

Шаг интегрирования по времени составлял  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} D/U_0$ , что обеспечивало значение числа Куранта  $CFL < 1$  в отрывной зоне в следе за цилиндрами. Расчеты проводились в течение временного интервала длительностью около  $100 \cdot D/U_0$ . На его первой половине достигалось статистически установившееся решение, а на второй проводилось накопление нестационарных данных для расчета осредненных по времени характеристик потока.

### Вычислительные аспекты

Все представленные ниже результаты были получены с применением академического конечно-объемного кода NTS [18], который использует многоблочные структурированные перекрывающихся сетки (технология Chimera), что позволяет проводить расчеты геометрически сложных течений, используя схемы повышенного порядка аппроксимации.

Для расчета несжимаемых течений, исследуемых в настоящей работе, NTS-код использует метод расщепления разностей векторов потоков Роджерса – Квака [19], основанный на комбинации схемы расщепления разностей векторов газодинамических потоков и метода введения искусственной сжимаемости Яненко – Чорина [20].

При проведении расчетов в рамках гибридных RANS-LES-подходов важную роль играет способ аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях движения, определяющий диссипативные свойства схемы, требования к которым различны в разных областях течения. В области RANS схема должна обеспечивать устойчивость решения на относительно грубых анизотропных сетках, что достигается при помощи использования высокодиссипативных противопоточных схем. В противоположность этому, в LES-подобластях необходимо использовать низкодиссипативные схемы, обеспечивающие разрешение мелкомасштабной турбулентности. При применении глобальных гибридных подходов, к которым относится метод DDES, граница между RANS- и LES- подобластями определяется автоматически в процессе решения, что, в общем случае, не позволяет предписать использование той или иной схемы в определенных частях расчетной области. В таких случаях общепринятым является использование взвеси выбранных схем с переменным по пространству весом, который определяется в процессе решения. В настоящей работе для определения весов противопоточной схемы третьего порядка и центрально-разностной схемы четвертого порядка использовалась гибридная схема [21].

Для аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях переноса  $k$  и  $\omega$  использовалась противопоточная схема второго порядка точности. Вязкие составляющие векторов потоков во всех уравнениях аппроксимировались с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Для аппроксимации временных производных применялась неявная трехслойная схема Эйлера второго порядка [22]. При этом на каждом шаге по времени проводилось 20 внутренних итераций по псевдовремени.

Для решения системы дискретных аналогов исходных газодинамических уравнений на каждой итерации использовалась релаксация Гаусса – Зейделя по плоскостям, а решение уравнений переноса турбулентных характеристик выполнялось при помощи модифицированного (с диагональным преобладанием) метода приближенной факторизации по пространственным направлениям.

Параллелизация расчетов проводилась на основе гибридной MPI/Open-MP-концепции, позволяющей обеспечивать эффективную работу программы на компьютерах как с распределенной, так и с общей или комбинированной оперативной памятью.

### Результаты расчетов и их анализ

**Обтекание круглого неподвижного цилиндра.** На рис. 3 представлены распределения осредненных по времени коэффициентов поверхностного трения  $C_f$  и давления  $C_p$  при различных значениях числа Рейнольдса, полученные из расчетов с использованием стандартного (не учитывающего ЛТП) метода SST DDES и двух его версий, учитывающих ЛТП.

Судя по этим распределениям, стандартный SST DDES, как и следовало ожидать, предсказывает турбулентный отрыв во всем рассматриваемом диапазоне изменения числа Рейнольдса, и результаты, полученные с его помощью, значительно отличаются от соответствующих результатов, рассчитанных с использованием методов SST KD DDES и SST alg- $\gamma$  DDES, учитывающих ЛТП.

Результаты, полученные с применением этих методов, учитывающих переход, существенно зависят от числа Рейнольдса.

Так, при  $Re = 1,3 \cdot 10^5$  оба метода предсказывают близкие распределения  $C_f$  и  $C_p$ , типичные для докритических режимов течения, которые характеризуются ламинарным отрывом.

При значении числа Рейнольдса, близком к критическому ( $Re = 2,5 \cdot 10^5$ ) распределения  $C_f$  и  $C_p$ , полученные с использованием SST KD DDES и SST alg- $\gamma$  DDES, сильно различаются между собой. Первый из этих методов предсказывает докритический характер обтекания, о чем можно судить по распределению давления по поверхности, а второй – закритическое, с пузырьковым переходом.

При  $Re = 4 \cdot 10^5$  распределения  $C_f$  и  $C_p$ , полученные с использованием методов, учитывающих ЛТП, вновь становятся близкими и по своему характеру напоминают распределения, наблюдаемые при закритическом режиме течения с пузырьковым ЛТП.

Наконец, при  $Re = 9 \cdot 10^5$  результаты обеих моделей также близки между собой и (как и должно быть при существенно закритических режимах течения) характеризуются ЛТП в присоединенном пограничном слое и отрывом турбулентного пограничного слоя.

Все описанные особенности распределений  $C_f$  и  $C_p$  отражаются в расчетных зависимостях коэффициента сопротивления

$$C_D = F_x / \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \rho U_0^2 L_z D \right]$$

( $F_x$  – суммарная сила сопротивления цилиндра) от числа Рейнольдса (рис. 4).

На рис. 4 также представлены экспериментальные данные [14, 23 – 25].

В частности, в отличие от оригинального метода SST DDES, оба подхода, учитывающие ЛТП, качественно верно описывают кризис сопротивления (резкое падение  $C_D$  при значениях числа Рейнольдса в окрестности  $Re = 1,5 \cdot 10^5$ ). Кроме того, при докритических ( $Re < 1,5 \cdot 10^5$ ) и существенно закритических ( $Re > 7,0 \cdot 10^5$ ) числах Рейнольдса коэффициент сопротивления не зависит от используемой модели ЛТП и неплохо согласуется с экспериментальными данными (если принимать во внимание их большой разброс).

Однако в диапазоне чисел Рейнольдса  $1,3 \cdot 10^5 < Re < 4,0 \cdot 10^5$  наблюдается значительное различие зависимостей  $C_D(Re)$ , полученных с использованием методов SST KD DDES и SST alg- $\gamma$  DDES, и, в отличие от эксперимента, их немонотонное изменение.

Наконец, при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса результаты расчетов с использованием обеих моделей вновь становятся близкими, однако при  $Re < 7,0 \cdot 10^5$  существенно отличаются от результатов измерений.

В целом, полученные результаты свидетельствуют о том, что ни один из методов не обеспечивает адекватного описания обтекания цилиндра при пузырьковом характере ЛТП. Причины этого остаются неясными. Однако можно предположить, что это связано с недостаточно быстрым ростом турбулентной вязкости в отрывном пузыре. Следует отметить, что в расчетных результатах по обтеканию сферы подобного явления не наблюдается [26]. Это косвенно свидетельствует о том, что оно, по крайней мере, отчасти связано

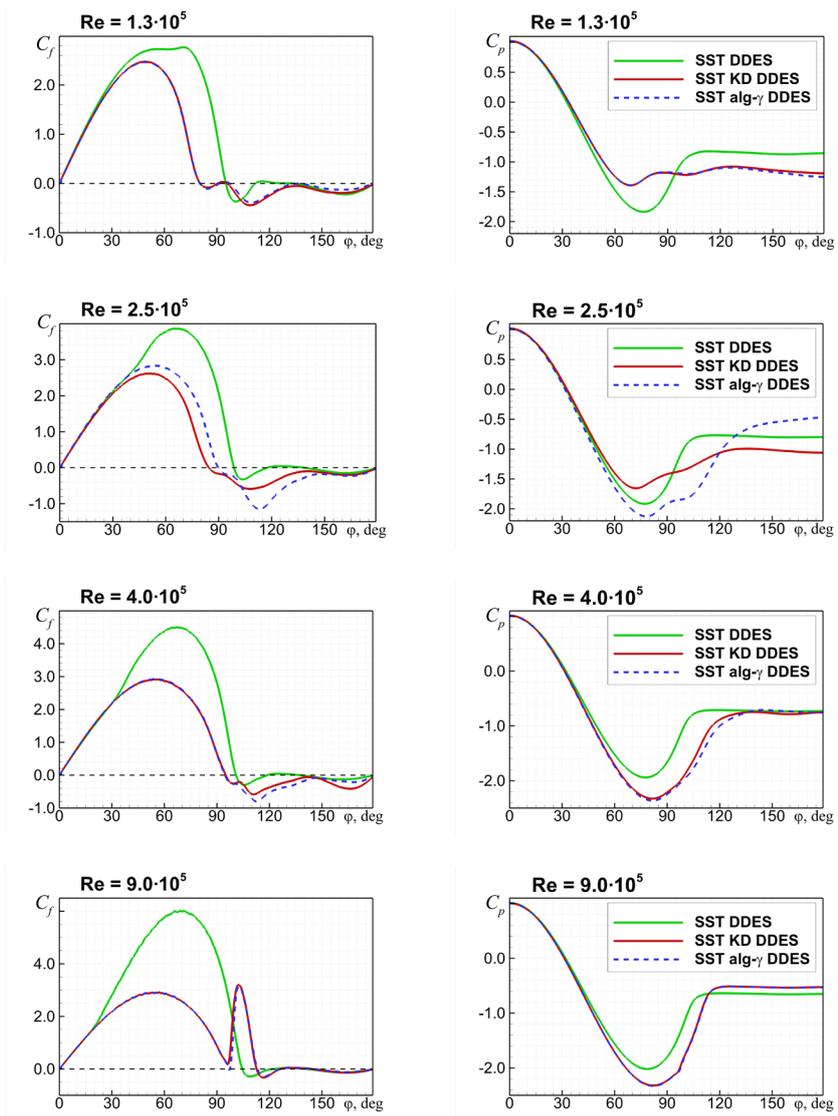


Рис. 3. Сравнение расчетных зависимостей коэффициентов трения  $C_f$  и давления  $C_p$  (осреднены по времени и трансверсальной координате) от полярного угла, полученных с использованием трех методов при значениях  $Re = 1,3 \cdot 10^5$ ;  $2,5 \cdot 10^5$ ;  $4,0 \cdot 10^5$  и  $9,0 \cdot 10^5$

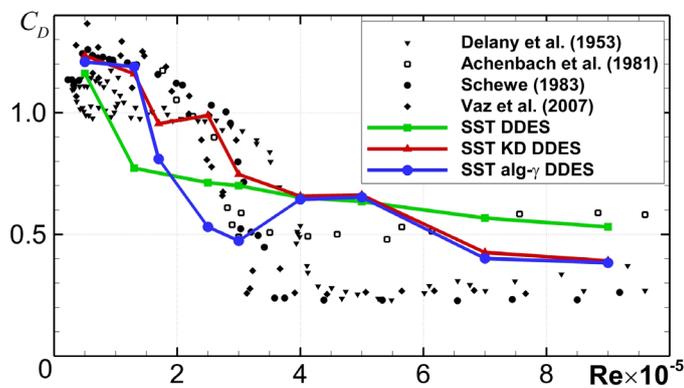


Рис. 4. Сравнение с экспериментальными данными расчетных зависимостей коэффициента сопротивления цилиндра от числа Рейнольдса, полученных с использованием трех методов

с воздействием на отрывной пузырь сильных крупномасштабных колебаний ближнего следа цилиндра.

**Обтекание вращающегося цилиндра.** При рассматриваемых значениях числа Рейнольдса и безразмерной скорости вращения цилиндра ( $Re = 3,65 \cdot 10^5, 0 \leq \alpha \leq 0,6$ ) учет ЛТП приводит к качественному изменению распределения осредненного по времени коэффициента давления  $C_p$  по его поверхности (рис. 5).

Так, метод SST DDES, не учитывающий ЛТП, при повышении скорости вращения предсказывает монотонное увеличение асимметрии течения относительно плоскости  $y = 0$ : на верхней поверхности давление падает, а на нижней растет, что приводит к монотонному усилению эффекта Магнуса (увеличению подъемной силы).

В противоположность этому, обе использованные версии DDES, учитывающие ЛТП, предсказывают разный тип отрыва на двух сторонах цилиндра, а именно – ламинарный на верхней поверхности и турбулентный на нижней. Турбулентный отрыв смещен вниз по потоку относительно ламинарного, что приводит к некоторому снижению давления на нижней поверхности относительно верхней, которое при  $\alpha < 0,5$  превосходит его рост за счет вращения. Представлены также данные, относящиеся к коэффициенту трения  $C_f$ .

В результате этого при  $0 < \alpha < 0,5$  в решениях, полученных с использованием методов SST KD DDES и SST alg- $\gamma$  DDES, коэффициент подъемной силы оказывается отрицательным, т. е. оба метода описывают обратный эффект Магнуса (рис. 6). При этом значение предсказываемого по методу SST DDES коэффициента подъемной силы  $C_L$  положительное и монотонно растет с увеличением скорости вращения.

Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей  $C_L(\alpha)$ , приведенное на рис. 6, свидетельствует о том, что методы SST KD DDES и SST alg- $\gamma$  DDES достаточно

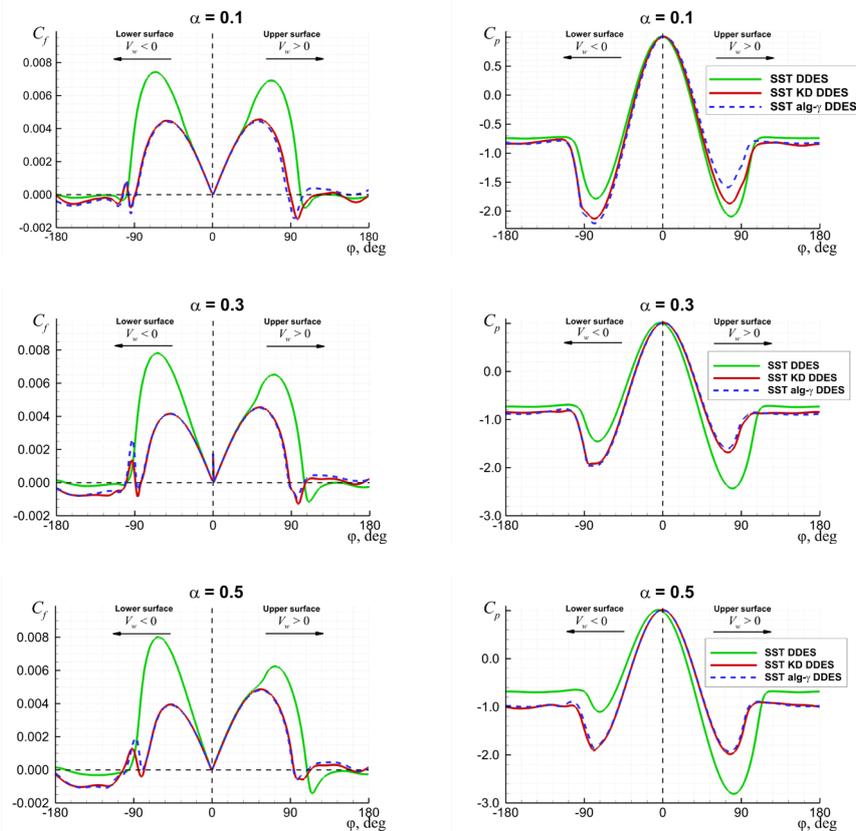


Рис. 5. Расчетные полярные распределения коэффициентов трения  $C_f$  и давления  $C_p$  (осреднены по времени и трансверсальному направлению) по нижней (Lower surface) и верхней (Upper surface) поверхностям вращающегося цилиндра при разных значениях относительной скорости  $\alpha$  его вращения

(точка отсчета полярного угла  $\varphi$  указана на рис. 1,  $a$ ;  $V_w$  – линейная скорость вращения стенки цилиндра)

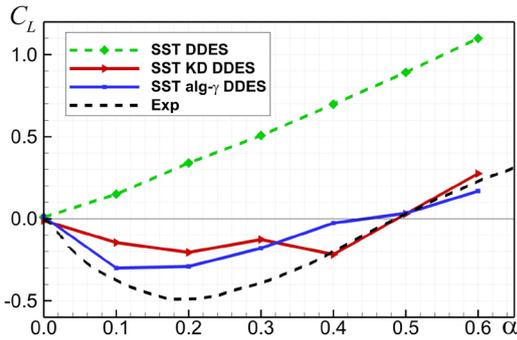


Рис. 6. Сравнение с экспериментальными данными [27] расчетных зависимостей коэффициента подъемной силы вращающегося цилиндра от относительной скорости вращения  $\alpha$ , полученных с применением трех методов

точно предсказывают диапазон изменения скорости вращения  $\alpha$ , в котором наблюдается обратный эффект Магнуса, однако несколько занижают величину отрицательной подъемной силы, по сравнению с экспериментальным значением. Количественное различие между зависимостями, предсказываемыми разными методами, учитывающими ЛТП, оказывается довольно существенным, однако, как и для неподвижного цилиндра, в этом случае трудно отдать предпочтение какой-либо из моделей. Так, результаты, полученные с применением SST alg- $\gamma$  DDES, лучше согласуются с экспериментальными данными при  $\alpha \leq 0,3$ , а результаты, полученные с использованием SST KD DDES, – при  $\alpha > 0,3$ .

**Обтекание тандема цилиндров.** Результаты расчетов данного течения представлены на

рис. 7. Как и для двух уже рассмотренных течений, они свидетельствуют о превосходстве версий DDES, учитывающих ЛТП, над стандартным методом SST DDES. Так, согласно измерениям, при докритическом режиме обтекания первого цилиндра ( $Re = 1,5 \cdot 10^5$ ) его сопротивление намного выше сопротивления второго цилиндра (при  $S/D = 2,8$  последнее

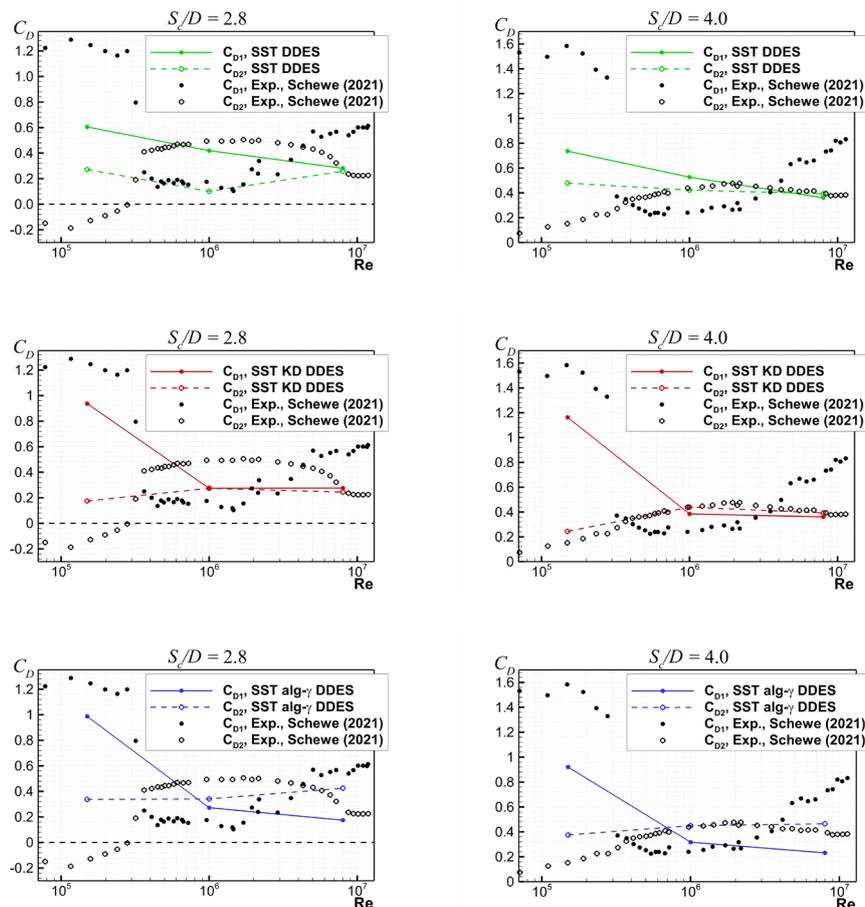


Рис. 7. Сравнение с экспериментальными данными [12] расчетных зависимостей коэффициента сопротивления переднего ( $C_{D1}$ ) и заднего ( $C_{D2}$ ) цилиндров тандема от числа Рейнольдса



оказывается отрицательным). Среди трех рассмотренных методов наибольшую разницу между коэффициентами сопротивления первого и второго цилиндров предсказывает метод SST KD DDES, однако и в этом случае эта разница оказывается существенно меньше наблюдаемой в эксперименте.

Как отмечалось ранее (см. раздел «Постановки задач»), при закритическом режиме ( $Re = 1 \cdot 10^6$ ) сопротивление второго цилиндра превышает сопротивление первого. Для обоих рассмотренных расстояний  $S_c/D$  этот эффект предсказывает только метод SST alg- $\gamma$  DDES, а при использовании SST KD DDES он наблюдается только при  $S_c/D = 4,0$  (согласно этому методу, при  $S_c/D = 2,8$  сопротивления обоих цилиндров оказываются практически равными). При этом, разница между сопротивлением заднего и переднего цилиндров во всех случаях недооценивается. Стандартный метод SST DDES предсказывает качественно неверный результат: сопротивление первого цилиндра превосходит сопротивление второго.

Наконец, при транскритическом режиме ( $Re = 8 \cdot 10^6$ ) сопротивление первого цилиндра опять становится выше сопротивления второго. Этот эффект не предсказывается ни одним из трех методов, причем SST alg- $\gamma$  DDES предсказывает качественно неверный результат, а согласно двум другим, сопротивления обоих цилиндров практически равны.

Таким образом, как и в первых двух задачах, обе версии DDES, учитывающие ЛТП, существенно превосходят по точности метод SST DDES. При этом, погрешность решений, полученных с их помощью, остается весьма высокой, а отдать предпочтение какой-либо из этих версий DDES не представляется возможным.

### Заключение

На примере трех отрывных течений (поперечное обтекание неподвижного и вращающегося одиночных цилиндров и тандема неподвижных цилиндров), в которых существенную роль играет ламинарно-турбулентный переход (ЛТП), проведен детальный анализ возможностей вихреразрешающего гибридного RANS-LES-подхода DDES SST в сочетании с алгебраическими моделями ЛТП (SST KD или SST alg- $\gamma$ ) при расчете этих течений. Показано, что во всех рассмотренных случаях оба метода, учитывающие ЛТП, в отличие от стандартной версии DDES с базовой RANS-моделью SST, позволяют описать явление кризиса сопротивления. Вместе с тем выбор модели ЛТП оказывает значительное влияние на результаты расчетов, в особенности при околокритических режимах течения. Однако нельзя отдать предпочтение какой-либо из двух рассмотренных моделей ЛТП, поскольку в ряде случаев более точной оказывается одна из них, а в ряде – другая.

Все расчеты проведены на высокопроизводительном кластере «Торнадо» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (<http://www.spbstu.ru>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theoretical. Computational and Fluid Dynamics. 2006. Vol. 20. No. 3. Pp. 181–195.
2. Стабников А. С., Гарбарук А. В. Алгебраическая модель ламинарно-турбулентного перехода для расчета турбулентных течений на основе метода моделирования отсоединенных вихрей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 1. С 16–29.
3. Sørensen N. N., Bechmann A., Zahle F. 3D CFD computations of transitional flows using DES and a correlation based transition model // Wind Energy. 2011. Vol. 14. No. 1. Pp. 77–90.
4. Hodara J., Smith M. J. Improved turbulence and transition closures for separated flows // Proceedings of the 41st European Rotorcraft Forum (ERF2015-113). 1-st–4-th September, Munich, Germany, 2015. P. 18.
5. Kim H. J., Kwon O. J. Numerical simulation of transitional flows using a blended IDDES and correlation-based transition model // Computers and Fluids. 2021. Vol. 222. 30 May. P. 104916.

6. **You J. Y., Kwon O. J.** A blended model for simulating massive flow separation and laminar-turbulence transition // Proceedings of the 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 25–28 June, 2012. New Orleans, Louisiana, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 2012. P. 2971.
7. **Sa J. H., Park S. H., Kim C. J., Park J. K.** Low-Reynolds number flow computation for eppler 387 wing using hybrid DES/transition model // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. Vol. 29. No. 5. Pp. 1837–1847.
8. **Coder J. G., Ortiz-Melendez H. D.** Transitional delayed detached-eddy simulation of multielement high-lift airfoils // Journal of Aircraft. 2019. Vol. 56. No. 4. Pp. 1303–1312.
9. **Menter F. R., Matyushenko A., Lechner R., Stabnikov A., Garbaruk A.** An algebraic LCTM model for laminar–turbulent transition prediction // Flow, Turbulence and Combustion. 2022. Vol. 109. No. 4. Pp. 841–869.
10. **Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 4. January. Pp. 1–9.
11. **Probst A., Schwaborn D., Garbaruk A., Guseva E., Shur M., Strelets M., Travin A.** Evaluation of grey area mitigation tools within zonal and non-zonal RANS-LES approaches in flows with pressure induced separation // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2017. Vol. 68. December. Pp. 237–247.
12. **Schewe G., van Hinsberg N. P., Jacobs M.** Investigation of the steady and unsteady forces acting on a pair of circular cylinders in crossflow up to ultra-high Reynolds numbers // Experiments in Fluids. 2021. Vol. 62. No. 8. P. 176.
13. **Menter F. R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32. No. 8. Pp. 1598–1605.
14. **Schewe G.** On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 133. August. Pp. 265–285.
15. **Zheng Z., Lei J., Wu X.** Numerical simulation of the negative Magnus effect of a two-dimensional spinning circular cylinder // Flow, Turbulence and Combustion. 2017. Vol. 98. No. 1. Pp. 109–130.
16. **Pereira F. S., Vaz G., Eça L.** An assessment of Scale-Resolving Simulation models for the flow around a circular cylinder // Proceedings of the Eighth International Symposium on Turbulence Heat and Mass Transfer (THMT-15). 14-th September, 2015. Sarajevo, Bosnia and Herzegovina: Begell House (USA), 2015. Pp. 295–298.
17. **Pereira F. S., Vaz G., Eça L.** Flow past a circular cylinder: A comparison between RANS and hybrid turbulence models for a low Reynolds number // Proceedings of the ASME 2015 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Vol. 2: CFD and VIV. May 31–June 5, 2015. St. John’s, Newfoundland, Canada: ASME, 2015. P. V002T08A006.
18. **Shur M., Strelets M., Travin A.** High-order implicit multi-block Navier–Stokes code: Ten-year’s experience of application to RANS/DES/LES/DNS of turbulent flows (Invited lecture) // Proceedings of the 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology. October 5–7, 2004. Huntington Beach, USA. 2004. [https://cfds.spb.ru/agarbaruk/doc/NTS\\_code.pdf](https://cfds.spb.ru/agarbaruk/doc/NTS_code.pdf)
19. **Rogers S., Kwak D.** An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier–Stokes equations // Proceedings of the 6th Applied Aerodynamics Conference. June 06–08, 1988. Williamsburg, USA.: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1988. P. 88-2583-CP.
20. **Chorin A. J.** A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2. No. 1. Pp. 12–26.
21. **Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart Ph.** Physical and numerical upgrades in the Detached-Eddy Simulation of complex turbulent flows // Advances in LES of Complex Flows. 2002. Vol. 65. January. Pp. 239–254.
22. **Kim S.-E., Makarov B.** An implicit fractional-step method for efficient transient simulation of incompressible flows // Proceedings of the 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. June 6–9, 2005. Toronto, Ontario, Canada: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 2005. P. 2005-5253.
23. **Delany N. K., Sorensen N. E.** Low-speed drag of cylinders of various shapes // NACA Technical Reports. 1953. November 1. P. TN3038 (24 p.)

24. **Achenbach E., Heinecke E.** On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers  $6 \times 10^3$  to  $5 \times 10^6$  // *Journal of Fluid Mechanics*. 1981. Vol. 109. August. Pp. 239–251.
25. **Vaz G., Mabilat C., van der Wal R., Gallagher P.** Viscous flow computations on smooth cylinders: A detailed numerical study with validation // *Proceedings of the 26-th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE-2007)*. June 10–15, 2007. San Diego, California, USA. Vol. 3: Pipeline and Riser Technology; CFD and VIV. ASME, 2007. Pp. 849–860.
26. **Stabnikov A. S., Garbaruk A. V., Strelets M. Kh.** Numerical simulation of the drag crisis on a sphere using a scale-resolving approach // *Fluid Dynamics*. 2024. Vol. 59. No. 3. Pp. 465–478.
27. **Swanson W. M.** The Magnus effect: A summary of investigations to date // *Journal of Basic Engineering*. 1961. Vol. 83. No. 3. Pp. 461–470.

## REFERENCES

1. **Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., et al.**, A new version of Detached-Eddy Simulation, resistant to ambiguous grid densities, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 20 (3) (2006) 181–195.
2. **Stabnikov A. S., Garbaruk A. V.**, An algebraic transition model for simulation of turbulent flows based on a Detached Eddy Simulation approach, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 15 (1) (2022) 16–29 (in Russian).
3. **Sørensen N. N., Bechmann A., Zahle F.**, 3D CFD computations of transitional flows using DES and a correlation based transition model, *Wind Energy*. 14 (1) (2011) 77–90.
4. **Hodara J., Smith M. J.**, Improved turbulence and transition closures for separated flows, *Proc. 41st Eur. Rotorcraft Forum (ERF2015-113)*. 1-st–4-th Sept., Munich, Germany (2015) 18.
5. **Kim H. J., Kwon O. J.**, Numerical simulation of transitional flows using a blended IDDES and correlation-based transition model, *Comput. Fluids*. 222 (30 May) (2021) 104916.
6. **You J. Y., Kwon O. J.**, A blended model for simulating massive flow separation and laminar–turbulence transition, *Proc. 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 25–28 June, 2012. New Orleans, Louisiana, USA, AIAA (2012) 2971.
7. **Sa J. H., Park S. H., Kim C. J., Park J. K.**, Low-Reynolds number flow computation for eppler 387 wing using hybrid DES/transition model, *J. Mech. Sci. Technol.* 29 (5) (2015) 1837–1847.
8. **Coder J. G., Ortiz-Melendez H. D.**, Transitional Delayed Detached-Eddy Simulation of multielement high-lift airfoils, *J. Aircr.* 56 (4) (2019) 1303–1312.
9. **Menter F. R., Matyushenko A., Lechner R., et al.**, An algebraic LCTM model for laminar–turbulent transition prediction, *Flow Turbul. Combust.* 109 (4) (2022) 841–869.
10. **Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.**, Ten years of industrial experience with the SST turbulence model, *Heat Mass Transf.* 2003. Vol. 4 (Jan) (2003) 1–9.
11. **Probst A., Schwaborn D., Garbaruk A., et al.**, Evaluation of grey area mitigation tools within zonal and non-zonal RANS-LES approaches in flows with pressure induced separation, *Int. J. Heat Fluid Flow*. 68 (Dec) (2017) 237–247.
12. **Schewe G., van Hinsberg N. P., Jacobs M.**, Investigation of the steady and unsteady forces acting on a pair of circular cylinders in crossflow up to ultra-high Reynolds numbers, *Exp. Fluids*. 62 (8) (2021) 176.
13. **Menter F. R.**, Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.* 32 (8) (1994) 1598–1605.
14. **Schewe G.**, On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 133 (Aug) (1983) 265–285.
15. **Zheng Z., Lei J., Wu X.**, Numerical simulation of the negative Magnus effect of a two-dimensional spinning circular cylinder, *Flow Turbul. Combust.* 98 (1) (2017) 109–130.
16. **Pereira F. S., Vaz G., Eça L.**, An assessment of Scale-Resolving Simulation models for the flow around a circular cylinder, *Proc. Eighth Int. Symp. on Turbulence Heat and Mass Transfer (THMT-15)*. 14-th Sept., 2015. Sarajevo, Bosnia and Herzegovina: Begell House, USA (2015) 295–298.
17. **Pereira F. S., Vaz G., Eça L.**, Flow past a circular cylinder: A comparison between RANS and hybrid turbulence models for a low Reynolds number, *Proc. ASME 2015 34th Int. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, Vol. 2: CFD and VIV, May 31–June 5, 2015. St. John's, Newfoundland, Canada: ASME (2015) V002T08A006.

18. **Shur M., Strelets M., Travin A.**, High-order implicit multi-block Navier–Stokes code: Ten-year’s experience of application to RANS/DES/LES/DNS of turbulent flows (Invited lecture), Proc. 7th Symp. on Overset Composite Grids and Solution Technology, Oct. 5–7, 2004, Huntington Beach, USA (2004). [https://cfd.spb.ru/agarbaruk/doc/NTS\\_code.pdf](https://cfd.spb.ru/agarbaruk/doc/NTS_code.pdf).
19. **Rogers S., Kwak D.**, An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier–Stokes equations, Proc. 6th Applied Aerodyn. Conf. June 06–08, 1988. Williamsburg, USA.: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) (1988) 88-2583-CP.
20. **Chorin A. J.**, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, J. Comput. Phys. 2 (1) (1967) 12–26.
21. **Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P.**, Physical and numerical upgrades in the Detached-Eddy Simulation of complex turbulent flows, Adv. LES of Complex Flows. 65 (Jan) (2002) 239–254.
22. **Kim S.-E., Makarov B.**, An implicit fractional-step method for efficient transient simulation of incompressible flows, Proc. 17th AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf. June 6–9, 2005. Toronto, Ontario, Canada: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) (2005) 2005-5253.
23. **Delany N. K., Sorensen N. E.**, Low-speed drag of cylinders of various shapes, NACA Tech. Rep. 1953. (Nov., 1) (1953) TN3038 (24 p.)
24. **Achenbach E., Heinecke E.**, On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers  $6 \times 10^3$  to  $5 \times 10^6$ , J. Fluid Mech. 109 (Aug) (1981) 239–251.
25. **Vaz G., Mabilat C., van der Wal R., Gallagher P.**, Viscous flow computations on smooth cylinders: A detailed numerical study with validation, Proc. 26-th Int. Conf. Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAЕ-2007), June 10–15, 2007. San Diego, California, USA. Vol. 3: Pipeline and Riser Technology; CFD and VIV, ASME (2007) 849–860.
26. **Stabnikov A. S., Garbaruk A. V., Strelets M. Kh.**, Numerical simulation of the drag crisis on a sphere using a scale-resolving approach, Fluid Dyn. 59 (3) (2024) 465–478.
27. **Swanson W. M.**, The Magnus effect: A summary of investigations to date, J. Basic Eng. 83 (3) (1961) 461–470.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**СТАБНИКОВ Андрей Сергеевич** – аспирант Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 an.stabnikov@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-7011-6197

**ГАРБАРУК Андрей Викторович** – доктор физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 agarbaruk@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-2775-9864

#### THE AUTHORS

**STABNIKOV Andrey S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
 29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
 an.stabnikov@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-7011-6197



**GARBARUK Andrey V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

agarbaruk@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2775-9864

*Статья поступила в редакцию 27.08.2024. Одобрена после рецензирования 28.10.2024.  
Принята 29.10.2024.*

*Received 27.08.2024. Approved after reviewing 28.10.2024. Accepted 29.10.2024.*