

Научная статья

УДК 51-74

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18105>

## ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОСНОВНОГО КРИТЕРИЯ МЕТОДА FDD ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СООРУЖЕНИЙ

Е. А. Андрианова<sup>1</sup> , Ю. Я. Болдырев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия;

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

 [elena-andrianova@bk.ru](mailto:elena-andrianova@bk.ru)

**Аннотация.** Данная публикация продолжает цикл статей, посвященных применению метода декомпозиции в частотной области (FDD), который служит для идентификации динамических характеристик сооружений (собственных частот и форм собственных колебаний) по данным вибрационных испытаний, без применения вибровозбуждения. Метод основан на сингулярном разложении матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП) измеренных сигналов. В статье приведено доказательство возможности использования FDD для неполной МВСП. Такие МВСП характерны при работе с крупными сооружениями. В этом случае вибрационные испытания включают два вида измерений: непрерывные длительные в одной или нескольких выбранных опорных точках и последовательные короткие в остальных измерительных точках. Представленные результаты могут быть полезными при эксплуатации больших бетонных плотин и других гидротехнических сооружений для идентификации их динамических характеристик.

**Ключевые слова:** декомпозиция в частотной области, динамические характеристики сооружения, матрица взаимных спектральных плотностей

**Для цитирования:** Андрианова Е. А., Болдырев Ю. Я. Особенности использования основного критерия метода FDD при идентификации динамических характеристик сооружений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 1. С. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18105>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18105>

## FEATURES OF USING THE MAIN CRITERION OF THE FDD METHOD IN IDENTIFYING THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF STRUCTURES

Е. А. Andrianova<sup>1</sup> , Yu. Ya. Boldyrev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>"B. E. Vedeneev VNIIG", JSC, St. Petersburg, Russia;

<sup>2</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 [elena-andrianova@bk.ru](mailto:elena-andrianova@bk.ru)

**Abstract.** This publication continues the series of articles devoted to the Frequency Domain Decomposition (FDD) method that serves to identify the dynamic characteristics of structures (natural frequencies and forms of natural vibrations) from the vibration tests data without using vibroexcitation. The method is based on the SV-decomposition of the cross-spectral density matrix (CSDM) of the measured signals. The proof of the possibility of using the FDD for an incomplete CSDM was given, such matrices being typical when working with large-sized

structures. In this case, vibration tests include two types of measurements: continuous long-term ones taking at one or more selected reference points and consecutive short ones at other measuring points. The presented results may be useful in the operation of large concrete dams and other hydraulic structures to identify their dynamic characteristics.

**Keywords:** decomposition in frequency domain, dynamic characteristics, matrix of mutual spectral densities

**For citation:** Andrianova E. A., Boldyrev Yu. Ya., Features of using the main criterion of the FDD method in identifying the dynamic characteristics of structures, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 58–68. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18105>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Определение динамических характеристик сооружений (собственных частот, форм собственных колебаний, декрементов затухания) является важной задачей в строительной отрасли и, в частности, для гидротехнических сооружений (ГТС) в сейсмических районах, так как для них требования к безопасности эксплуатации особенно высоки.

Методы, которые позволяют экспериментально определять динамические характеристики сооружений при нормальных условиях эксплуатации, объединены под общим названием «операционный модальный анализ (ОМА)» (*англ.* Operational Modal Analysis). Необходимо отметить, что применение методов ОМА возможно в том случае, когда эксплуатационные динамические воздействия на сооружение имеют стационарный широкополосный частотный характер, близкий к белому шуму.

В данной статье рассматривается один из наиболее часто используемых методов из группы ОМА, получивший международное название Frequency Domain Decomposition (FDD) (дословный перевод – «декомпозиции в частотной области»). Метод основан на сингулярном разложении матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП) одновременно выполненных измерений. Его подробное описание представлено в работах [3 – 5, 8].

Важная особенность метода – наличие формализованного критерия идентификации собственных частот (далее для краткости будет употребляться термин «критерий»), который заключается в том, что, будучи функцией частоты, первое сингулярное число МВСП должно иметь локальные максимумы вблизи собственных (модальных) частот [1, 3, 5, 7].

Начиная с 2019 года метод FDD применяется сотрудниками Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева (г. Санкт-Петербург, Россия) для инструментальной идентификации динамических характеристик ГТС различных ГЭС, в частности – крупных высоконапорных бетонных плотин. В качестве программного обеспечения используется программный комплекс ARTEMIS Modal [10]. В работах ВНИИГа получена двусторонняя оценка первого сингулярного числа матрицы МВСП, и на основе этой оценки теоретически обоснован основной критерий метода FDD в случае «одиночных» частот [1]. Кроме этого, была разработана новая модификация метода FDD для определения коэффициентов демпфирования [2], альтернативная применяющимся в настоящий момент методам EFDD, а именно – расширенному и частотно-пространственному (Enhanced (EFDD) и Frequency-Spatial (FSDD) соответственно) [5, 6, 9]. Вместе с тем, при всех приведенных доказательствах и сделанных выводах предполагалось, что по результатам измерений можно определять все элементы МВСП.

Основная цель настоящей работы – обосновать для получения искомым динамических характеристик возможность применения такой матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП), в которой известны не все ее элементы.

Далее будем называть такую матрицу неполной. Неполнота матрицы имеет принципиальное значение, поскольку для детальной идентификации форм собственных колебаний крупных и конструктивно сложных сооружений обычно требуется значительное число

измерительных точек; оно должно намного превышать возможное количество одновременно используемых комплектов измерительного оборудования.

Несмотря на то, что работа с неполной МВСП является обычной практикой при решении подобных задач, ранее правомерность такого подхода не была доказана.

### Основные тезисы, относящиеся к сути метода FDD

В качестве математической модели в методе FDD рассматривается следующая система уравнений движения материальных точек объекта:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – нагрузки;  $\mathbf{y}(t)$  – отклик ( $y_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, N$ );  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  – симметричные и вещественные матрицы масс, демпфирования и жесткости, соответственно.

Размерность  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  определяется числом степеней свободы  $N$  и равна  $N \times N$ . Матрица  $\mathbf{M}$  является положительно определенной, матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  – положительно полуопределенными [3].

Ввиду линейной независимости собственных форм колебаний  $\boldsymbol{\varphi}_m$  отклик  $\mathbf{y}(t)$  системы можно представить в виде линейной комбинации единственным образом:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot q_2(t) + \dots = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\Phi}$  – матрица, в столбцах которой стоят векторы собственных форм,  $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_M]$  ( $M$  – количество учтенных форм в этом разложении);  $q_i(t)$  – модальные координаты.

Как показано в работе [3], если внешнее воздействие считать белым шумом, а диссипацию – малой, то МВСП (обозначим ее далее  $\mathbf{G}_y(\omega)$ ) можно выразить через формы собственных колебаний (модальные векторы) следующим образом:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H}{i\omega - \lambda_m} + \frac{c_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H}{-i\omega - \lambda_m^*} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \text{diag}(\alpha_m(\omega)) \cdot \boldsymbol{\Phi}^H, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}_m$  – форма собственных колебаний (модальный вектор);  $c_m$  – положительный коэффициент;  $\lambda_m$  – корень характеристического уравнения,

$$\lambda_m = -\gamma_m + i\omega_{dm}, \quad (4)$$

$$\alpha_m(\omega) = \frac{c_m \gamma_m}{(\omega - \omega_{dm})^2 + \gamma_m^2}. \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) использованы обозначения:

$$\gamma_m = \omega_{0m} \zeta_m, \quad (6)$$

где  $\zeta_m$  – коэффициент диссипации,  $\omega_{0m}$  – собственная частота без учета демпфирования,  $\omega_{dm}$  – собственная частота с учетом демпфирования.

Введем обозначение матрицы

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\sqrt{\alpha_m(\omega)}). \quad (7)$$

В работах [3, 4] было показано, что

$$\alpha_m > 0. \quad (8)$$

Тогда выражение (3) для  $\mathbf{G}_y(\omega)$  можно записать следующим образом:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^2 \boldsymbol{\Phi}^H, \quad (9)$$

или в записи через векторы собственных форм –

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H. \quad (10)$$

Далее, для простоты будем опускать запись аргумента  $\omega$  у функций, от него зависящих, т. е. будут записи  $\mathbf{G}_y$  вместо  $\mathbf{G}_y(\omega)$ ,  $\alpha_m$  вместо  $\alpha_m(\omega)$  и т. д.

Модальные векторы  $\boldsymbol{\varphi}_m$  можно считать нормированными, так как коэффициент  $\alpha_m$ , согласно выражению (5), содержит константу  $c_m$ , в которую можно ввести нормировочный коэффициент.

МВСП можно записать в координатной форме:

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(1)})^2 & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(N)} \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(2)})^2 & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(N)})^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Эта матрица имеет размерность  $N \times N$ , где  $N$  – размерность модальных векторов  $\{\boldsymbol{\varphi}_m, m = 1, 2, \dots, M\}$ ,  $M$  – количество модальных векторов, учитываемых при решении задачи.

Алгоритм метода FDD предполагает, что по результатам проведенных динамических испытаний объекта на некотором диапазоне частот строится последовательность МВСП измеренных сигналов (на последовательности частот), а затем функция первого сингулярного числа от частоты (по сингулярному разложению этих матриц) [3–5].

В статье [1] были построены оценки первого сингулярного значения МВСП, приведем их:

$$\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i \leq \sigma_1 \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)|. \quad (12)$$

На основании приведенных оценок, в работе [1] был доказан основной критерий метода FDD: первое сингулярное число МВСП имеет локальные максимумы вблизи собственных (модальных) частот (далее «критерий»). Доказательство было проведено при условии, что нам известны все элементы матрицы  $\mathbf{G}_y$  (МВСП). Однако, как уже отмечалось выше, результаты динамических тестовых испытаний больших сооружений, например высоконапорных бетонных плотин, которые используются для идентификации динамических характеристик, позволяют определять лишь малую часть значений МВСП.

### Применение метода FDD к неполным МВСП

Прежде чем перейти к обоснованию использования неполных МВСП, кратко опишем порядок проведения измерений. В ходе динамических тестовых испытаний (ДТИ) определяется вектор отклика  $y(t)$  (см. уравнения (1) и (2)); для этого в определенных заранее точках исследуемого объекта, в течение некоторого времени измеряют производные сигналов  $y_i(t)$  (как правило, измеряют ускорения, реже – скорости).

На рис. 1 приведен пример схемы измерений на гребне и в потернах плотины (потерна – продольная галерея в теле гидротехнического сооружения (плотины и др.)). Видно, что для детальной идентификации форм собственных колебаний крупных сооружений необходимо очень большое количество измерительных точек. Очевидно, что поставить в каждую измерительную точку датчик (акселерометр или велосиметр) для проведения синхронных измерений технически невозможно. Вследствие этого, методика динамического тестирования предусматривает наличие двух видов измерений:

- стационарных, производимых непрерывно в одной или более опорных точках;
- коротких, «подвижных» (длительностью 5 – 10 мин), выполняемых последовательно в выбранных точках обследуемого сооружения одними и теми же датчиками.

Положение опорных измерительных точек не должно изменяться до окончания испытаний.

Без ограничения общности будем считать, что измеряется только одна из трех компонент виброускорения: «вдоль потока», которая дает основной вклад в конфигурации низших форм собственных колебаний высоконапорных плотин. Для любой пары сигналов

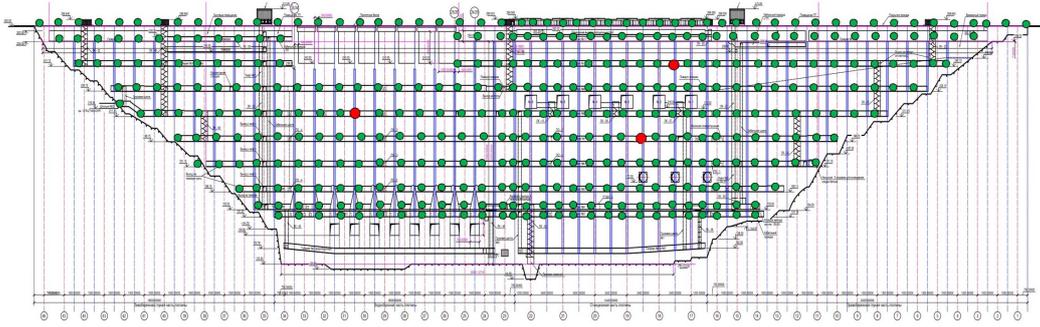


Рис. 1. Пример измерительной схемы для динамических тестовых испытаний на высоконапорной бетонной плотине. Показаны опорные измерительные точки (красного цвета) и регулярная сетка последовательных измерений (точки зеленого цвета)

с номерами  $i$  и  $j$ , измеренных одновременно, можно вычислить взаимную корреляционную функцию  $R_{ij}(t)$  и взаимную спектральную плотность  $S_{ij}(\omega)$ , которая является Фурье-преобразованием функции  $R_{ij}(t)$ . Функции частоты  $S_{ij}(\omega)$  являются  $(i,j)$ -элементами матрицы МВСП с размерностью  $N \times N$ , где  $N$  – число измерительных точек. Отметим, что поскольку расчет функции  $S_{ij}(\omega)$  по данным измерений производится с использованием быстрого преобразования Фурье на дискретном диапазоне частот  $\omega_{p,p=1..P}$ , то по данным ДТИ получается последовательность матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_p)$  с элементами  $S_{ij}(\omega_p)$ .

Если бы во всех измерительных точках сигналы измерялись одновременно, то все элементы матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_p)$  размерностью  $N \times N$  ( $\omega_{p,p=1..P}$ ) были бы нам известны (такие матрицы далее будем называть полными МВСП).

В работе [1] критерий был доказан именно для таких матриц. Однако в силу описанной выше методики ДТИ, взаимную корреляционную функцию  $R_{ij}(t)$  (а следовательно, и  $S_{ij}(\omega)$ ) можно вычислить только для такой пары измерений, одно из которых получено в стационарной измерительной точке, или в случае, когда  $i = j$ , т. е. автоспектральную плотность.

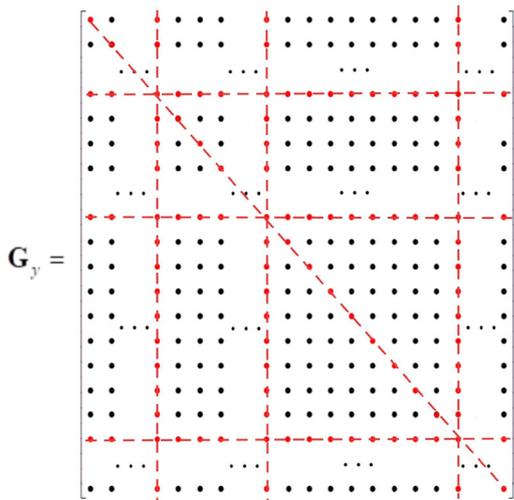


Рис. 2. Схема неполной матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП). Показан пример расположения известных элементов МВСП (красные точки, соединенные пунктиром)

Таким образом, в результате ДТИ мы можем определить лишь небольшую часть значений МВСП. Это элементы, стоящие на главной диагонали (автоспектральные плотности всех измеренных сигналов), а также элементы в нескольких столбцах и, соответственно, строках матрицы, номера которых соответствуют номерам опорных измерительных точек.

На рис. 2 схематически показано, как могут располагаться элементы МВСП, которые известны.

Составим матрицы максимальной возможной размерности из известных элементов матрицы  $\mathbf{G}_y$  (для каждой частоты  $\omega_p$ ). Будем обозначать последовательности таких матриц  $\mathbf{G}_y^r(\omega_p)$ ,  $p=1..P$  (далее для краткости будет использована запись  $\mathbf{G}_y^r$ ).

Обозначим номера опорных точек как  $i_1, i_2, \dots, i_K$ ; при этом пусть

$$i_1 < i_2 < \dots < i_K,$$

где  $K$  – число опорных точек.

Пусть эти номера образуют некоторое множество  $M$  вида

$$M = \{i_1, i_2, \dots, i_K\},$$

а номера измерительных точек образуют множество  $\tilde{R}$  вида

$$\tilde{R} = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  – число всех измерительных точек.

Далее, пусть  $j$  – любое число от 1 до  $N$ , не совпадающее с номером опорной точки, т. е.  $j \in \tilde{R} / M$ .

Рассмотрим множества следующего вида:

$$M_j = \{i_1, i_2, \dots, j, \dots, i_K\}, \text{ где } i_1 < i_2 < \dots < j < \dots < i_K,$$

при этом если  $j < i_1$ , то  $M_j = \{j, i_1, i_2, \dots, i_K\}$ , или  $j > i_K$ , то  $M_j = \{i_1, i_2, \dots, i_K, j\}$ .

Очевидно, что количество таких множеств будет  $N - K$ .

Будем выбирать из матрицы  $\mathbf{G}_y$  меньшие матрицы  $\mathbf{G}_y^r, r = 1, 2, \dots, N - K$ , таким образом, чтобы они состояли из элементов, лежащих на пересечении строк и столбцов с номерами, принадлежащими множествам  $M_j$ . В результате из исходной матрицы можно выбрать  $N - K$  квадратных матриц размерностью  $(i_K + 1) \times (i_K + 1)$ . Это будут матрицы следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{G}}_y^r = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_y(i_1, i_1) & \dots & \mathbf{G}_y(i_1, j) & \dots & \mathbf{G}_y(i_1, i_K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_y(j, i_1) & \dots & \mathbf{G}_y(j, j) & \dots & \mathbf{G}_y(j, i_K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_y(i_K, i_1) & \dots & \mathbf{G}_y(i_K, j) & \dots & \mathbf{G}_y(i_K, i_K) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Отметим, что также рассматриваются случаи  $j < i_1$  и  $j > i_K$ .

Таким образом, каждая из матриц  $\mathbf{G}_y^r$  содержит все элементы, которые лежат на пересечении строк и столбцов, соответствующих номерам опорных точек и на пересечении строки (столбца) с номером  $j$  ( $j \in \tilde{R} / M$ ) со столбцами (строками) с номерами опорных точек.

В координатной форме матрицу  $\mathbf{G}_y^r$  можно записать следующим образом:

$$\mathbf{G}_y^r = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_1)} \varphi_m^{(i_1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_1)} \varphi_m^{(j)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_1)} \varphi_m^{(i_K)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(j)} \varphi_m^{(i_1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(j)} \varphi_m^{(j)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(j)} \varphi_m^{(i_K)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_K)} \varphi_m^{(i_1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_K)} \varphi_m^{(j)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(i_K)} \varphi_m^{(i_K)} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Введем следующее обозначение:

$$\boldsymbol{\varphi}_m^r = [\varphi_m^{(i_1)}, \varphi_m^{(i_2)}, \dots, \varphi_m^{(j)}, \dots, \varphi_m^{(i_K)}]. \quad (15)$$

Компонента модального вектора  $\varphi_m^{(j)}$  может находиться в произвольном месте в зависимости от номера  $j$  (например, в самом начале или конце вектора  $\boldsymbol{\varphi}_m^r$ ). Отметим, что в таком случае  $\boldsymbol{\varphi}_m^r$  есть вектор, состоящий из нескольких компонент модального вектора. Определим вектор  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_m^r$ :

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_m^r = [\tilde{\varphi}_m^{r(1)}, \tilde{\varphi}_m^{r(2)}, \dots, \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)}], \quad (16)$$

где  $\tilde{\varphi}_m^{r(1)} = \varphi_m^{(i_1)}, \dots, \tilde{\varphi}_m^{r(K)} = \varphi_m^{(i_K)}$ .

Тогда матрицы  $\tilde{\mathbf{G}}_y^r$  можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{G}_y^r = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(1)} \tilde{\varphi}_m^{r(1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(1)} \tilde{\varphi}_m^{r(s)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(1)} \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(s)} \tilde{\varphi}_m^{r(1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(s)} \tilde{\varphi}_m^{r(s)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(s)} \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \tilde{\varphi}_m^{r(1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \tilde{\varphi}_m^{r(1)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \tilde{\varphi}_m^{r(K+1)} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Сопоставление матрицы  $\mathbf{G}_y^r$  (17) с полной матрицей  $\mathbf{G}_y$  (11) показывает, что они имеют совершенно одинаковую структуру. Отметим только, что для получения оценок первого сингулярного значения по методике, описанной в нашей статье [1], единственное требование к векторам  $\varphi_m$  — это их нормированность. В случае полной матрицы это требование выполнялось, так как функция  $\alpha_m(\omega)$ , согласно выражению (5), содержит некоторую неизвестную константу  $c_m$ , в которую можно ввести нормировочный коэффициент. Действительно, при доказательстве критерия в статье [1] мы использовали тот факт, что функции  $\alpha_m(\omega)$  имеют максимумы на собственных частотах и при этом величина константы  $c_m$  не имеет значения (важно только, что она положительная). Поэтому мы можем считать в формуле (10) векторы форм собственных колебаний нормированными за счет того, что  $c_m$  можно домножить на нормировочный коэффициент, необходимый для нормировки  $\varphi_m$ .

В данной работе мы выбираем неполную матрицу  $\mathbf{G}_y^r$  и аналогичным образом можем считать векторы  $\tilde{\varphi}_m^r$  нормированными за счет констант  $c_m$  (см. формулу (5)), каждую из которых также можно умножить на нормировочный коэффициент, нужный для нормировки вектора  $\tilde{\varphi}_m^r$  и обозначить ее  $c_m^r$ . Тогда формула (5) переписется следующим образом:

$$\alpha_m^r(\omega) = \frac{c_m^r \gamma_m}{(\omega - \omega_{md})^2 + \gamma_m^2}. \quad (18)$$

Следовательно, для вывода оценок первого сингулярного значения матрицы  $\mathbf{G}_y^r$  можно применить метод, подробно описанный и обоснованный в статье [1] для полной матрицы  $\mathbf{G}_y$ . В статье [1] также было показано, что матрица  $\mathbf{G}_y$  является эрмитовой и положительно полуопределенной, поэтому ее сингулярные и собственные значения совпадают. Для получения оценок первого сингулярного числа в указанной статье использовались вспомогательные матрицы, имеющие с матрицей  $\mathbf{G}_y$  одинаковый спектральный радиус. Первая такая матрица  $\mathbf{K}$  — это матрица Грама [14], и в случае полной матрицы она построена на векторах  $\sqrt{\alpha_m} \varphi_m$ . Поскольку  $\mathbf{G}_y$  описывается формулой (9), то соответствующая матрица Грама записывается как

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}(\Phi^H \Phi) \mathbf{A}. \quad (19)$$

В статье [1] было доказано, что нижняя оценка первого сингулярного числа, построенная для матрицы  $\mathbf{K}$ , является и соответствующей оценкой для матрицы  $\mathbf{G}_y$ .

Матрица  $\mathbf{T}$  определяется выражением

$$\mathbf{T} = (\Phi^H \Phi) \mathbf{A}^2. \quad (20)$$

С учетом полной идентичности (11) и (17) можно заменить модальные векторы  $\varphi_m$  на  $\tilde{\varphi}_m^r$ , а коэффициенты  $\alpha_m$  — на  $\alpha_m^r$  и получить двустороннюю оценку первого сингулярного числа  $\sigma_1^r$  матрицы  $\mathbf{G}_y^r$  ( $r = 1, 2, \dots, N - K$ ):

$$\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i^r \leq \sigma_1^r \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j^r |(\tilde{\varphi}_i^r \tilde{\varphi}_j^r)| \leq \sum_{k=1}^M \alpha_k^r = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{G}}_y^r). \quad (21)$$

Поскольку функции  $\alpha_i^r(\omega)$  отличаются от  $\alpha_i(\omega)$  только постоянными коэффициентами, то так же, как и в случае полной матрицы для «одиночной» собственной частоты, двусторонняя оценка  $\sigma_1^r(\omega)$  обеспечивает выполнение критерия, т. е. собственные частоты

находятся вблизи абсцисс максимумов функций  $\sigma_1^r(\omega)$ . Отметим, что оценки (21) справедливы на всем диапазоне частот.

Таким образом, чтобы определить несколько низших собственных частот сооружения методом FDD и показателей затухания методом, изложенным в статье [2], в идеальном случае, т. е. при соблюдении всех условий для применения метода FDD, а именно: внешние воздействия стационарны и имеют спектр, близкий к «белому шуму» в значимом частотном диапазоне; затухание низкое; измерительные точки не находятся вблизи узловых линий собственных форм; длина записи обеспечивает подавление шумов и т. п., нам достаточно информация о значениях двух элементов на главной диагонали и двух элементов, лежащих на пересечении строки и столбца, соответствующих этим элементам.

В нашей статье [1] было доказано, что в случае произвольной размерности МВСП, одиночные частоты идентифицируются как аргументы максимумов функции первого сингулярного числа. В данной же статье показано, что из неполной матрицы можно так выбрать матрицу, что мы приходим к случаю, описанному выше.

Поскольку реальные условия проведения ДТИ отличаются от идеальных, обычно используются несколько опорных точек, в результате чего мы получаем  $N - K$  последовательностей матриц  $\mathbf{G}_y^r(\omega_p)$ , для каждой из которой можно построить функцию  $\sigma_1^r(\omega_p)$ , а затем по алгоритму, в основе которого лежит критерий (подробно описан в статье [1]), определить низшие собственные частоты.

Для высоконапорных бетонных плотин, с помощью описанного подхода удастся идентифицировать до 10 – 14 собственных частот. Окончательные значения собственных частот получаются в результате усреднения результатов применения критерия по всем  $N - K$  наборам. Кроме простого усреднения можно использовать более сложные интегральные статистики, а также дополнительные индикаторы, ранжирующие матрицы  $\mathbf{G}_y^r(\omega_p)$  по качеству измеренных сигналов и влиянию измерительных шумов.

Методика определения собственных форм колебаний в случае применения неполной МВСП также требует некоторой модификации. В работах [1, 3] для полных МВСП было показано, что форму колебаний, соответствующую некоторой одиночной частоте с номером  $m$ , можно хорошо оценить первым сингулярным вектором матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_m)$ . Поскольку она является эрмитовой и положительно полуопределенной, ее первый сингулярный вектор совпадает с ее собственным вектором, соответствующим максимальному собственному значению. Причем, поскольку для одиночной собственной частоты  $\omega_m$  ранг матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_m)$  можно считать единичным, этот собственный вектор с точностью до коэффициента совпадает с любым вектором-столбцом (вектором-строкой) матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_m)$  (см. статьи [1, 3]). Поэтому в случае полных МВСП форма собственных колебаний практически совпадает с любым столбцом (строкой) этой матрицы, вычисленной на соответствующей собственной частоте. Так, для собственной частоты  $\omega_m$  любой столбец (строка) матрицы  $\mathbf{G}_y(\omega_m)$  является соответствующей этой частоте формой собственных колебаний.

Для неполных матриц такой способ определения собственной формы, вообще говоря, непригоден. Дело в том, что методика динамических тестовых испытаний (ДТИ), описанная выше, предполагает, что измерения в «подвижных» точках производятся не одновременно, и, следовательно, могут быть выполнены при отличающихся динамических нагрузках. Например, последовательные измерения в точках ГТС, как правило, производятся при различных режимах работы турбин. Динамические характеристики линейной динамической системы (1) не зависят от нагрузок, поэтому оценки собственных частот с помощью  $\mathbf{G}_y^r(\omega_p)$  можно усреднять, а векторы  $\tilde{\mathbf{f}}_m^r$  дают оценки значений для нескольких компонент форм собственных колебаний.

Для восстановления полных векторов собственных форм, в статьях [3, 11] предлагается следующая методика. Пусть матрица  $\mathbf{G}_y^r(\omega_p)$  вычислена на любой собственной частоте  $\omega_m$  (далее для краткости аргумент будет опущен). Часть вектора формы собственных колебаний (с компонентами, номера которых  $i_1, i_2, \dots, i_K$ ) определяется по набору данных, общему для всех матриц  $\mathbf{G}_y^r$ . Обозначим эту часть как  $\mathbf{b}$ . Количество компонент вектора  $\mathbf{b}$  соответствует количеству опорных точек; оставшиеся компоненты  $\mathbf{b}$  определяются из соответствующей матрицы  $\mathbf{G}_y^r$ . Тогда часть вектора формы собственных колебаний для степеней свободы, определяемых матрицей  $\mathbf{G}_y^r$ , можно записать как

$$\boldsymbol{\varphi}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}^r \\ \bar{\mathbf{b}}^r \\ \bar{\mathbf{b}}^r \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Очевидно, что для любого номера  $r$  векторы  $\bar{\mathbf{b}}^r$  должны быть пропорциональны. Если взять за основу вектор  $\bar{\mathbf{b}}^1$ , то масштабирование между ними можно определить следующим образом:

$$\bar{\mathbf{b}}^i = a_{1i} \bar{\mathbf{b}}^1. \quad (23)$$

Полный вектор формы будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}^1 \\ \bar{\mathbf{b}}^1 \\ a_{12} \bar{\mathbf{b}}^2 \\ \dots \\ a_{1K} \bar{\mathbf{b}}^K \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Поскольку векторы  $\bar{\mathbf{b}}^r$  определяются с некоторой погрешностью, в случае, когда размерность векторов  $\bar{\mathbf{b}}^r$  превышает единицу, для нахождения коэффициентов масштабирования целесообразно применить метод наименьших квадратов.

Отметим, что для получения форм собственных колебаний сооружения необходимо такое количество точек измерения, которое бы позволило построить конфигурации этих форм. Как правило, чем выше порядковый номер динамических характеристик, тем более плотной должна быть измерительная сетка. Другими словами, размерность полной МВСП диктуется количеством степеней свободы в математической модели исследуемого объекта. Если объект с бесконечным числом степеней свободы мы моделируем линейной динамической системой с числом уравнений  $N$ , то полная МВСП имеет размерность  $N \times N$ , причем для применения метода FDD в этой матрице должны быть известны элементы главной диагонали и элементы хотя бы одной строки (и, в силу свойств МВСП, соответственно, столбца).

### Заключение

В работе дано теоретическое обоснование алгоритма определения динамических характеристик – собственных частот и формы собственных колебаний, определенных по данным вибрационных испытаний при последовательных несинхронных измерениях. Для применения алгоритма FDD в этом случае необходимо наличие всего нескольких опорных точек, в которых измерения проводятся непрерывно. В результате таких испытаний можно вычислить лишь некоторую часть элементов матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП) сигналов, измеренных в различных точках сооружения. Представлено подробное описание алгоритма построения матриц, состоящих из известных элементов исходной неполной МВСП, сингулярное разложение которых позволяет определять собственные частоты исследуемого сооружения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианова Е. А., Новицкий Д. В., Онищук В. С. Теоретическое обоснование идентификации собственных частот в методе FDD (декомпозиции в частотной области) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1. С. 82–96.
2. Андрианова Е. А. Алгоритм нахождения коэффициентов демпфирования по данным вибрационных обследований методом FDD (декомпозиции в частотной области) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 2. С. 21–32.
3. Brincker R., Zhang L., Andersen P. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition // Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference (IMAC 18). San Antonio, Texas, USA, February 7–10, 2000. Pp. 625–630.

4. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.** Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition // *Smart Materials and Structures*. 2001. Vol. 10. No. 3. Pp. 441–445.
5. **Brincker R., Ventura C. E., Andersen P.** Damping estimation by frequency domain decomposition // *Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference (IMAC 19)*, Kissimmee, Florida, USA. February 5–8, 2001. Pp. 698–703.
6. **Zhang L., Tamura Y.** Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements // *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference & Exposition (IMAC XXI) “A Conference & Exposition on Structural Dynamics”*. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, February 3–6, 2003. Pp. 1023–1029.
7. **Brincker R., Zhang L.** Frequency domain decomposition revisited // *Proceedings of the 3rd International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC)*, Portonovo (Ancona), Italy. May 4–6, 2009. Vol. 1. Pp. 615–626.
8. **Brincker R., Ventura C.** *Introduction to Operational Modal Analysis*. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley and Sons, Ltd., 2015. 360 p.
9. **Rainieri C., Fabbrocino G.** *Operational Modal Analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications*. New York: Springer, 2014. 322 p.
10. ARTeMIS Modal. Software for operational modal analysis and experimental modal analysis. Режим доступа: <http://www.svibs.com/>. Дата последнего обращения: 10.12.2023.
11. **Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M.** Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates // *Journal of Vibroengineering*. 2018. Vol. 20. No. 5. Pp. 1919–1936.
12. **Lang G. F.** Matrix madness and complex confusion. Review of complex modes from multiple viewpoints // *Sound & Vibrations*. 2012. November – Structural Analysis. Pp. 8–12.
13. **Tarpo P., Olsen P., Amador S., Juul M., Brincker R.** On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 199. Pp. 1038–1043.
14. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** *Линейная алгебра*. 6-е изд., стер. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
15. **Карчевский Е. М., Карчевский М. М.** *Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии*. 2-е изд. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 424 с.
16. **Фомин В. И.** О нижних линейных оценках спектрального радиуса нормальной матрицы // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. 2001. Т. 6. № 2. С. 145–146.

## REFERENCES

1. **Andrianova E. A., Novitskiy D. V., Onishchuk V. S.**, Theoretical justification of natural frequency identification in the FDD (Frequency Domain Decomposition) method, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (1) (2023) 82–96 (in Russian).
2. **Andrianova E. A.**, An algorithm for finding the damping coefficients based on vibration surveys using the frequency domain decomposition (FDD) method // *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 17 (2) (2024) 21–32 (in Russian).
3. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.**, Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition, *Proc. 18th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 18)*. San Antonio, Texas, USA, Febr. 7–10 (2000) 625–630.
4. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.**, Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition, *Smart Mater. Struct.* 10 (3) (2001) 441–445.
5. **Brincker R., Ventura C. E., Andersen P.**, Damping estimation by frequency domain decomposition, *Proc. 19th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 19)*, Kissimmee, Florida, USA. Febr. 5–8 (2001) 698–703.
6. **Zhang L., Tamura Y.**, Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements, *Proc. 21st Int. Modal Analysis Conf. & Exp. (IMAC XXI) “A Conference & Exposition on Structural Dynamics”*. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, Febr. 3–6 (2003) 1023–1029.
7. **Brincker R., Zhang L.**, Frequency domain decomposition revisited, *Proc. 3rd Int. Operational Modal Analysis Conf. (IOMAC)*, Portonovo (Ancona), Italy. May 4–6, 2009. Vol. 1. (2009) 615–626.
8. **Brincker R., Ventura C.** *Introduction to Operational Modal Analysis*, John Wiley and Sons, Ltd., Hoboken, New Jersey, USA, 2015.

9. Rainieri C., Fabbrocino G., Operational Modal Analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications, Springer, New York, 2014.
10. ARTeMIS Modal. Software for operational modal analysis and experimental modal analysis, Access: <http://www.svibs.com/>. Last access date is 10.12.2023.
11. Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M., Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates, J. Vibroeng. 20 (5) (2018) 1919–1936.
12. Lang G. F., Matrix madness and complex confusion: Review of complex modes from multiple viewpoints, S&V (November – Structural Analysis) (2012) 8–12.
13. Tarpo P., Olsen P., Amador S., et al., On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis, Procedia Eng. 199 (2017) 1038–1043.
14. Пуйн В. А., Позняк Е. Г., Linear algebra, Victor Kamkin, 1987.
15. Karchevskiy E. M., Karchevskiy M. M., Leksii po lineynoy algebre i analiticheskoy geometrii [Lectures on linear algebra and analytical geometry], Lan' Publishing, St. Petersburg, 2018 (in Russian).
16. Fomin V. I., On the lower linear bound of the spectral radius for a normal matrix, Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. 6 (2) (2001) 145–146 (in Russian).

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АНДРИАНОВА Елена Александровна** – научный сотрудник АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия.

195220, Санкт-Петербург, Гжатская ул., 21  
elena-andrianova@bk.ru  
ORCID: 0000-0001-9199-6875

**БОЛДЫРЕВ Юрий Яковлевич** – доктор технических наук, профессор подразделений «Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики», «Высшая школа передовых цифровых технологий», главный научный сотрудник Центра компьютерного инжиниринга Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
boldyrev@phmf.spbstu.ru  
ORCID: 0000-0002-9249-2158

### THE AUTHORS

**ANDRIANOVA Elena A.**

“B. E. Vedeneev VNIIG”, JSC  
21 Gzhatskaya St., Saint Petersburg, 195220, Russia  
elena-andrianova@bk.ru  
ORCID: 0000-0001-9199-6875

**BOLDYREV Yuri Ya.**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
boldyrev@phmf.spbstu.ru  
ORCID: 0000-0002-9249-2158

*Статья поступила в редакцию 29.08.2024. Одобрена после рецензирования 06.11.2024. Принята 06.11.2024.*

*Received 29.08.2024. Approved after reviewing 06.11.2024. Accepted 06.11.2024.*