

Научная статья

УДК 556.555.4/.5; 556.556

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18106>

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЛЕДНОЙ РАДИАЦИОННО-ГЕНЕРИРУЕМОЙ КОНВЕКЦИИ В ОЗЕРАХ С РАЗНОЙ ПРОЗРАЧНОСТЬЮ ВОДЫ

С. И. Смирнов¹ , А. А. Смирновский², С. Р. Богданов¹, Г. Э. Здорovenнова¹,
Т. В. Ефремова¹, Н. И. Пальшин¹, Р. Э. Здорovenнов¹

¹ Институт водных проблем Севера Карельского научного центра РАН,
Республика Карелия, г. Петрозаводск, Россия;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
 sergeysmirnov92@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты вихреразрешающего численного моделирования конвекции, возникающей в результате неоднородного прогрева водной толщи мелководного озера, покрытого льдом (т. е. без воздействия ветра на водную поверхность). Расчеты проводились с использованием метода Implicit LES при различных значениях коэффициентов экстинкции, характеризующих поглощение солнечной радиации толщей воды. Проведен анализ трехмерной структуры течения, временной эволюции температуры и пульсаций скорости, а также рассчитаны приращения нижней границы и температуры конвективно-перемешанного слоя в зависимости от поступающего в систему тепла. Полученные результаты позволяют уточнить особенности термического режима рассмотренного типа озер в период формирования подледного конвективно-перемешанного слоя, в частности – выявить влияние прозрачности воды на процесс перемешивания.

Ключевые слова: радиационно-генерируемая подледная конвекция, прозрачность воды, турбулентные пульсации скорости, метод крупных вихрей

Финансирование: Исследование выполнено в рамках государственного задания Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН (FMEN 2021-0019).

Для цитирования: Смирнов С. И., Смирновский А. А., Богданов С. Р., Здорovenнова Г. Э., Ефремова Т. В., Пальшин Н. И., Здорovenнов Р. Э. Численное моделирование подледной радиационно-генерируемой конвекции в озерах с разной прозрачностью воды // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 1. С. 69–86. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18106>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18106>

NUMERICAL SIMULATION OF UNDER-ICE RADIATIVELY DRIVEN CONVECTION IN LAKES WITH DIFFERENT WATER TRANSPARENCY

S. I. Smirnov¹ , A. A. Smirnovsky², S. R. Bogdanov¹, G. E. Zdorovennova¹,
T. V. Efremova¹, N. I. Palshin¹, R. E. Zdorovennov¹

¹ Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS,
Republic of Karelia, Petrozavodsk, Russia;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
 sergeysmirnov92@mail.ru

Abstract. In the paper, the results of eddy-resolving numerical simulation of convection generated by inhomogeneous heating of water column by solar radiation in an ice-covered shallow lake (the factor of wind impact on the water surface is excluded). The calculations have been performed using the Implicit LES method for different values of the extinction coefficient, which defines the degree of attenuation of solar radiation in the water column. An analysis of the three-dimensional flow structure, the time evolution of temperature and velocity pulsations was carried out, and the increments of the lower boundary and the temperature of the convective mixed layer were calculated depending on the incoming heat. The results obtained shed light upon the nature of the processes occurring in the type of lakes under consideration, in particular, to identify the influence of water transparency on the convective mixing process.

Keywords: radiatively-driven under-ice convection, water transparency, turbulent velocity pulsations, Implicit LES

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment of Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS (FMEN 2021-0019).

For citation: Smirnov S. I., Smirnovsky A. A., Bogdanov S. R., Zdorovenнова G. E., Efremova T. V., Palshin N. I., Zdorovenнов R. E., Numerical simulation of under-ice radiatively driven convection in lakes with different water transparency, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 69–86. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18106>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Радиационно-генерируемая конвекция (РГК) играет важнейшую роль в процессах перемешивания водных масс в озерах в конце зимнего и начале весеннего периодов, когда озера, покрытые льдом, подвергаются солнечному радиационному прогреву, при этом прямое воздействие ветра на водную поверхность отсутствует. Движущей силой этого типа конвекции выступает неоднородный по глубине прогрев слоев воды потоками солнечной радиации, проникающей под лед, в температурном диапазоне от 0°C до примерно 4°C (температура максимума плотности пресной воды T_{md}) [1 – 3]. РГК может продолжаться и после схода льда, если температура воды меньше T_{md} . Этот процесс прекращается, когда поверхностный слой озера прогревается выше значения T_{md} .

РГК играет важную роль в функционировании озерных экосистем, так как конвективные потоки переносят питательные вещества в фотическую зону и перераспределяют клетки водорослей по столбу воды, способствуя тем самым развитию планктонного сообщества и динамике метаболизма [4 – 6].

Некоторый обзор исследований РГК (как теоретических, так и экспериментальных) представлен в статье [7]. Основные теоретические и модельные идеи РГК описываются в работе [8], где были проанализированы режимы устойчивости и динамика стратификации. Общий обзор различных режимов конвекции, включая РГК в озерах, покрытых льдом, дается в статье [3].

РГК в период ледостава изучалась в течение многих лет в мелководном Вендюрском озере (расположено на территории Петровского сельского поселения Кондопожского района Республики Карелии, Россия) на основе измерений потоков солнечной радиации, температуры воды на разных глубинах водной толщи и компонент скоростей [2, 7]. Высокочастотные измерения температуры воды и скорости течения на протяжении нескольких дней позволили проследить суточную эволюцию потока плавучести, обусловленную изменением потока солнечной радиации, и скорости диссипации турбулентной кинетической энергии в конвективно-перемешанном слое (*англ.* Convective Mixed Layer (CML)).

Метод крупных вихрей (*англ.* Large Eddy Simulation (LES)) широко применяется для изучения течений в природных водах [9 – 11]. В случае использования так называемого неявного LES-подхода (Implicit LES) влияние турбулентного движения на подсеточных масштабах моделируется диссипативными свойствами соответствующей численной схемы. Такой подход хорошо зарекомендовал себя для решения задач свободноконвективных течений (см., например, работы [12 – 14]). Д. В. Миронов с соавторами провели численное моделирование на основе метода LES для идеализированных условий РГК в мелководном озере; эти результаты продемонстрировали наличие «опрокидывающихся» струй в конвективном слое и помогли описать процессы вовлечения нижележащих слоев воды в движение [9]. Недавние расчеты РГК [15 – 17] также показали хорошее согласие результатов численного моделирования с натурными наблюдениями.

Важным параметром, определяющим процессы развития конвективного перемешивания в озере, покрытом льдом, служит степень прозрачности воды. Использование одномерных моделей в озерах бореальной [18] и аридной [19] зон для периода открытой воды показывает интенсификацию накопления тепла в поверхностном слое при больших значениях коэффициента экстинкции. Показано, что, когда вода более мутная (и, соответственно, больше значение коэффициента экстинкции), а потоки солнечной радиации, поступающие на поверхность водоема, равны при разной прозрачности воды, поверхностный перемешанный слой тоньше и средняя температура столба воды ниже, чем в случае более прозрачных вод (меньшие значения коэффициента экстинкции). Для озера, покрытого льдом, в рамках одномерной модели исследовано распределение тепла по водному столбу в зависимости от коэффициента экстинкции воды и установлено, что чем больше этот коэффициент, тем большая доля тепла поглощается поверхностным слоем и тем меньше тепла доходит до нижележащих слоев [20].

Цель данного исследования – оценить влияние степени прозрачности воды на структуру конвективно-перемешанного слоя в период радиационно-генерируемой конвекции. За основу оценки взяты методы вихреразрешающего численного моделирования.

В настоящей работе представлены результаты начальных этапов эволюции CML для трех вариантов прозрачности воды.

Постановка задачи и вычислительные аспекты

Постановка задачи аналогична описанной в предыдущих работах [15 – 17]. Вычислительная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с размерами $L \times L \times H$, где L – размер области в горизонтальных направлениях x и y ($L = 9,6$ м), H – высота расчетной области ($H = 6,4$ м) (рис. 1).

Как показали предыдущие исследования, размер расчетной области $9,6 \times 9,6 \times 6,4$ м является достаточным для проведения численного моделирования РГК в подледном слое небольшого озера на ранних этапах формирования CML и его развития. На верхней границе расчетной области, моделирующей нижнюю поверхность льда, задавалась постоянная температура 0°C и условия прилипания для скорости. Вблизи нижней границы расчетной области, эмулирующей условное дно озера, предполагалось отсутствие движения в течение всего рассматриваемого периода; на этой поверхности задавалось условие

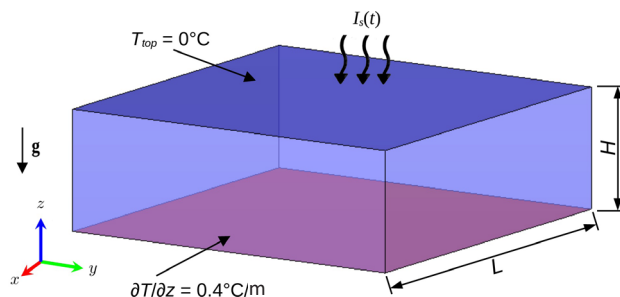


Рис. 1. Геометрия расчетной области и термические граничные условия, $I_s(t)$ – кинематический поток солнечного тепла

прилипания и постоянный тепловой поток, отвечающий градиенту температуры $0,4^\circ\text{C}/\text{м}$, что характерно для придонных слоев небольших мелководных озер; в частности, это соответствует натурным наблюдениям на Вендюрском озере [21]. В горизонтальных направлениях задавались условия периодичности.

В качестве начальных полей задавались линейный профиль температуры, соответствующий граничным условиям, и нулевое поле скорости. Такая постановка задачи является идеализированной: в реальности в начале периода РГК

распределение температуры по глубине для разных озер может варьироваться и рост температуры с глубиной может отличаться от линейного. Отметим, что в расчетах нулевой момент времени соответствовал 6 ч утра, т. е. началу поступления радиации в подледный слой воды (см. рис. 2 в статье [5]).

Турбулентный тепломассоперенос рассчитывается на основе системы уравнений, которая включает уравнение неразрывности (1), уравнения Навье – Стокса (2), записанные с учетом эффектов плавучести в гравитационном поле в приближении Буссинеска, и уравнение энергии (3) с учетом объемного тепловыделения за счет поглощения солнечной радиации:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \beta (T - T_0) \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T - \frac{\partial I}{\partial h}, \quad (3)$$

где $\mathbf{V}$, м/с, – вектор скорости потока; ρ , кг/м³, – плотность; p , Па, – давление; ν , м²/с, – коэффициент кинематической вязкости; α , м²/с, – коэффициент температуропроводности; β , К⁻¹, – коэффициент теплового расширения; T_0 , T , °С, – температура в условиях гидростатического равновесия и мгновенная температура; I , К·м/с, – радиационный поток солнечного излучения; h , м, – глубина озера (отсчитывается от нижней поверхности льда и направлена противоположно оси z); $\mathbf{g}$, м/с², – ускорение свободного падения; t , с, – время.

Коэффициент β рассчитывался на основе аппроксимации зависимости плотности пресной воды от температуры:

$$\beta = b_1 \cdot (T - T_{md}), \quad (4)$$

где $b_1 = 1,65 \cdot 10^{-5}$ К⁻²; T_{md} – температура максимума плотности пресной воды, как указано выше (в расчетах полагалось $T_{md} = 3,84$ °С).

Данная зависимость справедлива в температурном диапазоне 0 – T_{md} (°С). Остальные физические параметры были постоянными величинами и имели соответствующие значения для чистой воды при температуре 2°С.

В правой части уравнения энергии (3) присутствует объемный источник тепловыделения $\partial I / \partial h$, моделирующий в настоящих расчетах поглощаемую солнечную радиацию. Использовался двухпараметрический закон затухания потока тепла по глубине h :

$$I(h, t) = I_s(t) \cdot [a_1 \exp(-\gamma_1 h) + a_2 \exp(-\gamma_2 h)], \quad (5)$$

где $I_s(t)$ – кинематический тепловой поток на нижней границе льда, т. е. тепловой поток, отнесенный к плотности и удельной теплоемкости. Параметры a_1 и a_2 были приняты равными: $a_1 = a_2 = 0,5$.

В настоящей работе рассмотрены три варианта расчета (V1 – V3), которые различаются только значениями коэффициентов экстинкции γ (рис. 2).

V1: $\gamma_1 = 2,7$ м⁻¹, $\gamma_2 = 0,7$ м⁻¹ (исходный вариант, соответствующий натурным наблюдениям на Вендюрском озере);

V2: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,7$ м⁻¹ (вариант прозрачной воды);

V3: $\gamma_1 = \gamma_2 = 2,7$ м⁻¹ (вариант мутной воды).

Большее значение коэффициента экстинкции характеризует большую степень ослабления радиации в верхнем слое, где поглощается длинноволновая часть спектра, тогда как меньшее значение – прозрачность нижележащей толщи воды.

Результаты расчетов для исходного V1 были опубликованы нами ранее в работах [15, 16]. Пониженные значения коэффициента экстинкции (V2) относятся к озерам с высокой степенью прозрачности, в которых падающий радиационный поток проникает далеко в глубь столба воды. Вариант V3, соответствующий большим значениям параметра γ , типичен для озер с низкой прозрачностью воды.

Тепловой поток $I_s(t)$ задавался на основе аппроксимации данных натурных наблюдений, полученных в ходе исследований РГК в Вендюрском озере весной 2020 г.:

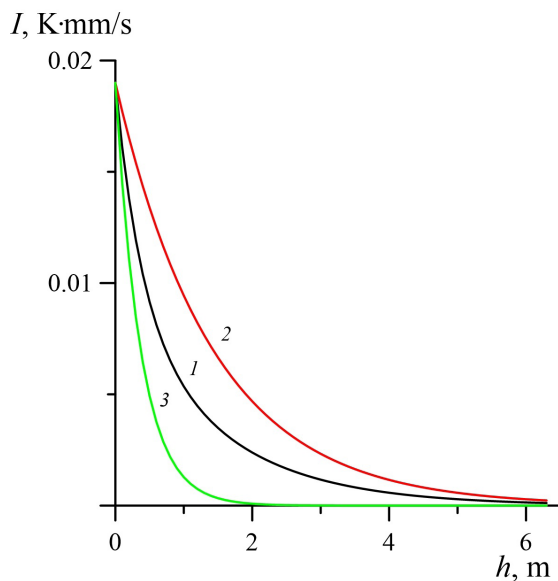


Рис. 2. Зависимости радиационного потока тепла от глубины озера ($h = 0$ – нижняя поверхность льда) для вариантов V1 – V3 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

V1 – значения коэффициентов экстинкции соответствуют натурным наблюдениям; V2, V3 – эти значения соответствуют прозрачной (V2) либо мутной (V3) воде

$$I_s(t) = I_0 \cdot \max\{\sin(2\pi t/T^*), 0\}, \quad (6)$$

где T^* – суточный период ($T^* = 24$ ч); $I_0 = 1,9 \cdot 10^{-5}$ К·м/с (см. рис. 2 в статье [15]).

Расчеты были проведены с использованием конечно-объемного программного кода SINF/Flag-S, разработанного в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого [13, 22, 23]. Для продвижения по времени использовался алгоритм SIMPLEC второго порядка точности. Пространственная аппроксимация конвективных слагаемых осуществлялась по схеме QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics). Диффузионные члены дискретизировались по центрально-разностной схеме второго порядка точности. В качестве вихреразрешающего подхода использовался метод Implicit LES (ILES).

Используемая расчетная сетка состояла из гексагональных элементов. Количество элементов составляло 27 млн. ячеек, шаг по времени был выбран равным 2,5 с. Более подробно вычислительные детали и оценка колмогоровских масштабов в CML изложены в работах [15, 16].

Результаты расчетов и обсуждение

Подробное изложение эволюции и структуры течения (для исходного варианта V1) представлено ранее в работах [15, 16]. Здесь коротко опишем лишь основные полученные результаты.

Представленное распределение эволюции температуры воды для варианта V1 (рис. 3,а) хорошо согласуется с соответствующими изменениями в температурных полях воды, которые получены в натурных исследованиях, проведенных при аналогичном радиационном потоке тепла на нижней границе льда. Можно видеть, что сначала прогреваются верхние слои жидкости, CML постепенно утолщается и вовлекает в движение нижние слои. Расчеты, выполненные при других значениях коэффициента экстинкции, демонстрируют подобную динамику. В зависимости от значения параметра γ можно наблюдать либо слабый прогрев верхних слоев и более сильный прогрев нижних, по сравнению с исходным вариантом V1 (вариант V2, рис. 3,б), либо наоборот, быстрый прогрев верхних слоев и медленное повышение температуры в нижних слоях (V3, рис. 3,с). Основные высокочастотные пульсации температуры (см. рис. 3) сконцентрированы на границе CML и пограничного подледного слоя в дневные часы (глубина $h = 0,1 - 0,2$ м).

Рассмотрим более детально распределение по глубине слоя температуры, осредненной в горизонтальных плоскостях, для трех вариантов (рис. 4 и 5). Сначала проанализируем процесс формирования CML; для разных вариантов он происходит в разное время. Самое быстрое формирование CML, произошедшее между 4-м и 5-ю часами после начала прогрева, наблюдалось для варианта V3 с наибольшим значением γ (см. рис. 4,а). «Обрушение» неустойчивого профиля температуры происходит в несколько этапов (кривые красного цвета на рис. 4,а). Профиль температуры внутри CML полностью формируется примерно через 5 ч после начала прогрева (расчета), что соответствует 11 ч утра. Аналогичная эволюция температуры в первые часы происходит для исходного варианта (см. рис. 4,б). Ввиду более медленного прогрева верхних слоев, формирование CML наблюдалось позднее, между 6-м и 7-м часами после начала расчета. Характер эволюции температуры в эти часы (кривые красного цвета на рис. 4,б) подобен таковому для варианта V3.

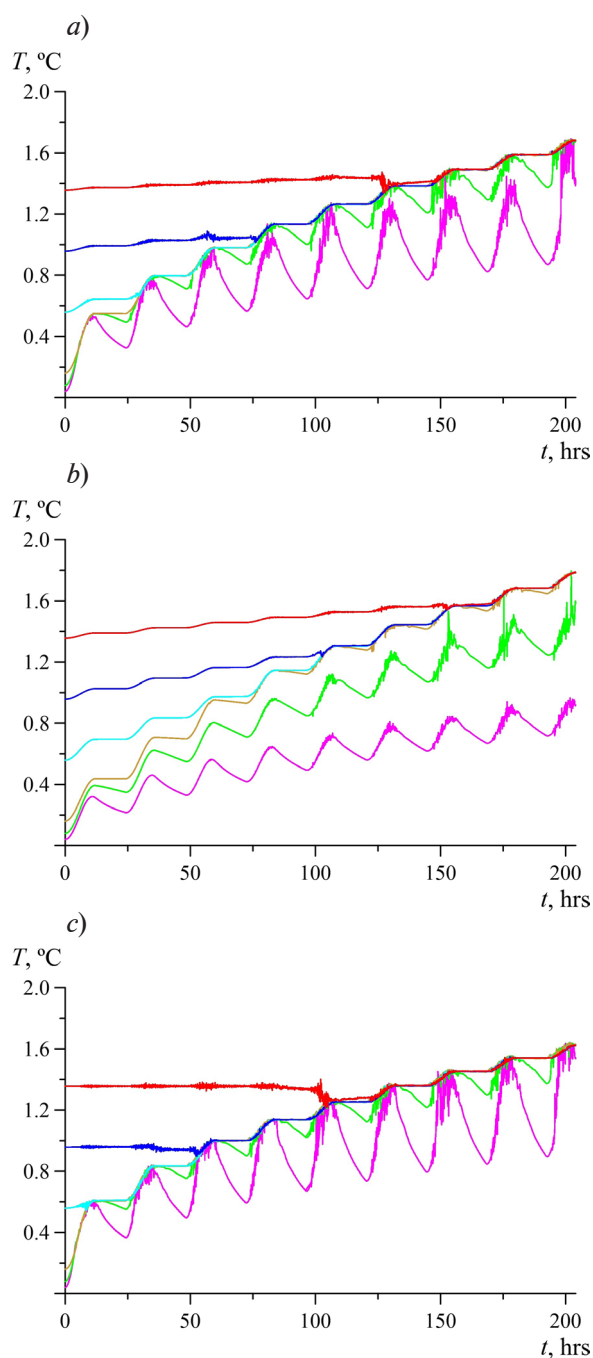


Рис. 3. Эволюция температуры для вариантов V1 (a), V2 (b) и V3 (c) в течение девяти дней на разной глубине h , м: 0,1 (кривая фиолетового цвета), 0,2 (зеленого цвета), 0,4 (коричневого цвета), 1,4 (голубого цвета), 2,4 (синего цвета), 3,4 (красного цвета)

новения неустойчивой стратификации) занимает около одного часа. Тем не менее, столь кардинальное различие в моменте перестройки профилей для разных вариантов свидетельствует о существенной нелинейности и сложности развития течения в подледном слое.

Рассмотрим эволюцию осредненных температурных профилей сформировавшегося CML для различных вариантов. На рис. 5 представлены распределения температуры по

Для V2 ситуация заметно отличается (см. рис. 4, c). Если для V1 и V3 формирование CML происходило в первый день с разницей около двух часов, то для V2 процесс перестройки температурного профиля завершился лишь на третий день (кривые красного цвета на рис. 4, c). Этот результат объясняется тем, что в случае малой прозрачности озера идет интенсивный прогрев верхних слоев и ослабленный – нижних: на этапе нагрева в верхней части водного столба быстро образуется тонкий слой, температура которого выше (и, соответственно, плотность больше), чем у нижележащих слоев. По мере нарастания кинематического потока во времени, имитирующего радиационный прогрев озера, покрытого льдом, в дневные часы, в верхней части температурного профиля формируется область, в которой значения температуры (плотности) в определенный момент становятся выше, чем в прилегающем нижележащем слое, разность значений температуры быстро достигает критического значения, при котором происходит «обрушение» профиля и возникновение конвективного движения. Процесс повышения температуры в верхней части водного столба продолжается, при этом продолжают и «обрушения», что постепенно приводит к формированию конвективного перемешанного слоя. В дневные часы непрерывно происходят серии «обрушений», которые поддерживают существование CML. В ночные часы, при исчезновении потока тепла на верхней границе расчетной области, процесс «обрушений» заканчивается. Ночью границы CML постепенно размываются, при этом к концу ночи в толще перемешанного слоя возникает градиент температуры, однако заметно меньший, чем в нижележащем стратифицированном слое. В варианте V2 (большая прозрачность озера) тепло распределяется более равномерно по водному столбу, что приводит к гораздо более позднему «обрушению» температурного профиля и запаздыванию формирования CML. При этом во всех рассматриваемых случаях (вариантах) процесс «обрушения» профиля (т. е. развитие конвективного движения после возник-

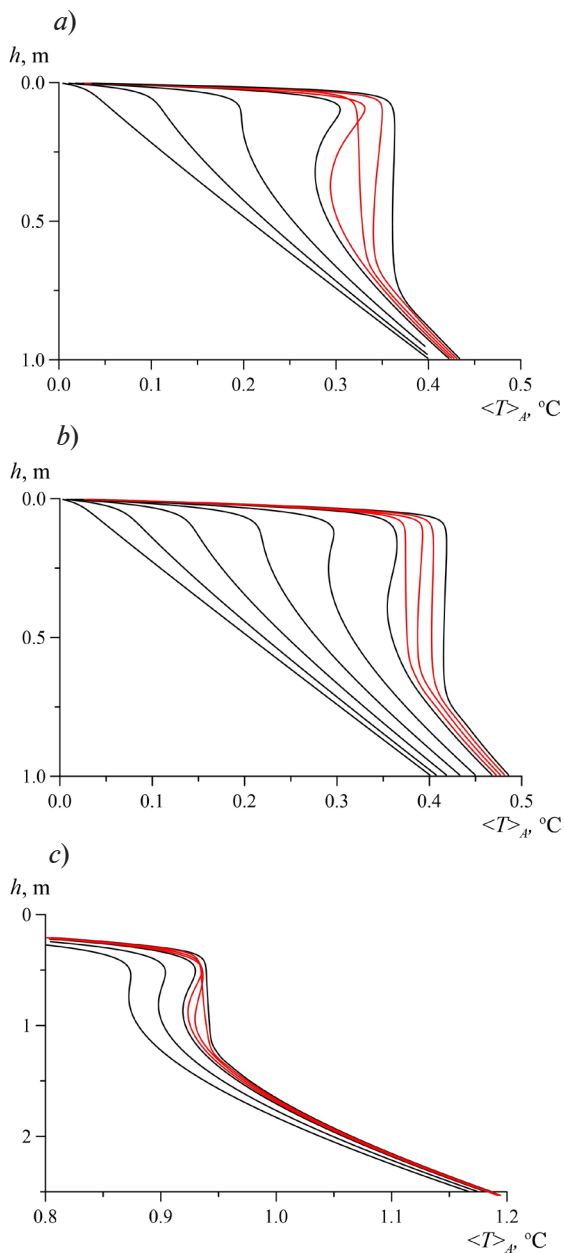


Рис. 4. Временная динамика зависимостей температуры, осредненной по горизонтальным плоскостям, от глубины озера для V3 (a), V1 (b) и V2 (c).

Для трех вариантов на рисунке приведены разные периоды времени регистрации температуры с часовым интервалом (кривые черного цвета); варианты V1 и V3 «стартовали» одновременно (с 1-го часа) и длились 6 и 4 ч соответственно (до 7-го и 5-го часа); вариант V2 начинался с 55-го часа и длился 3 ч. Внутри последнего часового отрезка каждого варианта дополнительно брались 3 временные точки с 15-мин интервалом (кривые красного цвета), которые начинались с 4 ч 15 мин (V3), 6 ч 15 мин (V1) и с 57 ч 15 мин (V2)

глубине в разные моменты времени, начиная с третьего дня, когда для всех вариантов CML уже сформировался. В середине третьего дня значения температуры CML близки друг другу, при этом $T_{V2} < T_{V1} < T_{V3}$. Однако к девятому дню их порядок изменился: $T_{V2} > T_{V1} > T_{V3}$. Таким образом, для рассматриваемого промежутка времени скорость роста температуры CML оказывается наибольшей для V2.

Таким образом, в случае уже достаточно развитого CML, в мутных водах тепло концентрируется в основном в верхней части CML и там протекает такой же процесс, как и на стадии формирования CML: сначала появляется область более теплых и плотных вод, которая затем «обрушивается» вследствие неустойчивой стратификации, что приводит к перемешиванию; такой процесс повторяется много раз в течение всего времени действия радиационного нагрева. В прозрачных же водах радиационный поток более равномерно распределяется по всей толще воды, более однородно «прогревая» CML; при этом образование области неустойчивой стратификации в верхней части CML наступает существенно позднее. Отметим, что (как известно из натурных наблюдений) при достаточно высокой степени прозрачности воды зачастую не происходит даже формирования CML; температура воды просто постепенно повышается на всех глубинах.

Итак, распределение тепла на большую глубину по столбу воды, характерное для более прозрачных вод ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0,7 \text{ м}^{-1}$), приводит к более быстрому росту температуры верхней части стратифицированного слоя, расположенного ниже CML, по сравнению с ситуацией для мутных вод ($\gamma_1 = \gamma_2 = 2,7 \text{ м}^{-1}$), когда наибольшее накопление энергии происходит в верхних слоях водяного столба, а нижние слои практически не получают тепла. Кроме того, следует учитывать, что в более мутной воде толщина подледного градиентного слоя меньше (см. рис. 5), градиент температуры в нем, соответственно, больше, и поэтому тепловой поток из воды в лед для больших значений коэффициента экстинкции оказывается интенсивнее, чем в случае более прозрачной воды (это подтверждается графиками зависимости среднего теплового потока в лед, приведенными далее). Все это приводит к тому, что, например, на 4-й день (см. рис. 5, b) температура в

устойчиво-стратифицированном слое вблизи нижней границы CML для варианта V2 существенно выше, чем для других вариантов, и в последующие дни ситуация аналогичная.

Что касается положения нижней границы CML, то на третий день от начала расчета разница между вариантами оказывается довольно существенной. Самая большая глубина CML наблюдается для V3 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 2,7 \text{ м}^{-1}$), а наименьшая — для V2 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0,7 \text{ м}^{-1}$). Такой результат выглядит вполне ожидаемым, поскольку (как отмечалось выше) для варианта V3 слой CML сформировался раньше всех, приток энергии в него идет в дальнейшем не только на повышение его температуры, но и на заглубление CML. Для V2, ввиду более равномерного прогрева, приток энергии расходуется не только на формирование CML, но и на повышение температуры в нижней области устойчивой стратификации (см. рис. 5,а).

С момента формирования CML, который для разных вариантов наступает в разное время от начала расчета (см. рис. 5), CML продолжает заглубляться с разной скоростью. Из рис. 5 видно, что скорость заглубления для V2 оказывается наибольшей, как и скорость роста температуры, что связано с более сильным проникновением солнечной радиации в глубь толщи воды.

Отметим также существование так называемого слоя вовлечения: небольшого участка профиля температуры вблизи нижней границы CML, где температура резко возрастает, а затем переходит в линейный профиль в области устойчивой стратификации. Наличие такой области подтверждается и в натурных наблюдениях [8]. Чем меньше прозрачность воды, тем больший скачок температуры наблюдается в слое вовлечения в каждый момент времени; при этом величина этого скачка растет с течением времени. Для V2 (с наибольшей степенью прозрачности воды) в первые дни эволюции CML слой вовлечения практически отсутствует, он становится различимым на профилях температуры только на 3-й день с момента формирования CML.

Значения глубины CML для всех трех вариантов к 9-му дню становятся близкими. Для лучшего понимания особенностей дальнейшей эволюции CML необходимо проводить моделирование на больших временных интервалах, что в рамках используемой постановки задачи затруднительно из-за относительно малых размеров расчетной области и грубости используемой расчетной сетки вблизи дна.

В предыдущих натурных и модельных исследованиях развитой РГК [9, 24] отмечалось наличие крупномасштабных вихревых структур, заполняющих всю толщу CML. На определенном этапе развития РГК размеры вихревых структур становятся соизмеримыми с толщиной CML, и при увеличении толщины перемешанного слоя можно ожидать и увеличения размеров вихревых структур.

Согласно результатам наших модельных расчетов, на начальном этапе РГК (при меньшей толщине CML) количество крупномасштабных вихревых структур в расчетной области больше, чем на последующих этапах развития РГК, когда толщина CML увеличивается. На рис. 6 представлены соответствующие иллюстрации в виде изоповерхностей вертикальной компоненты скорости для 4-го дня от начала расчета. Например, на рис. 6,б, где представлена структура течения для V2, видно, что при толщине CML около одного метра, в расчетной области «помещается» 5 — 6 вихрей, размер которых в горизонтальных направлениях также составляет около одного метра. На рис. 6,а,с, где представлены результаты для V1 и V3, толщина CML достигает 2 — 3 м; при этом характерный размер вихрей увеличивается, а их количество уменьшается. Выявленная особенность эволюции вихревой структуры CML по мере развития РГК накладывает определенные ограничения на продолжительность расчетов в численном моделировании при выбранных размерах расчетной области: спустя некоторое время размер крупномасштабных структур оказывается соизмеримым с размерами расчетной области в горизонтальных направлениях, при этом влияние периодических граничных условий может существенно сказываться на точности моделирования, поэтому для проведения более длительных расчетов, чем в настоящем исследовании (т. е. свыше 9 сут, при соизмеримом уровне внешней энергетической накачки) необходимо использовать расчетную область большего размера.

Что касается временной эволюции крупномасштабных вихрей при различных коэффициентах экстинкции, то она во всех трех вариантах развивается сходным образом. Более подробный анализ эволюции вихревых структур в CML для исходного варианта приведен в работе [17].

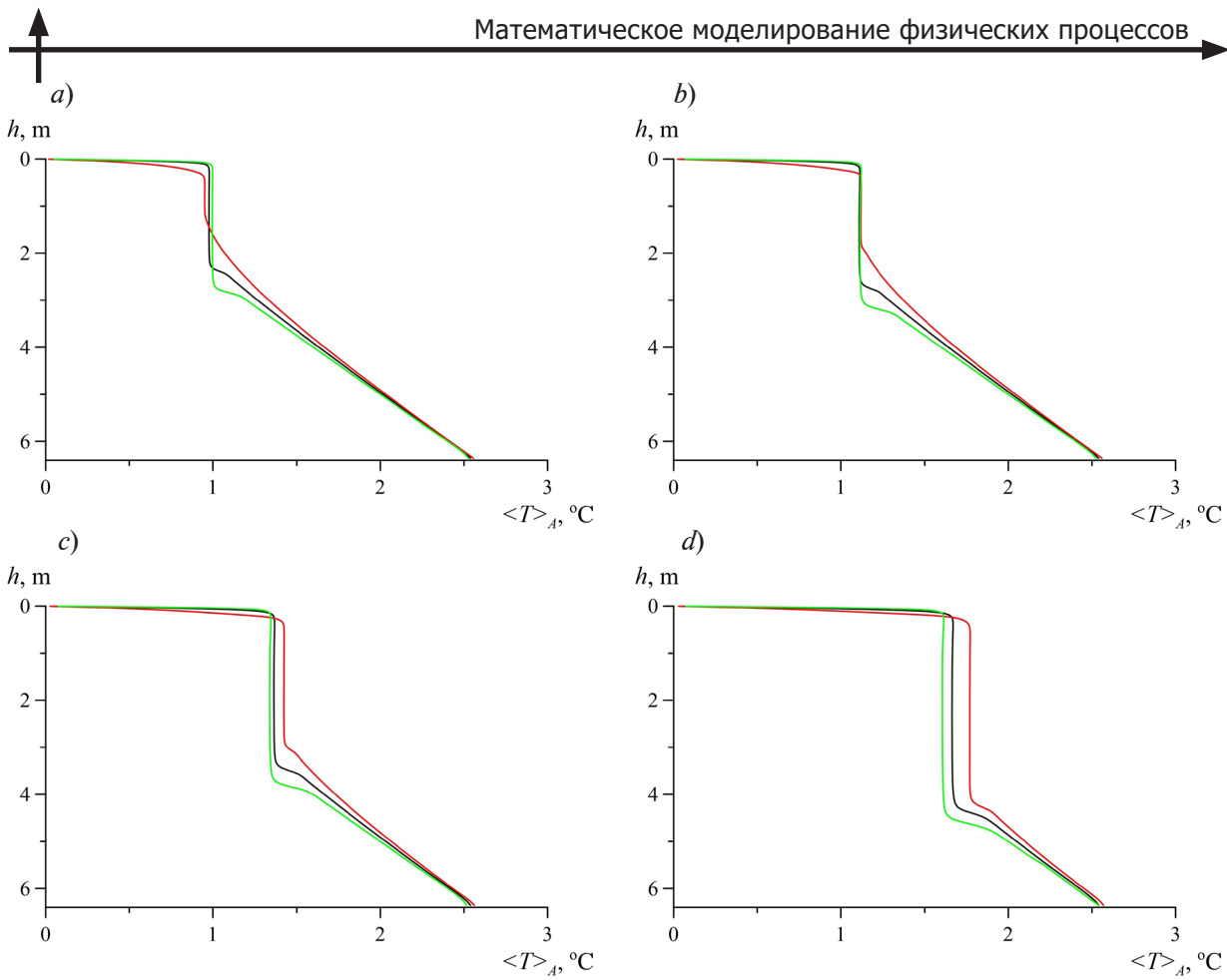


Рис. 5. Сравнение зависимостей температуры, осредненной по горизонтальным плоскостям, от глубины озера, полученных в разные моменты времени ($a - d$) для V1 (кривые черного цвета), V2 (красного цвета) и V3 (зеленого цвета): $a - 16$ ч 3-го дня (момент образования устойчивого CML для V2); $b - 15$ ч 4-го дня; $c - 15$ ч 6-го дня; $d - 15$ ч 9-го дня

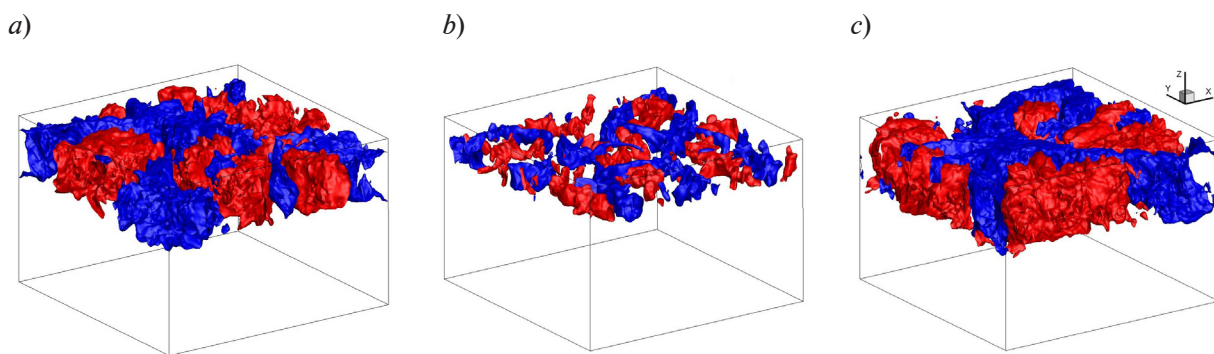


Рис. 6. Изоповерхности средней вертикальной компоненты скорости V_z ($|V_z| = 0,6$ мм/с), представленные для 4-го дня в 15 ч для вариантов V1 (a), V2 (b) и V3 (c); период осреднения – 1 ч

Рассмотрим интегральные характеристики эволюции CML: зависимость приращения глубины CML и его температуры от кумулятивной энергии, поступающей в систему. Зависимости приращения температуры и глубины CML от кумулятивного потока тепла (рис. 7) отражают представленные выше результаты по эволюции профиля температуры для разных вариантов прозрачности (см. рис. 5). Наибольшая скорость роста температуры и заглубления нижней границы CML наблюдается для варианта V2 (наиболее прозрачные воды). Таким образом, более равномерная накачка энергии по глубине приводит к большей скорости изменения интегральных параметров РГК в рассмотренные дни.

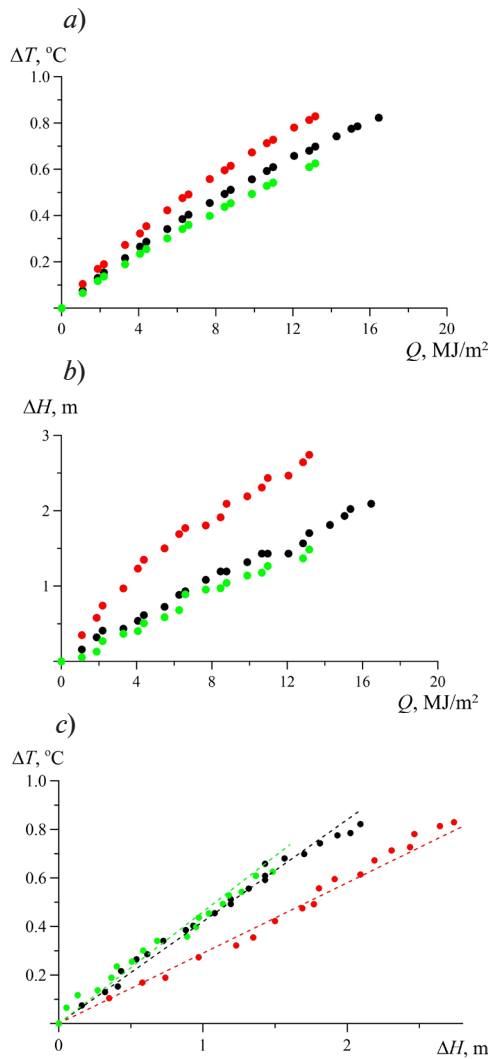


Рис. 7. Зависимости приращений температуры (a) и глубины (b) CML от кумулятивного потока тепла, а также функциональная связь приращений температуры и глубины CML (c) для вариантов V1 (черные символы), V2 (красные символы) и V3 (зеленые символы); пунктирные линии – линейные аппроксимации функции $\Delta T(\Delta H)$; представлены результаты, относящиеся к сроку с 4-го дня эволюции процесса

его прогрева радиационным потоком (см. рис. 5). Значение коэффициента вовлечения A повышается с увеличением степени прозрачности воды. В целом результаты расчета хорошо согласуются с теорией.

Рассмотрим теперь тепловые потоки в лед для разных вариантов (рис. 8). Число Нуссельта рассчитывается следующим образом:

$$\text{Nu} = \frac{\langle q \rangle_A h_{\text{CML}}}{\lambda T_{\text{CML}}}, \quad (11)$$

где $\langle q \rangle_A$, Вт/м², – плотность потока тепла на верхней стенке расчетной области, средняя по поверхности.

В общем случае временная динамика толщины CML (h_{CML}) определяется следующим уравнением [3, 25]:

$$\frac{dh_{\text{CML}}}{dt} = (1 + 2A) \frac{B_s}{N^2 h_{\text{CML}}}, \quad (7)$$

где A – коэффициент вовлечения (варьируется, по разным данным, в пределах значений 0,1 – 0,3); N – частота плавучести, $N = (\beta g \Gamma)^{0.5}$ (Γ – градиент температуры в придонном стратифицированном слое); B_s – поток плавучести на поверхности, $B_s = \beta g I_s$ (I_s – кинематический поток тепла, как указано выше).

В простейшем гипотетическом случае, когда прирост толщины h_{CML} и рост температуры T_{CML} не сопровождаются изменениями в нижележащем стратифицированном слое [26], $A = 0$ и, соответственно, тепловой баланс CML можно записать в следующем виде:

$$h_{\text{CML}} \frac{dT_{\text{CML}}}{dt} = I_s. \quad (8)$$

Из двух приведенных уравнений (7) и (8) непосредственно следует простое соотношение, связывающее скорости прироста толщины и температуры CML:

$$\frac{dT_{\text{CML}}}{dh_{\text{CML}}} = \Gamma. \quad (9)$$

В общем случае, когда $A \neq 0$, уравнение (7) после интегрирования приводится к виду:

$$h_{\text{CML}}^2 - h_0^2 = 2(1 + 2A) \frac{\Delta Q}{\Gamma \rho C_p}, \quad (10)$$

где h_0 – толщина CML в момент его полного формирования.

Полученные в рассмотренных вариантах значения Γ (градиента температуры в придонном стратифицированном слое) и коэффициента вовлечения A приведены в таблице.

Значения Γ в вариантах V1 и V3 близки друг к другу и к значению градиента температуры 0,4 °C/м, задаваемого на нижней границе расчетной области. Для V2 наблюдается заметное отклонение, вызванное, видимо, изменением градиента в верхней части стратифицированного слоя за счет



Таблица

Рассчитанные значения градиента температуры Γ в придонном слое и коэффициента вовлечения A для трех рассмотренных вариантов

Вариант	Коэффициенты экстинкции, м^{-1}	Γ , $^{\circ}\text{C}/\text{м}$	A
V1	$\gamma_1 = 2,7, \gamma_2 = 0,7$	0,42	0,17
V2	$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,7$	0,29	0,24
V3	$\gamma_1 = \gamma_2 = 2,7$	0,46	0,13

Примечание. Вариант V1 соответствует натурным наблюдениям. Варианты V2 и V3 отражают случаи прозрачной и мутной воды, соответственно.

На рис. 8,а представлены зависимости среднего по поверхности теплового потока в лед, а на рис. 8,б – средние значения числа Нуссельта за дневной период. Отметим характерные особенности эволюции теплового потока: в начале каждого дня происходит резкое нарастание теплового потока, которое достигает максимума в промежутке от 13 до 14 ч дня (в расчетах предполагается, что световой день начинается в 6 ч утра). Затем наблюдается снижение теплового потока, причем в вечерний и ночной периоды (с 18 ч до 6 ч следующего дня) это снижение носит более плавный характер, по сравнению с утренними часами. Максимумы тепловых потоков в течение одного дня, так же, как и средние значения чисел Нуссельта, сначала возрастают день ото дня, а затем выходят на почти постоянное значение. Отметим сильную чувствительность тепловых потоков и чисел Нуссельта к степени прозрачности воды: чем менее прозрачна вода, тем больше тепловой поток в лед. Это в свою очередь означает, что внутрь CML уходит меньше тепла, если вода менее прозрачна. Такой вывод согласуется с результатами эксперимента по исследованию РГК [27], где рассматривалась модельная задача конвекции в замкнутой полости в условиях радиационного нагрева и адиабатических стенок; при этом было показано, что интенсивность теплообмена с CML увеличивается для более прозрачной воды.

Проведем сопоставление пульсационных характеристик для трех вариантов, а именно – диагональных компонент тензора Рейнольдсовых напряжений $\langle V_i^2 \rangle$, осредненных как по горизонтальному сечению, так и по времени (за 1 ч). Рассмотрим эволюцию пульсаций компонент скорости на глубине 2,5 м (рис. 9). Эволюция пульсаций также носит периодический характер: в течение дня пульсации нарастают вслед за увеличением интенсивности радиационного нагрева, а затем убывают практически до нуля в ночное время.

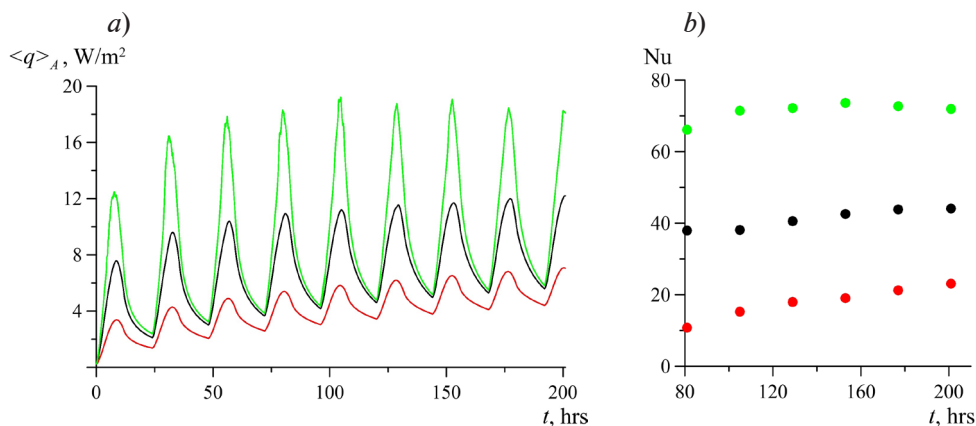


Рис. 8. Временная динамика средней плотности потока тепла на верхней стенке расчетной области (а) и числа Нуссельта (б), рассчитанные за период с 4-го по 9-й день (ежедневные данные в 15 ч) для вариантов V1 (кривая и символы черного цвета), V2 (они же красного цвета), V3 (они же зеленого цвета)

Максимальные пульсации наблюдаются в промежуток времени от 13 до 14 ч, при этом значение максимума изменяется день ото дня: по мере формирования CML и увеличения его толщины, максимум пульсаций сначала нарастает, а затем начинает колебаться вблизи некоторого значения, но, начиная примерно с девятого дня, максимум пульсаций скорости понижается. Это может косвенно свидетельствовать о том, что крупномасштабные структуры оказываются сильно зажатыми горизонтальными периодическими границами, что приводит к влиянию граничных условий на течение и подавление пульсаций в CML. Отметим, что во все рассмотренные моменты времени уровень вертикальных пульсаций оказывается заметно выше уровня горизонтальных. Что касается влияния степени прозрачности воды, то наибольшие значения $\langle V_i^2 \rangle_{t,A}$ наблюдаются для варианта V3, а наименьшие — для V2. По-видимому, это связано с тем, что в более прозрачных водах процесс обрушения температурного профиля идет менее интенсивно.

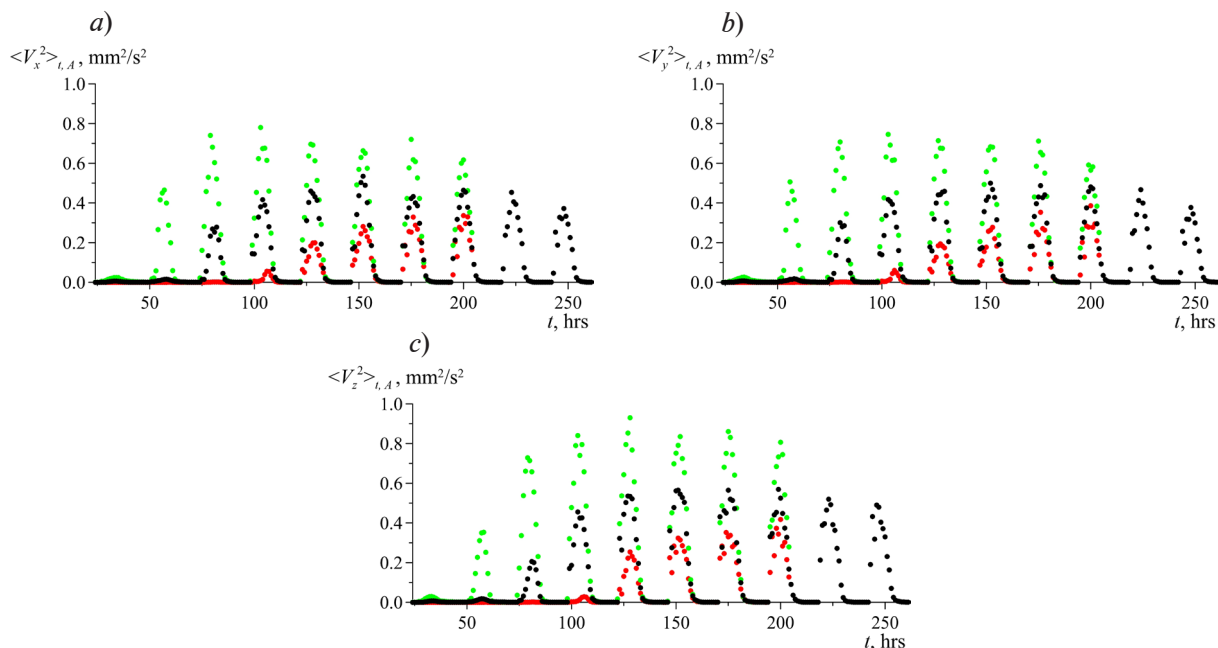


Рис. 9. Временные изменения горизонтальных (a, b) и вертикальных (c) пульсаций скоростей V_x (a), V_y (b) и V_z (c), осредненных по горизонтальной плоскости и по времени (период осреднения — 1 ч), для вариантов V1 (черные точки), V2 (красные точки) и V3 (зеленые точки).

Плоскость осреднения располагалась на расстоянии 2,5 м от верхней границы расчетной области

Заключение

В работе представлены результаты численного моделирования радиационно-генерируемой конвекции в модельной задаче, имитирующей реальные процессы, протекающие в покрытом льдом мелководном озере под действием проникающего солнечного излучения. Рассмотрено три варианта, которые различаются степенью прозрачностью воды (эта степень выражена разными значениями коэффициентов экстинкции γ). На основе неявного метода крупных вихрей (ILES) для всех вариантов исследован нестационарный процесс возникновения и эволюции конвективно-перемешанного слоя (CML), начиная от заданного стационарного состояния с линейным профилем температуры и нулевым полем скорости.

В результате моделирования установлено, что быстрее всего (в течение примерно 5 ч) формируется CML для варианта V3 (с наибольшим значением γ , т. е. наименьшей степенью прозрачности воды), в промежуточном (исходном) варианте V1 формирование CML происходит немного позднее (около 7 ч), а в варианте с наибольшей степенью прозрачности воды V2 полностью сформированный CML образуется только на третий день от начала расчета (примерно через 57 ч). При этом скорость роста температуры и глубины CML оказывается наибольшей с момента его возникновения для варианта V2 (наибольшая степень прозрачности воды).



Таким образом, несмотря на более позднее формирование CML в случае прозрачной воды (V2), его дальнейшая эволюция происходит несколько быстрее, чем в остальных вариантах с меньшей степенью прозрачности.

Расчет выполнен для периода времени в девять суток; в процессе компьютерного счета размер вихревых структур в перемешанном слое постепенно увеличивался и становился соизмеримым с размером расчетной области в горизонтальных направлениях.

Были рассчитаны интегральные характеристики CML, а именно – зависимость погружения глубины CML и его температуры от кумулятивной энергии, поступающей в систему, а также оценены значения коэффициента вовлечения. Установлено, что в целом динамика повышения температуры и глубины CML соответствует теоретическим представлениям и натурным наблюдениям; при этом для варианта с наибольшей степенью прозрачности воды (V2) коэффициент вовлечения оказывается заметно выше, чем для двух других вариантов.

Получены зависимости от времени теплового потока в лед (среднего по поверхности) и значения числа Нуссельта (средние за дневной период). Их анализ показал, что максимумы тепловых потоков в течение одного дня, так же, как и средние значения чисел Нуссельта, сначала возрастают день ото дня, а затем выходят на почти постоянное значение; при этом наблюдается сильная чувствительность тепловых потоков и чисел Нуссельта к степени прозрачности воды: чем менее прозрачная вода, тем больше тепловой поток в лед. Связано это с тем, что в случае более мутных вод толщина подледного градиентного слоя наименьшая, а величина градиента температуры в этом слое наибольшая.

Рассмотрена также эволюция пульсаций компонент скорости, которая тоже носит периодический характер: в течение дня пульсации нарастают вслед за увеличением интенсивности радиационного нагрева, а затем убывают практически до нуля в ночное время. По мере формирования CML и увеличения его толщины, максимум дневных пульсаций сначала возрастает, а затем начинает колебаться вблизи некоторого значения. Начиная же примерно с девятого дня максимум пульсаций скорости начинает уменьшаться, что может свидетельствовать о заметном влиянии граничных условий на течение, приводящее к подавлению пульсаций в CML. Расчеты также показали, что чем выше степень прозрачности воды, тем ниже значения пульсаций скорости. Это связано с менее интенсивным процессом обрушения температурного профиля в верхней части CML.

Таким образом, проведенное исследование позволило получить новые сведения о влиянии прозрачности воды на формирование и развитие CML при радиационном прогреве покрытых льдом озер.

Что касается продолжения исследований, то для рассмотрения более протяженных периодов времени необходимо использовать расчетную область большего размера, поскольку граничные условия начинают оказывать влияние на течения, что приводит к подавлению пульсаций в слое CML и может повлиять на характеристики конвекции.

Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.spbstu.ru).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Farmer D. M. Penetrative convection in the absence of mean shear // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1975. Vol. 101. No. 430. Pp. 869–891.
2. Jonas T., Terzhevik A. Y., Mironov D. V., Wüest A. Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated by using temperature microstructure technique // Journal of Geophysical Research. 2003. Vol. 108. No. 6. P. 3183.
3. Bouffard D., Wüest A. Convection in lakes // Annual Review of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 51. No. 1. Pp. 189–215.
4. Kelley D. Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension // Journal of Plankton Research. 1997. Vol. 19. No. 12. Pp. 1859–1880.
5. Kiili M., Pulkkanen M., Salonen K. Distribution and development of under-ice phytoplankton in 90-m deep water column of Lake Päijänne (Finland) during spring convection // Aquatic Ecology. 2009. Vol. 43. No. 3. Pp. 707–713.

6. Huang W., Zhang Z., Li Z., Leppäranta M., Arvola L., Song S., Huotari J., Lin Z. Under-ice dissolved oxygen and metabolism dynamics in a shallow lake: The critical role of ice and snow // *Water Resources Research*. 2021. Vol. 57. No. 5. P. e2020WR027990.
7. Mironov D., Terzhevik A., Kirillin G., Jonas T., Malm J., Farmer D. Radiatively driven convection in ice-covered lakes: Observations, scaling, and a mixed layer model // *Journal of Geophysical Research*. 2002. Vol. 107. No. C4. P. 3032.
8. Mironov D. V., Terzhevik A. Yu. Spring convection in ice-covered freshwater lakes // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2000. Vol. 36. No. 5. Pp. 627–634.
9. Mironov D. V., Danilov S. D., Olbers D. J. Large-eddy simulation of radiatively-driven convection in ice covered lakes // Casamitjana X. (Ed.) *Proceedings of the Sixth Workshop on Physical Processes in Natural Waters*. June 27–29, 2001; Girona, Catalonia, Spain. 2001. Pp. 71–75.
10. Santo M. A., Toffolon M., Zanier G., Giovannini L., Armenio V. Large eddy simulation (LES) of wind-driven circulation in a peri-alpine lake: Detection of turbulent structures and implications of a complex surrounding orography // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2017. Vol. 122. No. 6. Pp. 4704–4722.
11. Zhang Y., Huang Q., Ma Y., Luo J., Wang C., Li Z., Chou Y. Large eddy simulation of boundary-layer turbulence over the heterogeneous surface in the source region of the Yellow River // *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2021. Vol. 21. No. 20. Pp. 15949–15968.
12. Silano G., Sreenivasan K. R., Verzicco R. Numerical simulations of Rayleigh–Bénard convection for Prandtl numbers between 10^{-1} and 10^4 and Rayleigh numbers between 10^5 and 10^9 // *Journal of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 662. 10 November. Pp. 409–446.
13. Смирнов С. И., Смирнов Е. М., Смирновский А. А. Влияние теплопереноса в торцевых стенках на турбулентную конвекцию ртути во вращающемся цилиндре // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 1. С. 31–46.
14. Yigit S., Hasslberger J., Klein M. Assessment of numerical dissipation in Implicit LES of turbulent Rayleigh–Bénard convection // García-Villalba M., Kuerten H., Salvetti M. (Eds). *Direct and Large Eddy Simulation XII (DLES 2019)*. Conference Proceedings. Book series: ERCOFTAC (ERCO, Vol 27). Switzerland: Springer, Cham. 2020. Pp. 263–269.
15. Smirnov S., Smirnovsky A., Zdorovenova G., Zdorovenov R., Palshin N., Novikova I., Terzhevik A., Bogdanov S. Water temperature evolution driven by solar radiation in an ice-covered lake: A numerical study and observational data // *Water*. 2022. Vol. 14. No. 24. P. 4078.
16. Смирновский А. А., Смирнов С. И., Богданов С. Р., Здорovenнов Р. Э., Здорovenнова Г. Э. Численное моделирование турбулентного перемешивания в мелководном озере для периодов подледной конвекции // *Водные ресурсы*. 2023. Т. 50. № 5. С. 622–632.
17. Smirnov S., Smirnovsky A., Zdorovenova G., Zdorovenov R., Efremova T., Palshin N., Bogdanov S. Numerical simulation of radiatively driven convection in a small ice-covered lake with a lateral pressure gradient // *Water*. 2023. Vol. 15. No. 22. P. 3953.
18. Heiskanen J., Mammarella I., Ojala A., et al. Effects of water clarity on lake stratification and lake-atmosphere heat exchange // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. 2015. Vol. 120. No. 15. Pp. 7412–7428.
19. Zhang Q., Ma X. How does lake water clarity affect lake thermal processes? // *Heliyon*. 2022. Vol. 8. No. 8. P. e10359.
20. Wang M., Wen L., Li Z., Leppäranta M., Stepanenko V., Zhao Y., Niu R., Yang L., Kirillin G. Mechanisms and effects of under-ice warming water in Ngoring lake of Qinghai–Tibet Plateau // *The Cryosphere*. 2022. Vol. 16. No. 9. Pp. 3635–3648.
21. Петров М. П., Тержевик А. Ю., Здорovenнов Р. Э., Здорovenнова Г. Э. Особенности термической структуры мелководного озера в начале зимы // *Водные ресурсы*. 2006. Т. 33. № 2. С. 154–162.
22. Смирнов Е. М., Зайцев Д. К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // *Научно-технические ведомости СПбГПУ*. 2004. № 2 (36). С. 70–81.
23. Smirnov E. M., Zaitsev D. K., Smirnovsky A. A., Kolesnik E. V., Pozhilov A. A. Assessment of several advanced numerical algorithms implemented in the CFD Code SINF/Flag-S for supercomputer simulations // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2024. Vol. 11. No. 2. Pp. 14–31.
24. Bogdanov S., Zdorovenova G., Volkov S., Zdorovenov R., Palshin N., Efremova T., Terzhevik A., Bouffard D. Structure and dynamics of convective mixing in Lake Onego under ice-covered conditions // *Inland Waters*. 2019. Vol. 9. No. 2. Pp. 177–192.



25. **Зилитинкевич С. С.** Проникающая турбулентная конвекция. Таллин: Валгус, 1989. 210 с.
26. **Carson D. J., Smith F. B.** Thermodynamic model for the development of a convectively unstable boundary layer // F. N. Frenkiel, R.E. Munn (Eds). Turbulent diffusion in environmental pollution. Book series "Advances in Geophysics". Vol. 18. Part. A. Proceedings of a Symposium held at Charlottesville. 8–14 April 1973, Virginia, USA. New York; Academic Press (Elsevier), 1975. Pp. 111–124.
27. **Bouillaut V., Lepot S., Aumaotre S., Gallet B.** Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 861. 25 February. P. R5.

REFERENCES

1. **Farmer D. M.**, Penetrative convection in the absence of mean shear, Q. J. R. Meteorol. Soc. 101 (430) (1975) 869–891.
2. **Jonas T., Terzhevik A. Y., Mironov D. V., Wüest A.**, Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated by using temperature microstructure technique, J. Geophys. Res. 08 (6) (2003) 3183.
3. **Bouffard D., Wüest A.**, Convection in lakes, Annu. Rev. Fluid Mech. 51 (1) (2019) 189–215.
4. **Kelley D.**, Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension, J. Plankton Res. 19 (12) (1997) 1859–1880.
5. **Kiili M., Pulkkanen M., Salonen K.**, Distribution and development of under-ice phytoplankton in 90-m deep water column of Lake Päijänne (Finland) during spring convection, Aquat. Ecol. 43 (3) (2009) 707–713.
6. **Huang W., Zhang Z., Li Z., et al.**, Under-ice dissolved oxygen and metabolism dynamics in a shallow lake: The critical role of ice and snow, Water Resour. Res. 57 (5) (2021) e2020WR027990.
7. **Mironov D., Terzhevik A., Kirillin G., et al.**, Radiatively driven convection in ice-covered lakes: Observations, scaling, and a mixed layer model, J. Geophys. Res. 107 (C4) (2002) 3032.
8. **Mironov D. V., Terzhevik A. Yu.**, Spring convection in ice-covered freshwater lakes, Izv. — Atmos. Ocean. Phys. 36 (5) (2000) 627–634.
9. **Mironov D. V., Danilov S. D., Olbers D. J.**, Large-eddy simulation of radiatively-driven convection in ice covered lakes, In book: Casamitjana X (Ed.), Proc. Sixth Workshop Phys. Proces. Nat. Waters. June 27–29, 2001; Girona, Catalonia, Spain (2001) 71–75.
10. **Santo M. A., Toffolon M., Zanier G., et al.**, Large eddy simulation (LES) of wind-driven circulation in a peri-alpine lake: Detection of turbulent structures and implications of a complex surrounding orography, J. Geophys. Res. Oceans. 122 (6) (2017) 4704–4722.
11. **Zhang Y., Huang Q., Ma Y., et al.**, Large Eddy Simulation of boundary-layer turbulence over the heterogeneous surface in the source region of the Yellow River, Atmos. Chem. Phys. 21 (20) (2021) 15949–15968.
12. **Silano G., Sreenivasan K. R., Verzicco R.**, Numerical simulations of Rayleigh–Bénard convection for Prandtl numbers between 10^{-1} and 10^4 and Rayleigh numbers between 10^5 and 10^9 , J. Fluid Mech. 662 (10 Nov) (2010) 409–446.
13. **Smirnov S. I., Smirnov E. M., Smirnovsky A. A.**, Endwall heat transfer effects on the turbulent mercury convection in a rotating cylinder, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 10 (1) (2017) 31–46 (in Russian).
14. **Yigit S., Hasslberger J., Klein M.**, Assessment of numerical dissipation in Implicit LES of turbulent Rayleigh–Bénard Convection, In book: García-Villalba M., Kuerten H., Salvetti M. (Eds), Direct and Large Eddy Simulation XII (DLES 2019). Conf. Proc., Book Ser. ERCOFTAC (ERCO, Vol 27), Springer, Cham. (2020) 263–269.
15. **Smirnov S., Smirnovsky A., Zdorovenova G., et al.**, Water temperature evolution driven by solar radiation in an ice-covered lake: A numerical study and observational data, Water. 14 (24) (2022) 4078.
16. **Smirnovsky A. A., Smirnov S. I., Bogdanov S. R., et al.**, Numerical simulation of turbulent mixing in a shallow lake for periods of under-ice convection, Water Resources. 50 (5) (2023) 768–778.
17. **Smirnov S., Smirnovsky A., Zdorovenova G., et al.**, Numerical simulation of radiatively driven convection in a small ice-covered lake with a lateral pressure gradient, Water. 15 (22) (2023) 3953.

18. Heiskanen J., Mammarella I., Ojala A., et al., Effects of water clarity on lake stratification and lake-atmosphere heat exchange, *J. Geophys. Res. Atmos.* 120 (15) (2015) 7412–7428.
19. Zhang Q., Ma X., How does lake water clarity affect lake thermal processes? *Heliyon.* 8 (8) (2022) e10359.
20. Wang M., Wen L., Li Z., et al., Mechanisms and effects of under-ice warming water in Ngoring Lake of Qinghai–Tibet Plateau, *Cryosphere.* 16 (9) (2022) 3635–3648.
21. Petrov M. P., Terzhevik A. Yu., Zdorovenov R. E., Zdorovenova G. E., The thermal structure of a shallow lake in early winter, *Water Resources.* 33 (2) (2006) 135–143.
22. Smirnov E. M., Zaitsev D. K., Finite volume method as applied to hydro-and gas dynamics and heat transfer problems in complex geometry domains, *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti (SPbGTU) [Scientific and Technical Journal (SPbGTU)].* (2 (36)) (2004) 70–81 (in Russian).
23. Smirnov E. M., Zaitsev D. K., Smirnovsky A. A., et al., Assessment of several advanced numerical algorithms implemented in the CFD Code SINF/Flag-S for supercomputer simulations, *Supercomput. Front. Innov.* 11 (2) (2024) 14–31.
24. Bogdanov S., Zdorovenova G., Volkov S., et al., Structure and dynamics of convective mixing in Lake Onego under ice-covered conditions, *Inland Waters.* 9 (2) (2019) 177–192.
25. Zilitinkevich S. S., *Turbulent penetrative convection*, Edit. by B. Henderson-Sellers, Avebury Technical, Aldershot, UK, 1991.
26. Carson D. J., Smith F. B., Thermodynamic model for the development of a convectively unstable boundary layer, In book: F. N. Frenkiel, R.E. Munn (Eds). *Turbulent diffusion in environmental pollution. Book series “Advances in Geophysics”. Vol. 18. Part. A. Proc. Sympos. at Charlottesville, 8–14 April 1973, Virginia, USA, Academic Press (Elsevier), New York (1975) 111–124.*
27. Bouillaut V., Lepot S., Aumaotre S., Gallet B., Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment, *J. Fluid Mech.* 861 (25 Febr) (2019) R5.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СМИРНОВ Сергей Игоревич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
 sergeysmirnov92@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-3972-9259

СМИРНОВСКИЙ Александр Андреевич — кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 smirta@mail.ru
 ORCID: 0000-0001-7608-7120

БОГДАНОВ Сергей Рэмович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
 sergey.r.bogdanov@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-4150-2712

ЗДОРОВЕННОВА Галина Эдуардовна — кандидат географических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
 zdorovennova@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-2726-0104



ЕФРЕМОВА Татьяна Владимировна — кандидат географических наук, старший научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

efremova@nwpi.krc.karelia.ru

ORCID: 0000-0003-0313-6731

ПАЛЬШИН Николай Иннокентьевич — кандидат географических наук, старший научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

npalshin@mail.ru

ORCID: 0000-0003-1540-3788

ЗДОРОВЕННОВ Роман Эдуардович — кандидат географических наук, старший научный сотрудник лаборатории гидрофизики Института водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, Республика Карелия, Россия.

185000, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

romga74@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1695-4872

THE AUTHORS

SMIRNOV Sergei I.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

sergeysmirnov92@mail.ru

ORCID: 0000-0002-3972-9259

SMIRNOVSKY Alexander A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

smirta@mail.ru

ORCID: 0000-0001-7608-7120

BOGDANOV Sergey R.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

sergey.r.bogdanov@mail.ru

ORCID: 0000-0003-4150-2712

ZDOROVENNOVA Galina E.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

zdorovennova@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2726-0104

EFREMOVA Tatiana V.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

efremova@nwpi.krc.karelia.ru

ORCID: 0000-0003-0313-6731

PALSHIN Nikolay I.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

npalshin@mail.ru

ORCID: 0000-0003-1540-3788

ZDOROVENNOV Roman E.

Northern Water Problems Institute of Karelian Research Centre of RAS

11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185000, Russia

romga74@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1695-4872

*Статья поступила в редакцию 19.10.2024. Одобрена после рецензирования 26.11.2024.
Принята 26.11.2024.*

Received 19.10.2024. Approved after reviewing 26.11.2024. Accepted 26.11.2024.