

Механика

Научная статья

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18113>

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ЧОУ, СВЯЗАННОЙ С УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Д. О. Сердюк ¹, А. В. Земсков ^{1,2} , А. Ю. Ершова ¹

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия;

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
 azemskov1975@mail.ru

Аннотация. В работе исследована нестационарная динамика тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Чоу, связанной с упруго-инерционным основанием. Рассмотрена модель анизотропии, в которой упругая среда имеет одну плоскость симметрии, геометрически совпадающую со срединной плоскостью пластины. Основание пластины характеризуется его коэффициентом жесткости и массовым коэффициентом. Постановка задачи включает уравнения движения в перемещениях, начальные условия и условия на бесконечности. Решение задачи построено с применением метода фундаментальных решений и интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и Лапласа по времени. Оригинал по Фурье найден численно с применением метода интегрирования быстро осциллирующих функций. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: фундаментальное решение, анизотропный материал, пластина Чоу, нестационарное возмущение, интегральное преобразование

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00189).

Для цитирования: Сердюк Д. О., Земсков А. В., Ершова А. Ю. Нестационарная динамика анизотропной пластины Чоу, связанной с упруго-инерционным основанием // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 1. С. 149–162. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18113>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18113>

TRANSIENT DYNAMICS OF AN ANISOTROPIC CHOW PLATE MOUNTED ON AN ELASTIC-INERTIAL BASE

D. O. Serdyuk ¹, A. V. Zemskov ^{1,2} , A. Yu. Ershova ¹

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

² Institute of Mechanics, Lomonosov State University, Moscow, Russia
 azemskov1975@mail.ru

Abstract. In the paper, the unsteady dynamics of a thin elastic anisotropic unbounded Chow plate mounted on an elastic-inertial base has been studied. An anisotropy model where the elastic medium had one plane of symmetry geometrically coinciding with the median plane of the plate was considered. The base was specified by its stiffness coefficient and mass one. The problem statement included equations of motion in displacements, initial conditions and those

of infinity. The solution of the problem was constructed using the method of fundamental solutions and integral Fourier transforms in spatial coordinates and Laplace ones in time. The Fourier originals were found numerically using the method of integrating rapidly oscillating functions. An example of the calculation was given.

Keywords: fundamental solution, anisotropic material, Chow plate, transient waves, integral transformation

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Project No. 23-21-00189).

For citation: Serdyuk D. O., Zemskov A. V., Ershova A. Yu., Transient dynamics of an anisotropic Chow plate mounted on an elastic-inertial base, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 149–162. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18113>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Тонкостенные конструкции, в том числе пластины, относятся к числу конструктивных элементов, которые широко применяются в самых разных отраслях промышленности.

Легкость и рациональность форм, присущие таким конструкциям, сочетаются с их высокой технологичностью. Для их производства часто используются уже хорошо зарекомендовавшая себя технология листового проката [1, 2]. Развиваются и аддитивные технологии [3 – 5]. Для создания композиционных материалов исследуется возможность внедрения нитей сложной структуры [6], в том числе для производства материалов с пространственным армированием. Обращение к подобным технологиям приводит к целенаправленному или, как в случае технологии листового проката, побочному производству пластин, обладающих анизотропией свойств материала, включая конструктивную.

Необходимость в таких конструктивных решениях возникает в наукоемких отраслях, например в авиакосмической промышленности. Это, в свою очередь, стимулирует разработку соответствующих математических моделей и подходов к их решению при проектировании новых агрегатов. Несмотря на установившийся характер нагрузок в технических системах (циклические, статические), при моделировании импульсных или ударных воздействий необходимо пользоваться методами нестационарной динамики.

На этом пути решение соответствующих начально-краевых задач сопряжено с немалыми математическими трудностями, поскольку искомые результаты зависят не только от пространственных координат, но и от времени. При этом далеко не всегда имеется возможность воспользоваться процедурой разделения переменных, что существенно осложняет выполнение преобразования Лапласа как основного инструмента решения нестационарных задач.

Наиболее основательные исследования в области нестационарной динамики пластин начали проводиться во второй половины XX века, что существенным образом инициировано развитием вычислительной техники. В работах Т. С. Чоу [7, 8] были получены динамические уравнения ортотропных многослойных пластин на основе концепций балочной теории Тимошенко, которые учитывают эффекты поперечного сдвига и инерции вращения. К. Э. Фельстрём и О. Линдблом провели экспериментальные и теоретические исследования характера распространения нестационарных волн нормальных перемещений в изотропных, ортотропных и анизотропных пластинах для случая действия ударной нагрузки [9 – 11]. Ю. Микловиц в своих работах [12, 13] исследовал процессы распространения нестационарных изгибных волн в неограниченных изотропных пластинах и продольных волн в анизотропных пластинах. К. Дарос в своей работе [14] представил динамическое фундаментальное решение для анизотропных пластин Кирхгофа. В работах [15 – 21] методом конечных элементов проведены исследования нестационарной динамики анизотропных, трехслойных и многослойных пластин при ударных нагрузках и контактном воздействии.



Представленный краткий обзор охватывает широкий спектр подходов к исследованию нестационарных процессов в анизотропных пластинах. В современных исследованиях заметна тенденция к преобладающему применению численных процедур, основанных на применении методов конечных разностей, конечных и граничных элементов. При этом практически отсутствуют работы, посвященные разработке аналитических методов решения задач нестационарной динамики пластин. Между тем, именно аналитические решения позволяют выполнять полноценные параметрические исследования напряженно-деформированного состояния пластины в зависимости от характера нагрузки и физических свойств материала.

Следует также отметить достаточно большое разнообразие существующих моделей пластин — от наиболее простых, основанных на гипотезах Кирхгофа, до более сложных, типа Тимошенко, которые учитывают, в отличие от первых, сдвиговые деформации.

Теория пластин Чоу представляет собой некий промежуточный вариант, сочетающий в себе простоту модели Кирхгофа и возможность учета при этом сдвиговых деформаций.

В данной работе решена аналитически новая нестационарная задача теории упругости, а именно — найдены новые фундаментальные решения для нормального перемещения анизотропной пластины Чоу [7]. Достоверность теории пластины Чоу проверена экспериментально [9].

Постановка задачи

В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ исследуется нестационарная динамика неограниченной упругой пластины Чоу, связанной с упруго-инерционным основанием и находящейся под действием нестационарного давления $p(x_1, x_2, t)$ (рис. 1). Срединная плоскость пластины совпадает с плоскостью Ox_1x_2 .

Пластина имеет постоянную толщину. Основание характеризуется двумя параметрами: жесткостью c и массовым коэффициентом m_f .

Уравнения движения анизотропной пластины Чоу, находящейся под действием распределенной поверхностной нагрузки $p(x_1, x_2, t)$, имеют следующий вид [7, 8]:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w_b + w_s) &= hK_2 (w_s) + p - c (w_b + w_s) - m_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w_b + w_s), \\ \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_2^2} \right) &= IK_1 (w_b) + hK_2 (w_s), \end{aligned} \quad (1)$$

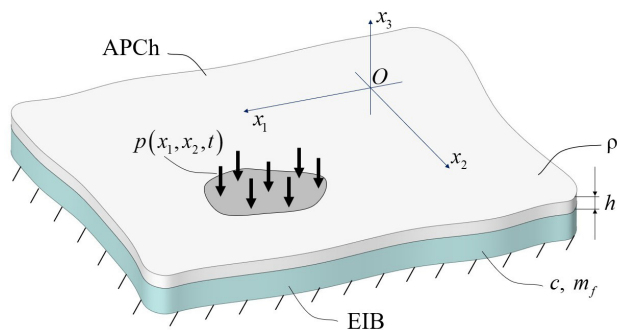


Рис. 1. Постановка задачи: неограниченная упругая анизотропная пластина Чоу (APCh) толщиной h связана с упруго-инерционным основанием (EIB) и подвергается нестационарному давлению $p(x_1, x_2, t)$; ρ — плотность материала APCh; c, m_f — жесткость и массовый коэффициент EIB

где p , Па, — нагрузка; ρ , кг/м³, — плотность материала пластины; h , м, — ее толщина; c , Па/м, — жесткость основания; m_f , кг/м², — его массовый коэффициент; w_b, w_s , м, — нормальные перемещения, вызванные изгибом и сдвигом пластины, соответственно; I , м³, — погонный момент инерции, $I = h^3/12$; K_1, K_2 — дифференциальные операторы уравнений движения.

Рассмотрена упругая среда с одной плоскостью симметрии. Эта плоскость геометрически совпадает со срединной плоскостью пластины Ox_1x_2 . В этом случае физические характеристики упругой среды характеризуются восемью компонентами тензора упругих постоянных:

$$c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{55}, c_{66},$$

и они входят в выражения для K_1 и K_2 :

$$K_1 = c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2(c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4c_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4c_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$

$$K_2 = c_{55} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$
(2)

Полное нормальное перемещение пластины Чоу определяется суммой нормальных перемещений, вызванных как ее изгибом, так и ее сдвигом:

$$w(x_1, x_2, t) = w_b(x_1, x_2, t) + w_s(x_1, x_2, t);$$

это особенность данной модели и отличает ее, в частности, от моделей пластин Кирхгофа и Тимошенко.

В предположении неограниченности пластины уравнения (1) дополняются условиями ограниченности искомых полей на бесконечности и нулевыми начальными условиями, которые означают, что пластина в начальный момент времени находится в невозмущенном состоянии:

$$w_b|_{t=0} = \frac{\partial w_b}{\partial t} \Big|_{t=0} = w_s|_{t=0} = \frac{\partial w_s}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w_b(x_1, x_2, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} w_s(x_1, x_2, t) = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$
(3)

Фундаментальные решения

Решение задачи (1) – (3) построено с применением метода фундаментальных решений (функций Грина, функций влияния):

$$w(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t G_b(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\tau d\zeta d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t G_s(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\tau d\zeta d\xi,$$
(4)

где $G_b(x_1, x_2, t)$, $G_s(x_1, x_2, t)$, с/кг, – фундаментальные решения (функции Грина) для нормальных перемещений, вызванных изгибом и сдвигом пластины, соответственно.

Постановка задачи о фундаментальных решениях следует из уравнений движения, начальных условий и условий ограниченности решения на бесконечности (1) – (3), где в качестве нагрузки выступает дельта-функция Дирака $\delta(x_1, x_2)\delta(t)$:

$$\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (G_b + G_s) = h K_2 (G_s) + \delta(x_1, x_2) \delta(t) - c (G_b + G_s) - m_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} (G_b + G_s),$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 G_b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_b}{\partial x_2^2} \right) = I K_1 (G_b) + h K_2 (G_s),$$
(5)

$$G_b|_{t=0} = \frac{\partial G_b}{\partial t} \Big|_{t=0} = G_s|_{t=0} = \frac{\partial G_s}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$
(6)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_b(x_1, x_2, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G_s(x_1, x_2, t) = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Решение задачи (5), (6) построено с применением прямых и обратных интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам x_1, x_2 и Лапласа по времени t [22]:



$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{g}^{FL} &= \mathbf{q}^{FL}, \\ \mathbf{g}^{FL} &= (G_b^{LF}, G_s^{LF})^T, \quad \mathbf{q}^{FL} = (q^{FL}, 0)^T, \quad q^{FL} = 1/(\rho h + m_f), \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} s^2 + \frac{c}{\rho h + m_f} & s^2 + \frac{hQ_1 + c}{\rho h + m_f} \\ -s^2 Q_2 - \frac{Q_3}{\rho} & \frac{12Q_1}{\rho h^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2) = c_{55}q_1^2 + c_{44}q_2^2, \quad Q_2 = Q_2(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2, \\ Q_3 &= Q_3(q_1, q_2) = c_{11}q_1^4 + c_{22}q_2^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})q_1^2q_2^2 + 4c_{16}q_1^3q_2 + 4c_{26}q_1q_2^3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{Bmatrix} G_b^{LF}(q_1, q_2, s) \\ G_s^{LF}(q_1, q_2, s) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \begin{Bmatrix} G_b(x_1, x_2, t) \\ G_s(x_1, x_2, t) \end{Bmatrix} e^{-i(q_1x_1 + q_2x_2) - s\tau} dx_1 dx_2 dt.$$

Решение системы (7) имеет вид

$$G_b^{LF} = \frac{1}{\rho h + m_f} \frac{R_1}{s^4 + R_3s^2 + R_4}, \quad G_s^{LF} = \frac{1}{\rho h + m_f} \frac{s^2 + R_2}{s^4 + R_3s^2 + R_4}; \quad (8)$$

$$R_1 = R_1(q_1, q_2) = \frac{12Q_1}{Q_2\rho h^2}, \quad R_2 = R_2(q_1, q_2) = \frac{Q_3}{Q_2\rho}, \quad (9)$$

$$R_3 = R_3(q_1, q_2) = R_1 + R_2 + \frac{Q_1h + c}{\rho h + m_f}, \quad R_4 = R_4(q_1, q_2) = \frac{c(R_1 + R_2) + Q_1hR_2}{\rho h + m_f}.$$

Корни знаменателя в решении (8) находятся по формулам

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \pm i\alpha, \quad s_{3,4} = \pm i\beta, \quad \alpha = \alpha(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{R_3 - \sqrt{D}}{2}}, \\ \beta &= \beta(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{R_3 + \sqrt{D}}{2}}, \quad D = R_3^2 - 4R_4, \quad \sqrt{D} < R_3. \end{aligned}$$

Оригиналы по Лапласу фундаментальных решений (8) строятся аналитически с помощью вычетов:

$$\begin{Bmatrix} G_b^F(q_1, q_2, t) \\ G_s^F(q_1, q_2, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 \lim_{s \rightarrow s_k} \left[(s - s_k) \begin{Bmatrix} G_b^{LF}(q_1, q_2, s_k) \\ G_s^{LF}(q_1, q_2, s_k) \end{Bmatrix} \right] e^{s_k t};$$

это приводит к выражениям

$$\begin{aligned} G_b^F(q_1, q_2, t) &= -\frac{1}{\rho h + m_f} [f_1 \sin(\alpha t) + f_2 \sin(\beta t)], \\ G_s^F(q_1, q_2, t) &= \frac{1}{\rho h + m_f} [g_1 \sin(\alpha t) + g_2 \sin(\beta t)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(q_1, q_2) = \frac{R_1}{\alpha^3 - \alpha\beta^2}, \quad f_2 = f_2(q_1, q_2) = \frac{R_1}{\beta^3 - \beta\alpha^2}, \\ g_1 &= g_1(q_1, q_2) = \frac{\alpha^2 - R_2}{\alpha^3 - \alpha\beta^2}, \quad g_2 = g_2(q_1, q_2) = \frac{\beta^2 - R_2}{\beta^3 - \beta\alpha^2}. \end{aligned}$$

Обращение преобразования Фурье осуществляется численно, на основе метода интегрирования быстро осциллирующих функций [23]:

$$G_b(x_1, x_2, t) = \frac{\Delta_1^2}{16\pi^2} \sum_{k=0}^{R-1} \sum_{f=0}^{R-1} e^{i \left[(q_{1k+1} + q_{1k})x_1 + (q_{2f+1} + q_{2f})x_2 \right]} L(x_1, x_2, t),$$

$$L_{kf}(x_1, x_2, t) = e^{-i(m_1+m_2)} G_b^F(q_{1k}, q_{2f}, t) + e^{i(-m_1+m_2)} G_b^F(q_{1k}, q_{2f+1}, t) +$$

$$+ e^{i(m_1-m_2)} G_b^F(q_{1k+1}, q_{2f}, t) + e^{i(m_1+m_2)} G_b^F(q_{1k+1}, q_{2f+1}, t), \quad (11)$$

$$G_s(x_1, x_2, t) = \frac{\Delta_2^2}{16\pi^2} \sum_{p=0}^{F-1} \sum_{c=0}^{F-1} e^{i \left[(q_{1p+1} + q_{1p})x_1 + (q_{2c+1} + q_{2c})x_2 \right]} J(x_1, x_2, t),$$

$$J(x_1, x_2, t) = e^{-i(j_1+j_2)} G_s^F(q_{1p}, q_{2c}, t) + e^{i(-j_1+j_2)} G_s^F(q_{1p}, q_{2c+1}, t) +$$

$$+ e^{i(j_1-j_2)} G_s^F(q_{1p+1}, q_{2c}, t) + e^{i(j_1+j_2)} G_s^F(q_{1p+1}, q_{2c+1}, t), \quad (12)$$

где

$$m_1 = \frac{\Delta_1}{2} x_1, \quad m_2 = \frac{\Delta_1}{2} x_2, \quad \Delta_1 = \frac{2E}{R},$$

$$q_{1k} = -E + k\Delta_1, \quad q_{2f} = -E + f\Delta_1, \quad q_{1k+1} = -E + (k+1)\Delta_1, \quad q_{2f+1} = -E + (f+1)\Delta_1,$$

$$j_1 = \frac{\Delta_2}{2} x_1, \quad j_2 = \frac{\Delta_2}{2} x_2, \quad \Delta_2 = \frac{2Q}{F},$$

$$q_{1p} = -Q + p\Delta_2, \quad q_{2c} = -Q + c\Delta_2, \quad q_{1p+1} = -Q + (p+1)\Delta_2, \quad q_{2c+1} = -Q + (c+1)\Delta_2.$$

В соотношениях (11), (12) параметры численного интегрирования E и Q (границы интегрирования), а также R и F (шаги интегрирования) вычисляются с использованием двойного итерационного цикла аналогично методу, описанному в статье [24]. Это позволяет обеспечить построение фундаментальных решений с заданной точностью.

Новые фундаментальные решения G_b (11) и G_s (12) позволяют исследовать нестационарную динамику не только анизотропных пластин, но и пластин, материал которых ортотропный, трансверсально-изотропный или изотропный.

Пример исследования фундаментальных решений

Условия задачи и анализ результатов. В качестве примера рассмотрим две пластины, выполненные из ортотропного (Е-стекловолокно [25]) и анизотропного (углепластик [26]) материалов. Физические свойства материалов пластин приведены в таблице. Обе пластины имеют толщину $h = 0,003$ м и связаны с упруго-инерционным основанием, обладающим жесткостью $c = 100$ Па/м и массовым коэффициентом $m_f = 30$ кг/м².

Таблица

Физические свойства материалов пластин, выбранных в качестве примера

Материал	Компоненты тензора упругих постоянных, ГПа	ρ , кг/м ³
Е-стекловолокно (ортотропный)	$c_{11} = 48,210, c_{12} = 5,357,$ $c_{16} = 0, c_{22} = 12,500, c_{26} = 0,$ $c_{44} = 3,850, c_{55} = c_{66} = 5,000$	2000
Углепластик (анизотропный)	$c_{11} = 95,50, c_{12} = 28,90, c_{16} = 44,70,$ $c_{22} = 25,90, c_{26} = 15,60, c_{44} = 4,40,$ $c_{55} = 6,45, c_{66} = 32,70$	1957

Примечание. Пластины имеют одинаковую толщину $h = 0,003$ м.



На рис. 2 представлены пространственные зависимости фундаментальных решений $G_b(x_1, x_2, t)$ и $G_s(x_1, x_2, t)$ в выбранный момент времени $t = 8$ мс (см. формулы (11) и (12) соответственно). Анализ этих данных позволяет выявить особенности распространения возмущений: для ортотропной среды отчетливо видны две плоскости симметрии, тогда как для анизотропной наблюдается асимметричный характер указанного распространения. Стоит отметить, что амплитуды фундаментальных решений G_s оказались на четыре порядка меньше амплитуд функции G_b . Следовательно, и вклад в нормальное перемещение пластины фундаментальное решение G_s даст незначительный.

Новые фундаментальные решения G_b (11) и G_s (12) также позволяют исследовать пластины без учета упруго-инерционного основания или рассматривать случай только упругого основания.

Оценим на примере нестационарной функции (11), как параметры инерционного основания c и m_f влияют на характер поведения фундаментального решения. Исходные геометрические данные и параметры анизотропного материала пластины из углепластика следующие [9]:

Толщина, м 0,0041,
Плотность материала, кг/м³ 1957,
Компоненты тензора
упругих постоянных, ГПа . . . $c_{11} = 23,51$, $c_{12} = 1,74$, $c_{16} = 0,88$,
 $c_{22} = 14,63$, $c_{26} = -3,54$, $c_{44} = 4,44$,
 $c_{55} = 4,22$, $c_{66} = 8,88$

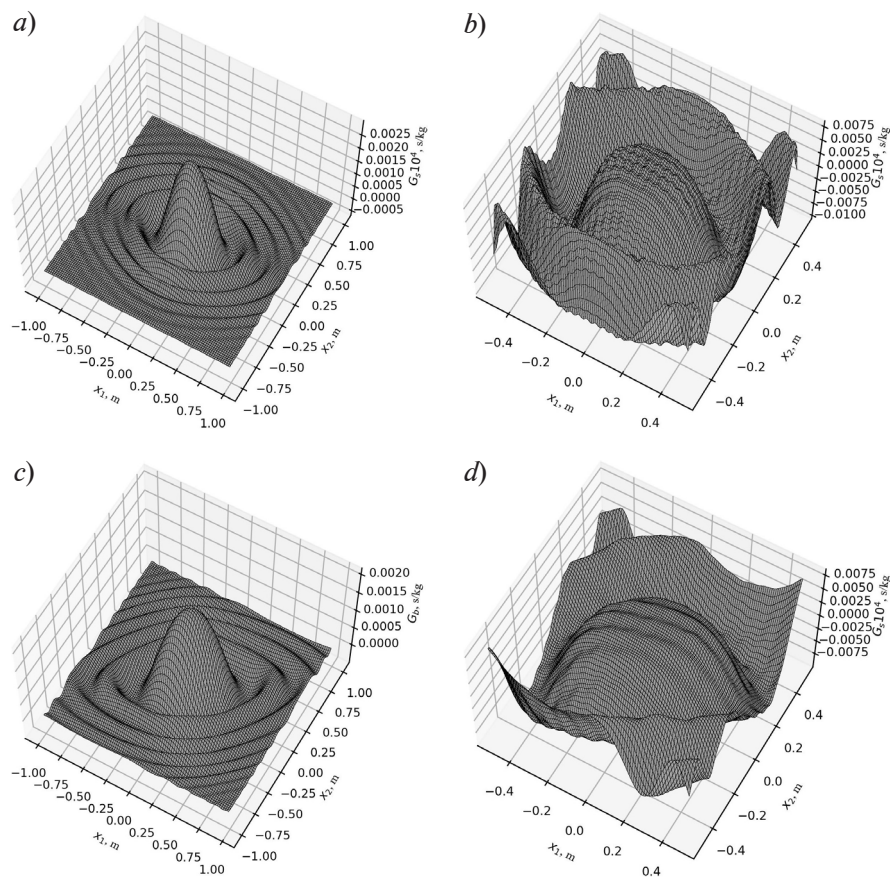


Рис. 2. 3D-зависимости фундаментальных решений $G_b(x_1, x_2, t)$ (a,c) и $G_s(x_1, x_2, t)$ (b,d) для нормальных перемещений, вызванных изгибом (a,c) и сдвигом (b,d) пластин из Э-стекловолокна (a,b) и углепластика (c,d). Взял момент времени $t = 8$ мс

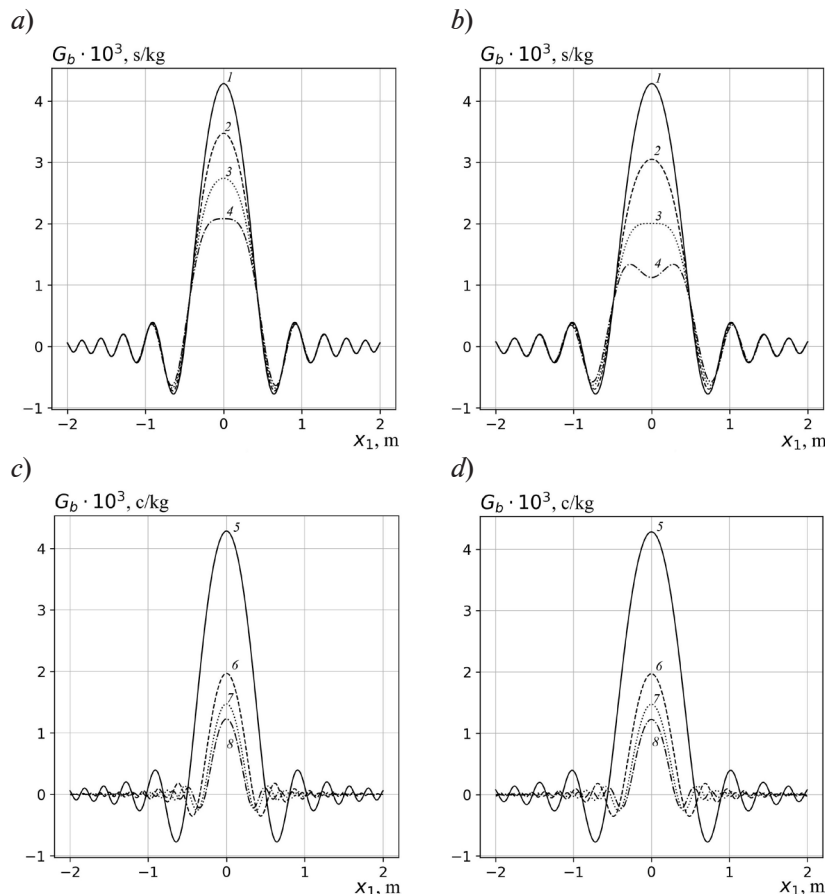


Рис. 3. Влияние коэффициента жесткости (*a, b*) и массового коэффициента (*c, d*) основания пластины Чоу на характер функции G_b в моменты времени t , мс: 8 (*a, c*) и 10 (*b, d*).

Значения коэффициента жесткости c , МПа/м: 0 (кривая 1), 1 (кривая 2), 2 (3), 3 (4) и $c = 100$ Па/м (кривые 5 – 8); значения массового коэффициента m_f , кг/м²: 0 (кривые 1 – 5), 30 (кривая 6), 60 (7), 90 (8)

На рис. 3, *a, b* представлено поведение фундаментального решения $G_b(x_1)$ в моменты времени $t = 8$ и 10 мс при варьировании значения коэффициента жесткости основания c , причем массовый коэффициент основания постоянный: $m_f = 0$ кг/м². Здесь кривые 1 – 4 соответствуют следующим значениям c , МПа/м: 0, 1, 2 и 3, соответственно. На рис. 3, *a, b* видно, что с увеличением жесткости основания максимальная амплитуда фундаментального решения снижается. Кроме того, при изменении момента времени t с 8 до 10 мс интенсивность снижения амплитуды возрастает по мере увеличения жесткости основания.

Рис. 3, *c, d* иллюстрирует поведение фундаментального решения $G_b(x_1)$ в моменты времени 8 и 10 мс при варьировании значения массового коэффициента основания m_f по постоянному значению $c = 100$ Па/м. Здесь кривые 5 – 8 соответствуют следующим значениям m_f , кг/м²: 0, 30, 60 и 90, соответственно. Следует отметить, что массовый коэффициент m_f по мере увеличения его значения не только снижает максимальную амплитуду фундаментального решения, но и замедляет во времени распространение возмущений (см. рис. 3, *c, d*).

Построенные новые фундаментальные решения (11), (12) позволяют исследовать нестационарную динамику анизотропных, ортотропных или изотропных пластин Чоу на упруго-инерционном основании или вообще без него при решении прямых, обратных или контактных нестационарных задач другими исследователями. Ниже приведен пример решения прямой задачи.

Пример решения прямой задачи. Рассматривается воздействие двух нагрузок, распределенных по прямоугольным площадкам, которые следуют выражению вида

$$p(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^2 A_i(t) H(t) H\left(\frac{c_i}{2} - |x_1 - a_i|\right) H\left(\frac{d_i}{2} - |x_2 - b_i|\right), \quad (13)$$

где

$$a_1 = -0,3, b_1 = 0, c_1 = 0,03, d_1 = 0,03, a_2 = 0,3, b_2 = 0, c_2 = 0,03, d_2 = 0,03,$$

$$A_1(t) = -120000 \sin(200\pi t) e^{-1000t} H(0,01 - t),$$

$$A_2(t) = -20000[(1 - \cos(200\pi t))H(0,01 - t)];$$

эти нагрузки действуют на пластину Чоу, связанную с упруго-инерционным основанием.

В этом выражении $A_i(t)$ – законы изменения амплитуды i -ой площадки давления; $H(t)$ – функция Хэвисайда; a_i, b_i – координаты по осям x_1, x_2 действия i -ой равнодействующей площадки давления в начальный момент времени; c_i, d_i – размеры i -ой прямоугольной площадки давления.

Материал пластины – углепластик (исходные расчетные данные, в том числе упругие постоянные, приведены выше). Толщина пластины и параметры основания приняты следующие: $h = 0,006$ м, $c = 0,4$ МПа/м, $m_f = 10$ кг/м².

Схема нагружения и закон для амплитуды нестационарной нагрузки приведены на рис. 4.

Подстановка выражения (13) в условия (4), с учетом фундаментальных решений (11) и (12), приводит к результатам, приведенным на рис. 5: нормальные перемещения анизотропной пластины Чоу на упруго-инерционном основании.

Пространственные картины нормального перемещения в фиксированные моменты времени (см. рис. 5) демонстрируют их сложную зависимость как от расстояний, так и от времени. В момент времени $t = 2$ мс хорошо виден асимметричный характер возмущений, обусловленный анизотропными свойствами материала пластины.

Далее можно наблюдать, как возмущения от двух источников давления постепенно достигают друг друга (момент $t = 4$ мс), что приводит к их объединению ($t = 6$ мс) и взаимовлиянию в целом ($t = 8$ мс).

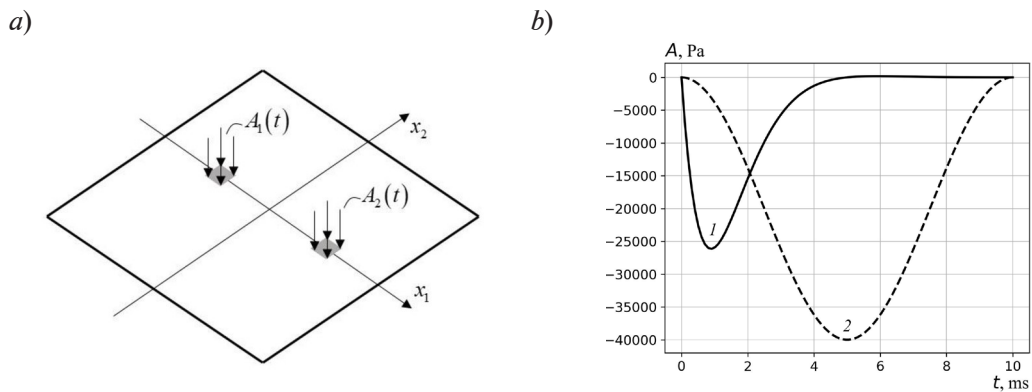


Рис. 4. Графическое представление условий задачи по нестационарному воздействию:
 а – схема нагружения; б – динамика амплитуд нагрузок $A_1(t)$ (кривая 1) и $A_2(t)$ (кривая 2)

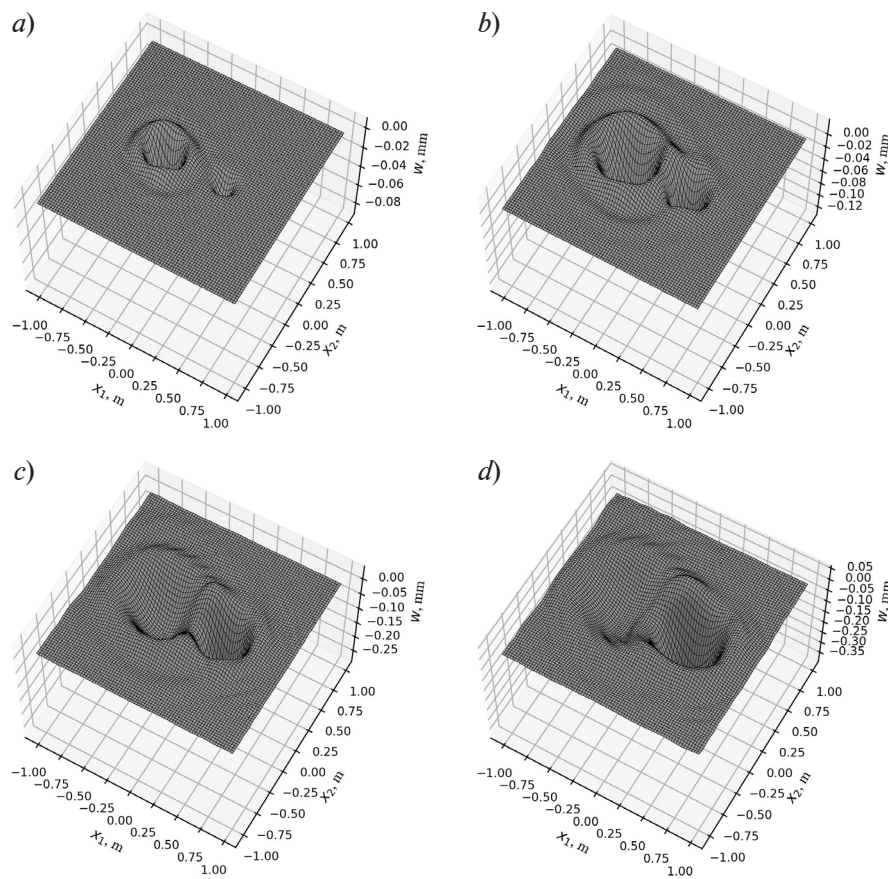


Рис. 5. Нестационарные нормальные перемещения анизотропной пластины Чоу на упруго-инерционном основании в разные моменты времени t , мс:
2 (a), 4 (b), 6 (c), 8 (d)

Заключение

В данной работе были получены новые решения для нестационарной задачи теории упругости, поставленной для тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Чоу, которая связана с упруго-инерционным основанием. Эти новые фундаментальные решения представляют собой значимый вклад в исследование нестационарных процессов не только в анизотропных пластинах, но и в изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных конструкциях.

Данное достижение открывает возможности для применения новых фундаментальных решений в различных областях, включая исследование нестационарной динамики пластин с начальными возмущениями, решение контактных задач, задач с адгезией, а также в обратных ретроспективных исследованиях для определения закона нагрузки на основе нормальных перемещений.

Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности выработки инженерных рекомендаций для решения прикладных задач, связанных с исследованием нестационарных нормальных перемещений пластин в моменты времени, когда возмущения еще не достигли опор. Связь функции нормальных перемещений с известными физическими соотношениями для погонных изгибающих моментов, а также с нормальными и касательными напряжениями и, кроме того (через обратный закон Гука), с деформациями позволяет существенно улучшить результаты исследований, основываясь на фундаментальных решениях, полученных в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипок Т. В., Зайдес С. А. Оценка анизотропии механических свойств листового проката из углеродистой стали // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2020. Т. 24. № 5. С. 1007–1018.
2. Trzepieciński T., Gelgele H. L. Investigation of anisotropy problems in sheet metal forming using finite element method // International Journal of Material Forming. 2011. Vol. 4. No. 4. Pp. 357–369.
3. Погодин В. А., Рабинский Л. Н., Ситников С. А. Технологические аспекты 3D печати деталей газоразрядной камеры электроракетного двигателя // СТИН. 2019. № 4. 20–22.
4. Qian X., Mayur O., Ayse A., Geoffrey M. G., Zachary P. S., William A. P., Ryan P. L., Jeffrey R. A critical review and commentary on recent progress of additive manufacturing and its impact on membrane technology // Journal of Membrane Science. 2022. Vol. 645. 5 March. P. 120041.
5. Абрамов А. А., Цыганков П. Ю., Меньшутин Н. В. Изучение методов и технологий трехмерной печати для получения высокопористых материалов // Успехи в химии и химической технологии. 2020. Т. 34. № 6 (229). С. 85–87.
6. Лурье С. А., Кривень Г. И., Рабинский Л. Н. О прочности модифицированного волокнистого композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры. 2019. Т. 11. № 1 (41), С. 1–15.
7. Chow T. S. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load // Journal of Composite Materials. 1971. Vol. 5. No. 3. Pp. 306–319.
8. Chow T. S. Theory of unsymmetric laminated plates // Journal of Applied Physics. 1975. Vol. 46. No. 1. Pp. 219–221.
9. Fallström K.-E., Lindblom O. Transient bending wave propagation in anisotropic plates // Journal of Applied Mechanics. 1998. Vol. 65. No. 4. Pp. 930–938.
10. Lindblom O., Naslund R., Persson L.-E., Fallström K.-E. A study of bending waves in infinite and anisotropic plates // Applications of Mathematics. 1997. Vol. 42. No. 3. Pp. 213–232.
11. Fallström K.-E., Olofsson K., Saldner H. O., Schedin S. Dynamic material parameters in an anisotropic plate estimated by phase-stepped holographic interferometry // Optics and Lasers in Engineering. 1996. Vol. 24. No. 5. Pp. 429–454.
12. Miklowitz J. Flexural stress waves in an infinite elastic plate due to a suddenly applied concentrated transverse load // Journal of Applied Mechanics. 1960. Vol. 27. No. 4. Pp. 681–689.
13. Scott R. A., Miklowitz J. Transient elastic waves in anisotropic plates // Journal of Applied Mechanics. 1967. Vol. 34. No. 1. Pp. 104–110.
14. Daros C. H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 54. No. 2. Pp. 19–27.
15. Liu G. R., Tani J., Ohyoshi T., Watanabe K. Watanabe transient waves in anisotropic laminated plates. Part 1: Theory // Journal of Vibration and Acoustics. 1991. Vol. 113. No. 2. Pp. 230–234.
16. Reddy J. N. Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1983. Vol. 19. No. 2. Pp. 237–255.
17. Wu H.-Y. T., Chang F.-K. Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact // Computers & Structures. 1989. Vol. 31. No. 3. Pp. 453–466.
18. Jin T., Yin X., Wang H., Zhang L., Qi X., Deng Q., Yu B., Hao Q., Dong X. Numerical–analytical model for transient dynamics of elastic–plastic plate under eccentric low-velocity impact // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 70. June. Pp. 490–511.
19. Zhang J., Zhu X., Yang X., Zhang W. Transient nonlinear responses of an auxetic honeycomb sandwich plate under impact loads // International Journal of Impact Engineering. 2019. Vol. 134. December. P. 103383.
20. Wahab M. A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates // Matériaux & Techniques. 2019. Vol. 107. No. 2. P. 201.
21. Raghu P., Rajagopal A., Reddy J. N. Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 20. No. 13. Pp. 1076–1084.
22. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
23. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1975. 630 с.

24. Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Фундаментальное решение для анизотропной пластины на инерционном основании // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 4. С. 523–535.

25. Nesry T., Singh B., Nallamothe R. B., Dunbushe C. G. Design and analysis of composite mono leaf spring for Toyota LHD Hilux Double Cabin // International Journal of Mechanical Engineering. 2022. Vol. 7. No. 6. Pp. 649–682.

26. Игумнов Л. А., Марков И. П., Пазин В. П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропии теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Сер. Механика. 2013. № 1 (3). С. 115–119.

REFERENCES

1. Osipok T. V., Zaides S. A., Evaluation of anisotropy of mechanical properties of carbon steel flat products, Proc. Irkutsk State Tech. Univ. 24 (5) (2020) 1007–1018 (in Russian).

2. Trzepieciński T., Gelgele H. L., Investigation of anisotropy problems in sheet metal forming using finite element method, Int. J. Mater. Form. 4 (4) (2011) 357–369.

3. Pogodin V. A., Rabinskij L. N., Sitnikov S. A., 3D printing of components for the gas-discharge chamber of electric rocket engines, Russ. Eng. Res. 39 (9) (2019) 797–799.

4. Qian X., Mayur O., Ayse A., et al., A critical review and commentary on recent progress of additive manufacturing and its impact on membrane technology, J. Membr. Sci. 645 (5 March) (2022) 120041.

5. Abramov A. A., Tsygankov P. U., Menshutina N. V. Studying methods and technologies of 3D printing for obtaining highly-porous materials, Usp. Khim. [Advances in Chemistry and Chemical Technology], 34 (6) (2020) 85–87 (in Russian).

6. Lurie S. A., Kriven G. I., Rabinskiy L. N., On strength of modified fiber composite with fuzzy fibers, Compos. Nanostruct. 11 (1) (2019) 1–15 (in Russian).

7. Chow T. S., On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load, J. Compos. Mater. 5 (3) (1971) 306–319.

8. Chow T. S., Theory of unsymmetric laminated plates, J. Appl. Phys. 46 (1) (1975) 219–221.

9. Fallström K.-E., Lindblom O., Transient bending wave propagation in anisotropic plates, J. Appl. Mech. 65 (4) (1998) 930–938.

10. Lindblom O., Naslund R., Persson L.-E., Fallström K.-E., A study of bending waves in infinite and anisotropic plates, Appl. Math. 42 (3) (1997) 213–232.

11. Fallström K.-E., Olofsson K., Saldner H. O., Schedin S., Dynamic material parameters in an anisotropic plate estimated by phase-stepped holographic interferometry, Opt. Lasers Eng. 24 (5) (1996) 429–454.

12. Miklowitz J., Flexural stress waves in an infinite elastic plate due to a suddenly applied concentrated transverse load, J. Appl. Mech. 27 (4) (1960) 681–689.

13. Scott R. A., Miklowitz J., Transient elastic waves in anisotropic plates, J. Appl. Mech. 34 (1) (1967) 104–110.

14. Daros C. H., The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates, Eng. Anal. Boundary Elem. 54 (2) (2015) 19–27.

15. Liu G. R., Tani J., Ohyoshi T., Watanabe K., Watanabe transient waves in anisotropic laminated plates. Part 1: Theory, J. Vib. Acoust. 113 (2) (1991) 230–234.

16. Reddy J. N., Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates, Int. J. Numer. Methods Eng. 19 (2) (1983) 237–255.

17. Wu H.-Y. T., Chang F.-K., Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, Comput. Struct. 1989. 31 (3) (1989) 453–466.

18. Jin T., Yin X., Wang H., et al., Numerical–analytical model for transient dynamics of elastic-plastic plate under eccentric low-velocity impact, Appl. Math. Model. 70 (June) (2019) 490–511.

19. Zhang J., Zhu X., Yang X., Zhang W., Transient nonlinear responses of an auxetic honeycomb sandwich plate under impact loads, Int. J. Impact Eng. 134 (Dec) (2019) 103383.

20. Wahab M. A., Jabbour T., Davies P., Prediction of impact damage in composite sandwich plates, Matér. Tech. 107 (2) (2019) 201.

21. Raghu P., Rajagopal A., Reddy J. N., Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates, Mech. Adv. Mater. Struct. 20 (13) (2020) 1076–1084.

22. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V., Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2004 (in Russian).
23. Bakhvalov N. S., Numerical methods: Analysis, algebra, ordinary difference equations, Mir Publishers, Moscow. 1977.
24. Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V., A fundamental solution for an anisotropic plate on an inertial foundation, Probl. Strength & Plasticity. 84 (4) (2022) 523–535 (in Russian).
25. Nesry T., Singh B., Nallamothu R. B., Dunbushe C. G., Design and analysis of composite mono leaf spring for Toyota LHD Hilux Double Cabin, Int. J. Mech. Eng. 7 (6) (2022) 649–682.
26. Igumnov L. A., Markov I. P., Pazin V. P., Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3D anisotropic elasticity, Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Mechanics. 1(3) (2013) 115–119 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СЕРДЮК Дмитрий Олегович — кандидат технических наук, доцент кафедры 902 Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

125993, Россия, Москва, Волоколамское шоссе, 4, А-80, ГСП-3

d.serduk55@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0082-1856

ЗЕМСКОВ Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского отдела кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник лаборатории динамических испытаний Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

125993, Россия, Москва, Волоколамское шоссе, 4, А-80, ГСП-3

azemskov1975@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2653-6378

ЕРШОВА Алена Юрьевна — кандидат технических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

125993, Россия, Москва, Волоколамское шоссе, 4, А-80, ГСП-3

yershova_a@mail.ru

ORCID: 0009-0006-4382-3244

THE AUTHORS

SERDYUK Dmitry O.

Moscow Aviation Institute (National Research University)

4 Volokolamskoe Ave, Moscow, 125993, Russia

d.serduk55@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0082-1856

ZEMSKOV Andrei V.

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Institute of Mechanics, Lomonosov State University

4 Volokolamskoe Ave, Moscow, 125993, Russia

azemskov1975@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2653-6378

ERSHOVA Alena Yu.

Moscow Aviation Institute (National Research University)

4 Volokolamskoe Ave, Moscow, 125993, Russia

yershova_a@mail.ru

ORCID: 0009-0006-4382-3244

*Статья поступила в редакцию 02.07.2024. Одобрена после рецензирования 26.11.2024.
Принята 26.11.2024.*

Received 02.07.2024. Approved after reviewing 26.11.2024. Accepted 26.11.2024.