

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические
науки

ТОМ 18, №3
2025

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2025

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Боровков А.И., проректор по перспективным проектам;

Жуков А.Е., чл.-кор. РАН;

Рудской А.И., академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – главный редактор;

Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – зам. главного редактора;

Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия – ответственный секретарь;

Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Безпрозванный И.Б., д-р биол. наук, профессор, Юго-Западный медицинский центр
Техасского университета, Даллас, США;

Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Донецкий Д.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, университет штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, США;

Дубов В.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Карасёв П.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Лобода О.С., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия;

Малерб Й.Б., Dr.Sc. (Physics), профессор, университет Претории, ЮАР;

Остряков В.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Привалов В.Е., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Смирнов Е.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Соловьёв А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, Научно-исследовательский центр мезобионаносистем (MBN),
Франкфурт-на-Майне, Германия;

Таганцев А.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, Швейцарский федеральный институт технологий,
Лозанна, Швейцария;

Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;

Хейфец А.С., Ph.D. (Physics), профессор, Австралийский национальный университет,
Канберра, Австралия;

Черепанов А.С., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия.

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

Журнал индексируется в базах данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), **Scopus**, а также включен в базы данных «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте <http://www.elibrary.ru>, и «**Directory of Open Access Journals**» (DOAJ).

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства:

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

Тел. редакции 8 (812) 552-62-16.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION



ST. PETERSBURG STATE
POLYTECHNICAL UNIVERSITY
JOURNAL

Physics
and Mathematics

**VOLUME 18, No.3,
2025**

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2025

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS

JOURNAL EDITORIAL COUNCIL

A.I. Borovkov – vice-rector for perspective projects;

V.A.I. Rudskoy – full member of RAS;

A.E. Zhukov – corresponding member of RAS.

JOURNAL EDITORIAL BOARD

V.K. Ivanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – editor-in-chief;

A.E. Fotiadi – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – deputy editor-in-chief;

V.M. Kapralova – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – executive secretary;

V.I. Antonov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

I.B. Bezprozvanny – Dr. Sci. (biology), prof., The University of Texas Southwestern Medical Center, Dallas, TX, USA;

A.V. Blinov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

A.S. Cherepanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

D.V. Donetski – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., State University of New York at Stony Brook, NY, USA;

V.V. Dubov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

D.A. Firsov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

P.A. Karaseov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

A.S. Kheifets – Ph.D., prof., Australian National University, Canberra, Australia;

O.S. Loboda – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

J.B. Malherbe – Dr. Sci. (physics), prof., University of Pretoria, Republic of South Africa;

V.M. Ostryakov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

V.E. Privalov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

E.M. Smirnov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;

A.V. Solov'yov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., MBN Research Center, Frankfurt am Main, Germany;

A.K. Tagantsev – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland;

I.N. Toptygin – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia.

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), **Scopus**, the **Russian Science Citation Index** (RSCI) and the **Directory of Open Access Journals** (DOAJ) databases.

© Scientific Electronic Library (<http://www.elibrary.ru>).

No part of this publication may be reproduced without clear reference to the source.

The views of the authors may not represent the views of the Editorial Board.

Address:

195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

Phone: 8 (812) 552-62-16.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

Содержание

Физика конденсированного состояния

- Вахрушев С. Б., Реймерс С. А., Бронвальд Ю. А.** *Критическое рассеяние синхротронного излучения в цирконате-титанате свинца (PZT2.4) с использованием модели Ласта для мягкой моды* 9

Математическое моделирование физических процессов

- Алифов А. А.** *Влияние нелинейного параметрического возбуждения на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний* 20

Математическая физика

- Буляница А. Л., Бердников А. С., Евстапов А. А.** *Оптимизированный тау-метод Ланцоша* 30

Приборы и техника физического эксперимента

- Телегин А. М., Калаев М. П.** *Датчик микрометеороидов и частиц космического мусора на основе пленочной катушки индуктивности* 49

Физическая оптика

- Алексеев А. А., Плешаков И. В., Кузьмин Ю. И., Фофанов Я. А.** *Двухлучевой метод исследования неоднородности, индуцированной лазерным излучением в магнитной жидкости* 60

Физическое материаловедение

- Тонков Д. Н., Кобыляцкая М. И., Васильева Е. С., Гасумянц В. Э., Толочко О. В.** *Электрические и механические свойства гибких полимерных композиционных материалов с различными углеродными наполнителями* 68

Ядерная физика

- Ларионова Д. М., Бердников Я. А., Котов Д. О.** *Анализ особенностей рождения заряженных адронов в столкновениях ядер висмута при энергии 9,2 ГэВ с помощью модели Blast-Wave* 82

- Лобанов А. А., Бердников Я. А.** *Асимметрии прямых фотонов в продольно-поляризованных протон-протонных столкновениях при энергиях 9 – 27 ГэВ* 91

- Шапаев Д. С., Бердников Я. А.** *Сравнительный анализ особенностей рождения адронов в дейтрон-дейтронных взаимодействиях при энергиях 13,5 и 27,0 ГэВ* 98

Теоретическая физика

- Акинцов Н. С., Невечеря А. П., Кожевников В. Ю., Копытов Г. Ф., Цао Т.** *Интегралы движения релятивистской частицы в измерениях $1 + 1$ со связанными параметрами (статья на английском языке)* 107

Механика

- Федотов А. В., Беляев А. К.** *Активное гашение изгибных колебаний балок Тимошенко с использованием наблюдателей состояния* 127

Фролова К. П., Бессонов Н. М., Вильчевская Е. Н. *Решение задачи массопругости при наличии неидеальных контактов на внутренних границах двухфазного материала* 141

Сизиков В. С. *Устойчивость самосинхронизации вибровозбудителей двухмассового аппарата для переработки зернистых материалов* 156

Contents

Condensed matter physics

- Vakhrushev S. B., Reimers S. A., Bronwald Iu. A.** *Critical scattering of synchrotron radiation in the lead zirconate-titanate (PZT2.4) using the Last model for the soft mode* 9

Simulation of physical processes

- Alifov A. A.** *The influence of nonlinear parametric excitation on the interaction of forced, parametric and self-oscillations* 20

Mathematical physics

- Bulyanitsa A. L., Berdnikov A. S., Evstrapov A. A.** *An optimized Lanczos Tau-method* 30

Experimental technique and devices

- Telegin A. M., Kalaev M. P.** *A detector of micrometeoroids and space debris particles based on a film inductance coil* 49

Physical optics

- Alekseev A. A., Pleshakov I. V., Kuzmin Yu. I., Fofanov Ya. A.** *A dual-beam method for studying the inhomogeneity induced by laser radiation in a magnetic fluid* 60

Physical materials technology

- Tonkov D. N., Kobyl'yatskaya M. I., Vasilyeva E. S., Gasumyants V. E., Tolochko O. V.** *Electrical and mechanical properties of flexible polymer composite materials with various carbon fillers* 68

Nuclear physics

- Larionova D. M., Berdnikov Ya. A., Kotov D. O.** *An analysis of the features of charged hadron production in collisions of bismuth nuclei at an energy of 9.2 GeV using the Blast-Wave model* 82

- Lobanov A. A., Berdnikov Ya. A.** *Direct photon asymmetries in the longitudinally polarized proton-proton collisions at energies from 9 to 27 GeV* 91

- Shapaev D. S., Berdnikov Ya. A.** *A comparative analysis of hadron creation in deuteron-deuteron interactions at energies of 13.5 and 27.0 GeV* 98

Theoretical physics

- Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kozhevnikov V. Yu., Kopytov G. F., Cao T.** *Integrals of motion of a relativistic particle in 1 + 1 dimensions with coupled parameters* 107

Mechanics

- Fedotov A. V., Belyaev A. K.** *Active control of bending vibrations of Timoshenko beams using state observers* 127

Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N. *A solution to the problem of elasticity caused by mass transport in the presence of imperfect contacts at the internal interfaces of a two-phase material* 141

Sizikov V. S. *Self-synchronization stability of vibration excitors of a two-mass apparatus for processing granular materials* 156

Физика конденсированного состояния

Научная статья

УДК 538.913

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18301>


КРИТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИРКОНАТЕ-ТИТАНАТЕ СВИНЦА (PZT2.4) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ЛАСТА ДЛЯ МЯГКОЙ МОДЫ

С. Б. Вахрушев^{1,2,3}, С. А. Реймерс^{2,3} , Ю. А. Бронвальд¹

¹ Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия;

³ Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Россия

 serafim.reimers@yandex.ru

Аннотация. В работе проведено экспериментальное и теоретическое исследование критического рассеяния для соединения $\text{PbZr}_{0.976}\text{Ti}_{0.024}\text{O}_3$ (PZT2.4), в окрестности центра зоны Бриллюэна с учетом межмодового взаимодействия. Измерение рассеяния проводилось на Европейском источнике синхротронного излучения (ESRF). Одномерные профили зависимости интенсивности рассеяния от волнового вектора были получены с использованием специально разработанных программ. Для оптической мягкой моды в центре зоны Бриллюэна была использована модель Ласта. Путем количественного анализа профиля рассеяния для мягкого направления $[1\ 0\ 1]$ определены частоты и векторы поляризации перенормированных мод. Достигнуто хорошее согласие модельного расчета с экспериментальными данными. Прослежено изменение вектора поляризации низшей поперечной акустической моды как функции приведенного волнового вектора.

Ключевые слова: сегнетоэлектрик, антисегнетоэлектрик, фазовый переход, динамика решетки, критическое рассеяние

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FEME-2024-0005).

Для цитирования: Вахрушев С. Б., Реймерс С. А., Бронвальд Ю. А. Критическое рассеяние синхротронного излучения в цирконате-титанате свинца (PZT2.4) с использованием модели Ласта для мягкой моды // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 9–19. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18301>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18301>


CRITICAL SCATTERING OF SYNCHROTRON RADIATION IN THE LEAD ZIRCONATE-TITANATE (PZT2.4) USING THE LAST MODEL FOR THE SOFT MODE

S. B. Vakhrushev^{1,2,3}, S. A. Reimers^{2,3} , Yu. A. Bronwald¹

¹ Ioffe Institute, St. Petersburg, Russia;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

³ Pacific National University, Khabarovsk, Russia

 serafim.reimers@yandex.ru

Abstract. In this work, an experimental and theoretical studies of critical scattering for the $\text{PbZr}_{0.976}\text{Ti}_{0.024}\text{O}_3$ (PZT2.4) compound in the vicinity of the Brillouin zone center have been

carried out taking into account the mode coupling. The scattering measurements were carried out at the European Synchrotron Radiation Facility (ESRF). One-dimensional profiles of the scattering intensity dependence on the wave vector were obtained using specially developed programs. The Last model was used for the optical soft mode in the Brillouin zone center. The frequencies and polarization vectors of the renormalized modes were determined by quantitative analysis of the scattering profile for the soft direction [1 0 1]. Good agreement between the calculated results of the model and the experimental data was achieved. The polarization vector's change of the lowest transverse acoustic mode was traced as a function of the reduced wave vector.

Keywords: ferroelectric, antiferroelectric, phase transition, lattice dynamics, critical scattering

Funding: The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FEME-2024-0005).

For citation: Vakhrushev S. B., Reimers S. A., Bronwald Iu. A., Critical scattering of synchrotron radiation in the lead zirconate-titanate (PZT2.4) using the Last model for the soft mode, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 9–19. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18301>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Тщательный анализ картины рентгеновской или нейтронной дифракции любого, даже самого совершенного, кристалла демонстрирует, что в дополнение к регулярным пикам Брэгга присутствует размытый вклад, состоящий из некоторых полос, пятен или гало вокруг основных отражений. Этот фоновый компонент обычно называется диффузным рассеянием, и он содержит ценную информацию о всегда присутствующем статическом или динамическом беспорядке. Статья К. Лонсдейл и Х. Смитса [1] описывает самые первые наблюдения диффузного рассеяния в начале XX века.

Существует много превосходных книг и обзорных статей по общим аспектам диффузного рассеяния и его применению для анализа целого ряда физических проблем. Наиболее распространенным видом такого рассеяния является термодиффузное рассеяние на колебаниях кристаллической решетки [2, 3]. Интенсивность I термодиффузного рассеяния (TDS) можно описать следующим выражением:

$$I_{\text{TDS}}(\mathbf{Q}) = I_0 \sum_{\lambda} \frac{1}{\omega_{\lambda}^2(\mathbf{q})} |F_{\lambda}(\mathbf{Q}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q} - \boldsymbol{\tau}), \quad (1)$$

где \mathbf{Q} – вектор рассеяния; $\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau}$ – приведенный волновой вектор; $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки; ω_{λ} – частота моды λ ; $F_{\lambda}(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$ – неупругий структурный фактор.

Фактор $F_{\lambda}(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$ определяется кристаллической структурой (положением \mathbf{r}_{μ} атомов μ в элементарной ячейке) и векторами поляризации фононных мод $\mathbf{e}_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{q})$:

$$F_{\lambda}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) = \sum_{\mu} \frac{f_{\mu}(\mathbf{Q})}{\sqrt{2M_{\mu}}} e^{-W_{\mu}(\mathbf{Q})} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_{\mu}} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{q})), \quad (2)$$

где M_{μ} – масса атома; $e^{-W_{\mu}(\mathbf{Q})}$ – фактор Дебая – Валлера; \mathbf{r}_{μ} – положения атомов μ в элементарной ячейке; $\mathbf{e}_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{q})$ – собственный вектор фонона с волновым вектором \mathbf{q} атома μ моды λ ; $f_{\mu}(\mathbf{Q})$ – атомный форм-фактор.

Из формулы (1) следует, что в окрестности брэгговских пиков во всех кристаллах должно наблюдаться термодиффузное рассеяние на акустических фононах. Частота акустических фононов при малых приведенных волновых векторах пропорциональна величине q . Таким образом, интенсивность термодиффузного рассеяния обратно пропорциональна q^2 , а анизотропия определяется анизотропией скорости звука.

Другим важным видом термодиффузного рассеяния является критическое рассеяние на флуктуациях параметра порядка в кристаллах, претерпевающих фазовый переход. Критическое рассеяние может быть локализовано вокруг различных точек зоны Бриллюэна, и эта локализация зависит от симметрии параметра порядка.

Для нас представляет особый интерес критическое рассеяние в сегнетоэлектриках (именно о нем пойдет речь в дальнейшем). По-видимому, впервые этот вид рассеяния в сегнетоэлектриках был описан в работе [4]. Аналогично случаю диффузного рассеяния на акустических фононах, критическое рассеяние в сегнетоэлектриках сосредоточено в окрестности центра зоны Бриллюэна.

Одна из особенностей критического рассеяния в собственных сегнетоэлектриках – это существенное подавление продольной компоненты рассеяния. Это явление было впервые отмечено в работе [5]. В случае кубического изотропного сегнетоэлектрика выражение для интенсивности критического рассеяния в параэлектрической фазе имеет вид

$$I(\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}) = \frac{I_0 \kappa^2 \sin^2(\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{q})}{q^2 + \kappa^2}, \quad (3)$$

где I_0 – пиковая интенсивность рассеяния при $\mathbf{q} = 0$, пропорциональная статической восприимчивости χ_0 ; κ^2 – квадрат обратного радиуса корреляций сегнетофлуктуаций.

Сечения изодиффузных поверхностей плоскостями, содержащими вектор $\boldsymbol{\tau}$, дают интенсивностные линии в виде двух соприкасающихся окружностей (лемнискаты) с линией нулевой интенсивности, совпадающей с $\boldsymbol{\tau}$. Учет кубической анизотропии приводит к некоторому усложнению выражений, однако сохраняется зануление интенсивности в случае $\mathbf{q} \parallel \boldsymbol{\tau}$.

Таким образом, в параэлектрической фазе диффузное рассеяние в окрестности центра зоны Бриллюэна включает две компоненты: термодиффузную на акустических фононах и критическую на мягкой моде. При анализе данных для окрестностей нескольких узлов обратной решетки эти компоненты в принципе можно разделить.

Однако задача существенно усложняется при наличии межмодового взаимодействия между поперечными оптической и акустической модами. Подробно проблема межмодового взаимодействия в сегнетоэлектрических перовскитах была теоретически проанализирована в работах [6 – 8]. Было показано, что такое взаимодействие приводит к существенной перенормировке фононных частот при $\mathbf{q} \neq 0$ и смешиванию векторов поляризации этих мод. В работе [9] модель Вакса авторы применили для анализа фононных спектров танталата калия KTaO_3 , а в работах [10 – 12] – для анализа критической динамики в цирконате свинца PbZrO_3 . Во всех случаях была корректно описана перенормировка частот фононных мод. Что касается смешивания векторов поляризации в этих работах, то были приведены только общие выражения для векторов поляризации $\mathbf{v}_{\lambda\mu\alpha}$ (α – декартова координата, λ и μ определены выше) перенормированных мод в терминах собственных векторов фононов при $q = 0$, где взаимодействие отсутствует, однако конкретный их вид определен не был ввиду неопределенности собственного вектора мягкой моды. Приведенные в работах [10 – 12] картины диффузного рассеяния можно рассматривать лишь как качественные, поскольку в них учитывались только направления ионных смещений.

В настоящей работе проводится анализ диффузного рассеяния в твердом растворе цирконата-титаната свинца $\text{PbZr}_{0,976}\text{Ti}_{0,024}\text{O}_3$ (PZT2.4) с использованием модели Ласта для описания собственного вектора мягкой моды.

Экспериментальная часть

Измерения проводились на образце размерами примерно $1,00 \times 0,05 \times 0,05$ мм, вырезанном из монокристалла твердого раствора PZT2.4, выращенного в Южном федеральном университете по технологии, описанной в работе [13]. Образец шлифовали и протравливали в кипящей соляной кислоте для удаления нарушенного поверхностного слоя.

Эксперимент был проведен с использованием оборудования Европейского синхротронного источника (ESRF). Образец игольчатой формы был установлен в специальную ячейку. Зона раскрытия ячейки составляла 150° , что позволяло охватить большой объем обратного пространства. Образец помещали в поток азота с целью контроля его температуры.

Длина волны падающего излучения составляла 0,95 Å. Использовался малошумящий детектор Pilatus 2M; при этом расстояние от образца до детектора было 135 мм. Измерения проводили как в режиме охлаждения, так и в режиме нагрева с шагом 1 °С в интервале температур от 30 до 300 °С.

Для построения одномерных профилей зависимости интенсивности рассеяния от волнового вектора использовался набор программ, разработанных на языках MatLab и Java. Такие профили диффузного рассеяния получали из трехмерного распределения интенсивности методом вокселизации. В отличие от традиционных кубических вокселей, использовался воксель в форме прямого кругового цилиндра, ось которого совпадает с направлением профиля. Путем варьирования параметров цилиндрического вокселя был подобран его оптимальный размер, который обеспечивал необходимую статистику: достаточное число первичных пикселей детектора внутри вокселя и разрешение по волновому вектору \mathbf{q} . Радиус вокселя составил 0,2 r.l.u., шаг – 0,1 r.l.u. (здесь и далее единицы r.l.u. – параметр обратной ячейки (reciprocal lattice unit), равный $2\pi/a$).

Модель Вакса с расчетом собственных векторов

Мы использовали предположение, что диффузное рассеяние связано с наиболее низкими фононными модами. Как показано в работах [6, 7, 9], расчет и анализ соответствующей динамики решетки упрощаются в длинноволновом пределе, если пренебречь высокоэнергетическими оптическими модами; в данном случае последние не дают существенного вклада в диффузное рассеяние. Полученный упрощенный гамильтониан учитывает только пять мод: три акустические (2ТА (поперечные) + LA (продольная)) и две низкоэнергетические поперечные оптические (2ТО).

Упрощенный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H^{(5)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{u}}_{-\mathbf{q}} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{q}} + \mathbf{u}_{-\mathbf{q}} \hat{A}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{x}}_{-\mathbf{q}} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{q}} + \lambda \mathbf{x}_{-\mathbf{q}} \mathbf{x}_{\mathbf{q}} + \mathbf{x}_{-\mathbf{q}} \hat{S}(\mathbf{q}) \mathbf{x}_{\mathbf{q}} + 2\mathbf{u}_{-\mathbf{q}} \hat{V}(\mathbf{q}) \mathbf{x}_{\mathbf{q}} \right], \quad (4)$$

где u_1, u_2, u_3 и x_1, x_2 (компоненты векторов \mathbf{u} и \mathbf{x}) – нормальные координаты для мод 2ТА + LA и 2ТО в системе отсчета ($X'Y'Z'$), с осью Z' , параллельной приведенному волновому вектору \mathbf{q} , соответственно; $\hat{A}, \hat{S}, \hat{V}$ – тензоры.

Эти тензоры описывают вклад короткодействующих взаимодействий и могут быть записаны как

$$\hat{A}(\mathbf{q}) = q^2 (A_a g^a + A_l g^l + A_t g^t), \quad (5)$$

$$\hat{S}(\mathbf{q}) = q^2 (S_a g^a + S_t g^t), \quad (6)$$

$$\hat{V}(\mathbf{q}) = q^2 (V_a g^a + V_t g^t), \quad (7)$$

где $g_{\alpha\beta}^t = \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$; $g_{\alpha\beta}^l = n_\alpha n_\beta$; $g_{\alpha\beta}^a = \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma n_\delta$.

В этом уравнении $\mathbf{n} = \mathbf{q}/q$ – единичный вектор в направлении \mathbf{q} ; $\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензорный инвариант по отношению к операциям симметрии кубической точечной группы, такой, что

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1 \text{ при } \alpha = \beta = \gamma = \delta \text{ и } \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Тензор $\hat{A}(\mathbf{q})$ определяет скорость звука и может быть определен из модуля упругости C , тензор $\hat{S}(\mathbf{q})$ – кривизну поперечной оптической моды, тензор $\hat{V}(\mathbf{q})$ – константу взаимодействия акустических и оптических ветвей.

Пятимодовый гамильтониан был представлен как сумма изотропной и анизотропной составляющих:

$$H^{(5)}(\mathbf{q}) = H_{is}(|q|, \lambda, S_t, A_l, V_t, A_t) + H_{anis}(\mathbf{q}, S_a, A_a, V_a), \quad (8)$$

$$H_{is} = \begin{pmatrix} \lambda + S_i q^2 & 0 & V_i q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + S_i q^2 & 0 & V_i q^2 & 0 \\ V_i q^2 & 0 & A_i q^2 & 0 & 0 \\ 0 & V_i q^2 & 0 & A_i q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_i q^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$H_{anis} = q^2 \begin{pmatrix} S_a h_{11} & S_a h_{12} & V_a h_{11} & V_a h_{12} & V_a h_{13} \\ S_a h_{12} & S_a h_{22} & V_a h_{12} & V_a h_{22} & V_a h_{23} \\ V_a h_{11} & V_a h_{12} & A_a h_{11} & A_a h_{12} & A_a h_{13} \\ V_a h_{12} & V_a h_{22} & A_a h_{12} & A_a h_{22} & A_a h_{23} \\ V_a h_{13} & V_a h_{23} & A_a h_{13} & A_a h_{23} & A_a h_{33} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{2n_2^2 n_3^2}{n_{\perp}^2}, & h_{12} &= \frac{(n_1 n_2 n_3)}{n_{\perp}^2} (n_3^2 - n_2^2), \\ h_{22} &= 2n_1^2 \left(n_{\perp}^2 - \frac{n_2^2 n_3^2}{n_{\perp}^2} \right), & h_{13} &= \frac{n_2 n_3}{n_{\perp}} (n_2^2 - n_3^2), \\ h_{33} &= n_1^4 + n_2^4 + n_3^4, & h_{22} &= \frac{n_1}{n_{\perp}} (n_1^2 n_{\perp}^2 - n_2^4 - n_3^4), \\ n_{\perp}^2 &= n_2^2 + n_3^2. \end{aligned}$$

Диагонализация гамильтониана $H^{(5)}(\mathbf{q})$ позволяет получить набор частот $\omega_{\lambda}(\mathbf{q})$ перенормированных мод и матрицу векторов поляризации $D_{\lambda}(\mathbf{q})$, выраженных в терминах собственных векторов невзаимодействующих мод в рассмотренной выше системе координат $X'Y'Z'$. В качестве собственных могут быть выбраны в первом приближении векторы поляризации фоновых мод в центре зоны Бриллюэна $V_{\mu\alpha}^{\lambda_0}$ (λ_0 – номер неперенормированной фоновой ветви, μ – номер атома в элементарной ячейке, α – декартова координата).

В дальнейшем мы будем использовать следующую нумерацию атомов в ячейке:

1 – Pb, $\mathbf{r}_1 = (0 \ 0 \ 0)$; 2 – Zr (Ti), $\mathbf{r}_2 = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$; 3 – O_I, $\mathbf{r}_3 = (\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2})$;

4 – O_{II}, $\mathbf{r}_4 = (0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$; 5 – O_{III}, $\mathbf{r}_5 = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0)$. \mathbf{r}_i – координата i -го атома в ячейке в долях параметра решетки $a = 4,6 \text{ \AA}$.

Матрица $D_{\lambda j}$ может быть преобразована в трехмерный массив собственных векторов $p_{\nu\lambda\alpha}$ в декартовой системе координат, если использовать метрическую матрицу $M(\mathbf{n})$ [9]:

$$M(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 0 & n_{\perp} & n_1 \\ -\frac{n_3}{n_{\perp}} & -\frac{n_1 n_2}{n_{\perp}} & n_2 \\ \frac{n_2}{n_{\perp}} & -\frac{n_1 n_3}{n_{\perp}} & n_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_{\nu\lambda 1\alpha} &= M \times D_{\lambda,j}, & j &= 3, 4, 5; \\ p_{\nu\lambda 2\alpha} &= M \times (D_{\lambda,j}, 0), & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Случай $l = 1$ соответствует вкладу неперенормированных акустических фононов, а $l = 2$ – вкладу неперенормированных оптических фононов.

Введем матрицы собственных векторов $e_{\alpha\mu}^{(1)}$ и $e_{\alpha\mu}^{(2)}$ – парциальные вклады атомов μ в смещения, соответствующие акустической и оптической модам соответственно.

Индекс $\alpha = 1, 2, 3$ определяет направление смещений.

Значения элементов $e_{\alpha\mu}^{(1)}$ можно определить из условия равенства смещений всех атомов в ячейке [14]:

$$u_{\alpha\mu} = \frac{e_{\alpha\mu}^{(1)}}{\sqrt{m_{\mu}}} = \text{const.} \quad (13)$$

Для мягкой оптической моды такое априорное определение $e_{\alpha\mu}^{(2)}$ невозможно. Непригодное представление Γ_{15} входит в состав механического представления для структуры перовскита четыре раза, и соответственно должны наблюдаться три оптические моды этой симметрии. В качестве таких мод с взаимно ортогональными векторами поляризации часто выбираются мода Эвальда, мода Ластва и мода Экса [15]. Для свинец-содержащих сегнетоэлектриков с ромбоэдрической структурой обычно считается, что мягкой модой является мода Ластва. При этом предполагается, что катион свинца Pb^{2+} смещается относительно группы ионов, образованной кислородным октаэдром и центральным катионом.

Для упрощения задачи мы будем использовать двухатомное приближение, считая, что оптическую моду можно описать, если рассматривать указанную выше группу как виртуальный катион A_2 .

Для акустической моды мы без потери общности можем записать следующее представление:

$$e_{\alpha\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_{\text{Pb}}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} \\ \sqrt{m_{\text{Pb}}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} \\ \sqrt{m_{\text{Pb}}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} & \sqrt{m_{\text{A}_2}} \end{pmatrix} CC_1 \quad (14)$$

с нормирующим коэффициентом

$$CC_1 = \sqrt{m_{\text{Pb}} + 4m_{\text{A}_2}},$$

где m_{Pb} – масса катиона Pb^{2+} , m_{A_2} – сумма масс всех ионов, входящих в виртуальный ион A_2 .

Очевидно, что

$$u_{\alpha\mu} = \frac{e_{\alpha\mu}^{(1)}}{\sqrt{m_{\mu}}} = \text{const.}$$

Для оптической моды, с учетом постоянства центра масс, получим:

$$e_{\alpha\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{m_{\text{A}_2}/m_{\text{Pb}}} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -\sqrt{m_{\text{A}_2}/m_{\text{Pb}}} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -\sqrt{m_{\text{A}_2}/m_{\text{Pb}}} & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} CC_2 \quad (15)$$

с нормирующим коэффициентом

$$CC_2 = \sqrt{m_{\text{A}_2}/m_{\text{Pb}} + 1/4}.$$

Действительно, смещение центра масс оказывается равным нулю:

$$\frac{\left(\sqrt{m_{\text{A}_2}/m_{\text{Pb}}}\right) m_{\text{Pb}}}{\sqrt{m_{\text{Pb}}}} - 4 \frac{1}{4} \frac{m_{\text{A}_2}}{\sqrt{m_{\text{A}_2}}} = \sqrt{m_{\text{A}_2}} - \sqrt{m_{\text{A}_2}} = 0. \quad (16)$$

Строим массив из $5 \times 5 \times 3$ собственных векторов (число мод \times число атомов \times 3 координаты) $v_{\lambda\mu\alpha}$:

$$v_{\lambda\mu\alpha} = pv_{\lambda1\alpha} \times e_{\alpha\mu}^{(1)} + pv_{\lambda2\alpha} \times e_{\alpha\mu}^{(2)}. \quad (17)$$

Тогда можно записать следующее выражение для структурного фактора моды λ :

$$F_{\lambda}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) = \frac{f_{\text{Pb}}}{\sqrt{m_{\text{Pb}}}} e^{i\mathbf{Qr}_1} \left[\sum_{\alpha=1..3} (Q_{\alpha} v_{\lambda1\alpha}) \right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{m_{\Lambda 2}}} \left\{ f_{\text{Zr}} e^{i\mathbf{Qr}_2} \left[\sum_{\alpha=1..3} (Q_{\alpha} v_{\lambda2\alpha}) \right] + f_{\text{O}} \left[e^{i\mathbf{Qr}_3} \left(\sum_{\alpha=1..3} (Q_{\alpha} v_{\lambda3\alpha}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{i\mathbf{Qr}_4} \left(\sum_{\alpha=1..3} (Q_{\alpha} v_{\lambda4\alpha}) \right) + e^{i\mathbf{Qr}_5} \left(\sum_{\alpha=1..3} (Q_{\alpha} v_{\lambda5\alpha}) \right) \right] \right\}. \quad (18)$$

Значения атомных факторов рассеяния рассчитываем по формулам, приведенным в работе [16].

Анализ экспериментальных данных

Нами были проанализированы одномерные сканы в направлении типа $[1\ 0\ 1]$ через узлы обратной решетки $(1\ 0\ -1)$ и $(0\ 0\ 3)$. Интенсивность диффузного рассеяния в точке \mathbf{Q} рассчитывалась следующим образом:

$$I(\mathbf{Q}) = I_0 \sum_{\lambda=1}^5 F_{\lambda}^2(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) \frac{1}{\omega_{\lambda}^2(\mathbf{q})} + \text{Вск}, \quad (19)$$

где $\omega_{\lambda}^2(\mathbf{q})$ – квадрат частоты перенормированной моды λ , равный λ -собственному значению гамильтониана $H^{(s)}(\mathbf{q})$; выражение рассчитывается по формуле (18); I_0 – шкальный множитель; слагаемое Вск – фон.

Параметры A_r, A_t, A_a, S_r, S_a (в $(\text{мэВ})^2/(\text{r.l.u.})^2$) принимались равными значениям для чистого цирконата свинца, которые приведены в работе [12]:

$$A_r = 2508, A_t = 879, A_a = -111, S_r = 1800, S_a = -610.$$

Обработка результатов велась в два этапа. На первом для узла $(1\ 0\ -1)$ была выполнена подгонка параметров V_r, ω_0^2 , а также шкального множителя и фона. Поскольку экспериментальные данные для разных узлов были по-разному пронормированы, для узла $(0\ 0\ 3)$ подгонялись только шкальный множитель и фон, а остальные параметры были взяты из подгонки для узла $(1\ 0\ -1)$.

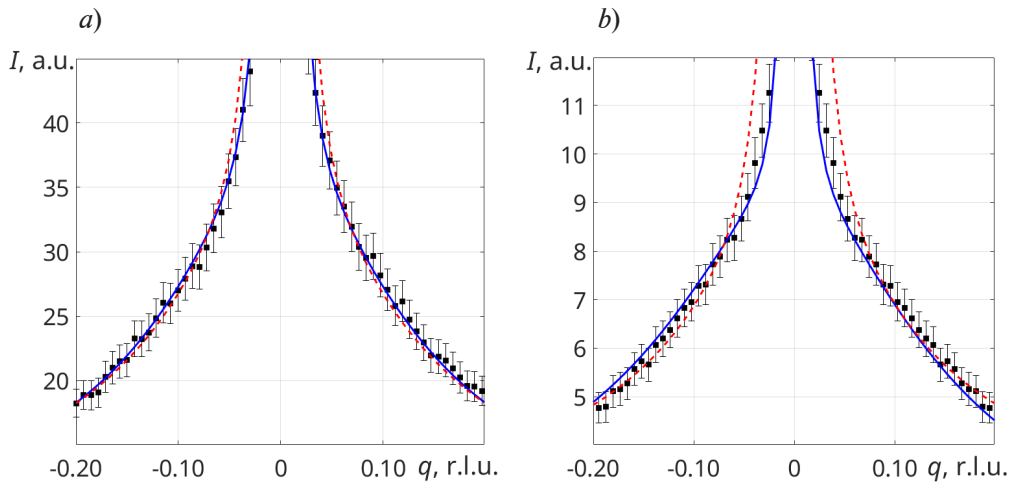


Рис. 1. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости интенсивности I диффузного рассеяния от приведенного волнового вектора \mathbf{q} для двух векторов рассеяния:

$$\mathbf{Q} = (1 + q, 0, -1 + q) \text{ (a)} \text{ и } (q, q, 3) \text{ (b)}.$$

Представлены расчетные данные с использованием векторов поляризации (синие сплошные линии) и с учетом только вида дисперсионных кривых и направления смещений (красные пунктиры). Статистические ошибки эксперимента указаны вертикальными отрезками

Экспериментальные данные на рис. 1 представлены точками, а их статистические ошибки показаны вертикальными отрезками. Из подгонки исключалась центральная область $-0,05 \leq q \leq 0,05$, в которую дает вклад брэгговское рассеяние. Видно, что расчетные кривые полностью совпадают с экспериментом в пределах статистических ошибок.

В результате подгонки нами были получены следующие значения параметров:

$$V_t = 1073 \text{ (мэВ)}^2 / (\text{r.l.u.})^2, \quad \omega_0^2 = 4,58 \text{ (мэВ)}^2.$$

Для сравнения мы провели расчет интенсивности диффузного рассеяния без учета векторов поляризации (красные пунктирные линии на рис. 1). При этом использовалась зависимость $\omega_\lambda^2(\mathbf{q})$ и направления атомных смещений $pv_{\lambda\alpha}$ (12).

Для акустических фононов, с учетом выражения (18), можно записать выражение для структурных факторов при $q = 0$ ($\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau}$):

$$F \sim f_{\text{Pb}} + f_{\text{Zr}} \cos[\pi(h+k+l)] + f_0 \{ \cos[\pi(h+k)] + \cos[\pi(h+k)] \cos[\pi(h+k)] \}. \quad (20)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_{(1\ 0\ -1)} &\sim f_{\text{Pb}} + f_{\text{Zr}} - f_0, \\ F_{(0\ 0\ 3)} &\sim f_{\text{Pb}} - f_{\text{Zr}} - f_0. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае узла $(1\ 0\ -1)$ с большим структурным фактором, для акустических фононов перенормировка векторов поляризации дает относительно небольшой вклад в интенсивность, и такой упрощенный расчет дает только качественное согласие с экспериментом (см. рис. 1, *a*).

В то же время в случае узла $(0\ 0\ 3)$ с малым упругим структурным фактором перенормировка векторов поляризации играет важную роль. Здесь следует отметить, что для надежного определения параметров гамильтониана $H^{(5)}(\mathbf{q})$ требуется анализ данных в окрестности нескольких узлов обратной решетки. Принципиально вопрос об определении дисперсионных кривых рассматривался в работе [2]. Точное определение фононных дисперсионных кривых в общем случае невозможно, однако векторы поляризации можно определить.

Нами была прослежена зависимость $v_{\lambda\mu\alpha}(q)$.

На рис. 2 показана картина приведенных смещений

$$u_{\lambda\mu\alpha}^N = \frac{v_{\lambda\mu\alpha}}{\sqrt{m_\mu}}$$

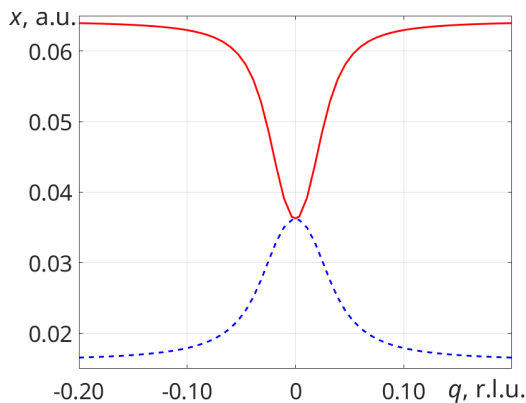


Рис. 2. Зависимости приведенных значений смещений x ионов свинца (красная сплошная линия) и циркония (синий пунктир) вдоль оси x для низшей фононной моды

вдоль оси x ($\alpha = 1$) атомов свинца ($\mu = 1$) и циркония ($\mu = 2$) для низшей фононной (поперечной акустической, поляризованной в плоскости $(x\ 0\ z)$) моды. При $q = 0$ приведенные смещения равны, как это и должно быть для акустических колебаний. При увеличении q вклад смещения свинца резко возрастает. Полученный результат хорошо согласуется с предположением, высказанным в работе [10] о том, что именно смягчение перенормированной поперечной акустической фононной ветви является причиной перехода в анти-сегнетоэлектрическую фазу, и этот переход связан с антипараллельными смещениями ионов свинца.

Заключение

Проведенное исследование развивает подход, позволяющий количественно описывать диффузное рассеяние в окрестности центра зоны Бриллюэна в перовскитоподобных кристаллах при наличии межмодового взаимодействия. Фононные дисперсионные кривые рассчитаны с использованием модели Вакса. Векторы поляризации перенормированных фононных мод описаны в виде линейной комбинации собственных векторов поперечных акустических и оптических фононов в центре зоны Бриллюэна, где межмодовое взаимодействие отсутствует. Для мягкой моды, релевантной сегнетоэлектрическому фазовому переходу, использована модель Ластва, в которой предполагается, что катион свинца колеблется относительно жесткой группы атомов, включающей кислородный октаэдр и центральный катион. Коэффициенты смешивания мод, зависящие от приведенного волнового вектора, определены через диагонализацию пятимодового гамильтониана. Разработанный подход использован для анализа диффузного рассеяния в твердом растворе сегнетоэлектрика PZT2.4.

Проведено сравнение экспериментальных и расчетных данных в окрестности узлов обратной решетки $(1\ 0\ -1)$ и $(0\ 0\ 3)$. Показано, что предложенный формализм обеспечивает хорошее описание экспериментальных данных в обоих узлах одновременно.

Предложенный и развитый нами подход позволяет эффективно анализировать данные одновременно в нескольких зонах Бриллюэна и надежно определять параметры динамического гамильтониана. Удалось проследить зависимость приведенных значений смещений атомов от приведенного модуля волнового вектора и подтвердить определяющую роль перенормировки акустической фононной ветви для антисегнетоэлектрического перехода, связанного с антипараллельными смещениями иона свинца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lonsdale K. Y., Smith H.** An experimental study of diffuse X-ray reflexion by single crystals // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1941. Vol. 179. No. 976. Pp. 8–50.
2. **Xu R., Chiang T. C.** Determination of phonon dispersion relations by X-ray thermal diffuse scattering // Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials. 2005. Vol. 220. No. 12. Pp. 1009–1016.
3. **Welberry T. R., Weber T.** One hundred 2025s of diffuse scattering // Crystallography Reviews. 2016. Vol. 22. No. 1. Pp. 2–78.
4. **Comes R., Lambert M., Guinier A.** Désordre linéaire dans les cristaux (cas du silicium, du quartz, et des pérovskites ferroélectriques) // Acta Crystallographica. Section A: Foundations and Advances. 1970. Vol. A26. Part 2. Pp. 244–254.
5. **Cochran W.** Dynamical, scattering and dielectric properties of ferroelectric crystals // Advances in Physics. 1969. Vol. 18. No. 72. Pp. 157–192.
6. **Вакс В. Г.** Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. М.: Наука, 1973. 327 с.
7. **Вакс В. Г.** О фазовых переходах типа смещения в сегнетоэлектриках // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1968. Т. 54. № 3. С. 910–926.
8. **Axe J. D., Harada J., Shirane G.** Anomalous acoustic dispersion in centrosymmetric crystals with soft optic phonons // Physical Review B. 1970. Vol. 1. No. 3. Pp. 1227–1234.
9. **Farhi E., Tagantsev A. K., Currat R., Hehlen B., Courtens E., Boatner L. A.** Low energy phonon spectrum and its parameterization in pure KTaO_3 below 80 K // The European Physical Journal B. 2000. Vol. 15. No. 4. Pp. 615–623.
10. **Tagantsev A. K., Vaideeswaran K., Vakhrushev S. B., et al.** The origin of antiferroelectricity in PbZrO_3 // Nature Communications. 2013. Vol. 4. No. 1. Pp. 2229–2236.
11. **Burkovsky R. G., Tagantsev A. K., Vaideeswaran K., et al.** Lattice dynamics and antiferroelectricity in PbZrO_3 tested by X-ray and Brillouin light scattering // Physical Review B. 2014. Vol. 90. No. 14. P. 144301.
12. **Andronikova D. A., Burkovsky R. G., Filimonov A. V., Tagantsev A. K., Vakhrushev S. B.** Phonon dispersion calculations using the Vaks model in antiferroelectric lead zirconate // Journal of Advanced Dielectrics. 2015. Vol. 5. No. 02. P. 1550016.

13. Леонтьев Н. Г., Смотраков В. Г., Фесенко Е. Г. Фазовая диаграмма $\text{PbZr}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ при $x < 0,1$ // Известия Академии наук СССР. Неорганические материалы. 1982. Т. 18. № 3. С. 449–453.
14. Solyom J. Fundamentals of the physics of solids. Vol. 1. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, Inc, 2007. 697 p.
15. Harada J., Axe J. D., Shirane G. Determination of the normal vibrational displacements in several perovskites by inelastic neutron scattering // Acta Crystallographica. Section A: Foundations and Advances. 1970. Vol. A26. Part 6. Pp. 608–612.
16. Graz center of physics. Atomic form factors. Режим доступа: <http://lampx.tugraz.at/~hadley/ss1/crystaldiffraction/atomicformfactors/formfactors.php> (Дата обращения: 16.05.2025).

REFERENCES

1. Lonsdale K. Y., Smith H., An experimental study of diffuse X-ray reflexion by single crystals, Proc. R. Soc. Lond. A. 179 (976) (1941) 8–50.
2. Xu R., Chiang T. C., Determination of phonon dispersion relations by X-ray thermal diffuse scattering, Z. Kristallogr. Cryst. Mater. 220 (12) (2005) 1009–1016.
3. Welberry T. R., Weber T., One hundred years of diffuse scattering, Crystallogr. Rev. 22 (1) (2016) 2–78.
4. Comes R., Lambert M., Guinier A., Désordre linéaire dans les cristaux (cas du silicium, du quartz, et des pérovskites ferroélectriques), Acta Cryst. A26 (2) (1970) 244–254.
5. Cochran W., Dynamical, scattering and dielectric properties of ferroelectric crystals, Adv. Phys. 18 (72) (1969) 157–192.
6. Vaks V. G., Vvedenie v mikroskopicheskuyu teoriyu segneto-elektrikov. [Introduction to the microscopic theory of ferroelectrics], Nauka Publishing, Moscow, 1973 (in Russian).
7. Vaks V. G., Phase transitions of the displacement type in ferroelectrics, J. Exp. Theor. Phys. 27 (3) (1968) 486–494.
8. Axe J. D., Harada J., Shirane G., Anomalous acoustic dispersion in centrosymmetric crystals with soft optic phonons, Phys. Rev. B. 1 (3) (1970) 1227–1234.
9. Farhi E., Tagantsev A. K., Currat R., et al., Low energy phonon spectrum and its parameterization in pure KTaO_3 below 80 K, Eur. Phys. J. B. 15 (4) (2000) 615–623.
10. Tagantsev A. K., Vaideswaran K., Vakhrushev S. B., et al., The origin of antiferroelectricity in PbZrO_3 , Nat. Commun. 4 (1) (2013) 2229–2236.
11. Burkovsky R. G., Tagantsev A. K., Vaideswaran K., et al., Lattice dynamics and antiferroelectricity in PbZrO_3 tested by X-ray and Brillouin light scattering, Phys. Rev. B. 90 (14) (2014) 144301.
12. Andronikova D. A., Burkovsky R. G., Filimonov A. V., et al., Phonon dispersion calculations using the Vaks model in antiferroelectric lead zirconate, J. Adv. Dielectr. 5 (02) (2015) 1550016.
13. Leontiev N. G., Smotrakov V. G., Fesenko E. G., Phase diagram of $\text{PbZr}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ with $x < 0,1$, Inorg. Mater. 18 (3) (1982) 374.
14. Solyom J., Fundamentals of the physics of solids, Vol. 1., Springer-Verlag, Inc, Berlin, Heidelberg, 2007.
15. Harada J., Axe J. D., Shirane G., Determination of the normal vibrational displacements in several perovskites by inelastic neutron scattering, Acta Cryst. A26 (6) (1970) 608–612.
16. Graz center of physics. Atomic form factors. <http://lampx.tugraz.at/~hadley/ss1/crystaldiffraction/atomicformfactors/formfactors.php>. Accessed May 16, 2025.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ВАХРУШЕВ Сергей Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института имени А. Ф. Иоффе РАН, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия; ведущий научный сотрудник Тихоокеанского государственного университета, Хабаровск, Россия.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

s.vakhrushev@mail.ioffe.ru

ORCID: 0000-0003-4867-1404

РЕЙМЕРС Серафим Андреевич – аспирант Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия; младший научный сотрудник Тихоокеанского государственного университета, Хабаровск, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
serafim.reimers@yandex.ru
ORCID: 0009-0009-9951-758X

БРОНВАЛЬД Юрий Алексеевич – научный сотрудник Физико-технического института имени А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26
yuramel@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0225-0487

THE AUTHORS

VAKHRUSHEV Sergey B.

Ioffe Institute of RAS, St. Petersburg, Russia;
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;
Pacific National University, Khabarovsk, Russia
26 Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia
s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
ORCID: 0000-0003-4867-1404

REIMERS Serafim A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;
Pacific National University, Khabarovsk, Russia
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
serafim.reimers@yandex.ru
ORCID: 0009-0009-9951-758X

BRONWALD Iurii A.

Ioffe Institute of RAS
26 Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia
yuramel@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0225-0487

Статья поступила в редакцию 16.05.2025. Одобрена после рецензирования 29.05.2025.
Принята 29.05.2025.

Received 16.05.2025. Approved after reviewing 29.05.2025. Accepted 29.05.2025.

Математическое моделирование физических процессов

Научная статья

УДК 534.16

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

А. А. Алифов 

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

 alishir@mail.ru

Аннотация. С целью выявления действия нелинейного (кубического) параметрического возбуждения (НПВ) на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний при источнике энергии ограниченной мощности использована широко применяемая расчетная модель автоколебательной системы, получающая энергию от такого источника. Решения нелинейных дифференциальных уравнений модели построены методом прямой линеаризации (ПЛ), которому свойственны простота и малые затраты времени. Характеристика силы трения, вызывающая автоколебания, линеаризована методом ПЛ. Выведены уравнения для амплитуды, фазы колебаний и скорости источника энергии в нестационарном и стационарном случаях движения. С использованием критериев Рауса – Гурвица рассмотрена устойчивость стационарных движений. Влияние НПВ на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний исследовано и расчетным путем; расчеты показали, что НПВ изменяет форму амплитудных кривых, присущих линейному воздействию, оказывает существенное влияние на устойчивость движения.

Ключевые слова: взаимодействие, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания, нелинейность, метод прямой линеаризации

Для цитирования: Алифов А. А. Влияние нелинейного параметрического возбуждения на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

THE INFLUENCE OF NONLINEAR PARAMETRIC EXCITATION ON THE INTERACTION OF FORCED, PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS

A. A. Alifov 

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

 alishir@mail.ru

Abstract. In order to reveal the effect of nonlinear (cubic) parametric excitation (NPE) on the interaction of forced, parametric, and self-oscillation with a limited-power energy source, a widely used computed model of a self-oscillating system receiving energy from such a source was used. Solutions of nonlinear differential equations of the model were constructed using the direct linearization method (DLM), which is distinguished from the known ones by its simplicity and low time costs. The friction force characteristic causing self-oscillations was linearized by DLM. Equations for the amplitude, oscillation phase and the velocity of the energy source in

nonstationary and stationary motion cases were derived. Using the Routh – Hurwitz criteria, the stability of stationary movements was considered. The influence of NPE on the interaction of forced, parametric and self-oscillations was investigated by calculations. The latter showed NPE to change the shape of the amplitude curves inherent in linear action and to have a significant impact on the motion stability.

Keywords: interaction, forced oscillations, parametric oscillations, self-oscillations, nonlinearity, direct linearization method

For citation: Alifov A. A., The influence of nonlinear parametric excitation on the interaction of forced, parametric and self-oscillations, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 20–29. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний относится к самому сложному из четырех классов смешанных колебаний по классификации, введенной в монографии [1]; они складываются из комбинации типов колебаний [2 – 4]. Из этих четырех классов смешанных колебаний в работе [5] рассмотрено взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний при нелинейном параметрическом возбуждении кубического вида без учета свойств источника энергии.

Учет указанных свойств становится в настоящее время достаточно актуальным в связи с экологическими проблемами, изменением климата, уменьшением ресурсов энергетики. Необходимость учета свойств источника энергии, которая в теории колебаний связана с известным эффектом Зоммерфельда, последовательно изложена в основополагающей монографии [6]. В этом направлении опубликовано множество работ во всем мире, в том числе книги и статьи [1, 7 – 17]. А связь между уровнем потребляемой энергии при работе деталей, точностью их обработки и колебаниями показана в публикации [18].

Ниже рассматриваются смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при нелинейном параметрическом возбуждении и ограниченной мощности источника энергии. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эти колебания, использован метод прямой линеаризации [19].

Расчетная модель

Под действием силы трения во многих технических объектах [20 – 24] возникают автоколебания, для описания которых широко используется рассматриваемая нами модель (рис. 1). Тело с массой m соединено с корпусом посредством пружины и демпфера. Оно лежит на ленте, приводимой в движение двигателем ограниченной мощности с моментной характеристикой $M(\dot{\phi})$ и суммарным моментом инерции вращающихся частей I . Между телом и лентой возникает сила трения $T(U)$, зависящая от относительной скорости U :

$$U = V - \dot{x}, V = r_0 \dot{\phi},$$

где r_0 – радиус шкива, вращающего ленту, $r_0 = \text{const}$; $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя.

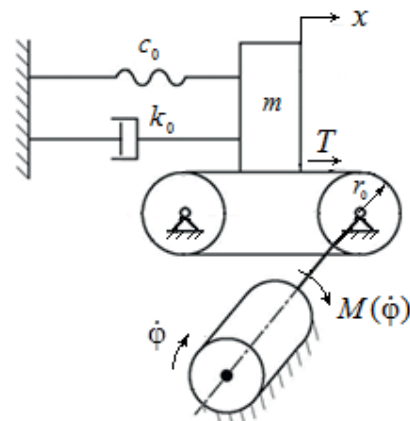


Рис. 1. Модель рассматриваемой системы: m – масса тела; $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя; $M(\dot{\phi})$ – моментная характеристика; T – сила трения; r_0 – радиус шкива, вращающего ленту; c_0, k_0 – жесткость пружины и коэффициент демпфирования, соответственно

Уравнения движения системы с учетом действия на тело внешней вынуждающей силы $\lambda \sin(v_1 t)$ и нелинейного параметрического возбуждения $bx^3 \cos vt$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x &= T(U) + \lambda \sin v_1 t - bx^3 \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T(U), \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_0, c_0, \lambda, b, v_1, v$ – константы.

Силу трения примем в виде функциональной зависимости, широко распространенной в реальных (в том числе космических) [25] условиях:

$$T(U) = T_0(\operatorname{sgn} U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3), \quad (2)$$

где T_0 – сила нормальной реакции, $T_0 = \text{const}$; α_1, α_3 – константы; $\operatorname{sgn} U = 1$ при $U > 0$ и $\operatorname{sgn} U = -1$ при $U < 0$. В случае $U = 0$, т.е. относительного покоя, имеют место неравенства $-T_0 \leq T(0) \leq T_0$.

Методом прямой линеаризации [19] заменим нелинейные составляющие силы трения $T(U)$ линейной:

$$T(U) = T_0(\operatorname{sgn} U + B_T + k_T \dot{x}), \quad (3)$$

где $B_T = -\alpha_1 u + \alpha_3 u_3 + 3N_2 \alpha_3 u a^2 p^2$, $k_T = -\alpha_3 \bar{N}_3 (a^2 p^2 - h)$, $h = 3(u_0^2 - u^2) / \bar{N}_3$, $u_0^2 = \alpha_1 / 3\alpha_3$, $N_2 = (2r + 1) / (2r + 3)$, $\bar{N}_3 = (2r + 3) / (2r + 5)$.

Величина r , входящая в выражения для числовых коэффициентов N_2 и \bar{N}_3 , представляет собой параметр точности линеаризации, значение которой не ограничено, но ее достаточно выбрать в интервале $(0, 2)$. В работе [26] приведено сравнение коэффициентов \bar{N}_n и N_n с коэффициентами, полученными методом усреднения [27 – 30] для различных значений степени нелинейности n , и показано допустимое согласие результатов применения обоих методов.

С учетом замены (3) уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + c_0 x &= T_0(\operatorname{sgn} U + B_T) + \lambda \sin v_1 t - bx^3 \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T_0(\operatorname{sgn} U + B_T + k_T \dot{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = k_0 - T_0 k_T$.

Решение уравнений

Как показано в монографии [1], решения уравнений с функцией (2) при $U > 0$ и $U < 0$ принципиально различны, поэтому следует рассмотреть их отдельно.

Представим эти случаи выражениями

$$u \geq ap, \quad u < ap,$$

где $u = r_0 \Omega$ (Ω – усредненная скорость $\dot{\phi}$).

Рассмотрим решения (4) при основных резонансах с частотами $\omega \approx v_1$ и $\omega \approx v/2$, так как они представляют главный практический интерес.

Если использовать метод замены переменных с усреднением [19], то получаем выражения

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -ap \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = v/2, \quad \dot{\phi} = \Omega. \quad (5)$$

Далее рассматриваем два случая.

i) $u \geq ap$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} (2aA + 2\lambda \cos \xi - 0,5ba^3 \sin 2\xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2am(\omega_0^2 - p^2) + 2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} [M(u/r_0) - r_0 T_0(1 + B_T)]; \end{aligned} \quad (6a)$$

ii) $u < ap$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left[2aA + 2\lambda \cos \xi - 0,5ba^3 \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} \left[2am(\omega_0^2 - p^2) + 2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi \right], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[M(u/r_0) - r_0 T_0 (1 + B_T) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right], \end{aligned} \quad (6b)$$

где $\omega_0^2 = c_0/m$.

Условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$, в случае $u \geq ap$ доставляют следующие соотношения для определения стационарных значений a и ξ :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 b^2 a^6 + b^2 a^6 L - \lambda^4 + 2\lambda^2 L - L^2 - 4b^2 a^8 A^2)^2 - 4\lambda^2 b^4 a^{12} L &= 0, \\ \operatorname{tg} \xi &= D(Dba^3 - 4\lambda)/8aA, \end{aligned} \quad (7)$$

где $L = \lambda^2 + ba^4 [ba^2 + 2m(\omega_0^2 - p^2)]$, $A = p(k_0 - T_0 k_T)$, $D = 2(\lambda \pm \sqrt{L})/ba^3$.

Для определения стационарных значений скорости u из третьего уравнения (6a) имеем при условии $\dot{u} = 0$ выражение вида

$$M(u/r_0) - S(u) = 0, \quad (8)$$

где $S(u)$ – нагрузка на источник энергии со стороны колебательной системы.

В случае $u < ap$, для определения амплитуды стационарных колебаний имеем приближенную зависимость $ap \approx u$, а стационарные значения скорости u определяется уравнением (8) с учетом выражения для нагрузки

$$S(u) = r_0 T_0 [(1 + B_T) + \pi^{-1}(3\pi - 2\psi_*)],$$

которое следует из третьего уравнения (6b) при $\dot{u} = 0$.

Устойчивость стационарных движений

Для определения устойчивости стационарных колебаний системы составляем уравнения в вариациях для уравнений (6), для чего пользуемся критериями Рауса – Гурвица. В результате получаем следующие условия:

$$D_1 > 0, D_3 > 0, D_1 D_2 - D_3 > 0,$$

где $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$, $D_2 = b_{11} b_{33} + b_{11} b_{22} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} - b_{13} b_{31}$, $D_3 = b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} + b_{22} b_{13} b_{31} - b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12} b_{23} b_{31} - b_{13} b_{21} b_{32}$.

В случае скоростей $u \geq ap$ имеем выражения вида

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{I} \left(Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u} \right), b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I} \frac{\partial B_T}{\partial a}, b_{13} = 0, \\ b_{21} &= a \frac{T_0}{2m} \frac{\partial k_T}{\partial u}, b_{22} = -\frac{1}{8pm} \left\{ 4p \left[k_0 + T_0 \bar{N}_3 \alpha_3 (3a^2 p^2 - h) \right] - 3ba^2 \sin 2\xi \right\}, \\ b_{23} &= \frac{1}{4pm} \left[2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi \right], b_{31} = 0, \\ b_{32} &= -\frac{1}{2pma^2} (\lambda \sin \xi - ba^3 \cos 2\xi), b_{33} = \frac{1}{2pma} \left[\lambda \cos \xi - ba^3 \sin 2\xi \right]. \end{aligned}$$

В случае $u < ap$ изменяются лишь коэффициенты, и выражения имеют вид

$$b_{11} = \frac{r_0}{I} \left[Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u} - \frac{2r_0 T_0}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I} \left[\frac{\partial B_T}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{21} = \frac{a}{2m} \left[T_0 \frac{\partial k_T}{\partial u} + \frac{4u T_0}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{8pm} \left\{ 4p \left[k_0 + T_0 \bar{N}_3 \alpha_3 (3a^2 p^2 - h) \right] - 3ba^2 \sin 2\xi \right\} - \frac{2T_0 u^2}{\pi m a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}},$$

где $\frac{\partial B_T}{\partial u} = -(\alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - 3\alpha_3 N_2 a^2 p^2)$, $\frac{\partial B_T}{\partial a} = 6N_2 \alpha_3 u a p^2$, $\frac{\partial k_T}{\partial u} = -6\alpha_3 u$, $Q = dM(u/r_0)/du$.

Расчеты

Для получения информации о влиянии нелинейного параметрического воздействия кубического вида на динамику смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний были проведены расчеты с использованием следующих значений параметров:

$$\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}, \quad b = 0,686 \text{ Н} \cdot \text{см}^{-1}, \quad \lambda = 0,196 \text{ Н}, \quad k_0 = 0,196 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}, \quad T_0 = 4,9 \text{ Н},$$

$$\alpha_1 = 0,84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}, \quad \alpha_3 = 0,18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}, \quad r_0 = 1 \text{ см}, \quad I = 9,8 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2.$$

При расчетах амплитуды для коэффициента линейризации k_T было использовано число $\bar{N}_3 = 3/4$, которое получается при значении параметра точности линейризации $r = 1,50$. Для коэффициента линейризации B_T было использовано число $N_2 = 3/5$ ($r = 0,65$). Величины на приведенных далее рисунках и связанных с ним текстах нормализованы.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные кривые $a(\nu)$, полученные при расчетах на основе уравнения (7). Горизонтальные линии с обозначением a_a указывают уровень величин амплитуд автоколебаний, которые имеют место при скоростях $u = 1,14$ и $1,20$.

Горизонтальный участок на кривой синего цвета (см. рис. 2, а) соответствует приближенной зависимости $ap \approx u = 1,14$. Колебания устойчивы при характеристиках источника энергии, крутизна Q которых находится в пределах заштрихованного сектора ($Q = dM(u/r_0)/du$).

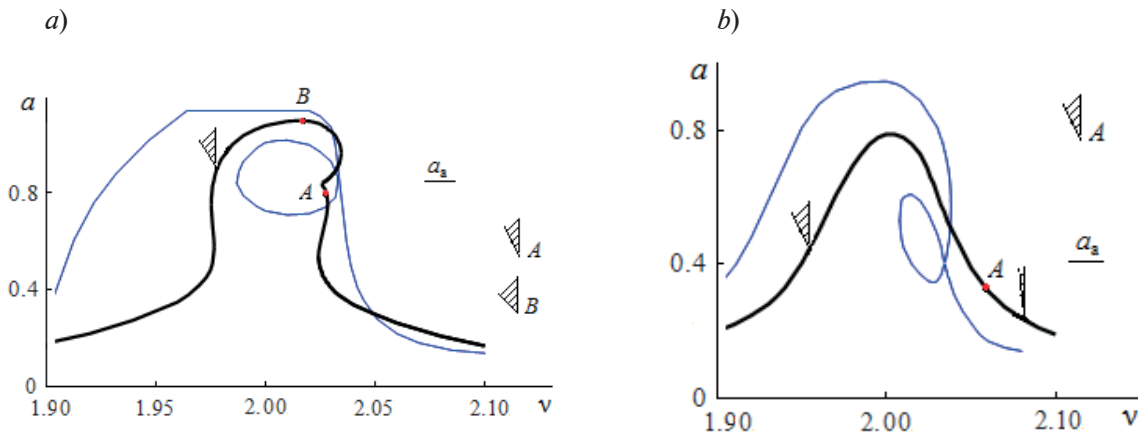


Рис. 2. Амплитудно-частотные зависимости при скоростях $u = 1,14$ (а) и $1,20$ (б).

Кривые синего цвета приведены для сравнения и представляют линейное параметрическое воздействие вида $x \cos(\nu t)$. Горизонтальные линии с обозначением a_a указывают уровень величин амплитуд автоколебаний. Заштрихованные сектора отражают крутизну Q характеристики источника энергии ($Q = dM(u/r_0)/du$) и соответствуют устойчивым амплитудам (в точке А и других позициях)

Кривые синего цвета представляют линейное параметрическое воздействие $x\cos(vt)$ и приведены с целью сравнения с нелинейным воздействием $x^3\cos(vt)$. Это сравнение показывает разницу влияния линейного и нелинейного параметрических возбуждений на динамику системы. При этих возбуждениях различаются уровни амплитуд и формы кривых возбуждения, а также значения ширины областей резонанса. Возможно также различие в количестве амплитуд на одной и той же частоте. Например, на рис. 2, *a* видно, что у частот около точки *A* при линейном возбуждении имеется три амплитуды, а при нелинейном – 4. В то же время рис. 2, *b* показывает, что при нелинейном параметрическом возбуждении отсутствуют частоты, при которых имеется более одной амплитуды, а при линейном они присутствуют.

Решение дифференциальных уравнений (1) было получено также численно. Характеристика источника энергии для решения была принята в виде

$$M(\phi) = M_0 - Q\phi.$$

Крутизна варьировалась в пределах $0 < Q \leq 20$, где значение $Q = 20$ соответствует углу, равному приблизительно 87° . Для примера на рис. 3 представлен один из графиков, который отражает одно из решений, полученных при разных значениях параметров M_0 , Q , p . Числа в рамках (шрифт голубого цвета) выданы программой вычисления. В случае решения, представленного на рис. 3, были взяты значения параметров $M_0 = 5,9889$,

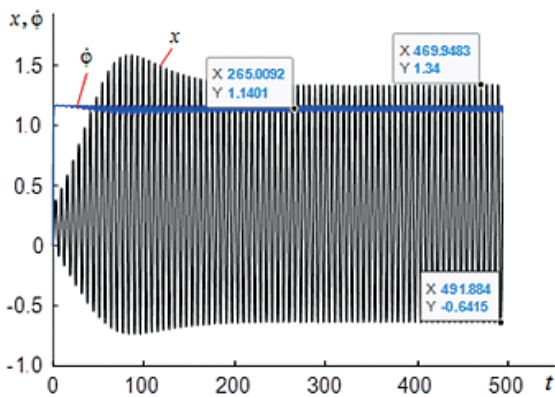


Рис. 3. Зависимости $x(t)$ и $\phi(t)$ при значениях параметров двигателя $M_0 = 5,9889$, $Q = 5$. Данные получены при $p = 1$

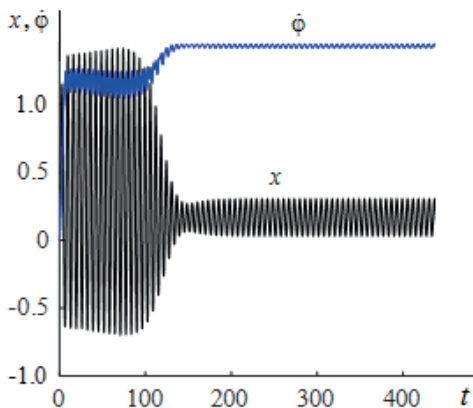


Рис. 4. Временная динамика координаты x и скорости вращения ротора двигателя ϕ при его характеристике $M_0 = 0,8780994695$. Данные получены при $p = 1$

$Q = 5$, которые позволили выйти на режим со средним значением скорости вращения ротора двигателя $\dot{\phi} = 1,1401$ (в рамочке на графике использовано обозначение Y); этот режим достаточно хорошо соответствует скорости $u = 1,14$. Для амплитуды (Y в рамочках на графике) было получено значение $a \approx 0,991$, близкое к значению $1,07$, полученному в результате решения уравнения (7).

Было также изучено влияние параметров M_0 , Q , характеризующих источник энергии, на протекание динамических процессов. Как было отмечено выше, решения уравнений для случаев $u \geq ap$, $u < ap$ принципиально различны и существует некоторое граничное значение скорости u_T , разделяющее эти случаи. При граничном значении скорости u_T в системе возможен переход из одного состояния в другое. Это зависит от крутизны характеристики источника энергии, ее расположения относительно кривой нагрузки на источник. Переход имеет место при пологих характеристиках $M(\phi)$ и связан с нагрузкой $S(u)$ на источник энергии со стороны колебательной системы, зависящей от функции (2), выраженный уравнением (8).

В качестве примера на рис. 4 представлен график указанного перехода при определенных значениях параметров двигателя и характеристики источника энергии. При одном и том же значении крутизны $Q = 0,4986$ (угол наклона составляет около 26°), весьма малая ($1 \cdot 10^{-10}$) разница значений M_0 , равных $0,8780994694$ и $0,8780994695$, приводит к кардинальному изменению

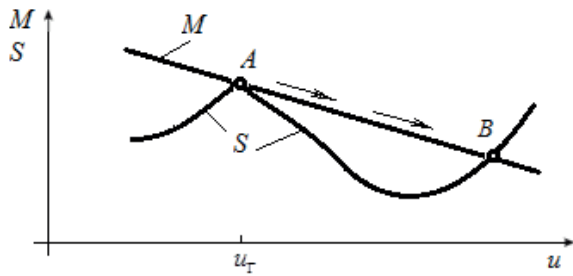


Рис. 5. Зависимости нагрузки S и моментной характеристики M от скорости u в ее узком диапазоне изменения;
 u_T – граничное значение скорости

теристики M от скорости u , на узком диапазоне изменения u , в котором имеет место переход из точки A в точку B (соответствует данным на рис. 4) при фиксированной позиции характеристики источника энергии на граничной скорости u_T , соответствующей точке A . Разные переходы с описанием полного графика нагрузки для различных классов колебаний обстоятельно изложены в монографии [1], поэтому здесь не представлены.

Помимо представленных в настоящей статье результатов, были также численно решены дифференциальные уравнения (6). Результаты здесь не приведены ввиду ограниченного объема статьи. Отметим лишь то, что получено хорошее согласие результатов этих решений с таковыми для уравнений (7).

Заключение

Как следует из результатов, полученных в настоящем исследовании, нелинейное параметрическое возбуждение обладает специфическими особенностями, по сравнению с линейным параметрическим. Эти особенности следующие:

- оно значительно изменяет форму амплитудных кривых;
- оказывает существенное влияние на устойчивость колебаний.

Сравнение результатов по этим возбуждениям показывает, что при взаимодействии колебательной системы с нелинейным параметрическим возбуждением (в случае источника энергии ограниченной мощности) возникает ряд эффектов такого же характера, как при линейном параметрическом возбуждении. Представляется нецелесообразным излагать здесь характер этих эффектов, поскольку их основательное и подробное описание представлено в монографии [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alifov A. A., Frolov K. V. Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 568 с.
3. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. Под ред. В. В. Мигулина. 2-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 392 с.
4. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
5. Алифов А. А. Влияние нелинейного параметрического возбуждения на взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний // Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции «Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем». Чебоксары, 02 июня 2023 года. Чебоксары: Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, 2023. С. 7–8.
6. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
7. Фролов К. В. Избранные труды. В 2 тт. Т. 1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 349 с.

8. Рубаник В. П., Старик Л. К. Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии // Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР. Серия «Вибротехника». 1971. № 2 (11). С. 205–212.
9. Абдиев Ф. К. Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Известия АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134–139.
10. Bharti S. K., Bisoi A., Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 442. 3 March. Pp. 330–349.
11. Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Self-synchronization of two unbalanced DC motor-driven rotors on a common movable platform // Badodkar D., Dwarakanath T. (Eds.). Machines, mechanism and robotics. Proceedings of iNaCoMM 2017. Book Ser. “Lecture Notes in Mechanical Engineering”, Springer, Singapore, 2018. Pp. 207–217.
12. Jha A. K., Dasgupta S. S. Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings // Meccanica. 2019. Vol. 54. No. 1–2. Pp. 311–320.
13. Varanis M., Balthazar J. M., Silva A., Mereles A. G., Pederiva R. Remarks on the Sommerfeld effect characterization in the wavelet domain // Journal of Vibration and Control. 2019. Vol. 25. No. 1. Pp. 98–108.
14. Rocha R. T., Balthazar J. M., Tusset A. M., Souza S. L. T., Janzen F. C., Arbex H. C. On a non-ideal magnetic levitation system: nonlinear dynamical behavior and energy harvesting analyses // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 95. No. 4. Pp. 3423–3438.
15. Sinha A., Bharti S. K., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Sommerfeld effect in a single-DoF system with base excitation from motor driven mechanism // Mechanism and Machine Theory. 2020. Vol. 148. June. P. 103808.
16. Чернышева Ю. В., Горский А. Н., Серeda А. Г. Эффект Зоммерфельда и динамика вагонов // Электроника и электрооборудование транспорта. 2019. № 1. С. 8–10.
17. Ешин Е. К. Об эффекте Зоммерфельда и скрытых колебаниях в асинхронном электроприводе горных машин // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2023. Т. 66. № 1. С. 80–85.
18. Alifov A. A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "Measurement and Quality: Problems, Prospects"; November 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan. Pp. 289–293.
19. Алифов А. А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 74 с.
20. Климов Д. М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–12.
21. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград: Машиностроение, 1976. 320 с.
22. Мурашкин Л. С., Мурашкин С. Л. Прикладная нелинейная механика станков. Ленинград: Машиностроение, 1977. 192 с.
23. Пономарев А. С., Соколов В. И., Кожухарь А. А. Поперечные автоколебания силовых столов, вызванные силами трения // Вестник Харьковского политехнического института. Машиностроение. 1977. Т. 8. № 130. С. 67–69.
24. Коритыцкий Я. И. Крутильные автоколебания вытяжных приборов прядильных машин при граничном трении в опорах скольжения // «Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах». Сб. статей АН СССР под ред. К. В. Фролова. М.: Наука, 1972. 303 с.
25. Броновец М. А., Журавлёв В. Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.
26. Алифов А. А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29. № 5. С. 739–750.
27. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
28. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
29. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.

30. Вибрации в технике. Справочник. В 6 тт. Ред. совет: В. Н. Челомей (пред., гл. ред.). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. 1979. 351 с.

REFERENCES

1. **Alifov A. A., Frolov K. V.**, Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1990.
2. **Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.**, Theory of vibration, Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).
3. **Migulin V. V., Medvedev V. I., Mustel E. R., Parygin V. N.**, Osnovy teorii kolebaniy [Foundations of vibration theory], 2-nd edition, Nauka Publishing, Moscow, 1988 (in Russian).
4. **Biderman V. L.**, Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Theory of mechanical vibrations], Vysshaya Shkola [The Higher School Publishing], Moscow, 1980 (in Russian).
5. **Alifov A. A.**, Vliyaniye nelineynogo parametricheskogo vozbuzhdeniya na vzaimodeystviye parametricheskikh i vynuzhdennykh kolebaniy [Effect of nonlinear parametric excitation on the interaction between parametric and forced oscillations], Proc. 15-th All-Russian Sci. & Techn. Conf. “Dinamika nelineynykh diskretnykh elektrotekhnicheskikh i elektronnykh system” [Dynamics of nonlinear discrete electrotechnical and electronic systems], June 02, 2023, Cheboksary: Chuvash State University Named after I. N. Ulyanov (2023) 7–8.
6. **Kononenko V. O.**, Vibrating systems with limited power-supply, Iliffe, London, 1969.
7. **Frolov K. V.**, Izbrannyye Trudy v 2 t [Selected works in 2 Vols.], Nauka Publishing, Moscow, 2007 (in Russian).
8. **Rubanik V. P., Starik L. K.**, Ob ustoychivosti avtokolebaniy reztsa v sluchaye neidealnogo istochnika energii [On stability of cutter’s self-oscillations in the case of a nonideal energy source], Nauchnyye trudy vuzov Lit. SSR. Vibrotehnika [Scientific Transactions of Higher Schools of Lithuanian SSR, Ser. Vibrotechnics] (2(11)) (1971) 205–212 (in Russian).
9. **Abdiyev F. K.**, Avtokolebaniya sistemy s zapazdyvaniyem i s neidealnym istochnikom energii [Self-oscillations of a delayed system with a nonideal energy source], Izv. AN AzSSR. Seriya Fiziko-Tekhnicheskie i Matematicheskie Nauki [News of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR: Ser. Physical, Technical and Mathematical Sciences]. (4) (1983) 134–139 (in Russian).
10. **Bharti S. K., Bisoi A., Sinha A., et al.**, Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports, J. Sound Vib. 442 (3 March) (2019) 330–349.
11. **Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R.**, Self-synchronization of two unbalanced DC motor-driven rotors on a common movable platform, In book: Badodkar D., Dwarakanath T. (Eds.) Machines, mechanism and robotics, Proc. iNaCoMM 2017. Book ser. “Lecture Notes in Mechanical Engineering”, Springer, Singapore (2018) 207–217.
12. **Jha A. K., Dasgupta S. S.**, Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings, Meccanica. 54 (1–2) (2019) 311–320.
13. **Varanis M., Balthazar J.M., Silva A., et al.**, Remarks on the Sommerfeld effect characterization in the wavelet domain, J. Vib. Control. 25 (1) (2019) 98–108.
14. **Rocha R. T., Balthazar J. M., Tusset A. M., et al.**, On a non-ideal magnetic levitation system: nonlinear dynamical behavior and energy harvesting analyses, Nonlinear Dyn. 95 (4) (2019) 3423–3438.
15. **Sinha A., Bharti S. K., Samantaray A. K., Bhattacharyya R.**, Sommerfeld effect in a single-DoF system with base excitation from motor driven mechanism, Mech. Mach. Theory. 148 (June) (2020) 103808.
16. **Chernysheva J., Gorskiy A., Sereda A.**, The effect of Sommerfeld and wagon dynamics, Electronics & Electrical Equipment of Transport. (1) (2019) 8–10 (in Russian).
17. **Eshchin E. K.**, On the Sommerfeld effect and hidden oscillations in the minning machines asynchronous, Russian Electromechanics. 66 (1) (2023) 80–85 (in Russian).
18. **Alifov A. A.**, About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation, Proc. Int. Sci. Tech. Conf. “Measurement and Quality: Problems, Prospects”, Nov. 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan (2018) 289–293.

19. Alifov A. A., Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow – Izhevsk, 2015 (in Russian).
20. Klimov D. M., On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction, Mech. Solids. 38 (3) (2003) 1–7.
21. Panovko Ya. G., Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of applied theory of oscillations and impact], Mashinostroyeniye Publishing, Leningrad, 1976 (in Russian).
22. Murashkin L. S., Murashkin S. L., Prikladnaya nelineynaya mekhanika stankov [Applied nonlinear mechanics of machine tools], Mashinostroyeniye Publishing, Leningrad, 1977 (in Russian).
23. Ponomarev A. S., Sokolov V. I., Kozhukhar’ A. A., Poperechnyye avtokolebaniya silovykh stolov, vyzvannyye silami treniya [Transverse self-oscillations of force tables caused by friction forces], Bulletin of the Kharkiv Polytechnic Institute. Ser. Machine Engineering. 8 (130) (1977) 67–69.
24. Korityssky Ya. I., Krutilnyye avtokolebaniya vytyazhnykh priborov pryadilnykh mashin pri granichnom trenii v oporakh skolzheniya [Torsional self-oscillations of spinning machine drafting devices with boundary friction in sliding bearings], In book: Collected works “Nonlinear vibrations and transition processes in machines”, Nauka Publishing, Moscow, 1972.
25. Bronovets M. A., Zhuravlev V. F., On self-excited vibrations in friction source measurement systems, Mech. Solids. 47 (3) (2012) 261–268.
26. Alifov A. A. O., Mixed forced parametric, and self-oscillations with a nonideal energy source and lagging forces, Izvestiya VUZ. Nonlinear Dynamics. 29 (5) (2021) 739–750 (in Russian).
27. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, CRC Press, Florida, USA, 1961.
28. Moiseev N. N., Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics], Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).
29. Butenin N. V., Neymark Yu. I., Fufayev N. A., Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations], Nauka Publishing, Moscow, 1976 (in Russian).
30. Chelomey V. N. (Chairman), Vibratsii v tehnike: spravochnik [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 2. Vibrations of nonlinear mechanical systems, Edited by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛИФОВ Алишир Али оглы – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.

101000, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4
 alishir@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-2327-068X

THE AUTHOR

ALIFOV Alishir Ali

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS
 4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia
 alishir@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-2327-068

Статья поступила в редакцию 12.02.2025. Одобрена после рецензирования 17.03.2025. Принята 17.03.2025.

Received 12.02.2025. Approved after reviewing 17.03.2025. Accepted 17.03.2025.

Математическая физика

Научная статья

УДК 517.926.4

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18303>

ОПТИМИЗИРОВАННЫЙ ТАУ-МЕТОД ЛАНЦОША

А. Л. Буляница^{1, 2} , **А. С. Бердников**¹, **А. А. Евстрапов**¹

¹ Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

 antbulyan@yandex.ru

Аннотация. В статье обсуждается эффективный алгоритм получения приближенных полиномиальных решений для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми функциями. Алгоритм является усовершенствованной версией тау-метода К. Ланцоша и дает возможность получать оптимальное отклонение приближенного решения от точного в соответствии с минимаксной нормой для заданного отрезка. При незначительной модификации алгоритм позволяет находить приближенные выражения для производных точных решений с существенно большей точностью, чем способны обеспечивать производные приближенных решений.

Ключевые слова: минимаксная норма, полином Чебышева, оптимальная аппроксимация, линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, тау-метод

Финансирование: Исследование выполнено в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер 075-00444-25-00).

Для цитирования: Буляница А. Л., Бердников А. С., Евстрапов А. А. Оптимизированный тау-метод Ланцоша // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 30–48. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18303>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18303>

AN OPTIMIZED LANZOS TAU-METHOD

A. L. Bulyanitsa^{1, 2} , **A. S. Berdnikov**¹, **A. A. Evstrapov**¹

¹ Institute for Analytical Instrumentation of RAS, St. Petersburg, Russia;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 antbulyan@yandex.ru

Abstract. The paper puts forward an effective algorithm for producing approximate polynomial solutions for linear ordinary differential equations (LODEs) and sets of LODEs with polynomial coefficients and polynomial right-hand side functions. The algorithm is an upgraded version of the Lanczos Tau-method and provides the optimal deviation of the approximate solution from the exact one according to the minimax norm for a given interval. With minor modification, the algorithm allows one to find approximate expressions for the derivatives of



the exact solutions with sufficiently greater accuracy than the derivatives of the approximate solutions are capable of providing that.

Keywords: minimax norm, Chebyshev polynomial, optimal approximation, linear ordinary differential equation, Tau-method

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. 075-00444-25-00).

For citation: Bulyanitsa A. L., Berdnikov A. S., Evstrapov A. A., An optimized Lanczos Tau-method, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 30–48. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18303>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Тау-метод¹ Ланцоша позволяет получать приближенные полиномиальные решения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми частями [1, 2]. Эти решения должны быть максимально точными на рассматриваемом конечном отрезке в соответствии с минимаксной нормой, что является противоположностью приближения методами наименьших квадратов и/или рядами ортогональных полиномов различных типов [3 – 5].

В данной статье рассматриваются причины, по которым полиномиальные решения, получаемые с помощью исходного алгоритма Ланцоша, могут оказаться неоптимальными и предлагаются эффективные пути улучшения алгоритма. Общие теоретические соображения подкрепляются численными примерами.

Первоначально тау-метод был предложен в статье [1] и впоследствии подробно изложен в монографии [2] с большим количеством иллюстративных примеров. В статье [6] приведены базовые математические определения, которые позволяют строго представить этот метод. Публикация [7] рассматривает случай разбиения отрезка на малые отрезки и последующего применения тау-метода к каждому малому отрезку для получения гладкого и точного приближенного кусочно-полиномиального решения.

Другой путь повышения точности этого метода раскрыт в статье [8]. Рекуррентные схемы тау-метода, когда степень аппроксимирующего полинома увеличивается шаг за шагом, без его пересчета с нуля, рассмотрены в работах [9, 10]. Анализ погрешностей приближенных решений обсуждается в публикациях [11, 12]. Распространение тау-метода на линейные дифференциальные уравнения с коэффициентами, отличными от полиномиальных, на нелинейные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и т. п., рассмотрены в статьях [13 – 15].

Возрождение интереса к задачам, связанным с различными методами формирования приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, систем, интегральных уравнений и других объектов, подтверждается публикациями последних лет. При этом также используется тау-метод Ланцоша, однако с построением смещенного базиса Лежандра при решении систем с временной задержкой [16]; применяется аппроксимация дифференциальных операторов (так же, как и у нас) с использованием смещенных полиномов Чебышева [17], представлены варианты разложения функций по полиномам Эрмита и Лагерра [18].

¹ Название «тау-метод» предложено и введено в обращение Корнелиусом Ланцошем (венгерский физик и математик) в его работе [1] на том основании, что дополнительные свободные множители для полиномов Чебышева в правой части дифференциальных уравнений он обозначал греческими буквами τ с нижними индексами.

Помимо этого, разработаны специальные программные средства Tau Toolbox², в частности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе нелинейных) и их систем, а также интегральных уравнений [19 – 21]. Статьи [22, 23] содержат ссылки на применение этих программных средств при разложении решений по полиномам Соболева и решении сингулярных интегральных уравнений. В работе [24] ищутся коэффициенты аппроксимирующих формул при достижении чебышевского альтернанса. Этот подход используется при аппроксимации функций Ферми – Дирака на основе итерационной процедуры.

В последние годы появляются научные публикации, посвященные чебышевским приближениям функций [25, 26], а также учебные пособия, рассматривающие более широкий круг вопросов, относящихся к поиску приближенных решений и обоснованию их свойств [27 – 29].

Таким образом, интерес к рассматриваемой тематике не ослабевает, что подтверждает актуальность рассматриваемой авторами научной задачи.

Тау-метод изначально был сформулирован как способ аппроксимации специальных функций математической физики, которые можно было бы выразить с помощью простых дифференциальных уравнений. В настоящее время этот метод становится мощным и точным инструментом для численного решения сложных дифференциальных и функциональных уравнений. Идея, предложенная К. Ланцошем, заключается в аппроксимации решения заданной задачи путем вычисления точного решения некоторой приближенной задачи, близкой к исходной. На этом пути решение дифференциального уравнения аппроксимируется полиномом, который является точным решением дифференциального уравнения, полученного добавлением полиномиальных членов возмущения к его правой части. Члены возмущения выбираются так, чтобы гарантировать существование аналитического полиномиального решения возмущенного уравнения.

Если коэффициенты уравнения, и/или начальные условия, и/или границы отрезка зависят от каких-либо параметров, то на выходе получается алгебраическое выражение, зависящее от этих параметров. Это несомненное преимущество тау-метода, по сравнению с классическими численными методами, которые выдают индивидуальные решения при фиксированных числовых значениях параметров. Его использование может существенно упростить исследование и достичь оптимизации решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров.

Следующий раздел содержит различные определения и теоремы, которые использованы далее для этого исследования.

Раздел «Пример решения уравнения тау-методом» иллюстрирует работу тау-метода Ланцоша; здесь решается линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами и известным аналитическим неполиномиальным решением.

В разделе «Различие погрешностей и невязок» проанализирована принципиальная разница между погрешностью (расхождением между точным и приближенным решениями) и дифференциальной невязкой (паразитным значением правой части дифференциального уравнения после подстановки приближенного решения). Минимизация дифференциальной невязки не эквивалентна минимизации погрешности, и поэтому полиномы Чебышева или некоторые другие ортогональные полиномы, используемые для минимизации дифференциальной невязки, не дают оптимального приближенного решения.

В следующем за ним разделе описан оптимизированный тау-метод для решения приведенных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Интегральная форма линейного дифференциального уравнения и теорема Пикара позволяют доказать утверждение, что невязка интегральной формы пропорциональна погрешности приближенного решения. Следовательно, если возмущение интегральной формы является суммой полиномов Чебышева, то приближенное решение, полученное тау-методом, близко к оптимальному. Оптимизированный тау-метод вносит возмущение как в правую часть дифференциального уравнения, так и в начальные условия приближенного решения (последнее существенно отличается от исходного тау-метода).

² Пакет можно загрузить с сайта <https://bitbucket.org/tautoolbox/tautoolbox/src/main/>.



В разделе «Обсуждение достигнутых результатов» сопоставляются использованные подходы к проблеме и анализируются полученные преимущества предлагаемой модификации метода.

В заключении статьи кратко сформулированы основные итоги работы.

Необходимые определения и общие теоремы

В этом разделе содержатся определения и общие теоремы, используемые далее в этом исследовании. Подробности и доказательства соответствующих утверждений можно найти в книгах [3 – 5].

Определение 1. Полином вида

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

степени n является минимаксным приближением заданной функции $f(x)$ с заданным весом $w(x) \neq 0$ на заданном отрезке $x \in [x_a, x_b]$, если $P(x)$ есть решение вариационной задачи

$$\max_{x \in [x_a, x_b]} |w(x)(f(x) - P(x))| \rightarrow \min, \quad (1)$$

где минимизация выполняется по всем возможным наборам коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Определение 2. Приведенный полином вида

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

степени n называется полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на заданном отрезке $x \in [x_a, x_b]$ с заданным весом $w(x) \neq 0$, если $P(x)$ есть решение вариационной задачи

$$\max_{x \in [x_a, x_b]} |w(x)P(x)| \rightarrow \min, \quad (2)$$

где минимизация производится по всем возможным наборам коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Младшая часть $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ полинома степени n , наименее уклоняющегося от нуля, является полиномом степени $n - 1$, обеспечивающим минимаксное приближение (решение вариационной задачи (1)) для функции $f(x) = -x^n$ с весом $w(x)$.

Определение 3. Набор из m точек

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m$$

называется чебышевским альтернансом размера m для функции $h(x)$ на отрезке $[x_a, x_b]$, если точки $x_k \in [x_a, x_b]$ являются чередующимися локальными минимумами и максимумами $h(x)$ с равными абсолютными значениями, так что

$$h(x_k) = (-1)^k \varepsilon \text{ и } |\varepsilon| = \max |h(x)| \text{ для } x \in [x_a, x_b].$$

Теорема 1 (теорема Валле Пуссена). Предположим, что имеется многочлен $Q(x)$ степени n , функция $f(x)$, отрезок $[x_a, x_b]$ и весовая функция $w(x) \neq 0$. Предположим также, что имеется $n + 2$ точек (альтернанс Валле Пуссена)

$$x_a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq x_b,$$

в которых выражение $w(x)[f(x) - Q(x)]$ имеет ненулевые значения с чередующимися знаками:

$$+\lambda_1, -\lambda_2, \dots, +(-1)^{n+2} \lambda_{n+2}$$

(предполагается, что для $\forall k \lambda_k > 0$).

Если λ – минимаксное отклонение от нуля для

$$w(x) [f(x) - P(x)],$$

где оптимальный полином $P(x)$ есть решение вариационной задачи (1), то

$$\lambda \geq \min \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+2}\}.$$

Если указанные точки x_k также являются локальными минимумами и максимумами для $w(x)[f(x) - Q(x)]$, то

$$\lambda \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+2}\}.$$

Теорема 2 (теорема Чебышева об альтернансе). Если существует чебышевский альтернанс размера $n + 2$ на отрезке $[x_a, x_b]$ для функции $w(x)[f(x) - P(x)]$, где $w(x) \neq 0$ и $f(x)$ – заданные функции, а $P(x)$ – многочлен степени n , то этот многочлен $P(x)$ есть единственное решение вариационной задачи (1). Если функции $w(x) \neq 0$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[x_a, x_b]$, то вариационная задача (1) имеет единственное решение $P(x)$, и это решение удовлетворяет условию теоремы Чебышева, т. е. для функции $w(x)[f(x) - P(x)]$ существует чебышевский альтернанс размерности $n + 2$ на отрезке $[x_a, x_b]$.

Теорема 3 (критерий Чебышева). Если для функции $w(x)P(x)$ существует чебышевский альтернанс размера $n + 1$ на отрезке $[x_a, x_b]$, где $w(x) \neq 0$ – заданная функция, а $P(x)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице, то многочлен $P(x)$ есть единственное решение вариационной задачи (2), т. е. многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Если функция $w(x) \neq 0$ непрерывна на отрезке $[x_a, x_b]$, то вариационная задача (2) имеет единственное решение и это решение удовлетворяет критерию Чебышева, т. е. для функции $w(x)P(x)$ существует чебышевский альтернанс размера $n + 1$ на отрезке $[x_a, x_b]$.

Алгоритмы, позволяющие вычислять полиномы для минимаксных приближений, и полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля при заданном весе $w(x) \neq 0$ на заданном отрезке $[x_a, x_b]$, рассмотрены в работах [30 – 32].

Определение 4. Полиномы $T_n(x)$ степени n , определяемые как

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

для $-1 \leq x \leq +1$, называются полиномами Чебышева первого рода.

В соответствии с определением 2 и теоремой 3 полиномы $T_n(x)/2^{n-1}$ являются полиномами степени n , наименее уклоняющимися от нуля на отрезке $x \in [-1, +1]$ с весом $w(x) = 1$. Величина уклонения равна $1/2^{n-1}$.

Определение 5. Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$L[x(t)] = 0,$$

где $L[x(t)]$ – некоторый дифференциальный оператор.

Если для тестовой функции $x(t)$ справедливо равенство

$$L[x(t)] = Q(t),$$

то $Q(t)$ называется дифференциальной невязкой $x(t)$.

Определение 6. Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = K[x(t)],$$

эквивалентное дифференциальному уравнению

$$L[x(t)] = 0,$$

где $K[x(t)]$ – некоторый интегральный оператор.

Если для пробной функции $x(t)$ справедливо равенство

$$x(t) - K[x(t)] = R(t),$$

то $R(t)$ называется интегральной невязкой $x(t)$.

Определение 7. Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[x(t)] = 0,$$

причем $x^*(t)$ – точное решение уравнения. Если $x(t)$ – приближенное решение уравнения, то разность

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

называется погрешностью приближенного решения $x(t)$.

Замечание 1. Аналогичным образом вводятся дифференциальные невязки, интегральные невязки и погрешности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример решения уравнения тау-методом

Метод Ланцоша дает приближенные полиномиальные решения на некотором фиксированном отрезке для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми функциями вида

$$L[x(t)] = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) - f(t) = 0,$$

где $a_k(t), f(t)$ – полиномы; $x(t)$ – неизвестная функция.

Для иллюстрации возьмем простой пример:

$$L[x(t)] = x''(t) + tx'(t) + 2x(t) = 0, \tag{3}$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

Точное решение уравнения (3) есть $x^*(t) = t \cdot \exp(-t^2/2)$. Предположим, что точное решение неизвестно и необходимо найти приближенное решение задачи (3) при $0 \leq t \leq 4$. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации (см., например, монографию [33]) гарантирует, что любую непрерывную функцию можно аппроксимировать на фиксированном отрезке конечного размера со сколь угодно высокой точностью полиномом соответствующей степени. Это утверждение служит основой для нахождения приближенного решения в виде полинома для рассматриваемой задачи.

Будем искать приближенное решение задачи (3) в форме полинома 7-й степени с неопределенными коэффициентами b_k :

$$x(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_7t^7. \tag{4}$$

После подстановки выражения (4) в уравнение (3) правая часть (дифференциальная невязка) оказывается многочленом:

$$Q(t) = (2b_0 + 2b_2) + (3b_1 + 6b_3)t + (4b_2 + 12b_4)t^2 + (5b_3 + 20b_5)t^3 + (6b_4 + 30b_6)t^4 + (7b_5 + 42b_7)t^5 + 8b_6t^6 + 9b_7t^7. \tag{5}$$

Нам нужно сделать дифференциальную невязку (5) максимально близкой к нулю; например, удовлетворить условие $Q(t) \equiv 0$. Однако это возможно только тогда, когда точное решение уравнения является полиномом требуемой (или меньшей) степени. Утверждение «сделать невязку максимально малой» четко не определено и не может считаться однозначным в математическом смысле.

Например, мы можем приравнять нулю как можно больше коэффициентов при меньших степенях невязки (5) при условии, что некоторые коэффициенты используются для удовлетворения начальных условий. Для невязки (5) этого оказывается достаточно, чтобы исключить члены с множителями $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$ и даже t^6 . Тогда решение таково:

$$b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = 0, b_1 = 1, \\ b_3 = -1/2, b_5 = 1/8, b_7 = -1/48, \tag{6}$$

$$Q(t) = -3/16t^7.$$

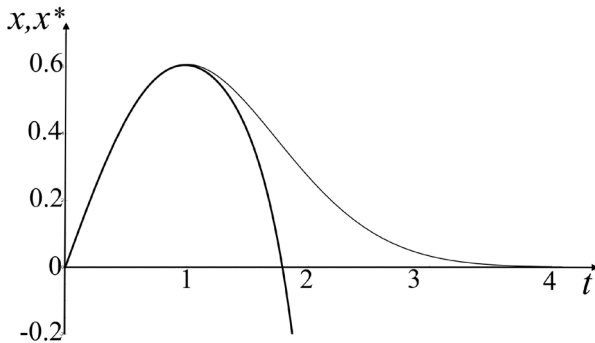


Рис. 1. Точное ($x^*(t)$) и приближенное ($x(t)$) решения дифференциального уравнения (3) (тонкая и жирная линии, соответственно); коэффициенты полинома $x(t)$ определены формулами (6)

Как и следовало ожидать, этот результат представляет собой усеченный ряд Тейлора для функции $t \cdot \exp(-t^2/2)$. На рис. 1 показано сравнение точного решения с

приближенным полиномиальным решением (4) с коэффициентами (6) для $t \in [0, 4]$. Очевидно, что это решение неудовлетворительное, несмотря на высокую степень полинома.

Одна из возможных причин неудачи заключается в том, что хотя дифференциальная невязка $Q(t) = -3t^7/16$ мала вблизи точки $t = 0$, эта невязка неоправданно велика в окрестности точки $t = 4$. По-видимому, если потребовать, чтобы невязка была примерно одинаковой на всем отрезке, то можно было бы ожидать существенно лучшего результата.

Первый шаг, предложенный К. Ланцошем, – это удаление плохо определенных эмпирических условий. При новой формулировке задачи необходимо найти коэффициенты $b_0, b_1 - b_7, \tau_6, \tau_7$, для которых функция (5) удовлетворяет условиям

$$x(0) = 0, x'(0) = 1, L[x(t)] \equiv \tau_6 t^6 + \tau_7 t^7.$$

Задача, по сути, не изменилась, но теперь система уравнений хорошо определена с алгебраической точки зрения. Соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение. Естественно, это решение совпадает с решением (6).

Следующий важный шаг, предложенный К. Ланцошем, заключается в замене дифференциальной невязки $\tau_6 t^6 + \tau_7 t^7$ (т. е. функции, которая мала на одном конце отрезка, но велика на его другом конце) дифференциальной невязкой

$$\tau_6 \bar{T}_6(t) + \tau_7 \bar{T}_7(t),$$

где $\bar{T}_6(t), \bar{T}_7(t)$ – преобразованные полиномы Чебышева $T_6(t)$ и $T_7(t)$ соответствующей степени [2, 34, 35].

Эти полиномы перемасштабированы от $t \in [-1, +1]$ до $t \in [0, 4]$ и наименее отклоняются от нуля на отрезке $t \in [0, 4]$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_6(t) &= T_6\left(\frac{t}{2} - 1\right), \quad \bar{T}_7(t) = T_7\left(\frac{t}{2} - 1\right), \\ T_6(\tau) &= 32\tau^6 - 48\tau^4 + 18\tau^2 - 1, \\ T_7(\tau) &= 64\tau^7 - 112\tau^5 + 56\tau^3 - 7\tau. \end{aligned}$$

Теперь дифференциальная невязка $Q(t)$ в правой части уравнения примерно одинакова во всех точках рассматриваемого отрезка. Тогда логично предположить, что погрешность приближенного решения также примерно одинакова на всем отрезке. В пользу этой гипотезы говорит равенство нулю погрешности приближенного решения во всех точках отрезка при условии равенства нулю невязки $Q(t)$ во всех его точках. Однако минимизация невязки не обязательно означает минимизацию погрешности (см. пример ниже).

Решение (4), полученное для уравнения (3) с использованием тау-метода Ланцоша, содержит следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, b_1 = 1,000000000, b_2 \approx 0,052400600, b_3 \approx -0,880052000, \\ b_4 &\approx 0,442647000, b_5 \approx -0,091658100, \\ b_6 &\approx 0,006894820, b_7 \approx -0,000023572. \end{aligned} \quad (7)$$

Рис. 2 иллюстрирует расхождение точного и приближенного полиномиальных решений (4) с коэффициентами (7), полученных с помощью тау-метода Ланцоша. Приближенное решение $x(t)$ лежит в диапазоне $0 - 0,6$ при максимальной погрешности на отрезке $t \in [0, 4]$ равной $0,012$. Графики точного и приближенного решений визуально практически неразличимы. На рис. 2 представлены графики погрешности и дифференциальной невязки. Видно, что точность приближенного решения, полученного с помощью тау-метода Ланцоша, вполне удовлетворительна.

В монографии [34] показано, что при разложении приближенного решения в усеченный ряд Чебышева во многих случаях приближенное решение оказывается точнее, чем при использовании метода Ланцоша. Однако приближенные решения, полученные с помощью усеченного ряда Чебышева, также не гарантируют максимально возможной точности. Цель же данного исследования – это создание такой модификации тау-метода



Ланцоша, которая бы обеспечивала максимально возможную точность приближенного решения.

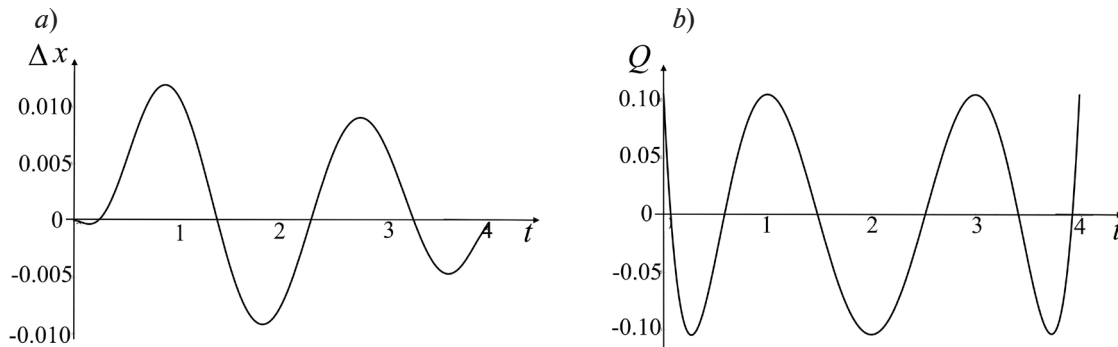


Рис. 2. Погрешность приближенного решения, полученного тау-методом Ланцоша (a) и его дифференциальная невязка (b)

Действительно, небольшая (по минимаксной норме) дифференциальная невязка в дифференциальном уравнении не означает небольшой минимаксной погрешности решения. В качестве примера рассмотрим уравнение $y''(t) + y(t) = 0$ с точным решением

$$y^*(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

и уравнение $z''(t) + z(t) = \varepsilon \cdot \sin t$ с точным решением

$$z^*(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \varepsilon(t \cdot \cos t - \sin t)/2.$$

Независимо от того, насколько мала во втором уравнении дифференциальная невязка $Q(t) = \varepsilon \cdot \sin t$, разница между этими двумя решениями с одинаковыми начальными условиями становится сколь угодно большой по мере увеличения отрезка $t \in [0, T]$.

Различие погрешностей и невязок

Погрешность $\Delta x(t)$ – это разность между точным решением $x^*(t)$ и приближенным решением $x(t)$. Дифференциальная невязка $Q(t)$ – это отклонение правой части дифференциального уравнения при подстановке приближенного решения. Теорема о единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений гласит:

«Если дифференциальная невязка равна нулю везде, то и погрешность равна нулю везде, и наоборот».

Тау-метод Ланцоша – это попытка сделать дифференциальную невязку как можно ближе к нулю, в предположении, что это сохраняет погрешность как можно ближе к нулю. Как было показано выше, это утверждение неверно.

Для нахождения связи между погрешностью и дифференциальной невязкой необходимо использовать интегральную форму уравнения. Предположим, что имеется уравнение

$$y^{(n)}(t) + c_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y + c(t) = 0, \tag{8}$$

где $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ и $c(t)$ непрерывны на отрезке $t \in [t_0, T]$.

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$y(t) = y_0 + y'_0(t-t_0) + \dots + y_0^{(n-1)} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} - \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t [c_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y(t) + c(t)] dt \dots dt, \tag{9}$$

где $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ – начальные условия для уравнения (8).

Теорема Пикара [36] о существовании и единственности решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения использует, в частности, рекуррентную последовательность функций $y_k(t)$, определяемых равенствами

$$y_{k+1}(t) = N[y_k(t)], \quad (10)$$

где $N[y(t)]$ – интегральный оператор в правой части выражения (9).

Независимо от начальной функции $y_0(t)$ и размера рассматриваемого конечного отрезка $t \in [t_0, T]$, итерации быстро сходятся к решению интегрального уравнения (9), т. е. к решению $y(t)$ дифференциального уравнения (8). Указанное решение единственно и определено для любого $t \in [t_0, T]$.

Анализ доказательства теоремы Пикара показывает, что

$$\max_{t \in [t_0, T]} |y(t) - y_k(t)| \leq C \max_{t \in [t_0, T]} |y_{k+1}(t) - y_k(t)|, \quad (11)$$

где константа C определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$. Более точная оценка приводит к равенству $C = C_0/k!$

Важно, что константа C в уравнении (11) не зависит от выбора начальной функции $y_0(t)$, цепочки функций $y_k(t)$ или решения $y(t)$.

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4 (об интегральной невязке). *Предположим, что $y(t) = N[y(t)]$ – интегральное уравнение (9), полученное из дифференциального уравнения (8); $y(t), z(t)$ – точное и приближенное решения уравнений (8) и (9), соответственно; $R(t)$ – интегральная невязка для $z(t)$, заданная соотношением*

$$z(t) = N[z(t)] + R(t). \quad (12)$$

Тогда погрешность $y(t) - z(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\max_{t \in [t_0, T]} |y(t) - z(t)| \leq C \max_{t \in [t_0, T]} |R(t)|, \quad (13)$$

где постоянная C определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t c_{n-1}(t) y'(t) dt &= c_{n-1}(t) y(t) - c_{n-1}(t_0) y(t_0) - \int_{t_0}^t c'_{n-1}(t) y(t) dt, \\ \int_{t_0}^t dt \left[\int_{t_0}^t c_{n-2}(t) y''(t) dt \right] &= \int_{t_0}^t dt \left[c_{n-2}(t) y'(t) - c_{n-2}(t_0) y'(t_0) - \int_{t_0}^t c'_{n-2}(t) y'(t) dt \right] = \\ &= c_{n-2}(t) y(t) - c_{n-2}(t_0) y(t_0) - \int_{t_0}^t c'_{n-2}(t) y(t) dt - c_{n-2}(t_0) y'(t_0) \frac{(t-t_0)}{1!} - \\ &\quad - \int_{t_0}^t dt \left[c'_{n-2}(t) y(t) - c'_{n-2}(t_0) y(t_0) - \int_{t_0}^t c''_{n-2}(t) y(t) dt \right] = \\ &= c_{n-2}(t) y(t) - \int_{t_0}^t 2c'_{n-2}(t) y(t) dt + \int_{t_0}^t dt \left[\int_{t_0}^t c''_{n-2}(t) y(t) dt \right] - \\ &\quad - c_{n-2}(t_0) y(t_0) - c_{n-2}(t_0) y'(t_0) \frac{(t-t_0)}{1!} + c'_{n-2}(t_0) y(t_0) \frac{(t-t_0)}{1!}, \\ &\quad \int_{t_0}^t dt \left\{ \int_{t_0}^t dt \left[\int_{t_0}^t c_{n-3}(t) y'''(t) dt \right] \right\} = \dots \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (9) преобразуется в эквивалентное интегральное уравнение вида

$$y(t) = H(t) + \int_{t_0}^t dt \left\{ h_1(t) y(t) + \int_{t_0}^t dt \left[h_2(t) y(t) + \dots + \int_{t_0}^t dt (h_n(t) y(t) + c(t)) \right] \right\},$$



где $h_k(t)$ – некоторые непрерывные функции (например, полиномы), определяемые коэффициентами $c_k(t)$ после интегрирования по частям; $H(t)$ – многочлен степени $n - 1$ с коэффициентами, выраженными сложным образом через значения известных функций (коэффициентов уравнения и их производных) при $t = t_0$ и известные начальные условия для $y(t)$.

Важно, что $H(t)$ не зависит от неизвестного решения $y(t)$.

Итерации

$$y_{k+1}(t) = H(t) + \int_{t_0}^t dt \left\{ h_1(t) y_k(t) + \int_{t_0}^t dt \left[h_2(t) y_k(t) + \dots + \int_{t_0}^t dt (h_n(t) y_k(t) + c(t)) \right] \right\}$$

быстро сходятся при любом начальном условии $y_0(t)$. Чтобы доказать это, введем обозначения

$$\Delta y_k(t) = y_{k+1}(t) - y_k(t), \quad M = \max_{t \in [t_0, T]} |\Delta y_0(t)|, \quad H_k = \max_{t \in [t_0, T]} |h_k(t)|.$$

Итерации для $\Delta y_k(t)$ имеют вид

$$\Delta y_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t dt \left\{ h_1(t) \Delta y_k(t) + \int_{t_0}^t dt \left[h_2(t) \Delta y_k(t) + \dots + \int_{t_0}^t h_n(t) \Delta y_k(t) dt \right] \right\},$$

откуда можно получить следующие оценки для отрезка $t \in [t_0, T]$:

$$\begin{aligned} |\Delta y_0(t)| &\leq M, \\ |\Delta y_1(t)| &\leq M(\Delta T H_1 \Delta t + \Delta T^2 H_2 \Delta t^2 / 2! + \dots + \Delta T^n H_n \Delta t^n / n!) \leq M G \Delta t, \\ |\Delta y_2(t)| &\leq M G (\Delta T H_1 \Delta t^2 / 2! + \Delta T^2 H_2 \Delta t^3 / 3! + \dots) \leq M G^2 \Delta t^2 / 2! \\ &\dots \dots \dots \\ |\Delta y_k(t)| &\leq M G^k \Delta t^k / k!, \end{aligned}$$

где $\Delta t = (t - t_0) / \Delta T$, $\Delta T = T - t_0$; $0 \leq \Delta t \leq 1$, G – константа:

$$G = \Delta T H_1 + \Delta T^2 H_2 + \dots + \Delta T^n H_n.$$

Последовательность итерационных значений

$$y_{k+1}(t) = y_0(t) + \Delta y_0(t) + \Delta y_1(t) + \dots + \Delta y_k(t)$$

сходится равномерно на отрезке $t \in [t_0, T]$, поскольку сумма приращений $\Delta y_k(t)$ мажорируется абсолютно и равномерно сходящимся рядом:

$$|\Delta y_0(t) + \Delta y_1(t) + \dots + \Delta y_k(t)| \leq |\Delta y_0(t)| + |\Delta y_1(t)| + \dots + |\Delta y_k(t)| + \dots \leq M \exp(G \Delta t).$$

Следовательно, существует предел $y_{k+1}(t) \rightarrow y(t)$; он дает решение $y(t)$ интегрального уравнения (9) и дифференциального уравнения (8), а также оценку погрешности:

$$|y(t) - y_0(t)| \leq |\Delta y_0(t)| + |\Delta y_1(t)| + \dots + |\Delta y_k(t)| + \dots \leq M \exp(G \Delta t) \leq M C, \quad (14)$$

хотя это и может оказаться очень грубой оценкой константы C , используемой в неравенстве (12).

Пусть $y_0(t) = z(t)$, где $z(t)$ удовлетворяет соотношению (12). Тогда справедливы равенства

$$y_1(t) = N[z(t)] = z(t) - R(t), \quad \Delta y_0(t) = y_1(t) - y_0(t) = -R(t),$$

$$M = \max |\Delta y_0(t)| = \max |R(t)|.$$

Объединяя это соотношение с уравнением (14), получаем соотношение (12).

Теорема 4 доказана.

Это доказательство имеет значительное сходство с доказательством теоремы Пикара для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [30], однако с небольшими изменениями. Неравенство (13) означает, что для минимизации разницы

между приближенным решением $z(t)$ и точным решением $y(t)$ нам следует минимизировать модуль функции $R(t)$ в уравнении (12). При возврате от уравнения (9) к уравнению (8) равенство (12) преобразуется в равенство

$$z^{(n)}(t) + c_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)z + c(t) = Q(t) = d^n R(t)/dt^n. \quad (15)$$

Уравнение (15) показывает, что для тау-метода дифференциальная невязка является n -й производной погрешности с точностью до постоянного множителя (см. неравенство (13)). В частности, если сумма полиномов Чебышева используется в качестве возмущения для правой части дифференциальных уравнений, как это делается в оригинальном методе Ланцоша, то погрешность приближенного решения является n -кратным интегралом от суммы, составленной из полиномов Чебышева. Следовательно, для дифференциальных уравнений высокого порядка погрешность приближенного решения может быть далека от функции, наименее отклоняющейся от нуля.

Аналогичные утверждения верны для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

Оптимизированный тау-метод для решения дифференциальных уравнений

Предположим, что имеется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (8), в котором старший коэффициент равен единице, а остальные коэффициенты и свободный член – это полиномы от независимой переменной. В предыдущем разделе говорится, что для получения оптимального приближенного решения следует выбрать правую часть в виде

$$R(t) = \sum_k \tau_k \bar{T}_{k+n}(t), \quad (16)$$

где $\bar{T}_{k+n}(t)$ – полиномы Чебышева первого рода, наименее уклоняющиеся от нуля, с аргументом, масштабированным от отрезка $[-1, +1]$ до отрезка $[t_0, T]$; τ_k – константы, которые будут определены далее.

Количество членов в сумме (16) и степени полиномов соответствуют дифференциальной невязке в правой части дифференциального уравнения (8) после подстановки приближенного полиномиального решения с неопределенными коэффициентами.

При преобразовании интегральной формы

$$z(t) = y_0 + y_0'(t-t_0) + \dots + y_0^{(n-1)} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_k \tau_k \bar{T}_{k+n}(t) - \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t [c_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)z(t) + c(t)] dt \dots dt \quad (17)$$

в дифференциальное уравнение, выходной сигнал равен

$$z^{(n)}(t) + c_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)z + c(t) = \sum_k \tau_k \bar{S}_k(t), \quad (18)$$

где полиномы $\bar{S}_k(t)$ определяются как

$$\bar{S}_k(t) = d^n \bar{T}_{k+n}(t)/dt^n.$$

Аналогично исходному методу Ланцоша, уравнение (18) позволяет определять как коэффициенты приближенного решения $z(t)$, так и коэффициенты τ_k . Кроме того, анализ уравнения (17) показывает, что начальные условия приближенного решения $z(t)$ должны быть рассчитаны как

$$z_0^{(j)} = \left. \frac{d^j z(t)}{dt^j} \right|_{t=t_0} = y_0^{(j)} + \sum_k \tau_k \left. \frac{d^j \bar{T}_{k+n}(t)}{dt^j} \right|_{t=t_0}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (19)$$

Если объединить уравнения (19) и линейные уравнения, полученные из уравнения (18), то можно однозначно найти все неопределенные коэффициенты. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. Пусть оптимизированный тау-метод получен путем объединения соотношений (18) для дифференциальной невязки приближенного решения $z(t)$ и соотношений (19) для начальных условий приближенного решения $z(t)$, где $\bar{S}_k(t) = d^n \bar{T}_{k+n}(t)/dt^n$ и $\bar{T}_{k+n}(t)$ — полиномы Чебышева степени $k + n$, пересчитанные из отрезка $[-1, +1]$ в отрезок $[t_0, T]$. Тогда погрешность приближенного решения $z(t)$, вычисленная как точное аналитическое решение возмущенной задачи (18), (19), удовлетворяет соотношению

$$\max_{t \in [t_0, T]} |y(t) - z(t)| \leq C \max_{t \in [t_0, T]} \left| \sum_k \tau_k \bar{T}_{k+n}(t) \right| \leq C \sum_k |\tau_k|, \quad (20)$$

где константа C в уравнении (20) определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$, а приближенное решение $z(t)$, полученное таким образом, близко к оптимальному минимаксному приближению точного решения $y(t)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует непосредственно из Теоремы 4, если в качестве интегральной невязки использовать взвешенную сумму масштабированных полиномов Чебышева первого рода. Заключительное неравенство в формуле (20) следует из равенства единице минимаксной нормы каждого из масштабированных многочленов Чебышева на рассматриваемом отрезке.

Теорема 5 доказана

Замечание 2. Строго говоря, сумма нескольких масштабированных многочленов Чебышева не является многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на рассматриваемом отрезке и, следовательно, полученное приближенное решение отличается от оптимального минимаксного приближения точного решения дифференциального уравнения. Отклонение погрешности приближенного решения от погрешности истинного минимаксного приближения к точному решению $y(t)$ определяется теоремой Валле Пуссена (см. Теорему 1) после анализа локальных минимумов и максимумов значения правой части в неравенстве (20).

Замечание 3. В случае, когда требуются точные начальные условия, полиномы $\bar{T}_{k+n}(t)$ представляются в виде

$$\bar{T}_{k+n}(t) = (t - t_0)^n T_n^* \left[(t - t_0) / (T - t_0) \right],$$

где $T_n^*(t)$ — полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля, с весом t^n на нормированном отрезке $t \in [0, 1]$.

Такая процедура дает большую погрешность, но позволяет задавать точные начальные условия. Алгоритмы численного вычисления полиномов обсуждаются в работах [25 – 27].

Пример. Рассмотрим приближенное решение задачи (3) в виде полинома

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + c_6 t^6 + c_7 t^7. \quad (21)$$

Подставив это решение в уравнение (3), приходим к выводу (см. уравнение (5)), что требуются два вспомогательных полинома $\bar{S}_6(t)$ и $\bar{S}_7(t)$ со старшими членами t^6 и t^7 :

$$\bar{S}_6(t) = \frac{d^2 \bar{T}_8(t)}{dt^2}, \quad \bar{S}_7(t) = \frac{d^2 \bar{T}_9(t)}{dt^2}, \quad \bar{T}_8(t) = T_8\left(\frac{t}{2} - 1\right), \quad \bar{T}_9(t) = T_9\left(\frac{t}{2} - 1\right),$$

$$T_8(\tau) = 128\tau^8 - 256\tau^6 + 160\tau^4 + 32\tau^2 - 1,$$

$$T_9(\tau) = 256\tau^9 - 576\tau^7 + 432\tau^5 - 120\tau^3 + 9\tau.$$

С учетом уравнений (19) для начальных условий, получаются следующие соотношения:

$$x''(t) + tx'(t) + 2x(t) \equiv \tau_6 \bar{S}_6(t) + \tau_7 \bar{S}_7(t),$$

$$x(0) - \tau_6 \bar{T}_8(0) - \tau_7 \bar{T}_9(0) = 0,$$

$$x'(0) - \tau_6 \bar{T}'_8(0) - \tau_7 \bar{T}'_9(0) = 1.$$

Получим следующее решение соответствующей системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 c_0 &\approx 0,00234716, c_1 \approx 0,92262700, \\
 c_2 &\approx 0,41914500, c_3 \approx -1,45266000, \\
 c_4 &\approx 0,78428300, c_5 \approx -0,20136600, \\
 c_6 &\approx 0,02406430, c_7 \approx -0,00106550.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Рис. 3 и 4 иллюстрируют точность приближенного решения и его производных первого и второго порядков. Поскольку нет визуальных различий между графиками приближенного и точного решений, на рис. 3 такие графики не представлены. Максимальная погрешность на отрезке $t \in [0,4]$ для приближенного решения равна 0,0023; для производной первого порядка погрешность составляет 0,0770; для производной второго порядка погрешность по абсолютной величине достигает значения 0,8400.

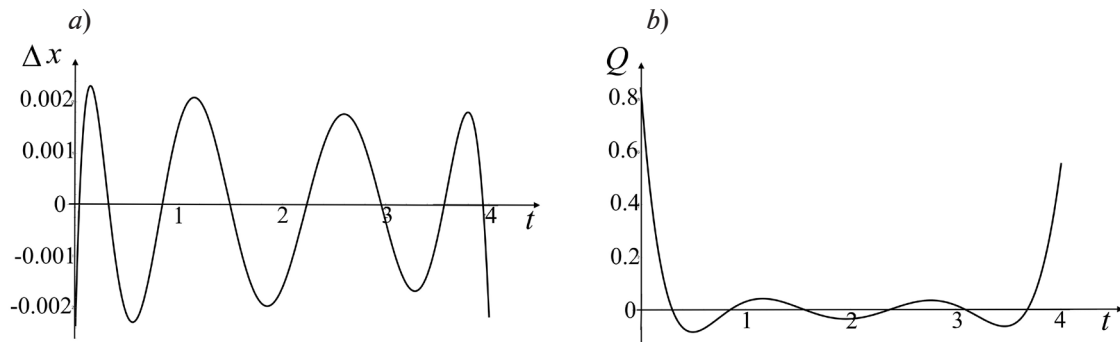


Рис. 3. Характеристики приближенного решения уравнения (3), полученного оптимизированным тау-методом: *a* – погрешность этого решения, *b* – его дифференциальная невязка

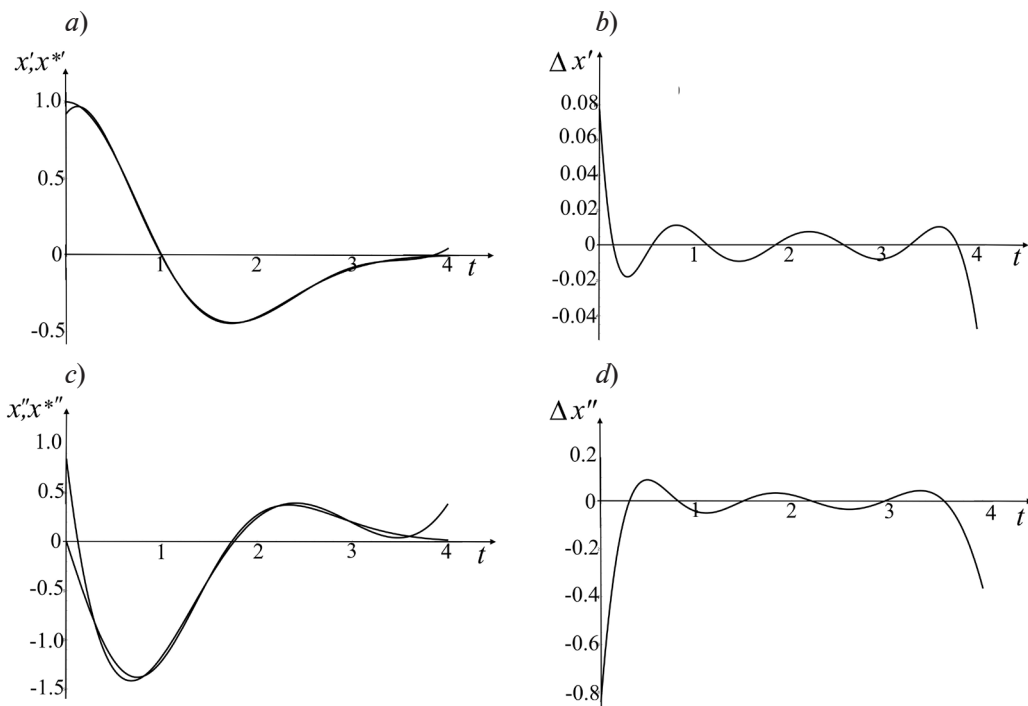


Рис. 4. Первые (*a*, *b*) и вторые (*c*, *d*) производные приближенного ($x(t)$) и точного ($x^*(t)$) решений уравнения (3) (*a*, *c*) и погрешности этих производных для приближенного решения (*b*, *d*). Результаты получены оптимизированным тау-методом



Обсуждение достигнутых результатов

Как было указано в Замечании 2 к Теореме 5, результат может отличаться от минимаксного оптимального полинома, если в предлагаемом алгоритме используется более одного вспомогательного полинома. Для нахождения истинного оптимального решения необходимо рассмотреть общую вариационную задачу, где свободные параметры приближенного решения используются для получения наименее уклоняющегося полинома для правой части интегрального уравнения.

Однако процесс решения такой задачи плохо алгоритмизирован. Замена истинного, наименее уклоняющегося полинома в правой части интегрального уравнения суммой полиномов Чебышева позволяет свести общую вариационную задачу к простым алгебраическим вычислениям. Даже если погрешность полученного приближенного решения не оказалась истинной минимаксной погрешностью, то эта погрешность все равно достаточно мала.

Несомненным достоинством рассматриваемого алгоритма следует считать его способность получать приближенные аналитические решения, когда коэффициенты уравнения, и/или начальные условия, и/или начальная и конечная точки рассматриваемого отрезка являются алгебраическими выражениями, зависящими от параметров. Это позволяет исследовать и оптимизировать решения без численного решения дифференциальных уравнений для каждого рассматриваемого набора параметров.

Заключение

Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие обобщающие утверждения.

1. Минимизация дифференциальных невязок линейного дифференциального уравнения n -го порядка или системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка неэквивалентна минимизации погрешностей приближенных решений. Полиномиальные дифференциальные невязки в правых частях уравнений, используемых в методе Ланцоша, должны быть производными n -го порядка полиномов Чебышева, а не самими полиномами Чебышева.

2. Использование приближенных начальных условий для приближенных решений дает исследователю больше свободы в построении приближенных решений и обеспечивает большую точность. Оптимальные вариации начальных условий следуют из анализа невязок интегральной формы, которые представляют собой линейные комбинации масштабированных полиномов Чебышева с абстрактными коэффициентами, вычисляемыми впоследствии из системы линейных алгебраических уравнений оптимизированного тау-метода.

3. Производные приближенных решений – это не лучшие приближения к производным точных решений, даже если приближенные решения оказываются лучшими приближениями к точным решениям. Чтобы получать хорошие приближения для производных точных решений, необходимо преобразовывать линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами в систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, а затем применять метод Ланцоша к этой системе. Такой подход также вводит больше свободных коэффициентов для варьирования приближенного решения и, следовательно, обеспечивает большую точность для самого приближенного решения.

Исследованию возможностей, предоставляемых заменой одиночного дифференциального уравнения системой дифференциальных уравнений в комбинации с оптимизированным тау-методом, будет посвящена отдельная публикация.

Предложенный подход представляет собой оптимизацию оригинального тау-метода Ланцоша по следующим причинам.

Во-первых, новый метод оптимизирует погрешность приближенного решения, тогда как оригинальный тау-метод оптимизирует лишь дифференциальную невязку. Однако для дифференциальных уравнений высокого порядка погрешность приближенного решения, вычисляемая как результат многократного повторного интегрирования минимальной дифференциальной невязки, может оказаться очень далекой от минимально достижимой погрешности, если дифференциальная невязка не равна тождественно нулю.

Те же соображения справедливы, когда некоторые авторы используют ортогональные многочлены иных типов для оптимизации дифференциальных невязок дифференциальных уравнений.

Во-вторых, предлагаемый метод вводит контролируемое возмущение начальных условий. Эта функция предоставляет пользователю больше свободы для оптимизации приближенного решения и, как итог, получения результатов с большей точностью.

В-третьих, ориентированный на погрешность анализ интегральных вычетов показывает, что уравнения с полиномиальными старшими коэффициентами следует рассматривать с помощью скорректированных тау-алгоритмов, чтобы получать хорошую точность для приближенных решений.

Рассмотрению специального варианта оптимизированного тау-метода, ориентированного на дифференциальные уравнения с полиномиальным старшим коэффициентом, будет посвящена отдельная публикация.

Благодарности

Александр Сергеевич Бердников выражает искреннюю благодарность доктору Алдерту Компаньеру (Dr. Aaldert Compagner) с факультета вычислительной физики Делфтского технического университета (г. Делфт, Нидерланды) за научное сотрудничество и финансовую поддержку в 1990–1996 гг. при разработке основ тау-метода и батареи тестов для датчиков случайных чисел, а также кандидату технических наук Сергею Бруновичу Туртия, старшему научному сотруднику Института аналитического приборостроения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург, Россия) за эффективные совместные исследования тау-метода и алгоритмов датчиков случайных чисел в указанный период времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lanczos C.** Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions // *Journal of Mathematics and Physics*. 1938. Vol. 17. No. 1–4. Pp. 123–199.
2. **Lanczos C.** *Applied analysis*. First edition. New York, USA: Prentice Hall Inc., 1956. 539 p.
3. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. Ленинград – Москва: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1934. 316 с.
4. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехиздат, 1947. 323 с.
5. **Golomb M.** *Lectures on theory of approximation*. Chicago, USA: Argonne National Laboratory Publishing, 1962. 289 p.
6. **Ortiz E. L.** The Tau method // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1969. Vol. 6. No. 3. Pp. 480–492.
7. **Ortiz E. L.** Step by step Tau method – Part I. Piecewise polynomial approximations // *Computers and Mathematics with Applications*. 1975. Vol. 1. No. 3–4. Pp. 381–392.
8. **Gavina A., Matos J., Vasconcelos P. B.** Improving the accuracy of Chebyshev Tau method for nonlinear differential problems // *Mathematics in Computer Science*. 2016. Vol. 10. No. 2. Pp. 279–289.
9. **Ortiz E. L.** A recursive method for the approximate expansion of functions in a series of polynomials // *Computer Physics Communications*. 1972. Vol. 4. No. 2. Pp. 151–156.
10. **Crisci M. R., Russo E.** An extension of Ortiz' recursive formulation of the Tau method to certain linear systems of ordinary differential equations // *Mathematics of Computation*. 1983. Vol. 41. No. 163. Pp. 27–42.
11. **Freilich J. H., Ortiz E. L.** Numerical solution of systems of ordinary differential equations with the Tau method: An error analysis // *Mathematics of Computation*. 1982. Vol. 39. No. 160. Pp. 467–479.
12. **Namasivayam S., Ortiz E. L.** Error analysis of the Tau method: dependence of the approximation error on the choice of perturbation term // *Computers & Mathematics with Applications*. 1993. Vol. 25. No. 1. Pp. 89–104.
13. **Aliabadi M. H., Shamoard S.** A matrix formulation of the Tau method for Fedholm and Volterra linear integro-differential equations estimation // *The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2002. Vol. 9. May. Pp. 497–507.



14. **Shahmorad S.** Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. Vol. 167. No. 2. Pp. 1418–1429.
15. **Gavina A., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** Solving nonholonomic systems with the Tau method // *Mathematical and Computational Applications*. 2019. Vol. 24. No. 4. Pp. 91–101.
16. **Provoost E., Michiels W.** The Lanczos Tau framework for time-delay systems: Padé approximation and collocation revisited // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2024. Vol. 62. No. 6. Pp. 2529–2548.
17. **Варин В. П.** Аппроксимация дифференциальных операторов с учетом граничных условий // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 8. С. 1251–1271.
18. **Branquinho A., Díaz J. E. F., Foulquié-Moreno A., Mañas M.** Classical multiple orthogonal polynomials for arbitrary number of weights and their explicit representation // *Studies in Applied Mathematics*. 2025. Vol. 154. No. 3. P. e70033.
19. **Lima N. J., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** Solving partial differential problems with Tau Toolbox // *Mathematics in Computer Science*. 2024. Vol. 18. No. 8. Pp. 1–12.
20. **Vasconcelos P. B., Grammont L., Lima N. J.** Low rank approximation in the computation of first kind integral equations with Tau Toolbox // *Applied Numerical Mathematics*. 2024. Vol. 205. November. Pp. 1–15.
21. **Lima N., Matos J. A. O., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** A time-splitting Tau method for PDE's: A contribution for the spectral Tau Toolbox library // *Mathematics in Computer Science*. 2022. Vol. 16. No. 1. Pp. 6–11.
22. **Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Picar M. A.** Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods in boundary value problems // *Applied Numerical Mathematics*. 2024. Vol. 200. June. Pp. 254–272.
23. **Grammont L., Kulkarni R. P., Vasconcelos P. B.** Fast and accurate solvers for weakly singular integral equations // *Numerical Algorithms*. 2023. Vol. 92. No. 4. Pp. 2045–2070.
24. **Калиткин Н. Н., Колганов С. А.** Построение аппроксимаций, удовлетворяющих чебышевскому альтернансу. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 91. 33 с.
25. **Зоркальцев В. И., Губий Е. В.** Чебышевские приближения и аппроксимация методом наименьших квадратов // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. 2020. Т. 33. С. 3–19.
26. **Трубников Ю. В., Чернявский М. М.** О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента // *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2023. Т. 59. № 1. С. 18–36.
27. **Гулевич Д. Р., Залипаев В. В.** Численные методы в физике и технике. СПб.: Изд. Университета ИТМО, 2020. 211 с.
28. **Беликова Г. И., Бровкина Е. А., Вагер Б. Г., Витковская Л. В., Матвеев Ю. Л.** Численные методы. СПб.: РГГМУ, 2019. 174 с.
29. **Бельхеева Р. К., Шарый С. П.** Вычислительные методы в примерах. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2022. 90 с.
30. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., Golovitski A., Syasko M.** Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight // *Proceedings of the International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech)*. October 20–21., 2022. St. Petersburg: SPbPU, 2022. Pp. 143–145.
31. **Бердников А. С., Соловьев К. В.** Численный алгоритм для конструирования многочленов, наименее отклоняющихся от нуля с заданным весом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16. № 2. С. 146–160.
32. **Бердников А. С., Масюкевич С. В.** Численный алгоритм для минимаксной полиномиальной аппроксимации функций с заданным весом // *Научное приборостроение*. 2023. Т. 33. № 3. С. 74–83.
33. **Hewitt E., Stromberg K. R.** Real and abstract analysis: A modern treatment of the theory of functions of a real variable. New-York: Springer-Verlag, 1965. 484 p.
34. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.

35. **Mason J. C., Handscomb D. C.** Chebyshev polynomials. London, New-York, Washington: CRC Press LLC, 2003. 335 p.
 36. **Tricomi F. G.** Differential equations. London: Blackie & Son Ltd., 1961. 286 p.

REFERENCES

1. **Lanczos C.**, Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, *Journal of Mathematics and Physics*. 17 (1–4) (1938) 123–199.
2. **Lanczos C.**, *Applied analysis*. 1-st. Ed., Prentice Hall Inc., New York, USA, 1956.
3. **Goncharov V. L.**, *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy* [Theory of interpolation and approximation of functions], State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow-Leningrad, 1934 (in Russian).
4. **Achiezer N. I.**, *Theory of approximation*, 1-st. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1956.
5. **Golomb M.**, *Lectures on theory of approximation*, Argonne National Laboratory Publishing, Chicago, USA, 1962.
6. **Ortiz E. L.**, The Tau method, *SIAM J. Numer. Anal.* 6 (3) (1969) 480–492.
7. **Ortiz E. L.**, Step by step Tau method – Part I. Piecewise polynomial approximations, *Comput. Math. Appl.* 1 (3–4) (1975) 381–392.
8. **Gavina A., Matos J., Vasconcelos P. B.**, Improving the accuracy of Chebyshev Tau method for nonlinear differential problems, *Math. Comput. Sci.* 10 (2) (2016) 279–289.
9. **Ortiz E. L.**, A recursive method for the approximate expansion of functions in a series of polynomials, *Comput. Phys. Commun.* 4 (2) (1972) 151–156.
10. **Crisci M. R., Russo E.**, An extension of Ortiz' recursive formulation of the Tau method to certain linear systems of ordinary differential equations, *Math. Comput.* 41 (163) (1983) 27–42.
11. **Freilich J. H., Ortiz E. L.**, Numerical solution of systems of ordinary differential equations with the Tau method: An error analysis, *Math. Comput.* 39 (160) (1982) 467–479.
12. **Namasivayam S., Ortiz E. L.**, Error analysis of the Tau method: dependence of the approximation error on the choice of perturbation term, *Comput. Math. Appl.* 25 (1) (1993) 89–104.
13. **Aliabadi M. H., Shamoard S.**, A matrix formulation of the Tau method for Fredholm and Volterra linear integro-differential equations estimation, *Korean J. Comput. & Appl. Math.* 9 (May) (2002) 497–507.
14. **Shahmorad S.**, Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation, *Appl. Math. Comput.* 167 (2) (2005) 1418–1429.
15. **Gavina A., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.**, Solving nonholonomic systems with the Tau method, *Math. Comput. Appl.* 24 (4) (2019) 91–101.
16. **Provoost E., Michiels W.**, The Lanczos Tau framework for time-delay systems: Padé approximation and collocation revisited, *SIAM J. Numer. Anal.* 62 (6) (2024) 2529–2548.
17. **Varin V. P.**, Approximation of differential operators with boundary conditions, *Comput. Math. Math. Phys.* 63 (8) (2023) 1381–1400.
18. **Branquinho A., Díaz J. E. F., Foulquié-Moreno A., Mañas M.**, Classical multiple orthogonal polynomials for arbitrary number of weights and their explicit representation, *Stud. Appl. Math.* 154 (3) (2025) e70033.
19. **Lima N. J., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.**, Solving partial differential problems with Tau Toolbox, *Math. Comput. Sci.* 18 (8) (2024) 1–12.
20. **Vasconcelos P. B., Grammont L., Lima N. J.**, Low rank approximation in the computation of first kind integral equations with Tau Toolbox, *Appl. Numer. Math.* 205 (Nov) (2024) 1–15.
21. **Lima N., Matos J. A. O., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.**, A time-splitting Tau method for PDE's: A contribution for the spectral Tau Toolbox library, *Math. Comput. Sci.* 16 (1) (2022) 6–11.
22. **Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Picar M. A.**, Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods in boundary value problems, *Appl. Numer. Math.* 2024. Vol. 200 (June) (2024) 254–272.
23. **Grammont L., Kulkarni R. P., Vasconcelos P. B.**, Fast and accurate solvers for weakly singular integral equations, *Numer. Algorithms.* 92 (4) (2023) 2045–2070.



24. **Kalitkin N. N., Kolganov S. A.**, The construction of approximations satisfying the Chebyshev alternance, Keldish Institute preprints. (91) (2020).
25. **Zorkaltsev V., Gubiy E.**, Chebyshev approximations by least squares method, The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 33 (2020) 3–19 (in Russian).
26. **Trubnikov Y. V., Chernyavsky M. M.**, On a numerical-analytical method for constructing extremal poly-nomials of a complex argument, Proc. Nat. Acad. Sci. of Belarus. Physics and Mathematics Series. 59 (1) (2023) 18–36 (in Russian).
27. **Gulevich D. R., Zalipaev V. V.**, Chislennyye metody v fizike i tekhnike [Numerical methods in physics and engineering], ITMO University, St. Petersburg, 2020 (in Russian).
28. **Belikova G. I., Brovkina E. A., Vager B. G., et al.**, Chislennyye metody [Numerical methods], Published by Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, 2019 (in Russian).
29. **Belkheeva R. K., Sharyi S. P.**, Vychislitelnyye metody v primerakh [Computing techniques exemplified], Published by Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2022 (in Russian).
30. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., et al.**, Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight, Proc. Int. Conf. on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). Oct. 20–21, 2022, SPbPU, St. Petersburg (2022) 143–145 (in Russian).
31. **Berdnikov A. S., Solovyev K. V.**, A numerical algorithm for constructing polynomials deviating least from zero with a given weight, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (2) (2023) 146–160 (in Russian).
32. **Berdnikov A. S., Masyukevich S. V.**, Numerical algorithm for minimax polynomial approximation of functions with a given weight, Nauchnoe Priborostroenie. 33 (3) (2023) 84–91.
33. **Hewitt E., Stromberg K. R.**, Real and abstract analysis: A modern treatment of the theory of functions of a real variable, Springer-Verlag, New-York, 1965.
34. **Paszkowski S.**, Numerical applications of Chebyshev polynomials and series, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1975 (in Polish).
35. **Mason J. C., Handscomb D. C.**, Chebyshev polynomials, CRC Press LLC, Washington, 2003.
36. **Tricomi F. G.**, Differential equations, Blackie & Son Ltd., London, 1961.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУЛЯНИЦА Антон Леонидович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.

antbulyan@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-9235-8549

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Россия.

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.

asberd@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-0985-5964

ЕВСТРАПОВ Анатолий Александрович – доктор технических наук, директор ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Россия.

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.

an_evs@mail.ru

ORCID: 0000-0003-4495-8096

THE AUTHORS

BULYANITSA Anton L.

*Institute for Analytical Instrumentation of RAS;
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
antbulyan@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-9235-8549

BERDNIKOV Alexander S.

Institute for Analytical Instrumentation of RAS
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

EVSTRAPOV Anatoly A.

Institute for Analytical Instrumentation of RAS
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
an_evs@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4495-8096

*Статья поступила в редакцию 03.04.2025. Одобрена после рецензирования 05.05.2025.
Принята 05.05.2025.*

Received 03.04.2025. Approved after reviewing 05.05.2025. Accepted 05.05.2025.

Приборы и техника физического эксперимента

Научная статья


УДК 621.384.62

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18304>

ДАТЧИК МИКРОМЕТЕОРОИДОВ И ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА НА ОСНОВЕ ПЛЕНОЧНОЙ КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ

А. М. Телегин , **М. П. Калаев**

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва, г. Самара, Россия

 talex85@mail.ru

Аннотация. В работе предложена модель датчика высокоскоростных микрочастиц (микрометеороидов и частиц космического мусора) в виде круглой спиральной пленочной катушки индуктивности. Конструкция датчика обеспечивает создание частотного резонанса, возникающего при разрыве металлической полоски катушки. Полученные результаты компьютерного и лабораторного моделирования данной конструкции показали, что пленочная катушка пригодна для регистрации высокоскоростных микрочастиц размерами более 100 мкм на космических аппаратах типа CubeSat. Место разрыва металлической полоски катушки индуктивности можно определять с помощью анализа сдвига резонансной частоты амплитудно-частотной характеристики. При этом надежное определение места разрыва становится возможным, если номер разорванного витка больше 5.

Ключевые слова: микрометеороид, космический мусор, катушка индуктивности, кратер, космический аппарат, лабораторное моделирование

Для цитирования: Телегин А. М., Калаев М. П. Датчик микрометеороидов и частиц космического мусора на основе пленочной катушки индуктивности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 49–59. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18304>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18304>

A DETECTOR OF MICROMETEOROIDS AND SPACE DEBRIS PARTICLES BASED ON A FILM INDUCTANCE COIL

A. M. Telegin , **M. P. Kalaev**

Samara National Research University, Samara, Russia

 talex85@mail.ru

Abstract. In the paper, a model of a detector of high-speed microparticles (micrometeoroids and space debris) is proposed, made in the form of a round spiral film inductance coil. The design of the gauge ensures the creation of frequency resonance that occurs when the metal strip of the coil is broken. The obtained results of a laboratory and computer simulations of the detector showed that the film coil is suitable for recording high-speed microparticles larger than 100 μm on a spacecraft such as CubeSat. The fracture point of the inductance coil can be found by analyzing the shift of the resonant frequency of the amplitude-frequency characteristic. In this case, the reliable determination of the point becomes possible if the number of the broken turn is greater than 5.

Keywords: micrometeoroid, space debris, inductance coil, crater, spacecraft, laboratory simulation

For citation: Telegin A. M., Kalaev M. P., A detector of micrometeoroids and space debris particles based on a film inductance coil, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 49–59. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18304>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

При проектировании космических аппаратов необходимо заранее предусмотреть влияние факторов космического пространства на элементы конструкции и электронику. Для этого создаются наземные испытательные лаборатории, проводятся космические эксперименты, составляются модели поведения материалов в условиях космического пространства. Наряду с разного рода излучениями космической среды (протоны, электроны и др.) на космические аппараты воздействуют частицы космического мусора, а также микрометеороиды. Как правило, открытыми элементами космических аппаратов (КА), воспринимающими такие воздействия, являются многослойные конструкции с различными покрытиями (терморегулирующие покрытия, тепловые трубы, теплообменники, оптические стекла, солнечные батареи, антенны, электровакуумная теплоизоляция и т. п.). Воздействия частиц, не вызывающие сквозного пробоя указанных элементов, ведут к деградации их поверхности, что со временем изменяет оптические, электрические, механические и другие характеристики, влияющие в целом на работоспособность КА. С увеличением срока эксплуатации космических аппаратов проблема регистрации микрометеороидов и все возрастающего количества техногенных частиц, а также защита космического аппарата становятся все более актуальными. При этом в последние годы наблюдается тенденция увеличения концентрации высокоскоростных техногенных пылевых частиц на околоземных орбитах [1 – 12].

Для контроля распределения микрочастиц (микрометеороидов и частиц космического мусора) в околоземном пространстве применяются датчики, работа которых основана на разных физических принципах [11 – 15]. Особый интерес представляют датчики, изготовленные с использованием пленок, что позволяет иметь датчик с большой чувствительной поверхностью и относительно небольшой массой [13 – 21].

В настоящей работе рассмотрена концепция пленочного датчика высокоскоростных микрочастиц на основе пленочной спиральной катушки индуктивности, которая позволяет определять место удара высокоскоростной микрочастицы с помощью спектрального анализа полученной информации. При этом используется только один измерительный канал вместо большого количества мультиплексоров, как принято в известных аналогах [18].

Описание модели первичного преобразователя (без учета паразитных параметров)

В качестве первичного преобразователя датчика высокоскоростных микрочастиц предлагается использовать пленочную катушку индуктивности, выполненную из проводящего материала, нанесенного на диэлектрическое основание (рис. 1, а). С другой стороны основания его поверхность модифицирована металлизацией.

Индуктивность такой пленочной круглой спиральной катушки индуктивности можно рассчитать по следующей формуле [22 – 28]:

$$L = 0,033937 \cdot \frac{a^2 \cdot n^2}{8a + 11c} \cdot K_g,$$

$$a = \frac{D_o + D_i}{4}, \quad c = \frac{D_o - D_i}{2},$$

$$K_g = 0,570 - 0,145 \cdot \ln(W/h),$$

где L , нГн, – индуктивность катушки; n – количество ее витков; D_i , D_o , мкм, – ее внутренний и внешний диаметры, соответственно; h , мкм, – толщина диэлектрического

основания; W , мкм, – ширина полоска; (некоторые геометрические параметры показаны на рис. 1, *a*); K_g – коэффициент, учитывающий наличие заземляющей плоскости.

Коэффициент K_g уменьшается по мере приближения к заземляющей плоскости, поэтому в работе [24] он был принят равным единице.

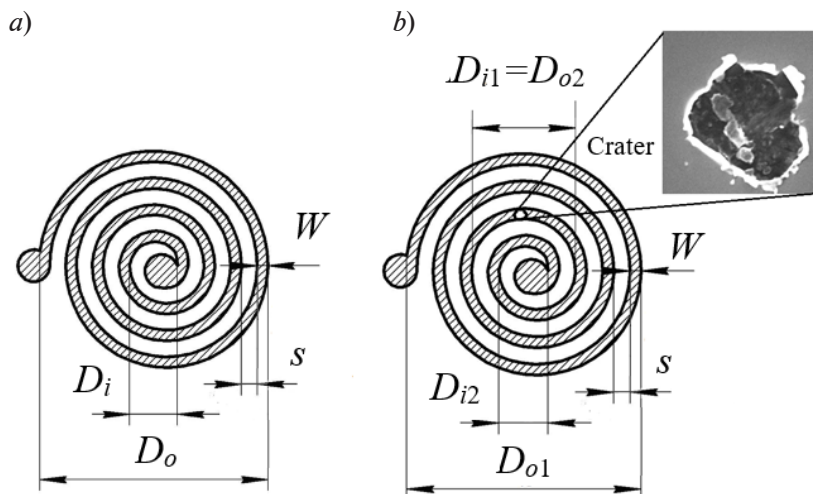


Рис. 1. Сечения катушек индуктивности без разрыва (*a*) и с разрывом (*b*); показаны их геометрические параметры.

На вставке: микрофотография чашевидного углубления (кратера)

При ударе высокоскоростной микрочастицы в металлический полосок происходит образование кратера, приводящего к его разрыву (рис. 1, *b*). Размеры образовавшегося кратера можно примерно оценить, если привлечь эмпирические модели, представленные в работе [29]:

$$D/d = K_1 \cdot \rho_p^{0,333} \cdot V^{0,667},$$

где K_1 – коэффициент, значение которого зависит от природы материалов металлического полоска и микрочастицы; D, d , см, – диаметры кратера и микрочастицы, соответственно; ρ_p , г/см³, – плотность ударяющей микрочастицы; V , км/с, – скорость микрочастицы.

Разрыв металлического полоска приводит к образованию электрической емкости, последовательно подключенной к металлическому полоску (см. рис. 1 и 2). Номинал этой емкости можно рассчитать с использованием модели компланарного конденсатора, выполненного на основе микрополосковой линии [30 – 33]:

$$C_g = \frac{1}{2} C_{even}, \quad C_{even} = W \cdot \left(\frac{S}{W} \right)^{m_e} \cdot e^{K_e} \left(\frac{\varepsilon}{9,6} \right)^{0,9},$$

$$m_e = \frac{1,565}{\left(\frac{W}{h} \right)^{0,16}} - 1 \quad \text{при } 0,3 \leq \frac{S}{W} \leq 1, \quad K_e = 1,97 - \frac{0,03}{\frac{h}{W}} \quad \text{при } 0,3 \leq \frac{S}{W} \leq 1.$$

где C_g , пФ, – емкость разорванного полоска; m_e, K_e, C_{even} – промежуточные переменные при расчете емкости разорванного полоска; S_g , мкм, – ширина разрыва металлического полоска, равная диаметру кратера от высокоскоростного соударения; W , см, – ширина металлического полоска; h , мм, – высота диэлектрической подложки; ε – диэлектрическая проницаемость материала, на который нанесен полосок.

Наши предварительные расчеты показали, что емкость компланарного конденсатора мала, по сравнению с межвитковой емкостью пленочной катушки индуктивности, поэтому приближенно можно оценить C_g как емкость между двумя соседними витками катушки, где произошел разрыв (в соответствии с выражениями, приведенными в работах [21, 34]).

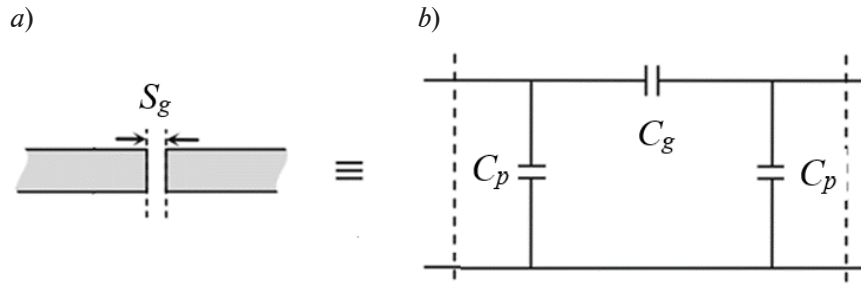


Рис. 2. Схематическое изображение модели компланарного конденсатора, образовавшегося за счет разрыва металлического полоска (см. рис. 1) (a) и его эквивалентная схема (b):

S_g – ширина полоска; C_g – емкость разорванного полоска; C_p – паразитная емкость полоска относительно металлизации с другой стороны диэлектрического основания

Таким образом, катушку индуктивности с разрывом (см. рис. 1, 2) можно представить в виде двух катушек индуктивности, имеющих взаимную индуктивную связь и соединенных последовательно через электрическую емкость (рис. 3). При этом взаимную индуктивность M можно оценить с помощью следующего аналитического выражения [25]:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} N_1 \cdot N_2 \frac{D_{o1}}{(1-\theta) \cdot (\Delta - \delta)} \times \left[\frac{A_3}{3} (\Delta^3 - \delta^3) \cdot \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) + \frac{A_5}{10} (\Delta^5 - \delta^5) \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - 1\right) + \frac{A_7}{28} (\Delta^7 - \delta^7) \cdot \left(\frac{1}{\theta^4} - 1\right) \right],$$

где N_1, N_2 – числа витков большей и меньшей катушек индуктивности; D_{o1}, D_{i1} , см, – соответственно внешний и внутренний диаметры большой катушки; d_{o1}, d_{i1} , см, – соответственно внешний и внутренний диаметры меньшей катушки (см. рис. 1, b); $\theta = D_{o2} / D_{o1}$; $\Delta = D_{i1} / D_{o1}$; $\delta = D_{i2} / D_{o1}$; $A_3 = 9,870, A_5 = 3,701, A_7 = 2,313$ – коэффициенты, использованные здесь, взяты из работы [25].

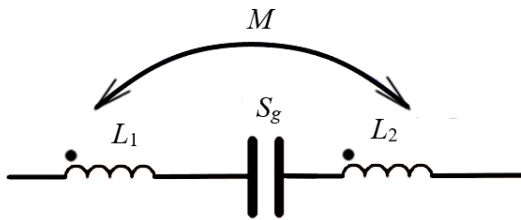


Рис. 3. Эквивалентная схема разорванной катушки индуктивности:

L_1, L_2 – индуктивности большей и меньшей катушек; M – их взаимная индуктивность; C_g – емкость (см. рис. 2). Каждая жирная точка показывает начало втекания тока в катушку индуктивности

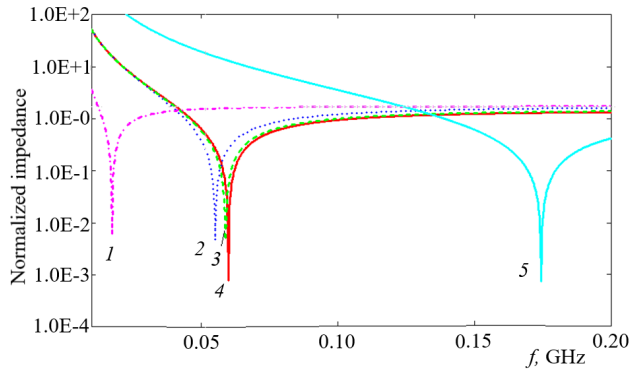
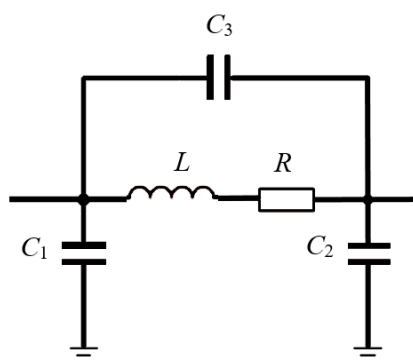


Рис. 4. График изменения нормированного импеданса разорванной катушки индуктивности при разных парах значений параметров (коэффициент $k = N/N_{\max}$ и емкость C_g , пФ): 0,7, 0,005 (кривая 1); 0,7, 0,05 (2); 0,5, 0,05 (3); 0,9, 0,05 (4); 0,7, 0,005 (5)

Результаты компьютерного моделирования, проведенного по представленным выше аналитическим выражениям, представлены на рис. 4. При моделировании учитывалось, что внешний диаметр катушки был взят равным 10 см (размеры выбирались так, чтобы можно было разместить катушку на внешнюю стенку космического аппарата формата CubeSat), внутренний диаметр спирали – 1 см, ширина полоска – 250 мкм, количество витков – 90. Индуктивность катушки составила примерно $9,65 \cdot 10^{-5}$ Гн.



Результаты моделирования показали, что на высоких частотах полный импеданс разорванной катушки индуктивности стремится к импедансу катушки без разрыва. При этом четко выделяются резонансные частоты, которые зависят от параметров катушки индуктивности, места разрыва и номинала образовавшейся емкости.

Описание модели первичного преобразователя с учетом паразитных параметров

Рис. 5. Эквивалентная схема разорванной катушки индуктивности с учетом паразитных параметров:

C_3 – паразитная межвитковая емкость, R – паразитное сопротивление катушки индуктивности

Каждая реальная катушка индуктивности обладает паразитными параметрами: электрическими емкостью и сопротивлением, которые можно оценить согласно следующим выражениям [22, 23] (рис. 5):

$$R = \frac{K \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot R_{sh}}{W},$$

$$K = 1 + 0,333 \cdot \left(1 + \frac{S}{W}\right),$$

$$C_3 = 3,5 \cdot 10^{-5} \cdot D_o + 0,06,$$

где R_{sh} , Ом/□, – сопротивление квадрата пленки; C_3 , пФ, – паразитная межвитковая емкость; S , мкм, – зазор между витками индуктивности; K – поправочный коэффициент, учитывающий сжатие тока в углах проводника.

Результаты моделирования зависимости импеданса катушки индуктивности от частоты (с учетом паразитных параметров), представленные на рис. 6, показали, что из-за паразитных элементов на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) появляется дополнительный резонанс.

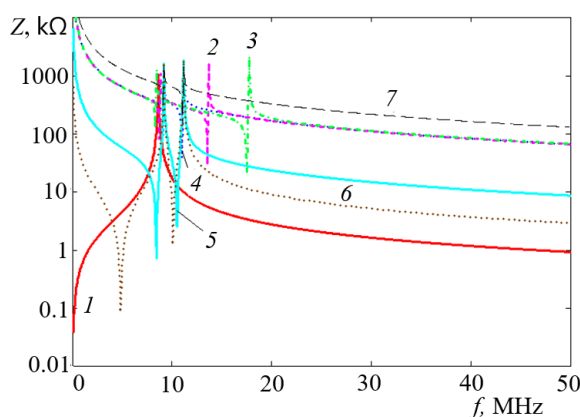


Рис. 6. Зависимости импеданса от частоты (с учетом паразитных параметров) при разных значениях пар параметров (коэффициент k и емкость C_3 , пФ): 0,9, 0,05 (кривая 2); 0,5, 0,05 (3); 0,7, 0,05 (4); 0,7, 0,5 (5); 0,7, 5,0 (6); 0,7, 0,025 (7); кривая 1 соответствует индуктивности без разрыва

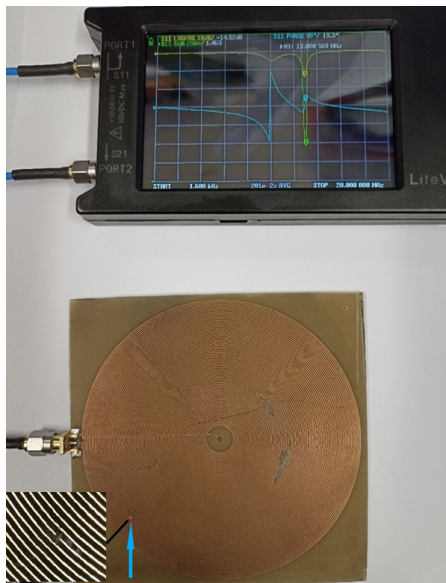


Рис. 7. Фотографии осциллограммы испытаний (сверху) и прототипа датчика (снизу), изготовленного на основе катушки индуктивности (место разрыва указано стрелкой).

На экране видны кривые модуля полного импеданса, фазы импеданса и коэффициента стоячей волны (желтая, голубая и зеленая линии, соответственно). На вставке: увеличенная область катушки с разрывом

экспериментальной зависимости положения пиков первого (Res1) и второго (Res2) резонансов от положения точки разрыва, а также аппроксимация экспериментальных данных степенными функциями. Видно, что характер полученных экспериментальных кривых хорошо согласуется с результатами компьютерного моделирования.

Как оказалось, графики зависимости резонансной частоты f датчика от положений точек разрыва хорошо аппроксимируются функцией вида

$$f = k/N^{\alpha},$$

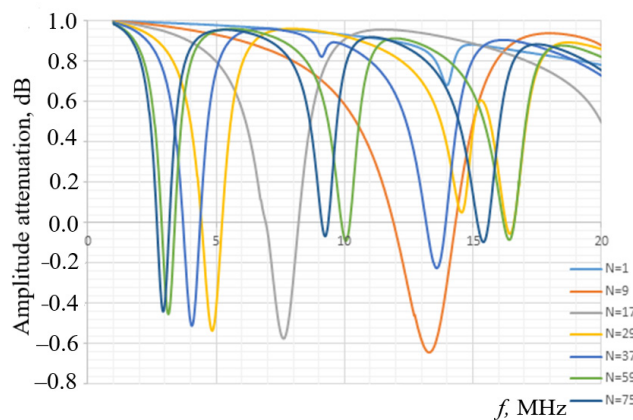


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики пленочной катушки индуктивности для ее разных разорванных витков (N – номер разорванного витка)

Результаты эксперимента

Для проведения испытаний был изготовлен опытный образец круглой катушки индуктивности диаметром 100 мм (рис. 7); здесь же представлена укрупненная фотография разрыва, полученная разрезом скальпеля. Ширина металлического полоска составила около 200 мкм, ширина между полосками – примерно 250 мкм. Для определения амплитудно- и фазочастотных характеристик тонкопленочного датчика использовался векторный анализатор LiteVNA64 с частотным диапазоном 50 кГц – 6,3 ГГц, подключенный к персональному компьютеру, а также программное обеспечение NanoVNA-App, входящее в комплект прибора. Результаты измерений сохранялись в базу данных на ПК, а затем анализировались с помощью программы GNU Octave.

Полученные значения АЧХ пленочной катушки индуктивности при разных значениях разорванного металлического полоска представлены на рис. 8. Нумерация витков начинается с внешнего диаметра катушки, при этом важно отметить наличие множества резонансов. В дальнейшем анализ проводился только для первых двух резонансов.

На рис. 9 приведены графики зависимости положения пиков первого (Res1) и второго (Res2) резонансов от положения точки разрыва, а также аппроксимация экспериментальных данных степенными функциями. Видно, что характер полученных экспериментальных кривых хорошо согласуется с результатами компьютерного моделирования.

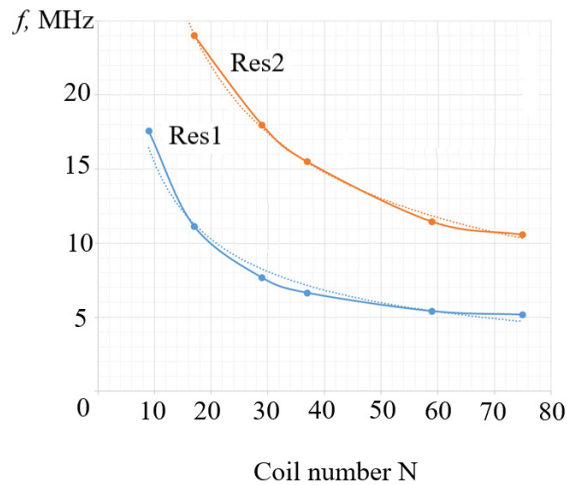


Рис. 9. Экспериментальные (точки) и аппроксимирующие (линии) зависимости резонансной частоты датчика от позиций точек разрыва для первого (Res1) и второго (Res2) резонансов

где N – номер витка (нумерация начинается от внешней стороны катушки); k – константа ($k_1 = 59,89$, $k_2 = 121,34$ для первого и второго резонансов, соответственно); α – показатель степени ($\alpha_1 = 0,589$, $\alpha_2 = 0,571$ для первого и второго резонансов, соответственно). При малых значениях N (5 – 15) изменение резонансной частоты достигает 1 МГц на каждый виток, что позволяет с большой точностью определять не только радиальное положение области попадания частицы, но и его сектор (часть длины дуги, когда номер N – не целое число). При больших значениях N (60 – 75) изменение резонансной частоты имеет порядок 20 кГц на виток, что также позволяет определить сектор попадания частицы, однако с меньшей точностью.

Заключение

В работе предложено использовать пленочную катушку индуктивности в качестве датчика налетающих высокоскоростных микрочастиц. Подобная конструкция позволяет избежать использования большого количества мультиплексоров, которые обычно применяются в датчиках подобного типа. Представленные результаты компьютерного и лабораторного моделирования данной конструкции показали, что пленочная катушка пригодна для регистрации высокоскоростных микрочастиц размерами от 100 мкм на космических аппаратах типа CubeSat.

Анализ полученных результатов показал, что место разрыва металлического полоска катушки индуктивности можно определять с помощью анализа сдвига резонансной частоты амплитудно-частотной характеристики. При этом надежное определение места разрыва становится возможным, если номер разорванного витка больше 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivanov N. N., Dobritsa D. B., Yaschenko B. Y. A new way of automated dust control of the external atmosphere of a spacecraft during thermal-vacuum testing // Solar System Research. 2020. Vol. 54. No. 7. Pp. 662–667.
2. Миронов В. В., Толкач М. А. Скорость и распределение скорости метеороидов и частиц космического мусора в околоземном космическом пространстве // Космическая техника и технологии. 2022. № 1 (36). С. 125–143.
3. Durin C., Mandeville J. C., Perrin J. M. Active detection of micrometeoroids and space debris SODAD-2 experiment on SAC-D satellite // Advances in Space Research. 2022. Vol. 69. No. 10. Pp. 3856–3863.
4. Дмитрюк С. В. Космический мусор: прикладные аспекты угрозы // Воздушно-космическая сфера. 2019. № 2 (99). С. 56–59.

5. **Шустов Б. М.** О фундаментальных исследованиях по проблеме космического мусора // Сборник трудов Всероссийской научной конференции «Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы». 17–19 апреля 2019 г. Сер. «Механика, управление и информатика». Под ред. Л. М. Зеленого, Б. М. Шустова. М.: ИКИ РАН, 2019. С. 7–14.
6. **Ипатов А. В., Ведешин Л. А., Герасюгин С. А.** Мониторинг космического мусора и перспективы освоения околоземного космического пространства // Земля и Вселенная. 2024. № 2 (356). С. 91–108.
7. **Adushkin V. V., Kozlov S. I., Aksenov O. Y., Veniaminov S. S., Tyurenkova V. V.** The small orbital debris population and its impact on space activities and ecological safety // Acta Astronautica. 2020. Vol. 176. November. Pp. 591–597.
8. **Rodmann J., Miller A., Traud M., Bunte K. D., Millinger M.** Micrometeoroid impact risk assessment for interplanetary missions // Proceedings of the 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany, 20–23 April 2021, T. Flohrer, S. Lemmens, F. Schmitz (Eds.), published by the ESA Space Debris Office; May 2021. Pp. 1–5.
9. **Агапов В. М., Головкин А. М., Емельянов В. А. и др.** Космический мусор: В 2 кн. Под науч. ред. Г. Г. Райкунова. Кн.1. Методы наблюдения и модели космического мусора. М.: Физматлит, 2014. 244 с.
10. **Новиков Л. С.** Основы экологии околоземного космического пространства. М.: Университетская книга, 2006. 84 с.
11. **Калаев М. П., Родина А. В., Телегин А. М.** Исследование изменения характеристик солнечных батарей при воздействии факторов космического пространства // Приборы и техника эксперимента. 2022. № 6. С. 99–105.
12. **Калаев М. П., Телегин А. М., Воронов К. Е., Лисян Ц., Цзилун Ц.** Исследование характеристик оптических стекол при воздействии факторов космического пространства // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 5. С. 803–809.
13. **Wang W., Xue W., Wu S., Mu Z., Yi J., Tang A. J.** High-speed micro-particle motion monitoring based on continuous single-frame multi-exposure technology // Materials. 2022. Vol. 15. No. 11. P. 3871.
14. **Barilaro L., Falsetti C., Olivieri L., Giacomuzzo C., Francesconi A., Beard P., Camilleri R.** A conceptual study to characterize properties of space debris from hypervelocity impacts through thin film heat flux gauges // Proceedings of the 2021 IEEE International Workshop on Metrology for AeroSpace, (MetroAeroSpace-2021). IEEE Inc. 2021. Pp. 430–435.
15. **Gola Y., Kim D., Namilae S.** Piezoresistive nanocomposites for sensing MMOD impact damage in inflatable space structures // Composites Communications. 2020. Vol. 21. October. P. 100375.
16. **Rose R., Koets M., Chocron S., Grimm R.** Application of intelligent spacecraft structures for impact detection // Proceedings of the 2022 IEEE Aerospace Conference (AERO). 5–12 March 2022. Big Sky, MT, USA. 2022. Pp. 1–7.
17. **Gbaguidi A., Madiyar F., Kim D., Namilae S.** Multifunctional inkjet printed sensors for MMOD impact detection // Smart Materials and Structures. 2020. Vol. 29. No. 8. P. 085052.
18. **Hofmann D. C., Bordeenithikasem P., Zhu Y., Liu Y., Conrad N. J., Davis B. A., Christiansen E. L., Shakouri A., Mohammadi S.** Design, fabrication, and hypervelocity impact testing of screen-printed flexible micrometeoroid and orbital debris impact sensors for long-duration spacecraft health monitoring // Aerospace Science and Technology. 2023. Vol. 139. August. P. 108372.
19. **Faure P., Masuyama Sh., Nakamoto H., Akahoshi Y., Kitazawa Y., Koura T.** Space dust impacts detector development for the evaluation of ejecta // Procedia Engineering. 2013. Vol. 58. Pp. 594–600.
20. **Семкин Н. Д., Телегин А. М.** Ударно-сжатые структуры металл-диэлектрик-металл в условиях воздействия высокоскоростных пылевых частиц // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 7. С. 88–93.
21. **Телегин А. М.** Моделирование коэффициента передачи датчика микрометеороидов и частиц космического мусора // Инженерная физика. 2024. № 4. С. 37–44.
22. **Vahl I. J.** Lumped elements for RF and microwave circuits. Boston, London: Artech House Microwave Library, 2003. 488 p.
23. **Борейко Д. А., Дьяченко Т. С., Тюменцев А. И.** Исследование параметров катушек индуктивности, выполненных по LTCC технологии // Техника радиосвязи. 2012. № 17. С. 73–83.

24. **Wheeler H. A.** Simple inductance formulas for radio coils // *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. 1928. Vol. 16. No. 10. Pp. 1398–1400.
25. **Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.** Расчет индуктивностей: Справочная книга. 3-е изд., перераб. и доп. Ленинград: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
26. **Benhadda Y., Derkaoui M., Mendaz K., Kharbouch H., Spiter P.** Design for integrated planar spiral inductor for MEMS // *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*. 2023. Vol. 67. No. 4. Pp. 425–437.
27. **Hussain I., Woo D.-K.** Simplified mutual inductance calculation of planar spiral coil for wireless power applications // *Sensors*. 2022. Vol. 22. No. 4. P. 1537.
28. **Futai N., Futai N., Matsumoto K., Shimoyama I.** A flexible micromachined planar spiral inductor for use as an artificial tactile mechanoreceptor // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2004. Vol. 111. No. 2. Pp. 293–303.
29. **Berthoud L., Mandeville J.-C.** Empirical impact equations and marginal perforation // *Proceedings of the First European Conference on Space Debris, Darmstadt, Germany*. 5–7 April 1993. ESA SD-01. Pp. 459–464.
30. **Awang Z.** *Microwave systems design*. Berlin/Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2013. 313 p.
31. **Benedek P., Silvester P.** Equivalent capacitances for microstrip gaps and steps // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1972. Vol. 20. No. 11. Pp.729–733.
32. **Garg R., Bahl I. J.** Microstrip discontinuities // *International Journal of Electronics*. 1978. Vol. 45. No. 1. Pp. 81–87.
33. **Qiao Q., Dai Y., Chen Z.** Signal integrity analysis on discontinuous microstrip line // *Journal of Physics: Conference Series*. 7th International Conference on Applied Electrostatics (ICAES-2012). 2013. Vol. 418. P. 012087.
34. **Clayton R. P.** *Analysis of multiconductor transmission lines*. Hoboken, New Jersey, USA: Wiley& Sons, Inc., 2008. 821 p.

REFERENCES

1. **Ivanov N. N., Dobritsa D. B., Yaschenko B. Y.,** A new way of automated dust control of the external atmosphere of a spacecraft during thermal-vacuum testing, *Sol. Syst. Res.* 54 (7) (2020) 662–667.
2. **Mironov V. V., Tolkach M. A.,** Velocity and distribution on velocity of meteoroids and space debris particles in near-Earth space, *Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologii [Space Technology and Engineering]*. (1 (36)) (2022) 125–143 (in Russian).
3. **Durin C., Mandeville J. C., Perrin J. M.,** Active detection of micrometeoroids and space debris SODAD-2 experiment on SAC-D satellite, *Adv. Space Res.* 69 (10) (2022) 3856–3863.
4. **Dmitryuk S. V.,** Space debris threat: Fundamental & practical aspects, *Magazine VKS*. (2(99)) (2019) 56–59 (in Russian).
5. **Shustov B. M.,** About fundamental research on space debris problem, In book: *Proc. of All-Russian Conf. “Space Debris: Fundamental and Practical Aspects of the Threat”*, Moscow, April 17–19 2019; Ser. “Mechanics, Management, Computer Science”, L. M. Zelenyi, B. M. Shustov (Eds.). Space research Institute of the RAS, Moscow (2019) 7–14 (in Russian).
6. **Ipatov A. V., Vedeshin L. A., Gerasytin S. A.,** Monitoring kosmicheskogo musora i perspektivy osvoeniya okolozemnogo kosmicheskogo prostranstva [Space debris monitoring and prospects for the exploration of near-Earth space], *Zemlya i Vselennaya [The Earth and Universe]*. (2 (356)) (2024) 91–108 (in Russian).
7. **Adushkin V. V., Kozlov S. I., Aksenov O. Y., et al.,** The small orbital debris population and its impact on space activities and ecological safety, *Acta Astronaut.* 176 (Nov) (2020) 591–597.
8. **Rodmann J., Miller A., Traud M., et al.,** Micrometeoroid impact risk assessment for interplanetary missions, *Proc. 8th Eur. Conf. on Space Debris (virtual)*, Darmstadt, Germany, 20–23 April 2021, T. Flohrer, S. Lemmens, F. Schmitz (Eds.), publ. by the ESA Space Debris Office; May (2021) 1–5.
9. **Agapov V. M., Golovko A. V., Emel'yanov V. A., et al.,** *Kosmicheskij musor.: V 2 kn. Red. Raykunov G. G., Kn.1. Metody nablyudeniya i modeli kosmicheskogo musora [Space debris: In 2 books. Raykunov G. G. (Ed.), Book 1. Methods of observation and models of space debris]*, FIZmatlit Publishing, Moscow, 2014 (in Russian).

10. **Novikov L. S.**, *Osnovy ekologii okolozemnogo kosmicheskogo prostranstva* [Fundamentals of ecology of the near-Earth space], Universitetskaya Kniga [University Book Publishing], 2006 (in Russian).
11. **Kalaev M. P., Rodina A. V., Telegin A. M.**, Investigation of changes in the characteristics of solar panels under the influence of space factors, *Instrum. Exp. Tech.* 65 (6) (2022) 970–975.
12. **Kalaev M. P., Telegin A. M., Voronov K. E., et al.**, Investigation of optical glass characteristics under the influence of space factors, *Computer Optics.* 43 (5) (2019) 803–809 (in Russian).
13. **Wang W., Xue W., Wu S., et al.**, High-speed micro-particle motion monitoring based on continuous single-frame multi-exposure technology, *Materials.* 15 (11) (2022) 3871.
14. **Barilaro L., Falsetti C., Olivieri L., et al.**, A conceptual study to characterize properties of space debris from hypervelocity impacts through thin film heat flux gauges, *Proc. 2021 IEEE International Workshop on Metrology for AeroSpace (MetroAeroSpace-2021).* IEEE Inc. (2021) 430–435.
15. **Gola Y., Kim D., Namilae S.**, Piezoresistive nanocomposites for sensing MMOD impact damage in inflatable space structures, *Compos. Commun.* 21 (Oct) (2020) 100375.
16. **Rose R., Koets M., Chocron S., Grimm R.**, Application of intelligent spacecraft structures for impact detection, *Proc. 2022 IEEE Aerospace Conference (AERO).* 5–12 March 2022. Big Sky, MT, USA (2022) 1–7.
17. **Gbaguidi A., Madiyar F., Kim D., Namilae S.**, Multifunctional inkjet printed sensors for MMOD impact detection, *Smart Mater. Struct.* 29 (8) (2020) 085052.
18. **Hofmann D. C., Bordeenithikasem P., Zhu Y., et al.**, Design, fabrication, and hypervelocity impact testing of screen-printed flexible micrometeoroid and orbital debris impact sensors for long-duration spacecraft health monitoring, *Aerosp. Sci. Technol.* 139 (Aug) (2023) 108372.
19. **Faure P., Masuyama Sh., Nakamotoa H., et al.**, Space dust impacts detector development for the evaluation of ejecta, *Proc. Eng.* 58 (2013) 594–600.
20. **Semkin N. D., Telegin A. M.**, Shock-compressed metal-insulator-metal structures under the action of fast dust particles, *Tech. Phys.* 56 (7) (2011) 986–991.
21. **Telegin A. M.**, Modeling the transmission coefficient of a micrometeoroid and space debris particle sensor, *Eng. Phys.* (4) (2024) 37–44 (in Russian).
22. **Bahl I. J.**, *Lumped elements for RF and microwave circuits*, Artech House Microwave Library, Boston, London, 2003.
23. **Boreyko D. A., D'yachenko T. S., Tyumentsev A. I.**, *Issledovanie parametrov katushek induktivnosti, vypolnennyh po LTCC tekhnologii* [Study of the parameters of inductance coils made using LTCC technology], *Tekhnika radiosvyazi* [Radio Commun. Technol.] (17) (2012) 73–83 (in Russian).
24. **Wheeler H. A.**, Simple inductance formulas for radio coils, *Proc. Instit. Radio Eng.* 16 (10) (1928) 1398–1400.
25. **Kalantarov P. L., Tseitlin L. A.**, *Raschet induktivnostej: Spravochnaya kniga* [Calculation of inductances: Reference book], 3rd edition, Energoatomizdat Publishing. Leningrad, 1986 (in Russian).
26. **Benhadda Y., Derkaoui M., Mendaz K., et al.**, Design for integrated planar spiral inductor for MEMS, *Period. Polytech. Electr. Eng. Comput. Sci.* 67 (4) (2023) 425–437.
27. **Hussain I., Woo D.-K.**, Simplified mutual inductance calculation of planar spiral coil for wireless power applications, *Sensors.* 22 (4) (2022) 1537.
28. **Futai N., Futai N., Matsumoto K., Shimoyama I.**, A flexible micromachined planar spiral inductor for use as an artificial tactile mechanoreceptor, *Sens. Actuators A: Phys.* 111 (2) (2004) 293–303.
29. **Berthoud L., Mandeville J.-C.**, Empirical impact equations and marginal perforation, *Proc. First Eur. Conf. on Space Debris, Darmstadt, Germany.* 5–7 April 1993. ESA SD-01 (1993) 459–464.
30. **Awang Z.**, *Microwave systems design*, Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg, 2013.
31. **Benedek P., Silvester P.**, Equivalent capacitances for microstrip gaps and steps, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 20 (11) (1972) 729–733.
32. **Garg R., Bahl I. J.**, Microstrip discontinuities, *Int. J. Electron.* 45 (1) (1978) 81–87.
33. **Qiao Q., Dai Y., Chen Z.**, Signal integrity analysis on discontinuous microstrip line, *J. Phys. Conf. Ser. (ICAES-2012).* 418 (2013) 012087.
34. **Clayton R. P.**, *Analysis of multiconductor transmission lines*, Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2008.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ТЕЛЕГИН Алексей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королёва, г. Самара, Россия.

443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34

talex85@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1750-1536

КАЛАЕВ Михаил Павлович – кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королёва, г. Самара, Россия.

443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34

sgau5@yandex.ru

ORCID: 0009-0003-2601-4144

THE AUTHORS

TELEGIN Aleksey M.

Samara National Research University

34 Moscow HWy, Samara, 443086, Russia

talex85@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1750-1536

KALAEV Mikhail P.

Samara National Research University

34 Moscow HWy, Samara, 443086, Russia

sgau5@yandex.ru

ORCID: 0009-0003-2601-4144

Статья поступила в редакцию 20.01.2025. Одобрена после рецензирования 10.03.2025. Принята 10.03.2025.

Received 20.01.2025. Approved after reviewing 10.03.2025. Accepted 10.03.2025.

Физическая оптика

Научная статья

УДК 544.032.65

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18305>

ДВУХЛУЧЕВОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Алексеев¹ , **И. В. Плешаков**^{2,1}, **Ю. И. Кузьмин**², **Я. А. Фофанов**³

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия;

² Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия;

³ Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия

 arseniy.alekseev98@gmail.com

Аннотация. В статье предложен новый метод экспериментального исследования магнитной жидкости, основанный на эффекте индуцирования в ней так называемой тепловой линзы под действием высокоинтенсивного сфокусированного лазерного излучения. Такая линза – это светоиндуцированная неоднородность, и она представляет собой область с пространственно-изменяющимся показателем преломления, которая формируется в результате перераспределения концентрации наночастиц в жидкой среде и теплового расширения жидкости-носителя. Указанная область просвечивается световым пучком вспомогательного лазера малой интенсивности. Оптический отклик среды регистрируется в виде дифракционных картин, образующихся от каждого из двух лазерных пучков. Установлено, что размеры дифракционных пятен зависят от напряженности приложенного внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: магнитная жидкость, лазерное излучение, тепловая линза, светоиндуцированная неоднородность, дифракционная картина

Для цитирования: Алексеев А. А., Плешаков И. В., Кузьмин Ю. И., Фофанов Я. А. Двухлучевой метод исследования неоднородности, индуцированной лазерным излучением в магнитной жидкости // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 60–67. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18305>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18305>

A DUAL-BEAM METHOD FOR STUDYING THE INHOMOGENEITY INDUCED BY LASER RADIATION IN A MAGNETIC FLUID

A. A. Alekseev¹ , **I. V. Pleshakov**^{2,1}, **Yu. I. Kuzmin**², **Ya. A. Fofanov**³

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

² Ioffe Institute, St. Petersburg, Russia;

³ Institute for Analytical Instrumentation RAS, St. Petersburg, Russia

 arseniy.alekseev98@gmail.com

Abstract. In the paper, a new method of experimental study based on the induction of a so-called thermal lens (TL) by the focused high-level laser radiation has been put forward for magnetic fluids. This TL is a region with a spatially changing refractive index, which occurs



due to the redistribution of the nanoparticle concentration in the material and the thermal expansion of the carrier fluid. This region was illuminated by the low-level light emission of an auxiliary laser. The optical response of the medium was recorded as diffraction patterns formed from each of these two beams. The shape of the diffraction pattern in the auxiliary beam was shown to depend on the angle at which it was directed to the TL. The diffraction spot sizes were found to depend on the strength of the applied external magnetic field.

Keywords: magnetic fluid, laser radiation, thermal lens, light-induced inhomogeneity, diffraction pattern

For citation: Alekseev A. A., Pleshakov I. V., Kuzmin Yu. I., Fofanov Ya. A., A dual-beam method for studying the inhomogeneity induced by laser radiation in a magnetic fluid, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 60–67. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18305>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Магнитные жидкости, представляющие собой коллоиды, твердая фаза которых является магнитоупорядоченным материалом, находят множество разных практических применений [1, 2]. Они интересны и как объект научных исследований: например, в настоящее время изучается их поведение при внедрении в биологические системы [3 – 5] и другие сложные среды [6 – 8]. Рассматривается возможность создания оптоэлектронных устройств (модуляторы, датчики, перестраиваемые фильтры и др.) с рабочим веществом на основе магнитных жидкостей [9 – 12].

При использовании оптических свойств этих веществ важно учитывать, что луч с высокой интенсивностью изменяет концентрацию магнитных наночастиц. За это могут отвечать разные механизмы, основной среди которых – это тепловой (см. работу [13] и приведенные в ней ссылки). Изменение концентрации приводит к изменению показателя преломления n и появлению в образце линзоподобной неоднородности, так называемой тепловой линзы, или термолинзы (ТЛ), на которой свет дифрагирует. Фактически, это вариант самодифракции. Эффект образования ТЛ в области интенсивного лазерного излучения, в принципе, свойствен многим материалам, в частности, он наблюдался и в магнитных жидкостях [14, 15].

Обычная методика исследования ТЛ заключается в фокусировании лазерного пучка в среде и регистрации дифракции того же пучка на наведенной им неоднородности. Информация, получаемая из таких экспериментов, существенна как при разработке приборов фотоники, так и для понимания характера процессов, происходящих в подобных системах.

Поскольку излучение лазера создает ТЛ и дифрагирует на ней же, его характеристиками (мощность, форма пучка и др.) нельзя варьировать, не изменяя тем самым и изучаемый объект.

В настоящей работе для изучения эффекта тепловой линзы предложено применять вспомогательный лазер малой интенсивности, просвечивающий наведенную неоднородность под некоторым углом. Преимущество такого подхода состоит в возможности независимого зондирования изучаемого объекта.

Экспериментальная часть

Образцы. Образцы изготавливались из коммерческой магнитной жидкости с твердой фракцией в виде наночастиц магнетита, имеющих средний диаметр около 10 нм. Растворителями служили керосин и вода с добавлением органических масел и стабилизаторов (поверхностно-активные вещества, предотвращающие слипание). Они разбавлялись соответствующим носителем до концентраций $\varphi = 1 - 3$ об. %. Жидкость помещалась в кювету толщиной $d = 60$ мкм.

Экспериментальная установка. Эксперименты выполнялись на установке, блок-схема которой показана на рис. 1. Основной источник света (гелий-неоновый лазер) имел длину волны 633 нм и мощность 17 мВт. Его излучение с помощью линзы фокусировалось в образце; согласно оценкам размеров фокусного пятна, интенсивность оптического излучения в нем составляла 18 МВт/м^2 . Излучение вспомогательного полупроводникового лазера с длиной волны 660 нм и мощностью 12 мВт фокусировалось до образца. Интенсивность этого излучения на неоднородности, индуцированной основным лазером, не превышала 4 кВт/м^2 (по нашей оценке), т. е. не могла оказывать на нее какого-либо существенного влияния. На полупрозрачном экране, расположенном за кюветой с образцом, каждый из двух лучей образовывал свою дифракционную картину.

Кювету с магнитной жидкостью помещали в электромагнит, который создавал поле напряженностью H , ортогональное ее плоскости. Оно могло изменяться от нуля до 60 кА/м.

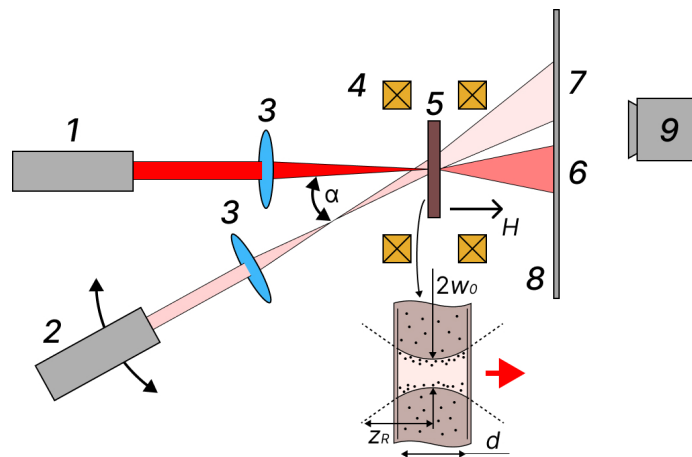


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

- 1, 2 – основной и вспомогательный лазеры, соответственно; 3 – фокусирующие линзы; 4 – электромагнит; 5 – кювета с образцом; 6, 7 – дифракционные пятна от основного и вспомогательного лучей, соответственно; 8 – экран, 9 – цифровая CMOS-камера (англ. Complementary Metal-Oxide-Semiconductor).

На вставке: область излучения, сфокусированного на образце, с параметрами перетяжки

Размеры термолинзы оценивались с учетом ее приближенного ограничения каустикой (см. вставку на рис. 1); при этом использовались величины, характеризующие перетяжку лазерного луча: его диаметр в фокусе линзы $2w_0$ и рэлеевская длина z_R . Они вычислялись по известным формулам, и для геометрии нашей оптической схемы оказались равными 35 и 900 мкм соответственно. Поскольку толщина кюветы d гораздо меньше рэлеевской длины z_R , было рассчитано, что неоднородность имеет примерно цилиндрическую форму с диаметром около 35 мкм и длиной 60 мкм.

Полученные результаты

В экспериментах было получено несколько серий изображений дифракционных картин при разных условиях и для разных образцов (рис. 2).

Для магнитной жидкости на основе керосина в обоих лучах наблюдались ярко выраженные дифракционные картины в виде концентрических колец (см. рис. 2, *a*), на которые заметным образом влияло приложение магнитного поля (см. рис. 2, *b*). Во вспомогательном пучке пятно было вытянутым, увеличение значения угла α приводило к повышению его эллиптичности (см. рис. 2, *c*). В водных образцах размеры пятен были намного меньше, чем в образцах на основе керосина (на рис. 2, *d* показано изображение, полученное на примерно втрое большем удалении экрана от кюветы), причем видно, что дифракционные кольца разрешены слабо (дифракционная картина от вспомогательного пучка, расположенная справа на рис. 2, *d*, увеличена в несколько раз для наглядности), поэтому далее приведены только результаты, полученные на керосиновых образцах.

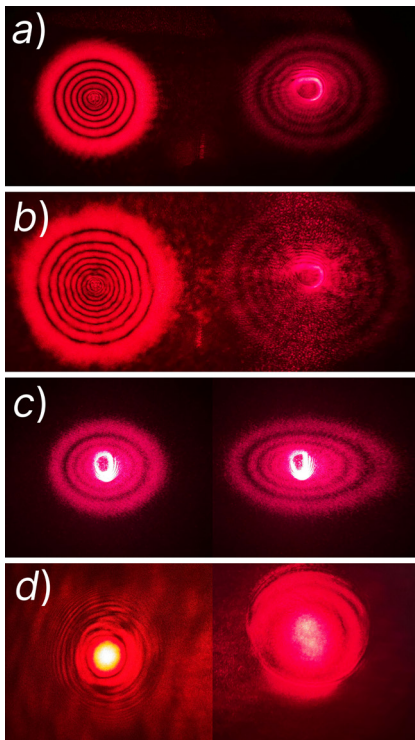


Рис. 2. Примеры дифракционных картин от разных образцов при разных условиях: образцы на основе керосина, $\varphi = 2$ об. % (*a* – *c*) и воды, $\varphi = 3$ об. % (*d*); приложенные магнитные поля $H = 0$ (*a*, *c*, *d*) и $H = 56$ кА/м (*b*); *a*, *b*, *d* – представлены картины от основных (слева) и вспомогательных (справа) пучков; значения угла α (см. рис. 1) составляли при этом 20° . Отличие на рис. 2, *c*: здесь оба изображения – от вспомогательных пучков: слева при $\alpha = 35^\circ$, справа при $\alpha = 55^\circ$

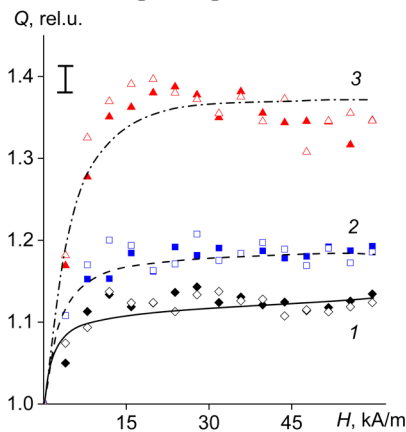


Рис. 3. Зависимости относительных размеров дифракционных пятен от напряженности магнитного поля в магнитных жидкостях на основе керосина при разных значениях концентрации φ , об. %: 1,0 (кривая 1), 1,5 (2), 3,0 (3).

Представлены данные для основных (затушеванные символы) и вспомогательных (незатушеванные) лазерных лучей при значении угла $\alpha = 20^\circ$

Размер D дифракционных картин зависит от напряженности магнитного поля H , а изменение этого размера было удобно охарактеризовать нормированным параметром

$$Q(H) = D(H)/D_0,$$

где $D(H)$, D_0 – средние диаметры внешнего кольца пятна дифракции при напряженности поля H и при $H = 0$, соответственно.

Зависимости Q от величины магнитного поля для некоторых концентраций φ продемонстрированы на рис. 3. Угол α здесь выбран небольшим, чтобы эллиптическое искажение отклика во вспомогательном луче было незначительным. Видно, что формы кривых $Q(H)$ для откликов в основном и вспомогательном пучках совпадают. Концентрационные зависимости $Q(\varphi)$ приведены на рис. 4, показывающем рост относительного размера дифракционных пятен с повышением концентрации.

Обсуждение результатов

Анализ полученных экспериментальных результатов позволяет их интерпретировать следующим образом. Если неоднородность, имеющая форму цилиндра и индуцированная излучением основного лазера, находится в поле дополнительного излучения второго лазера, направленного к оси первого под углом, то на экране должна появляться еще одна дифракционная картина, сходная

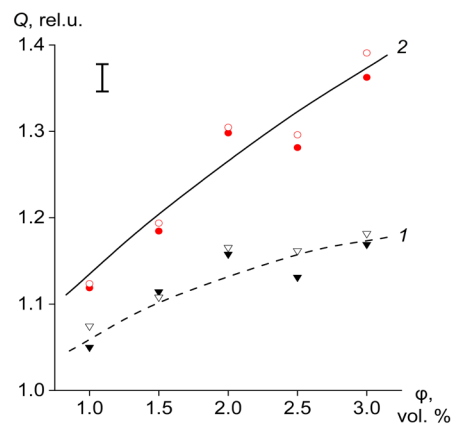


Рис. 4. Концентрационные зависимости относительных размеров дифракционных пятен в магнитных жидкостях на основе керосина при значениях напряженности магнитного поля $H = 4,0$ кА/м (1) и 16 кА/м (2).

Представлены данные для основных и вспомогательных лазерных лучей (затушеванные и незатушеванные символы, соответственно)

с основной; а именно это и наблюдается. Возрастание вытянутости дифракционного пятна, полученного от вспомогательного луча, при увеличении угла α между осями двух излучений коррелирует с удлинением проекции цилиндрической неоднородности при ее боковом освещении, причем количество разрешенных колец в дифракционной картине при этом уменьшается.

Поскольку размер дифракционных картин в случае водной магнитной жидкости намного меньше, логично предположить, что характерный размер термолинзы в них следует оценить как больший, чем в образцах с керосином в качестве растворителя. Это предположение согласуется с результатами работы [13], где обнаружена склонность таких магнитных жидкостей формировать под действием лазерного излучения крупные ассоциаты наночастиц, значительно превышающие по величине значение $2w_0$ (диаметр лазерного луча в фокусе линзы).

Поведение оптических откликов в магнитном поле качественно объясняется свойствами магнитных жидкостей. Известно, что под действием магнитного поля в них возникают нитеобразные агрегаты, диаметры которых составляют от единиц до нескольких десятков микрометров (для жидких сред, где растворителями являются керосин или вода, и напряженности магнитного поля H более 8 кА/м) [16, 17]. Эти значения размеров агрегатов сравнимы с диаметром $2w_0$, т. е. неоднородность, созданная лазерным излучением, соизмерима с магнитоиндуцированным агрегатом. Естественно предположить, что при включении магнитного поля форма этого объекта радикально не изменяется, но при этом в объекте происходит преобразование пространственного распределения частиц (и показателя преломления n , связанного с их концентрацией [17]) за счет появления дипольного взаимодействия магнитных моментов, ориентированных вдоль вектора магнитного поля. В экспериментах на керосиновых образцах наблюдался рост расходимости лазерного пучка, прошедшего через термолинзу, по мере повышения напряженности магнитного поля, что указывает на уменьшение размера этой линзы.

Нетрудно заметить, что графики функций $Q(H)$ для разных значений концентрации φ практически подобны, и выходят на насыщение при магнитном поле, равном примерно 15 кА/м (см. рис. 3). Полученное нами значение напряженности поля насыщения отличается от величин, типичных для магнитных жидкостей, однако находится в хорошем согласии с данными по зависимости показателя преломления n от напряженности поля H [17]. Дифракционные картины водных магнитных жидкостей почти не зависят от магнитного поля, что, скорее всего, можно объяснить формированием в них более крупной и плотной структуры, чем в образцах с керосином в качестве растворителя [13].

Заключение

Проведенное исследование позволяет заключить, что использование дополнительного лазерного пучка для изучения светоиндуцированных особенностей в магнитных жидкостях может служить эффективным методом получения информации об их физических свойствах. Его преимущество состоит в возможности проводить независимое зондирование неоднородности, индуцированной интенсивным излучением, с помощью слабого лазерного луча.

Предлагаемый подход позволяет изучать подобные неоднородности, не изменяя условий их формирования, но варьировать при этом режимы воздействия на них вспомогательным лазером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scherer C., Figueiredo Neto A. M. Ferrofluids: properties and applications // Brazilian Journal of Physics. 2005. Vol. 35. No. 3A. Pp. 718–727.
2. Oehlsen O., Cervantes-Ramírez S. I., Cervantes-Avilés P., Medina-Velo I. A. Approaches on ferrofluid synthesis and applications: Current status and future perspectives // ACS Omega. 2022. Vol. 7. No. 4. Pp. 3134–3150.
3. Socoliuc V., Avdeev M. V., Kuncser V., Turcu R., Tombácz E., Vékás L. Ferrofluids and bio-ferrofluids: Looking back and stepping forward // Nanoscale. 2022. Vol. 14. No. 13. Pp. 4786–4886.



4. **Monteserín M., Larumbe S., Martínez A. V., Burgui S., Francisco M. L.** Recent advances in the development of magnetic nanoparticles for biomedical applications // *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*. 2021. Vol. 21. No. 5. Pp. 2705–2741.
5. **Imran M., Alam M. M., Khan A.** Advanced biomedical applications of iron oxide nanostructures based ferrofluids // *Nanotechnology*. 2021. Vol. 32. No. 42. P. 422001.
6. **Yerin C., Belykh S.** Magnetic emulsions as prospective magneto-optical media // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2022. Vol. 58. No. 2 (Part 1). P. 4600704.
7. **Pleshakov I. V., Alekseev A. A., Bibik E. E., Dudkin V. I., Kudryashova T. Yu., Karseeva E. K., Kostitsyna T. A., Medvedeva E. A.** Magnetic nanoparticles in solid matrices: Formation and fixation of structures, induced by magnetic field // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2023. Vol. 14. No. 5. Pp. 544–548.
8. **Ерин К. В., Вивчарь В. И.** Спектры пропускания разбавленных и концентрированных коллоидов магнетита в жидких диэлектриках // *Журнал прикладной спектроскопии*. 2023. Т. 90. № 6. С. 843–849.
9. **Zhao Y., Zhang Y., Lv R.-Q., Wang Q.** Novel optical devices based on the tunable refractive index of magnetic fluid and their characteristics // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2011. Vol. 323. No. 23. Pp. 2987–2996.
10. **Hao Z., Li Y., Pu Sh., Wang J., Chen F., Lahoubi M.** Ultrahigh-performance vector magnetic field sensor with wedge-shaped fiber tip based on surface plasmon resonance and magnetic fluid // *Nanophotonics*. 2022. Vol. 11. No. 15. Pp. 3519–3528.
11. **Han Sh., Pu Sh., Hao Z., et al.** In-line temperature-compensated vector magnetic field sensor with side-polished fiber // *Optics Letters*. 2023. Vol. 48. No. 17. Pp. 4504–4507.
12. **Dave V., Mehta R. V.** Diffraction of laser light by a ferrocell and ferrofluid layers: A comparison // *Optik*. 2024. Vol. 311. September. P. 171925.
13. **Pleshakov I. V., Alekseev A. A., Bibik E. E., Ilchev I. V., Prokof'ev A. V.** Effect of laser radiation on magnetite nanoparticles in deposited ferrofluid // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2024. Vol. 15. No. 3. Pp. 346–351.
14. **Du T., Yuan S., Luo W.** Thermal lens coupled magneto-optical effect in a ferrofluid // *Applied Physics Letters*. 1994. Vol. 65. No. 14. Pp. 1844–1846.
15. **Sharma P., Alekhya V. V., Pathak S., Jain K., Tomar P., Basheed G. A., Maurya K. K., Pant R. P.** A novel experimental approach for direct observation of magnetic field induced structuration in ferrofluid // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2021. Vol. 534. 15 September. P. 168024.
16. **Прокофьев А. В., Плешаков И. В., Бибик Е. Е., Кузьмин Ю. И.** Оптическое исследование геометрических характеристик агрегатов, образованных частицами магнитной жидкости // *Письма в Журнал технической физики*. 2017. Т. 43. № 4. С. 26–31.
17. **Hong H. E., Hong Ch.-Y., Yang S. Y., Yang H. C.** Designing the refractive indices by using magnetic fluids // *Applied Physics Letters*. 2003. Vol. 82. No. 15. Pp. 2434–2436.

REFERENCES

1. **Scherer C., Figueiredo Neto A. M.**, Ferrofluids: properties and applications, *Braz. J. Phys.* 35 (3A) (2005) 718–727.
2. **Oehlsen O., Cervantes-Ramírez S. I., Cervantes-Avilés P., Medina-Velo I. A.**, Approaches on ferrofluid synthesis and applications: Current status and future perspectives, *ACS Omega*. 7 (4) (2022) 3134–3150.
3. **Socoliuc V., Avdeev M. V., Kuncser V., et al.**, Ferrofluids and bio-ferrofluids: Looking back and stepping forward, *Nanoscale*. 14 (13) (2022) 4786–4886.
4. **Monteserín M., Larumbe S., Martínez A. V., et al.**, Recent advances in the development of magnetic nanoparticles for biomedical applications, *J. Nanosci. Nanotechnol.* 21 (5) (2021) 2705–2741.
5. **Imran M., Alam M. M., Khan A.**, Advanced biomedical applications of iron oxide nanostructures based ferrofluids, *Nanotechnology*. 32 (42) (2021) 422001.
6. **Yerin C., Belykh S.**, Magnetic emulsions as prospective magneto-optical media, *IEEE Trans. Magn.* 58 (2-1) (2022) 4600704.

7. Pleshakov I. V., Alekseev A. A., Bibik E. E., et al., Magnetic nanoparticles in solid matrices: Formation and fixation of structures, induced by magnetic field, *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 14 (5) (2023) 544–548.
8. Yerin K. V., Vivchar V. I., Transmission spectra of diluted and concentrated magnetite colloids in liquid dielectrics, *J. Appl. Spectrosc.* 90 (7) (2024) 1205–1211.
9. Zhao Y., Zhang Y., Lv R.-Q., Wang Q., Novel optical devices based on the tunable refractive index of magnetic fluid and their characteristics, *J. Magn. Magn. Mat.* 323 (23) (2011) 2987–2996.
10. Hao Z., Li Y., Pu Sh., et al., Ultrahigh-performance vector magnetic field sensor with wedge-shaped fiber tip based on surface plasmon resonance and magnetic fluid, *Nanophotonics.* 11 (15) (2022) 3519–3528.
11. Han Sh., Pu Sh., Hao Z., et al., In-line temperature-compensated vector magnetic field sensor with side-polished fiber, *Opt. Lett.* 48 (17) (2023) 4504–4507.
12. Dave V., Mehta R. V., Diffraction of laser light by a ferrocell and ferrofluid layers: A comparison, *Optik.* 311 (Sept) (2024) 171925.
13. Pleshakov I. V., Alekseev A. A., Bibik E. E., et al., Effect of laser radiation on magnetite nanoparticles in deposited ferrofluid, *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 15 (3) (2024) 346–351.
14. Du T., Yuan S., Luo W., Thermal lens coupled magneto-optical effect in a ferrofluid, *Appl. Phys. Lett.* 65 (14) (1994) 1844–1846.
15. Sharma P., Alekhya V. V., Pathak S., et al., A novel experimental approach for direct observation of magnetic field induced structuration in ferrofluid, *J. Magn. Magn. Mat.* 534 (Sept) (2021) 168024.
16. Prokof'ev A. V., Pleshakov I. V., Bibik E. E., Kuz'min Yu. I., An optical investigation of the geometric characteristics of aggregates formed by particles of magnetic fluid, *Tech. Phys. Lett.* 43 (2) (2017) 194–196.
17. Horng H. E., Hong Ch.-Y., Yang S. Y., Yang H. C., Designing the refractive indices by using magnetic fluids, *Appl. Phys. Lett.* 82 (15) (2003) 2434–2436.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСЕЕВ Арсений Александрович – аспирант Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

arseniy.alekseev98@gmail.com

ORCID: 0009-0000-5368-6788

ПЛЕШАКОВ Иван Викторович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Физико-технического института имени А. Ф. Иоффе РАН, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

ivanple@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-6707-6216

КУЗЬМИН Юрий Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Физико-технического института имени А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

iourk@yandex.ru

ORCID: 0000-0001-6052-8251

ФОФАНОВ Яков Андреевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31-33, лит. А.

yakinvest@yandex.ru

ORCID: 0009-0004-2565-8834

**THE AUTHORS****ALEKSEEV Arseniy A.**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
arseniy.alekseev98@gmail.com
ORCID: 0009-0000-5368-6788

PLESHAKOV Ivan V.

Ioffe Institute of RAS
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
26 Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia
ivanple@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-6707-6216

KUZMIN Yuri I.

Ioffe Institute of RAS
26 Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia
iourk@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6052-8251

FOFANOV Yakov A.

Institute for Analytical Instrumentation of RAS
31-33, Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
yakinvest@yandex.ru
ORCID: 0009-0004-2565-8834

*Статья поступила в редакцию 21.02.2025. Одобрена после рецензирования 20.03.2025.
Принята 20.03.2025.
Received 21.02.2025. Approved after reviewing 20.03.2025. Accepted 20.03.2025.*

Физическое материаловедение

Научная статья

УДК 537.9

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18306>

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГИБКИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ УГЛЕРОДНЫМИ НАПОЛНИТЕЛЯМИ **Д. Н. Тонков**¹ , **М. И. Кобыляцкая**¹, **Е. С. Васильева**¹, **В. Э. Гасумянц**^{1,2}, **О. В. Толочко**^{1,3}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

² Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

³ Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт-Петербург, Россия

 wtk_dima@mail.ru

Аннотация. Исследованы проводящие и механические свойства полимерных композитов на основе бутадиен-стирольного каучука и трех различных углеродных наполнителей: графита, графена и углеродных нанотрубок (УНТ). На основании анализа концентрационных зависимостей удельного сопротивления определены значения порогов перколяции. Исследована чувствительность сопротивления композитов к степени их одноосного растяжения и обнаружено, что наибольшие значения коэффициента тензочувствительности наблюдаются в композитах с графеном. Показано, что в случае наполнителя из УНТ деформации, возникающие под действием приложенных напряжений, имеют упругий характер, а после снятия напряжения эти композиты полностью релаксируют к своему исходному размеру. В композитах с графитом и графеном возникают пластические деформации даже при минимальных напряжениях, а их полной релаксации не происходит.

Ключевые слова: полимерный композиционный материал, бутадиен-стирольный каучук, углеродный наполнитель, электропроводность, коэффициент тензочувствительности

Для цитирования: Тонков Д. Н., Кобыляцкая М. И., Васильева Е. С., Гасумянц В. Э., Толочко О. В. Электрические и механические свойства гибких полимерных композиционных материалов с различными углеродными наполнителями // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 68–81. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18306>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18306>

ELECTRICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF FLEXIBLE POLYMER COMPOSITE MATERIALS WITH VARIOUS CARBON FILLERS **D. N. Tonkov**¹ , **M. I. Kobylatskaya**¹, **E. S. Vasilyeva**¹, **V. E. Gasumyants**^{1,2}, **O. V. Tolochko**^{1,3}

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia



² Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, Russia

³ State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

✉ wtk_dima@mail.ru

Abstract. We studied the conductive and mechanical properties of polymer composites based on styrene butadiene rubber as a matrix and three different carbon fillers, namely graphite, graphene and carbon nanotubes. Based on the analysis of the resistivity dependences on the concentrations of various fillers, the values of percolation thresholds were determined. The sensitivity of the resistivity of all synthesized composites to the degree of their uniaxial stretching was investigated. The maximum values of the gauge factor were observed in composites with graphene filler. It was also found that in composites with carbon nanotubes as a filler, the deformations arising under applied stresses have an elastic character. After removing the tensile stresses, these composites completely relaxed to their initial size. Contrary to this, in composites with graphite and graphene, even minimal stresses caused the appearance of plastic deformations, and their complete relaxation did not occur after stress was removed.

Keywords: polymer composite, styrene-butadiene rubber, carbon, resistivity, percolation threshold, gauge factor, deformation

For citation: Tonkov D. N., Kobylatskaya M. I., Vasilyeva E. S., Gasumyants V. E., Tolochko O. V., Electrical and mechanical properties of flexible polymer composite materials with various carbon fillers, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 68–81. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18306>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Полимерные нанокпозиционные пленочные материалы являются перспективной основой для создания сенсорных устройств для носимой электроники. Для них характерно большое разнообразие структур, что позволяет достичь необходимых свойств, таких как легкость, гибкость, износостойкость, устойчивость к коррозии, а также получать изделия самых разнообразных форм. Устройства, созданные на основе полимерных наноккомпозиатов, – миниатюрны, и их постоянный контакт с телом пользователя не должен быть для него заметным. Поэтому применение и разработка новых сенсорных материалов может способствовать стремительному прогрессу во многих сферах применения, например, в медицине для контроля здоровья человека [1], в спорте для отслеживания состояния спортсмена [2], в опасных условиях работы профессионала для мониторинга его состояния, в игровой индустрии и моде для большего правдоподобия игровых ситуаций и создания «умных» тканей, реагирующих на внешние воздействия [3].

Одним из перспективных применений полимерных наноккомпозиатов является создание на их основе гибких растягивающихся датчиков деформации [4, 5]. Для этого в полимерную матрицу необходимо вводить проводящий наполнитель. Его частицы образуют проводящую сеть, которая при деформации частично разрушается, что приводит к увеличению сопротивления материала. Композиты, содержащие металлические наполнители, характеризуются низкой гибкостью и эластичностью, а также обладают чувствительностью к растяжениям только в ограниченном диапазоне [6], в то время как полимерные композиты на основе углеродных наполнителей обладают существенно лучшими параметрами.

В связи с этим в последние годы активно ведутся исследования свойств композитов на основе различных полимеров с использованием в качестве наполнителя графита [7], графена [8] или углеродных нанотрубок (УНТ, CNT) [9]. При этом свойства получаемых материалов существенно зависят от используемой технологии синтеза, типа полимерной матрицы и процентного содержания в ней частиц наполнителя.

Нами была разработана технология синтеза полимерных композитов на основе бутадиен-стирольного каучука (Styrene-Butadiene Rubber (SBR)) в качестве матрицы, а также графита, графена и УНТ в качестве наполнителей.

В данной работе представлены результаты сравнительного исследования влияния концентрации различных углеродных наполнителей на проводящие, пьезорезистивные и механические свойства синтезированных композитов на основе SBR.

Материалы и методики

Синтез объектов исследования. В качестве непроводящей полимерной матрицы нами использовался бутадиен-стирольный каучук Sigma-Aldrich, а в качестве наполнителей – порошок графита Super P Conductive Carbon Black, порошок графена и одностенные углеродные нанотрубки TUBALL.

Для получения композитной пленки навеска порошка наполнителя (графит, графен или УНТ) размешивалась в четыреххлористом углероде (растворитель) с помощью магнитной мешалки; процедуру проводили в закрытой колбе для предотвращения испарения растворителя и попадания в раствор пузырьков воздуха. Далее в эту дисперсионную систему вводили гранулы полимера SBR в концентрации 5,9 масс. % (по отношению к растворителю) и продолжалось замешивание до полного растворения полимера. Полученный раствор выливали в форму из фторопласта и высушивали в течение 1 ч под вытяжкой до полного высыхания. После этого пленку композита удаляли пинцетом из фторопластовой формы.

Для определения порога перколяции и измерения механических и электрических свойств в зависимости от концентрации наполнителя, были синтезированы образцы с содержанием графита и графена от 13 до 33 масс. % и УНТ от 0,25 до 2,5 масс. % (по отношению к готовому композиту). Процентное содержание наполнителя выбиралось с учетом среднего размера и формы его частиц, а также на основании модели, которая применялась для оценки порога перколяции в материале заданной толщины.

Методы измерения. Удельное сопротивление всех пленок, полученных из синтезированных композитов, а также его зависимость от степени растяжения образцов были измерены четырехзондовым методом Ван дер Пау. Последовательность действий была такова: образец пленки закрепляли в измерительной ячейке с подвижной частью, после чего к нему подводились электрические контакты. При пошаговом перемещении подвижной части ячейки образец растягивался на определенную длину; после каждого шага проводилось измерение удельного сопротивления.

Механические свойства композиционных полимерных пленок были исследованы на той же установке, но без подключения контактов. Для измерения прочности и релаксационной способности материала образцы многократно растягивали, с каждым разом увеличивая растяжение с шагом 10 мм. В конечной точке каждого растяжения образец выдерживали 5 с, затем растягивающее напряжение резко снимали и через 25 с измеряли длину образца штангенциркулем. Для измерения времени релаксации образцы растягивали на 400 % от начальной длины, а после снятия нагрузки регистрировалась длина образца через каждые 20 с вплоть до прекращения эффекта релаксации.

Результаты и их обсуждение

Исследование перколяционных свойств. Для анализа изменения проводящих свойств композитов при деформации необходимо учитывать значение порога перколяции для частиц проводящего наполнителя, помещенных в диэлектрическую полимерную матрицу. Структурным параметром композита, характеризующим эти свойства, служит степень перекрытия частиц [10]. При высокой концентрации частиц образуется сплошной проводящий кластер: частицы непосредственно касаются друг друга. С уменьшением концентрации расположение частиц становится более разреженным и механизм проводимости изменяется на прыжковый. Дальнейшее уменьшение концентрации частиц, с учетом их среднего размера в одном или более направлениях, существенно снижает вероятность прыжков носителей заряда, и проводимость композита резко стремится к нулю. Концентрация частиц наполнителя, при которой композит перестает проводить электрический ток, и есть порог перколяции.

Образцы с значениями концентрации наполнителя, при которых преобладает прыжковая проводимость, перспективны для последующего применения в качестве рабочих элементов сенсорных устройств. Вероятность прыжка (а значит, и значение



проводимости) экспоненциально зависит от расстояния между проводящими частицами, поэтому композиты таких составов обладают наибольшей чувствительностью к растяжениям.

По указанной причине для получения образцов с высокой чувствительностью к деформациям необходимо выяснить значение порога перколяции синтезированных композитов для наполнителей с различной структурой и размером частиц. На рис. 1 показаны экспериментально полученные зависимости удельного сопротивления исследованных образцов от массовой доли наполнителей: графена, графита и УНТ (температура комнатная).

Как видно из приведенных данных, при массовой доле около 37 и 30 масс. % происходит резкое возрастание сопротивления для образцов с графитом и графеном, соответственно, что может быть связано с разрушением сплошного кластера и сменой проводимости сплошного кластера на прыжковую проводимость. Для композита с УНТ такое изменение проводящих свойств композита наблюдается при существенно меньших значениях массовых процентов наполнителя (ниже 1 масс. %).

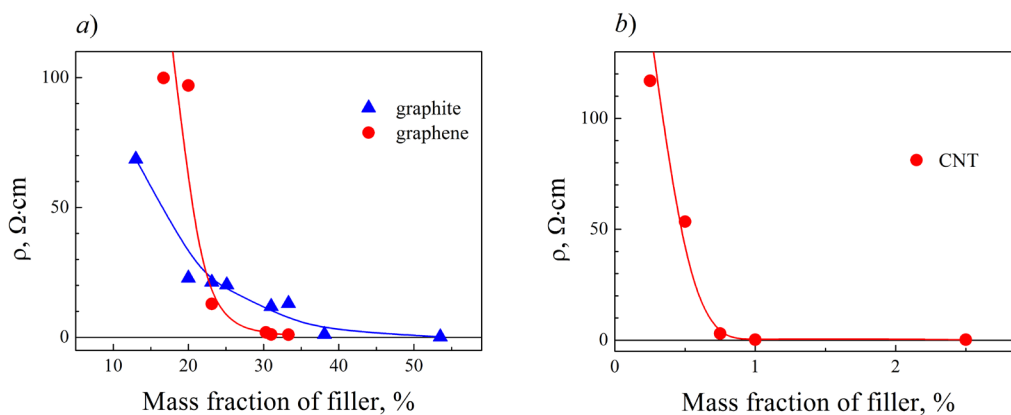


Рис. 1. Зависимости удельного сопротивления композитов, содержащих графен или графит (a) и УНТ (b), от концентрации наполнителя

Для уточнения характера проводимости, на основе полученных данных были построены зависимости $\ln(\rho)$ от $N^{-1/3}$ (N – концентрация частиц). Частицы наполнителя в матрице рассматриваются как набор узлов, окруженных замкнутыми поверхностями одинаковой формы и хаотично распределенных в пространстве. При пересечении поверхностей образуются проводящая цепочка узлов, между которыми происходит туннелирование электронов (модель Миллера – Абрахамса при прыжках по соседним узлам). По наклону зависимости $\ln(\rho)$ от $N^{-1/3}$ (см. рис. 2 для композитов с графитом и графеном) можно определить радиус локализации волновой функции (длину прыжка). В результате расчетов длина прыжка оказалась равной 5.4 Å для композита с графитом, 1,1 Å для композита с графеном и 60 Å для композита с УНТ. Отметим, что при проведении аналогичного расчета в рамках двумерной задачи (приближение окружностей) значения радиусов локализации волновой функции получились порядка 10^{-11} см, что является физически неразумным.

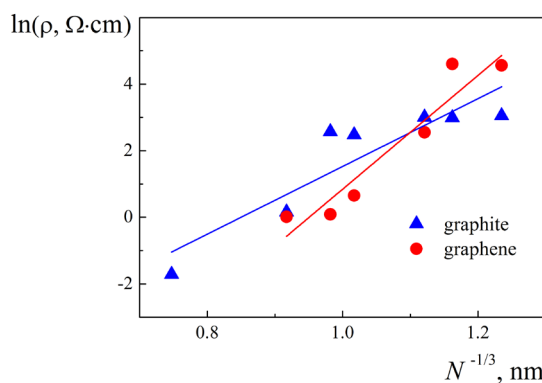


Рис. 2. Зависимости логарифма удельного сопротивления композитов с графитом и графеном от $N^{-1/3}$ (N – концентрация частиц)

Таким образом, для дальнейшего расчета порога перколяции необходимо брать за основу трехмерную размерность структуры, хотя при расчете свойств композита с графеном методом Монте-Карло в работе [11], частицы графена рассматривались в виде двумерных круглых пластин.

Согласно нашим представлениям, при синтезе композита плоские чешуйки

графена коагулируют друг с другом, образуя трехмерные сгустки. По этой причине при обсуждении результатов мы использовали модель, предложенную в статье [12] и схематически показанную на рис. 3. Здесь сферы малого радиуса – это сгустки проводящих частиц наполнителя, сферы большого радиуса – непроводящие частицы, которые являются приближением областей, заполненных непроводящей матрицей, окружность на вставке, соединяющая частицы наполнителя, – область туннелирования. Как указано в статье [12], порог протекания зависит от отношения λ размеров проводящих и непроводящих частиц:

$$\lambda = d_c/d_i,$$

где d_c, d_i – размеры проводящих и непроводящих частиц, соответственно.

Чем выше значение λ , тем ниже порог перколяции. Такое представление структуры, образованной в композите, позволяет объяснить обнаруженную в дальнейшем разницу в значениях порога перколяции для композитов с различными наполнителями.

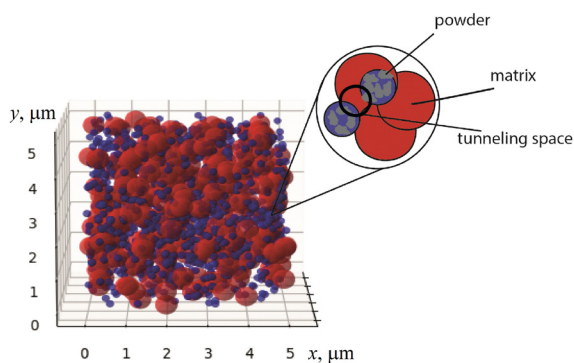


Рис. 3. Модель структуры композитов: сферы малого и большого радиусов – это соответственно сгустки проводящих частиц наполнителя и непроводящие частицы (приближение областей, заполненных непроводящей матрицей (matrix)).

На вставке: область туннелирования (tunneling space) показана окружностью малого радиуса, соединяющей частицы наполнителя (powder)

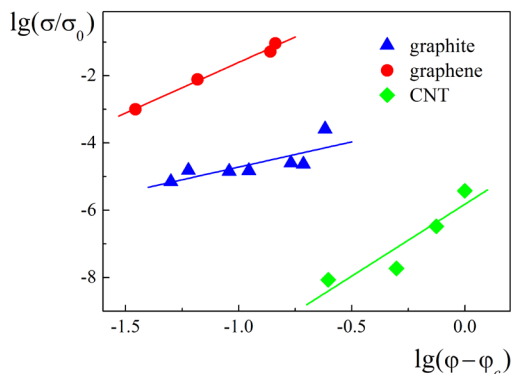


Рис. 4. График логарифмических зависимостей нормализованной проводимости σ/σ_0 композитов с графитом, графеном и УНТ от логарифма разности концентрации наполнителя ϕ и ее значения ϕ_c , соответствующего порогу перколяции

Для анализа перколяционной модели были синтезированы образцы с разными наполнителями с их тестовыми концентрациями и проанализированы их проводящие свойства при отсутствии деформации.

Порог перколяции был определен графически, методом парных точек по известному выражению для проводимости σ (См):

$$\sigma = \sigma_0 (\phi - \phi_c)^t,$$

где ϕ, ϕ_c – концентрация наполнителя и ее значение, соответствующее порогу перколяции (в массовых долях по отношению к готовому композиту); t – критический индекс проводимости (зависит от размерности структуры); $\sigma_0, \text{См}$, – проводимость наполнителя [13].

При этом для расчета были использованы данные для образцов с концентрациями наполнителей, при которых наблюдается существенное снижение значений проводимости композитов, т.е. когда разрушается сплошной кластер проводящих частиц.

Для определения критического индекса проводимости были построены зависимости $\lg(\sigma/\sigma_0)$ от $\lg(\phi - \phi_c)$ (рис. 4).

По аналогии с исследованием в работе [14], мы провели одновременное варьирование значений ϕ_c и t с целью получения оптимальной линейной зависимости, аппроксимирующей экспериментальные данные (см. рис. 4). За основу был взят изначально известный диапазон возможных значений критического индекса проводимости t .

В результате для каждого из композитов был определен критический индекс проводимости и соответствующий ему порог перколяции. Согласно результатам проведенных расчетов, значения критического индекса проводимости составили $t = 2,38, 2,08$ и $2,37$ для композитов с графитом, графеном и УНТ, соответственно. Эти значения



в целом соответствуют задаче сфер, а небольшие отклонения от теоретического значения могут быть связаны с частичным нарушением размерности [13]. Полученным значениям критических индексов проводимости соответствуют определенные значения порогов перколяции, которые для композитов с графитом и графеном составили 12,0 и 16,5 %, соответственно. Небольшую разницу в этих значениях можно объяснить, как указывалось выше, различием в значениях λ для композитов с разными наполнителями в соответствии с моделью работы [12]. Для композита с УНТ порог перколяции составил 0,1 %, т.е. оказался значительно ниже значений, полученных для композитов с графитом и графеном. Отметим, что полученное нами значение хорошо соответствует литературным данным для композитов с УНТ [15, 16]. Столь малое значение порога перколяции очевидно связано со структурными особенностями наполнителя, а именно – очень большим отношением длины УНТ к их поперечному сечению, что приводит к возможности образования сплошного проводящего кластера даже при их малом содержании в композите.

Изучение зависимости сопротивления образцов от растяжения. Далее было исследовано основное функциональное свойство полученных композитов: чувствительность их электрического сопротивления к степени растяжения. Результаты изменения сопротивления композитов при одноосном растяжении в областях деформаций, в которых они обладают проводимостью, представлены на рис. 5. Здесь по оси абсцисс отложено относительное удлинение образца в процентах: $\delta = \Delta L/L_0 \cdot 100\%$ (L_0 – исходная длина образца, ΔL – изменение его длины при растяжении), а по оси ординат – удельное сопротивление образца ρ , нормированное на его значение ρ_0 при отсутствии приложенного напряжения.

Как и ожидалось, чем меньше концентрация наполнителя в матрице, тем при меньшем относительном удлинении образец начинает изменять свое сопротивление. Значительное увеличение концентрации наполнителя приводит к снижению чувствительности композитов к растяжению: для заметного изменения сопротивления такие образцы приходилось растягивать на гораздо большую длину. Такое влияние концентрации наполнителя на чувствительность к растягивающей деформации можно объяснить увеличением расстояния между его частицами, что оказывается равносильным уменьшению концентрации наполнителя в контексте электрической проводимости.

Кроме того, как указывают авторы статьи [17], растяжение композита приводит к изменению значения критического индекса проводимости t , что свидетельствует об изменении размерности структуры, а следовательно, и значения порога перколяции, поскольку последний зависит и от размерности структуры, и от соотношения размеров проводящих и непроводящих частиц (как было указано выше).

Как видно на рис. 5, при минимальной концентрации введенного наполнителя наиболее чувствительным к растяжению оказался композит с графитом (13 %), который начинает резко изменять свое удельное сопротивление уже при растяжении на 2 – 3 %. Изменение удельного сопротивления композита с графеном при его минимальной концентрации (16 %) происходило при относительном удлинении 12 %, а композита с УНТ (0,25 %) – при удлинении более чем 40 %. Кроме того, для композитов с графитом и графеном увеличение концентрации приводит к расширению диапазона прикладываемых напряжений, в котором композит сохраняет свое удельное сопротивление, в то время как для композитов с УНТ этот эффект выражен слабее, что может быть связано с особенностями образованной структуры, например изогнутостью нанотрубок внутри композита [18].

Для композитов различного состава были рассчитаны значения коэффициента тензо-чувствительности:

$$GF = (\Delta\rho_{\max}/\rho_0)/(\Delta L_{\max}/L_0),$$

где ρ_0 , L_0 – удельное сопротивление и длина образца до растяжения; $\Delta\rho_{\max}$, ΔL_{\max} – максимальные значения изменений его сопротивления и длины, соответственно.

Данный коэффициент характеризует чувствительность сопротивления композита к его растяжению и может использоваться для сравнения данных, полученных для различных композитов [19].

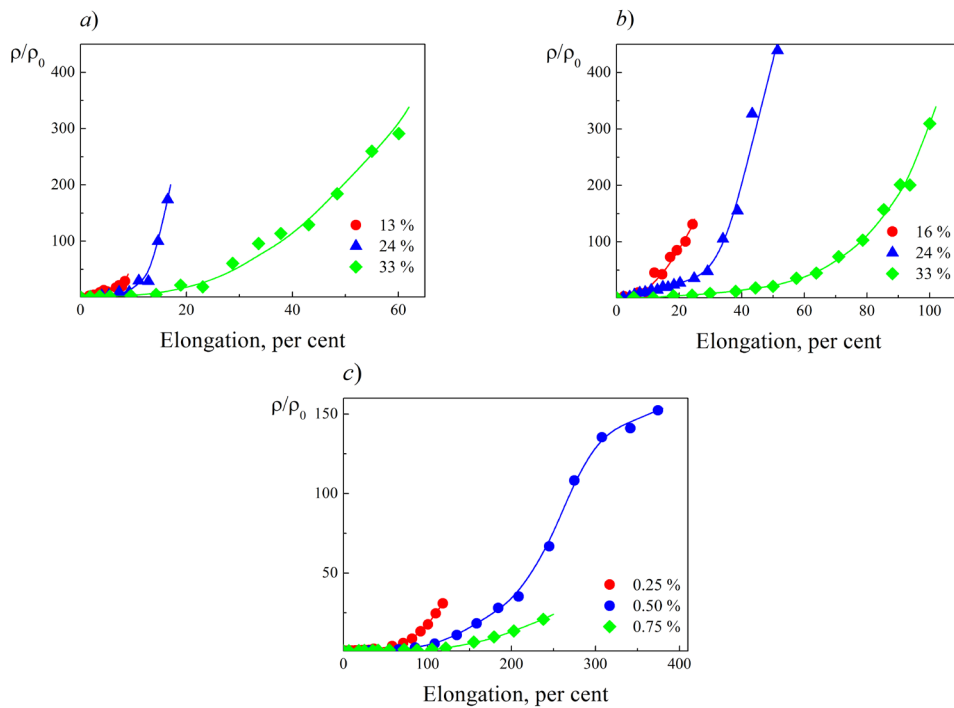


Рис. 5. Изменение нормализованного удельного сопротивления образцов композитов с графитом (а), графеном (b) и УНТ (c) в разной концентрации, при растяжении образцов (удлинение $\delta = \Delta L/L_0$)

Таблица 1

Значения коэффициента тензочувствительности GF для образцов различных композитов, подвергнутых растяжению

Наполнитель	Концентрация, %	Значение GF
Графен	16	534,7
	24	26661,0
	33	340,4
Графит	13	224,3
	24	1005,0
	33	481,9
УНТ	0,25	25,3
	0,50	40,3
	0,75	8,4

В табл. 1 указаны значения коэффициента тензочувствительности для разных типов и концентрации наполнителей. Как видно из приведенных данных, наибольшей чувствительностью к растяжению характеризуются композиты с графеновым наполнителем. При этом для всех типов наполнителя максимальная чувствительность наблюдается для композитов со средними значениями их концентрации (24 % для графена и графита и 0,50 % для УНТ). Анализ данных табл. 1 позволяет заключить, что с увеличением концентрации наполнителя происходит сначала повышение, а затем снижение коэффициента тензочувствительности. Это можно объяснить тем, что увеличение этой концентрации приводит к двум разным эффектам. С одной стороны, расширяется диапазон деформаций, в котором композит сохраняет проводящие свойства (см. рис. 5), что должно приводить к уменьшению значения GF, а с другой – снижается значение GF, а с другой – снижается значение GF, а с другой – снижается значение GF.

ется значение сопротивления композита при отсутствии деформаций (см. рис. 1), что должно приводить к его увеличению. В результате конкуренции этих двух эффектов для каждого типа наполнителя существует оптимальное значение его концентрации, при котором и достигается максимальное значение коэффициента тензочувствительности.

Исследование механических свойств. Для первичной оценки механических свойств синтезированных композитов была выполнена оценка предела их прочности, проанализирован характер деформаций, развивающихся в них при одноосном статическом растяжении, а также изучены их релаксационные свойства.



На первом этапе исследований образцы многократно растягивали с шагом 10 мм вплоть до их разрушения. После каждого шага измерялась длина образца L (через 25 с после снятия напряжения). Полученные результаты представлены в табл. 2, а также на рис. 6, где даны зависимости отношения L/L_0 (L_0 – исходная длина образца) от его относительного удлинения при растяжении.

Таблица 2

Результаты исследования механических свойств образцов полимерных композитов при растяжении

Наполнитель	Концентрация	Область сохранения длины	Предел прочности
		%	
Графен	16	–	565
	24		542
	33		401
Графит	13	–	485
	24		708
	33		380
УНТ	0,25	150	585
	0,50	250	556
	0,75	440	659

Данные табл. 2 говорят о том, что в случае наполнителя из УНТ максимальный предел прочности наблюдается у образца с наибольшей концентрацией наполнителя, в то время как у образца композита с графеном предел прочности последовательно снижается с увеличением концентрации наполнителя. Для композита с графитом предел прочности с увеличением концентрации наполнителя сначала возрастает, а затем довольно резко снижается.

Увеличение концентрации наполнителя в композите с УНТ приводит к расширению диапазона значений растяжений, при которых образец практически полностью возвращается к своей исходной длине (см. рис. 6, *c* и табл. 2). Это свидетельствует о том, что деформации в данных диапазонах растяжений имеют чисто упругий характер, причем увеличение содержания УНТ в композите приводит к улучшению его упругих свойств, т. е. чем больше их концентрация, тем меньше дефектов и деформаций накапливает образец при его одноосном растяжении. Причиной такого улучшения могут быть как трехмерность структуры, образованная введением УНТ в полимерную матрицу, так и свойства отдельных частиц самого наполнителя. Именно благодаря этим особенностям композиты с УНТ можно считать наиболее перспективными для создания устройств гибкой сенсорной электроники. Необратимые деформации в них возникают только после достижения некоторого критического значения растяжения, причем это значение последовательно возрастает с увеличением концентрации наполнителя (см. рис. 6, *c* и данные в табл. 2).

В случае композитов с наполнителями из графита или графена (см. рис. 6, *a, b*) образцы не сохраняли своей исходной длины даже при приложении к ним минимальных напряжений, что свидетельствует о возникновении в них необратимых пластических деформаций (наряду с упругими). Отметим, что в обоих случаях наклон зависимостей на рис. 6 последовательно возрастает с увеличением концентрации наполнителя, что свидетельствует о повышении доли необратимых деформаций, т.е. возникновении эффекта их накопления при многократном растяжении образца. При этом для различных типов наполнителей в реакции композитов на многократные растяжения наблюдается два различия.

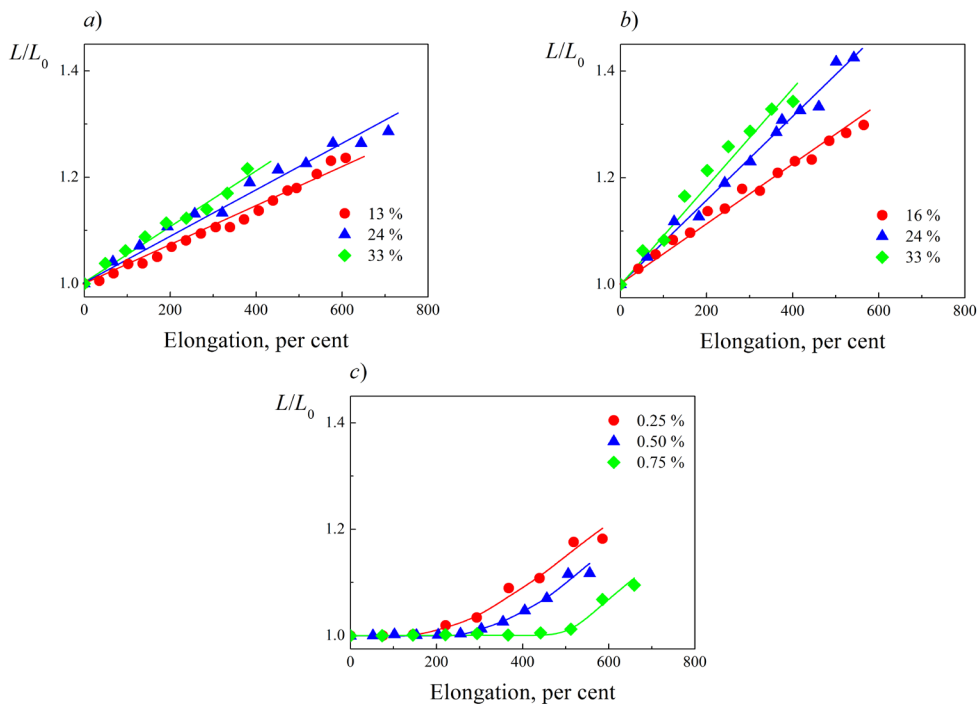


Рис. 6. Зависимости относительного удлинения L/L_0 образцов композитов с графитом (а), графеном (b) и УНТ (c) в разной концентрации, от степени их растяжения $\delta = \Delta L/L_0$ (измерения проводились через 25 с после каждого снятия напряжения)

Во-первых, при одинаковых (или близких) концентрациях наполнителей наклон кривых на рис. 6, относящихся к композитам с графеном, значительно больше, чем для композитов с графитом. Это свидетельствует о том, что доля необратимых деформаций в первом случае выше, чем во втором. Во-вторых, для композитов с графеном наблюдается более сильное увеличение этого наклона с ростом концентрации наполнителя, т.е. эффект накопления необратимых деформаций в данном типе композитов проявляется сильнее.

Результаты исследования релаксационных свойств синтезированных композитов (для случаев с наполнителями из УНТ и графена) после деформации в 400 % приведены на рис. 7. Видно, что в случае УНТ образцы, которые через 25 с после снятия напряжения не возвращались к своей исходной длине (при концентрации наполнителя 0,25 и 0,50 %), в течение 60 – 80 с практически полностью релаксируют (см. рис. 7, а). В отличие от этого, композиты с графеном не возвращаются к своей исходной длине (см. рис. 7, b) даже спустя 2 – 3 мин после снятия нагрузки. Такой результат может быть связан с образованием при растяжении заторов из плоских частиц наполнителя внутри полимерных матриц. При

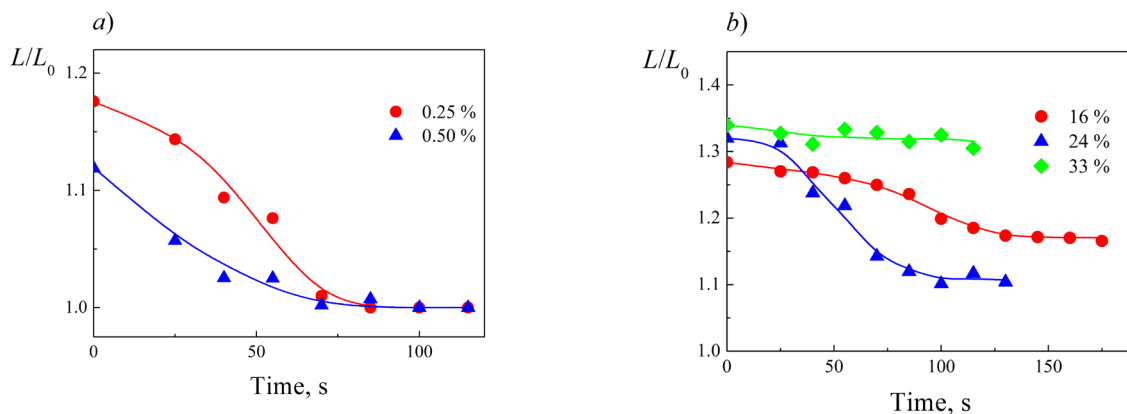


Рис. 7. Временная динамика относительного удлинения образцов композитов с УНТ (a) и графеном (b) в разной концентрации после снятия напряжения



этом образец с 33 %-м содержанием графена практически вообще не релаксирует, образец с концентрацией 16 % релаксирует, но довольно слабо, тогда как образец с 24 %-м содержанием графена проявляет наилучшие релаксационные свойства, как по времени, так и по степени релаксации.

Таким образом, значение концентрации наполнителя 24 % является для данного материала близким к критическому: по его достижению улучшение механических свойств композита сменяется их ухудшением. Отметим, что этот результат косвенно соответствует данным, полученным в работе [20] при анализе свойств композитов на основе поливинилацетата с графеновым наполнителем. Авторы [20] исследовали образцы в более узком, чем у нас, диапазоне концентрации графена (до ее возможного критического значения), но обнаружили, что ее последовательное увеличение сначала приводит к сильному улучшению механических свойств композита, но затем это улучшение замедляется.

Заключение

В данной работе проведено исследование электрических и механических свойств композитов на основе бутадиен-стирольного каучука (SBR) с углеродными наполнителями трех различных типов (графит, графен и углеродные нанотрубки (УНТ)) при варьировании их процентного содержания. На основании анализа зависимостей удельного сопротивления композитов от концентрации наполнителей была определена размерность образовавшихся при синтезе частиц наполнителей, которая во всех случаях оказалась близкой к трехмерной, а также значения порогов перколяции, которые составили 0,1 % для композита с УНТ, 12,0 % для композита с графитом и 16,5 % для композита с графеном.

Обнаружено, что увеличение концентрации всех наполнителей в матрице SBR приводит к расширению диапазона значений приложенного одноосного напряжения, в котором композит незначительно изменяет свое удельное сопротивление, однако в случае композита с УНТ этот эффект выражен слабее, чем для композитов с графитом и графеном. При этом последовательное увеличение концентрации всех наполнителей в матрице SBR приводит сначала к повышению чувствительности сопротивления композитов к растяжению, а затем к ее снижению. В результате наибольшая чувствительность наблюдается у композитов, содержащих около 24 % наполнителя графита либо графена и 0,5 % у композитов с УНТ. Наибольшая чувствительность сопротивления к деформации характерна для композита с 24 % графена в качестве наполнителя; значение коэффициента тензочувствительности GF у него достигает 2661, что связано с довольно высокой проводимостью данного композита в недеформированном состоянии и узким диапазоном напряжений, в котором он сохраняет свое сопротивление.

Исследования механических свойств полученных композитов показали, что с увеличением концентрации наполнителя предел прочности у композитов с графеном снижается, у композитов с УНТ возрастает, а у композитов с графитом сначала возрастает, а затем резко снижается. Кроме того, увеличение концентрации УНТ в композите приводит к расширению диапазона степени одноосного растяжения, в котором деформации имеют упругий характер, в то время как в композитах с графеном и графитом при приложении даже минимальных напряжений возникают и пластические деформации, доля которых при многократном растяжении образцов повышается с увеличением концентрации введенных наполнителей, причем в случае графена это повышение более значительное, чем в случае графита. Композиты с графеном демонстрируют максимальные значения коэффициента тензочувствительности, а композиты с УНТ – наилучшие релаксационные свойства.

Таким образом, проведенные исследования и анализ их результатов показывают, что в контексте чувствительности сопротивления к деформации наиболее перспективным материалом для дальнейшей разработки устройств гибкой сенсорной электроники являются композиты с графеном, в то время как в контексте механических свойств наилучшими характеристиками обладают композиты с УНТ. Для одновременной оптимизации по критериям как электрических, так и механических свойств полимерных композитов на основе углеродных наполнителей необходимо проведение дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bonato P.** Advances in wearable technology and applications in physical medicine and rehabilitation // *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. 2005. Vol. 2. No. 1. P. 2 (4 p.).
2. **Arogam G., Manivannan N., Harrison D.** Review on wearable technology sensors used in consumer sport applications // *Sensors*. 2019. Vol. 19. No. 9. P. 1983.
3. **Wilson S., Laing R.** Wearable technology: Present and future // *Integrating Design with Sustainable Technology: Proceeding of the 91st World Conference of the Textile Institute*, Vol. 1. Manchester: Textile Institute Press, 2018. P. 266–280.
4. **Ma L., Lu W.** Carbon nanotube film based flexible bi-directional strain sensor for large deformation // *Materials Letters*. 2020. Vol. 260. 1 February. P. 126959.
5. **Ren J., Wang C., Zhang X., Carey T., Chen K., Yin Y., Torrisi F.** Environmentally-friendly conductive cotton fabric as flexible strain sensor based on hot press reduced graphene oxide // *Carbon*. 2017. Vol. 111. January. Pp. 622–630.
6. **Takei K., Takahashi T., Ho J. C., Ko H., Gillies A. G., Leu P. W., Fearing R. S., Javey A.** Nanowire active-matrix circuitry for low-voltage macroscale artificial skin // *Nature Materials*. 2010. Vol. 9. No. 10. Pp. 821–826.
7. **Xia Y., Zhang Q., Wu X. E., Kirk T. V., Chen X. D.** Practical and durable flexible strain sensors based on conductive carbon black and silicone blends for large scale motion monitoring applications // *Sensors*. 2019. Vol. 19. No. 20. P. 4553.
8. **Shi G., Zhao Z., Pai J. H., Lee I., Zhang L., Stevenson C., Ishara K., Zhang R., Zhu H., Ma J.** Highly sensitive, wearable, durable strain sensors and stretchable conductors using graphene/silicon rubber composites // *Advanced Functional Materials*. 2016. Vol. 26. No. 42. Pp. 7614–7625.
9. **Dalmas F., Dendievel R., Chazeau L., Cavaille J.-Y., Gauthier C.** Carbon nanotube-filled polymer composites. Numerical simulation of electrical conductivity in three-dimensional entangled fibrous networks // *Acta Materialia*. 2006. Vol. 54. No. 11. Pp. 2923–2931.
10. **Hu N., Karube Y., Arai M., Watanabe T., Yan C., Li Y., Liu Y., Fukunaga H.** Investigation on sensitivity of a polymer/carbon nanotube composite strain sensor // *Carbon*. 2010. Vol. 48. No. 3. Pp. 680–687.
11. **Fang C., Zhang J., Chen X., Wen G. J.** Calculating the electrical conductivity of graphene nanoplatelet polymer composites by a Monte Carlo method // *Nanomaterials*. 2020. Vol. 10. No. 6. P. 1129.
12. **He D., Ekere N. N.** Effect of particle size ratio on the conducting percolation threshold of granular conductive-insulating composites // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2004. Vol. 37. No. 13. P. 1848.
13. **Mora A., Verma P., Kumar S.** Electrical conductivity of CNT/polymer composites: 3D printing, measurements and modeling // *Composites. Part B: Engineering*. 2020. Vol. 183. 15 February. P. 107600.
14. **Kilbride B. E., Coleman J. N., Fraysse J., Fournet P., Cadek M., Drury F., Hatzler S. B., Roth S., Blau W. J.** Experimental observation of scaling laws for alternating current and direct current conductivity in polymer-carbon nanotube composite thin films // *Journal of Applied Physics*. 2022. Vol. 92. No. 7. Pp. 4024–4030.
15. **Березкин В. И., Попов В. В.** Перколяционный переход в углеродном композите на основе фуллеренов и терморасширенного графита // *Физика твердого тела*. 2018. Т. 60. № 1. С. 202–206.
16. **Spitalsky Z., Tasis D., Papagelis K., Galiotis C.** Carbon nanotube–polymer composites: Chemistry, processing, mechanical and electrical properties // *Progress in Polymer Science*. 2010. Vol. 35. No. 3. Pp. 357–401.
17. **Chen Y., Li Y., Xu D., Zhai W.** Fabrication of stretchable, flexible conductive thermoplastic polyurethane/graphene composites via foaming // *RSC Advances*. 2015. Vol. 5. No. 100. Pp. 82034–82041.
18. **Hu N., Masuda Z., Yan C., Yamamoto G., Fukunaga H., Hashida T.** The electrical properties of polymer nanocomposites with carbon nanotube fillers // *Nanotechnology*. 2008. Vol. 19. No. 21. P. 215701.



19. **Yang H., Yao X. F., Zheng Z., Gong L. H., Yuan L., Yuan Y. N., Liu Y. H.** Highly sensitive and stretchable graphene-silicone rubber composites for strain sensing // *Composite Science and Technology*. 2018. Vol. 167. 20 October. Pp. 371–377.

20. **Zhao X., Zhang Q., Chen D.** Enhanced mechanical properties of graphene-based poly (vinyl alcohol) composites // *Macromolecules*. 2010. Vol. 43. No. 3. Pp. 2357–2363.

REFERENCES

1. **Bonato P.**, Advances in wearable technology and applications in physical medicine and rehabilitation, *J. NeuroEng. Rehabil.* 2 (1) (2005) 2.

2. **Aroganam G., Manivannan N., Harrison D.**, Review on wearable technology sensors used in consumer sport applications, *Sensors*. 19 (9) (2019) 1983.

3. **Wilson S., Laing R.**, Wearable technology: Present and future, In book: "Integrating Design with Sustainable Technology". Proc. 91st World Conf. of the Textile Institute, Vol. 1. Manchester: Textile Institute Press (2018) 266–280.

4. **Ma L., Lu W.**, Carbon nanotube film based flexible bi-directional strain sensor for large deformation, *Mater. Lett.* 260 (1 Febr) (2020) 126959.

5. **Ren J., Wang C., Zhang X., et al.**, Environmentally-friendly conductive cotton fabric as flexible strain sensor based on hot press reduced graphene oxide, *Carbon*. 111 (Jan) (2017) 622–630.

6. **Takei K., Takahashi T., Ho J. C., et al.**, Nanowire active-matrix circuitry for low-voltage macroscale artificial skin, *Nat. Mater.* 9 (10) (2010) 821–826.

7. **Xia Y., Zhang Q., Wu X. E., et al.**, Practical and durable flexible strain sensors based on conductive carbon black and silicone blends for large scale motion monitoring applications, *Sensors*. 19 (20) (2019) 4553.

8. **Shi G., Zhao Z., Pai J. H., et al.**, Highly sensitive, wearable, durable strain sensors and stretchable conductors using graphene/silicon rubber composites, *Adv. Func. Mater.* 26 (42) (2016) 7614–7625.

9. **Dalmas F., Dendievel R., Chazeau L., et al.**, Carbon nanotube-filled polymer composites. Numerical simulation of electrical conductivity in three-dimensional entangled fibrous networks, *Acta Mater.* 54 (11) (2006) 2923–2931.

10. **Hu N., Karube Y., Arai M., et al.**, Investigation on sensitivity of a polymer/carbon nanotube composite strain sensor, *Carbon*. 48 (3) (2010) 680–687.

11. **Fang C., Zhang J., Chen X., Wen G. J.**, Calculating the electrical conductivity of graphene nanoplatelet polymer composites by a Monte Carlo method, *Nanomaterials*. 10 (6) (2020) 1129.

12. **He D., Ekere N. N.**, Effect of particle size ratio on the conducting percolation threshold of granular conductive-insulating composites, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 37 (13) (2004) 1848.

13. **Mora A., Verma P., Kumar S.**, Electrical conductivity of CNT/polymer composites: 3D printing, measurements and modeling // *Compos. B. Eng.* 183 (15 Febr) (2020) 107600.

14. **Kilbride B. E., Coleman J. N., Fraysse J., et al.**, Experimental observation of scaling laws for alternating current and direct current conductivity in polymer-carbon nanotube composite thin films, *J. Appl. Phys.* 92 (7) (2022) 4024–4030.

15. **Berezkin V. I., Popov V. V.**, Percolation transition in carbon composite on the basis of fullerenes and exfoliated graphite, *Phys. Solid State*. 60 (1) (2018) 207–211.

16. **Spitalsky Z., Tasis D., Papagelis K., Galiotis C.**, Carbon nanotube-polymer composites: Chemistry, processing, mechanical and electrical properties, *Prog. Polym. Sci.* 35 (3) (2010) 357–401.

17. **Chen Y., Li Y., Xu D., Zhai W.**, Fabrication of stretchable, flexible conductive thermoplastic polyurethane/graphene composites via foaming, *RSC Adv.* 5 (100) (2015) 82034–82041.

18. **Hu N., Masuda Z., Yan C., et al.**, The electrical properties of polymer nanocomposites with carbon nanotube fillers, *Nanotechnology*. 19 (21) (2008) 215701.

19. **Yang H., Yao X., Zheng Z., et al.**, Highly sensitive and stretchable graphene-silicone rubber composites for strain sensing, *Compos. Sci. Technol.* 167 (20 Oct) (2018) 371–378.

20. **Zhao X., Zhang Q., Chen D.**, Enhanced mechanical properties of graphene-based poly (vinyl alcohol) composites, *Macromolecules*. 43 (3) (2010) 2357–2363.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ТОНКОВ Дмитрий Николаевич – старший преподаватель кафедры физики Института физики и математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
wtk_dima@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1528-669X

КОБЫЛЯЦКАЯ Мария Игоревна – аспирантка Высшей школы физики и технологий материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
koby-masha@yandex.ru
ORCID: 0009-0004-3109-2830

ВАСИЛЬЕВА Екатерина Сергеевна – кандидат технических наук, доцент Высшей школы физики и технологий материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vasilyeva_es@spbstu.ru
ORCID: 0009-0008-2967-8487

ГАСУМЯНЦ Виталий Эдуардович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого; профессор кафедры физической электроники Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vgasum@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-5306-6738

ТОЛОЧКО Олег Викторович – доктор технических наук, профессор Высшей школы физики и технологий материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого; профессор кафедры материаловедения и технологии материалов Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
ol_tol@hotmail.com
ORCID: 0000-0001-9623-4001

THE AUTHORS

TONKOV Dmitry N.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
wtk_dima@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1528-669X

KOBYLYATSKAYA Mariya I.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
koby-masha@yandex.ru
ORCID: 0009-0004-3109-2830

VASILYEVA Ekaterina S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
vasilyeva_es@spbstu.ru
ORCID: 0009-0008-2967-8487

GASUMYANTS Vitaliy E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University;
Herzen State Pedagogical University of Russia
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
vgasum@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-5306-6738

TOLOCHKO Oleg V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University;
State Marine Technical University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
ol_tol@hotmail.com
ORCID: 0000-0001-9623-4001

Статья поступила в редакцию 05.04.2025. Одобрена после рецензирования 14.04.2025.
Принята 14.04.2025.
Received 05.04.2025. Approved after reviewing 14.04.2025. Accepted 14.04.2025.

Ядерная физика

Научная статья
УДК 539.125.4, 539.126.3
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18307>

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ РОЖДЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ АДРОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР ВИСМУТА ПРИ ЭНЕРГИИ 9,2 ГэВ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ BLAST-WAVE

Д. М. Ларионова [✉], **Я. А. Бердников**, **Д. О. Котов**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
[✉] dashalario@gmail.com

Аннотация. В работе представлены инвариантные спектры по поперечной массе для заряженных адронов в столкновениях ядер висмута ($Bi + Bi$) при энергии 9,2 ГэВ, полученные путем моделирования с использованием гибридного генератора UrQMD и пакета MPDroot. Проведен анализ спектров в рамках статистической и Blast-Wave моделей, в результате которого получены значения температуры и барионных химических потенциалов, соответствующих стадиям кинетического и химического вымораживания в столкновениях $Bi + Bi$. Полученные результаты рассмотрены в контексте фазовой диаграммы ядерной материи.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, заряженные адроны, MPD, NICA, фазовая диаграмма; ядерная материя

Финансирование: Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009).

Для цитирования: Ларионова Д. М., Бердников Я. А., Котов Д. О. Анализ особенностей рождения заряженных адронов в столкновениях ядер висмута при энергии 9,2 ГэВ с помощью модели Blast-Wave // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 82–90. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18307>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18307>

AN ANALYSIS OF THE FEATURES OF CHARGED HADRON PRODUCTION IN COLLISIONS OF BISMUTH NUCLEI AT AN ENERGY OF 9.2 GeV USING THE BLAST-WAVE MODEL

D. M. Larionova [✉], **Ya. A. Berdnikov**, **D.O. Kotov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

[✉] dlar@bk.ru

Abstract. The paper presents charged hadron invariant spectra obtained in $Bi+Bi$ collisions at an energy of 9.2 GeV on the basis of simulation performed using the UrQMD hybrid generator and the MPDroot package. The spectra were analyzed in the framework of statistical and Blast-Wave models, resulting in the values of temperatures and baryonic chemical potentials corresponding to the stages of kinetic and chemical freeze-out in $Bi+Bi$ collisions. The results were discussed in the context of the phase diagram of nuclear matter.



Keywords: quark-gluon plasma, charged hadrons, MPD, NICA, phase diagram, nuclear matter

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment for Fundamental Research (Subject Code FSEG-2025-0009).

For citation: Larionova D. M., Berdnikov Ya. A., Kotov D. O., An analysis of the features of charged hadron production in collisions of bismuth nuclei at an energy of 9.2 GeV using the Blast-Wave model, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 82–90. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18307>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Многоцелевой детектор (*англ.* Multi-Purpose Detector (MPD)) [1] является одной из двух экспериментальных установок, расположенных на коллайдере NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility) [2], – флагманском проекте Объединенного института ядерных исследований (институт находится в наукограде Дубна Московской области, Россия; для краткости применяется термин «эксперимент MPD»).

Основные задачи эксперимента MPD заключаются в исследовании границы фазового перехода и поиске критической точки на фазовой диаграмме ядерной материи путем изучения особенностей рождения частиц в столкновениях тяжелых ядер в диапазоне энергий $\sqrt{s_{NN}}$ от 4 до 11 ГэВ [3].

Фазовая граница ядерной материи определяет переход адронной материи в состояние кварк-глюонной плазмы (КГП) [4, 5] при повышении температуры T и/или барионного химического потенциала μ_B . Формирование КГП и соответствующий фазовый переход в ядро-ядерных столкновениях были экспериментально подтверждены при энергиях, превышающих 100 ГэВ [4 – 6], что соответствует температурам около 200 МэВ и значениям $\mu_B \approx 10$ МэВ, достигаемым в столкновении. Тем не менее, изучение остальной части фазовой диаграммы и поиск признаков КГП в ядро-ядерных столкновениях при более низких энергиях (менее и порядка 100 ГэВ) остаются важными и актуальными задачами.

Для выявления потенциальных признаков фазового перехода в ядро-ядерных столкновениях при энергиях NICA необходимо определить доступную область параметров температуры T и барионного химического потенциала μ_B . Оценку значений T и μ_B можно провести путем анализа особенностей рождения заряженных адронов с использованием статистической модели и модели Blast-Wave (ударной волны) [7, 8], основанной на подходе релятивистской гидродинамики.

В настоящей работе представлены инвариантные спектры по поперечной массе m_T , измеренные для заряженных адронов (π^\pm , K^\pm , p , \bar{p}) в столкновениях ядер висмута ($\text{Bi} + \text{Bi}$) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2$ ГэВ; эти результаты получены на основе данных моделирования с использованием гибридного генератора UrQMD [9] и пакета MPDroot [1], который воспроизводит работу детекторной системы эксперимента MPD.

Проведен анализ полученных спектров в рамках статистической модели и модели Blast-Wave. Полученные результаты рассмотрены в контексте фазовой диаграммы ядерной материи.

Эволюция ядро-ядерных столкновений

Процесс эволюции релятивистских столкновений можно разделить на четыре основные стадии:

- начальная стадия,
- термализация и коллективное расширение,
- химическое вымораживание,
- кинетическое вымораживание [10].

Начальная стадия соответствует первичному взаимодействию сталкивающихся ядер,

которое сопровождается обменом глюонами и кварками. Этот процесс приводит к быстрому нагреву системы и возможному образованию КГП (если достигаются значения T_{QGP} и μ_B , необходимые для фазового перехода).

Вторая стадия. В результате последующих взаимодействий между частицами система термализуется, после чего начинается ее коллективное расширение.

Третья стадия. Когда система частиц расширяется до состояния, при котором прекращаются неупругие реакции, изменяющие ее состав, и устанавливаются окончательные относительные количества различных частиц, происходит химическое вымораживание.

Согласно статистической модели, после наступления химического вымораживания отношение выходов антипротонов к выходам протонов определяется величиной барионного химического потенциала μ_B [11]:

$$\frac{\bar{p}}{p} = \exp\left(-\frac{2\mu}{T}\right) \Leftrightarrow \mu = T \cdot \frac{\ln(\bar{p}/p)}{2} \Leftrightarrow T = -\frac{2\mu}{\ln(\bar{p}/p)}. \quad (1)$$

Четвертая стадия. После наступления химического вымораживания система частиц продолжает расширяться и охлаждаться. Когда длина свободного пробега частиц становится больше размеров системы, упругие столкновения прекращаются, фиксируя импульсное распределение частиц, что соответствует наступлению кинетического вымораживания.

Для изучения характеристик кинетического вымораживания используются феноменологические модели, такие как Blast-Wave [7, 8]. Эта модель основана на релятивистском гидродинамическом подходе и описывает коллективное движение частиц в расширяющейся системе.

Модель Blast-Wave. Она основана на том, что разогретая материя обладает высокой температурой, распределенной неравномерно: в центре системы частиц температура выше, чем на ее периферии, что создает градиент давления. Согласно уравнениям гидродинамики, материя из центра устремляется наружу, формируя ударную волну.

Согласно модели Blast-Wave, все адроны формируются из кварков и глюонов одновременно, вследствие чего приобретают одинаковую среднюю скорость радиального расширения. При этом расширение адронной системы описывается в терминах релятивистской гидродинамики.

В рамках модели Blast-Wave инвариантные спектры частиц по поперечной массе $m_T = \sqrt{p_T^2 + m_0^2}$ можно описать следующей формулой:

$$\frac{dN}{m_T dm_T} = C \int^R r dr m_T I_0\left(\frac{p_T \sinh \rho}{T_0}\right) K_1\left(\frac{p_T \cosh \rho}{T_0}\right), \quad (2)$$

где C – нормировочная константа; T_0 – температура кинетического вымораживания; R – максимальный радиус расширяющейся системы во время стадии «вымораживания»; I_0, K_1 – модифицированные функции Бесселя; $\rho(r)$ – поперечное ускорение, зависящее от координаты частицы,

$$\rho(r) = \tanh^{-1}(\beta_T) \cdot r / R$$

(β_T – средняя скорость радиального потока частиц); C, β_T, T_0 – это свободные параметры модели.

Методика измерений

В данной работе использованы данные моделирования 15 млн. столкновений $V_i + V_i$ при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2$ ГэВ; данные получены с помощью пакета `MPDroot` [1]. Последний использует гибридный генератор событий `UrQMD` [9], включающий в себя гидродинамический подход; кроме того, `MPDroot` позволяет воспроизводить отклик детекторных подсистем эксперимента `MPD` с помощью пакета `Geant4` [12, 13].

Идентификация заряженных адронов в `MPD` осуществляется путем анализа: во-первых, – потерь энергии частицами, измеренных во время проекционной камеры, во-вторых, – измеренного времени пролета частиц во время пролетной камеры. С деталями моделирования и процедурой идентификации частиц можно ознакомиться в работах [3, 14].

Результаты анализа особенностей рождения заряженных адронов

Определение параметров кинетического вымораживания. На рис. 1 представлены инвариантные спектры по поперечной массе m_T , измеренные для заряженных адронов в различных центральностях столкновений Вi+Вi при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2$ ГэВ. Линии обозначают аппроксимацию полученных спектров соответствующей функцией модели Blast-Wave (см. ф-лу (2)).

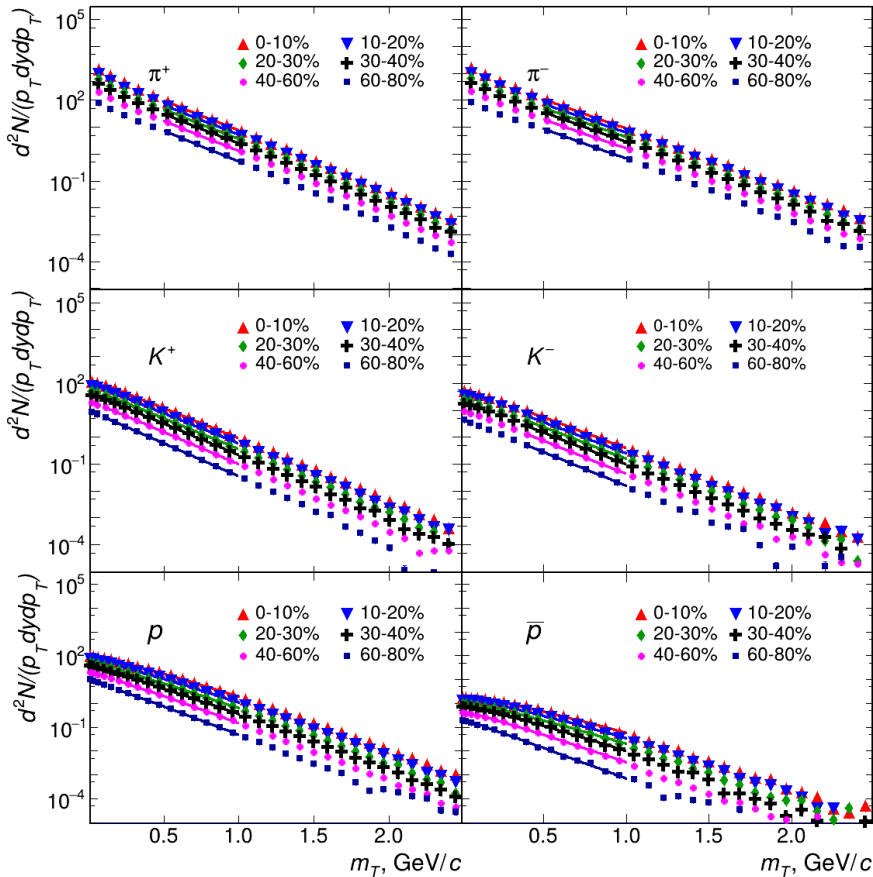


Рис. 1. Инвариантные спектры по поперечной массе, измеренные для частиц π^\pm , K^\pm , p , \bar{p} в различных центральностях столкновений Вi + Вi при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2$ ГэВ. Аппроксимации спектров соответствующей функцией модели Blast-Wave (см. ф-лу (2)) показаны прямыми отрезками

Аппроксимация инвариантных m_T -спектров различных частиц функцией Blast-Wave проводилась в следующих диапазонах.

Тип заряженного адрона	Диапазон аппроксимации, ГэВ
π^+ , π^-	0,50 – 1,00
K^+ , \bar{p}	0,12 – 1,00
K^-	0,40 – 1,00
p	0,20 – 1,00

Выбор диапазонов аппроксимации диктовался достижением наилучшего согласия с данными моделирования. Установлено, что отличие значений данных моделирования от функции Blast-Wave не превышало 1%.

Поскольку функция Blast-Wave является интегральной, свободные параметры аппроксимации (C , T_0 , β_T) чувствительны к изменению диапазона аппроксимации, выбору начальных значений параметров и наложенных ограничений на значения параметров.

Влияние этих факторов было учтено путем оценки систематических неопределенностей.

Для указанной оценки условия аппроксимации, указанные ниже, варьировались на $\pm 10\%$. Это были следующие условия:

- границы диапазонов;
- начальные значения параметров;
- ограничения значений параметров.

Итоговые значения систематических неопределенностей определяли среднеквадратичной суммой процентных различий между итоговыми значениями параметров и полученными при разных условиях аппроксимации.

На рис. 2 представлены итоговые значения параметров T_0 и β_T , полученные с помощью аппроксимации функцией Blast-Wave инвариантных различных типов заряженных адронов (π^\pm , K^\pm , p , \bar{p}) в зависимости от центральности столкновений $Vi + Vi$. Систематические погрешности представлены прямоугольниками.

Получено, что значения температуры кинетического вымораживания T_0 не проявляют существенных зависимостей ни от центральности столкновения, ни от типа заряженных адронов. Среднее значение температуры кинетического вымораживания $T_0 = 109$ МэВ (обозначено на рис. 2, *a* пунктирной красной линией).

Средние скорости радиального расширения частиц β_T демонстрируют тенденцию к убыванию с уменьшением области перекрытия сталкивающихся ядер (это соответствует увеличению значений центральности в процентах). Тем не менее, уменьшение значений β_T в периферических столкновениях, по сравнению с центральными, не является значимым с учетом систематических погрешностей.

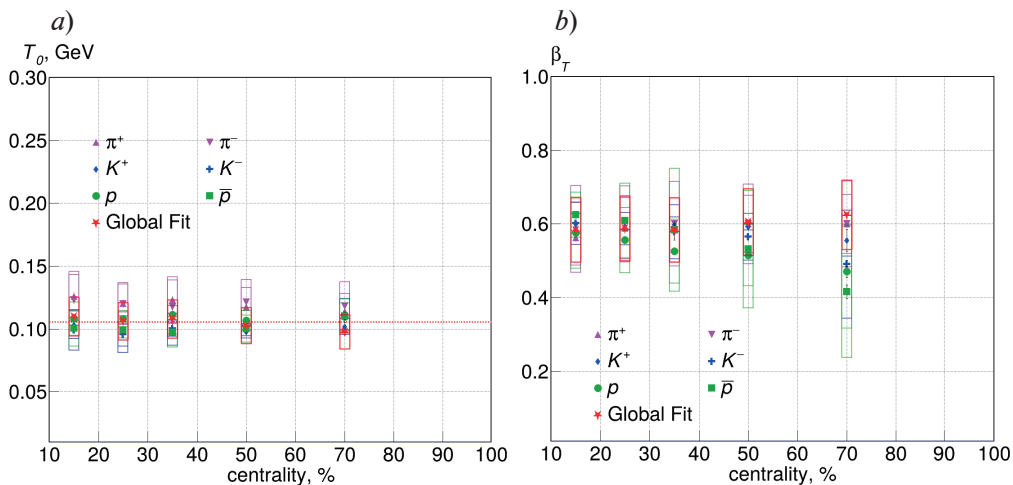


Рис. 2. Значения температуры кинетического вымораживания T_0 (*a*) и средних скоростей радиального расширения системы частиц β_T (*b*) в зависимости от центральности ($Vi + Vi$)-столкновений. Прямоугольники показывают статистические погрешности определения значений T_0 и β_T . Среднее значение $T_0 = 109$ МэВ (горизонтальная пунктирная красная линия)

Определение параметров фазового перехода. Проведена оценка значения барионного химического потенциала и температуры, соответствующих фазовому переходу, путем вычисления отношений выходов антипротонов к выходам протонов (\bar{p}/p).

Значения \bar{p}/p , измеренные в различных центральностях ($Vi + Vi$)-столкновений, представлены на рис. 3, *a*. Видно, что они не проявляют значимой зависимости от центральности столкновений и поперечного импульса p_T . Среднее значение отношения $\bar{p}/p = 0,025$ (обозначено горизонтальным красным пунктиром) и было использовано для дальнейших вычислений.

Согласно расчетам в рамках квантовой хромодинамики, границу фазового перехода можно выразить следующей формулой [15]:

$$T_{\text{QGP}} = \frac{\sqrt{3/34}}{\pi} \sqrt{\sqrt{340\pi^2(220)^4 + 55\mu^4} - 15\mu^2}. \quad (3)$$

В то же время барионный химический потенциал μ можно выразить через температуру и отношение \bar{p}/p формулой (1). Таким образом, температуру и барионный химический потенциал, соответствующие фазовому переходу, можно найти как точку пересечения кривой, выраженной формулой (3), и прямой, задаваемой уравнением (1).

Получены следующие значения T_{QGP} и μ_B , соответствующие фазовому переходу в столкновениях $\text{Bi} + \text{Bi}$ при энергиях коллайдера NICA:

$$T_{\text{QGP}} = 131 \text{ МэВ}, \mu_B = 247 \text{ МэВ}.$$

Визуализация полученных результатов на диаграмме фазовой материи. На рис. 3, *b* представлена фазовая диаграмма ядерной материи. Красной линией обозначена фазовая граница, вычисленная по формуле (3). Линии соответствуют значениям температуры, выраженным через барионный химический потенциал и найденное значение $\bar{p}/p = 0,025$ (см. ф-лу (2)). Фиолетовая прямая на рис. 3, *b* выражает зависимость $T(\mu_B, \bar{p}/p)$, полученную с использованием значения $\bar{p}/p = 0,025$, соответствующего столкновениям $\text{Bi} + \text{Bi}$ при $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 9,2 \text{ ГэВ}$.

С использованием формулы (2) дополнительно было вычислено значение барионного химического потенциала μ_B , соответствующего температуре кинетического вымораживания в столкновениях $\text{Bi} + \text{Bi}$ при $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 9,2 \text{ ГэВ}$ (температура определена ранее с помощью модели Blast-Wave). Найденное значение $\mu_B = 205 \text{ МэВ}$.

Для сравнения приведены значения температуры кинетического вымораживания и фазового перехода, соответствующие энергии эксперимента PHENIX ($\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200 \text{ ГэВ}$). Зависимость $T(\mu_B, \bar{p}/p)$ в виде прямой (показана на рис. 3, *b* черным цветом) получена с учетом значения $\bar{p}/p = 0,79$, измеренного в эксперименте PHENIX при $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200 \text{ ГэВ}$.

Синие точки на рис. 3, *b* отмечают значения температуры и барионного химического потенциала системы частиц при столкновении на этапе кинетического вымораживания, а красные — они же, но на этапе фазового перехода.

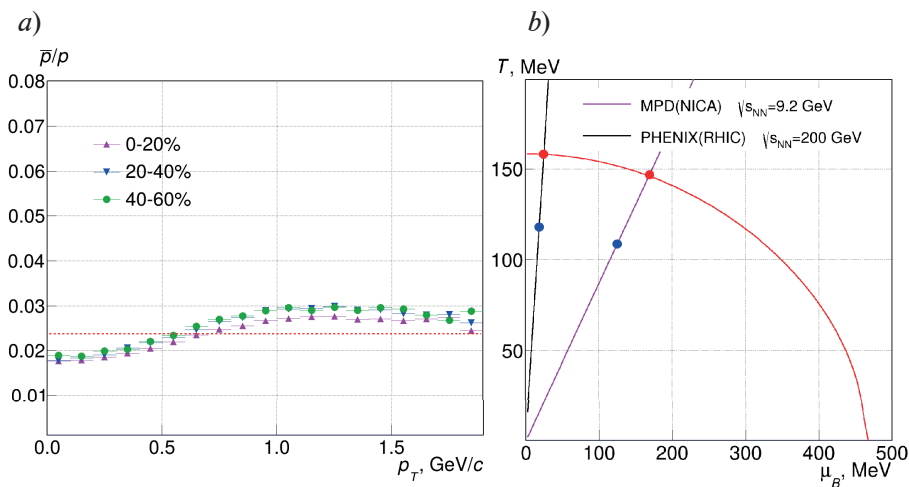


Рис. 3. Зависимости отношения выходов антипротонов к выходам протонов \bar{p}/p от поперечного импульса, измеренные в различных диапазонах центральности (%) столкновений $\text{Bi} + \text{Bi}$ при энергии $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 9,2 \text{ ГэВ}$ (*a*), и соответствующая фазовая диаграмма ядерной материи (зависимость температуры от барионного химического потенциала) (*b*)

Заключение

В работе представлены спектры по поперечной массе заряженных адронов $\pi^\pm, K^\pm, p, \bar{p}$, полученные с помощью моделирования столкновений $\text{Bi} + \text{Bi}$ при энергии $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 9,2 \text{ ГэВ}$ с использованием гибридного генератора UrQMD и пакета MPDroot.

В результате анализа полученных спектров заряженных адронов в рамках модели Blast-Wave были найдены значения температуры кинетического вымораживания T_0 и средней скорости радиального расширения системы частиц β_T в зависимости от центральности столкновений.

Вычисление отношений выходов антипротонов к выходам протонов позволило определить значения температур T_0 и T_{QGP} , а также барионного химического потенциала μ_B , соответствующих фазе кинетического вымораживания и фазового перехода. Были получены следующие значения параметров:

$$T_0 \approx 109 \text{ МэВ}, \mu_B \approx 205 \text{ МэВ} \text{ при кинетическом вымораживании};$$

$$T_{\text{QGP}}^p \approx 131 \text{ МэВ}, \mu_B \approx 247 \text{ МэВ} \text{ при фазовом переходе}.$$

Представленные результаты позволяют оценить доступную область параметров температуры T и барионного химического потенциала μ_B , что важно для потенциальных признаков фазового перехода в ядро-ядерных столкновениях при энергиях NICA.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abraamyan Kh. U., Afanasyev S. V., Alfeev V. S., et al.** (MPD Collaboration). The MPD detector at the NICA heavy-ion collider at JINR // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Sec. A. 2011. Vol. 628. No. 1. Pp. 99–102.
2. **Kekelidze V. D., Lednicky R., Matveev V. A., Meshkov I. N., Sorin A. S., Trubnikov G. V.** Three stages of the NICA accelerator complex // The European Physical Journal A. 2016. Vol. 52. No. 8. P. 211.
3. **Abgaryan V., Acevedo Kado R., Afanasyev S. V., et al.** (MPD Collaboration). Status and initial physics performance studies of the MPD experiment at NICA // The European Physical Journal A. 2022. Vol. 58. No. 7. P. 140.
4. **Adcox K., Adler S. S., Afanasyev S., et al.** (PHENIX Collaboration). Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.
5. **Rafelski J.** Melting hadrons, boiling quarks // The European Physical Journal A. 2015. Vol. 51. No. 9. P. 114.
6. **Adams J., Aggarwal M. M., Ahammed Z., et al.** (STAR Collaboration). Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 102–183.
7. **Schnedermann E., Sollfrank J., Heinz U. W.** Fireball spectra (Chapter) // Gutbrod H. H., Rafelski J. (Eds). Particle production in highly excited matter. NATO Science Book Series B: Physics. Vol. 303. Boston, MA, USA: Springer, 1993. Pp. 175–206.
8. **Schnedermann E., Sollfrank J., Heinz U. W.** Thermal phenomenology of hadrons from 200A GeV S+S collisions // Physical Review C. 1993. Vol. 48. No. 5. P. 2462.
9. **Petersen H., Steinheimer J., Baur G., Bleicher M., Stöcker H.** Fully integrated transport approach to heavy ion reactions with an intermediate hydrodynamic stage // Physical Review C. 2008. Vol. 78. No. 4. P. 044901.
10. **Bjorken J. D.** Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region // Physical Review D. 1983. Vol. 27. No. 1. P. 140.
11. **Гангрский Ю. П., Григорьев В. А., Емельянов В. М., Лapidус К. О., Оганесян Ю. Ц., Пенионжкевич Ю. Э., Пятков Ю. В.** Введение в физику тяжелых ионов. Под ред. Ю. Ц. Оганесяна. М.: Изд-во МИФИ, 2008. 424 с.
12. **Agostinelli S., Allison J., Amako K., et al.** Geant4 – a simulation toolkit // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Sec. A. 2003. Vol. 506. No. 3. Pp. 250–303.
13. **Allison J., Amako K., Apostolakis J., et al.** Recent developments in Geant4 // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Sec. A. 2016. Vol. 835. 1 November. Pp. 186–225.
14. **Мудрох А.** Перспективы детектора MPD по измерению спектров идентифицированных адронов в (Bi + Bi)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2 \text{ ГэВ}$ // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2024. Т. 55. № 4. С. 1128–1135.
15. **Aoki Y., Endrydi G., Fodor Z., Katz S. D., Szabo K. K.** The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics // Nature. 2006. Vol. 443. No. 7112. Pp. 675–678.



REFERENCES

1. **Abraamyan Kh. U., Afanasyev S. V., Alfeev V. S., et al.** (MPD Collaboration), The MPD detector at the NICA heavy-ion collider at JINR, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sec. A. 628 (1) (2011) 99–102.
2. **Kekelidze V. D., Lednicky R., Matveev V. A., et al.**, Three stages of the NICA accelerator complex, Eur. Phys. J. A. 52 (8) (2016) 211.
3. **Abgaryan V., Acevedo Kado R., Afanasyev S. V., et al.** (MPD Collaboration), Status and initial physics performance studies of the MPD experiment at NICA, Eur. Phys. J. A. 58 (7) (2022) 140.
4. **Adcox K., Adler S. S., Afanasyev S., et al.** (PHENIX Collaboration), Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration, Nucl. Phys. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.
5. **Rafelski J.**, Melting hadrons, boiling quarks, Eur. Phys. J. A. 51 (9) (2015) 114.
6. **Adams J., Aggarwal M. M., Ahmed Z., et al.** (STAR Collaboration), Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions, Nucl. Phys. A. 757 (1–2) (2005) 102–183.
7. **Schnedermann E., Sollfrank J., Heinz U. W.**, Fireball spectra (Chapter), In book: Gutbrod H. H., Rafelski J. (Eds). Particle production in highly excited matter, NATO Science Ser. B: Phys. Vol. 303. Springer, Boston, MA, USA (1993) 175–206.
8. **Schnedermann E., Sollfrank J., Heinz U. W.**, Thermal phenomenology of hadrons from 200 A GeV S+S collisions, Phys. Rev. C. 48 (5) (1993) 2462.
9. **Petersen H., Steinheimer J., Burau G., et al.**, Fully integrated transport approach to heavy ion reactions with an intermediate hydrodynamic stage, Phys. Rev. C. 78 (4) (2008) 044901.
10. **Bjorken J. D.**, Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region, Phys. Rev. D. 27 (1) (1983) 140.
11. **Gangrskiy Yu. P., Grigor’yev V. A., Emel’yanov V. M., et al.**, Vvedeniye v fiziku tyazhelykh ionov [Introduction to heavy-ion physics], MIFI Publishing, Moscow, 2008 (in Russian).
12. **Agostinelli S., Allison J., Amako K., et al.**, Geant4 – a simulation toolkit, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 506 (3) (2003) 250–303.
13. **Allison J., K. Amako K., Apostolakis J, et al.**, Recent developments in Geant4, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 835 (1 Nov) (2016) 186–225.
14. **Mudrokh A.**, Prospects of the MPD detector for measuring the spectra of identified hadrons in Bi+Bi collisions at energy $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ CeV, Phys. Particl. Nucl. 55 (4) (2024) 937–977.
15. **Aoki Y., Endrydi G., Fodor Z., et al.**, The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics, Nature. 443 (7112) (2006) 675–678.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛАРИОНОВА Дарья Максимовна – кандидат физико-математических наук, ассистент Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dashalario@gmail.com
ORCID: 0009-0007-7019-5586

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-0309-5917

КОТОВ Дмитрий Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

dmitriy.kotov@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3395-0454

THE AUTHORS

LARIONOVA Daria M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

dlar@bk.ru

ORCID: 0009-0007-7019-5586

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

berdnikov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0309-5917

КОТОВ Dmitry O.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

dmitriy.kotov@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3395-0454

*Статья поступила в редакцию 12.03.2025. Одобрена после рецензирования 17.03.2025.
Принята 17.03.2025.*

Received 12.03.2025. Approved after reviewing 17.03.2025. Accepted 17.03.2025.

Научная статья

УДК 539.12


DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18308>

АСИММЕТРИИ ПРЯМЫХ ФОТОНОВ В ПРОДОЛЬНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПРОТОН-ПРОТОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИЯХ 9 – 27 ГэВ

А. А. Лобанов , Я. А. Бердников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

 lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

Аннотация. В работе представлено развитие модели генеративно-состязательной сети (ГСС) для изучения характеристик прямых фотонов, образующихся при столкновениях протонов. Исследование направлено на расширение возможностей ранее разработанной нами модели путем введения параметра начальной энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}}$ в диапазоне 9 – 27 ГэВ. Модель обучена на данных, сгенерированных с помощью PYTHIA8, и протестирована как при энергиях обучения, так и при промежуточных значениях энергии. Особое внимание уделено способности модели сохранять кинематические зависимости и воспроизводить двойную продольную спиновую асимметрию A_{LL} . Результаты доказали возможность использования ГСС для интерполяции характеристик прямых фотонов по энергии столкновения.

Ключевые слова: асимметрия, прямые фотоны, нейронная сеть, генеративно-состязательная сеть

Финансирование: Государственное задание на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009).

Для цитирования: Лобанов А. А., Бердников Я. А. Асимметрии прямых фотонов в продольно-поляризованных протон-протонных столкновениях при энергиях 9 – 27 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 91–97. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18308>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18308>

DIRECT PHOTON ASYMMETRIES IN THE LONGITUDINALLY POLARIZED PROTON-PROTON COLLISIONS AT ENERGIES FROM 9 TO 27 GeV

A. A. Lobanov , Ya. A. Berdnikov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

Abstract. This paper presents the development of the Generative Adversarial Network (GAN) model to study the properties of direct photons produced in proton-proton collisions. The study aims to extend the capabilities of our model (developed previously) by introducing the initial collision energy parameter $\sqrt{s_{NN}}$ in the range from 9 to 27 GeV. The model has been trained on the data generated using PYTHIA8 and tested both at training energies and at intermediate energy values. Special attention was paid to the ability of the model to preserve kinematic dependencies and to reproduce the double longitudinal spin asymmetry A_{LL} . The results proved the possibility of using the GAN to interpolate the characteristics of direct photons in terms of collision energy.

Keywords: asymmetries, direct photons, neural network, generative-adversarial network

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment for Fundamental Research (Subject Code FSEG-2025-0009).

For citation: Lobanov A. A., Berdnikov Ya. A., Direct photon asymmetries in the longitudinally polarized proton-proton collisions at energies from 9 to 27 GeV, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 91–97. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18308>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Изучение структуры протона и формирование его спина остается одной из ключевых задач современной физики [1]. Для решения этой задачи создаются различные экспериментальные установки, среди которых особое место занимает детектор SPD на строящемся коллайдере NICA [1].

Важную роль в формировании суммарного спина протона играют глюоны [1]. Их вклад описывается спиральными функциями распределения глюона $\Delta g(x)$, интегрирование которых дает полный вклад в спин протона. Одним из эффективных способов получения значений $\Delta g(x)$ является измерение двойной продольной спиновой асимметрии (DLSA) A_{LL} , возникающей при столкновении продольно-поляризованных протонов [1].

Асимметрию DLSA можно измерить для различных частиц, включая заряженные и нейтральные пионы [2], а также (J/ψ) -мезоны [3]. Однако особый интерес представляют прямые фотоны, рожденные при электромагнитном взаимодействии партонов протона, в частности, в реакции комптоновского рассеяния $gq(\bar{q}) \rightarrow \gamma q$ [4]. Преимущество измерения прямых фотонов заключается в более простом теоретическом описании, не требующем использования моделей адронизации.

Несмотря на это преимущество, измерение прямых фотонов сопряжено с рядом трудностей, включая малую статистику событий и сложность выделения прямых фотонов на фоне распадных фотонов, например, от распада мезона π^0 [4].

Для решения проблемы малой статистики, в предыдущей работе [5] был предложен подход с использованием генеративно-сопоставительной сети (ГСС). Было показано, что ГСС способна с высокой точностью воспроизводить характеристики прямых фотонов, рождающихся в столкновениях продольно-поляризованных протонов и сохранять возможность расчета асимметрий.

В данной работе представлено развитие предложенного подхода, направленное на расширение возможностей разработанной нами модели ГСС [5].

Для этой цели предлагается ввести параметр начальной энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}}$, что должно обеспечивать получение результатов для произвольных значений энергии в заданном диапазоне. Такая интерполяция позволит более точно определять значения $\Delta g(x)$ и, как следствие, правильно оценивать вклад глюонов в спин протона.

Методика исследования

Для подтверждения возможности расширения ГСС для предсказания рождения прямых фотонов при разных значениях энергии $\sqrt{s_{NN}}$ и в силу отсутствия на данный момент экспериментальных данных, обучение модели велось на предварительно смоделированных данных. В качестве генератора Монте-Карло была использована программа PyTHIA8 [5, 6].

Основные параметры программы Pythia8, использованные нами в данной работе, были следующими [5]:

PromptPhoton: qg2qgamma = on,
 PromptPhoton: qqbar2ggamma = on,
 MultipartonInteractions: pT0Ref = 2.2,
 NNPDF31_nlo_as_0118 [7] (для неполяризованных столкновений),
 NNPDFpol11_100 [8] (для поляризованных событий).

В качестве диапазона значений начальной энергии столкновений $\sqrt{s_{NN}}$ была рассмотрена энергетическая область 9 – 27 ГэВ. Выбор диапазона диктовался экспериментальными условиями SPD на коллайдере NICA [4]. Для обучения модели были сгенерированы выборки при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 9, 15, 21$ и 27 ГэВ, причем для столкновений как неполяризованных, так и поляризованных протонов (далее будет использован термин «события»). Размер каждой выборки составлял 500 тыс. событий (столкновений).

По аналогии с методикой предыдущей работы [5], из сгенерированных выборок были извлечены z -компоненты импульса p_{zq1} (первого) и p_{zq2} (второго) партонов, а также p_x -, p_y - и p_z -компоненты импульса рожденного прямого фотона. При этом для обучения ГСС были использованы не сами компоненты p_{zq1} и p_{zq2} , а их преобразованные версии – $T(p_{zq1})$ и $T(p_{zq2})$ в соответствии с результатами работы [5].

Функция потерь ГСС оставалась неизменной и представляла собой функцию наименьших квадратов [5]. Число эпох для обучения было увеличено до 2 тыс. Величина батча также была увеличена до 2 тыс. Оптимизатор градиентного спуска был заменен на Adam с такими значениями параметров:

шаг обучения $2 \cdot 10^{-4}$ был взят для генератора и дискриминатора, коэффициенты забывания для градиентов и вторых моментов градиентов $\beta_1 = 0,9$ и $\beta_2 = 0,5$, соответственно [9].

Архитектура генератора основана на результатах предыдущей работы [5]. На вход генератора поступает 128-мерный вектор с элементами из нормального распределения. В качестве условных переменных использованы начальная энергия $\sqrt{s_{NN}}$ и тип поляризации события. Условные переменные объединяются со 128-мерным вектором, чтобы генератор мог учитывать различные условия для генерации. Число скрытых слоев было увеличено до 8. Каждый скрытый слой обладает 512 нейронами и активационной функцией "Leaky ReLU" с коэффициентом 0,2 [10]. Дополнительно к каждому скрытому слою применяется процедура ResidualAdd [11], чтобы сделать процесс обучения более стабильным при большом числе скрытых слоев. Процедура ResidualAdd заключается в том, что выход каждого слоя после функции активации суммируется с выходом предыдущего слоя. Такой подход позволяет решить проблему затухающих градиентов при большом числе слоев [11]. Выход генератора содержит 5 генерируемых величин:

$$T(p_{zq1}), T(p_{zq2}), p_x, p_y, p_z.$$

Дискриминатор обладает почти такой же архитектурой, как у генератора. На вход дискриминатор принимает 6 сгенерированных генератором величин, а также условные переменные. Параметры скрытых слоев дискриминатора повторяют параметры скрытых слоев генератора за одним исключением: к каждому скрытому слою применяется нормализация спектра (Spectral Normalization) [12]. Выход с дискриминатора содержит один нейрон, который отражает степень уверенности дискриминатора в том, что на вход ему поданы реальные данные, а не полученные с помощью генератора.

Результаты моделирования

Для демонстрации качества работы ГСС при различных начальных энергиях $\sqrt{s_{NN}}$ ниже приведена только часть из полного набора величин; это p_{zq1} и $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, а также значения DLSA. Остальные величины не представлены ввиду подобия их распределений.

На рис. 1, *a* представлены распределения по импульсу партона p_{zq1} при столкновениях неполяризованных протонов. Сравнение результатов моделирования с помощью PYTHIA8 и предсказаний ГСС проводилось для энергий $\sqrt{s_{NN}}$, ГэВ: 9, 15, 21 и 27, на которых происходило обучение модели, а также для промежуточных значений (ГэВ): 12, 18, 24 и 30. При построении графиков на рис. 1 каждое следующее распределение для наглядности смещено на 10 ГэВ (чтобы разделить распределения). Анализ графиков показывает, что модель ГСС обеспечивает хорошую точность предсказаний как для значений энергии, при которых проводилось обучение, так и при интерполированных значениях.

Аналогичная картина наблюдается на рис. 1, *b*, где представлены распределения по поперечному импульсу фотона p_T при столкновениях поляризованных протонов. Стоит отметить, что модель сохраняет точность предсказаний и в этом случае.

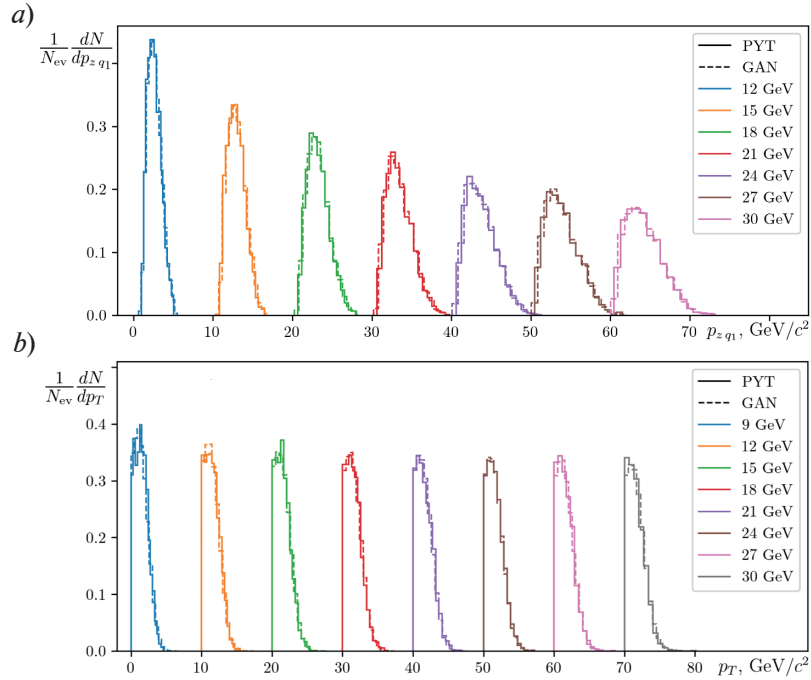


Рис. 1. Сравнение результатов предсказаний ГСС (сплошные линии) и моделирования (пунктиры) для распределений по импульсам партонов p_{zq1} (a) и прямых фотонов p_T (b) при столкновениях неполяризованных (a) и поляризованных (b) протонов при различных значениях начальных энергий $\sqrt{s_{NN}}$.

(см. легенды: энергии указаны в ГэВ, причем нечетные значения – это величины при процедуре обучения, а четные – интерполированные величины). Число событий $N_{ev} = 500$ тыс.; для моделирования использована программа РУТНІА8

На рис. 2 представлены зависимости асимметрий A_{LL} от доли импульса $x_T = \frac{2p_T}{\sqrt{s_{NN}}}$ прямого фотона, рассчитанные на основе предсказания ГСС и моделирования с помощью РУТНІА8. Из этого рисунка следует, что предсказания ГСС позволяют получать значения асимметрий A_{LL} , совпадающие со значениями РУТНІА8 (с точностью до погрешностей), во всем рассмотренном диапазоне значений начальной энергии $\sqrt{s_{NN}}$.

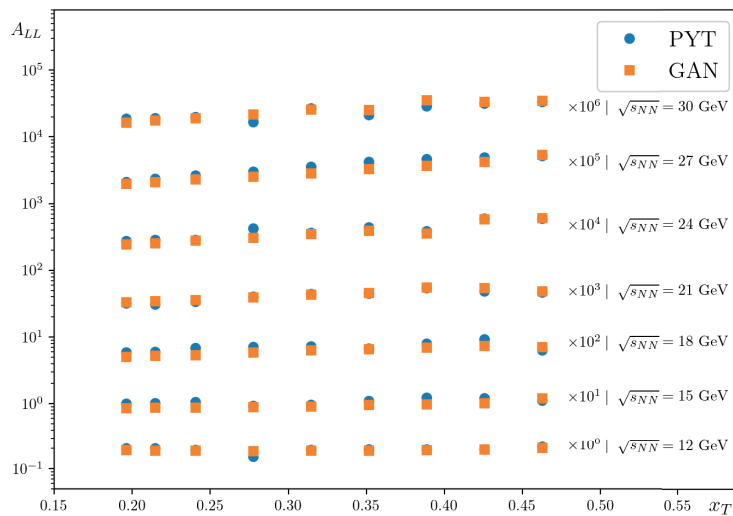


Рис. 2. График зависимости асимметрии A_{LL} от доли импульса x_T прямого фотона при столкновениях продольно-поляризованных протонов при различных начальных энергиях $\sqrt{s_{NN}}$ в диапазоне 12 – 30 ГэВ. Данные получены с помощью ГСС и РУТНІА8 (оранжевые квадратики и синие кружки соответственно).

Уровень погрешностей имеет порядок размера маркеров



Заключение

В работе продолжено развитие раннее разработанной модели генеративно-состязательной сети (ГСС) для предсказания характеристик рожденного прямого фотона в столкновениях протонов. Рассмотрена возможность более широкого применения модели для предсказания событий, и теперь ее использование позволяет предсказывать характеристики прямого фотона при различных начальных энергиях $\sqrt{s_{NN}}$ в диапазоне 9 – 27 ГэВ.

Показано, что модель с высокой точностью предсказывает результаты протонных столкновений как при значениях энергии, при которых проводилось обучение, так и при ее промежуточных значениях. Отсюда можно сделать вывод о способности модели к интерполяции рассмотренных величин по значениям начальной энергии $\sqrt{s_{NN}}$. Точность предсказаний сохраняется как в случае столкновений неполяризованных протонов, так и при столкновениях продольно-поляризованных ($p^+p^{(-)}$).

Кроме того, показано, что модель ГСС сохраняет кинематические зависимости между генерируемыми величинами, что позволяет рассчитывать значения двойной продольной спиновой асимметрии A_{LL} . Значения A_{LL} также можно получать при любых значениях энергии $\sqrt{s_{NN}}$ в рассмотренном диапазоне 9 – 30 ГэВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arbuzov A., Bacchetta A., Butenschoen M., et al.** On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. 2021. Vol. 119. July. P. 103858.
2. **Acharya U., Adare A., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration). Measurement of charged pion double spin asymmetries at midrapidity in longitudinally polarized $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV // *Physical Review D*. 2020. Vol. 102. No. 3. P. 032001.
3. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N. N., et al.** (PHENIX Collaboration), Measurements of double-helicity asymmetries in inclusive J/ψ production in longitudinally polarized $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV // *Physical Review D*. 2016. Vol. 94. No. 11. P. 112008.
4. **Guskov A. and on behalf of the SPD working group.** Physics with prompt photons at SPD // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1435. P. 012035.
5. **Лобанов А. А., Бердников Я. А.** Асимметрии прямых фотонов в продольно-поляризованных протон-протонных столкновениях при энергии 27 ГэВ // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2025. Т. 18. № 1. С. 142–148.
6. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.** A brief introduction to PYTHIA 8.1 // *Computer Physics Communications*. 2008. Vol. 178. No. 11. Pp. 852–867.
7. **Ball R. D., Bertone V., Carrazza S., et al.** Parton distributions from high-precision collider data // *The European Physical Journal C*. 2017. Vol. 77. 04 October. P. 663.
8. **Nocera E. R., Ball R. D., Forte S., Ridolfi G., Rojo J.** A first unbiased global determination of polarized PDFs and their uncertainties // *Nuclear Physics B*. 2014. Vol. 887. October. Pp. 276–308.
9. **Imran Khan M. J., Ismail R. A., Syed Qamrun N. A.** Optimization algorithm for wide and deep neural network // *Knowledge Engineering and Data Science*. 2019. Vol. 2. No. 1. Pp. 41–46.
10. **Sharma O.** A new activation function for deep neural network // *Proceedings of the International Conference on Machine Learning, Big Data, Cloud and Parallel Computing (COMITCon)*; IEEE, Faridabad, India, February 14–16, 2019. Pp. 84–86.
11. **Fengxiang H., Liu T., Tao D.** Why ResNet works? Residuals Generalize. arXiv: 1904.01367, 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.01367>.
12. **Miyato T., Kataoka T., Koyama M., Yoshida Y.** Spectral normalization for Generative Adversarial Networks. arXiv: 1802.05 957/v1, 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05957>.

REFERENCES

1. **Arbuzov A., Bacchetta A., Butenschoen M., et al.**, On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD, Prog. Part. Nucl. Phys. 119 (July) (2021) 103858.
2. **Acharya U., Adare A., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration), Measurement of charged pion double spin asymmetries at midrapidity in longitudinally polarized $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV, Phys. Rev. D. 102 (3) (2020) 032001.
3. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N. N., et al.** (PHENIX Collaboration), Measurements of double-helicity asymmetries in inclusive J/ψ production in longitudinally polarized $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV, Phys. Rev. D. 94 (11) (2016) 112008.
4. **Guskov A. and on behalf of the SPD working group**, Physics with prompt photons at SPD, J. Phys.: Conf. Ser. 1435 (2020) 012035.
5. **Lobanov A. A., Berdnikov Ya. A.**, Direct photon asymmetries in the longitudinally polarized proton-proton collisions at an energy of 27 GeV, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (1) (2025) 142–148 (in Russian).
6. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.**, A brief introduction to PYTHIA 8.1 Comput. Phys. Commun. 178 (11) (2008) 852–867.
7. **Ball R. D., Bertone V., Carrazza S., et al.**, Parton distributions from high-precision collider data, Eur. Phys. J. C. 77 (04 Oct.) (2017) 663.
8. **Nocera E. R., Ball R. D., Forte S., et al.**, A first unbiased global determination of polarized PDFs and their uncertainties, Nucl. Phys. B. 887 (Oct) (2014) 276–308.
9. **Imran Khan M. J., Ismail R. A., Syed Qamrun N. A.**, Optimization algorithm for wide and deep neural network, Knowl. Eng. Data Sci. 2 (1) (2019) 41–46.
10. **Sharma O.**, A new activation function for deep neural network, Proc. Int. Conf. on Machine Learning, Big Data, Cloud and Parallel Computing (COMITCon); IEEE, Faridabad, India, Febr. 14–16 (2019) 84–86.
11. **Fengxiang H., Liu T., Tao D.**, Why ResNet works? Residuals Generalize. arXiv: 1904.01367, 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.01367>.
12. **Miyato T., Kataoka T., Koyama M., Yoshida Y.**, Spectral normalization for Generative Adversarial Networks, arXiv: 1802.05 957/v1, 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05957>.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛОБАНОВ Андрей Александрович – студент Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 lobanov2.aa@edu.spbstu.ru
 ORCID: 0000-0002-8910-4775

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 berdnikov@spbstu.ru
 ORCID: 0000-0003-0309-5917

THE AUTHORS**LOBANOV Andrey A.**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
lobanov2.aa@edu.spbstu.ru
ORCID: 0000-0002-8910-4775

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
berdnikov@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-0309-5917

*Статья поступила в редакцию 18.03.2025. Одобрена после рецензирования 24.03.2025.
Принята 24.03.2025.*

Received 18.03.2025. Approved after reviewing 24.03.2025. Accepted 24.03.2025.

Научная статья

УДК 539.126


DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18309>

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ РОЖДЕНИЯ АДРОНОВ В ДЕЙТРОН-ДЕЙТРОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ЭНЕРГИЯХ 13,5 И 27,0 ГэВ

Д. С. Шапаев , Я. А. Бердников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

 dima.shapaev@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены результаты исследования факторов ядерной модификации адронов в столкновениях ядер дейтерия при значениях энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ. Проведено сравнение полученных факторов ядерной модификации (J/ψ)-, D^\pm - и π^0 -мезонов с использованием функций партонного распределения свободных нуклонов и ядерно-модифицированных функций партонного распределения. Полученные результаты показали, что факторы ядерной модификации (J/ψ)- и π^0 -мезонов остаются близкими к единице на всем исследуемом диапазоне 0,5–4,5 ГэВ/с поперечного импульса. Значения факторов ядерной модификации D^\pm -мезонов резко снижаются при увеличении поперечного импульса при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ, тогда как при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ значения остаются близкими к единице.

Ключевые слова: фактор ядерной модификации, SPD, NICA, функция распределения партонов, адрон

Финансирование: Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009).

Для цитирования: Шапаев Д. С., Бердников Я. А. Сравнительный анализ особенностей рождения адронов в дейтрон-дейтронных взаимодействиях при энергиях 13,5 и 27,0 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 98–106. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18309>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18309>

A COMPARATIVE ANALYSIS OF HADRONS CREATION IN DEUTERON-DEUTERON INTERACTIONS AT ENERGIES OF 13.5 AND 27.0 GeV

D. S. Shapaev , Ya. A. Berdnikov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 dima.shapaev@yandex.ru

Abstract. This paper presents the results of nuclear modification factors for hadrons in deuteron-deuteron collisions at energies of $\sqrt{s_{NN}} = 13.5$ GeV and $\sqrt{s_{NN}} = 27.0$ GeV. We have applied the widely-used nuclear-modified parton distribution functions and parton distribution functions for free nucleons to determine nuclear modification factors (NMFs) of J/ψ , D^\pm and π^0 mesons. The obtained results showed the NMFs values of J/ψ and π^0 ones to remain close to unity over the entire transverse momentum range from 0.5 to 4.5 GeV/c. The NMFs values of D^\pm ones decreased sharply with increasing the transverse momentum at $\sqrt{s_{NN}} = 13.5$ GeV, but they remained close to unity at $\sqrt{s_{NN}} = 27.0$ GeV.



Keywords: nuclear modification factor, SPD, NICA, parton distribution function, hadron

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment for Fundamental Research (Subject Code FSEG-2025-0009).

For citation: Shapaev D. S., Berdnikov Ya. A., A comparative analysis of hadron creation in deuteron-deuteron interactions at energies of 13.5 and 27.0 GeV, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 98–106. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18309>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Измерение особенностей рождения D^{\pm} , (J/ψ) -, π^0 -мезонов в протон-протонных ($p + p$) взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{pp}} = 27,0$ ГэВ и дейтрон-дейтронных ($d + d$) взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ/нуклон [1] – это одна из предполагаемых целей в планируемом эксперименте SPD [2] на коллайдере NICA [3].

Основной механизм образования D^{\pm} и (J/ψ) -мезонов при исследуемых энергиях происходит через слияние пары глюонов (gg), что приводит к созданию кварк-антикварковой пары ($c\bar{c}$) [4].

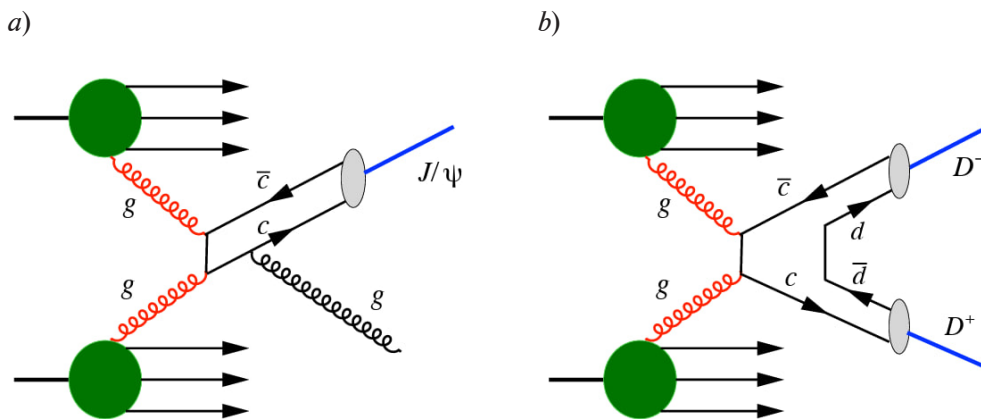


Рис. 1 [4]. Диаграммы Фейнмана для рождения (J/ψ) -мезона (a) и D^{\pm} -мезонов (b).
Рождение происходит через слияние пары глюонов (gg),
что приводит к созданию кварк-антикварковой пары ($c\bar{c}$)

Как следует из рис. 1, a, в ходе адронизации кварк-антикварковая пара ($c\bar{c}$) может образовать (J/ψ) -мезон. Схема рождения D^{\pm} -мезонов приведена на рис. 1, b: $cd \rightarrow D^+$, $\bar{c}\bar{d} \rightarrow D^-$.

Регистрацию (J/ψ) -мезонов в рамках проекта SPD можно осуществлять через слабые мюонные моды распада [4]:

$$J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Регистрация D^{\pm} -мезонов предполагается в следующих каналах распада [4]:

$$D^+ \rightarrow \pi^+K^-\pi^+ \text{ (BF} = 0,094\text{)}; D^- \rightarrow \pi^-K^+\pi^- \text{ (BF} = 0,094\text{)}.$$

Таким образом, исследование особенностей процессов рождения D^{\pm} и (J/ψ) -мезонов позволяет получать информацию о свойствах и роли глюонов в протон-протонных и дейтрон-дейтронных взаимодействиях (а также в ядро-ядерных). В частности, можно извлечь информацию о функциях распределения глюонов в нуклонах и ядрах.

Измерение выходов нейтральных пионов, состоящих из $u\bar{u}$ - и $d\bar{d}$ - кварков, может способствовать проверке и уточнению существующих моделей, описывающих рождение

этих частиц. Сравнение выходов нейтральных пионов с более тяжелыми частицами, такими как мезоны D^\pm и J/ψ , поможет лучше понять роль тяжелых кварков в столкновениях нуклонов и ядер при высоких энергиях.

При изучении процессов рождения адронов принято использовать функции распределения партонов (PDF). Функция распределения партонов $f_i(x, Q^2)$ используется для описания вероятности нахождения в адроне i -го партона; x – параметр партона, определяющий долю импульса нуклона, которую несет партон; Q^2 – величина, которая следует выражению

$$Q^2 = -q^2,$$

где q^2 – 4-импульс виртуальной частицы [5].

Особый интерес представляет область больших значений переменной x , где наблюдается существенное расхождение между теоретическими предсказаниями для глюонной функции распределения в дейтроне и глюонной функции распределения в нуклоне [4].

Для анализа нуклон-ядерных и ядро-ядерных столкновений были получены ядерно-модифицированные функции распределения партонов [6]. Принципиальным отличием данных функций от функций распределения партонов, взятых для свободных нуклонов (PDF), является то, что они учитывают нуклонный состав ядер и взаимодействия между нуклонами в ядре.

Согласно теореме факторизации [7], в коллинеарном приближении дифференциальное сечение рождения адрона H можно представить следующим образом:

$$E_H \frac{d^3\sigma}{dp_H^3} = \sum_{a,b,c} f_a \otimes f_b \otimes d\hat{\sigma}_{ab}^c \otimes D_c^H,$$

где f_a, f_b – функции распределения партонов; $d\hat{\sigma}_{ab}^c$ – сечение жесткого партонного подпроцесса; a, b, c – взаимодействующие партоны; D_c^H – функция фрагментации.

Различные функции распределения партонов влияют на сечение рождения адрона при условии, что для каждой частицы применяются одинаковые функции фрагментации.

Цель настоящей работы – определить особенности рождения адронов в столкновениях ядер дейтерия ($d + d$).

Для моделирования ($d + d$)-столкновений использованы ядерно-модифицированные функции распределения партонов (n PDF) и функции распределения партонов свободных нуклонов (PDF).

Методика исследования

Анализ выходов адронов в ($d + d$)-столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ и $27,0$ ГэВ проведен в настоящей работе на основе данных моделирования, полученных нами с помощью программного пакета Pythia8 [8].

Выбраны варианты расчета, в которых используются функции двух видов: функции распределения партонов, полученные для свободных нуклонов (PDF); ядерно-модифицированные (в данном случае в дейтроне) функции партонного распределения (n PDF).

В связи с тем, что значения энергии столкновений пучков дейтронов намного больше, чем энергия связи нуклонов в дейтроне (2,23 МэВ), для моделирования дейтрона можно принять модель несвязанных (свободных) нуклонов, для которых в рамках партонной модели используются партонные функции распределения свободных нуклонов (PDF). Столкновения пучков дейтронов можно представить на основе PDF как столкновение каждого нуклона одного ядра дейтрона с каждым нуклоном другого. При этом возможны четыре комбинации нуклон-нуклонных столкновений: pp , pn , np , nn . Если учесть примерное сходство значений полных сечений этих взаимодействий [9], то целесообразно принять эти взаимодействия равновероятными без существенной потери точности.

В нашей предыдущей статье [10] было установлено, что различные комбинации взаимодействующих нуклонов, составляющих ядро дейтерия, приводят к разному количеству образующихся прямых фотонов. Однако данная зависимость не должна наблюдаться при формировании (J/ψ)- и D^\pm -мезонов, так как вероятности их образования не зависят от электрического заряда кварка. Сечение рождения пары кварк-антикварк в результате глюон-глюонного взаимодействия пропорционально квадрату константы сильного взаимодействия [4].

Альтернативный подход к исследованию столкновений пучков дейтронов – это применение ядерно-модифицированных функций партонного распределения $nPDF$, полученных для дейтронов [11 – 13]. Многообразие используемых функций связано с их происхождением от разных экспериментальных данных, что может вызывать расхождения и в получаемых результатах. Поэтому для гарантии достоверности и возможности сравнения данных выбраны три различные ядерно-модифицированные функции распределения партонов.

Поскольку программа Pythia8 позволяет использовать в расчетах только одну партонную функцию распределения, для ускорения процесса расчета всех выбранных нами $nPDF$ мы использовали весовой коэффициент w (формула для его вычисления дана в статье [14]):

$$w = \frac{x_1 f_i^{p/d}(x_1; Q^2)}{x_1 f_i^p(x_1; Q^2)} \cdot \frac{x_2 f_i^{p/d}(x_2; Q^2)}{x_2 f_i^p(x_2; Q^2)}, \quad (1)$$

где $x_1 f_i^{p/d}(x_1, Q^2)$, $x_2 f_i^{p/d}(x_2, Q^2)$ – ядерно-модифицированные функции распределения партонов ($nPDF$) для дейтронов в первом и втором ядрах; $x_1 f_i^p(x_1, Q^2)$, $x_2 f_i^p(x_2, Q^2)$ – партонные функции распределения свободных нуклонов (PDF) первого и второго ядер.

Этот коэффициент w характеризует отношение вероятностей обнаружения партона для двух различных функций распределения партонов при одинаковых значениях переменных x и Q^2 . Таким образом, использование в расчетах весового коэффициента позволяет получать спектры адронов как для PDF, так и для $nPDF$ в рамках единой вычислительной процедуры моделирования.

Ввиду малой вероятности рождения (J/ψ) - и D^\pm -мезонов в $(d + d)$ - столкновениях, в данной работе для увеличения статистики рождения (J/ψ) - и D^\pm -мезонов применялись специальные настройки в Pythia8 (они представлены в Приложении в конце статьи). Важно отметить, что предложенные модификации не оказывают какого-либо влияния на физическую интерпретацию полученных результатов.

Функции распределения партонов взяты из программного пакета LHAPDF6 [14], который подключается непосредственно к генератору столкновений Pythia8. Компьютерный анализ включал применение следующих партонных функций распределения (далее их нумерация, выделенная жирным шрифтом, фигурируют в подписях к рисункам).

Для функций PDF: nNNPDF30_nlo_as_0118_p [11] (**FI**), TUJU21_nlo_1_1 [12] (**FII**), nCTEQ15HIX_FullNuc_1_1 [13] (**FIII**);

для функций $nPDF$: nNNPDF30_nlo_as_0118_A2_Z1 [11] (**FIV**), TUJU21_nlo_2_1 [12] (**FV**), nCTEQ15HIX_FullNuc_2_1 [13] (**FVI**).

Для количественной оценки различия в особенностях спектров адронов в $(d + d)$ -столкновениях с использованием $nPDF$ и спектров, полученных с использованием PDF, применялся фактор ядерной модификации R_{dd} .

Величину R_{dd} можно вычислять с помощью следующего соотношения [15]:

$$R_{dd} = \frac{1}{N_{coll}} \cdot \frac{d^2 N_{dd} / dp_T dy}{d^2 N_{pp} / dp_T dy}. \quad (2)$$

В числителе формулы (2) стоит инвариантный спектр адронов, полученный в столкновениях ядер дейтерия в диапазонах быстрот dy и поперечного импульса dp_T . Этот спектр нормируется на количество бинарных нуклон-нуклонных столкновений N_{coll} (для $d + d$). В знаменателе формулы (2) находится инвариантный спектр адронов, измеренных в $(p + p)$ - взаимодействиях для тех же диапазонов быстрот и поперечного импульса.

Диапазон по быстрой ($|y| < 3$) в данной статье взят из работы [16].

Полученные результаты и их обсуждение

Результаты R_{dd} для адронов в зависимости от поперечного импульса p_T при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ в области быстрот $|y| < 3$ с применением разных функций распределения партонов, взятых для свободных протонов (PDF) (см. функции FI – FIII), представлены на рис. 2.

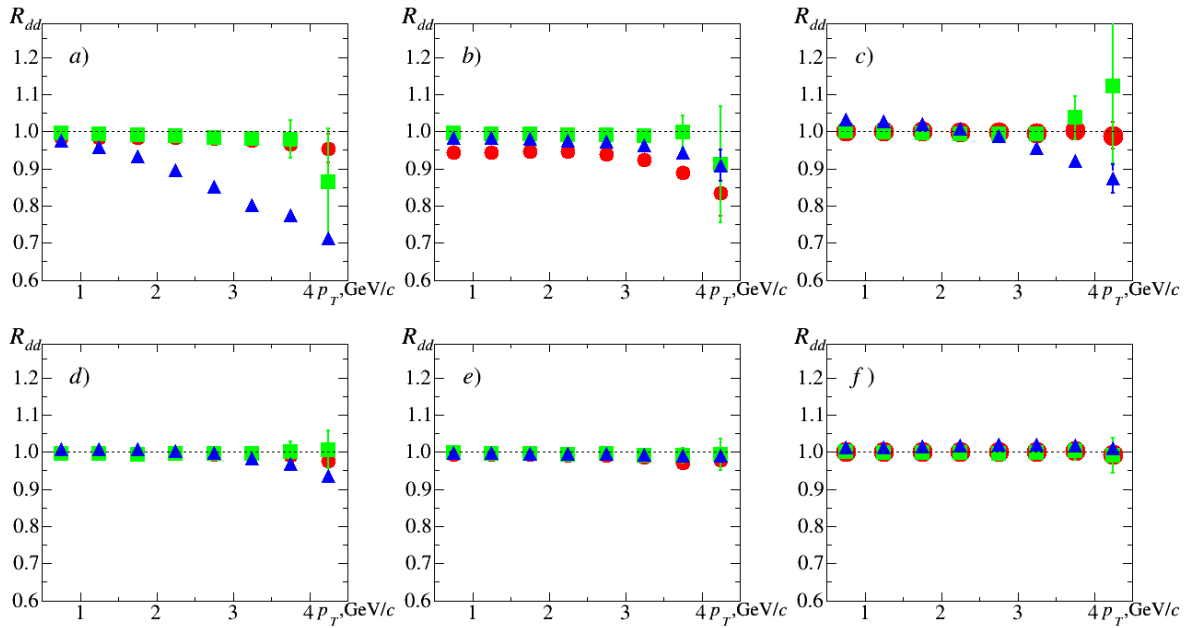


Рис. 2. Зависимости факторов ядерной модификации мезонов J/ψ (\bullet), D^\pm (\blacktriangle), π^0 (\blacksquare) от поперечного импульса (см. ф-лу (2)) в $(d + d)$ -столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ ($a - c$) и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ ($d - f$), в области быстрот $|y| < 3$, с применением разных функций распределения партонов, взятых для свободных протонов: a, d – функция FI; b, e – FII; c, f – FIII (нумерация функций дана в тексте).

Вертикальными отрезками показаны статистические погрешности

Результаты R_{dd} для адронов в зависимости от поперечного импульса p_T при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ в области быстрот $|y| < 3$ с применением разных ядерно-модифицированных функций распределения партонов (n PDF) (см. функции FIV – FVI) представлены на рис. 3.

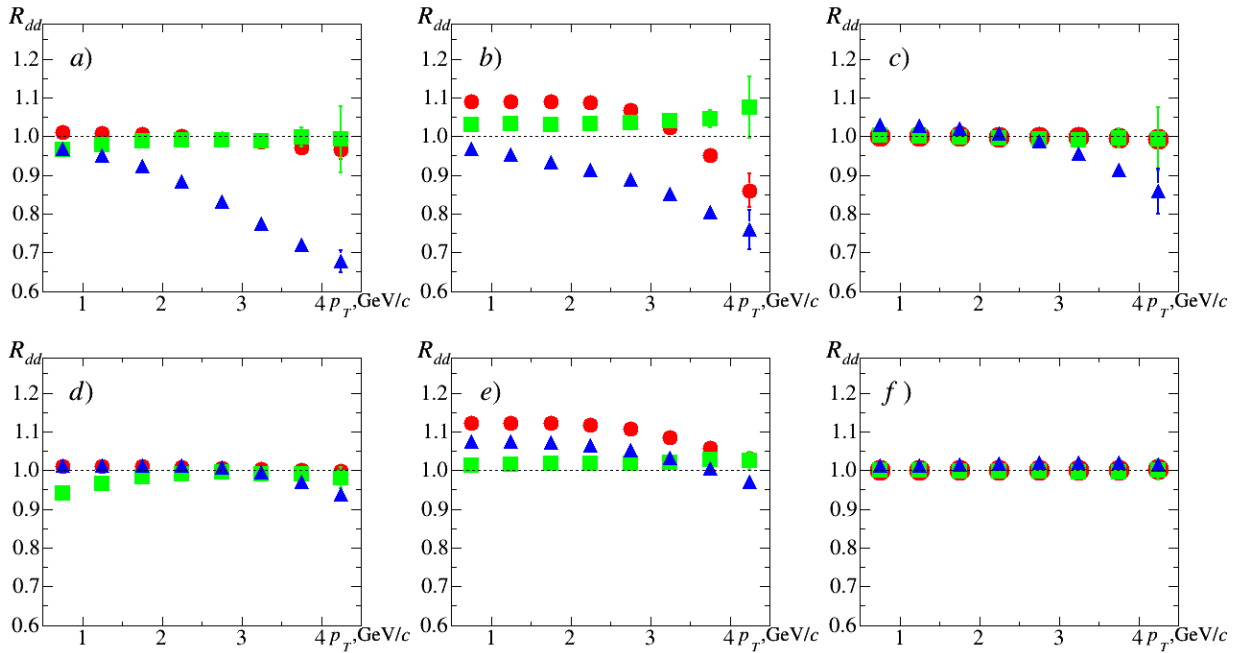


Рис. 3. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 2, при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ ($a - c$) и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ ($d - f$), для остальных ядерно-модифицированных функций партонного распределения: a, d – функция FIV; b, e – FV; c, f – FVI



На рис. 2 и рис. 3 можно заметить, что факторы ядерной модификации $D^{\pm-}$, (J/ψ) - и π^0 -мезонов, вычисленные с применением функций n PDF и PDF, имеют сходные значения на всем рассматриваемом диапазоне значений p_T . Тем не менее, небольшие различия в значениях R_{dd} при использовании партонных функций FII и FV могут свидетельствовать о наличии ядерных эффектов, влияющих на процесс образования частиц.

Результаты по факторам ядерной модификации R_{dd} , полученные с применением остальных функций (FI, FIII, FIV, FVI), не превышают единицы, что прогнозирует отсутствие возможных ядерных эффектов при образовании (J/ψ) - и π^0 -мезонов в дейтрон-дейтронных столкновениях.

Также можно отметить, что значения R_{dd} для $D^{\pm-}$ -мезонов падают с увеличением p_T при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ, в отличие от столкновений при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ, в которых значения R_{dd} остаются на уровне единицы. Причина такого поведения зависимостей требует дополнительного исследования.

Заключение

В данной работе рассчитаны факторы ядерной модификации $D^{\pm-}$, (J/ψ) - и π^0 -мезонов в $(d + d)$ -взаимодействиях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ и $\sqrt{s_{NN}} = 27,0$ ГэВ в зависимости от поперечного импульса p_T в области быстрой $|y| < 3$ с использованием PDF (FI – FIII) и n PDF (FIV – FVI).

Применение весового коэффициента (см. формулу (1)) в расчетах спектров адронов позволило ускорить процесс расчета спектров адронов.

Показано, что значения R_{dd} для адронов мало различаются при использовании разных функций: PDF и n PDF.

Установлено, что отношения инвариантных спектров (J/ψ) - и π^0 -мезонов в $(d + d)$ - и $(p + p)$ -столкновениях незначительно различаются при исследуемых энергиях для всех выбранных наборов PDF и n PDF. В то же время инвариантные спектры $D^{\pm-}$ -мезонов в $(d + d)$ -взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13,5$ ГэВ уменьшаются относительно инвариантов спектров в $(p + p)$ - взаимодействиях при увеличении поперечного импульса p_T .

Приложение

Настройки параметров генератора событий Monte Carlo Pythia8 с целью увеличения образования мезонов

Параметр	Позиция	Параметр	Позиция
<i>Для (J/ψ)-мезонов</i>		<i>Для $D^{\pm-}$-мезонов</i>	
Charmonium:all	on	HardQCD:gg2ccbar	on
PhaseSpace:pTHatMin	0,1	HardQCD:qqbar2ccbar	on
PhaseSpace:pTHatMax	10,0	PhaseSpace:mHatMin	0,0
PhaseSpace:pTHatMinDiverge	0,5	PhaseSpace:pTHatMinDiverge	0,5
BeamRemnants:primordialKT	on	BeamRemnants:primordialKT	on
BeamRemnants:primordialKTsoft	0,9	BeamRemnants:primordialKTsoft	1,1
BeamRemnants:primordialKTthard	1,8	BeamRemnants:primordialKTthard	1,8
BeamRemnants:halfScaleForKT	2,0	BeamRemnants:halfScaleForKT	2,0
BeamRemnants:halfMassForKT	4,0	BeamRemnants:halfMassForKT	4,0
BeamRemnants:reducedKTatHighY	0,5	BeamRemnants:reducedKTatHighY	0,7
BeamRemnants:primordialKTremnant	0,4	BeamRemnants:primordialKTremnant	0,4
443:onMode	off		
443:onIfAll	13 -13		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Savin I., Efremov A., Peshekhonov D., Kovalenko A., Teryaev O., Shevchenko O., Nagajcev A., Guskov A., Kukhtin V., Toplilin N. Spin physics experiments at NICA-SPD with polarized proton and deuteron beams // EPJ Web of Conferences. 2015. Vol. 85. 23 January. P. 02039.
2. Ladygin V. P. Spin physics detector at NICA // JPS Conference Proceedings. Proceedings of the 24th International Spin Symposium (SPIN-2021). 2022. Vol. 37. P. 011012.
3. Trubnikov G., Butenko A., Golovatyuk V., Guskov A., Kapishin M., Kekelidze V., Lednicky R., Meshkov I., Sorin A. NICA heavy-ion collider at JINR (Dubna). Status of accelerator complex and first physics at NICA // Journal of Physics: Conference Series. 2023. Vol. 2586. No. 1. P. 012013.
4. Arbuzov A., Bacchetta A., Butenschoen M., et al. (SPD Collaboration). On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. July. P. 103858.
5. Ethier J. J., Nocera E. R. Parton distributions in nucleons and nuclei // Annual Review of Nuclear and Particle Science. 2020. Vol. 70. No. 1. Pp. 43–76.
6. Eskola K. J. Global analysis of nuclear PDFs – latest developments // Nuclear Physics A. 2013. Vol. 910–911. August. Pp. 163–170.
7. De Florian D., Sassot R., Stratmann M. Global analysis of fragmentation functions for pions and kaons and their uncertainties // Physical Review D. 2007. Vol. 75. No. 11. P. 114010.
8. Bierlich C., Chakraborty S., Desai N., et al. A comprehensive guide to the physics and usage of PYTHIA 8.3 // SciPost Physics. 2022. Advance online publication. <https://inspirehep.net/literature/2056998>.
9. Murthy P. V. R., Ayre C. A., Gustafson H. R., Jones L. W., Longo M. J. Neutron total cross sections on nuclei at Fermilab energies // Nuclear Physics B. 1975. Vol. 92. No. 3. Pp. 269–308.
10. Шапаев Д. С., Бердников Я. А. Рождение прямых фотонов во взаимодействиях ядер дейтерия при энергиях 13,5 и 27,0 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 4. С. 138–146.
11. Khalek R. A., Gauld R., Giani T., Nocera E. R., Rabemananjara T. R., Rojo J. nNNPDF3.0: evidence for a modified partonic structure in heavy nuclei // European Physics Journal C. 2022. Vol. 82. No. 6. P. 507.
12. Helenius I., Walt M., Vogelsang W. NNLO nuclear parton distribution functions with electroweak-boson production data from the LHC // Physical Review D. 2022. Vol. 105. No. 9. P. 094031.
13. Segarra E. P., Ježo T., Accardi A., et al. Extending nuclear PDF analyses into the high- x , low- Q^2 region // Physical Review D. 2021. Vol. 103. No. 11. P. 114015.
14. Buckley A., Ferrando J., Lloyd S., Nordström K., Page B., Rüfenacht M., Schönherr M., Watt G. LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era // European Physics Journal C. 2015. Vol. 75. No. 3. P. 132.
15. Rezaeian A. H., Schaefer A. Hadrons and direct photon production in pp and pA collisions at the LHC and saturation effects // Physical Review D. 2010. Vol. 81. No. 11. P. 114032.
16. Салеев В. А., Шипилова А. В. Двойные продольные спиновые асимметрии в прямом рождении фотонов на коллайдере NICA // Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра». 2023. Т. 20. № 3 (248). С. 417–421.

REFERENCES

1. Savin I., Efremov A., Peshekhonov D., et al., Spin physics experiments at NICA-SPD with polarized proton and deuteron beams, EPJ Web Conf. 85 (23 Jan) (2015) 02039.
2. Ladygin V. P., Spin physics detector at NICA, JPS Conf. Proc., Proc. 24th Int. Spin Symp. (SPIN-2021), 37 (2022) 011012.
3. Trubnikov G., Butenko A., Golovatyuk V., et al., NICA heavy-ion collider at JINR (Dubna). Status of accelerator complex and first physics at NICA, J. Phys.: Conf. Ser. 2586 (1) (2023) 012013.
4. Arbuzov A., Bacchetta A., Butenschoen M., et al. (SPD Collaboration), On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD, Prog. Part. Nucl. Phys. 119 (July) (2021) 103858.



5. Ethier J. J., Nocera E. R., Parton distributions in nucleons and nuclei, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 70 (1) (2020) 43–76.
6. Eskola K. J., Global analysis of nuclear PDFs – latest developments, *Nucl. Phys. A.* 910–911 (Aug) (2013) 163–170.
7. De Florian D., Sassot R., Stratmann M., Global analysis of fragmentation functions for pions and kaons and their uncertainties, *Phys. Rev. D.* 75 (11) (2007) 114010.
8. Bierlich C., Chakraborty S., Desai N., et al., A comprehensive guide to the physics and usage of PYTHIA 8.3, *SciPost Phys.* (2022). Advance online publication. <https://inspirehep.net/literature/2056998>.
9. Murthy P. V. R., Ayre C. A., Gustafson H. R., et al., Neutron total cross sections on nuclei at Fermilab energies, *Nucl. Phys. B.* 92 (3) (1975) 269–308.
10. Shapaev D. S., Berdnikov Ya. A., The creation of direct photons during interactions of deuterium nuclei at energies of 13.5 GeV and 27.0 GeV, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 17 (4) (2024) 138–146 (in Russian).
11. Khalek R. A., Gauld R., Giani T., et al., nNNPDF3.0: evidence for a modified partonic structure in heavy nuclei, *Eur. Phys. J. C.* 82 (6) (2022) 507.
12. Helenius I., Walt M., Vogelsang W., NNLO nuclear parton distribution functions with electroweak-boson production data from the LHC, *Phys. Rev. D.* 105 (9) (2022) 094031.
13. Segarra E. P., Ježo T., Accardi A., et al., Extending nuclear PDF analyses into the high- x , low- Q^2 region, *Phys. Rev. D.* 103 (11) (2021) 114015.
14. Buckley A., Ferrando J., Lloyd S., et al., LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era, *Eur. Phys. J. C.* 75 (3) (2015) 132.
15. Rezaeian A. H., Schaefer A., Hadrons and direct photon production in pp and pA collisions at the LHC and saturation effects, *Phys. Rev. D.* 81 (11) (2010) 114032.
16. Saleev V. A., Shipilova A. V., Double longitudinal-spin asymmetries in direct photon production at NICA, *Phys. Part. Nuclei. Lett.* 20 (3) (2023) 400–403.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШАПАЕВ Дмитрий Сергеевич – студент *Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dima.shapaev@yandex.ru
ORCID: 0009-0006-8542-4401

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор *Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-0309-5917

THE AUTHORS

SHAPAEV Dmitry S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
dima.shapaev@yandex.ru
ORCID: 0009-0006-8542-4401

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

berdnikov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0309-5917

*Статья поступила в редакцию 25.04.2025. Одобрена после рецензирования 12.05.2025.
Принята 12.05.2025.*

Received 25.04.2025. Approved after reviewing 12.05.2025. Accepted 12.05.2025.

Original article

UDC 530.121

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18310>

INTEGRALS OF MOTION OF A RELATIVISTIC PARTICLE IN 1 + 1 DIMENSIONS WITH COUPLED PARAMETERS

N. S. Akintsov ¹, A. P. Nevecheria ² □, V. Yu. Kozhevnikov ³,
G. F. Kopytov ⁴, T. Cao ⁵

¹ Nantong University, Nantong, People's Republic of China;

² Kuban State University, Krasnodar, Russia;

³ Institute of High Current Electronics, Siberian Branch, RAS (IHCE SB RAS), Tomsk, Russia;

⁴ Moscow State University of Technology and Management, Moscow, Russia;

⁵ Dalian University of Technology, Dalian, People's Republic of China

□ artiom1989@mail.ru

Abstract. The eigenfunctions and eigenvalues of the integrals of motion γ and θ have been studied. An invariant form of motion was obtained for the derivatives of γ and θ , with respect to the proper time and velocity of a relativistic particle (RP). The integrals γ and θ were shown to be mutually expressible. Inverse values $1/E$ and $1/P$ were introduced for the energy and momentum of a free RP. A one-to-one correspondence of the RP energy and momentum was obtained. The properties of the γ integral expressed in terms of $1/E$ and $1/P$ were determined as a functional dependence $\gamma = \gamma(1/E, 1/P)$. Forms of the motion equations depending on the γ and θ integrals were obtained using Lagrangian and Hamiltonian formalism. Based on the latter, a generalized integral of motion describing all types of motions in 1+1 dimensions was derived. Mutually expressive differential forms of RP motion were introduced.

Keywords: integral of motion, special relativity, Lagrangian and Hamiltonian formalisms

Funding: This work was partially supported by the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project No. FZEN 2023-0006), the Nantong Science and Technology Plan Project (Grant Nos. JC2020137 and JC2020138), the Key Research and Development Program of Jiangsu Province of China (Grant No. BE2021013-1), the National Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (Grant No. BK20201438), and in part by the Natural Science Research Project of Jiangsu Provincial Institutions of Higher Education (Grant Nos. 20KJA510002 and 20KJB510010).

For citation: Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kozhevnikov V. Yu., Kopytov G. F., Cao T., Integrals of motion of a relativistic particle in 1 + 1 dimensions with coupled parameters, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 107–126. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18310>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Научная статья

УДК 530.121

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18310>

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ИЗМЕРЕНИЯХ 1 + 1 СО СВЯЗАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ


Н. С. Акинцов¹, А. П. Невечеря² , В. Ю. Кожевников³,
Г. Ф. Копытов⁴, Т. Цао⁵

¹ Наньтунский университет, г. Наньтун, Китайская Народная Республика;

² Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия;

³ Институт сильноточной электроники Сибирского отделения РАН, г. Томск, Россия;

⁴ Московский государственный университет технологий и управления
имени К. Г. Разумовского, Москва, Россия;

⁵ Даляньский технологический университет, г. Далянь, Китайская Народная Республика
 artiom1989@mail.ru

Аннотация. В работе исследованы собственные функции и собственные значения от интегралов движения γ и быстроты θ . Для производных от γ и θ получена форма движения относительно собственного времени и скорости частицы. Показано, что интегралы движения являются взаимно-выражаемыми. Введены обратные значения для энергии $E_g = 1/E$ и импульса $P_g = 1/P$ свободной релятивистской частицы. Найдены свойства интеграла движения γ , который выражается через обратный импульс P_g и обратную энергию E_g как функциональная зависимость $\gamma = \gamma(E_g, P_g)$. С использованием формализма Лагранжа и Гамильтона получены уравнения движения $L' = L'(q, Q)$ и $H' = H'(\theta)$. На основе Гамильтонова формализма выведен обобщенный интеграл движения $\gamma = \gamma(\theta)$. Введены взаимно-выражающиеся дифференциальные формы движения релятивистской частицы.

Ключевые слова: интеграл движения, специальная теория относительности, Лагранжев и Гамильтонов формализмы

Финансирование: Работа выполнена при частичной поддержке Государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № FZEN 2023-0006), Проекта научно-технического плана г. Наньтун (гранты № JC2020137 и № JC2020138), Программы ключевых исследований и разработок провинции Цзянсу Китая (грант № BE2021013 1), Национального фонда естественных наук провинции Цзянсу (грант № BK20201438), а также частично в рамках проекта естественнонаучных исследований высших учебных заведений провинции Цзянсу (гранты № 20KJA510002 и № 20KJB510010).

Для цитирования: Акинцов Н. С., Невечеря А. П., Кожевников В. Ю., Копытов Г. Ф., Цао Т. Интегралы движения релятивистской частицы в измерениях 1 + 1 со связанными параметрами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 107–126. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18310>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)



Introduction

The classical integral of motion of a relativistic particle γ_0 has the invariant form

$$\gamma_0 = \frac{mc(1 - f\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc \exp(-f\theta), \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{n}\mathbf{V}}{c} = \tanh \theta, \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{mc} = \exp(-f\theta), \quad (1)$$

where \mathbf{V} is the particle velocity, c is the light speed, m is the particle mass, $f = \pm 1$.

For analytical and numerical calculations in Refs. [1 – 8], the integral of motion is understood as a constant ($\gamma = \text{const}$), however, this case is satisfied only for a constant particle velocity ($\boldsymbol{\beta} = \text{const}$). Ignoring the nonlinear functional dependence $\gamma = \gamma(\mathbf{r}, t)$, for finding the trajectory of a charged particle $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ in the field of an electromagnetic wave

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{p}_E}{\gamma} dt + \boldsymbol{\chi} = \int \frac{q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\omega\gamma} dt + \boldsymbol{\chi}, \quad (2)$$

where \mathbf{p}_E is the momentum of particle oscillation in the field of an electromagnetic wave, $\mathbf{p}_E = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\omega$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ is the electric field strength of the wave; q is the particle charge; ω is the particle oscillation frequency; $\boldsymbol{\chi}$ is a certain constant that determines the initial phase of the wave; \mathbf{r} is the particle position at time t .

In many papers (see, for example, Refs. [1 – 8]), as a rule, integration is performed over the space-time coordinate $\xi = t - \mathbf{n}\mathbf{r}/c$ and supposing that $\gamma = \text{const}$. In this case, there are no relativistic effects of particle acceleration.

The angular integral of motion θ is defined from Hamiltonian mechanics

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta} = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - 1 = P = \mathbf{n}\mathbf{P}, \quad (3)$$

where $H' = H / (mc^2) = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-}$ is the Hamiltonian of a freely moving particle,

$Q_\xi^+ = \frac{1}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}$, $Q_\xi^- = \frac{1}{1 + \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}$, \mathbf{n} is the normal vector, and $H'(\beta = 0) = 1$ [9, 10].

As is known, the integral angle or the so-called angular integral of motion is expressed from Eq. (3) and has the following form:

$$\theta = \cosh^{-1} \left(\sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} \right), \quad (4)$$

where $E = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-}$ is the dimensionless particle energy, $E \geq 0$.

From Eqs. (3) and (4) it can be seen that the energy and momentum of the system take the following values:

$$E = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} = \cosh \theta, \quad \mathbf{n}\mathbf{P} = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - 1 = \sinh \theta, \quad (5)$$

which express the laws of conservation of energy and momentum for the particle

$$E^2 = P^2 + 1, \quad (6)$$

where

$$E = \varepsilon / mc^2 = \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} / mc = \mathbf{n} \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - 1. \quad (7)$$

From Eqs. (4) – (7) and Ref. [10], for θ , \mathbf{r} , t , and γ , we have the following functional relationship:

$$\theta = \theta(\mathbf{r}, t, \gamma). \quad (8)$$

Using the functional dependence (8), it is easy to show that the trajectory of the relativistic particle (see Eq. (3)) can be represented as a function of the integral angle θ :

$$\mathbf{R}(\theta) = \int \frac{\mathbf{p}_E(\theta)}{\gamma(\theta)} d\theta + \boldsymbol{\chi} = \int \frac{q\mathbf{E}(\theta)}{\omega\gamma(\theta)} d\theta + \boldsymbol{\chi}. \quad (9)$$

From Eq. (8) we also have a mutually functional dependence with the space-time coordinate $\xi = \xi(\theta)$.

It is of interest to study in this paper the mutually functional dependence of the laws of conservation of energy and momentum of a particle in a mutually invariant form depending on $\theta = \theta(\gamma)$ and $\gamma = \gamma(\theta)$, that is

$$E^2 = P^2 + 2\gamma E - \gamma^2, \quad (10)$$

where $\gamma^{-1} = 2E - \gamma$.

From the rapid development of such areas as the double special theory of relativity and gravito-magnetism [11 – 16], it follows that it is necessary to introduce differential forms, which in the future will help to give a more extensive answer to such a question as: “Do we observe the violation of the Lorentz invariant form in gamma-ray bursts?”

The purpose of this work is to search for new forms of the of motion and to study the mutual functional relationship between integrals. Based on the Hamiltonian and Lagrange formalisms, successively derive generalized formulas that are applicable to the motion of a particle in any configuration of electromagnetic fields. Thus, in Refs. [17 – 19], the effectiveness of using Lorentz coordinates in terms of rapidity has been demonstrated $\xi = \xi(\theta)$. In Ref. [20], Lorentz coordinates with associated parameters were applied to describe the dynamics of a charged particle in the field of a plane wave and in the field of a one-dimensional Gaussian laser beam.

The method of coupled parameters was first introduced in relativistic hydrodynamics [21], where these parameters were defined as physical quantities of a hydrodynamic system, such as pressure, volume, and entropy, depending on a single parameter, such as temperature. In the special theory of relativity, the method of coupled parameters has been applied in Refs. [10, 17 – 20] based on eigenfunctions and eigenvalues, where it has been demonstrated that the chosen parameters being related to the invariance of the obtained results across different reference frames.

In this work, we will also show that the use of integrals of motion with coupled parameters and their eigenvalues can describe the dynamics of a particle more efficiently than its presentation in the orthogonal form [22]. Further, based on the task, on the eigenfunctions and eigenvalues, we will find the eigenvalues of the integrals of motion γ and θ from the operators of differentiation

with respect to time $\hat{t} = \frac{d}{dt}$, velocity $\hat{\beta} = \frac{d}{d\beta}$ and angular displacement $\hat{\theta} = \frac{d}{d\theta}$.

This work presents an approach that allows transitioning from certain eigenfunctions in the special theory of relativity with associated parameters to eigenvalues in various representations of the integrals of motion, which facilitate working with these eigenvalues.

A problem for eigenfunctions and eigenvalues from γ

We introduce the direct integral of motion from $\xi = t - \mathbf{nr}/c$ as a derivative with respect to time t :

$$\frac{d\xi}{dt} = Q_t = 1 - f\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}, \quad (11)$$

where

$$Q_t^+ = 1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}, \quad Q_t^- = 1 + \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}, \quad (12)$$

conjugate expressions.

The relationship between Q_t^+ , Q_t^- and Q_t is expressed by the following expressions:

$$Q_t^+ = 1 - f(1 - Q_t), \quad Q_t^- = 1 + f(1 - Q_t), \quad Q_t^+ + Q_t^- = 2. \quad (13)$$

Using Eqs. (7), (11), and (12), we represent the integral of motion (1) in the following form:

$$\gamma = \frac{Q_t}{\sqrt{Q_t^+ Q_t^-}} = Q_t \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} = Q_t E. \quad (14)$$

Eigenfunctions and eigenvalues from the integral of motion γ (14) are obtained by differentiating with respect to time t , that is,



$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dQ_t}{dt} E + Q_t \frac{dE}{dt}, \quad (15)$$

where

$$\frac{dQ_t}{dt} = -f(1 - Q_t)^2 = -f(1 - Q_t^+ Q_t^-) \quad (16)$$

is the function from Ref. [10].

The expression $\frac{dQ_t}{dt} E$ has the form in the closed Lorentz group, viz.

$$\frac{dQ_t}{dt} E = -f(1 - Q_t^+ Q_t^-) \sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} = -f \left(\sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - \sqrt{Q_t^+ Q_t^-} \right). \quad (17)$$

Under the closed Lorentz group, we will understand when all relations in the equations are closed, that is, they have a connection $Q_t^+ Q_t^-$ or $Q_\xi^+ Q_\xi^-$.

Under the open Lorentz group, we will understand when there is one “free” integral of motion Q_t or Q_ξ in the equations. It is possible to choose an invariant form. For example, for the integral of motion (see Eq. (14)) we have

$$\gamma^+ \equiv Q_t^+ E \equiv E - \mathbf{nP} \equiv \text{inv}, \quad \gamma^- \equiv Q_t^- E \equiv E + \mathbf{nP} \equiv \text{inv}. \quad (18)$$

The time derivative of the energy has the form [10]

$$\frac{dE}{dt} = P^3 \equiv \mathbf{nPP}^2. \quad (19)$$

The particle velocity can also be represented in the following form:

$$\boldsymbol{\beta} = f\mathbf{n}(1 - Q_t). \quad (20)$$

Expanding $\frac{dQ_t}{dt} E$ from Eq. (15) in an open group, we get

$$\frac{dQ_t}{dt} E = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}, \quad (21)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P} + Q_t P^3, \quad (22)$$

$$Q_t P = \beta\gamma = \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}\gamma, \quad (23)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P} + \beta\gamma P^2 = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}(1 - f\gamma P). \quad (24)$$

In Eq. (24) on the right side, multiplying and dividing by γ we get the function $f_t(\gamma)$,

$$\frac{d\gamma}{dt} = f_t(\gamma)\gamma, \quad (25)$$

$$f_t(\gamma) = \frac{-f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}(1 - f\gamma P)}{\gamma} = -\frac{f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}}{\gamma} + \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}P^2. \quad (26)$$

Representations $\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}$ in the open Lorentz group have the form

$$\boldsymbol{\beta}\mathbf{P} = f\mathbf{n}(1 - Q_t)f\mathbf{n}(Q_\xi - 1)\gamma = \gamma(Q_\xi + Q_t - 2). \quad (27)$$

Due to the invariance in Eq. (26), for $\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}P^2$ can be represented compactly $\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}$ in an open group, and P^2 in a closed group,

$$\boldsymbol{\beta} = f\mathbf{n}(1 - Q_t), \quad P^2 = Q_t^+ Q_t^- - 1. \quad (28)$$

Representation $f_t(\gamma)$ in $f_t(\gamma^+)$. The representation of $\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}P^2$ from Eq. (26) for the case $f = +1$ has the form

$$\boldsymbol{\beta}^+ = \mathbf{n}(1 - Q_t^+), \quad (29)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^+ P^2 = (1 - Q_t^+)(Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1) = P^2 - Q_\xi^- + Q_t^+. \quad (30)$$

Substituting Eqs. (27) and (28) into Eq. (26), and passing from representations $f_i(\gamma)$ to $f_i(\gamma^+)$, we obtain

$$f_i(\gamma^+) = -(Q_\xi^+ + Q_t^+ - 2) + P^2 - Q_\xi^- + Q_t^+, \quad (31)$$

$$f_i(\gamma^+) = -P^2. \quad (32)$$

From Eqs. (31) and (32) we also have the form

$$f_i(\gamma^+) = -\frac{Q_\xi^+ + Q_\xi^-}{2} + 1. \quad (33)$$

Representation $f_i(\gamma)$ in $f_i(\gamma^-)$. The representation of $\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}P^2$ from Eq. (26) for the case $f = -1$ has the form

$$\boldsymbol{\beta}^- = -\mathbf{n}(1 - Q_t^-), \quad (34)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^- P^2 = -(1 - Q_t^-)(Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1) = -P^2 + Q_t^- P^2, \quad (35)$$

$$Q_t^- P^2 = Q_t^- (Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1) = Q_\xi^+ - Q_t^-, \quad (36)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^- P^2 = -(1 - Q_t^-)(Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1) = -P^2 + Q_\xi^+ - Q_t^-, \quad (37)$$

$$f_i(\gamma^-) = \frac{-f\boldsymbol{\beta}P(1 - f\gamma P)}{\gamma} = Q_\xi^- + Q_t^- - 2 - P^2 + Q_\xi^+ - Q_t^-, \quad (38)$$

$$f_i(\gamma^-) = Q_\xi^+ + Q_\xi^- - 2 - P^2, \quad (39)$$

$$f_i(\gamma^-) = P^2. \quad (40)$$

From Eqs. (39) and (40) there is also the following form:

$$f_i(\gamma^-) = \frac{Q_\xi^+ + Q_\xi^-}{2} - 1. \quad (41)$$

Summarizing the obtained results – Eqs. (32) and (40), we have that

$$f_i(\gamma) = -fP^2. \quad (42)$$

Representation γ in γ^+ and γ^- . The representation of γ^+ and γ^- in the closed Lorentz group has the form

$$\gamma^+ \gamma^- = 1. \quad (43)$$

Differentiating Eq. (43) with respect to time, we obtain

$$\frac{d(\gamma^+ \gamma^-)}{dt} = 0, \text{ or } \frac{d\gamma^+}{dt} \gamma^- + \frac{d\gamma^-}{dt} \gamma^+ = 0. \quad (44)$$

The eigenfunction and eigenvalue problems for γ^+ and γ^- have the forms

$$\frac{d\gamma^+}{dt} = f_i(\gamma^+) \gamma^+, \quad \frac{d\gamma^-}{dt} = f_i(\gamma^-) \gamma^-, \quad (45)$$

where $f_i(\gamma^+)$ and $f_i(\gamma^-)$ are eigenfunctions γ^+ and γ^- in time t .

Substituting Eq. (45) in Eq. (44) we obtain

$$f_i(\gamma^+) + f_i(\gamma^-) = 0. \quad (46)$$

Representation of γ^+ and γ^- in differential form with respect to Q_ξ^+ and Q_ξ^- . Using the relations $Q_t^+ + Q_t^- = 2$ and $Q_t Q_\xi = 1$, we represent γ^+ and γ^- in the form

$$\begin{aligned}\gamma^+ &= \sqrt{2Q_\xi^- - 1}, \quad \gamma^- = \sqrt{2Q_\xi^+ - 1}, \\ \gamma^- &= \frac{1}{\sqrt{2Q_\xi^- - 1}}, \quad \gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2Q_\xi^+ - 1}}.\end{aligned}\quad (47)$$

In differential form, γ^+ and γ^- with respect to Q_ξ^- and Q_ξ^+ , have the following form:

$$\frac{d\gamma^+}{dQ_\xi^-} = \gamma^-, \quad \frac{d\gamma^-}{dQ_\xi^+} = \gamma^+, \quad \frac{d\gamma^-}{dQ_\xi^-} = -(\gamma^-)^3, \quad \frac{d\gamma^+}{dQ_\xi^+} = -(\gamma^+)^3. \quad (48)$$

The fulfillment of properties of Eq. (48) can be easily verified by differentiating $\gamma^+ \gamma^- = 1$, with respect to Q_ξ^- or Q_ξ^+ .

The representation of $\frac{dQ_\xi^+}{dQ_\xi^-}$ and $\frac{dQ_\xi^-}{dQ_\xi^+}$ in differential form is as follows:

$$\frac{dQ_\xi^+}{dQ_\xi^-} = -(\gamma^-)^4, \quad \frac{dQ_\xi^-}{dQ_\xi^+} = -(\gamma^+)^4. \quad (49)$$

Energy and momentum in γ^+ and γ^- have the following relationships:

$$\gamma^+ + \gamma^- = 2E = 2Q_{\xi\gamma}, \quad (50)$$

$$\gamma^- - \gamma^+ = 2\mathbf{nP} = 2f(Q_\xi - 1)\gamma. \quad (51)$$

Expanding Eq. (51), we obtain a following equation for $f = +1$:

$$\gamma^- - \gamma^+ = 2Q_\xi^+ \gamma^+ - 2\gamma^+; \quad (52)$$

for $f = -1$ we have

$$\gamma^- - \gamma^+ = -2Q_\xi^- \gamma^- + 2\gamma^-. \quad (53)$$

Representation of functions $f_t(\gamma^+)$ and $f_t(\gamma^-)$ in γ^+ and γ^- . Let us represent the functions $f_t(\gamma^-)$ from Eq. (41) and $f_t(\gamma^+)$ from Eq. (33) using the invariant forms

$$Q_\xi^+ = \frac{(\gamma^-)^2}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad Q_\xi^- = \frac{(\gamma^+)^2}{2} + \frac{1}{2},$$

in the representation γ^+ and γ^- , which have the form

$$f_t(\gamma^+) = -\frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{4} - \frac{1}{2}, \quad (54)$$

$$f_t(\gamma^-) = \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{4} + \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Adding and subtracting Eqs. (54) and (55), we have

$$f_t(\gamma^+) + f_t(\gamma^-) = 0, \quad (56)$$

$$f_t(\gamma^-) - f_t(\gamma^+) = \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{2} + 1, \quad (57)$$

Alternately multiplying Eqs. (56) and (57) by $(\gamma^+)^2$ and $(\gamma^-)^2$, we obtain a mutually invariant form of eigenvalues:

$$f_t(\gamma^+)(\gamma^+)^2 + f_t(\gamma^-)(\gamma^+)^2 = 0, \quad f_t(\gamma^+)(\gamma^-)^2 + f_t(\gamma^-)(\gamma^-)^2 = 0, \quad (58)$$

$$[f_i(\gamma^-) - f_i(\gamma^+)](\gamma^+)^2 = \frac{(\gamma^+)^4 + 1}{2} + (\gamma^+)^2, \quad (59)$$

$$[f_i(\gamma^-) - f_i(\gamma^+)](\gamma^-)^2 = \frac{1 + (\gamma^-)^4}{2} + (\gamma^-)^2. \quad (60)$$

The invariance property of the energy and momentum of a particle expressed in terms of the integral of motion γ and Q_ξ . To write the invariance property as

$$f_i(\gamma^-) + f_i(\gamma^+) = P^2 - P^2 = 0, \quad (61)$$

and

$$P^2 = P^2, \quad (62)$$

let us represent P as an open Lorentz group in the form

$$(P^+)^2 = (P^-)^2, \quad (63)$$

where the invariance property holds $2P = 2P^+ = 2P^- = \gamma^- - \gamma^+ \equiv \text{inv.}$

The momentum P of the particle is represented in the following form:

$$P = f(Q_\xi - 1)\gamma = \beta Q_\xi \gamma = \beta E = -f(Q_i - 1)Q_\xi \gamma. \quad (64)$$

Substituting the values of the pulse in the open group $P^+ = (Q_\xi^+ - 1)\gamma^+$ and $P^- = -(Q_\xi^- - 1)\gamma^-$ in Eq. (63), we obtain

$$[(Q_\xi^+ - 1)\gamma^+]^2 = [(Q_\xi^- - 1)\gamma^-]^2, \quad (65)$$

$$(Q_\xi^+ - 1)^2 (\gamma^+)^2 = (Q_\xi^- - 1)^2 (\gamma^-)^2, \quad (66)$$

$$[(Q_\xi^+)^2 - 2Q_\xi^+ + 1](\gamma^+)^2 = [(Q_\xi^-)^2 - 2Q_\xi^- + 1](\gamma^-)^2. \quad (67)$$

Using the invariance property of the energy $E = Q_\xi \gamma = Q_\xi^+ \gamma^+ = Q_\xi^- \gamma^-$, in Eq. (67) we have

$$(-2Q_\xi^+ + 1)(\gamma^+)^2 = (-2Q_\xi^- + 1)(\gamma^-)^2. \quad (68)$$

Substituting properties $Q_\xi^- = Q_\xi^+ (\gamma^+)^2$ and $Q_\xi^+ = Q_\xi^- (\gamma^-)^2$ in Eq. (68), we derive an invariant form

$$2(Q_\xi^+ - Q_\xi^-) = (\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2 = (\gamma^+ + \gamma^-)(\gamma^- - \gamma^+). \quad (69)$$

From the difference Q_ξ^+ and Q_ξ^- , we obtain

$$Q_\xi^+ - Q_\xi^- = 2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}Q_\xi^+Q_\xi^-. \quad (70)$$

From the invariance property of the velocities $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^- = \boldsymbol{\beta}^+$, we have the conservation law

$$Q_\xi^+ + Q_\xi^- = 2Q_\xi^+Q_\xi^-, \quad (71)$$

also for $\boldsymbol{\beta}^-$

$$Q_\xi^+ - Q_\xi^- = -2Q_\xi^+Q_\xi^- + 2Q_\xi^+, \quad (72)$$

as well for $\boldsymbol{\beta}^+$

$$Q_\xi^+ - Q_\xi^- = 2Q_\xi^+Q_\xi^- - 2Q_\xi^-. \quad (73)$$

Substituting the values of the energy

$$E^2 = Q_\xi^+ Q_\xi^- = \frac{(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 + 2}{4}$$

in Eqs. (72) and (73), we obtain

$$Q_\xi^+ - Q_\xi^- = -\frac{(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 + 2}{2} + 2Q_\xi^+, \quad (74)$$

$$Q_\xi^+ - Q_\xi^- = \frac{(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 + 2}{2} - 2Q_\xi^-. \quad (75)$$

Substituting Eq. (74) into Eq. (69), we have the form

$$-(\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2 - 2 + 4Q_\xi^+ = (\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2. \quad (76)$$

Similarly, substituting Eq. (75) into Eq. (69), we obtain

$$(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 + 2 - 4Q_\xi^- = (\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2. \quad (77)$$

Adding Eqs. (76) and (77), we have the value of the invariant form

$$2Q_\xi^+ - 2Q_\xi^- = (\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2, \quad (78)$$

Subtracting Eq. (76) from Eq. (77), we have

$$\frac{1}{2} \left[(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 \right] + 1 = Q_\xi^+ + Q_\xi^-. \quad (79)$$

Invariant forms of the integrals γ^+ and γ^- of particle motion. The invariant form of the integrals of motion $(\gamma^-)^2$ and $(\gamma^+)^2$ has the following form:

$$(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2 = \left[(Q_i^+)^2 + (Q_i^-)^2 \right] E^2 = 2 \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = 2(Q_\xi^+ + Q_\xi^-) - 2, \quad (80)$$

$$(\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2 = 2(Q_\xi^+ - Q_\xi^-) = 4\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} Q_\xi^+ Q_\xi^- = 2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} (Q_\xi^+ + Q_\xi^-) = \frac{4\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}{1-\beta^2}. \quad (81)$$

We introduce invariant functions that have the form

$$g = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{(\gamma^-)^2 + (\gamma^+)^2}{2}, \quad h = \frac{(\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2}{4} = \frac{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}{1-\beta^2}. \quad (82)$$

The functions g and h belong to the same class: their partial derivatives with respect to $\boldsymbol{\beta}$ are their eigenvalues and reflect the closure property of the Lorentz group:

$$\frac{dg}{d\boldsymbol{\beta}} = 4h Q_\xi^+ Q_\xi^- = 4h E^2, \quad \frac{dh}{d\boldsymbol{\beta}} = g Q_\xi^+ Q_\xi^- = g E^2. \quad (83)$$

Taking the derivatives of the integrals of motion γ^- and γ^+ (see Eq. (18)) with respect to $\boldsymbol{\beta}$, we obtain

$$\mathbf{n} \frac{d\gamma^-}{d\boldsymbol{\beta}} = \frac{\gamma^+}{(Q_i^+)^2} = \frac{(\gamma^+)^2}{(Q_i^+)^2} \gamma^- = f_\beta(\gamma^-) \gamma^-, \quad f_\beta(\gamma^-) = \frac{(\gamma^+)^2}{(Q_i^+)^2} = E^2. \quad (84)$$

Similarly, for γ^+ we have

$$\mathbf{n} \frac{d\gamma^+}{d\boldsymbol{\beta}} = f(\gamma_\beta^+) \gamma^+, \quad f(\gamma_\beta^+) = -E^2. \quad (85)$$

As can be seen, for Eqs. (84) and (85) the following properties of the invariant form hold:

$$f_{\beta}(\gamma^+) + f_{\beta}(\gamma^-) = 0, \quad (86)$$

$$\mathbf{n} \frac{d\gamma^+}{d\beta} + \mathbf{n} \frac{d\gamma^-}{d\beta} = f_{\beta}(\gamma^-)(\gamma^- - \gamma^+) = 2\mathbf{nPE}^2, \quad (87)$$

$$\mathbf{n} \frac{d\gamma^-}{d\beta} - \mathbf{n} \frac{d\gamma^+}{d\beta} = f_{\beta}(\gamma^-)(\gamma^- + \gamma^+) = 2E^3. \quad (88)$$

From properties (5), (6), and (7) of the invariance of the energy E and momentum \mathbf{P} with respect to β , we have

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\beta} = E^3, \quad \frac{dE}{d\beta} = \beta E^3 = \mathbf{PE}^2. \quad (89)$$

Taking the derivative of the integrals of motion (18), we obtain the invariant form

$$\frac{dE}{d\beta} + \mathbf{n} \frac{d\mathbf{P}}{d\beta} = \frac{d\gamma^-}{d\beta}, \quad (90)$$

and substituting the values (89), (85) into Eq. (90) we obtain that the integrals of motion γ^- and γ^+ are invariant with respect to differentiation with respect to β .

From properties (5), (6) and (7) of the invariance of energy and momentum with respect to time t , we obtain:

$$\mathbf{n} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = P^2 E. \quad (91)$$

Differentiating Eq. (18) with respect to time t and substituting the values (91), (45) and (19), we obtain the mutually invariant form (18). The fulfillment of the invariant form of Eqs. (19), (89) and (91) is also easy to check by differentiating the conservation law (6) with respect to time t or velocity β .

Reverse energy of a relativistic particle. We introduce the inverse energy function as

$$E_g = \frac{1}{E} = \frac{1}{Q_{\xi} \gamma} = \frac{Q_t}{\gamma} = \sqrt{Q_t^+ Q_t^-}. \quad (92)$$

The invariant form of the inverse energy has the form

$$E_g = \frac{Q_t}{\gamma} = Q_t^+ \gamma^- = Q_t^- \gamma^+ = \sqrt{Q_t^+ Q_t^-}. \quad (93)$$

From the properties obtained above, we introduce invariant relations using the reciprocal energy of the particle:

$$EE_g = 1. \quad (94)$$

$$P^2 E_g^- = (Q_{\xi}^+ Q_{\xi}^- - 1) Q_t^- \gamma^+ = Q_{\xi}^+ \gamma^+ - Q_t^- \gamma^+. \quad (95)$$

$$P^2 E_g^+ = (Q_{\xi}^+ Q_{\xi}^- - 1) Q_t^+ \gamma^- = Q_{\xi}^- \gamma^- - Q_t^+ \gamma^-, \quad (96)$$

$$\mathbf{PE}_g = f\mathbf{n}(Q_{\xi}^- - 1)\gamma \frac{Q_t}{\gamma} = f\mathbf{n}(Q_{\xi}^- - 1)Q_t = f\mathbf{n}(1 - Q_t) = \beta, \quad (97)$$

$$\mathbf{P}^+ E_g^+ = \beta^+ = \mathbf{P}^- E_g^- = \beta^-, \quad (98)$$

$$\mathbf{P}^+ E_g^- = \mathbf{n}(1 - Q_t^+) = \beta^+, \quad P^- E_g^+ = -(1 - Q_t^-) = \beta^-. \quad (99)$$



Pseudopotential energy of a relativistic particle. We introduce the pseudopotential energy function as

$$E_p = Q_t \gamma = Q_t^2 E. \quad (100)$$

$$EE_p = \gamma^2, \quad (101)$$

$$E^+ E_p^+ = E^- E_p^- = (\gamma^+)^2, \quad (102)$$

$$E^+ E_p^- = E^- E_p^+ = (\gamma^-)^2. \quad (103)$$

Reverse momentum of a relativistic particle. The reverse momentum of a particle has the form

$$\mathbf{nP}_g = \frac{1}{\mathbf{nP}} = \frac{Q_t}{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}\gamma}, \quad (104)$$

and

$$\mathbf{nP}_g = \frac{1}{\mathbf{nP}} = \frac{Q_t}{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}\gamma} = \frac{Q_t^+ \gamma^-}{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} = \frac{Q_t^- \gamma^+}{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}, \quad (105)$$

where $\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^- = \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^+$.

Decomposition into a spectrum in terms of γ^+ and γ^- of the squared momentum P^2 and squared energy E^2 of the particle. The connections of the integrals of the motion of the particle γ^+ and γ^- through the energy of the particle has the form

$$\gamma^+ + \gamma^- = 2E. \quad (106)$$

Squaring Eq. (106) we obtain

$$\frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{4} + \frac{1}{2} = E^2. \quad (107)$$

Subtracting one from both sides of the equation, we have

$$\frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{4} - \frac{1}{2} = E^2 - 1 = P^2. \quad (108)$$

Using the invariant property of integrals of motion

$$Q_\xi^+ Q_\xi^- = \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{4} + \frac{1}{2}, \quad (109)$$

we have

$$P^2 = Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1 = (E-1)(E+1), \quad (110)$$

and

$$(1 - Q_\xi^+)(Q_\xi^- - 1) = (E-1)(E+1). \quad (111)$$

Adding $\gamma^+ \gamma^- = 1$ to the left side of Eq. (111), we obtain

$$(\gamma^+ - Q_\xi^+ \gamma^+)(Q_\xi^- \gamma^- - \gamma^-) = (E-1)(E+1), \quad (112)$$

and using the invariance property

$$E = Q_\xi \gamma = Q_\xi^+ \gamma^+ = Q_\xi^- \gamma^-,$$

we have

$$(\gamma^+ - E)(E - \gamma^-) = (E-1)(E+1). \quad (113)$$

Revealing Eq. (113), we obtain a representation of the square momentum of the particle:

$$\frac{\gamma^+ E + E \gamma^-}{2} = E^2 = P^2 + 1. \quad (114)$$

Dividing Eq. (114) by energy, we have

$$\frac{\gamma^+ + \gamma^-}{2} = E. \quad (115)$$

Substituting into the left part of Eq. (115) the values of the invariant form of the energy of the particle

$$E = Q_\xi \gamma = Q_\xi^+ \gamma^+,$$

we obtain

$$\frac{(\gamma^+)^2 + 1}{2} = Q_\xi^-. \quad (116)$$

Similarly, substituting the values of the invariant form of the particle energy

$$E = Q_\xi \gamma = Q_\xi^- \gamma^-$$

into the left part of Eq. (115), we obtain

$$\frac{(\gamma^-)^2 + 1}{2} = Q_\xi^+, \quad (117)$$

Adding Eqs. (116) and (117), we have the following form:

$$\frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{2} + 1 = Q_\xi^+ + Q_\xi^-, \quad (118)$$

and

$$\frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{2} = 2Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1 = P^2 + E^2. \quad (119)$$

Subtracting Eq. (117) from Eq. (116), we obtain

$$\frac{(\gamma^-)^2 - (\gamma^+)^2}{2} = Q_\xi^+ - Q_\xi^- = 2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} Q_\xi^+ Q_\xi^- = 2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} E^2, \quad (120)$$

Expressing $2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}$, we obtain

$$2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = Q_t^- - Q_t^+ = \frac{(Q_t^-)^2}{2} - \frac{(Q_t^+)^2}{2} = \frac{(Q_t^- - Q_t^+)(Q_t^+ + Q_t^-)}{2}. \quad (121)$$

Converting Eq. (119), we obtain the value of the square of the particle energy:

$$E^2 = Q_\xi^+ Q_\xi^- = \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{2} + \frac{1}{2}. \quad (122)$$

Similarly, for the value of the square of the particle momentum, we obtain

$$P^2 = Q_\xi^+ Q_\xi^- - 1 = \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma^-)^2}{2} - \frac{1}{2}. \quad (123)$$

Using the relations between the integrals of motion

$$Q_\xi^+ + Q_\xi^- = 2Q_\xi^+ Q_\xi^-, \quad Q_t^+ + Q_t^- = 2, \quad (124)$$

it is easy to collect the particle momentum from the invariant forms of the integrals of motion Q_t and Q_ξ :

$$Q_{\xi}^{+} + Q_{\xi}^{-} - (Q_t^{+} + Q_t^{-}) = 2Q_{\xi}^{+}Q_{\xi}^{-} - 2 = 2P^2. \quad (125)$$

Multiplying P^2 from Eq. (125) by $2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = Q_t^{-} - Q_t^{+}$, we obtain

$$Q_{\xi}^{+} - Q_t^{-} - Q_{\xi}^{-} + Q_t^{+} = 2\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}P^2. \quad (126)$$

Adding and subtracting Eqs. (125) and (126), we have

$$Q_t^{-}P^2 = Q_{\xi}^{+} - Q_t^{-}, \quad Q_t^{+}P^2 = Q_{\xi}^{-} - Q_t^{+}. \quad (127)$$

The relation for the particle energy has the following invariant relations:

$$Q_t^{-}E^2 = Q_{\xi}^{+}, \quad Q_t^{+}E^2 = Q_{\xi}^{-}. \quad (128)$$

Representation of integrals of motion as a function $\gamma = \gamma(Q_t, \mathbf{P}, E, \mathbf{P}_g, E_g)$. From the problems on eigenfunctions and eigenvalues from the above paragraphs, it is convenient to represent the integrals of motion γ^{+} and γ^{-} as invariant functions

$$\gamma = (1 - Q_t)^2 EP_g^2 - fQ_t \mathbf{n}\mathbf{P}, \quad (129)$$

$$\gamma = E_g - fQ_t \mathbf{n}\mathbf{P}. \quad (130)$$

The γ values (129) and (130) are expressed in terms of a one-to-one correspondence:

$$E_g + f\mathbf{n}\mathbf{P}_g = f \frac{E_g \mathbf{n}\mathbf{P}_g}{\gamma}, \quad (131)$$

$$\gamma^{-1} = E + f\mathbf{n}\mathbf{P}. \quad (132)$$

Angular integral of motion θ

The functional dependencies $\gamma = \gamma(Q_t)$ and $Q_t = Q_t(\gamma)$ have been introduced above. We now define the integral angle, or angular integral of motion, as a function $\gamma = \gamma(\theta)$.

The integrals of motion from Eq. (18) with the application of Eq. (5) take the form

$$\gamma^{+} = \cosh \theta - \sinh \theta = \exp(-\theta), \quad \gamma^{-} = \cosh \theta + \sinh \theta = \exp(\theta). \quad (133)$$

Generalizing the Eqs. (133), the integral of motion γ has the following relation with the angular integral of motion θ

$$\gamma = \cosh \theta - f \sinh \theta = \exp(-f\theta). \quad (134)$$

Substituting the integral of motion (134) in the invariant form of the particle energy $E = Q_{\xi}\gamma$, we obtain

$$Q_t = 1 - f \tanh \theta, \quad (135)$$

where, in Eq. (135), Q_t^{+} and Q_t^{-} take the forms

$$Q_t^{+} = 1 - \tanh \theta, \quad Q_t^{-} = 1 + \tanh \theta. \quad (136)$$

It is easy to show from Eq. (135) that the particle velocity has the form

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \tanh \theta. \quad (137)$$

Substituting the particle energy and momentum values from Eq. (5), it can be seen that

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \frac{\sqrt{E^2 - 1}}{E}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{P}}{\sqrt{P^2 + 1}}, \quad (138)$$

thus, the functions $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{P}, E)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})$ and $E = E(\boldsymbol{\beta})$ have a mutual functional dependence.

Multiplying Q_t^+ and Q_t^- from Eq. (136), we have

$$Q_t^+ Q_t^- = 1 - \tanh^2 \theta, \quad Q_\xi^+ Q_\xi^- = \cosh^2 \theta. \quad (139)$$

Expressing from Eq. (135) Q_ξ , we obtain

$$Q_\xi = 0.5 \cdot [\exp(2f\theta) + 1], \quad (140)$$

where

$$Q_\xi^+ = \frac{1}{2} [\exp(2\theta) + 1], \quad Q_\xi^- = \frac{1}{2} [\exp(-2\theta) + 1]. \quad (141)$$

From Eq. (140) we obtain the invariant form of the integral of motion γ :

$$(\gamma^f)^2 = 2Q_\xi - 1 = \exp(2f\theta), \quad \gamma^f = \exp(f\theta), \quad (142)$$

where the choice of $f = +1$ or $f = -1$ is determined by the principle of relativity.

Representation of the space-time characteristics depending on the integral of motion θ . By representing the integral of motion (134) as a function differentiable with respect to θ , we obtain the eigenvalue of the function γ :

$$\gamma' = -f \exp(-f\theta) = -f\gamma. \quad (143)$$

From the representations of the principle of the particle motion for the space-time Lorentz coordinate, we have

$$\xi = t - f \frac{\mathbf{nr}}{c}, \quad (144)$$

where

$$t = 1 - \frac{f}{(1 - Q_t)}, \quad \mathbf{nr} = \frac{1}{2} \ln[(1 - Q_t)^2]; \quad (145)$$

using Eq. (135) we can be sure that the angular integral of motion has the following dependence:

$$t = 1 - \coth \theta, \quad \mathbf{nr} = 0.5 \ln(\tanh^2 \theta). \quad (146)$$

Differentiating Eq. (146) with respect to θ , we obtain

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sinh^2 \theta}, \quad \mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{1}{\cosh \theta \sinh \theta}, \quad (147)$$

where

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \tanh \theta, \quad (148)$$

the value from Eq. (137).

Differentiating ξ from Eq. (144) with respect to θ , we obtain

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\gamma}{\sinh^2 \theta \cosh \theta} = \frac{\gamma}{P^2 E} = \frac{Q_t}{\sinh^2 \theta} = \frac{Q_t}{P^2}. \quad (149)$$

Using the differential form from Eq. (147) $\zeta = P^2 = \sinh^2 \theta$, we have

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\xi}{d\theta} \dot{\theta} = Q_t. \quad (150)$$

Lagrangian and Hamiltonian formalisms for a free particle in the representation θ . The

Lagrangian depending on θ and $\zeta = \frac{d\theta}{dt}$ has the following representations:

$$L' = \frac{L}{mc} = -\sqrt{Q_t^+ Q_t^-} = -\frac{Q_t}{\gamma} = -\frac{1}{\cosh \theta} = -\frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}. \quad (151)$$

The derivatives of the differential forms of θ and ζ from Eq. (151) have the form

$$\frac{\partial L'}{\partial \theta} = \frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta} = \frac{\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}{E}, \quad (152)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \zeta} = \frac{1}{2(\zeta+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2 \cosh^3 \theta} = \frac{1}{2E^3}, \quad (153)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \zeta} \right) = -\frac{3 P^3}{2 E^4}. \quad (154)$$

The Lagrangian function of the integral of motion Q_t and the coordinate $q = -f\mathbf{nr}/c$ from Eq. (146) has the following form in the representation θ :

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_t} = -\frac{1-Q_t}{\sqrt{Q_t^+ Q_t^-}} = -f \sinh \theta = -f\mathbf{n}\mathbf{P}, \quad (155)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial Q_t} \right) = -f \left(\sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - \sqrt{Q_t^+ Q_t^-} \right) = -f \tanh \theta \sinh \theta = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}, \quad (156)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = -f \left(\sqrt{Q_\xi^+ Q_\xi^-} - \sqrt{Q_t^+ Q_t^-} \right) = -f \tanh \theta \sinh \theta = -f\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}. \quad (157)$$

It follows from Eqs. (155) and (157) that

$$\frac{\partial Q_t}{\partial q} = \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}. \quad (158)$$

Also, from Eq. (135), we have a partial differential form

$$\frac{\partial \theta}{\partial Q_t} = -f \cosh^2 \theta. \quad (159)$$

From Eqs. (158) and (159) we have the following differential form:

$$\frac{\partial \theta}{\partial q} = -f \cosh \theta \sinh \theta. \quad (160)$$

The Lagrange equation of the second kind as a function $L' = L'(q, t, Q_t, \theta, \zeta)$ has the following form:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial Q_t} \right) \frac{\partial L'}{\partial \theta} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} \frac{\partial Q_t}{\partial q} = 0. \quad (161)$$

From Eqs. (134), (140) and (50) we have that the Hamiltonian of a free particle is

$$H' = Q_\xi \gamma = E = \cosh \theta. \quad (162)$$

Substituting Eqs. (162) and (3) into the integral of motion (134), we obtain a generalized integral of motion in the form

$$\gamma = H' - f \frac{\partial H'}{\partial \theta}. \quad (163)$$

Due to the fact that γ^+ and γ^- are invariants of motion different in direction and from the principle of relativity, we obtain

$$\gamma^+ = H' - \frac{\partial H'}{\partial \theta}, \quad \gamma^- = H' + \frac{\partial H'}{\partial \theta}, \quad (164)$$

$$\gamma^+ \gamma^- = (H')^2 - \left(\frac{\partial H'}{\partial \theta} \right)^2 = 1, \quad (165)$$

where Eq. (165) expresses the law of conservation of energy in Hamiltonian form.

Using Lagrangian and Hamiltonian formalisms, it is convenient to introduce the following equation describing the conservation law by ζ :

$$2 \frac{\partial H'}{\partial \zeta} + L' = 0. \quad (166)$$

The classical action function for a particle that has no charge has the form [23]

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = -\sqrt{Q_t^+ Q_t^-} = L'. \quad (167)$$

As is known, in the Hamilton – Jacobi equation [23], when substituting Eq. (167), we have the following form:

$$H' + \frac{\partial S'}{\partial t} = Q_\xi \gamma - \frac{Q_t}{\gamma} = \cosh \theta - \frac{1}{\cosh \theta} = \hat{H}', \quad (168)$$

where \hat{H} is the displacement Hamiltonian.

Differentiating Eq. (168) with respect to θ , we have

$$\frac{\partial \hat{H}'}{\partial \theta} = \sinh(\theta) + \frac{\tanh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \mathbf{nP} + \frac{\mathbf{n}\beta}{E} = \frac{\partial L'}{\partial \theta} - f \frac{\partial L'}{\partial Q_t}, \quad (169)$$

and

$$\frac{\partial \hat{H}'}{\partial \theta} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = \mathbf{nP}. \quad (170)$$

Representing Eq. (168) as a function $\hat{H} = \hat{H}(\zeta)$, we obtain

$$\hat{H}' = \sqrt{\zeta + 1} - \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta + 1}} = \frac{P^2}{\sqrt{P^2 + 1}} = \beta \mathbf{P}. \quad (171)$$

Differentiating Eq. (171) with respect to ζ , we have

$$\frac{\partial \hat{H}'}{\partial \zeta} = \frac{\zeta + 2}{2(\zeta + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh^2 \theta + 1}{2 \cosh^3 \theta} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{L}{2}. \quad (172)$$

The relationship between derivatives (169) and (172) has the following form:

$$\sinh(2\theta) \frac{\partial \hat{H}'}{\partial \zeta} = \frac{\partial \hat{H}'}{\partial \theta}, \quad (173)$$

where

$$\sinh(2\theta) = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = -f \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial q}. \quad (174)$$

Thus, it is established mutually expressible between $\gamma = \gamma(\theta)$ and $\theta = \theta(\gamma)$, where the explicit relationship θ depending on γ has the form

$$\theta = \arctan h \left[f \left(\frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right) \right]. \quad (175)$$

Conclusions

In this work, based on the integrals of motion $\gamma = \gamma(\mathbf{r}, t, Q, \theta)$ and $\theta = \theta(\mathbf{r}, t, Q, \gamma)$, new relativistic forms have been obtained, which can be used to analyze the motion of particles, both in electromagnetic and gravitational fields.

From the problem on eigenfunctions and eigenvalues, the integral of motion was shown to have a relativistic invariant form, when taking the derivative with respect to time t and velocity β . A mutually invariant relationship between $\gamma = \gamma(\theta)$ and $\theta = \theta(\gamma)$ was derived.

The generalized integral of motion $\gamma = \gamma(\theta)$ from Eq. (163) was obtained using the Hamiltonian formalism.



Thus, in the future, to analyze the motion of a relativistic particle in electromagnetic fields, not only the invariant form γ from Eq. (1) should be taken into account, but also the contribution of the scalar φ and vector \mathbf{A} potentials, that is, the integral of motion should be considered as a function of $\gamma = \gamma(Q, \mathbf{A}, \varphi)$.

Relations of mutually invariant differential forms with generalized forms of motion were obtained. The Lagrange equation of the second kind was derived as a function of $L' = L'(q, t, Q, \theta, \zeta)$. The Lagrangian formalism showed the mutual correspondence between $L' = L'(q, Q)$ and $L' = L'(\theta, \zeta)$.

The functions of reverse energy and reverse momentum, the functions of pseudopotential energy and pseudopotential momentum were introduced. Their connection with the integral of motion γ was shown.

Using these conclusions, it is further interesting to generalize such problems as the motion of a charged particle in electromagnetic fields of various configurations in the presence of stationary and variable electric and magnetic fields and to study relativistic effects that occur when particles are accelerated and decelerated by electromagnetic fields. Our findings will be also useful in the future for the development of such areas as double special relativity and gravitomagnetism.

Acknowledgments

The authors would like to thank Prof. V. A. Isaev, Prof. E. N. Tumaev, Prof. Yongjie Yang, Prof. V. G. Bagrov, Prof. V. Ya. Epp and Assoc. Prof. A. A. Martynov for their instructive comments.

REFERENCES

1. **Qian, B.-L.**, Relativistic motion of a charged particle in a superposition of circularly polarized plane electromagnetic waves and a uniform magnetic field, *Phys. Plasmas*. 7 (2) (2000) 537–543.
2. **Kong L.-B., Liu P.-K.**, Analytical solution for relativistic charged particle motion in a circularly polarized electromagnetic wave, *Phys. Plasmas*. 14 (6) (2007) 063101.
3. **Andreev S. N., Makarov V. P., Rukhadze A. A.**, On the motion of a charged particle in a plane monochromatic electromagnetic wave, *Kvant. Elektron*. 39 (1) (2009) 68–72.
4. **Volodin B. A., Ponomarev I. V., Khapaev A. M.**, On electron motion in the Redmond field, *Soviet Phys. J*. 27 (3) (1984) 113.
5. **Galkin A. L., Korobkin V. V., Romanovskii M. Yu., Shiryaev O. B.**, Relativistic motion and radiation of an electron in the field of an intense laser pulse, *Kvant. Elektron*. 37 (10) (2007) 903–909.
6. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P.**, Acceleration of a charged particle in the Redmond field, *AIP Adv*. 12 (3) (2022) 035212.
7. **Borovskiy A. V., Galkin A. L.**, Electron emission from the focus of the Gaussian pulse, *Laser Phys*. 32 (8) (2022) 084008.
8. **Buts V. A., Zagorodny A. G.**, New cyclotron resonances and features of charged-particle dynamics in the presence of an intense electromagnetic wave, *Phys. Plasmas*. 28 (2) (2021) 022311.
9. **Landau L. D., Lifshitz E. M.**, Course of theoretical physics. Vol. 2. The classical theory of fields, Pergamon Press, Oxford, UK, 1975.
10. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Martinov A. A.**, The motion of an uncharged relativistic particle: an analysis of its integrable motion integrals dynamics, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (2) (2023) 132–145.
11. **Aoisio R., Galante A., Grillo A., et al.**, A note on DSR-like approach to space–time, *Phys. Lett. B*. 610 (1–2) (2005) 101–106.
12. **Amelino-Camelia G.**, Testable scenario for relativity with minimum length, *Phys. Lett. B*. 510 (1–4) (2001) 255–263.
13. **Pavlopoulos T. G.**, Are we observing Lorentz violation in gamma ray bursts? *Phys. Lett. B*. 625 (1–2) (2005) 13–18.
14. **Amelino-Camelia G.**, Special treatment, *Nature*. 418 (6893) (2002) 34–35.
15. **Amelino-Camelia G.**, Doubly-special relativity: fact, myths and some key open issues, *Symmetry*. 2 (1) (2010) 230–271.

16. **Addazi A., Alvarez-Muniz J., Alves Batista R., et. al.**, Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era – A review, *Progr. Part. Nucl. Phys.* 125 (July) (2022) 103948.
17. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kopytov G. F., Yang Y.**, Lagrangian and Hamiltonian formalisms for relativistic mechanics with Lorentz-invariant evolution parameters in 1 + 1 dimensions, *Symmetry.* 15 (9) (2023) 1691.
18. **Akintsov N. S., Kopytov G. F., Nevecheria A. P., Yang Y.**, Lorentz-invariant forms of motion of classical relativistic particles in 3+1 dimensions, *Izv. Vuzov. Fiz.* 66 (8) (2023) 41–49.
19. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kopytov G. F., et. al.**, Special relativity in terms of hyperbolic functions with coupled parameters in 3+1 dimensions, *Symmetry.* 16 (3) (2024) 357.
20. **Akintsov N., Nevecheria A., Kopytov G.**, Modulated laser-induced acceleration of a relativistic charged particle, *Indian J. Phys.* 98 (3) (2024) 1123–1137.
21. **Milekhin G. A.**, Hydrodynamic theory of multiple production of particles in collisions between fast nucleons and nuclei, *Sov. Phys. JETP.* 8 (5) (1959) 829–837.
22. **Khadka C. B.**, Formulation of the Lorentz transformation equations in the three dimensions of space, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 17 (2) (2024) 160–173.
23. **Landau L. D., Lifshitz E. M.**, Course of theoretical physics. Vol. 1. Mechanics, Butterworth-Heinemann, London, UK, 1976.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Qian B.-L.** Relativistic motion of a charged particle in a superposition of circularly polarized plane electromagnetic waves and a uniform magnetic field // *Physics of Plasmas.* 2000. Vol. 7. No. 2. Pp. 537–543.
2. **Kong L.-B., Liu P.-K.** Analytical solution for relativistic charged particle motion in a circularly polarized electromagnetic wave // *Physics of Plasmas.* 2007. Vol. 14. No. 6. P. 063101.
3. **Андреев С. Н., Макаров В. П., Рухадзе А. А.** О движении заряженной частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне // *Квантовая электроника.* 2009. Т. 39. № 1. С. 68–72.
4. **Володин Б. А., Пономарев И. В., Хапаев А. М.** К вопросу о движении электрона в поле Редмонда // *Известия высших учебных заведений. Физика.* 1984. № 3. С. 113–115.
5. **Галкин А. Л., Коробкин В. В., Романовский М. Ю., Ширяев О. Б.** Релятивистское движение и излучение электрона в поле интенсивного лазерного импульса // *Квантовая электроника.* 2007. Т. 37. № 10. С. 903–909.
6. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P.** Acceleration of a charged particle in the Redmond field // *AIP Advances.* 2022. Vol. 12. No. 3. P. 035212.
7. **Borovski A. V., Galkin A. L.** Electron emission from the focus of the Gaussian pulse // *Laser Physics.* 2022. Vol. 32. No. 8. P. 084008.
8. **Buts V. A., Zagorodny A. G.** New cyclotron resonances and features of charged-particle dynamics in the presence of an intense electromagnetic wave // *Physics of Plasmas.* 2021. Vol. 28. No. 2. P. 022311.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика в 10 тт. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1967. 458 с.
10. **Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Martinov A. A.** The motion of an uncharged relativistic particle: an analysis of its integrable motion integrals dynamics // *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 2023. Vol. 16. No. 2. Pp. 132–145.
11. **Aoisio R., Galante A., Grillo A., Luzio E., Mendez F.** A note on DSR-like approach to space-time // *Physics Letters B.* 2005. Vol. 610. No. 1–2. Pp. 101–106.
12. **Amelino-Camelia G.** Testable scenario for relativity with minimum length // *Physics Letters B.* 2001. Vol. 510. No. 1–4. Pp. 255–263.
13. **Pavlopoulos T. G.** Are we observing Lorentz violation in gamma ray bursts? // *Physics Letters B.* 2005. Vol. 625. No. 1–2. Pp. 13–18.
14. **Amelino-Camelia G.** Special treatment // *Nature.* 2002. Vol. 418. No. 6893. Pp. 34–35.
15. **Amelino-Camelia G.** Doubly-special relativity: fact, myths and some key open issues // *Symmetry.* 2010. Vol. 2. No. 1. Pp. 230–271.



16. Addazi A., Alvarez-Muniz J., Alves Batista R., et. al. Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era – A review // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2022. Vol. 125. July. P. 103948.
17. Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kopytov G. F., Yang Y. Lagrangian and Hamiltonian formalisms for relativistic mechanics with Lorentz-invariant evolution parameters in 1 + 1 dimensions // Symmetry. 2023. Vol. 15. No. 9. P. 1691.
18. Акинцов Н. С., Копытов Г. Ф., Невечеря А. П., Ян Ю. Лоренц-инвариантные формы движения классической релятивистской частицы в 3+1-измерениях // Известия вузов. Физика. 2023. Т. 66. № 8. С. 41–49.
19. Akintsov N. S., Nevecheria A. P., Kopytov G. F., Yang Y., Cao T. Special relativity in terms of hyperbolic functions with coupled parameters in 3+1 dimensions // Symmetry. 2024. Vol. 16. No. 3. P. 357.
20. Akintsov N., Nevecheria A., Kopytov G. Modulated laser-induced acceleration of a relativistic charged particle // Indian Journal of Physics. 2024. Vol. 98. No. 3. Pp. 1123–1137.
21. Milekhin G. A. Hydrodynamic theory of multiple production of particles in collisions between fast nucleons and nuclei, Sov. Phys. JETP. 1959. Vol. 8. No. 5. Pp. 829–837.
22. Khadka C. B. Formulation of the Lorentz transformation equations in the three dimensions of space // St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. 2024. Vol. 17. No. 2. Pp. 160–173.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 тт. Т. 1. Механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. 216 с.

THE AUTHORS

AKINTSOV Nikolai S.

Nantong University

Nantong University, Nantong, 226019, People's Republic of China

akintsov777@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1040-1292

NEVECHERIA Artem P.

Kuban State University

149 Stavropolskaya St., Krasnodar, 350040, Russia

artiom1989@mail.ru

ORCID: 0000-0001-6736-4691

KOZHEVNIKOV Vasily Yu.

Institute of High Current Electronics, Siberian Branch of RAS

2/3 Akademichesky Ave., Tomsk, 634055, Russia

Vasily.Y.Kozhevnikov@ieee.org

ORCID: 0000-0001-7499-0578

KOPYTOV Gennadij F.

Moscow State University of Technology and Management

73 Zemlyanoy Val St., Moscow, 109004, Russia

rektorat@mgutm.ru

ORCID: 0000-0003-1378-576X

CAO Tun

Dalian University of Technology

2 Linggong Road, Dalian City, 116024, People's Republic of China

caotun1806@dlut.edu.cn

ORCID: 0000-0003-3536-0092

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АКИНЦОВ Николай Сергеевич – кандидат физико-математических наук, научный исследователь Наньтунского университета, г. Наньтун, Китайская Народная Республика.

226019, People's Republic of China, 40 Qing Nian Dong Lu, Chongchuan

akintsov777@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1040-1292

НЕВЕЧЕРЯ Артём Павлович – преподаватель кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета, г. Краснодар, Россия.

350040, Россия, г. Краснодар, Ставропольская ул., 149

artiom1989@mail.ru

ORCID: 0000-0001-6736-4691

КОЖЕВНИКОВ Василий Юрьевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической и математической физики Института сильноточной электроники Сибирского отделения РАН (ИСЭ СО РАН).

634055, Россия, г. Томск, Академический пр., 2/3

Vasily.Y.Kozhevnikov@ieee.org

ORCID: 0000-0001-7499-0578

КОПЫТОВ Геннадий Филиппович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики Московского государственного университета технологий и управления имени К. Г. Разумовского, Москва, Россия.

109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, 73.

rektorat@mgut.ru

ORCID: 0000-0003-1378-576X

ЦАО Тун – PhD, профессор кафедры биомедицинской инженерии Даляньского технологического университета, г. Далянь, Китайская Народная Республика.

116024, Китайская Народная Республика., провинция Ляонин, г. Далянь,

Р-н Ганьцзинцзы, ул. Лингун, 2,

caotun1806@dlut.edu.cn

ORCID: 0000-0003-3536-0092

Received 10.10.2024. Approved after reviewing 17.03.2025. Accepted 17.03.2025.

Статья поступила в редакцию 10.10.2024. Одобрена после рецензирования 17.03.2025. Принята 17.03.2025.

Научная статья

УДК 531.391+681.5

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ТИМОШЕНКО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ

А. В. Федотов , А. К. Беляев

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

 alvafed@yandex.ru

Аннотация. При описании изгибных колебаний упругих балок переход от модели Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко ведет к усложнению динамического поведения балки, появлению новых эффектов и новых форм колебаний. Цель работы – протестировать подходы к управлению, разработанные для балок Бернулли – Эйлера, в применении к более толстым балкам, которые описываются моделью Тимошенко, и исследовать влияние толщины балок на эффективность таких подходов. Для этого проведен численный анализ задачи активного гашения вынужденных колебаний шарнирно-опертых металлических балок с помощью систем управления с наблюдателями состояния, где в качестве управляющих воздействий выступают сосредоточенные силы или моменты. Показано, что для задачи гашения колебаний балки Тимошенко по низшим формам предложенный подход остается эффективным для широкого диапазона значений толщины рассматриваемых балок.

Ключевые слова: балка Бернулли – Эйлера, балка Тимошенко, активное гашение колебаний, наблюдатель состояния

Для цитирования: Федотов А. В., Беляев А. К. Активное гашение изгибных колебаний балок Тимошенко с использованием наблюдателей состояния // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 127–140. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

ACTIVE CONTROL OF BENDING VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS USING STATE OBSERVERS

A. V. Fedotov , A. K. Belyaev

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia

 alvafed@yandex.ru

Abstract. When describing bending vibrations of elastic beams, the transition from the Bernoulli – Euler model to the Timoshenko model leads to a complication in the dynamic behavior of the beam and to the emergence of new dynamic effects and a new spectrum of vibration modes. The aim of this study is to test control approaches developed for Bernoulli – Euler beams, for thicker beams described by the Timoshenko model, and to study the influence of beam thickness on the efficiency of such approaches. For this purpose, the problem of active damping of forced bending vibrations of simply supported metal beams has been studied numerically using control systems with state observers, where point forces or moments serve as control inputs. It was shown that the proposed approach remained effective for the vibration control problem of Timoshenko beams at lower modes over a wide thickness range of the considered beams.

Keywords: Bernoulli – Euler beam, Timoshenko beam, active vibration control, state observer

For citation: Fedotov A. V., Belyaev A. K., Active control of bending vibrations of Timoshenko beams using state observers, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 127–140. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Для описания динамики сравнительно толстых балок требуются более сложные модели, по сравнению с моделью Бернулли – Эйлера, хорошо описывающей изгибные колебания тонких балок. Модель Тимошенко отличается от модели Бернулли – Эйлера учетом сдвига поперечных сечений балки: это означает, что указанные сечения могут не быть перпендикулярными средней линии балки (при этом в обеих моделях сечения остаются плоскими). Кроме того, в модели Тимошенко учитывается инерция поворота сечений балки. Имеются также промежуточные варианты моделей, которые учитывают только один из двух названных эффектов (сдвиг или инерция поворота сечений), однако они уступают модели Тимошенко в точности и используются существенно реже.

В задаче о свободных изгибных колебаниях балок переход от модели Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко приводит логичным образом к изменению и усложнению решения. Во-первых, несколько модифицируются уже существующие собственные формы и частоты колебаний: у форм появляется сдвиговая составляющая, при этом частоты сдвигаются влево (в сторону уменьшения). Во-вторых, появляется абсолютно новая часть спектра собственных частот и форм – это те формы, в которых сдвиговые деформации преобладают над изгибными. Таким образом, поведение балок изменяется не только количественно, но и качественно.

Очевидно, что влияние перечисленных эффектов тем значительнее, чем больше толщина рассматриваемой балки, а также это влияние растет с повышением частоты колебаний, поскольку модель Тимошенко, по сравнению с моделью Бернулли – Эйлера, лучше описывает именно высокочастотную динамику. Поэтому в задачах, связанных с рассмотрением высокочастотной динамики балок, например, при моделировании гашения упругих волн, корректнее использовать модель Тимошенко [1, 2].

В задачах, где активное подавление колебаний рассматривается не в виде блокирования упругих волн, а в виде гашения определенных форм колебаний, для описания поведения тонких балок часто используется модель Бернулли – Эйлера [3] (в том числе эта модель выбрана в ряде более ранних работ авторов данной статьи [4, 5]). Отсюда возникают вопросы, как на эффективность управления в данных задачах будет влиять увеличение толщины балок и в какой момент это влияние станет существенным.

Чтобы найти ответы на эти вопросы, необходимо в решении данных задач перейти к модели Тимошенко и рассмотреть несколько вариантов балок различной толщины.

В ряде опубликованных работ было показано, что возможно реализовать эффективное активное гашение колебаний балки Тимошенко с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов как с помощью пропорционального закона управления [6], так и с использованием наблюдателей состояния [7]. Однако в данных исследованиях не проводилось сравнения эффективности систем управления (СУ) для балок разной толщины. В работе [8] было показано, что использование закона управления, который был синтезирован для балки Бернулли – Эйлера, для гашения колебаний балки Тимошенко может привести к неустойчивости замкнутой системы.

Таким образом, проблема влияния эффектов, свойственных модели Тимошенко, на работу систем управления колебаниями балок не теряет своей актуальности.

Данная работа продолжает более ранние исследования авторов [4, 5], где изучалось управление колебаниями упругих балок с помощью наблюдателей.



Цель настоящей работы – численный анализ влияния эффектов модели Тимошенко, проявляющихся при увеличении толщины балок, на эффективность систем активного гашения колебаний балок с использованием наблюдателей.

В этом исследовании толщина балки варьируется в широком диапазоне значений: от $1/250$ до $1/10$ длины балки. В качестве управляющих воздействий рассматриваются либо сосредоточенные силы (в этом случае на вход системы управления подаются значения поперечного смещения балки в соответствующих сечениях), либо сосредоточенные моменты (в таком случае измерению подлежат углы поворота соответствующих сечений балки).

Для синтеза оптимальных систем управления с наблюдателем широко используются методы оптимизации, предполагающие формулировку и решение матричных уравнений Риккати. Однако в настоящем исследовании данный подход к синтезу систем управления напрямую неприменим, поскольку величину элементов матриц наблюдения и управления в рассматриваемой здесь задаче ограничивают не принятые в рамках указанного подхода, а другие факторы.

В стандартной постановке задачи оптимизации, в виде этих ограничивающих факторов выступают зависимость функционала качества от величины управляющих воздействий (для матрицы управления), а также шум измерения (для матрицы наблюдения). Напротив, в данном исследовании ограничивающим фактором является возбуждение СУ более высоких форм, по которым не ведется управление, вследствие сдвига фаз управляющих воздействий ввиду запаздывания в контуре управления (так называемый спилловер-эффект). Учет именно этого фактора как основного диктуется опытом проведения авторами данной работы экспериментальных исследований по активному гашению колебаний металлической балки [9].

Альтернативным способом оптимального синтеза СУ служит метод линейных матричных неравенств (*англ.* Linear Matrix Inequalities (LMI)), однако для случая управления с наблюдателем рассматриваемые задачи не сводятся непосредственно к LMI, поэтому данный метод в настоящем исследовании также неэффективен. Исходя из этого обстоятельства, синтез СУ в работе осуществляется методом численной оптимизации Нелдера – Мида.

Особенности модели балки Тимошенко

Для описания изгибных колебаний тонких балок широко используется модель балки Бернулли – Эйлера. Данная модель основана на предположении, что поперечные сечения балки всегда остаются перпендикулярными ее средней линии (т. е. отсутствует сдвиг сечений). Таким образом, состояние балки при изгибной деформации полностью описывается функцией поперечного смещения средней линии балки от продольной координаты. Кроме того, в данной модели не учитывается инерция поворота сечений балки.

Модель, описывающая изгибные колебания более толстых балок, была предложена С. П. Тимошенко в 1921 году [10]. Данная модель учитывает как сдвиговую деформацию, так и инерцию поворота сечений балки. Таким образом, в рамках модели Тимошенко для полного описания динамики балки используются уже две функции продольной координаты: поперечное смещение w и угол поворота сечения φ . Уравнения изгибных колебаний балки для рассматриваемой модели можно записать в следующем виде (для простоты будем считать, что балка имеет постоянное сечение):

$$\begin{cases} \rho A \ddot{w} + \kappa A G (\varphi' - w'') = q, \\ \rho I \ddot{\varphi} + \kappa A G (\varphi - w') - E I \varphi'' = m, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – объемная плотность материала балки; A , I – площадь и момент инерции сечений балки; E , G – модуль Юнга и модуль сдвига материала балки; κ – безразмерный сдвиговой коэффициент Тимошенко (зависит от формы сечения балки и для прямоугольного сечения обычно принимается равным $5/6$); q , m – распределенные поперечная сила и изгибающий момент, приложенные к балке.

Два уравнения второго порядка, приведенные выше, можно объединить в одно уравнение четвертого порядка для поперечного смещения балки w :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho A \ddot{w} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \ddot{w}'' + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{d^4 w}{dt^4} = q + \frac{\rho I}{\kappa A G} \ddot{q} - \frac{EI}{\kappa A G} q'' - m'. \quad (2)$$

Если устремить сдвиговую жесткость балки $\kappa A G$ к бесконечности, а также пренебречь инерцией поворота сечений балки ρI , то отличительные эффекты модели Тимошенко пропадут, а уравнение (2) сведется к уравнению, описывающему изгибные колебания балки Бернулли – Эйлера.

При переходе от модели балки Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко решение задачи о свободных колебаниях балки существенно изменится. Особенности решения данной задачи для модели Тимошенко детально разбираются в работах [11, 12]; в том числе там рассматривается шарнирно-опертая балка и ее набор собственных частот и форм.

Подобная постановка задачи используется и в настоящем исследовании. Полное решение является достаточно громоздким, поэтому здесь кратко приведем лишь основную информацию о нем.

Как известно, решением задачи о свободных колебаниях балки Бернулли – Эйлера является бесконечный ряд (спектр) собственных частот и соответствующих им собственных форм. У спектра частот есть нижняя граница (первая собственная частота), верхняя же граница отсутствует. Модель Тимошенко представляет собой усложнение модели Бернулли – Эйлера, поэтому для нее решение содержит все те же элементы – частоты и формы, однако с определенной поправкой: частоты немного снижаются, а формы приобретают еще и сдвиговую составляющую; кроме того, модель добавляет новые решения: частоты и соответствующие им формы.

Таким образом, добавляется новый спектр частот, и у этого спектра также есть нижняя граница – переходная частота:

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\kappa A G}{\rho I}}. \quad (3)$$

Наличие собственной формы, соответствующей данной частоте, зависит от граничных условий. В случае шарнирно-опертой балки эта форма существует и представляет собой поворот всех сечений балки на один и тот же угол (т. е. постоянную по длине балки сдвиговую деформацию) в отсутствие поперечного смещения. Новая часть спектра, берущая начало с переходной частоты, включает в себя формы колебаний, в которых сдвиговые деформации преобладают над изгибными. Частоты в данной области спектра также растут до бесконечности с увеличением порядкового номера.

Постановка задачи

Цель исследования – синтезировать и сравнить численно эффективность систем управления с наблюдателями в задаче активного гашения вынужденных изгибных колебаний балки Тимошенко для нескольких вариантов толщины балки.

Схема балки с приложенными воздействиями для двух рассматриваемых вариантов конструкции элементов управления представлена на рис. 1. Шарнирно-опертая алюминиевая балка прямоугольного сечения длиной 1 м подвергается внешнему возмущающему воздействию, в роли которого выступает сосредоточенный изгибающий момент M_0 , приложенный к балке на расстоянии 0,4 м от левого конца. В исследовании рассматривается три варианта балок с разными сечениями: 4×25 мм, 20×25 мм и 10×10 см.

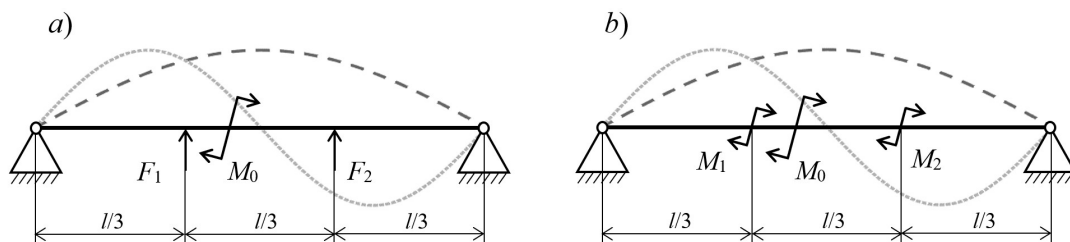


Рис. 1. Схемы объекта управления с приложенными управляющими воздействиями: a – сосредоточенные силы F_1 и F_2 , b – сосредоточенные моменты M_1 и M_2 ; l – длина балки, M_0 – внешний изгибающий момент



В работе рассмотрено два варианта конструкции СУ.

Вариант А. Сенсорами измеряется поперечное смещение в двух сечениях балки, делящих ее на три равные части, а управляющее воздействие имеет вид сосредоточенных поперечных сил, приложенных в тех же сечениях.

Вариант В. Конструкция системы управления отличается от варианта А тем, что измеряются уже углы поворота указанных сечений, а воздействие прикладывается в виде сосредоточенных изгибающих моментов.

Задача управления – погасить вынужденные колебания на двух низших резонансных частотах балки. Соответствующие данным частотам формы колебаний (точнее, их компоненты в виде поперечного смещения, поскольку есть также другие компоненты в виде углов поворота) также представлены на рис. 1.

В настоящей работе рассматриваются СУ с наблюдателями, которые широко применяются для управления с обратной связью в случае, когда состояние объекта не поддается прямому измерению и известна адекватная модель объекта. Подробное математическое описание данного метода в приложении к рассматриваемым в работе задачам можно найти в более ранних работах авторов [4, 5]. Для задания каждой такой СУ необходимо определить матрицы наблюдения и управления; в данном исследовании для этого применяется метод оптимизации Нелдера – Мида, встроенный в используемый вычислительный пакет. Затем результаты работы синтезированных систем для балок разной толщины сравниваются между собой.

Моделирование объекта без управления

Перед тем, как проектировать системы управления, необходимо смоделировать сам объект. Данный раздел посвящен моделированию балок без управления. Оно осуществляется в разложении по собственным формам колебаний балок, для вычисления которых вместе с собственными частотами используется модель балки Тимошенко.

В первую очередь необходимо убедиться, что используемая математическая модель поведения балок корректна, а также определить количество собственных форм в модели, достаточное для адекватного описания требуемой динамики. Для этой цели амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), полученные для данной модели в разложении по собственным формам, сравнивались с АЧХ, полученными для балок с теми же параметрами в результате конечно-элементного (КЭ) расчета.

Во всех КЭ-моделях использовались трехузловые балочные элементы. Балка разбивалась на 200 элементов длиной 5 мм, всего каждая модель содержала 401 узел. Также во всех численных моделях для всех форм колебаний задавался одинаковый коэффициент демпфирования $\xi = 0,01$.

На рис. 2 представлены АЧХ балки III (самая толстая, ее толщина – 10 см), рассчитанные при воздействии на балку первым (левым) сосредоточенным управляющим моментом и измерении угла поворота в том же сечении (получены обоими способами). Для второй из указанных моделей приведено два решения для разного количества учитываемых форм колебаний:

вариант А – 25 обычных форм (их аналоги присутствуют в модели балки Бернулли – Эйлера), одна переходная форма и 15 форм с преобладанием сдвига из нового спектра модели Тимошенко;

вариант В – 45 обычных форм, одна переходная и 25 сдвиговых.

Комментарий к рисункам: здесь и далее на графиках амплитудно-частотных характеристик ось ординат имеет логарифмический масштаб, поэтому отложенные по этой оси величины, будь то поперечное смещение или угол поворота, измеряются в децибелах (дБ).

На рис. 2 видно, что между двумя рассмотренными моделями есть хорошее соответствие, а предложенное число учитываемых форм ($45 + 1 + 25$) оказывается вполне достаточным для адекватного описания динамики балки в рамках решаемой задачи в широком диапазоне частот. Аналогичное сравнение было проведено для двух других вариантов балок (I и II), и для них были выбраны следующие значения количества форм, учитываемых при моделировании:

45 + 1 + 25 для балки II (такое же, как и для балки III),

45 для балки I (только традиционные формы колебаний).

В итоге результаты сравнения моделей показывают, что модель балки Тимошенко в разложении по собственным формам, использованная в исследовании, является корректной.

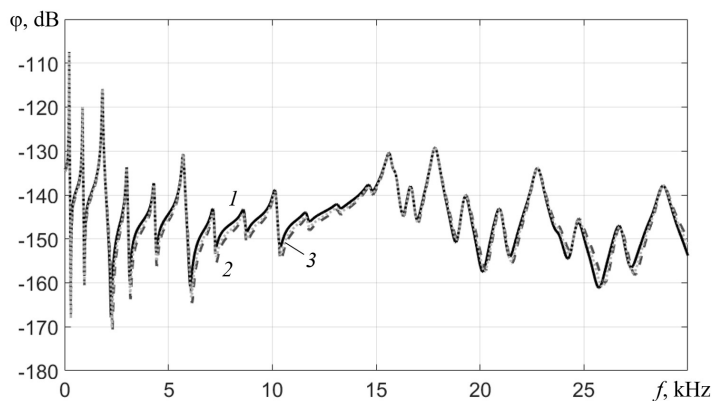


Рис. 2. Сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) момент-угол поворота для балки III (толщиной 10 см), полученных для двух моделей: КЭ (кривая 1) и модели с разложением по собственным формам (кривые 2, 3) с учетом 41 (2) и 71 (3) форм

возможность сравнить АЧХ для балок разной толщины. Такое сравнение представляет особый интерес, поскольку именно различия между этими АЧХ будут оказывать ключевое влияние на процесс синтеза и эффективность создаваемых систем управления для каждой из балок.

На рис. 3 представлено сравнение амплитудно-частотных характеристик, полученных при условии воздействия на балку первым управляющим моментом и измерения угла поворота в том же сечении, для каждой из рассматриваемых балок. Для того чтобы сравнивать данные характеристики на одном графике, необходимо согласовать их масштаб по обеим осям. По оси абсцисс частоты были нормированы на величину частоты первого резонанса каждой из балок, поскольку данная величина растет ровно в n раз при увеличении толщины балки Бернулли – Эйлера в n раз. Значения угла поворота сечения (ось ординат) также нормировались, поскольку при увеличении толщины балки Бернулли – Эйлера в n раз амплитуда ее колебаний снижается в n^3 раз. Также амплитуда колебаний балки снижается обратно пропорционально увеличению ширины балки, а ширина балки III, как было указано ранее, в 4 раза превышает ширину балок I и II. Поэтому значения углов поворота для балки II на данном графике были умножены на 125, а для балки III – на 62 500 (ось ординат на рис. 3 также имеет логарифмический масштаб, и логарифм от величины угла вычислялся после ее умножения на повышающий коэффициент).

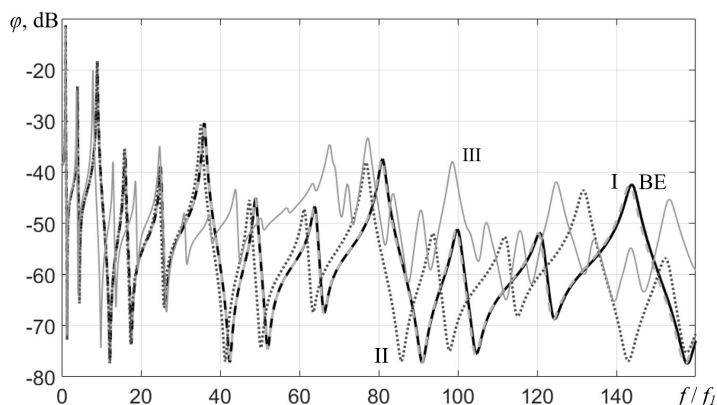


Рис. 3. Сравнение АЧХ момент – угол поворота φ для балок Тимошенко I – III с учетом масштабирования (номера кривых соответствуют номерам балок): балка I с учетом 45 форм; балки II и III – обе с учетом 71 формы; а также для модели балки Бернулли – Эйлера с учетом 45 форм (кривая BE).

Частота f нормирована на частоту первого резонанса f_1 для каждой из балок

Здесь следует отметить, что при принятых габаритах балки (длина – 1 м, толщина – 10 см) сама конечно-элементная балочная модель, как и модель Тимошенко, могут быть не совсем точными из-за депланации сечений балки. Исследование указанного обстоятельства выходит за рамки настоящей работы, поскольку ставилась задача сравнить именно модели Тимошенко и Бернулли – Эйлера, а отношение толщины к длине (1 : 10) балки III было выбрано как предельное для корректного использования модели Тимошенко.

Когда подобрана адекватная модель объекта, появляется возможность сравнить АЧХ для балок разной толщины. Такое сравнение представляет особый интерес, поскольку именно различия между этими АЧХ будут оказывать ключевое влияние на процесс синтеза и эффективность создаваемых систем управления для каждой из балок.

Также на рис. 3 представлена отсчетная характеристика, соответствующая модели балки Бернулли – Эйлера (ее кривая BE практически совпадает с кривой для балки I).

Важно, что если бы для балок различной толщины была использована именно эта модель, то все кривые на графике совпали бы с отсчетной. Более того, в таком случае и все результаты синтеза, и показатели эффективности систем управления для разных балок



также были бы одинаковы с точностью до коэффициентов подобия. Поэтому представленный на рис. 3 график иллюстрирует именно эффекты модели балки Тимошенко, проявляющиеся все сильнее с увеличением толщины балки.

Проанализируем, как эффекты модели Тимошенко проявляются на графике. Сравнение кривых для балок I и II показывает, что резонансные частоты смещаются влево (в сторону уменьшения), и это смещение увеличивается с ростом частоты. На кривой для балки III этот эффект проявляется еще сильнее, а также заметен новый эффект: существенное изменение структуры решения правее некоторой границы. Эта граница находится в окрестности переходной частоты (она упомянута ранее в разделе, посвященном особенностям модели Тимошенко): для балки III она превышает первую собственную частоту примерно в 68 раз. Начиная с этой переходной частоты, к спектру, существовавшему в модели Бернулли – Эйлера, добавляется новая часть: формы колебаний с преобладающей сдвиговой составляющей. Для балок I и II данная особенность на графике не наблюдается, поскольку для них значение переходной частоты существенно (на несколько порядков) превышает значение первой собственной частоты и, таким образом, не попадает в рассмотренный диапазон.

Синтез систем управления

Рассмотрим работу систем управления с наблюдателями состояния, использующихся для активного гашения колебаний балок в данном исследовании. Здесь будут приведены только основные уравнения; более подробное описание этого метода в приложении к рассматриваемым в работе задачам можно найти в работах [4, 5].

Будем считать, что для удовлетворительного описания динамики объекта нужно учитывать n низших форм колебаний. Введем вектор состояния q^n :

$$q^n = (q_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_n)^T, \quad (4)$$

где q_i – обобщенная координата, соответствующая i -й форме колебаний балки; \dot{q}_i – обобщенная скорость.

В таком случае поведение объекта можно описать следующими уравнениями:

$$\dot{q}^n = Aq^n + Bu + Dd, \quad (5)$$

$$y = Cq^n, \quad (6)$$

где d – вектор внешних воздействий; y , u – векторы измеренных сигналов и управляющих воздействий; A , B , C – матрицы, задающие поведение объекта и его взаимодействие с приводами (актуаторами) и датчиками (сенсорами).

Предполагаем, что наблюдение и управление ведется по k низшим формам колебаний объекта ($k \leq n$). Задача наблюдателя состоит в том, чтобы оценивать вектор состояния q^k , соответствующий данным формам:

$$q^k = (q_1 \quad \dots \quad q_k \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_k)^T. \quad (7)$$

Наблюдатель формирует оценку данного вектора \hat{q} с использованием известных матриц $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, описывающих динамику k низших мод объекта, и далее указанная оценка используется для задания вектора управляющих воздействий:

$$\dot{\hat{q}} = A^{(1)}\hat{q} + B^{(1)}u + L(y - C^{(1)}\hat{q}), \quad (8)$$

$$u = -R\hat{q}, \quad (9)$$

где L , R – матрицы наблюдения и управления, которые необходимо правильно задать (таким образом, чтобы достигалась цель управления).

В рамках настоящего исследования мы считаем матрицы $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, известными (они получаются из матриц A , B и C удалением лишних столбцов и строк), и для задания системы управления необходимо определить только матрицы L и R . В рассматриваемой задаче наблюдение и управление ведется по двум формам, используются два сенсора и два

актуатора. Поскольку наблюдение и управление по этим формам осуществляется отдельно, матрицы L и R можно задать в следующем виде [5]:

$$L_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} K_{2 \times 2}^L \\ K_{2 \times 2}^{Ld} \end{bmatrix} T_{2 \times 2}, R_{2 \times 4} = F_{2 \times 2} \begin{bmatrix} K_{2 \times 2}^R & K_{2 \times 2}^{Rd} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где K^L, K^{Ld}, K^R, K^{Rd} – диагональные матрицы размером 2×2 ; T, F – модальные матрицы (анализатор и синтезатор форм) [4, 5, 9], определяющие, как каждый контур управления задействует в своей работе каждый сенсор и актуатор.

Поскольку сенсоры и актуаторы расположены на балке симметрично, а собственные формы колебаний балки – симметричные или антисимметричные, модальные матрицы в данном исследовании имеют определенный вид, представленный ниже. В случае, когда измеряется поперечное смещение, а управляющее воздействие приложено в виде сосредоточенных сил, их можно задать следующим образом:

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, F^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Модальные матрицы в случае, когда измеряются углы поворота, а управление имеет вид сосредоточенных моментов:

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, F^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, принимая во внимание структуру матриц K^L, K^{Ld}, K^R и K^{Rd} , которые необходимо задать (они диагональные и имеют размер 2×2), нужно оптимальным образом подобрать 8 параметров для полного задания системы управления в случае одновременного гашения двух форм колебаний балки. Если же цель СУ – гасить только один из резонансов, то следует определить всего 4 параметра.

Задача оптимизации по указанному числу параметров решалась методом оптимизации Нелдера – Мида. В качестве целевой функции в случае гашения только одной формы выступала высота соответствующего резонансного пика на АЧХ балки с включенным управлением. Если же требовалось погасить обе формы, то целевая функция задавалась как сумма высот обоих резонансных пиков. Кроме этого, к данной функции добавлялся штраф в случае нарушения запасов устойчивости в замкнутой системе.

Для анализа устойчивости использовался критерий Найквиста, модифицированный для случая двух входов и двух выходов системы управления (он подробно описывается в статье авторов [13]). Особенности численного моделирования замкнутой системы с наблюдателями рассмотрены в статье [4]. В ней приведена, в том числе, постановка задачи, в которой в контур управления введено звено, моделирующее запаздывание, с передаточной функцией $R^{del}(s)$:

$$R^{del}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (13)$$

где τ – постоянная времени, s – комплексная переменная.

Именно такая постановка используется и в данном исследовании. Для сохранения подобия формулировок задачи для разных балок постоянная времени в каждой из постановок выбрана своя:

$$\tau_I = 0,005 \text{ с}, \quad \tau_{II} = \frac{1}{5} \tau_I = 0,001 \text{ с}, \quad \tau_{III} = \frac{1}{25} \tau_I = 0,0002 \text{ с}, \quad (14)$$

где τ_i – постоянная времени при управлении колебаниями i -й балки.

Пример. В качестве примера рассмотрим вид одной из синтезированных систем, а именно – системы для балки II (сечение 20×25 мм) для случая измерения углов и управления моментами при одновременном гашении первой и второй форм колебаний балки. Диагональные матрицы, задающие наблюдение и управление, были получены в следующем виде:

$$\begin{cases} K^L = \begin{bmatrix} -81,63 & 0 \\ 0 & -63,24 \end{bmatrix}, & K^{Ld} = \begin{bmatrix} 76,01 & 0 \\ 0 & 79,78 \end{bmatrix} \cdot 10^3, \\ K^R = \begin{bmatrix} -53,93 & 0 \\ 0 & 13,82 \end{bmatrix} \cdot 10^2, & K^{Rd} = \begin{bmatrix} 37,25 & 0 \\ 0 & -149,3 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (15)$$

На рис. 4 приведена диаграмма Найквиста для полученной системы (общий вид и увеличенный фрагмент в области начала координат). Запасы по устойчивости для всех синтезируемых СУ были заданы таким образом, чтобы годограф Найквиста системы не пересекал круг радиусом 0,5 с центром в точке $(-1, 0)$ (это соответствует запасу по амплитуде в 6 дБ и по фазе в 29°). Видно, что для данной СУ все требования к устойчивости выполняются.

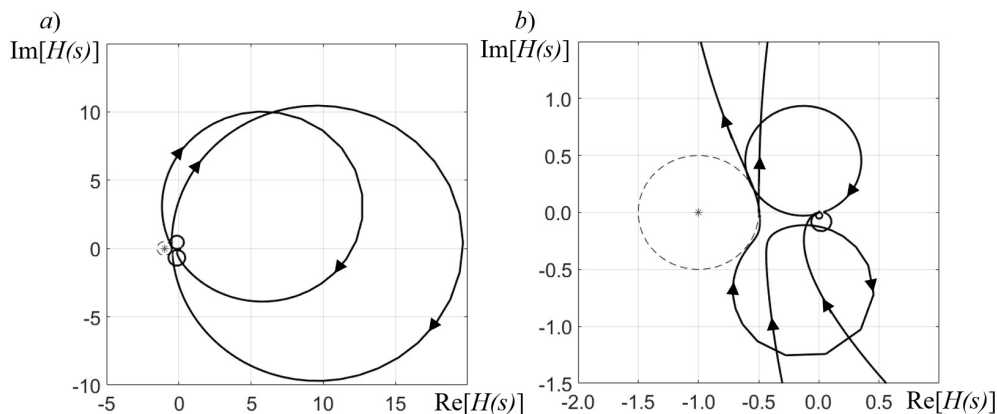


Рис. 4. Пример годографа Найквиста для одной из синтезированных систем управления:
a – общий вид, *b* – увеличенный фрагмент

Сравнение результатов работы разных СУ

В данном разделе представлен обзор полученных результатов работы всех синтезированных систем управления для балок разной толщины.

Как уже было отмечено, для определения эффективности управления анализировались значения высоты первого и второго резонансных пиков на АЧХ балки с управлением, по сравнению с высотой этих пиков в отсутствие управления. Отдельно необходимо пояснить выбор самой АЧХ: рассматривалась величина полной энергии установившихся колебаний балки под воздействием гармонически изменяющегося внешнего возмущающего сосредоточенного момента в зависимости от частоты приложенного воздействия. Эта величина для каждого значения частоты ω вычислялась по следующей формуле:

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega^2 Q_i^2(\omega), \quad (16)$$

где Q_i – установившееся значение амплитуды i -й обобщенной координаты формы колебаний, n – число обобщенных координат (форм колебаний балки) в модели.

Как и для всех амплитудно-частотных характеристик в данной работе, амплитуда рассматриваемой здесь величины выражалась в децибелах (дБ).

Выражение (16) соответствует полной энергии колебаний балки, поскольку все формы колебаний (имеющие компоненты поперечного смещения $X_i(x)$ и поворота $\Phi_i(x)$) нормированы определенным образом:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n X_i(x) q_i(t), \quad \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t), \quad (17)$$

$$\int_0^l (\rho A X_i(x) X_j(x) + \rho I \Phi_i(x) \Phi_j(x)) dx = \delta_{ij}, \quad (18)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Результаты управления для всех полученных систем представлены в таблице. Снижение амплитуды на первом (Res1) и втором (Res2) резонансах в результате управления указано для всех трех балок, рассмотрены случаи управления как с помощью сосредоточенных сил, так и с помощью моментов. Для каждой постановки было испробовано гашение колебаний либо только по одной из форм, либо по обеим сразу. Жирным шрифтом выделены наилучшие результаты для каждой балки и каждого из резонансов.

На рис. 5 показаны АЧХ балок с управлением и без него для СУ, работающих сразу на обоих резонансах. С целью сравнения на одном графике результатов, полученных для разных балок, было проведено масштабирование АЧХ по обеим осям таким же точно образом, как и ранее в данной статье (см. рис. 3).

Таблица

Снижение резонансных амплитуд колебаний балок для различных систем управления

Номер балки	Способ управления	Режим гашения	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе	
			Res1 (Δy_1)	Res2 (Δy_2)
I (1,4a,4b)	Силы	Отдельно	35,47	29,4
		Вместе	34,05	29,5
	Моменты	Отдельно	31,18	25,91
		Вместе	30,16	24,78
II (2,5a,5b)	Силы	Отдельно	35,44	29,73
		Вместе	33,79	29,73
	Моменты	Отдельно	31,14	25,93
		Вместе	30,16	24,77
III (3,6a,6b)	Силы	Отдельно	35,03	27,9
		Вместе	34,16	27,9
	Моменты	Отдельно	30,59	25,21
		Вместе	29,79	23,97

Примечания. 1. В левом столбце в скобках даны номера кривых на рис. 5, относящиеся к каждой балке. 2. Жирным шрифтом выделены наилучшие результаты.

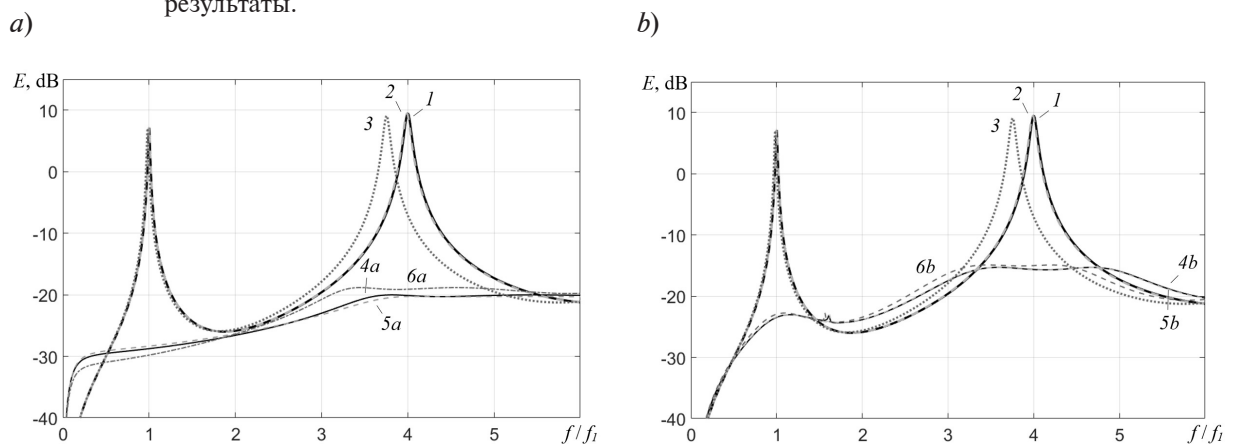


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики для балок I – III (a, b) без управления (кривые 1 – 3), а также с управлением при помощи сил (кривые 4a – 6a) и при помощи моментов (кривые 4b – 6b) (см. таблицу)



Анализ данных таблицы и рис. 5 позволяет заключить, что полученные системы управления дают возможность достаточно эффективно гасить вынужденные колебания балки как на первом, так и на втором резонансах. Основной вывод состоит в том, что с ростом толщины балки в широком диапазоне ее значений эффективность созданных СУ меняется незначительно. Это означает, что рассмотренный метод управления позволяет эффективно управлять колебаниями не только тонких, но и сравнительно толстых балок. При этом заметна тенденция, что при увеличении толщины балок эффективность гашения колебаний немного снижается как на каждом резонансе в случае гашения по отдельности, так и по сумме показателей на обоих резонансах в случае гашения вместе. Этот эффект практически незаметен при сравнении результатов для балок I и II, но определенно проявляется при переходе к балке III. Такой результат можно объяснить тем, что на низких частотах вид кривых АЧХ в случае отсутствия управления для балок I и II почти одинаков, а на амплитудно-частотной характеристике балки III резонансные пики с повышением частоты сдвигаются влево, по сравнению с АЧХ более тонких балок; соответственно, коэффициенты усиления в СУ заметнее ограничиваются ухудшением устойчивости на более высоких частотах и эффективность СУ снижается.

Стоит отметить, что наблюдаемое различие вызвано не столько влиянием новой части спектра частот и соответствующих им сдвиговых форм колебаний, которые присутствуют в решении задачи о колебаниях балок Тимошенко, сколько «деформацией» при увеличении толщины балки ее масштабированной АЧХ вблизи нижних резонансных частот (данный эффект также можно наблюдать на рис. 3). Влияние новой части спектра невелико, поскольку для всех рассмотренных балок переходная частота, ограничивающая снизу данную часть спектра, значительно превосходит частоту среза разомкнутой системы для всех синтезированных СУ (даже в случае балки III первая величина примерно на порядок выше второй, а для остальных балок разница еще более существенная).

Кроме этого, представленные результаты показывают, что управление с использованием перемещений и сосредоточенных сил осуществляется заметно эффективнее, чем системы, где используются углы поворота и сосредоточенные моменты. Это объясняется тем, что на АЧХ балки сила – смещение (без управления) резонансные амплитуды с ростом частоты убывают значительно быстрее, чем на АЧХ момент – угол поворота, т. е. влияние управления для первых систем в большей степени выражено на низших частотах, а не на высших, поэтому эффективность гашения на низших частотах растет, а снижение устойчивости на высоких частотах уменьшается.

Еще одно наблюдение касается результатов, представленных в таблице: как правило, по отдельности колебания на первом и втором резонансах гасятся несколько эффективнее, чем вместе, – этот эффект характерен для СУ как с наблюдателями, так и без них, он наблюдался авторами и в более ранних работах [4, 5]. Этот результат объясняется тем, что при одновременном включении двух контуров в системе управления степень устойчивости замкнутой системы снижается, что приводит к необходимости уменьшать коэффициенты усиления и, как следствие, к снижению эффективности СУ.

Заключение

В работе рассмотрена задача активного гашения вынужденных колебаний металлических балок с помощью систем управления с использованием наблюдателей состояния. Изучено влияние толщины балки на эффективность управления, для этого задача решена численно с использованием модели балки Тимошенко для разных значений толщины балки, которые изменяются в широком диапазоне. В исследовании сделан акцент именно на эффекты модели Тимошенко, так как при использовании модели Бернулли – Эйлера для описания динамики рассматриваемых балок результаты для балок различной толщины получились бы идентичными.

В результате было показано, что в случае гашения колебаний балки на низших резонансах предложенные системы управления остаются эффективными для всех рассмотренных балок. Отмечено лишь небольшое снижение эффективности гашения колебаний при значительном увеличении толщины балки; данному эффекту было дано аргументированное объяснение.

Среди дальнейших исследований наибольший интерес представляют их следующие направления:

моделирование управления колебаниями балки с помощью конкретных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов,

гашение колебаний балки на более высоких резонансных частотах,

варьирование модели объекта в наблюдателе, в том числе расширение числа учитываемых собственных форм балки в данной модели.

Другие перспективные направления – это учет деформации сечений для толстых балок и шума измерений при синтезе системы управления, а также рассмотрение различных функционалов качества при оптимизации параметров системы управления. Представляет интерес также решение задачи гашения упругих волн в балке Тимошенко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carvalho M. O. M., Zindeluk M.** Active control of waves in a Timoshenko beam // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. No. 10–13. Pp. 1749–1764.
2. **Mei C.** Hybrid wave/mode active control of bending vibrations in beams based on the advanced Timoshenko theory // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322. No. 1–2. Pp. 29–38.
3. **Selivanov A., Fridman E.** Disturbance attenuation in the Euler – Bernoulli beam with viscous and Kelvin – Voigt damping via piezoelectric actuators // *Proceedings of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDO)*. December 13–15, 2023. Marina Bay Sands, Singapore, Pp. 1961–1966.
4. **Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А.** Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16. № 3. С. 160–176.
5. **Федотов А. В.** Сравнение подходов к заданию модальных матриц при модальном управлении упругими системами с наблюдателями и без них // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2024. Т. 17. № 1. С. 114–129.
6. **Yildirim K., Kucuk I.** Active piezoelectric vibration control for a Timoshenko beam // *Journal of the Franklin Institute*. 2016. Vol. 353. No. 1. Pp. 95–107.
7. **Li X., Agarwal R. K., Shue S.-P.** Active control of Timoshenko beam vibrations using piezoelectric material // *Proceedings of the 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. 12–15 April 1999, St. Louis, MO, USA. Pp. 894–902.
8. **Aldraihem O. J., Wetherhold R. C., Singh T.** Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler – Bernoulli theory // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1997. Vol. 8. No. 2. Pp. 149–157.
9. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A.** Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
10. **Timoshenko S. P.** LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine (Series 6)*. 1921. Vol. 41. No. 245. Pp. 744–746.
11. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.** On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisitation // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. No. 24. Pp. 1–30.
12. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.** On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. No. 25. Pp. 1–22.
13. **Федотов А. В.** Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155.



REFERENCES

1. **Carvalho M. O. M., Zindeluk M.**, Active control of waves in a Timoshenko beam, *Int. J. Solid. Struct.* 38 (10–13) (2001) 1749–1764.
2. **Mei C.**, Hybrid wave/mode active control of bending vibrations in beams based on the advanced Timoshenko theory, *J. Sound Vib.* 322 (1–2) (2009) 29–38.
3. **Selivanov A., Fridman E.**, Disturbance attenuation in the Euler – Bernoulli beam with viscous and Kelvin – Voigt damping via piezoelectric actuators, *Proc. 62nd IEEE Conf. Decision and Control (CDO)*, Dec. 13–15, 2023, Marina Bay Sands, Singapore (2023) 1961–1966.
4. **Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A.**, Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 16 (3) (2023) 160–176 (in Russian).
5. **Fedotov A. V.**, A comparison of approaches to specifying the modal matrices in the modal control of elastic systems with and without observers, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 17 (1) (2024) 114–129. (in Russian).
6. **Yildirim K., Kucuk I.**, Active piezoelectric vibration control for a Timoshenko beam, *J. Frank. Inst.* 353 (1) (2016) 95–107.
7. **Li X., Agarwal R. K., Shue S.-P.**, Active control of Timoshenko beam vibrations using piezoelectric material, *Proc. 40th Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. Exhibit*, 12–15 Apr. 1999, St. Louis, MO, USA (1999) 894–902.
8. **Aldraihem O. J., Wetherhold R. C., Singh T.**, Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler – Bernoulli theory, *J. Intel. Mat. Syst. Struct.* 8 (2) (1997) 149–157.
9. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., et al.**, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, *Struct. Control Health Monit.* 25 (8) (2018) e2105.
10. **Timoshenko S. P.**, LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Lond., Edinb., Dubl. Phil. Mag. (Ser. 6).* 41 (245) (1921) 744–746.
11. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.**, On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisitation, *Zeit. angew. Math. Phys.* 67 (24) (2016) 1–30.
12. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.**, On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications, *Zeit. angew. Math. Phys.* 67 (25) (2016) 1–22.
13. **Fedotov A. V.**, The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics.* 12 (1) (2019) 142–155. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФЕДОТОВ Александр Васильевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

БЕЛЯЕВ Александр Константинович – член-корреспондент Российской академии наук, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.
13augen@mail.ru
ORCID: 0000-0002-5934-8138

THE AUTHORS

FEDOTOV Aleksandr V.

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS
61 Bolshoi Ave., V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

BELYAEV Alexander K.

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS
61 Bolshoi Ave., V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia
13augen@mail.ru
ORCID: 0000-0002-5934-8138

*Статья поступила в редакцию 24.10.2024. Одобрена после рецензирования 06.03.2025.
Принята 06.03.2025.*

Received 24.10.2024. Approved after reviewing 06.03.2025. Accepted 06.03.2025.

Научная статья

УДК 539.21

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССОУПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИДЕАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ НА ВНУТРЕННИХ ГРАНИЦАХ ДВУХФАЗНОГО МАТЕРИАЛА

К. П. Фролова¹ , Н. М. Бессонов¹, Е. Н. Вильчевская²

¹ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

² Берлинский технический университет, г. Берлин, Германия

 fkp@ipme.ru

Аннотация. В работе исследовано влияние неидеальных контактов (НК) на границах раздела фаз неоднородного (на микроуровне) материала на транспорт примеси и на напряженно-деформированное состояние среды (на макроуровне), вызванное ее накоплением. Рассмотрены два типа НК: сегрегация (оседание примеси), когда нарушается непрерывность концентрации, и образование обходных путей ускоренной диффузии, когда нарушается непрерывность нормальной компоненты потока. Моделирование связанных процессов массопереноса и изменения напряженно-деформированного состояния среды включает два этапа. На первом определяется эффективная диффузионная проницаемость материала с помощью методов микромеханики. На втором этапе решается задача массоупругости на макроуровне. Анализ проведен на примере длинного цилиндра, представленного как двухфазный материал, состоящий из матрицы и менее проницаемых сфероидальных неоднородностей, имеющих вытянутую форму и произвольно распределенных по ориентациям. Показано, что тип НК и способ его учета могут оказывать существенное влияние на распределение примеси в образце и на величину внутреннего давления.

Ключевые слова: диффузия, массоупругость, эффективные свойства, неидеальный контакт, граница раздела фаз, двухфазный материал

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-79-01133 (<https://rscf.ru/project/23-79-01133/>).

Для цитирования: Фролова К. П., Бессонов Н. М., Вильчевская Е. Н. Решение задачи массоупругости при наличии неидеальных контактов на внутренних границах двухфазного материала // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 141–155. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

A SOLUTION TO THE PROBLEM OF ELASTICITY CAUSED BY MASS TRANSPORT IN THE PRESENCE OF IMPERFECT CONTACTS AT THE INTERNAL INTERFACES OF A TWO-PHASE MATERIAL

K. P. Frolova¹ , N. M. Bessonov¹, E. N. Vilchevskaya²

¹ Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia;

² Technical University of Berlin, Berlin, Germany

 fkp@ipme.ru

Abstract. The paper studies the influence of imperfect contacts (IC) at the phase interfaces of a micro-heterogeneous material on the macroscopic transport of impurity and the stress-strain state caused by its accumulation. Two types of IC are considered: segregation, which

involves the accumulation of impurity that disrupts the continuity of concentration, and the formation of bypass paths for accelerated diffusion, which disrupts the continuity of the normal component of the flux. Modeling the coupled processes of mass transport and changes in the stress-strain state of the medium consists of two stages. In the first stage, the effective diffusion permeability of the material is determined using micromechanical methods. In the second stage, the macroscopic elasticity problem caused by mass transport is solved. The analysis is carried out using the example of a long cylinder, which is a two-phase material at the micro-level, consisting of a matrix and less permeable prolate spheroidal inhomogeneities with an arbitrary distribution of orientations.

Keywords: diffusion, elasticity due to mass transport, effective properties, imperfect contact, phase interface, two-phase material

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 23-79-01133 (<https://rscf.ru/project/23-79-01133/>)).

For citation: Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N., A solution to the problem of elasticity caused by mass transport in the presence of imperfect contacts at the internal interfaces of a two-phase material, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 141–155. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Создание новых материалов и расширение их области применения сопряжено с проблемами описания состояния объектов при термомеханических нагрузках с учетом влияния различных характеристик внутренней структуры. Моделирование поведения неоднородных на мезоуровне материалов можно разделить на два этапа: на первом определяются эффективные свойства с помощью методов микромеханики, на втором решается задача на макроуровне.

Как правило, при вычислении эффективных свойств предполагается, что поля непрерывны на границах раздела фаз материала [1]. Тем не менее, в ряде случаев такая гипотеза может оказаться несправедливой. В частности, в контексте задачи определения диффузионных свойств, сегрегацию (оседание примеси) [2] невозможно описать, если считать поле концентрации непрерывным [3]. Растрескивание, измельчение зерен и т. п. может приводить к образованию дополнительных обходных путей ускоренной диффузии [4], что, в свою очередь, противоречит предположению о непрерывности нормальной компоненты потока.

Любое нарушение непрерывности поля означает наличие неидеального контакта [5]. Неидеальные контакты указанных выше типов были учтены в ряде работ при описании разных процессов. Так, в работах [6 – 8] был рассмотрен диффузионный процесс с учетом сегрегации в материале, состоящем из матрицы и изолированных неоднородностей. В модель вводился параметр, равный отношению концентраций с внешней и внутренней сторон границы раздела фаз (параметр сегрегации). В работах [9 – 11] были рассмотрены тепловые процессы в двухфазных материалах, содержащих изолированные неоднородности, и учитывались неидеальные контакты разных типов. Предполагалось, что неоднородности имеют покрытие, обладающее экстремальными свойствами (оно является изолятором или суперпроводником). Обобщение и сравнение разных подходов к моделированию неидеальных контактов было проведено нами в работе [12].

Наличие неидеальных контактов, учет которых необходим при определении эффективной диффузионной проницаемости, может повлиять как непосредственно на распределение примеси в макроскопическом образце, так и на его напряженно-деформированное состояние, поскольку оно может меняться в результате накопления диффузанта. Влияние сегрегации на решение задач диффузии и массопругости было исследовано нами в работе [13]. Оседание примеси на границе раздела матрица/неоднородность при этом моделировалась только посредством задания параметра сегрегации.



Настоящая работа посвящена анализу влияния двух типов неидеальных контактов (сегрегация и образование дополнительных обходных путей ускоренной диффузии); такие контакты исследуются с применением разных подходов: через определение скачка поля и путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Анализ будет представлен на примере двухфазного материала, состоящего из матрицы и менее проводящих, произвольно ориентированных неоднородностей, имеющих форму вытянутых сфероидов. Такая микроструктура характерна, в частности, для поликристаллов при моделировании зерен неоднородностями, а границ зерен – матрицей [7]. Отметим, что для поликристаллов актуальной является проблема водородной деградации, когда в результате накопления вредной примеси происходит разрушение металлов [14, 15].

Описание этапов моделирования

Моделирование связанных процессов массопереноса и изменения напряженно-деформированного состояния материала при наличии на меньшем масштабном уровне двух типов неидеальных контактов на границах раздела фаз (сегрегации и образования дополнительных обходных путей ускоренной диффузии) включает два этапа. На первом определяется эффективная диффузионная проницаемость материала с учетом его внутренней структуры; на втором решается задача массопругости с учетом найденных макроскопических свойств.

При определении эффективной диффузионной проницаемости \mathbf{D}^{eff} ограничимся рассмотрением линейного макроизотропного материала, т. е.

$$\mathbf{D}^{eff} = D^{eff} \mathbf{I}$$

(\mathbf{I} – единичный тензор); этот материал состоит из изотропной матрицы с проницаемостью $\mathbf{D}_0 = D_0 \mathbf{I}$ и изотропных неоднородностей с проницаемостью $\mathbf{D}_1 = D_1 \mathbf{I}$, имеющих форму вытянутых сфероидов и произвольное распределение по ориентациям.

Рассмотрим разные типы неидеальных контактов на границе раздела фаз. Для моделирования сегрегации необходимо учесть нарушение непрерывности поля концентрации c , а для моделирования дополнительных обходных путей ускоренной диффузии – нормальной компоненты потока J_n .

Начально-краевую квазистатическую задачу массопругости будем решать для длинного цилиндра с радиусом r_0 . Будем считать, что напряжения и деформации возникают в цилиндре исключительно из-за накопления диффузанта при поддержании на боковой поверхности постоянной концентрации. При этом рассмотрим два случая: с учетом и без учета явления бародиффузии, при котором градиент давления инициирует дополнительный диффузионный поток.

Представим далее математическую постановку задачи для каждого этапа моделирования и изложим методы ее решения.

Определение эффективных свойств материала

Указанные свойства материала находятся из решения задачи гомогенизации для репрезентативного объема V , представляющего собой материальную точку сплошной среды на макроуровне [9]. Тензор макроскопической диффузионной проницаемости \mathbf{D}^{eff} связывает между собой средние по объему V поток \mathbf{J} и градиент концентрации c в соответствии с классическим законом Фика:

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = -\mathbf{D}^{eff} \cdot \langle \nabla c \rangle_V. \quad (1)$$

Предполагается, что в каждой точке репрезентативного объема выполняется закон сохранения:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{x} – радиус-вектор, а поток связан с градиентом концентрации линейным образом по формуле

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla c(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ – тензор диффузионной проницаемости материала в точке \mathbf{x} .

На границе Σ репрезентативного объема удобно задавать однородное условие Хилла:

$$c(\mathbf{x})|_{\Sigma} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{x}. \quad (4)$$

Наличие неидеальных контактов учитывается либо через задание скачка поля на границе матрица (+) / неоднородность (-), либо путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами. В последнем случае сначала предполагается, что неоднородность представляет собой конфокальные эллипсоиды, полуоси которых b_1, b_2, b_3 и a_1, a_2, a_3 связаны соотношением

$$b_i^2 = a_i^2 + \xi \quad (i = 1, 2, 3), \quad \xi = \text{const},$$

а свойства слоя D_s , образованного двумя эллипсоидами, конечны.

Затем реализуется предельный переход при $\xi \rightarrow 0$ и либо при $D_s \rightarrow 0$, либо при $D_s \rightarrow \infty$, в зависимости от типа неидеального контакта [10, 11].

В результате наличие сегрегации можно учесть в модели либо через задание параметра s_c такого, что скачок концентрации определяется как

$$[c] = (s_c - 1)c(\mathbf{x})|_{x \rightarrow \Gamma^-} \quad (5)$$

(Γ – граница неоднородности с внешней нормалью \mathbf{n}_{Γ}), либо через задание безразмерного параметра β эквивалентной поверхностной сопротивляемости, который в случае сфероидальной формы неоднородностей выражается как

$$\beta = \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma S} \frac{D_1}{a^2} \lim_{\xi \rightarrow 0, D_s \rightarrow 0} \frac{\xi}{D_s}, \quad (6)$$

где γ – отношение полуосей сфероида, $\gamma = a_3/a$; S – площадь поверхности сфероида, деленная на $(4/3)\pi a^2$.

Аналогично, образование дополнительных обходных путей ускоренной диффузии учитывается либо через задание параметра s_f

$$[J_n] = (s_f - 1)\mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})|_{x \rightarrow \Gamma^-}, \quad (7)$$

характеризующего скачок нормальной компоненты потока, либо через задание безразмерного параметра эквивалентной поверхностной проницаемости λ , который в случае сфероидов имеет вид

$$\lambda = \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma S} \frac{1}{D_1 a^2} \lim_{\xi \rightarrow 0, D_s \rightarrow \infty} \xi D_s. \quad (8)$$

Задача определения эффективных свойств состоит из двух этапов. На первом решается задача об изолированной неоднородности в бесконечной матрице, на втором используется схема гомогенизации для учета наличия множественных неоднородностей.

На основании решения задачи об изолированной неоднородности можно получить выражение для тензора вклада неоднородности в искомое свойство [1]. Тензор вклада в диффузионную проницаемость \mathbf{H} можно получить из представления среднего потока в виде

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = - \left(\mathbf{D}_0 + \frac{V_1}{V} \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{G}_0. \quad (9)$$

Выражение (9) учитывает, что средний градиент концентрации не зависит от микроструктуры и полностью определяется граничным условием (4):

$$\langle \nabla c \rangle_V = \mathbf{G}_0.$$

Сумма тензоров вклада представляет собой микроструктурный параметр, через который можно выразить макроскопические характеристики материала. Выражения для тензоров вклада эллипсоидальных и, в частности, сфероидальных неоднородностей были получены и исследованы в работах [8 – 12]. При этом наличие разных неидеальных контактов учитывалось двумя способами: через задание скачка поля и путем рассмотрения неоднородности с покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Приведем здесь окончательные выражения, учитывающие различные факторы, для тензоров вклада сфероидов:

$$\mathbf{H}^{s_c} = D_0 \left[\frac{D_1 - s_c D_0}{f_0 D_1 + (1 - f_0) s_c D_0} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - s_c D_0}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 s_c D_0} \mathbf{nn} \right] \quad (10)$$

при учете нарушения непрерывности поля концентрации через параметр s_c ;

$$\mathbf{H}^\beta = D_0 \left[\frac{D_1 - D_0 - f_0 D_0 \beta \frac{S}{\gamma}}{f_0 D_1 + (1 - f_0) D_0 + (1 - f_0) D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (f_0 - F_\theta)} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - D_0 - (1 - 2f_0) D_0 \beta \frac{S}{\gamma}}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 D_0 + 2f_0 D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0 - F_n)} \mathbf{nn} \right] \quad (11)$$

при учете нарушения непрерывности поля концентрации через величину безразмерной эквивалентной поверхностной сопротивляемости β ;

$$\mathbf{H}^{s_f} = D_0 \left[\frac{s_f D_1 - D_0}{f_0 s_f D_1 + D_0 (1 - f_0)} \boldsymbol{\theta} + \frac{s_f D_1 - D_0}{(1 - 2f_0) s_f D_1 + 2f_0 D_0} \mathbf{nn} \right] \quad (12)$$

при учете нарушения непрерывности нормальной компоненты потока через параметр s_f ;

$$\mathbf{H}^\lambda = D_0 \left[\frac{D_1 - D_0 + \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (1 - f_0)}{f_0 D_1 + (1 - f_0) D_0 + f_0 \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (1 - f_0 + F_\theta)} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - D_0 + 2f_0 \lambda D_1 \frac{S}{\gamma}}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 D_0 + (1 - 2f_0) \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (2f_0 + F_n)} \mathbf{nn} \right] \quad (13)$$

при учете нарушения непрерывности нормальной компоненты потока через величину безразмерной эквивалентной поверхностной диффузионной проницаемости λ .

В формулах (10) – (13) использованы следующие обозначения: \mathbf{n} – орт оси симметрии сфероида; $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$; F_n, F_θ – функции от параметра γ , для которых справедливы равенства вида

$$F_n = \frac{f_0 (1 + 2\gamma^2) - \gamma^2}{1 + 2\gamma^2}, \quad F_\theta = -2F_n,$$

где

$$f_0(\gamma) = \frac{1 - g(\gamma)}{2(1 - \gamma^{-2})}, \quad g = g(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma}, & \gamma \leq 1; \\ \frac{1}{2\gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right), & \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Для определения эффективных свойств материала с множественными неоднородностями используем метод Мори – Танаки [1, 16], дающий физически непротиворечивые результаты как при малых, так и при больших значениях объемной доли включений. Этот и ряд других методов в применении к материалам с неидеальными контактами был исследован нами ранее в работе [8]. Изложим ниже основную суть метода и представим результаты для эффективной диффузионной проницаемости.

В рамках метода Мори – Танаки неоднородности рассматриваются как изолированные, а взаимодействие между ними учитывается посредством их помещения не в исходное поле \mathbf{G}_0 , удовлетворяющее выражению (4), а в эффективное поле, равное среднему по матрице:

$$\mathbf{G}^{eff} = \langle \nabla c \rangle_{V_0}. \quad (14)$$

Само наличие неидеального контакта, а также его тип и способ учета оказывают непосредственное влияние на эффективное поле. Отметим, что применение метода Мори – Танаки требует учета нарушения непрерывности поля концентрации/нормальной компоненты потока на двух этапах: когда решается задача об изолированной неоднородности и когда используется схема гомогенизации, поскольку параметры, отвечающие за неидеальный контакт, появляются не только в выражениях для тензоров вклада [8]. Действительно, при учете разных факторов, эффективная диффузионная проницаемость материала со сфероидальными неоднородностями, в терминах тензоров вклада будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_c} \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \left(\frac{1}{s_c} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_c} \right]^{-1} \quad (15)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_c ;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^\beta \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_i V_i \times \left(\frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} f_0}{D_1 - D_0 - D_0 \beta \frac{S}{\gamma} f_0} H_{11}^\beta \boldsymbol{\theta}_i + \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} (1-2f_0)}{D_1 - D_0 - D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (1-2f_0)} H_{33}^\beta \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \right) \right]^{-1} \quad (16)$$

при учете неидеального контакта через параметр β , здесь тензоры вклада отдельных неоднородностей представлены в координатном виде как $\mathbf{H}^\beta = H_{11}^\beta (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) + H_{33}^\beta \mathbf{nn}$;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_f} \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + (s_f \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0)^{-1} \cdot \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_f} \right]^{-1} \quad (17)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_f ;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^\lambda \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_i V_i \times \left(\frac{1}{D_1 - D_0 + D_1 \lambda \frac{S}{\gamma} (1-f_0)} H_{11}^\lambda \boldsymbol{\theta}_i + \frac{1}{D_1 - D_0 + 2D_1 \lambda \frac{S}{\gamma} f_0} H_{33}^\lambda \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \right) \right]^{-1} \quad (18)$$

(p – объемная доля неоднородностей) при учете неидеального контакта через параметр λ .

В случае, когда неоднородности имеют одинаковые свойства и одинаковую форму (при этом их размер в общем случае может быть разным), операцию суммирования в выражениях (15) – (18) можно заменить операцией осреднения по ориентациям неоднородностей

$$1/V \sum_i V_i \dots = p \langle \dots \rangle,$$

которая сводится к осреднению тензора $\boldsymbol{\theta}$ и диады \mathbf{nn} в выражениях (10) – (13) для тензоров вклада.

В результате получим следующие окончательные формулы для вычисления эффективной диффузионной проницаемости макроизотропного материала, состоящего из изотропных фаз (с учетом произвольного распределения неоднородностей по ориентациям и, соответственно, выполнения равенства $\langle \mathbf{nn} \rangle = (1/3)\mathbf{I}$):

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_{s_c}}{(1-p) + \frac{pA_{s_c}}{\alpha/s_c - 1}}, \quad A_{s_c} = \frac{2H_{11}^{s_c}/D_0 + H_{33}^{s_c}/D_0}{3} \quad (19)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_c (здесь и далее введен безразмерный параметр $\alpha = D_1 / D_0$);

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_\beta}{(1-p) + pB_\beta}, \quad A_\beta = \frac{2H_{11}^\beta/D_0 + H_{33}^\beta/D_0}{3},$$

$$B_\beta = \frac{2}{3} \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} f_0}{\alpha - 1 - \beta \frac{S}{\gamma} f_0} \frac{H_{11}^\beta}{D_0} + \frac{1}{3} \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0)}{\alpha - 1 - \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0)} \frac{H_{33}^\beta}{D_0} \quad (20)$$

при учете неидеального контакта через параметр β ;

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_{s_f}}{(1-p) + \frac{pA_{s_f}}{\alpha s_f - 1}}, \quad A_{s_f} = \frac{2H_{11}^{s_f}/D_0 + H_{33}^{s_f}/D_0}{3} \quad (21)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_f ;

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_\lambda}{(1-p) + pB_\lambda}, \quad A_\lambda = \frac{2H_{11}^\lambda/D_0 + H_{33}^\lambda/D_0}{3},$$

$$B_\lambda = \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha - 1 + \alpha K \frac{S}{\gamma} (1 - f_0)} \frac{H_{11}^\lambda}{D_0} + \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha - 1 + 2\alpha K \frac{S}{\gamma} f_0} \frac{H_{33}^\lambda}{D_0} \quad (22)$$

при учете неидеального контакта через параметр λ .

Решение задачи массопругости

Перейдем к описанию диффузионного процесса на макроуровне. Уравнение диффузии в локальной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (23)$$

где t – время.

Диффузионный поток \mathbf{J} в общем случае может быть вызван как градиентом концентрации c , так и градиентом давления P (явление бародиффузии; $P = -\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений):

$$\mathbf{J} = -D^{eff} (\nabla c + Ac\nabla P), \quad (24)$$

где $A = M\alpha_V/(3\rho RT)$ (M – молярная масса, α_V – коэффициент объемного концентрационного расширения, ρ – плотность, R – универсальная газовая постоянная, T – температура).

Наряду с вариантом задания потока выражением (24) рассмотрим классический закон Фика:

$$\mathbf{J} = -D^{eff} \nabla c. \quad (25)$$

Наличие неидеальных контактов на мезоуровне учитывается здесь в коэффициенте D^{eff} , который определяется одной из формул (19) – (22), в зависимости от типа неидеального контакта и применяемой модели.

Напряженно-деформированное состояние материала удовлетворяет уравнению равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (26)$$

Как правило, накопление диффузанта приводит только к объемному расширению материала. В таком случае напряжения связаны с деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}$ соотношениями Дюамеля – Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\mu \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad P = -K(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_V(c - c_0))\mathbf{I}, \quad (27)$$

где c_0 – отсчетная концентрация; K, μ – модули объемного сжатия и сдвига соответственно.

Деформации линейного материала определяются через градиент перемещений как $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^s$.

Пример задачи для длинного цилиндра. Перейдем к начально-краевой задаче для длинного цилиндра. Представим систему уравнений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; базисные орты обозначим, соответственно, как $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$.

На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация c_1 , и эта поверхность свободна от нагрузки:

$$c|_{r=r_0} = c_1, \quad \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{r=r_0} = 0. \quad (28)$$

В центре цилиндра выполняются следующие условия:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=0} < \infty. \quad (29)$$

В соответствии с гипотезами Сен-Венана и плоских сечений, имеет место следующее интегральное условие равновесия:

$$\int_0^{r_0} \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\sigma} r dr = 0. \quad (30)$$

В предположении об осевой симметрии решение задачи будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u} = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_z(z)\mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon = \text{const}, \quad c = c(r). \quad (31)$$

Начальное распределение концентрации полагаем нулевым:

$$c|_{r=0} = c_0 = 0. \quad (32)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений, в соответствии с выражением (27) и с учетом предположений (31), будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon \right) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{u_r}{r} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right], \\ \sigma_{zz} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

а давление P – вид

$$P = -K \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon - \alpha_V c \right). \quad (34)$$

Перейдем к безразмерной постановке задачи, для чего введем следующие масштабы: для радиальной координаты r и радиального смещения u_r – радиус цилиндра r_0 ; для компонент тензора напряжений σ_{ii} и давления P – величину $4\mu/3$; для концентрации c – концентрацию c_1 , поддерживаемую на боковой поверхности. Для времени t обозначим масштаб как T .

Тогда окончательная система уравнений, дополненная начальным и граничными условиями, примет следующий вид (для безразмерных величин обозначения сохранены):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - P \right] = 0, \\ P = -k \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon - \alpha_v c \right), \\ u_r|_{r=0} < \infty, \quad \left\{ -P + \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon \right) \right] \right\}_{r=1} = 0, \\ \int_0^1 \left\{ -P + \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \right\} r dr = 0, \\ r \frac{\partial c}{\partial t} = F \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial c}{\partial r} + A_k c \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right], \\ c|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial c}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad c|_{r=0} = 0, \end{array} \right. \quad (35)$$

где введены безразмерные коэффициенты $k = 3K/4\mu$, $A_k = 4\mu/3A$; F – диффузионный критерий Фурье, $F = D^{eff} T / r_0^2$.

Отметим, что в безразмерной постановке задачи наличие неидеальных контактов учитывается только в диффузионном критерии Фурье, поскольку в него входит величина эффективной диффузионной проницаемости. При фиксированном масштабе времени и одном и том же значении радиуса цилиндра варьирование параметра F означает варьирование D^{eff} .

Решение системы уравнений (35) реализовывалось численно с помощью неявного метода конечных разностей. В рассмотрение вводилась одномерная пространственная сетка вдоль оси r , концентрация и радиальные перемещения задавались в узлах, а напряжения (в том числе давление) и деформации – в ячейках.

Анализ полученных результатов

Исследуем влияние неидеальных контактов на решение задачи массопругости. Рассмотрим при этом несколько моделей. Во-первых, представим решение с учетом бародиффузии и без ее учета. Во-вторых, рассмотрим два типа неидеальных контактов: I и II.

I. Имеет место сегрегация.

II. В материале возникают дополнительные обходные пути ускоренной диффузии.

Используем в рамках каждой модели два подхода к учету неидеального контакта.

1. Скачок поля задается через отношение величин с внешней и внутренней сторон границы неоднородности.

2. В рассмотрение вводится неоднородность с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Сравним полученные результаты с таковыми для случая идеальных контактов на границах раздела матрица/неоднородность. Для сравнения подходов выразим параметры s_c и s_f через эквивалентную поверхностную сопротивляемость β и проницаемость λ соответственно:

$$s_c = 1 + \beta, \quad s_f = 1 + 2\lambda; \quad (36)$$

в таком случае оба подхода к учету неидеальных контактов приводят к одинаковым результатам в случае сферических неоднородностей.

Анализ проведем на примере материала, состоящего из матрицы и произвольно ориентированных вытянутых сфероидальных неоднородностей с соотношением длин полуосей $\gamma = 10$; примем значение отношения диффузионных проницаемостей $\alpha = D_1 / D_0 = 0,2$.

Представим сначала результаты для эффективных свойств материала с неидеальными контактами. Влияние сегрегации продемонстрировано на рис. 1.

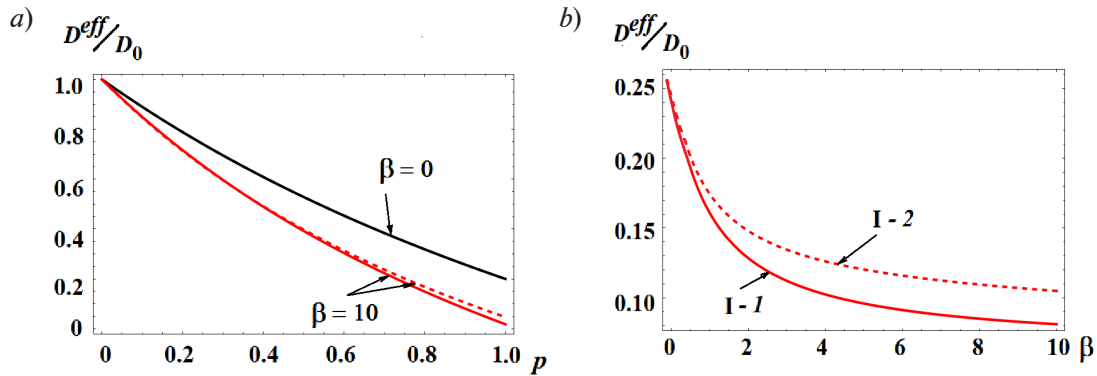


Рис. 1. Зависимости эффективного коэффициента диффузии от объемной доли неоднородностей p для двух значений параметра β (a) и от параметра β (b) для случая сегрегации (I), моделируемой в рамках подходов 1 и 2 (сплошная и пунктирная линии, соответственно), см. также пояснения в тексте

Как видно из рис. 1, при увеличении объемной доли неоднородностей p диффузионная проницаемость снижается, при этом наличие неидеального контакта приводит к более существенному изменению свойства (см. рис. 1, a). На рис. 1, b представлены зависимости эффективной проницаемости от параметра β при фиксированном значении объемной доли неоднородностей $p = 0,9$. Видно, что с увеличением β разница между подходами к учету неидеального контакта возрастает. При этом при выбранных характеристиках структуры различие остается незначительным.

Влияние наличия обходных путей ускоренной диффузии продемонстрировано на рис. 2. Видно, что наличие неидеального контакта на границе раздела фаз увеличивает диффузионную проницаемость, по сравнению со случаем его отсутствия. При этом в зависимости от значения параметра λ диффузионная проницаемость может как уменьшаться с увеличением объемной доли неоднородностей, так и увеличиваться, что объясняется одновременным влиянием двух конкурирующих факторов: наличием в матрице менее проводящих неоднородностей и ускоренных диффузионных путей. Видно, что

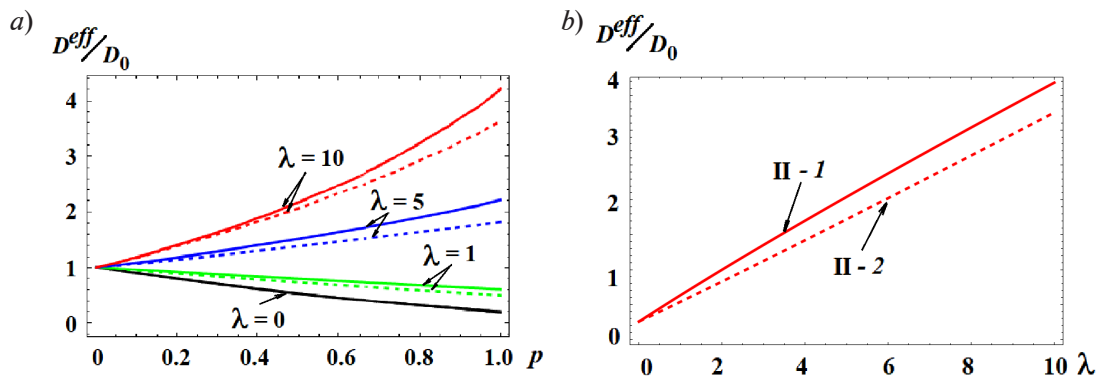


Рис. 2. Зависимости эффективного коэффициента диффузии от объемной доли неоднородностей p при 4 значениях параметра λ (a) и от параметра λ (b) для случая наличия обходных путей ускоренной диффузии (II), моделируемого в рамках подходов 1 и 2 (сплошная и пунктирная линии, соответственно), см. также пояснения в тексте



увеличение параметра λ влечет за собой увеличение разницы между подходами к учету неидеального контакта.

Задачу массопругости будем решать при следующих значениях параметров: $k = 1,6$, $A = 49,3$, $\alpha_v = 4,5 \cdot 10^{-6}$ (параметры, характерные для алюминия). Наличие неидеальных контактов влияет на значение эффективной диффузионной проницаемости и, следовательно, на диффузионный критерий Фурье F . Рассмотрим значения D^{eff}/D_0 , полученные при $p = 0,9$ и, в зависимости от типа неидеального контакта, при $\beta = 10$ или $\lambda = 10$ (см. таблицу, третий столбец). Отметим, что для анализа важны не столько абсолютные значения F , сколько отношения диффузионных критериев Фурье, соответствующих разным значениям эффективной диффузионной проницаемости. Введем обозначение F_0 для величины критерия, соответствующей значению D^{eff}/D_0 , полученному без учета неидеальных контактов ($s_c = s_f = 1$, $\beta = \lambda = 0$). Значение F_0 вычислим при $D^{eff} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ (параметр, характерный для алюминия), $r_0 = 0,004 \text{ м}$, $T = 3600 \text{ с} = 1 \text{ ч}$. Значения диффузионного критерия Фурье представлены в таблице (последний столбец).

Таблица

Результаты расчета диффузионных характеристик материала

Модель		Значение параметра	
Тип НК	Подход к учету НК	D^{eff}/D_0	F_i
Без учета НК		0,26	$F_0 = 2,25 \cdot 10^{-4}$
I	1	0,08	$F_1 = 0,3 F_0$
	2	0,10	$F_2 = 0,4 F_0$
II	1	3,68	$F_3 = 14,2 F_0$
	2	3,25	$F_4 = 12,5 F_0$

Обозначения: D^{eff}/D_0 – безразмерная эффективная диффузионная проницаемость; F_i – диффузионный критерий Фурье; НК – неидеальный контакт. Номера I, II, 1, 2 присвоены в тексте.

Примечание. Данные рассчитаны для материала, состоящего из матрицы и произвольно ориентированных, вытянутых сфероидальных неоднородностей с соотношением длин полуосей $\gamma = 10$.

Концентрационные профили и зависимости давления от радиуса (цилиндрическая система координат) при разных значениях диффузионного критерия Фурье в момент времени $t = 100$ представлены на рис. 3. Отметим, что результаты, полученные без учета и с учетом явления бародиффузии, совпали при заданных параметрах материала (значение параметра A_k является малым, поэтому градиент давления, умноженный на него, оказывается гораздо меньше градиента концентрации).

На рис. 3 видно, что наличие неидеальных контактов и способ их учета оказывают существенное влияние на концентрацию диффузанта в материале и на его распределение. В частности, наличие сегрегации, при которой наблюдается снижение скорости диффузионного процесса, может значительно снизить концентрацию примеси в материале. При этом градиент концентрации растет, что приводит к более существенным перепадам давления. Такое изменение давления, в свою очередь, может оказаться

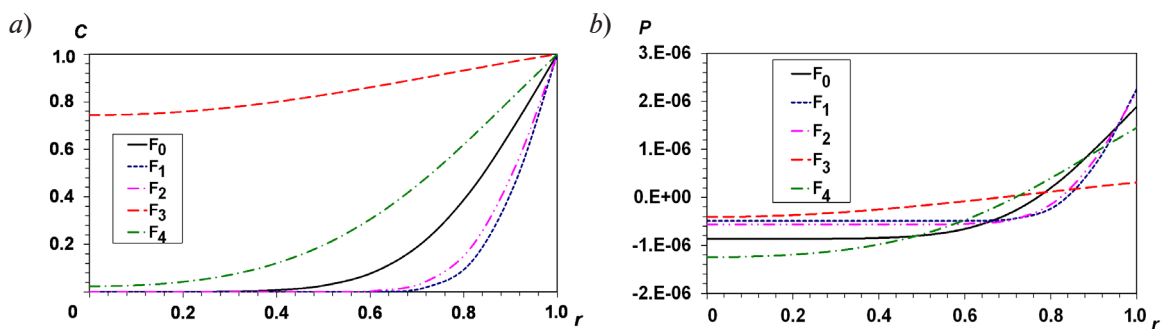


Рис. 3. Зависимости концентрации (a) и давления (b) от радиуса (координата вдоль полярной оси) при разных значениях диффузионного критерия Фурье (см. табл.) в момент времени $t = 100$

критическим в задачах водородной дегградации, где важны локальные характеристики. Наличие обходных путей ускоренной диффузии может привести к значительному росту концентрации в материале, что непосредственно влияет на его поведение в случае эксплуатации в агрессивных средах. При этом подход, при котором задается скачок поля через величину отношения значений поля с внешней и внутренней сторон границы неоднородности (как в случае сегрегации, так и в случае наличия дополнительных обходных путей ускоренной диффузии) влияет на результат в большей степени. Особенно существенна разница между моделями II-1 и II-2, используемыми для моделирования нарушения непрерывности нормальной компоненты потока.

Влияние бародиффузии изучено отдельно и представлено на рис. 4. Такое влияние имеет место при больших значениях коэффициента концентрационного расширения, чем характерная величина для алюминия. В частности, графики на рис. 4 построены при значении $\alpha_v = 0,2$. Для наглядности на рисунке представлены результаты, полученные при трех значениях F_0 из таблицы: при значении, полученном без учета неидеальных контактов, а также при максимальном и минимальном значениях из исследуемого диапазона. На рис. 4 видно, что наличие бародиффузии во всех случаях приводит к повышению концентрации диффузанта в материале, снижению как градиента концентрации, так и разницы давления.

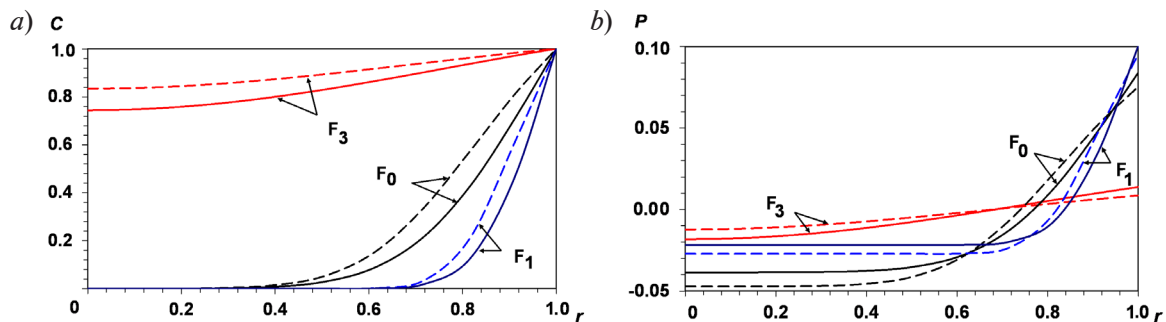


Рис. 4. Зависимости концентрации диффузанта (а) и давления (б) от радиуса (координата вдоль полярной оси) при разных значениях диффузионного критерия Фурье (см. табл.) с учетом (пунктирные линии) и без учета (сплошные линии) бародиффузии

Таким образом, наличие, тип и способ учета неидеальных контактов оказывают влияние на распределение диффундирующего вещества в материале и на его напряженно-деформированное состояние.

Заключение

В работе получено решение связанной (в том числе частично) задачи диффузии и описания упругого поведения материала вследствие накопления примеси с учетом наличия неидеальных контактов на границе раздела фаз. Рассмотрено два типа неидеальных контактов: наличие сегрегации (оно приводит к нарушению непрерывности поля концентрации) и наличие дополнительных обходных путей ускоренной диффузии (оно приводит к нарушению непрерывности нормальной компоненты потока). Каждый тип неидеального контакта учтен в рамках двух подходов: через задание отношения величины поля с внешней и внутренней сторон границы неоднородности, а также путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Микроструктура учтена на этапе определения эффективных свойств материала с помощью метода гомогенизации Мори – Танаки, представленного в терминах тензоров вклада в диффузионную проницаемость.

Анализ проведен на примере осесимметричного образца, выполненного из двухфазного материала с произвольно ориентированными вытянутыми сфероидальными неоднородностями, характеризующимися меньшей диффузионной проницаемостью, чем матрица.

Показано, что тип неидеального контакта и способ его учета могут оказывать существенное влияние на распределение примеси в образце и на величину внутреннего



давления, что может оказаться критическим, например, в случае насыщения металлов вредными примесями.

Таким образом, для улучшения качества диагностики состояния материалов необходимо принимать во внимание специфику транспорта примеси и наличие дефектов, которые могут приводить к необходимости отказа от предположения о непрерывности полей на границах раздела фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kachanov M., Sevostianov I.** Micromechanics of materials, with applications (Book Series “Solid Mechanics and its Applications”. Vol. 249). Berlin, Germany: Springer, 2018. 712 p.
2. **Zhang X, Qiao L, Zhang H, Wang P.** Influence of impurity gas seeding into deuterium plasma on the surface modification, sputtering erosion and deuterium retention in W and W-La₂O₃ alloy // International Journal of Hydrogen Energy. 2023. Vol. 48. No. 6. Pp. 2075–2089.
3. **Zhang Y., Liu L.** On diffusion in heterogeneous media // American Journal of Science. 2012. Vol. 312. No. 9. Pp. 1028–1047.
4. **Чепак-Гизбрехт М. В., Князева А. Г.** Двумерная модель зернограницной диффузии и окисления // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 1. С. 156–166.
5. **Pham D. C., Nguyen T. K.** General imperfect interface model for spherical–circular inclusion composites // Acta Mechanica. 2024. Vol. 235. No. 4. Pp. 2211–2229.
6. **Belova I. V., Murch G. E.** Calculation of the effective conductivity and diffusivity in composite solid electrolytes // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 2005. Vol. 66. No. 5. Pp. 722–728.
7. **Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P., Sevostianov I.** On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material // Philosophical Magazine. 2015. Vol. 95. No. 19. Pp. 2046–2066.
8. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.** Effective diffusivity of transversely isotropic material with embedded pores // Materials Physics and Mechanics. 2021. Vol. 47. No. 6. Pp. 937–950.
9. **Markov K. Z.** Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous media: micromechanics modeling methods and simulations. Boston, USA: Birkhäuser, MA, 2000. 162 p.
10. **Levin V., Markov M.** Effective thermal conductivity of micro-inhomogeneous media containing imperfectly bonded ellipsoidal inclusions // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 109. December. Pp. 202–215.
11. **Markov M., Levin V., Markova I.** Determination of effective electromagnetic parameters of concentrated suspensions of ellipsoidal particles using Generalized Differential Effective Medium approximation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 492. 15 February. Pp. 113–122.
12. **Фролова К. П., Вильчевская Е. Н.** Сравнение подходов к учету неидеальных контактов при определении эффективной проницаемости материала // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 146–159.
13. **Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N.** Diffusion in media with spheroidal pores // V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structures Materials. Vol. 164). Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2022. Pp. 209–225.
14. **Sun Y., Cheng Y. F.** Hydrogen-induced degradation of high-strength steel pipeline welds: A critical review // Engineering Failure Analysis. 2022. Vol. 133. March. P. 105985.
15. **Sedova Y. S., Polyanskiy V. A., Belyaev A. K., Yakovlev Y. A.** Modeling the skin effect, associated with hydrogen charging of samples, within the framework of the HEDE mechanism of cracking // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51. No. 6. Pp. 152–159.
16. **Mori T., Tanaka K.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. Vol. 21. No. 5. Pp. 571–574.

REFERENCES

1. **Kachanov M., Sevostianov I.**, Micromechanics of materials, with applications (Book Ser. “Solid Mechanics and its Applications”. Vol. 249), Springer, Berlin, Germany, 2018.
2. **Zhang X, Qiao L, Zhang H, Wang P.**, Influence of impurity gas seeding into deuterium plasma on the surface modification, sputtering erosion and deuterium retention in W and W-La₂O₃ alloy, *Int. J. Hydr. Energy*. 48 (6) (2023) 2075–2089.
3. **Zhang Y., Liu L.**, On diffusion in heterogeneous media, *Am. J. Sci.* 312 (9) (2012) 1028–1047.
4. **Chepak-Gizbrekht M. V., Knyazeva A. G.**, Two-dimensional model of grain boundary diffusion and oxidation, *PNPU Mechanics Bulletin*. (1) (2022) 156–166 (in Russian)
5. **Pham D. C., Nguyen T. K.**, General imperfect interface model for spherical–circular inclusion composites, *Acta Mech.* 235 (4) (2024) 2211–2229.
6. **Belova I. V., Murch G. E.**, Calculation of the effective conductivity and diffusivity in composite solid electrolytes, *J. Phys. Chem. Solids*. 66 (5) (2005) 722–728.
7. **Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P., Sevostianov I.**, On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material, *Philos. Mag.* 95 (19) (2015) 2046–2066.
8. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.**, Effective diffusivity of transversely isotropic material with embedded pores, *Mater. Phys. Mech.* 47 (6) (2021) 937–950.
9. **Markov K. Z.**, Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous media: micromechanics modeling methods and simulations, Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2000.
10. **Levin V., Markov M.**, Effective thermal conductivity of micro-inhomogeneous media containing imperfectly bonded ellipsoidal inclusions, *Int. J. Eng. Sci.* 109 (Dec) (2016) 202–215.
11. **Markov M., Levin V., Markova I.**, Determination of effective electromagnetic parameters of concentrated suspensions of ellipsoidal particles using Generalized Differential Effective Medium approximation, *Phys. A: Stat.* 492 (15 Febr) (2018) 113–122.
12. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.**, Comparison of approaches to accounting for imperfect contacts when determining the effective permeability of material, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (4) (2023) 146–159 (in Russian).
13. **Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N.**, Diffusion in media with spheroidal pores, In book: V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). *Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structures Materials. Vol. 164)*, Springer Int. Publ., Cham, Switzerland (2022) 209–225.
14. **Sun Y., Cheng Y. F.**, Hydrogen-induced degradation of high-strength steel pipeline welds: A critical review, *Eng. Fail. Anal.* 133 (March) (2022) 105985.
15. **Sedova Y. S., Polyanskiy V. A., Belyaev A. K., Yakovlev Y. A.**, Modeling the skin effect, associated with hydrogen charging of samples, within the framework of the HEDE mechanism of cracking, *Mater. Phys. Mech.* 51 (6) (2023) 152–159.
16. **Mori T., Tanaka K.**, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.* 21 (5) (1973) 571–574.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФРОЛОВА Ксения Петровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладных исследований Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.

fkp@ipme.ru

ORCID: 0000-0003-0376-4463

БЕССОНОВ Николай Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории микромеханики материалов Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.

nickbessonov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6462-5980



ВИЛЬЧЕВСКАЯ Елена Никитична – доктор физико-математических наук, приглашенный специалист Берлинского технического университета, г. Берлин, Германия.

Straße des 17. Juni 135 10623, Berlin

vilchevska@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5173-3218

THE AUTHORS

FROLOVA Ksenia P.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS

61 Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia

fkp@ipme.ru

ORCID: 0000-0003-0376-4463

BESSONOV Nikolay M.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS

61 Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia

nickbessonov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6462-5980

VILCHEVSKAYA Elena N.

Technical University of Berlin, Germany

Straße des 17. Juni 135 10623, Berlin

vilchevska@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5173-3218

*Статья поступила в редакцию 28.03.2025. Одобрена после рецензирования 17.04.2025.
Принята 17.04.2025.*

Received 28.03.2025. Approved after reviewing 17.04.2025. Accepted 17.04.2025.

Научная статья

УДК 534.1

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18313>

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОСИНХРОНИЗАЦИИ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕЙ ДВУХМАССОВОГО АППАРАТА ДЛЯ ПЕРЕРАБОТКИ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. С. Сизиков 

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

 sizikovvs@yandex.ru

Аннотация. Работа направлена на поиск условий устойчивой самосинхронизации вибраторов для противофазного режима колебаний рабочих органов аппарата для переработки зернистых сред. Режим работы аппарата обеспечивает процессы измельчения, истирания и перемешивания зерен материала, совмещенные с процессом транспортирования с использованием интегрального критерия устойчивости синхронных движений получено условие устойчивой самосинхронизации роторов вибровозбудителей в противофазном режиме их вращения. Найденные соотношения позволяют выбрать оптимальные значения параметров конструкции аппарата и задавать режимы колебаний вибрационных рабочих органов, обеспечивающие эффективное осуществление процессов технологической переработки зернистых материалов.

Ключевые слова: двухмассовый аппарат, стенки рабочих органов, самосинхронизация вибраторов, критерий устойчивости синхронизации

Для цитирования: Сизиков В. С. Устойчивость самосинхронизации вибровозбудителей двухмассового аппарата для переработки зернистых материалов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 156–165. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18313>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18313>

SELF-SYNCHRONIZATION STABILITY OF VIBRATION EXCITERS OF A TWO-MASS APPARATUS FOR PROCESSING GRANULAR MATERIALS

V. S. Sizikov 

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia

 sizikovvs@yandex.ru

Abstract. The article studies stability conditions for self-synchronization of vibration exciters in antiphase oscillation regime of working tools of an apparatus for granular materials processing. The apparatus operating regime provides grinding, attrition and mixing processing of material grains combined with a transportation process. The condition of stable antiphase rotation regime of vibration exciters' rotors has been found with implementation of integral criterion of stability of synchronous motions. The condition of stable self-synchronization rotation regime of vibrational exciters' rotors was found with the usage of integral criterion of stability of synchronous movements. The obtained relationships allow one to choose parameters of apparatus construction and to specify vibrational working tool's operating regimes that perform effective implementation of process of granular material treatment.

Keywords: two-mass apparatus, working tools walls, self-synchronization of vibrators, integral criterion of synchronization stability, granular materials



For citation: Sizikov V. S., Self-synchronization stability of vibration exciters of a two-mass apparatus for processing granular materials, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 156–165. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18313>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Явление самосинхронизации неуравновешенных роторов вибровозбудителей заключается в наличии между ними вибрационной связи, которая заставляет их вращаться синхронно с одинаковыми или кратными скоростями и с заданными взаимными фазами [1]. Такая связь имеет особо важное значение для обеспечения процессов переработки зернистых материалов, таких как дробление, транспортирование, истирание, перемешивание и других.

Важным условием осуществления механического воздействия на обрабатываемую среду рабочими органами вибрационных технологических машин является синтез вибрационных полей с заданными направлениями действия вибрационных нагрузок и траекториями движения рабочих органов. Такой синтез позволяет оптимизировать многие процессы.

Вибрация находит широкое применение в технологиях переработки горных пород, порошков и других сыпучих материалов в горнодобывающей, строительной, химической и литейной отраслях промышленности. Основные направления интенсификации и совершенствования указанных технологических процессов – это снижение энергетических затрат для их осуществления и снижение материалоемкости при создании вибрационного оборудования.

Открытие эффекта самосинхронизации привело к качественному скачку в развитии вибрационной техники и технологии. Практическое использование этого эффекта способствовало совершенствованию широкого класса вибрационной техники в нашей стране и за рубежом. Большой вклад в эту область внесли такие видные ученые, как Л. И. Блехман, Л. А. Вайсберг, Б. П. Лавров, К. М. Рагульскис и другие [1 – 6].

Возможности применения самосинхронизации вибровозбудителей сегодня далеко не исчерпаны, что подтверждается появлением класса многомассовых вибрационных машин, позволяющих интенсифицировать различные процессы при работе в резонансных режимах колебаний, снижать нагрузки на основание и реализовывать специальные технологические процессы обработки сыпучих сред путем воздействия на них несколькими рабочими органами [1]. В этой связи перспективным является применение многомассовых машин с самосинхронизирующимися вибровозбудителями, установленными на нескольких рабочих органах, например двухмассовых вибродробилок, виброгрохотов, оборудования для обогащения сыпучих материалов и других транспортно-технологических аппаратов [2, 4].

Развитие современных систем и методов принудительного управления синхронизацией роторов вибрационного оборудования позволяет обеспечивать заданные соотношения фаз и частот вращения роторов вибровозбудителей, что открывает широкие возможности управления технологическими процессами обработки материалов вибрационными методами [10, 12].

К перспективным методам вибрационной переработки сыпучих материалов относится воздействие на слой материала рабочими органами двухмассового аппарата, образующими продольный канал с плоскими стенками, на каждой из которых установлен дебалансный вибровозбудитель (рис. 1) [9]. Вращение вибраторов обеспечивает плоскопараллельные колебания каждой стенки по эллиптическим траекториям.

Процесс обработки слоя материала включает два основных периода воздействия стенками на слой:

период сжатия слоя сдавливающими усилиями при сближении стенок (рис. 1, *a*), сопровождаемый созданием напряжений в слое и интенсивным истиранием поверхности зерен материала при их относительном перемещении внутри слоя;

период разжатия слоя при отходе стенок друг от друга (рис. 1, *b*), сопровождаемый разрыхлением слоя и его перемещением микроброском вдоль рабочего канала.

Одновременно с обработкой осуществляется транспортирование материала вдоль рабочего канала.

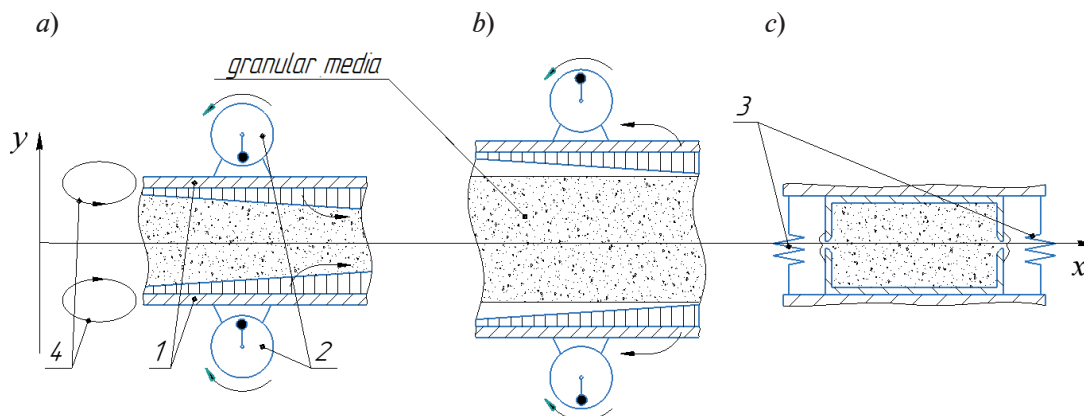


Рис. 1. Схема виброобъемного воздействия на слой обрабатываемой зернистой среды стенками двухмассового аппарата в режиме синхронно-противофазных колебаний по эллиптическим траекториям (4): *a*, *b* – периоды сжатия и разжатия слоя, соответственно; *c* – поперечное сечение рабочего канала.

Показаны стенки рабочих органов (1), дебалансные вибраторы (2), упругие элементы взаимодействия стенок (3); стрелки указывают направления перемещения стенок 1 и вращения вибраторов 2

Исследованию явления самосинхронизации динамических систем посвящена обширная монография [1], в которой получены различные условия устойчивости самосинхронизации вибровозбудителей одномассовых и многомассовых динамических схем вибрационных машин и устройств. Кроме того, в последнее время получены результаты исследования противофазного и синфазного синхронного вращения роторов вибровозбудителей двухмассовой установки, смонтированных на одном рабочем теле [11]. Однако проблема самосинхронизации роторов такой установки с вибровозбудителями, размещенными на обоих рабочих органах, до настоящего времени развития не получила.

Исследование режимов работы двухмассового аппарата, основанного на описанной рабочей схеме, позволяет определять параметры, обеспечивающие процесс истирания зернистого материала в аппарате с наибольшими сжимающими усилиями, совмещенный с процессом его транспортирования. Наилучшее сочетание этих параметров достигается в режиме синхронно-противофазных колебаний стенок рабочих органов по эллиптическим траекториям в противоположных направлениях, поддержание которого обеспечивается самосинхронизацией разнонаправленного вращения роторов вибраторов в противоположных фазах (см. рис. 1).

Поэтому цель настоящего исследования – найти оптимальные значения конструктивных и режимных параметров работы двухмассового аппарата, обеспечивающие устойчивую самосинхронизацию противофазного вращения роторов вибраторов в противоположных направлениях.

К конструктивным параметрам относятся массы и размеры рабочих органов, их моменты инерции, жесткости пружин и места их установки по длине рабочих органов. К режимным параметрам работы относятся частоты и амплитуды колебаний рабочих органов.

Решение указанной задачи должно способствовать определению диапазона значений параметров воздействия рабочих органов на обрабатываемый материал и выработке рекомендаций к проектированию и работе аппаратов для обогащения очистки поверхности зерен сыпучих минеральных сред [7].

В зависимости от направления и разности фаз вращения неуравновешенных роторов в аппарате могут создаваться разнообразные режимы относительного движения стенок, каждый из которых наиболее благоприятен для конкретного вида технологической операции переработки материала [8]. Например, одним из режимов колебаний стенок

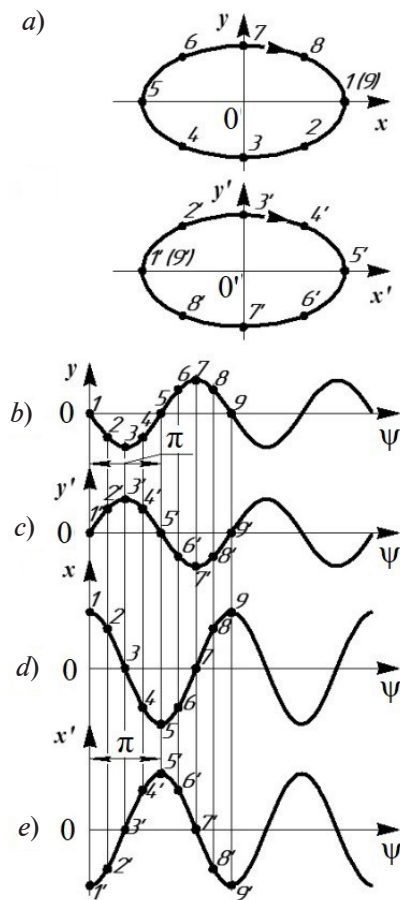


Рис. 2. Схемы перемещения стенок аппарата в режиме колебаний с относительным сдвигом ϵ фаз колебаний (ψ) стенок, равным π , в продольном (ϵ_x) и поперечном (ϵ_y) направлениях:

a – траектории движения верхней и нижней стенок (стрелки указывают их направления); *b, c* – вертикальные координаты нижней (y') и верхней (y) стенок; *d, e* – горизонтальные координаты нижней (x') и верхней (x) стенок; номера точек 1 – 9 и 1' – 9' показывают позиции стенок в одинаковые моменты времени

среднее за период значение функции Лагранжа системы:

$$D = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (T^{(1)} - \Pi^{(1)}) dt, \tag{1}$$

где $T^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ – кинетическая и потенциальная энергия колебательной части системы.

Составим уравнения для кинетической и потенциальной энергии двухмассовой механической системы аппарата. Расчетная схема для анализа устойчивости самосинхронизации вращения роторов вибраторов аппарата показана на рис. 3.

На расчетной схеме два дебалансных вибратора размещены на одинаковых плоских стенках массой M , каждая обладает моментом инерции I относительно центра масс. Стенки размещены параллельно друг другу и связаны между собой парой упругих элементов общей жесткостью c_x и c_y в продольном и поперечном направлениях, размещенных на одинаковых расстояниях l относительно центров тяжести стенок. Стенки аппарата могут перемещаться в плоскости, перпендикулярной осям вращения роторов вибраторов, причем положение стенок определяется абсолютными координатами x_1, y_1 и

аппарата для осуществления процесса истирания зерен материала является их движение с относительными сдвигами фаз колебаний стенок в поперечном и продольном направлениях, равными π (рис. 2). Такое движение стенок аппарата осуществляется в одном направлении при однонаправленном вращении роторов вибраторов (например, по часовой стрелке); оно позволяет создавать в слое материала два вида деформаций: деформаций сжатия и сдвига.

Требования к величине создаваемых в слое сжимающих напряжений и напряжений сдвига для истирания материала определяются частотой колебаний стенок и величиной вынуждающей силы, создаваемой вибровозбудителями.

Исследование самосинхронизации вибраторов устройства в описанном режиме разнонаправленного синхронно-синфазного вращения их роторов включает две задачи:

- оценка стабильности самосинхронизации вибраторов двухмассового аппарата под нагрузкой, учитывающая взаимодействие с обрабатываемым материалом;

- оценка стабильности самосинхронизации вибраторов на холостом ходу.

В настоящей работе решается только вторая задача: исследование стабильности вращения вибраторов аппарата на холостом ходу.

Основная часть

Для анализа устойчивости самосинхронизации вращения роторов вибровозбудителей аппарата используется интегральный критерий устойчивости синхронных движений [1], который заключается в отыскании условия положительности квадратичной формы функции D , представляющей собой

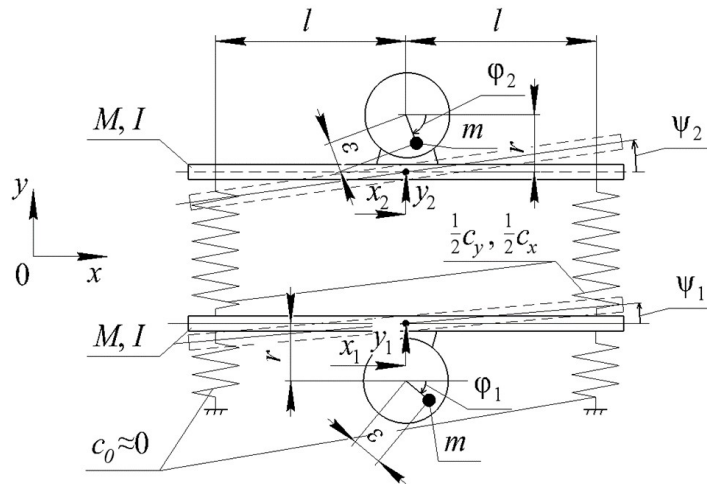


Рис. 3. Расчетная схема синхронных противофазных колебаний стенок двухмассового аппарата: M – масса каждой стенки; I – момент инерции каждой стенки; c_x, c_y – жесткости упругих элементов в продольном и поперечном направлениях; l – расстояния от центров тяжести (ЦТ) стенок до упругих элементов; x_i, y_i – координаты ЦТ стенок; ψ_i – углы поворота каждой стенки относительно ЦТ; φ_i – углы поворота роторов вибраторов вокруг оси вращения; ε, r – эксцентриситет и расстояние от оси вращения роторов до ЦТ стенок (индексы 1 и 2 относятся к нижней и верхней стенкам, соответственно)

x_2, y_2 их центров тяжести и углами поворота ψ_1 и ψ_2 каждой стенки относительно центра тяжести. Ротор каждого из двух вибровозбудителей, полагаемых одинаковыми, характеризуется углом поворота φ_1 (φ_2) вокруг оси вращения, массой неуравновешенной части m , эксцентриситетом ε и расстоянием r от оси вращения до центра тяжести каждой стенки. Индекс 1 относится к нижней, а 2 – к верхней стенке.

Уравнения поступательного перемещения стенок аппарата имеют вид:

$$-M\ddot{x}_1 + F \cos \varphi_1 - c_x(x_1 - x_2) = 0; \quad (2)$$

$$-M\ddot{x}_2 + F \cos \varphi_2 - c_x(x_2 - x_1) = 0; \quad (3)$$

$$-M\ddot{y}_1 - F \sin \varphi_1 - c_y(y_1 - y_2) = 0; \quad (4)$$

$$-M\ddot{y}_2 - F \sin \varphi_2 - c_y(y_2 - y_1) = 0, \quad (5)$$

где $F = m\varepsilon\omega^2$ – амплитудное значение вынуждающей силы одного вибратора.

Законы вращения роторов вибраторов можно записать в следующем виде:

$$\varphi_1 = \sigma_1(\omega t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = \sigma_2(\omega t + \alpha_2), \quad (6)$$

где σ_1, σ_2 – направления вращения роторов против (+1) и по (–1) часовой стрелке; α_1, α_2 – начальные фазы их вращения.

Деформации левого и правого упругих элементов взаимодействия стенок при их поворотах на углы ψ_1 и ψ_2 относительно центров масс (рис. 4) выражаются в следующем виде:

$$\Delta_{left} = -l \sin \psi_2 + l \sin \psi_1, \quad \Delta_{right} = l \sin \psi_2 - l \sin \psi_1. \quad (7)$$

В формулах (7) не учитываются деформации упругих элементов в поперечном направлении ввиду их малости по сравнению с продольными деформациями.

С учетом выражений (7) на каждую стенку аппарата действуют моменты от инерции вращения, вынуждающей силы вибратора и деформаций правой и левой пружин (см. рис. 4). Уравнения вращательного движения стенок относительно центров масс имеют вид:

$$-I\ddot{\psi}_1 + Fr \cos \varphi_1 - \frac{c_y}{2} l \Delta_{left} + \frac{c_y}{2} l \Delta_{right} = 0; \quad (8)$$

$$-I\ddot{\psi}_2 - Fr \cos \varphi_2 - \frac{c_y}{2} l \Delta_{right} + \frac{c_y}{2} l \Delta_{left} = 0. \quad (9)$$

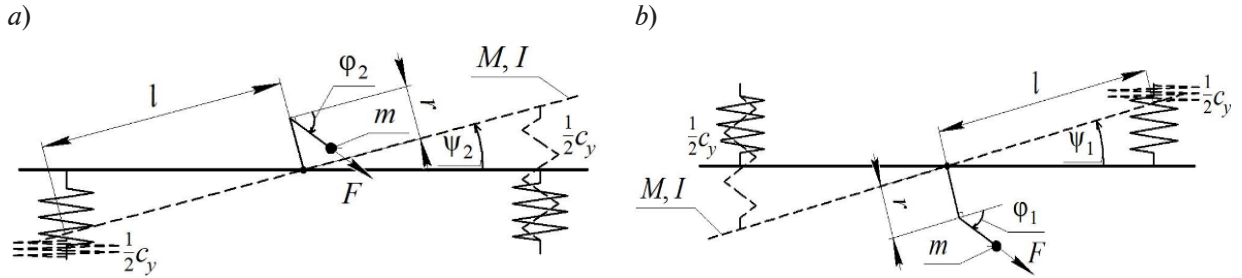


Рис. 4. Схемы к определению деформаций упругих элементов аппарата и моментов, возникающих при поворотах верхней (a) и нижней (b) стенок относительно центров масс

С учетом малости углов поворота стенок ψ_1 и ψ_2 ($\sin \psi_1 \approx \psi_1$, $\sin \psi_2 \approx \psi_2$) их можно переписать в следующем виде:

$$-I\ddot{\psi}_1 + Fr \cos \varphi_1 + c_y l^2 (\psi_2 - \psi_1) = 0; \quad (10)$$

$$-I\ddot{\psi}_2 - Fr \cos \varphi_2 + c_y l^2 (\psi_1 - \psi_2) = 0. \quad (11)$$

Будем искать решение для установившихся вынужденных колебаний стенок в форме

$$x_1 = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2; \quad (12)$$

$$x_2 = B_1 \cos \varphi_2 + B_2 \cos \varphi_1; \quad (13)$$

$$y_1 = C_1 \sin \varphi_1 + C_2 \sin \varphi_2; \quad (14)$$

$$y_2 = D_1 \sin \varphi_2 + D_2 \sin \varphi_1. \quad (15)$$

После подстановки решений (12) и (13) в уравнения движения системы (2) и (3) определим неизвестные константы A_1 , A_2 , B_1 и B_2 :

$$A_1 = \frac{F(c_x - M\omega^2)}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_x^2)}, \quad A_2 = \frac{Fc_x}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_x^2)}; \quad (16)$$

$$B_1 = \frac{F(c_x - M\omega^2)}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_x^2)}, \quad B_2 = \frac{Fc_x}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_x^2)}, \quad (17)$$

где $\lambda_x = \frac{p_x}{\omega}$, $p_x = \sqrt{\frac{2c_x}{M}}$.

Видно, что параметр p_x в полученных выражениях определяет частоту собственных колебаний стенок в продольном направлении для эквивалентной расчетной схемы аппарата в виде двухмассовой системы с одинаковыми массами M , связанными между собой упругим элементом с жесткостью c_x (рис. 5, a).

Подстановкой выражений (14) и (15) для поперечных перемещений стенок в уравнения движения (4) и (5) аналогично определим неизвестные константы C_1 , C_2 , D_1 и D_2 :

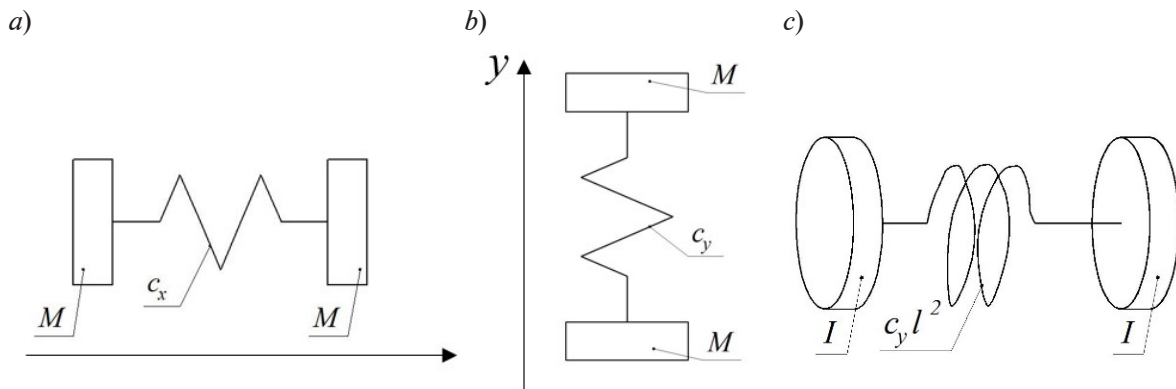


Рис. 5. Эквивалентные расчетные схемы свободных колебаний стенок аппарата в продольном (а) и поперечном (b) направлениях, а также эквивалентная схема их вращательных колебаний (с)

$$C_1 = \frac{F(M\omega^2 - c_y)}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_y^2)}, C_2 = \frac{-Fc_y}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_y^2)}; \quad (18)$$

$$D_1 = \frac{F(M\omega^2 - c_y)}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_y^2)}, D_2 = \frac{-Fc_y}{(M\omega^2)^2(1 - \lambda_y^2)}, \quad (19)$$

где $\lambda_y = \frac{p_y}{\omega}$, $p_y = \sqrt{\frac{2c_y}{M}}$.

Подобно колебаниям стенок в продольном направлении, параметр p_y в полученных выражениях характеризует частоту собственных колебаний стенок в поперечном направлении для эквивалентной расчетной схемы аппарата в виде двух масс M , связанных упругим элементом с жесткостью c_y (см. рис. 5, b).

Решения уравнений вращательных колебаний стенок относительно центров масс будем также искать в виде гармонических функций вида

$$\psi_1 = E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2, \quad (20)$$

$$\psi_2 = F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2. \quad (21)$$

Подставим выражения (20) и (21) в уравнения (10) и (11) вращательного движения стенок и определим константы E_1 , E_2 , F_1 и F_2 :

$$E_1 = \frac{Fr(c_y l^2 - I\omega^2)}{(I\omega^2)^2(1 - \lambda_c^2)}, E_2 = \frac{-Frc_y l^2}{(I\omega^2)^2(1 - \lambda_c^2)}; \quad (22)$$

$$F_1 = \frac{Frc_y l^2}{(I\omega^2)^2(1 - \lambda_c^2)}, F_2 = \frac{-Fr(c_y l^2 - I\omega^2)}{(I\omega^2)^2(1 - \lambda_c^2)}, \quad (23)$$

где $\lambda_c = \frac{p_c}{\omega}$, $p_c = \sqrt{\frac{2c_y l^2}{I}}$.

Полученная частота p_c свободных вращательных колебаний стенок соответствует эквивалентной расчетной схеме аппарата в виде двух тел с одинаковыми моментами инерции I , связанными друг с другом пружиной с крутильной жесткостью $c_y l^2$ (см. рис. 5, c).

Кинетическая и потенциальная энергия колебательного движения стенок аппарата, в соответствии с принятой расчетной схемой (см. рис. 3), имеют вид:

$$T^{(l)} = M \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + M \frac{(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} + I \frac{(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2)}{2}, \quad (24)$$

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2}c_y (\Delta_{left})^2 + \frac{1}{2}c_y (\Delta_{right})^2 \approx c_y l^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\psi_1\psi_2). \quad (25)$$

Условием устойчивой самосинхронизации вращения роторов вибраторов является положительная определенность осредненной функции Лагранжа системы вида [1]:

$$D = \langle T^{(1)} - \Pi^{(1)} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T^{(1)} - \Pi^{(1)}) dt. \quad (26)$$

В результате подстановки решений (12) – (15), (20), (21) для перемещений стенок в выражения для кинетической и потенциальной энергий (24) и (25) и вычисления интеграла (26) за один период колебаний системы осредненная функция Лагранжа принимает следующий вид:

$$D = \frac{M}{2} \omega^2 [\sigma_1 \sigma_2 (C_1 C_2 + D_1 D_2)] + \frac{I}{2} \omega^2 (F_1 F_2 + E_1 E_2) - c_y l^2 [E_1 E_2 + F_1 F_2 - 2(E_1 F_2 + E_2 F_1)] \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = N \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (27)$$

где $N = \frac{M}{2} \omega^2 [\sigma_1 \sigma_2 (C_1 C_2 + D_1 D_2)] + \frac{I}{2} \omega^2 (F_1 F_2 + E_1 E_2) - c_y l^2 [E_1 E_2 + F_1 F_2 - 2(E_1 F_2 + E_2 F_1)].$

Для устойчивости самосинхронизации вибровозбудителей в синхронном разнонаправленном режиме вращения роторов, т. е. при нулевой начальной разности их фаз $\alpha_1 - \alpha_2$ и при $\sigma_1 = +1, \sigma_2 = -1$, квадратичная форма осредненной функции Лагранжа D должна быть положительно определенной. Это обеспечивается в том случае, когда она имеет грубый минимум и множитель N в выражении (27) отрицателен, т. е.

$$-\frac{M}{2} \omega^2 (C_1 C_2 + D_1 D_2) + \frac{I}{2} \omega^2 (F_1 F_2 + E_1 E_2) - c_y l^2 [E_1 E_2 + F_1 F_2 - 2(E_1 F_2 + E_2 F_1)] < 0. \quad (28)$$

После подстановки в это неравенство констант C_1, C_2, D_1, D_2, E_1 и E_2 из выражений (18), (19), (22) и (23) получим условие устойчивости самосинхронизации вибраторов в исследуемом режиме, позволяющее выбирать параметры конструкции и режима работы двухмассового аппарата:

$$\frac{l^2 r^2 (c_y l^2 - 3M\omega^2)}{(I\omega^2)^2 (I\omega^2 - 2c_y l^2)} > \frac{M\omega^2 - c_y}{M\omega^2 (M\omega^2 - 2c_y)^2}. \quad (29)$$

Проанализируем полученное выражение для режима дорезонансных колебаний стенок аппарата, который обеспечивается соотношениями параметров $c_y > 3M\omega^2$ и $2c_y l^2 > I\omega^2$.

В этом случае для самосинхронизации вибраторов необходимо, чтобы выполнялось неравенство вида

$$\frac{c_y - M\omega^2}{M\omega^2 (M\omega^2 - 2c_y)^2} > \frac{l^2 r^2 (c_y l^2 - 3M\omega^2)}{(I\omega^2)^2 (2c_y l^2 - I\omega^2)}. \quad (30)$$

Отсюда видно, что для повышения устойчивости исследуемого режима следует увеличивать частоту вынуждающей силы ω и момент инерции J стенки аппарата, уменьшать массу M стенки, уменьшать расстояние l от центра масс стенки до точек крепления упругих элементов и снижать расстояние r от центра масс стенки до оси ротора вибратора.

В зарезонансном режиме колебаний стенок аппарата, для которого выполняются соотношения $c_y > M\omega^2/2$ и $c_y l^2 > I\omega^2$, условие устойчивости синхронно-противофазного режима колебаний стенок обеспечивается автоматически, так как левая часть неравенства (29) всегда отрицательна, а правая положительна.

Подбор численных значений параметров конструкции на основе решения неравенства (29) можно осуществлять любым подходящим численным методом, например методом итераций.

Заключение

Найдено условие устойчивости самосинхронизации вибровозбудителей аппарата с двумя плоскими стенками в режиме их синхронно-противофазных колебаний по эллиптическим траекториям в противоположных направлениях. Полученное выражение позволяет подбирать параметры режимов работы аппарата и его конструктивные характеристики (частоту вынуждающей силы, массу рабочих органов аппарата и моменты их инерции, расстояния от центра масс стенок до точек крепления упругих элементов и расстояния от центра масс каждой стенки до оси ротора вибратора) на этапе разработки конструкции аппарата для обеспечения заданного режима колебаний стенок с обработкой материала в режиме с раздавливанием его зерен, совмещенным с процессом транспортирования.

Дальнейшие исследования будут направлены на отыскание условий устойчивой самосинхронизации вращения роторов вибраторов двухмассового аппарата в режимах с относительными сдвигами фаз и направлениями вращения роторов вибровозбудителей, обеспечивающих разнообразные соотношения истирающих и сдавливающих усилий в слое материала при его переработке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блехман И. И.** Синхронизация динамических систем: М.: Наука, 1971. 894 с.
2. **Вайсберг Л. А., Зарогатский Л. П., Туркин В. Я.** Вибрационные дробилки: основы расчета, проектирования и технологического применения. СПб.: Изд-во ВСЕГЕИ, 2004. 306 с.
3. **Вайсберг Л. А.** Проектирование и расчет вибрационных грохотов. М.: Недра, 1986. 144 с.
4. Вибрации в технике: Справочник в 6 тт. Ред. совет: В. Н. Челомей (пред., гл. ред.) и др. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. / Г. Г. Азбель, И. И. Блехман, И. И. Быховский и др. Под ред. Э. Э. Лавендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
5. **Лавров Б. П.** Вибрационные машины с самосинхронизирующимися вибраторами (конструктивные схемы и специфические особенности расчета) // К. М. Рагульскис (ред.). Труды по теории и приложению явления синхронизации в машинах и устройствах. Вильнюс: Минтис, 1966. С. 55–63.
6. **Рагульскис К. М.** Самосинхронизация механических систем. В 2 тт. Т. 1. Рагульскис К. М., Виткус И. И., Рагульскене В. Л. Самосинхронные и виброударные системы. Под ред. д-ра техн. наук К. М. Рагульскиса. Вильнюс: Минтис, 1965. 186 с.
7. **Сизиков В. С., Сизиков С. А.** К выбору конструкции аппарата для механоактивации и оттирки минеральных зернистых сред // Обогащение руд. 2023. № 3. С. 49–56.
8. **Сизиков В. С., Евтюков С. А.** Рациональные режимы обогащения мелких заполнителей бетонов методом виброобъемного воздействия // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 6 (71). С. 156–162.
9. **Сизиков В. С., Сизиков С. А.** Способ переработки зернистых материалов и устройство для его осуществления. Пат. 2675554 Российская Федерация, МПК В01F 3/18, В01F 11/00, В02С 19/18; заявитель и патентообладатель Сизиков В. С. № 2016140584/05; заявл. 14.10.2016; опубл. 19.12.2018. Бюл. № 35. 2 с.
10. **Томчина О. П., Резниченко В. В., Горлатов Д. В.** Алгоритмы управления вибрационным полем виброустановки для транспортирования сыпучих строительных материалов // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 1 (48). С. 115–121.
11. **Шохин А. Е., Никифоров А. Н., Саламандра К. Б.** Экспериментальный анализ колебаний двухмассовой системы с самосинхронизирующимися инерционными вибровозбудителями // Вестник научно-технического развития. 2017. № 12 (124). С. 58–65.
12. **Shagniev O. V., Tomchina O. P., Fradkov A. L.** Learning speed-gradient synchronization control of the two-rotor vibration setup // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55. No. 12. Pp. 144–148.

REFERENCES

1. **Blekhman I. I.**, Synchronizatsiya dinamicheskikh system [Synchronization of dynamical systems], Nauka Publishing, Moscow, 1971 (in Russian).
2. **Vaisberg L. A., Zarogatsky L. P., Turkin V. Y.**, Vibratory crushers: principles of calculation, design and technological application, Published by VSEGEI [All-Union Geological Institute], Saint-Petersburg, 2004 (in Russian).



3. **Vaisberg L. A.**, Proektirovanie i raschyot vibratsionnykh grohotov [Design and calculation of vibrating screens], Nedra Publishing, Moscow, 1986 (in Russian).
4. **Chelomey V. N.** (Head of Ed.), Vibrations in technology. Reference Book in 6 Vols. Vol. 4. Vibration processes and machines /G. G. Azbel, I. I. Blekhman, I. I. Bykhovsky, et al., Edited by E. E. Lavendel, Mashinostroenie [Machine Building Publ.], Moscow, 1979 (in Russian).
5. **Lavrov B. P.**, Vibratsionnye mashiny s samosinkhroniziruyushchimisya vibratorami (konstruktivnye skhemy i spetsificheskiye osobennosti rascheta) [Vibrational machines with self-synchronizing vibrators (structural design and special aspects of calculation)], Proceedings on theory and application of synchronization phenomenon in machines and devices, Mintis Publ., Vilnius (1966) 55–63 (in Russian).
6. **Ragulskis K. M.**, Self-synchronization of mechanical systems, in 2 Vols., Vol. 1. Ragulskis K. M., Vitkus I. I., Ragulskene V. L., Self-synchronous and vibroimpact systems; Edited by K. M. Ragulskis, Mintis Publ., Vilnius, 1965 (in Russian).
7. **Sizikov V. S., Sizikov S. A.**, K vyboru konstruksii apparata dlya mekhanoaktivatsii i ottirki mineral'nykh zernistykh sred [On the selection of apparatus construction for mechanical activation and attritioning of mineral granular media], Obogashchenie Rud [Benefication of Ores]. (3) (2023) 49–56 (in Russian).
8. **Sizikov V. S., Sizikov S. A.**, Rational regimes of fine concrete aggregate enrichment using the method of volumetric vibrational impact, Bulletin of Civil Engineers. (6 (71)) (2018) 156–162 (in Russian).
9. **Sizikov V. S., Sizikov S. A.**, Method for processing granular materials and a device for its implementation, Pat. No. 2675554, Russian Federation, MPK B01F 3/18, B01F 11/00, B02C 19/18; Sizikov Valentin S. is a declarant and patentee. No. 2016140584/05; declar. 14.10.2016, publ. 19.12.2018. Bull. No. 35.
10. **Tomchina O. P., Reznichenko V. V., Gorlatov D. V.**, Algorithms of controlling the oscillation field of a vibration unit for transportation of bulk construction materials, Bulletin of Civil Engineers. (1 (48)) (2015) 115–121 (in Russian).
11. **Shokhin A. E., Nikiforov A. N., Salamandra K. B.**, Experimental analysis of oscillations of a two-mass system with self-synchronizing inertial exciters, Bulletin of Science and Technical Development. (12 (124)) (2017) 58–65 (in Russian).
12. **Shagniev O. B., Tomchina O. P., Fradkov A. L.**, Learning speed-gradient synchronization control of the two-rotor vibration setup, IFAC-PapersOnLine. 55 (12) (2022) 144–148.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

СИЗИКОВ Валентин Станиславович – кандидат технических наук, научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.

sizikovvs@yandex.ru

ORCID: 0000-0001-9438-5711

THE AUTHOR

SIZIKOV Valentin S.

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS

61 Bolshoi Ave. of Vasilievsky Island, St. Petersburg, 199178, Russia

sizikovvs@yandex.ru

ORCID: 0000-0001-9438-5711

Статья поступила в редакцию 13.12.2024. Одобрена после рецензирования 17.03.2025. Принята 17.03.2025.

Received 13.12.2024. Approved after reviewing 17.03.2025. Accepted 17.03.2025.

Научное издание

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

**«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL.
PHYSICS AND MATHEMATICS»**

ТОМ 18, № 3, 2025

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11.12.2012 г.

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В. К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А. Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *В. В. Дубов*
д-р физ.-мат. наук, профессор *П. А. Карасёв*
канд. физ.-мат. наук, доцент *В. М. Капралова*
канд. физ.-мат. наук *О. А. Яцуржинская* – научный редактор, корректор
А. С. Колгатина – переводчик
Н. А. Бушманова – ответственный секретарь

Телефон редакции 8 (812) 552-62-16

Сайт <https://physmath.spbstu.ru/>

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *Н. А. Бушмановой*

Подписано в печать 30.09.2025 г. Дата выхода в свет 30.10.2025 г.

Формат 60x84/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. Тираж 1000. Заказ .

Цена: Бесплатно.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного ИЦ "ИКИ",
в Издательско-полиграфическом центре

Санкт-Петербургского политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ
в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под сдвоенными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 1.1.8., 1.1.9., 1.3.2., 1.3.3., 1.3.4., 1.3.5., 1.3.6., 1.3.7., 1.3.8., 1.3.11., 1.3.19.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНТИ РАН, а также в международную систему по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word**.

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без знаков переноса. Абзацный отступ – 1 см.

2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (<http://journals.spbstu.ru>). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

2.3. Рассмотрение материалов

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться **ДОСРОЧНО**.

Е-mail: physics@spbstu.ru,

Тел. редакции 8 (812) 552-62-16.

Сайт журнала: <https://physmath.spbstu.ru/>