

Научная статья

УДК 531.391+681.5

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

## АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ТИМОШЕНКО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ

А. В. Федотов , А. К. Беляев

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

 [alvafed@yandex.ru](mailto:alvafed@yandex.ru)

**Аннотация.** При описании изгибных колебаний упругих балок переход от модели Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко ведет к усложнению динамического поведения балки, появлению новых эффектов и новых форм колебаний. Цель работы – протестировать подходы к управлению, разработанные для балок Бернулли – Эйлера, в применении к более толстым балкам, которые описываются моделью Тимошенко, и исследовать влияние толщины балок на эффективность таких подходов. Для этого проведен численный анализ задачи активного гашения вынужденных колебаний шарнирно-опертых металлических балок с помощью систем управления с наблюдателями состояния, где в качестве управляющих воздействий выступают сосредоточенные силы или моменты. Показано, что для задачи гашения колебаний балки Тимошенко по низшим формам предложенный подход остается эффективным для широкого диапазона значений толщины рассматриваемых балок.

**Ключевые слова:** балка Бернулли – Эйлера, балка Тимошенко, активное гашение колебаний, наблюдатель состояния

**Для цитирования:** Федотов А. В., Беляев А. К. Активное гашение изгибных колебаний балок Тимошенко с использованием наблюдателей состояния // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 127–140. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

## ACTIVE CONTROL OF BENDING VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS USING STATE OBSERVERS

A. V. Fedotov , A. K. Belyaev

Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia

 [alvafed@yandex.ru](mailto:alvafed@yandex.ru)

**Abstract.** When describing bending vibrations of elastic beams, the transition from the Bernoulli – Euler model to the Timoshenko model leads to a complication in the dynamic behavior of the beam and to the emergence of new dynamic effects and a new spectrum of vibration modes. The aim of this study is to test control approaches developed for Bernoulli – Euler beams, for thicker beams described by the Timoshenko model, and to study the influence of beam thickness on the efficiency of such approaches. For this purpose, the problem of active damping of forced bending vibrations of simply supported metal beams has been studied numerically using control systems with state observers, where point forces or moments serve as control inputs. It was shown that the proposed approach remained effective for the vibration control problem of Timoshenko beams at lower modes over a wide thickness range of the considered beams.

**Keywords:** Bernoulli – Euler beam, Timoshenko beam, active vibration control, state observer

**For citation:** Fedotov A. V., Belyaev A. K., Active control of bending vibrations of Timoshenko beams using state observers, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 127–140. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18311>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

Для описания динамики сравнительно толстых балок требуются более сложные модели, по сравнению с моделью Бернулли – Эйлера, хорошо описывающей изгибные колебания тонких балок. Модель Тимошенко отличается от модели Бернулли – Эйлера учетом сдвига поперечных сечений балки: это означает, что указанные сечения могут не быть перпендикулярными средней линии балки (при этом в обеих моделях сечения остаются плоскими). Кроме того, в модели Тимошенко учитывается инерция поворота сечений балки. Имеются также промежуточные варианты моделей, которые учитывают только один из двух названных эффектов (сдвиг или инерция поворота сечений), однако они уступают модели Тимошенко в точности и используются существенно реже.

В задаче о свободных изгибных колебаниях балок переход от модели Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко приводит логичным образом к изменению и усложнению решения. Во-первых, несколько модифицируются уже существующие собственные формы и частоты колебаний: у форм появляется сдвиговая составляющая, при этом частоты сдвигаются влево (в сторону уменьшения). Во-вторых, появляется абсолютно новая часть спектра собственных частот и форм – это те формы, в которых сдвиговые деформации преобладают над изгибными. Таким образом, поведение балок изменяется не только количественно, но и качественно.

Очевидно, что влияние перечисленных эффектов тем значительнее, чем больше толщина рассматриваемой балки, а также это влияние растет с повышением частоты колебаний, поскольку модель Тимошенко, по сравнению с моделью Бернулли – Эйлера, лучше описывает именно высокочастотную динамику. Поэтому в задачах, связанных с рассмотрением высокочастотной динамики балок, например, при моделировании гашения упругих волн, корректнее использовать модель Тимошенко [1, 2].

В задачах, где активное подавление колебаний рассматривается не в виде блокирования упругих волн, а в виде гашения определенных форм колебаний, для описания поведения тонких балок часто используется модель Бернулли – Эйлера [3] (в том числе эта модель выбрана в ряде более ранних работ авторов данной статьи [4, 5]). Отсюда возникают вопросы, как на эффективность управления в данных задачах будет влиять увеличение толщины балок и в какой момент это влияние станет существенным.

Чтобы найти ответы на эти вопросы, необходимо в решении данных задач перейти к модели Тимошенко и рассмотреть несколько вариантов балок различной толщины.

В ряде опубликованных работ было показано, что возможно реализовать эффективное активное гашение колебаний балки Тимошенко с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов как с помощью пропорционального закона управления [6], так и с использованием наблюдателей состояния [7]. Однако в данных исследованиях не проводилось сравнения эффективности систем управления (СУ) для балок разной толщины. В работе [8] было показано, что использование закона управления, который был синтезирован для балки Бернулли – Эйлера, для гашения колебаний балки Тимошенко может привести к неустойчивости замкнутой системы.

Таким образом, проблема влияния эффектов, свойственных модели Тимошенко, на работу систем управления колебаниями балок не теряет своей актуальности.

Данная работа продолжает более ранние исследования авторов [4, 5], где изучалось управление колебаниями упругих балок с помощью наблюдателей.



Цель настоящей работы – численный анализ влияния эффектов модели Тимошенко, проявляющихся при увеличении толщины балок, на эффективность систем активного гашения колебаний балок с использованием наблюдателей.

В этом исследовании толщина балки варьируется в широком диапазоне значений: от  $1/250$  до  $1/10$  длины балки. В качестве управляющих воздействий рассматриваются либо сосредоточенные силы (в этом случае на вход системы управления подаются значения поперечного смещения балки в соответствующих сечениях), либо сосредоточенные моменты (в таком случае измерению подлежат углы поворота соответствующих сечений балки).

Для синтеза оптимальных систем управления с наблюдателем широко используются методы оптимизации, предполагающие формулировку и решение матричных уравнений Риккати. Однако в настоящем исследовании данный подход к синтезу систем управления напрямую неприменим, поскольку величину элементов матриц наблюдения и управления в рассматриваемой здесь задаче ограничивают не принятые в рамках указанного подхода, а другие факторы.

В стандартной постановке задачи оптимизации, в виде этих ограничивающих факторов выступают зависимость функционала качества от величины управляющих воздействий (для матрицы управления), а также шум измерения (для матрицы наблюдения). Напротив, в данном исследовании ограничивающим фактором является возбуждение СУ более высоких форм, по которым не ведется управление, вследствие сдвига фаз управляющих воздействий ввиду запаздывания в контуре управления (так называемый спилловер-эффект). Учет именно этого фактора как основного диктуется опытом проведения авторами данной работы экспериментальных исследований по активному гашению колебаний металлической балки [9].

Альтернативным способом оптимального синтеза СУ служит метод линейных матричных неравенств (*англ.* Linear Matrix Inequalities (LMI)), однако для случая управления с наблюдателем рассматриваемые задачи не сводятся непосредственно к LMI, поэтому данный метод в настоящем исследовании также неэффективен. Исходя из этого обстоятельства, синтез СУ в работе осуществляется методом численной оптимизации Нелдера – Мида.

### Особенности модели балки Тимошенко

Для описания изгибных колебаний тонких балок широко используется модель балки Бернулли – Эйлера. Данная модель основана на предположении, что поперечные сечения балки всегда остаются перпендикулярными ее средней линии (т. е. отсутствует сдвиг сечений). Таким образом, состояние балки при изгибной деформации полностью описывается функцией поперечного смещения средней линии балки от продольной координаты. Кроме того, в данной модели не учитывается инерция поворота сечений балки.

Модель, описывающая изгибные колебания более толстых балок, была предложена С. П. Тимошенко в 1921 году [10]. Данная модель учитывает как сдвиговую деформацию, так и инерцию поворота сечений балки. Таким образом, в рамках модели Тимошенко для полного описания динамики балки используются уже две функции продольной координаты: поперечное смещение  $w$  и угол поворота сечения  $\varphi$ . Уравнения изгибных колебаний балки для рассматриваемой модели можно записать в следующем виде (для простоты будем считать, что балка имеет постоянное сечение):

$$\begin{cases} \rho A \ddot{w} + \kappa A G (\varphi' - w'') = q, \\ \rho I \ddot{\varphi} + \kappa A G (\varphi - w') - E I \varphi'' = m, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность материала балки;  $A$ ,  $I$  – площадь и момент инерции сечений балки;  $E$ ,  $G$  – модуль Юнга и модуль сдвига материала балки;  $\kappa$  – безразмерный сдвиговой коэффициент Тимошенко (зависит от формы сечения балки и для прямоугольного сечения обычно принимается равным  $5/6$ );  $q$ ,  $m$  – распределенные поперечная сила и изгибающий момент, приложенные к балке.

Два уравнения второго порядка, приведенные выше, можно объединить в одно уравнение четвертого порядка для поперечного смещения балки  $w$ :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho A \ddot{w} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \ddot{w}'' + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{d^4 w}{dt^4} = q + \frac{\rho I}{\kappa A G} \ddot{q} - \frac{EI}{\kappa A G} q'' - m'. \quad (2)$$

Если устремить сдвиговую жесткость балки  $\kappa A G$  к бесконечности, а также пренебречь инерцией поворота сечений балки  $\rho I$ , то отличительные эффекты модели Тимошенко пропадут, а уравнение (2) сведется к уравнению, описывающему изгибные колебания балки Бернулли – Эйлера.

При переходе от модели балки Бернулли – Эйлера к модели Тимошенко решение задачи о свободных колебаниях балки существенно изменится. Особенности решения данной задачи для модели Тимошенко детально разбираются в работах [11, 12]; в том числе там рассматривается шарнирно-опертая балка и ее набор собственных частот и форм.

Подобная постановка задачи используется и в настоящем исследовании. Полное решение является достаточно громоздким, поэтому здесь кратко приведем лишь основную информацию о нем.

Как известно, решением задачи о свободных колебаниях балки Бернулли – Эйлера является бесконечный ряд (спектр) собственных частот и соответствующих им собственных форм. У спектра частот есть нижняя граница (первая собственная частота), верхняя же граница отсутствует. Модель Тимошенко представляет собой усложнение модели Бернулли – Эйлера, поэтому для нее решение содержит все те же элементы – частоты и формы, однако с определенной поправкой: частоты немного снижаются, а формы приобретают еще и сдвиговую составляющую; кроме того, модель добавляет новые решения: частоты и соответствующие им формы.

Таким образом, добавляется новый спектр частот, и у этого спектра также есть нижняя граница – переходная частота:

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\kappa A G}{\rho I}}. \quad (3)$$

Наличие собственной формы, соответствующей данной частоте, зависит от граничных условий. В случае шарнирно-опертой балки эта форма существует и представляет собой поворот всех сечений балки на один и тот же угол (т. е. постоянную по длине балки сдвиговую деформацию) в отсутствие поперечного смещения. Новая часть спектра, берущая начало с переходной частоты, включает в себя формы колебаний, в которых сдвиговые деформации преобладают над изгибными. Частоты в данной области спектра также растут до бесконечности с увеличением порядкового номера.

### Постановка задачи

Цель исследования – синтезировать и сравнить численно эффективность систем управления с наблюдателями в задаче активного гашения вынужденных изгибных колебаний балки Тимошенко для нескольких вариантов толщины балки.

Схема балки с приложенными воздействиями для двух рассматриваемых вариантов конструкции элементов управления представлена на рис. 1. Шарнирно-опертая алюминиевая балка прямоугольного сечения длиной 1 м подвергается внешнему возмущающему воздействию, в роли которого выступает сосредоточенный изгибающий момент  $M_0$ , приложенный к балке на расстоянии 0,4 м от левого конца. В исследовании рассматривается три варианта балок с разными сечениями:  $4 \times 25$  мм,  $20 \times 25$  мм и  $10 \times 10$  см.

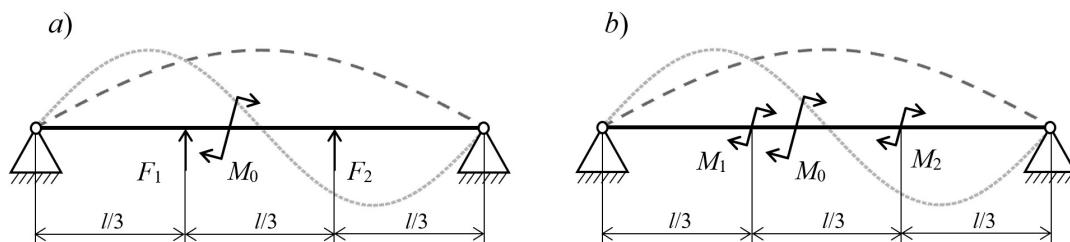


Рис. 1. Схемы объекта управления с приложенными управляющими воздействиями:  $a$  – сосредоточенные силы  $F_1$  и  $F_2$ ,  $b$  – сосредоточенные моменты  $M_1$  и  $M_2$ ;  $l$  – длина балки,  $M_0$  – внешний изгибающий момент





В работе рассмотрено два варианта конструкции СУ.

*Вариант А.* Сенсорами измеряется поперечное смещение в двух сечениях балки, делящих ее на три равные части, а управляющее воздействие имеет вид сосредоточенных поперечных сил, приложенных в тех же сечениях.

*Вариант В.* Конструкция системы управления отличается от варианта А тем, что измеряются уже углы поворота указанных сечений, а воздействие прикладывается в виде сосредоточенных изгибающих моментов.

Задача управления – погасить вынужденные колебания на двух низших резонансных частотах балки. Соответствующие данным частотам формы колебаний (точнее, их компоненты в виде поперечного смещения, поскольку есть также другие компоненты в виде углов поворота) также представлены на рис. 1.

В настоящей работе рассматриваются СУ с наблюдателями, которые широко применяются для управления с обратной связью в случае, когда состояние объекта не поддается прямому измерению и известна адекватная модель объекта. Подробное математическое описание данного метода в приложении к рассматриваемым в работе задачам можно найти в более ранних работах авторов [4, 5]. Для задания каждой такой СУ необходимо определить матрицы наблюдения и управления; в данном исследовании для этого применяется метод оптимизации Нелдера – Мида, встроенный в используемый вычислительный пакет. Затем результаты работы синтезированных систем для балок разной толщины сравниваются между собой.

#### Моделирование объекта без управления

Перед тем, как проектировать системы управления, необходимо смоделировать сам объект. Данный раздел посвящен моделированию балок без управления. Оно осуществляется в разложении по собственным формам колебаний балок, для вычисления которых вместе с собственными частотами используется модель балки Тимошенко.

В первую очередь необходимо убедиться, что используемая математическая модель поведения балок корректна, а также определить количество собственных форм в модели, достаточное для адекватного описания требуемой динамики. Для этой цели амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), полученные для данной модели в разложении по собственным формам, сравнивались с АЧХ, полученными для балок с теми же параметрами в результате конечно-элементного (КЭ) расчета.

Во всех КЭ-моделях использовались трехузловые балочные элементы. Балка разбивалась на 200 элементов длиной 5 мм, всего каждая модель содержала 401 узел. Также во всех численных моделях для всех форм колебаний задавался одинаковый коэффициент демпфирования  $\xi = 0,01$ .

На рис. 2 представлены АЧХ балки III (самая толстая, ее толщина – 10 см), рассчитанные при воздействии на балку первым (левым) сосредоточенным управляющим моментом и измерении угла поворота в том же сечении (получены обоими способами). Для второй из указанных моделей приведено два решения для разного количества учитываемых форм колебаний:

вариант А – 25 обычных форм (их аналоги присутствуют в модели балки Бернулли – Эйлера), одна переходная форма и 15 форм с преобладанием сдвига из нового спектра модели Тимошенко;

вариант В – 45 обычных форм, одна переходная и 25 сдвиговых.

Комментарий к рисункам: здесь и далее на графиках амплитудно-частотных характеристик ось ординат имеет логарифмический масштаб, поэтому отложенные по этой оси величины, будь то поперечное смещение или угол поворота, измеряются в децибелах (дБ).

На рис. 2 видно, что между двумя рассмотренными моделями есть хорошее соответствие, а предложенное число учитываемых форм ( $45 + 1 + 25$ ) оказывается вполне достаточным для адекватного описания динамики балки в рамках решаемой задачи в широком диапазоне частот. Аналогичное сравнение было проведено для двух других вариантов балок (I и II), и для них были выбраны следующие значения количества форм, учитываемых при моделировании:

45 + 1 + 25 для балки II (такое же, как и для балки III),

45 для балки I (только традиционные формы колебаний).

В итоге результаты сравнения моделей показывают, что модель балки Тимошенко в разложении по собственным формам, использованная в исследовании, является корректной.

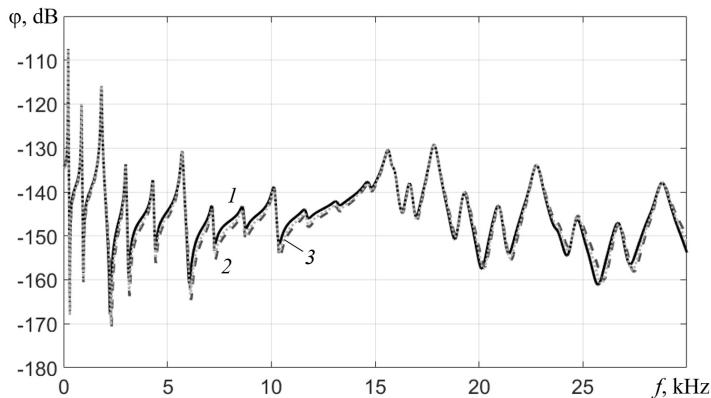


Рис. 2. Сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) момент-угол поворота для балки III (толщиной 10 см), полученных для двух моделей: КЭ (кривая 1) и модели с разложением по собственным формам (кривые 2, 3) с учетом 41 (2) и 71 (3) форм

возможность сравнить АЧХ для балок разной толщины. Такое сравнение представляет особый интерес, поскольку именно различия между этими АЧХ будут оказывать ключевое влияние на процесс синтеза и эффективность создаваемых систем управления для каждой из балок.

На рис. 3 представлено сравнение амплитудно-частотных характеристик, полученных при условии воздействия на балку первым управляющим моментом и измерения угла поворота в том же сечении, для каждой из рассматриваемых балок. Для того чтобы сравнивать данные характеристики на одном графике, необходимо согласовать их масштаб по обеим осям. По оси абсцисс частоты были нормированы на величину частоты первого резонанса каждой из балок, поскольку данная величина растет ровно в  $n$  раз при увеличении толщины балки Бернулли – Эйлера в  $n$  раз. Значения угла поворота сечения (ось ординат) также нормировались, поскольку при увеличении толщины балки Бернулли – Эйлера в  $n$  раз амплитуда ее колебаний снижается в  $n^3$  раз. Также амплитуда колебаний балки снижается обратно пропорционально увеличению ширины балки, а ширина балки III, как было указано ранее, в 4 раза превышает ширину балок I и II. Поэтому значения углов поворота для балки II на данном графике были умножены на 125, а для балки III – на 62 500 (ось ординат на рис. 3 также имеет логарифмический масштаб, и логарифм от величины угла вычислялся после ее умножения на повышающий коэффициент).

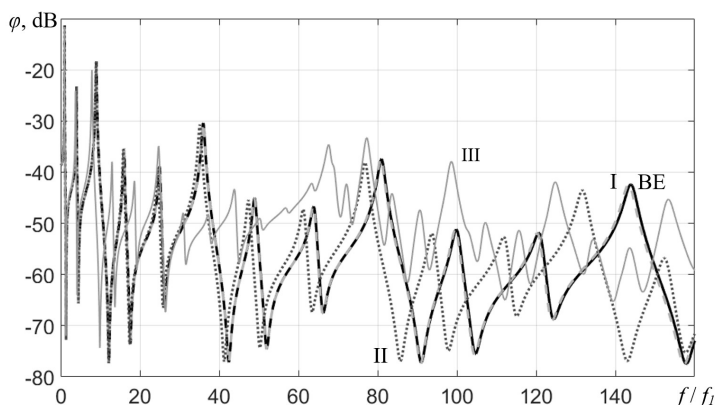


Рис. 3. Сравнение АЧХ момент – угол поворота  $\varphi$  для балок Тимошенко I – III с учетом масштабирования (номера кривых соответствуют номерам балок): балка I с учетом 45 форм; балки II и III – обе с учетом 71 формы; а также для модели балки Бернулли – Эйлера с учетом 45 форм (кривая BE).

Частота  $f$  нормирована на частоту первого резонанса  $f_1$  для каждой из балок

Здесь следует отметить, что при принятых габаритах балки (длина – 1 м, толщина – 10 см) сама конечно-элементная балочная модель, как и модель Тимошенко, могут быть не совсем точными из-за депланации сечений балки. Исследование указанного обстоятельства выходит за рамки настоящей работы, поскольку ставилась задача сравнить именно модели Тимошенко и Бернулли – Эйлера, а отношение толщины к длине (1 : 10) балки III было выбрано как предельное для корректного использования модели Тимошенко.

Когда подобрана адекватная модель объекта, появляется возможность сравнить АЧХ для балок разной толщины. Такое сравнение представляет особый интерес, поскольку именно различия между этими АЧХ будут оказывать ключевое влияние на процесс синтеза и эффективность создаваемых систем управления для каждой из балок.

Также на рис. 3 представлена отсчетная характеристика, соответствующая модели балки Бернулли – Эйлера (ее кривая BE практически совпадает с кривой для балки I).

Важно, что если бы для балок различной толщины была использована именно эта модель, то все кривые на графике совпали бы с отсчетной. Более того, в таком случае и все результаты синтеза, и показатели эффективности систем управления для разных балок



также были бы одинаковы с точностью до коэффициентов подобия. Поэтому представленный на рис. 3 график иллюстрирует именно эффекты модели балки Тимошенко, проявляющиеся все сильнее с увеличением толщины балки.

Проанализируем, как эффекты модели Тимошенко проявляются на графике. Сравнение кривых для балок I и II показывает, что резонансные частоты смещаются влево (в сторону уменьшения), и это смещение увеличивается с ростом частоты. На кривой для балки III этот эффект проявляется еще сильнее, а также заметен новый эффект: существенное изменение структуры решения правее некоторой границы. Эта граница находится в окрестности переходной частоты (она упомянута ранее в разделе, посвященном особенностям модели Тимошенко): для балки III она превышает первую собственную частоту примерно в 68 раз. Начиная с этой переходной частоты, к спектру, существовавшему в модели Бернулли – Эйлера, добавляется новая часть: формы колебаний с преобладающей сдвиговой составляющей. Для балок I и II данная особенность на графике не наблюдается, поскольку для них значение переходной частоты существенно (на несколько порядков) превышает значение первой собственной частоты и, таким образом, не попадает в рассмотренный диапазон.

### Синтез систем управления

Рассмотрим работу систем управления с наблюдателями состояния, использующихся для активного гашения колебаний балок в данном исследовании. Здесь будут приведены только основные уравнения; более подробное описание этого метода в приложении к рассматриваемым в работе задачам можно найти в работах [4, 5].

Будем считать, что для удовлетворительного описания динамики объекта нужно учитывать  $n$  низших форм колебаний. Введем вектор состояния  $q^n$ :

$$q^n = (q_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_n)^T, \quad (4)$$

где  $q_i$  – обобщенная координата, соответствующая  $i$ -й форме колебаний балки;  $\dot{q}_i$  – обобщенная скорость.

В таком случае поведение объекта можно описать следующими уравнениями:

$$\dot{q}^n = Aq^n + Bu + Dd, \quad (5)$$

$$y = Cq^n, \quad (6)$$

где  $d$  – вектор внешних воздействий;  $y, u$  – векторы измеренных сигналов и управляющих воздействий;  $A, B, C$  – матрицы, задающие поведение объекта и его взаимодействие с приводами (актуаторами) и датчиками (сенсорами).

Предполагаем, что наблюдение и управление ведется по  $k$  низшим формам колебаний объекта ( $k \leq n$ ). Задача наблюдателя состоит в том, чтобы оценивать вектор состояния  $q^k$ , соответствующий данным формам:

$$q^k = (q_1 \quad \dots \quad q_k \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_k)^T. \quad (7)$$

Наблюдатель формирует оценку данного вектора  $\hat{q}$  с использованием известных матриц  $A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}$ , описывающих динамику  $k$  низших мод объекта, и далее указанная оценка используется для задания вектора управляющих воздействий:

$$\dot{\hat{q}} = A^{(1)}\hat{q} + B^{(1)}u + L(y - C^{(1)}\hat{q}), \quad (8)$$

$$u = -R\hat{q}, \quad (9)$$

где  $L, R$  – матрицы наблюдения и управления, которые необходимо правильно задать (таким образом, чтобы достигалась цель управления).

В рамках настоящего исследования мы считаем матрицы  $A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}$ , известными (они получаются из матриц  $A, B$  и  $C$  удалением лишних столбцов и строк), и для задания системы управления необходимо определить только матрицы  $L$  и  $R$ . В рассматриваемой задаче наблюдение и управление ведется по двум формам, используются два сенсора и два

актуатора. Поскольку наблюдение и управление по этим формам осуществляется отдельно, матрицы  $L$  и  $R$  можно задать в следующем виде [5]:

$$L_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} K_{2 \times 2}^L \\ K_{2 \times 2}^{Ld} \end{bmatrix} T_{2 \times 2}, R_{2 \times 4} = F_{2 \times 2} \begin{bmatrix} K_{2 \times 2}^R & K_{2 \times 2}^{Rd} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $K^L, K^{Ld}, K^R, K^{Rd}$  – диагональные матрицы размером  $2 \times 2$ ;  $T, F$  – модальные матрицы (анализатор и синтезатор форм) [4, 5, 9], определяющие, как каждый контур управления задействует в своей работе каждый сенсор и актуатор.

Поскольку сенсоры и актуаторы расположены на балке симметрично, а собственные формы колебаний балки – симметричные или антисимметричные, модальные матрицы в данном исследовании имеют определенный вид, представленный ниже. В случае, когда измеряется поперечное смещение, а управляющее воздействие приложено в виде сосредоточенных сил, их можно задать следующим образом:

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, F^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Модальные матрицы в случае, когда измеряются углы поворота, а управление имеет вид сосредоточенных моментов:

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, F^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, принимая во внимание структуру матриц  $K^L, K^{Ld}, K^R$  и  $K^{Rd}$ , которые необходимо задать (они диагональные и имеют размер  $2 \times 2$ ), нужно оптимальным образом подобрать 8 параметров для полного задания системы управления в случае одновременного гашения двух форм колебаний балки. Если же цель СУ – гасить только один из резонансов, то следует определить всего 4 параметра.

Задача оптимизации по указанному числу параметров решалась методом оптимизации Нелдера – Мида. В качестве целевой функции в случае гашения только одной формы выступала высота соответствующего резонансного пика на АЧХ балки с включенным управлением. Если же требовалось погасить обе формы, то целевая функция задавалась как сумма высот обоих резонансных пиков. Кроме этого, к данной функции добавлялся штраф в случае нарушения запасов устойчивости в замкнутой системе.

Для анализа устойчивости использовался критерий Найквиста, модифицированный для случая двух входов и двух выходов системы управления (он подробно описывается в статье авторов [13]). Особенности численного моделирования замкнутой системы с наблюдателями рассмотрены в статье [4]. В ней приведена, в том числе, постановка задачи, в которой в контур управления введено звено, моделирующее запаздывание, с передаточной функцией  $R^{del}(s)$ :

$$R^{del}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (13)$$

где  $\tau$  – постоянная времени,  $s$  – комплексная переменная.

Именно такая постановка используется и в данном исследовании. Для сохранения подобия формулировок задачи для разных балок постоянная времени в каждой из постановок выбрана своя:

$$\tau_I = 0,005 \text{ с}, \quad \tau_{II} = \frac{1}{5} \tau_I = 0,001 \text{ с}, \quad \tau_{III} = \frac{1}{25} \tau_I = 0,0002 \text{ с}, \quad (14)$$

где  $\tau_i$  – постоянная времени при управлении колебаниями  $i$ -й балки.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим вид одной из синтезированных систем, а именно – системы для балки II (сечение  $20 \times 25$  мм) для случая измерения углов и управления моментами при одновременном гашении первой и второй форм колебаний балки. Диагональные матрицы, задающие наблюдение и управление, были получены в следующем виде:



$$\begin{cases} K^L = \begin{bmatrix} -81,63 & 0 \\ 0 & -63,24 \end{bmatrix}, & K^{Ld} = \begin{bmatrix} 76,01 & 0 \\ 0 & 79,78 \end{bmatrix} \cdot 10^3, \\ K^R = \begin{bmatrix} -53,93 & 0 \\ 0 & 13,82 \end{bmatrix} \cdot 10^2, & K^{Rd} = \begin{bmatrix} 37,25 & 0 \\ 0 & -149,3 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (15)$$

На рис. 4 приведена диаграмма Найквиста для полученной системы (общий вид и увеличенный фрагмент в области начала координат). Запасы по устойчивости для всех синтезируемых СУ были заданы таким образом, чтобы годограф Найквиста системы не пересекал круг радиусом 0,5 с центром в точке  $(-1, 0)$  (это соответствует запасу по амплитуде в 6 дБ и по фазе в  $29^\circ$ ). Видно, что для данной СУ все требования к устойчивости выполняются.

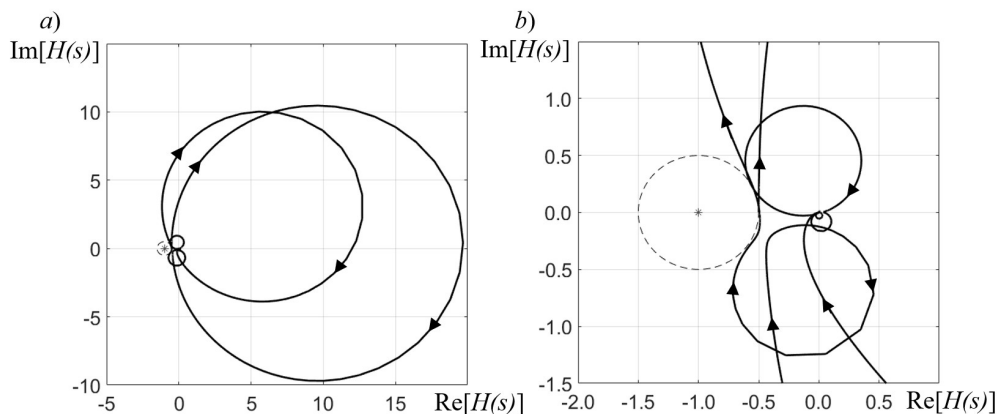


Рис. 4. Пример годографа Найквиста для одной из синтезированных систем управления:  
*a* – общий вид, *b* – увеличенный фрагмент

### Сравнение результатов работы разных СУ

В данном разделе представлен обзор полученных результатов работы всех синтезированных систем управления для балок разной толщины.

Как уже было отмечено, для определения эффективности управления анализировались значения высоты первого и второго резонансных пиков на АЧХ балки с управлением, по сравнению с высотой этих пиков в отсутствие управления. Отдельно необходимо пояснить выбор самой АЧХ: рассматривалась величина полной энергии установившихся колебаний балки под воздействием гармонически изменяющегося внешнего возмущающего сосредоточенного момента в зависимости от частоты приложенного воздействия. Эта величина для каждого значения частоты  $\omega$  вычислялась по следующей формуле:

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega^2 Q_i^2(\omega), \quad (16)$$

где  $Q_i$  – установившееся значение амплитуды  $i$ -й обобщенной координаты формы колебаний,  $n$  – число обобщенных координат (форм колебаний балки) в модели.

Как и для всех амплитудно-частотных характеристик в данной работе, амплитуда рассматриваемой здесь величины выражалась в децибелах (дБ).

Выражение (16) соответствует полной энергии колебаний балки, поскольку все формы колебаний (имеющие компоненты поперечного смещения  $X_i(x)$  и поворота  $\Phi_i(x)$ ) нормированы определенным образом:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n X_i(x) q_i(t), \quad \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t), \quad (17)$$

$$\int_0^l (\rho A X_i(x) X_j(x) + \rho I \Phi_i(x) \Phi_j(x)) dx = \delta_{ij}, \quad (18)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Результаты управления для всех полученных систем представлены в таблице. Снижение амплитуды на первом (Res1) и втором (Res2) резонансах в результате управления указано для всех трех балок, рассмотрены случаи управления как с помощью сосредоточенных сил, так и с помощью моментов. Для каждой постановки было испробовано гашение колебаний либо только по одной из форм, либо по обеим сразу. Жирным шрифтом выделены наилучшие результаты для каждой балки и каждого из резонансов.

На рис. 5 показаны АЧХ балок с управлением и без него для СУ, работающих сразу на обоих резонансах. С целью сравнения на одном графике результатов, полученных для разных балок, было проведено масштабирование АЧХ по обеим осям таким же точно образом, как и ранее в данной статье (см. рис. 3).

Таблица

**Снижение резонансных амплитуд колебаний балок для различных систем управления**

Номер балки	Способ управления	Режим гашения	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе	
			Res1 ( $\Delta y_1$ )	Res2 ( $\Delta y_2$ )
I (1,4a,4b)	Силы	Отдельно	<b>35,47</b>	29,4
		Вместе	34,05	<b>29,5</b>
	Моменты	Отдельно	31,18	25,91
		Вместе	30,16	24,78
II (2,5a,5b)	Силы	Отдельно	<b>35,44</b>	<b>29,73</b>
		Вместе	33,79	<b>29,73</b>
	Моменты	Отдельно	31,14	25,93
		Вместе	30,16	24,77
III (3,6a,6b)	Силы	Отдельно	<b>35,03</b>	<b>27,9</b>
		Вместе	34,16	<b>27,9</b>
	Моменты	Отдельно	30,59	25,21
		Вместе	29,79	23,97

Примечания. 1. В левом столбце в скобках даны номера кривых на рис. 5, относящиеся к каждой балке. 2. Жирным шрифтом выделены наилучшие результаты.

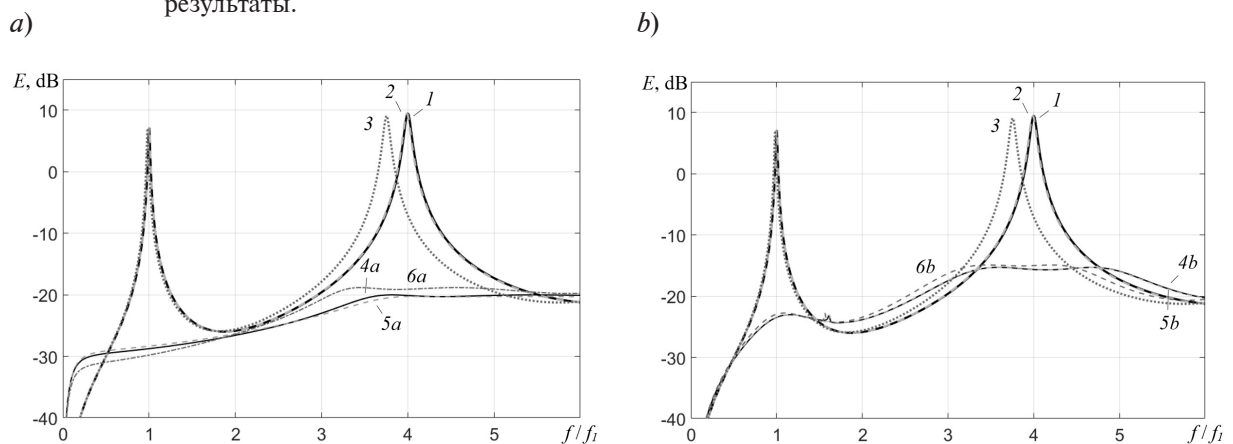


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики для балок I – III (a, b) без управления (кривые 1 – 3), а также с управлением при помощи сил (кривые 4a – 6a) и при помощи моментов (кривые 4b – 6b) (см. таблицу)



Анализ данных таблицы и рис. 5 позволяет заключить, что полученные системы управления дают возможность достаточно эффективно гасить вынужденные колебания балки как на первом, так и на втором резонансах. Основной вывод состоит в том, что с ростом толщины балки в широком диапазоне ее значений эффективность созданных СУ меняется незначительно. Это означает, что рассмотренный метод управления позволяет эффективно управлять колебаниями не только тонких, но и сравнительно толстых балок. При этом заметна тенденция, что при увеличении толщины балок эффективность гашения колебаний немного снижается как на каждом резонансе в случае гашения по отдельности, так и по сумме показателей на обоих резонансах в случае гашения вместе. Этот эффект практически незаметен при сравнении результатов для балок I и II, но определенно проявляется при переходе к балке III. Такой результат можно объяснить тем, что на низких частотах вид кривых АЧХ в случае отсутствия управления для балок I и II почти одинаков, а на амплитудно-частотной характеристике балки III резонансные пики с повышением частоты сдвигаются влево, по сравнению с АЧХ более тонких балок; соответственно, коэффициенты усиления в СУ заметнее ограничиваются ухудшением устойчивости на более высоких частотах и эффективность СУ снижается.

Стоит отметить, что наблюдаемое различие вызвано не столько влиянием новой части спектра частот и соответствующих им сдвиговых форм колебаний, которые присутствуют в решении задачи о колебаниях балок Тимошенко, сколько «деформацией» при увеличении толщины балки ее масштабированной АЧХ вблизи нижних резонансных частот (данный эффект также можно наблюдать на рис. 3). Влияние новой части спектра невелико, поскольку для всех рассмотренных балок переходная частота, ограничивающая снизу данную часть спектра, значительно превосходит частоту среза разомкнутой системы для всех синтезированных СУ (даже в случае балки III первая величина примерно на порядок выше второй, а для остальных балок разница еще более существенная).

Кроме этого, представленные результаты показывают, что управление с использованием перемещений и сосредоточенных сил осуществляется заметно эффективнее, чем системы, где используются углы поворота и сосредоточенные моменты. Это объясняется тем, что на АЧХ балки сила – смещение (без управления) резонансные амплитуды с ростом частоты убывают значительно быстрее, чем на АЧХ момент – угол поворота, т. е. влияние управления для первых систем в большей степени выражено на низших частотах, а не на высших, поэтому эффективность гашения на низших частотах растет, а снижение устойчивости на высоких частотах уменьшается.

Еще одно наблюдение касается результатов, представленных в таблице: как правило, по отдельности колебания на первом и втором резонансах гасятся несколько эффективнее, чем вместе, – этот эффект характерен для СУ как с наблюдателями, так и без них, он наблюдался авторами и в более ранних работах [4, 5]. Этот результат объясняется тем, что при одновременном включении двух контуров в системе управления степень устойчивости замкнутой системы снижается, что приводит к необходимости уменьшать коэффициенты усиления и, как следствие, к снижению эффективности СУ.

### Заключение

В работе рассмотрена задача активного гашения вынужденных колебаний металлических балок с помощью систем управления с использованием наблюдателей состояния. Изучено влияние толщины балки на эффективность управления, для этого задача решена численно с использованием модели балки Тимошенко для разных значений толщины балки, которые изменяются в широком диапазоне. В исследовании сделан акцент именно на эффекты модели Тимошенко, так как при использовании модели Бернулли – Эйлера для описания динамики рассматриваемых балок результаты для балок различной толщины получились бы идентичными.

В результате было показано, что в случае гашения колебаний балки на низших резонансах предложенные системы управления остаются эффективными для всех рассмотренных балок. Отмечено лишь небольшое снижение эффективности гашения колебаний при значительном увеличении толщины балки; данному эффекту было дано аргументированное объяснение.

Среди дальнейших исследований наибольший интерес представляют их следующие направления:

моделирование управления колебаниями балки с помощью конкретных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов,

гашение колебаний балки на более высоких резонансных частотах,

варьирование модели объекта в наблюдателе, в том числе расширение числа учитываемых собственных форм балки в данной модели.

Другие перспективные направления – это учет деформации сечений для толстых балок и шума измерений при синтезе системы управления, а также рассмотрение различных функционалов качества при оптимизации параметров системы управления. Представляет интерес также решение задачи гашения упругих волн в балке Тимошенко.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carvalho M. O. M., Zindeluk M.** Active control of waves in a Timoshenko beam // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. No. 10–13. Pp. 1749–1764.
2. **Mei C.** Hybrid wave/mode active control of bending vibrations in beams based on the advanced Timoshenko theory // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322. No. 1–2. Pp. 29–38.
3. **Selivanov A., Fridman E.** Disturbance attenuation in the Euler – Bernoulli beam with viscous and Kelvin – Voigt damping via piezoelectric actuators // *Proceedings of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDO)*. December 13–15, 2023. Marina Bay Sands, Singapore, Pp. 1961–1966.
4. **Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А.** Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16. № 3. С. 160–176.
5. **Федотов А. В.** Сравнение подходов к заданию модальных матриц при модальном управлении упругими системами с наблюдателями и без них // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2024. Т. 17. № 1. С. 114–129.
6. **Yildirim K., Kucuk I.** Active piezoelectric vibration control for a Timoshenko beam // *Journal of the Franklin Institute*. 2016. Vol. 353. No. 1. Pp. 95–107.
7. **Li X., Agarwal R. K., Shue S.-P.** Active control of Timoshenko beam vibrations using piezoelectric material // *Proceedings of the 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. 12–15 April 1999, St. Louis, MO, USA. Pp. 894–902.
8. **Aldraihem O. J., Wetherhold R. C., Singh T.** Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler – Bernoulli theory // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1997. Vol. 8. No. 2. Pp. 149–157.
9. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A.** Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
10. **Timoshenko S. P.** LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine (Series 6)*. 1921. Vol. 41. No. 245. Pp. 744–746.
11. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.** On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisitation // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. No. 24. Pp. 1–30.
12. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.** On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. No. 25. Pp. 1–22.
13. **Федотов А. В.** Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155.





## REFERENCES

1. **Carvalho M. O. M., Zindeluk M.**, Active control of waves in a Timoshenko beam, *Int. J. Solid. Struct.* 38 (10–13) (2001) 1749–1764.
2. **Mei C.**, Hybrid wave/mode active control of bending vibrations in beams based on the advanced Timoshenko theory, *J. Sound Vib.* 322 (1–2) (2009) 29–38.
3. **Selivanov A., Fridman E.**, Disturbance attenuation in the Euler – Bernoulli beam with viscous and Kelvin – Voigt damping via piezoelectric actuators, *Proc. 62nd IEEE Conf. Decision and Control (CDO)*, Dec. 13–15, 2023, Marina Bay Sands, Singapore (2023) 1961–1966.
4. **Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A.**, Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 16 (3) (2023) 160–176 (in Russian).
5. **Fedotov A. V.**, A comparison of approaches to specifying the modal matrices in the modal control of elastic systems with and without observers, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 17 (1) (2024) 114–129. (in Russian).
6. **Yildirim K., Kucuk I.**, Active piezoelectric vibration control for a Timoshenko beam, *J. Frank. Inst.* 353 (1) (2016) 95–107.
7. **Li X., Agarwal R. K., Shue S.-P.**, Active control of Timoshenko beam vibrations using piezoelectric material, *Proc. 40th Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. Exhibit*, 12–15 Apr. 1999, St. Louis, MO, USA (1999) 894–902.
8. **Aldraihem O. J., Wetherhold R. C., Singh T.**, Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. Euler – Bernoulli theory, *J. Intel. Mat. Syst. Struct.* 8 (2) (1997) 149–157.
9. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., et al.**, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, *Struct. Control Health Monit.* 25 (8) (2018) e2105.
10. **Timoshenko S. P.**, LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Lond., Edinb., Dubl. Phil. Mag. (Ser. 6).* 41 (245) (1921) 744–746.
11. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.**, On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisitation, *Zeit. angew. Math. Phys.* 67 (24) (2016) 1–30.
12. **Cazzani A., Stochino F., Turco E.**, On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications, *Zeit. angew. Math. Phys.* 67 (25) (2016) 1–22.
13. **Fedotov A. V.**, The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics.* 12 (1) (2019) 142–155. (in Russian).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ФЕДОТОВ Александр Васильевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.  
alvafed@yandex.ru  
ORCID: 0000-0001-6028-7566

**БЕЛЯЕВ Александр Константинович** – член-корреспондент Российской академии наук, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.  
13augen@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-5934-8138

## THE AUTHORS

**FEDOTOV Aleksandr V.**

*Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS*  
61 Bolshoi Ave., V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia  
alvafed@yandex.ru  
ORCID: 0000-0001-6028-7566

**BELYAEV Alexander K.**

*Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS*  
61 Bolshoi Ave., V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia  
13augen@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-5934-8138

*Статья поступила в редакцию 24.10.2024. Одобрена после рецензирования 06.03.2025.  
Принята 06.03.2025.*

*Received 24.10.2024. Approved after reviewing 06.03.2025. Accepted 06.03.2025.*