

Научная статья

УДК 539.21

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССОУПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИДЕАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ НА ВНУТРЕННИХ ГРАНИЦАХ ДВУХФАЗНОГО МАТЕРИАЛА

К. П. Фролова¹ , Н. М. Бессонов¹, Е. Н. Вильчевская²

¹ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

² Берлинский технический университет, г. Берлин, Германия

 fkp@ipme.ru

Аннотация. В работе исследовано влияние неидеальных контактов (НК) на границах раздела фаз неоднородного (на микроуровне) материала на транспорт примеси и на напряженно-деформированное состояние среды (на макроуровне), вызванное ее накоплением. Рассмотрены два типа НК: сегрегация (оседание примеси), когда нарушается непрерывность концентрации, и образование обходных путей ускоренной диффузии, когда нарушается непрерывность нормальной компоненты потока. Моделирование связанных процессов массопереноса и изменения напряженно-деформированного состояния среды включает два этапа. На первом определяется эффективная диффузионная проницаемость материала с помощью методов микромеханики. На втором этапе решается задача массоупругости на макроуровне. Анализ проведен на примере длинного цилиндра, представленного как двухфазный материал, состоящий из матрицы и менее проницаемых сфероидальных неоднородностей, имеющих вытянутую форму и произвольно распределенных по ориентациям. Показано, что тип НК и способ его учета могут оказывать существенное влияние на распределение примеси в образце и на величину внутреннего давления.

Ключевые слова: диффузия, массоупругость, эффективные свойства, неидеальный контакт, граница раздела фаз, двухфазный материал

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-79-01133 (<https://rscf.ru/project/23-79-01133/>).

Для цитирования: Фролова К. П., Бессонов Н. М., Вильчевская Е. Н. Решение задачи массоупругости при наличии неидеальных контактов на внутренних границах двухфазного материала // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 141–155. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

A SOLUTION TO THE PROBLEM OF ELASTICITY CAUSED BY MASS TRANSPORT IN THE PRESENCE OF IMPERFECT CONTACTS AT THE INTERNAL INTERFACES OF A TWO-PHASE MATERIAL

K. P. Frolova¹ , N. M. Bessonov¹, E. N. Vilchevskaya²

¹ Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia;

² Technical University of Berlin, Berlin, Germany

 fkp@ipme.ru

Abstract. The paper studies the influence of imperfect contacts (IC) at the phase interfaces of a micro-heterogeneous material on the macroscopic transport of impurity and the stress-strain state caused by its accumulation. Two types of IC are considered: segregation, which

involves the accumulation of impurity that disrupts the continuity of concentration, and the formation of bypass paths for accelerated diffusion, which disrupts the continuity of the normal component of the flux. Modeling the coupled processes of mass transport and changes in the stress-strain state of the medium consists of two stages. In the first stage, the effective diffusion permeability of the material is determined using micromechanical methods. In the second stage, the macroscopic elasticity problem caused by mass transport is solved. The analysis is carried out using the example of a long cylinder, which is a two-phase material at the micro-level, consisting of a matrix and less permeable prolate spheroidal inhomogeneities with an arbitrary distribution of orientations.

Keywords: diffusion, elasticity due to mass transport, effective properties, imperfect contact, phase interface, two-phase material

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 23-79-01133 (<https://rscf.ru/project/23-79-01133/>)).

For citation: Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N., A solution to the problem of elasticity caused by mass transport in the presence of imperfect contacts at the internal interfaces of a two-phase material, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 141–155. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18312>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Создание новых материалов и расширение их области применения сопряжено с проблемами описания состояния объектов при термомеханических нагрузках с учетом влияния различных характеристик внутренней структуры. Моделирование поведения неоднородных на мезоуровне материалов можно разделить на два этапа: на первом определяются эффективные свойства с помощью методов микромеханики, на втором решается задача на макроуровне.

Как правило, при вычислении эффективных свойств предполагается, что поля непрерывны на границах раздела фаз материала [1]. Тем не менее, в ряде случаев такая гипотеза может оказаться несправедливой. В частности, в контексте задачи определения диффузионных свойств, сегрегацию (оседание примеси) [2] невозможно описать, если считать поле концентрации непрерывным [3]. Растрескивание, измельчение зерен и т. п. может приводить к образованию дополнительных обходных путей ускоренной диффузии [4], что, в свою очередь, противоречит предположению о непрерывности нормальной компоненты потока.

Любое нарушение непрерывности поля означает наличие неидеального контакта [5]. Неидеальные контакты указанных выше типов были учтены в ряде работ при описании разных процессов. Так, в работах [6 – 8] был рассмотрен диффузионный процесс с учетом сегрегации в материале, состоящем из матрицы и изолированных неоднородностей. В модель вводился параметр, равный отношению концентраций с внешней и внутренней сторон границы раздела фаз (параметр сегрегации). В работах [9 – 11] были рассмотрены тепловые процессы в двухфазных материалах, содержащих изолированные неоднородности, и учитывались неидеальные контакты разных типов. Предполагалось, что неоднородности имеют покрытие, обладающее экстремальными свойствами (оно является изолятором или суперпроводником). Обобщение и сравнение разных подходов к моделированию неидеальных контактов было проведено нами в работе [12].

Наличие неидеальных контактов, учет которых необходим при определении эффективной диффузионной проницаемости, может повлиять как непосредственно на распределение примеси в макроскопическом образце, так и на его напряженно-деформированное состояние, поскольку оно может меняться в результате накопления диффузанта. Влияние сегрегации на решение задач диффузии и массопругости было исследовано нами в работе [13]. Оседание примеси на границе раздела матрица/неоднородность при этом моделировалась только посредством задания параметра сегрегации.



Настоящая работа посвящена анализу влияния двух типов неидеальных контактов (сегрегация и образование дополнительных обходных путей ускоренной диффузии); такие контакты исследуются с применением разных подходов: через определение скачка поля и путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Анализ будет представлен на примере двухфазного материала, состоящего из матрицы и менее проводящих, произвольно ориентированных неоднородностей, имеющих форму вытянутых сфероидов. Такая микроструктура характерна, в частности, для поликристаллов при моделировании зерен неоднородностями, а границ зерен – матрицей [7]. Отметим, что для поликристаллов актуальной является проблема водородной деградации, когда в результате накопления вредной примеси происходит разрушение металлов [14, 15].

Описание этапов моделирования

Моделирование связанных процессов массопереноса и изменения напряженно-деформированного состояния материала при наличии на меньшем масштабном уровне двух типов неидеальных контактов на границах раздела фаз (сегрегации и образования дополнительных обходных путей ускоренной диффузии) включает два этапа. На первом определяется эффективная диффузионная проницаемость материала с учетом его внутренней структуры; на втором решается задача массопругости с учетом найденных макроскопических свойств.

При определении эффективной диффузионной проницаемости \mathbf{D}^{eff} ограничимся рассмотрением линейного макроизотропного материала, т. е.

$$\mathbf{D}^{eff} = D^{eff} \mathbf{I}$$

(\mathbf{I} – единичный тензор); этот материал состоит из изотропной матрицы с проницаемостью $\mathbf{D}_0 = D_0 \mathbf{I}$ и изотропных неоднородностей с проницаемостью $\mathbf{D}_1 = D_1 \mathbf{I}$, имеющих форму вытянутых сфероидов и произвольное распределение по ориентациям.

Рассмотрим разные типы неидеальных контактов на границе раздела фаз. Для моделирования сегрегации необходимо учесть нарушение непрерывности поля концентрации c , а для моделирования дополнительных обходных путей ускоренной диффузии – нормальной компоненты потока J_n .

Начально-краевую квазистатическую задачу массопругости будем решать для длинного цилиндра с радиусом r_0 . Будем считать, что напряжения и деформации возникают в цилиндре исключительно из-за накопления диффузанта при поддержании на боковой поверхности постоянной концентрации. При этом рассмотрим два случая: с учетом и без учета явления бародиффузии, при котором градиент давления инициирует дополнительный диффузионный поток.

Представим далее математическую постановку задачи для каждого этапа моделирования и изложим методы ее решения.

Определение эффективных свойств материала

Указанные свойства материала находятся из решения задачи гомогенизации для репрезентативного объема V , представляющего собой материальную точку сплошной среды на макроуровне [9]. Тензор макроскопической диффузионной проницаемости \mathbf{D}^{eff} связывает между собой средние по объему V поток \mathbf{J} и градиент концентрации c в соответствии с классическим законом Фика:

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = -\mathbf{D}^{eff} \cdot \langle \nabla c \rangle_V. \quad (1)$$

Предполагается, что в каждой точке репрезентативного объема выполняется закон сохранения:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{x} – радиус-вектор, а поток связан с градиентом концентрации линейным образом по формуле

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla c(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ – тензор диффузионной проницаемости материала в точке \mathbf{x} .

На границе Σ репрезентативного объема удобно задавать однородное условие Хилла:

$$c(\mathbf{x})|_{\Sigma} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{x}. \quad (4)$$

Наличие неидеальных контактов учитывается либо через задание скачка поля на границе матрица (+) / неоднородность (-), либо путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами. В последнем случае сначала предполагается, что неоднородность представляет собой конфокальные эллипсоиды, полуоси которых b_1, b_2, b_3 и a_1, a_2, a_3 связаны соотношением

$$b_i^2 = a_i^2 + \xi \quad (i = 1, 2, 3), \quad \xi = \text{const},$$

а свойства слоя D_s , образованного двумя эллипсоидами, конечны.

Затем реализуется предельный переход при $\xi \rightarrow 0$ и либо при $D_s \rightarrow 0$, либо при $D_s \rightarrow \infty$, в зависимости от типа неидеального контакта [10, 11].

В результате наличие сегрегации можно учесть в модели либо через задание параметра s_c такого, что скачок концентрации определяется как

$$[c] = (s_c - 1)c(\mathbf{x})|_{x \rightarrow \Gamma^-} \quad (5)$$

(Γ – граница неоднородности с внешней нормалью \mathbf{n}_{Γ}), либо через задание безразмерного параметра β эквивалентной поверхностной сопротивляемости, который в случае сфероидальной формы неоднородностей выражается как

$$\beta = \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma S} \frac{D_1}{a^2} \lim_{\xi \rightarrow 0, D_s \rightarrow 0} \frac{\xi}{D_s}, \quad (6)$$

где γ – отношение полуосей сфероида, $\gamma = a_3/a$; S – площадь поверхности сфероида, деленная на $(4/3)\pi a^2$.

Аналогично, образование дополнительных обходных путей ускоренной диффузии учитывается либо через задание параметра s_f

$$[J_n] = (s_f - 1)\mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})|_{x \rightarrow \Gamma^-}, \quad (7)$$

характеризующего скачок нормальной компоненты потока, либо через задание безразмерного параметра эквивалентной поверхностной проницаемости λ , который в случае сфероидов имеет вид

$$\lambda = \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma S} \frac{1}{D_1 a^2} \lim_{\xi \rightarrow 0, D_s \rightarrow \infty} \xi D_s. \quad (8)$$

Задача определения эффективных свойств состоит из двух этапов. На первом решается задача об изолированной неоднородности в бесконечной матрице, на втором используется схема гомогенизации для учета наличия множественных неоднородностей.

На основании решения задачи об изолированной неоднородности можно получить выражение для тензора вклада неоднородности в искомое свойство [1]. Тензор вклада в диффузионную проницаемость \mathbf{H} можно получить из представления среднего потока в виде

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = - \left(\mathbf{D}_0 + \frac{V_1}{V} \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{G}_0. \quad (9)$$

Выражение (9) учитывает, что средний градиент концентрации не зависит от микроструктуры и полностью определяется граничным условием (4):

$$\langle \nabla c \rangle_V = \mathbf{G}_0.$$

Сумма тензоров вклада представляет собой микроструктурный параметр, через который можно выразить макроскопические характеристики материала. Выражения для тензоров вклада эллипсоидальных и, в частности, сфероидальных неоднородностей были получены и исследованы в работах [8 – 12]. При этом наличие разных неидеальных контактов учитывалось двумя способами: через задание скачка поля и путем рассмотрения неоднородности с покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Приведем здесь окончательные выражения, учитывающие различные факторы, для тензоров вклада сфероидов:

$$\mathbf{H}^{s_c} = D_0 \left[\frac{D_1 - s_c D_0}{f_0 D_1 + (1 - f_0) s_c D_0} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - s_c D_0}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 s_c D_0} \mathbf{nn} \right] \quad (10)$$

при учете нарушения непрерывности поля концентрации через параметр s_c ;

$$\mathbf{H}^\beta = D_0 \left[\frac{D_1 - D_0 - f_0 D_0 \beta \frac{S}{\gamma}}{f_0 D_1 + (1 - f_0) D_0 + (1 - f_0) D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (f_0 - F_\theta)} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - D_0 - (1 - 2f_0) D_0 \beta \frac{S}{\gamma}}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 D_0 + 2f_0 D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0 - F_n)} \mathbf{nn} \right] \quad (11)$$

при учете нарушения непрерывности поля концентрации через величину безразмерной эквивалентной поверхностной сопротивляемости β ;

$$\mathbf{H}^{s_f} = D_0 \left[\frac{s_f D_1 - D_0}{f_0 s_f D_1 + D_0 (1 - f_0)} \boldsymbol{\theta} + \frac{s_f D_1 - D_0}{(1 - 2f_0) s_f D_1 + 2f_0 D_0} \mathbf{nn} \right] \quad (12)$$

при учете нарушения непрерывности нормальной компоненты потока через параметр s_f ;

$$\mathbf{H}^\lambda = D_0 \left[\frac{D_1 - D_0 + \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (1 - f_0)}{f_0 D_1 + (1 - f_0) D_0 + f_0 \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (1 - f_0 + F_\theta)} \boldsymbol{\theta} + \frac{D_1 - D_0 + 2f_0 \lambda D_1 \frac{S}{\gamma}}{(1 - 2f_0) D_1 + 2f_0 D_0 + (1 - 2f_0) \lambda D_1 \frac{S}{\gamma} (2f_0 + F_n)} \mathbf{nn} \right] \quad (13)$$

при учете нарушения непрерывности нормальной компоненты потока через величину безразмерной эквивалентной поверхностной диффузионной проницаемости λ .

В формулах (10) – (13) использованы следующие обозначения: \mathbf{n} – орт оси симметрии сфероида; $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$; F_n, F_θ – функции от параметра γ , для которых справедливы равенства вида

$$F_n = \frac{f_0 (1 + 2\gamma^2) - \gamma^2}{1 + 2\gamma^2}, \quad F_\theta = -2F_n,$$

где

$$f_0(\gamma) = \frac{1 - g(\gamma)}{2(1 - \gamma^{-2})}, \quad g = g(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma}, & \gamma \leq 1; \\ \frac{1}{2\gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right), & \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Для определения эффективных свойств материала с множественными неоднородностями используем метод Мори – Танаки [1, 16], дающий физически непротиворечивые результаты как при малых, так и при больших значениях объемной доли включений. Этот и ряд других методов в применении к материалам с неидеальными контактами был исследован нами ранее в работе [8]. Изложим ниже основную суть метода и представим результаты для эффективной диффузионной проницаемости.

В рамках метода Мори – Танаки неоднородности рассматриваются как изолированные, а взаимодействие между ними учитывается посредством их помещения не в исходное поле \mathbf{G}_0 , удовлетворяющее выражению (4), а в эффективное поле, равное среднему по матрице:

$$\mathbf{G}^{eff} = \langle \nabla c \rangle_{V_0}. \quad (14)$$

Само наличие неидеального контакта, а также его тип и способ учета оказывают непосредственное влияние на эффективное поле. Отметим, что применение метода Мори – Танаки требует учета нарушения непрерывности поля концентрации/нормальной компоненты потока на двух этапах: когда решается задача об изолированной неоднородности и когда используется схема гомогенизации, поскольку параметры, отвечающие за неидеальный контакт, появляются не только в выражениях для тензоров вклада [8]. Действительно, при учете разных факторов, эффективная диффузионная проницаемость материала со сфероидальными неоднородностями, в терминах тензоров вклада будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_c} \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \left(\frac{1}{s_c} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_c} \right]^{-1} \quad (15)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_c ;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^\beta \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_i V_i \times \left(\frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} f_0}{D_1 - D_0 - D_0 \beta \frac{S}{\gamma} f_0} H_{11}^\beta \boldsymbol{\theta}_i + \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} (1-2f_0)}{D_1 - D_0 - D_0 \beta \frac{S}{\gamma} (1-2f_0)} H_{33}^\beta \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \right) \right]^{-1} \quad (16)$$

при учете неидеального контакта через параметр β , здесь тензоры вклада отдельных неоднородностей представлены в координатном виде как $\mathbf{H}^\beta = H_{11}^\beta (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) + H_{33}^\beta \mathbf{nn}$;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_f} \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + (s_f \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0)^{-1} \cdot \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^{s_f} \right]^{-1} \quad (17)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_f ;

$$\mathbf{D}^{eff} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i^\lambda \cdot \left[(1-p)\mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_i V_i \times \left(\frac{1}{D_1 - D_0 + D_1 \lambda \frac{S}{\gamma} (1-f_0)} H_{11}^\lambda \boldsymbol{\theta}_i + \frac{1}{D_1 - D_0 + 2D_1 \lambda \frac{S}{\gamma} f_0} H_{33}^\lambda \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \right) \right]^{-1} \quad (18)$$

(p – объемная доля неоднородностей) при учете неидеального контакта через параметр λ .

В случае, когда неоднородности имеют одинаковые свойства и одинаковую форму (при этом их размер в общем случае может быть разным), операцию суммирования в выражениях (15) – (18) можно заменить операцией осреднения по ориентациям неоднородностей

$$1/V \sum_i V_i \dots = p \langle \dots \rangle,$$

которая сводится к осреднению тензора $\boldsymbol{\theta}$ и диады \mathbf{nn} в выражениях (10) – (13) для тензоров вклада.

В результате получим следующие окончательные формулы для вычисления эффективной диффузионной проницаемости макроизотропного материала, состоящего из изотропных фаз (с учетом произвольного распределения неоднородностей по ориентациям и, соответственно, выполнения равенства $\langle \mathbf{nn} \rangle = (1/3)\mathbf{I}$):

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_{s_c}}{(1-p) + \frac{pA_{s_c}}{\alpha/s_c - 1}}, \quad A_{s_c} = \frac{2H_{11}^{s_c}/D_0 + H_{33}^{s_c}/D_0}{3} \quad (19)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_c (здесь и далее введен безразмерный параметр $\alpha = D_1 / D_0$);

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_\beta}{(1-p) + pB_\beta}, \quad A_\beta = \frac{2H_{11}^\beta/D_0 + H_{33}^\beta/D_0}{3},$$

$$B_\beta = \frac{2}{3} \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} f_0}{\alpha - 1 - \beta \frac{S}{\gamma} f_0} \frac{H_{11}^\beta}{D_0} + \frac{1}{3} \frac{1 + \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0)}{\alpha - 1 - \beta \frac{S}{\gamma} (1 - 2f_0)} \frac{H_{33}^\beta}{D_0} \quad (20)$$

при учете неидеального контакта через параметр β ;

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_{s_f}}{(1-p) + \frac{pA_{s_f}}{\alpha s_f - 1}}, \quad A_{s_f} = \frac{2H_{11}^{s_f}/D_0 + H_{33}^{s_f}/D_0}{3} \quad (21)$$

при учете неидеального контакта через параметр s_f ;

$$\frac{D^{eff}}{D_0} = 1 + \frac{pA_\lambda}{(1-p) + pB_\lambda}, \quad A_\lambda = \frac{2H_{11}^\lambda/D_0 + H_{33}^\lambda/D_0}{3},$$

$$B_\lambda = \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha - 1 + \alpha K \frac{S}{\gamma} (1 - f_0)} \frac{H_{11}^\lambda}{D_0} + \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha - 1 + 2\alpha K \frac{S}{\gamma} f_0} \frac{H_{33}^\lambda}{D_0} \quad (22)$$

при учете неидеального контакта через параметр λ .

Решение задачи массопругости

Перейдем к описанию диффузионного процесса на макроуровне. Уравнение диффузии в локальной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (23)$$

где t – время.

Диффузионный поток \mathbf{J} в общем случае может быть вызван как градиентом концентрации c , так и градиентом давления P (явление бародиффузии; $P = -\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений):

$$\mathbf{J} = -D^{eff} (\nabla c + Ac\nabla P), \quad (24)$$

где $A = M\alpha_V/(3\rho RT)$ (M – молярная масса, α_V – коэффициент объемного концентрационного расширения, ρ – плотность, R – универсальная газовая постоянная, T – температура).

Наряду с вариантом задания потока выражением (24) рассмотрим классический закон Фика:

$$\mathbf{J} = -D^{eff} \nabla c. \quad (25)$$

Наличие неидеальных контактов на мезоуровне учитывается здесь в коэффициенте D^{eff} , который определяется одной из формул (19) – (22), в зависимости от типа неидеального контакта и применяемой модели.

Напряженно-деформированное состояние материала удовлетворяет уравнению равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (26)$$

Как правило, накопление диффузанта приводит только к объемному расширению материала. В таком случае напряжения связаны с деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}$ соотношениями Дюамеля – Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\mu \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad P = -K(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_V(c - c_0))\mathbf{I}, \quad (27)$$

где c_0 – отсчетная концентрация; K, μ – модули объемного сжатия и сдвига соответственно.

Деформации линейного материала определяются через градиент перемещений как $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^s$.

Пример задачи для длинного цилиндра. Перейдем к начально-краевой задаче для длинного цилиндра. Представим систему уравнений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; базисные орты обозначим, соответственно, как $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$.

На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация c_1 , и эта поверхность свободна от нагрузки:

$$c|_{r=r_0} = c_1, \quad \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{r=r_0} = 0. \quad (28)$$

В центре цилиндра выполняются следующие условия:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=0} < \infty. \quad (29)$$

В соответствии с гипотезами Сен-Венана и плоских сечений, имеет место следующее интегральное условие равновесия:

$$\int_0^{r_0} \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\sigma} r dr = 0. \quad (30)$$

В предположении об осевой симметрии решение задачи будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u} = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_z(z)\mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon = \text{const}, \quad c = c(r). \quad (31)$$

Начальное распределение концентрации полагаем нулевым:

$$c|_{r=0} = c_0 = 0. \quad (32)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений, в соответствии с выражением (27) и с учетом предположений (31), будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon \right) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{u_r}{r} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right], \\ \sigma_{zz} &= -P + \frac{4\mu}{3} \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

а давление P – вид

$$P = -K \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon - \alpha_V c \right). \quad (34)$$

Перейдем к безразмерной постановке задачи, для чего введем следующие масштабы: для радиальной координаты r и радиального смещения u_r – радиус цилиндра r_0 ; для компонент тензора напряжений σ_{ii} и давления P – величину $4\mu/3$; для концентрации c – концентрацию c_1 , поддерживаемую на боковой поверхности. Для времени t обозначим масштаб как T .

Тогда окончательная система уравнений, дополненная начальным и граничными условиями, примет следующий вид (для безразмерных величин обозначения сохранены):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - P \right] = 0, \\ P = -k \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon - \alpha_v c \right), \\ u_r|_{r=0} < \infty, \quad \left\{ -P + \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon \right) \right] \right\}_{r=1} = 0, \\ \int_0^1 \left\{ -P + \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \right\} r dr = 0, \\ r \frac{\partial c}{\partial t} = F \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial c}{\partial r} + A_k c \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right], \\ c|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial c}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad c|_{r=0} = 0, \end{array} \right. \quad (35)$$

где введены безразмерные коэффициенты $k = 3K/4\mu$, $A_k = 4\mu/3A$; F – диффузионный критерий Фурье, $F = D^{eff} T / r_0^2$.

Отметим, что в безразмерной постановке задачи наличие неидеальных контактов учитывается только в диффузионном критерии Фурье, поскольку в него входит величина эффективной диффузионной проницаемости. При фиксированном масштабе времени и одном и том же значении радиуса цилиндра варьирование параметра F означает варьирование D^{eff} .

Решение системы уравнений (35) реализовывалось численно с помощью неявного метода конечных разностей. В рассмотрение вводилась одномерная пространственная сетка вдоль оси r , концентрация и радиальные перемещения задавались в узлах, а напряжения (в том числе давление) и деформации – в ячейках.

Анализ полученных результатов

Исследуем влияние неидеальных контактов на решение задачи массопругости. Рассмотрим при этом несколько моделей. Во-первых, представим решение с учетом бародиффузии и без ее учета. Во-вторых, рассмотрим два типа неидеальных контактов: I и II.

I. Имеет место сегрегация.

II. В материале возникают дополнительные обходные пути ускоренной диффузии.

Используем в рамках каждой модели два подхода к учету неидеального контакта.

1. Скачок поля задается через отношение величин с внешней и внутренней сторон границы неоднородности.

2. В рассмотрение вводится неоднородность с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Сравним полученные результаты с таковыми для случая идеальных контактов на границах раздела матрица/неоднородность. Для сравнения подходов выразим параметры s_c и s_f через эквивалентную поверхностную сопротивляемость β и проницаемость λ соответственно:

$$s_c = 1 + \beta, \quad s_f = 1 + 2\lambda; \quad (36)$$

в таком случае оба подхода к учету неидеальных контактов приводят к одинаковым результатам в случае сферических неоднородностей.

Анализ проведем на примере материала, состоящего из матрицы и произвольно ориентированных вытянутых сфероидальных неоднородностей с соотношением длин полуосей $\gamma = 10$; примем значение отношения диффузионных проницаемостей $\alpha = D_1 / D_0 = 0,2$.

Представим сначала результаты для эффективных свойств материала с неидеальными контактами. Влияние сегрегации продемонстрировано на рис. 1.

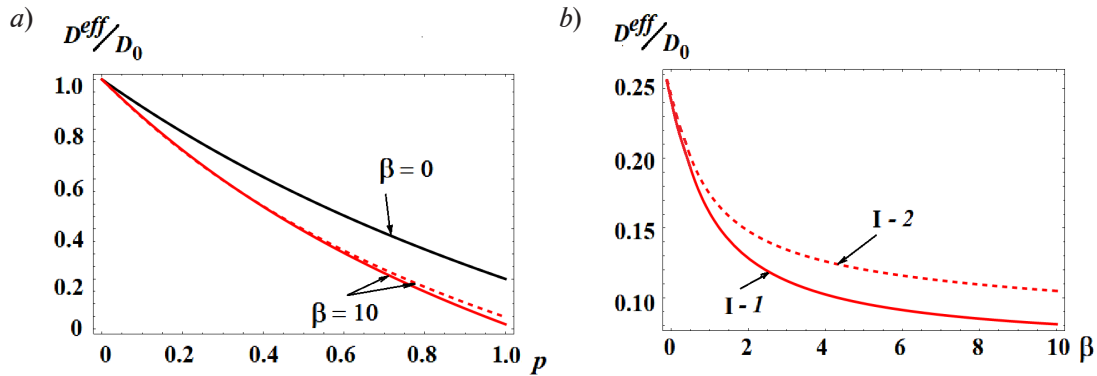


Рис. 1. Зависимости эффективного коэффициента диффузии от объемной доли неоднородностей p для двух значений параметра β (a) и от параметра β (b) для случая сегрегации (I), моделируемой в рамках подходов 1 и 2 (сплошная и пунктирная линии, соответственно), см. также пояснения в тексте

Как видно из рис. 1, при увеличении объемной доли неоднородностей p диффузионная проницаемость снижается, при этом наличие неидеального контакта приводит к более существенному изменению свойства (см. рис. 1, a). На рис. 1, b представлены зависимости эффективной проницаемости от параметра β при фиксированном значении объемной доли неоднородностей $p = 0,9$. Видно, что с увеличением β разница между подходами к учету неидеального контакта возрастает. При этом при выбранных характеристиках структуры различие остается незначительным.

Влияние наличия обходных путей ускоренной диффузии продемонстрировано на рис. 2. Видно, что наличие неидеального контакта на границе раздела фаз увеличивает диффузионную проницаемость, по сравнению со случаем его отсутствия. При этом в зависимости от значения параметра λ диффузионная проницаемость может как уменьшаться с увеличением объемной доли неоднородностей, так и увеличиваться, что объясняется одновременным влиянием двух конкурирующих факторов: наличием в матрице менее проводящих неоднородностей и ускоренных диффузионных путей. Видно, что

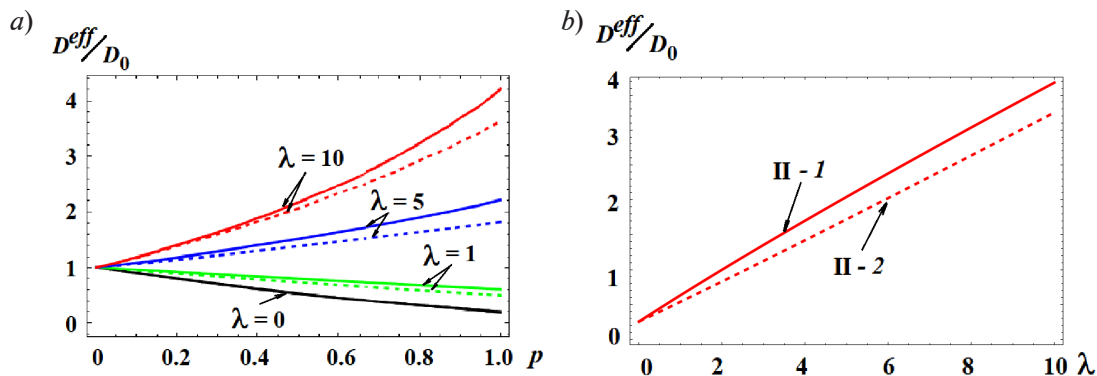


Рис. 2. Зависимости эффективного коэффициента диффузии от объемной доли неоднородностей p при 4 значениях параметра λ (a) и от параметра λ (b) для случая наличия обходных путей ускоренной диффузии (II), моделируемого в рамках подходов 1 и 2 (сплошная и пунктирная линии, соответственно), см. также пояснения в тексте



увеличение параметра λ влечет за собой увеличение разницы между подходами к учету неидеального контакта.

Задачу массопругости будем решать при следующих значениях параметров: $k = 1,6$, $A = 49,3$, $\alpha_v = 4,5 \cdot 10^{-6}$ (параметры, характерные для алюминия). Наличие неидеальных контактов влияет на значение эффективной диффузионной проницаемости и, следовательно, на диффузионный критерий Фурье F . Рассмотрим значения D^{eff}/D_0 , полученные при $p = 0,9$ и, в зависимости от типа неидеального контакта, при $\beta = 10$ или $\lambda = 10$ (см. таблицу, третий столбец). Отметим, что для анализа важны не столько абсолютные значения F , сколько отношения диффузионных критериев Фурье, соответствующих разным значениям эффективной диффузионной проницаемости. Введем обозначение F_0 для величины критерия, соответствующей значению D^{eff}/D_0 , полученному без учета неидеальных контактов ($s_c = s_f = 1$, $\beta = \lambda = 0$). Значение F_0 вычислим при $D^{eff} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ (параметр, характерный для алюминия), $r_0 = 0,004 \text{ м}$, $T = 3600 \text{ с} = 1 \text{ ч}$. Значения диффузионного критерия Фурье представлены в таблице (последний столбец).

Таблица

Результаты расчета диффузионных характеристик материала

Модель		Значение параметра	
Тип НК	Подход к учету НК	D^{eff}/D_0	F_i
Без учета НК		0,26	$F_0 = 2,25 \cdot 10^{-4}$
I	1	0,08	$F_1 = 0,3 F_0$
	2	0,10	$F_2 = 0,4 F_0$
II	1	3,68	$F_3 = 14,2 F_0$
	2	3,25	$F_4 = 12,5 F_0$

Обозначения: D^{eff}/D_0 – безразмерная эффективная диффузионная проницаемость; F_i – диффузионный критерий Фурье; НК – неидеальный контакт. Номера I, II, 1, 2 присвоены в тексте.

Примечание. Данные рассчитаны для материала, состоящего из матрицы и произвольно ориентированных, вытянутых сфероидальных неоднородностей с соотношением длин полуосей $\gamma = 10$.

Концентрационные профили и зависимости давления от радиуса (цилиндрическая система координат) при разных значениях диффузионного критерия Фурье в момент времени $t = 100$ представлены на рис. 3. Отметим, что результаты, полученные без учета и с учетом явления бародиффузии, совпали при заданных параметрах материала (значение параметра A_k является малым, поэтому градиент давления, умноженный на него, оказывается гораздо меньше градиента концентрации).

На рис. 3 видно, что наличие неидеальных контактов и способ их учета оказывают существенное влияние на концентрацию диффузанта в материале и на его распределение. В частности, наличие сегрегации, при которой наблюдается снижение скорости диффузионного процесса, может значительно снизить концентрацию примеси в материале. При этом градиент концентрации растет, что приводит к более существенным перепадам давления. Такое изменение давления, в свою очередь, может оказаться

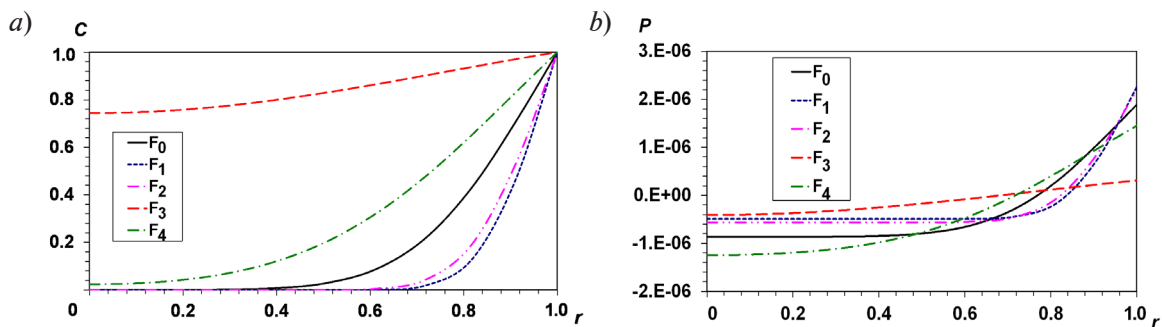


Рис. 3. Зависимости концентрации (a) и давления (b) от радиуса (координата вдоль полярной оси) при разных значениях диффузионного критерия Фурье (см. табл.) в момент времени $t = 100$

критическим в задачах водородной дегградации, где важны локальные характеристики. Наличие обходных путей ускоренной диффузии может привести к значительному росту концентрации в материале, что непосредственно влияет на его поведение в случае эксплуатации в агрессивных средах. При этом подход, при котором задается скачок поля через величину отношения значений поля с внешней и внутренней сторон границы неоднородности (как в случае сегрегации, так и в случае наличия дополнительных обходных путей ускоренной диффузии) влияет на результат в большей степени. Особенно существенна разница между моделями II-1 и II-2, используемыми для моделирования нарушения непрерывности нормальной компоненты потока.

Влияние бародиффузии изучено отдельно и представлено на рис. 4. Такое влияние имеет место при больших значениях коэффициента концентрационного расширения, чем характерная величина для алюминия. В частности, графики на рис. 4 построены при значении $\alpha_v = 0,2$. Для наглядности на рисунке представлены результаты, полученные при трех значениях F_0 из таблицы: при значении, полученном без учета неидеальных контактов, а также при максимальном и минимальном значениях из исследуемого диапазона. На рис. 4 видно, что наличие бародиффузии во всех случаях приводит к повышению концентрации диффузанта в материале, снижению как градиента концентрации, так и разницы давления.

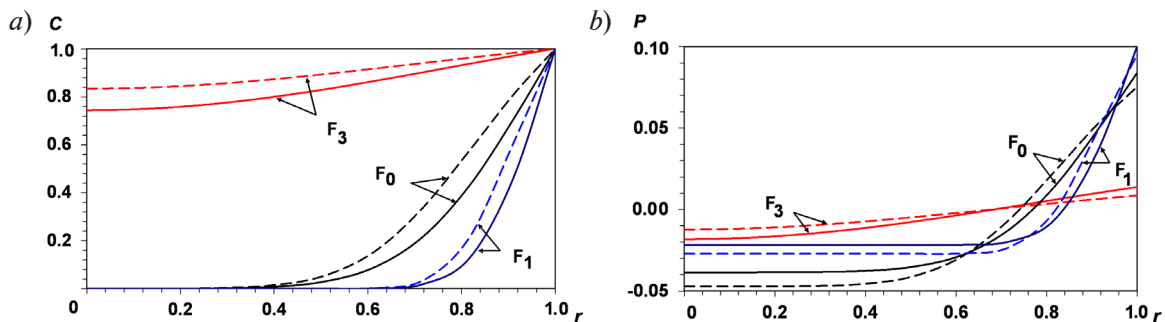


Рис. 4. Зависимости концентрации диффузанта (а) и давления (б) от радиуса (координата вдоль полярной оси) при разных значениях диффузионного критерия Фурье (см. табл.) с учетом (пунктирные линии) и без учета (сплошные линии) бародиффузии

Таким образом, наличие, тип и способ учета неидеальных контактов оказывают влияние на распределение диффундирующего вещества в материале и на его напряженно-деформированное состояние.

Заключение

В работе получено решение связанной (в том числе частично) задачи диффузии и описания упругого поведения материала вследствие накопления примеси с учетом наличия неидеальных контактов на границе раздела фаз. Рассмотрено два типа неидеальных контактов: наличие сегрегации (оно приводит к нарушению непрерывности поля концентрации) и наличие дополнительных обходных путей ускоренной диффузии (оно приводит к нарушению непрерывности нормальной компоненты потока). Каждый тип неидеального контакта учтен в рамках двух подходов: через задание отношения величины поля с внешней и внутренней сторон границы неоднородности, а также путем рассмотрения неоднородности с тонким покрытием, обладающим экстремальными свойствами.

Микроструктура учтена на этапе определения эффективных свойств материала с помощью метода гомогенизации Мори – Танаки, представленного в терминах тензоров вклада в диффузионную проницаемость.

Анализ проведен на примере осесимметричного образца, выполненного из двухфазного материала с произвольно ориентированными вытянутыми сфероидальными неоднородностями, характеризующимися меньшей диффузионной проницаемостью, чем матрица.

Показано, что тип неидеального контакта и способ его учета могут оказывать существенное влияние на распределение примеси в образце и на величину внутреннего



давления, что может оказаться критическим, например, в случае насыщения металлов вредными примесями.

Таким образом, для улучшения качества диагностики состояния материалов необходимо принимать во внимание специфику транспорта примеси и наличие дефектов, которые могут приводить к необходимости отказа от предположения о непрерывности полей на границах раздела фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kachanov M., Sevostianov I.** Micromechanics of materials, with applications (Book Series “Solid Mechanics and its Applications”. Vol. 249). Berlin, Germany: Springer, 2018. 712 p.
2. **Zhang X, Qiao L, Zhang H, Wang P.** Influence of impurity gas seeding into deuterium plasma on the surface modification, sputtering erosion and deuterium retention in W and W-La₂O₃ alloy // International Journal of Hydrogen Energy. 2023. Vol. 48. No. 6. Pp. 2075–2089.
3. **Zhang Y., Liu L.** On diffusion in heterogeneous media // American Journal of Science. 2012. Vol. 312. No. 9. Pp. 1028–1047.
4. **Чепак-Гизбрехт М. В., Князева А. Г.** Двумерная модель зернограницной диффузии и окисления // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 1. С. 156–166.
5. **Pham D. C., Nguyen T. K.** General imperfect interface model for spherical–circular inclusion composites // Acta Mechanica. 2024. Vol. 235. No. 4. Pp. 2211–2229.
6. **Belova I. V., Murch G. E.** Calculation of the effective conductivity and diffusivity in composite solid electrolytes // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 2005. Vol. 66. No. 5. Pp. 722–728.
7. **Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P., Sevostianov I.** On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material // Philosophical Magazine. 2015. Vol. 95. No. 19. Pp. 2046–2066.
8. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.** Effective diffusivity of transversely isotropic material with embedded pores // Materials Physics and Mechanics. 2021. Vol. 47. No. 6. Pp. 937–950.
9. **Markov K. Z.** Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous media: micromechanics modeling methods and simulations. Boston, USA: Birkhäuser, MA, 2000. 162 p.
10. **Levin V., Markov M.** Effective thermal conductivity of micro-inhomogeneous media containing imperfectly bonded ellipsoidal inclusions // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 109. December. Pp. 202–215.
11. **Markov M., Levin V., Markova I.** Determination of effective electromagnetic parameters of concentrated suspensions of ellipsoidal particles using Generalized Differential Effective Medium approximation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 492. 15 February. Pp. 113–122.
12. **Фролова К. П., Вильчевская Е. Н.** Сравнение подходов к учету неидеальных контактов при определении эффективной проницаемости материала // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 146–159.
13. **Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N.** Diffusion in media with spheroidal pores // V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structures Materials. Vol. 164). Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2022. Pp. 209–225.
14. **Sun Y., Cheng Y. F.** Hydrogen-induced degradation of high-strength steel pipeline welds: A critical review // Engineering Failure Analysis. 2022. Vol. 133. March. P. 105985.
15. **Sedova Y. S., Polyanskiy V. A., Belyaev A. K., Yakovlev Y. A.** Modeling the skin effect, associated with hydrogen charging of samples, within the framework of the HEDE mechanism of cracking // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51. No. 6. Pp. 152–159.
16. **Mori T., Tanaka K.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. Vol. 21. No. 5. Pp. 571–574.

REFERENCES

1. **Kachanov M., Sevostianov I.**, Micromechanics of materials, with applications (Book Ser. “Solid Mechanics and its Applications”. Vol. 249), Springer, Berlin, Germany, 2018.
2. **Zhang X, Qiao L, Zhang H, Wang P.**, Influence of impurity gas seeding into deuterium plasma on the surface modification, sputtering erosion and deuterium retention in W and W-La₂O₃ alloy, *Int. J. Hydr. Energy*. 48 (6) (2023) 2075–2089.
3. **Zhang Y., Liu L.**, On diffusion in heterogeneous media, *Am. J. Sci.* 312 (9) (2012) 1028–1047.
4. **Chepak-Gizbrekht M. V., Knyazeva A. G.**, Two-dimensional model of grain boundary diffusion and oxidation, *PNPU Mechanics Bulletin*. (1) (2022) 156–166 (in Russian)
5. **Pham D. C., Nguyen T. K.**, General imperfect interface model for spherical–circular inclusion composites, *Acta Mech.* 235 (4) (2024) 2211–2229.
6. **Belova I. V., Murch G. E.**, Calculation of the effective conductivity and diffusivity in composite solid electrolytes, *J. Phys. Chem. Solids*. 66 (5) (2005) 722–728.
7. **Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P., Sevostianov I.**, On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material, *Philos. Mag.* 95 (19) (2015) 2046–2066.
8. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.**, Effective diffusivity of transversely isotropic material with embedded pores, *Mater. Phys. Mech.* 47 (6) (2021) 937–950.
9. **Markov K. Z.**, Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous media: micromechanics modeling methods and simulations, Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2000.
10. **Levin V., Markov M.**, Effective thermal conductivity of micro-inhomogeneous media containing imperfectly bonded ellipsoidal inclusions, *Int. J. Eng. Sci.* 109 (Dec) (2016) 202–215.
11. **Markov M., Levin V., Markova I.**, Determination of effective electromagnetic parameters of concentrated suspensions of ellipsoidal particles using Generalized Differential Effective Medium approximation, *Phys. A: Stat.* 492 (15 Febr) (2018) 113–122.
12. **Frolova K. P., Vilchevskaya E. N.**, Comparison of approaches to accounting for imperfect contacts when determining the effective permeability of material, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (4) (2023) 146–159 (in Russian).
13. **Frolova K. P., Bessonov N. M., Vilchevskaya E. N.**, Diffusion in media with spheroidal pores, In book: V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). *Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structures Materials. Vol. 164)*, Springer Int. Publ., Cham, Switzerland (2022) 209–225.
14. **Sun Y., Cheng Y. F.**, Hydrogen-induced degradation of high-strength steel pipeline welds: A critical review, *Eng. Fail. Anal.* 133 (March) (2022) 105985.
15. **Sedova Y. S., Polyanskiy V. A., Belyaev A. K., Yakovlev Y. A.**, Modeling the skin effect, associated with hydrogen charging of samples, within the framework of the HEDE mechanism of cracking, *Mater. Phys. Mech.* 51 (6) (2023) 152–159.
16. **Mori T., Tanaka K.**, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.* 21 (5) (1973) 571–574.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФРОЛОВА Ксения Петровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладных исследований Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.

fkr@ipme.ru

ORCID: 0000-0003-0376-4463

БЕССОНОВ Николай Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории микромеханики материалов Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.

199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.

nickbessonov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6462-5980



ВИЛЬЧЕВСКАЯ Елена Никитична – доктор физико-математических наук, приглашенный специалист Берлинского технического университета, г. Берлин, Германия.

Straße des 17. Juni 135 10623, Berlin

vilchevska@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5173-3218

THE AUTHORS

FROLOVA Ksenia P.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS

61 Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia

fkp@ipme.ru

ORCID: 0000-0003-0376-4463

BESSONOV Nikolay M.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS

61 Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia

nickbessonov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6462-5980

VILCHEVSKAYA Elena N.

Technical University of Berlin, Germany

Straße des 17. Juni 135 10623, Berlin

vilchevska@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5173-3218

*Статья поступила в редакцию 28.03.2025. Одобрена после рецензирования 17.04.2025.
Принята 17.04.2025.*

Received 28.03.2025. Approved after reviewing 17.04.2025. Accepted 17.04.2025.