

Научная статья

УДК 519.86; 512.7; 330.4

DOI: <https://doi.org/10.18721/JE.19310>

EDN: <https://elibrary/SFKDYC>



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПОРАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ АДАПТИВНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПУЧКОВ

К.В. Даниленко 

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация

 [danilenko@kirill-viktorovich.ru](mailto:danilenko@kirill-viktorovich.ru)

**Аннотация.** Координация распределенных агентов в цифровых платформах и экосистемах остается открытой теоретической проблемой: существующие модели — от общего равновесия до системной динамики — не дают строгого критерия того, при каких условиях локально согласованные стратегии складываются в единую глобальную траекторию системы, а при каких — нет. Традиционная платформенная теория, в свою очередь, сосредоточена на структуре рыночных взаимодействий, но не предлагает инструментов для диагностики темпоральных разрывов, накапливающихся по мере того, как агенты адаптируются к изменяющейся среде в разном темпе. Настоящая работа восполняет этот пробел, предлагая математическую модель темпоральной согласованности и несогласованности на основе аппарата теории пучков. Адаптивная экономическая система моделируется как топологическое пространство, где открытые множества соответствуют локальным рынкам или группам агентов, а пучок описывает допустимые стратегические конфигурации в каждой точке системы. Первая ко-гомология пучка выступает количественной мерой координационных разрывов; скорость их преодоления связывается со спектральными характеристиками пучкового лапласиана. Ключевым методологическим решением является применение ортогонального метода Прокруста для калибровки карт ограничения непосредственно из наблюдаемых данных — это переводит теоретическую конструкцию в практически применимый диагностический инструмент. Модель верифицирована на операционных данных реальной цифровой платформы за второе полугодие 2025 г.: 26 недель, три агента — поставщик, оператор, логистический партнер. По результатам диагностики выделены четыре фазы жизненного цикла рассогласования; угловые меры расхождения между агентами ( $10,9^\circ$ – $42,6^\circ$ ) интерпретированы как «когнитивные зазоры» — количественное свидетельство того, насколько по-разному участники конструируют общее стратегическое пространство при формально единых целях. Спектральный анализ пучкового лапласиана показал, что при сложившейся архитектуре взаимодействий глобальная координация агентов топологически недостижима ( $H^0(G; F) = 0$ ), а характерный горизонт восстановления составляет около 320 недель; трехкратный рост энергии рассогласования при экзогенном шоке подтвердил диагностическую чувствительность модели. Научная новизна состоит в разработке математической модели, совмещающей когомологическую диагностику темпоральных разрывов с эмпирической калибровкой карт ограничения методом Прокруста. Полученные результаты открывают возможности для построения систем мониторинга и адаптивного управления цифровыми платформами и многоагентными экономическими экосистемами.

**Ключевые слова:** теория пучков, темпоральная динамика, адаптивная экономическая система, когомологии пучков, пучковый лапласиан, цифровая платформа

**Для цитирования:** Даниленко К.В. (2026) Математическая модель темпоральной динамики адаптивных экономических систем на основе теории пучков, 19 (3), 148–163. DOI: <https://doi.org/10.18721/JE.19310>



# A MATHEMATICAL MODEL OF TEMPORAL DYNAMICS IN ADAPTIVE ECONOMIC SYSTEMS BASED ON SHEAF THEORY

K.V. Danilenko  

St. Petersburg Electrotechnical University, St. Petersburg, Russian Federation

 [danilenko@kirill-viktorovich.ru](mailto:danilenko@kirill-viktorovich.ru)

**Abstract.** Coordinating distributed agents in digital platforms and ecosystems remains an open theoretical problem: existing models – from general equilibrium to system dynamics – provide no rigorous criterion for determining under what conditions locally consistent agent strategies cohere into a unified global trajectory and when they do not. Traditional platform theory, in turn, focuses on the structure of market interactions but does not offer tools for diagnosing the temporal gaps that accumulate as agents adapt to a changing environment at different rates. This paper addresses both deficiencies by developing a mathematical model of temporal consistency and inconsistency based on the apparatus of sheaf theory. An adaptive economic system is modeled as a topological space in which open sets correspond to local markets or agent groups, and a sheaf assigns feasible strategic configurations to each point of the system. The first cohomology group serves as a quantitative measure of coordination gaps, while the rate of their resolution is linked to the spectral properties of the sheaf Laplacian. A key methodological contribution is the use of the orthogonal Procrustes method to calibrate restriction maps directly from observed agent data, translating the theoretical construct into a practically applicable diagnostic tool. The model is validated on operational data from a real digital platform covering the second half of 2025: 26 weekly observations across three agents – a supplier, a platform operator, and a logistics partner. Diagnostics reveal four distinct phases of the misalignment life cycle; angular misalignment measures between agents (ranging from 10.9° to 42.6°) are interpreted as cognitive gaps – a quantitative indication of how differently participants construct a shared strategic space even under formally aligned objectives. Spectral analysis of the sheaf Laplacian demonstrates that, given the current interaction architecture, global agent coordination is topologically unattainable ( $H^0(G; F) = 0$ ), with a characteristic recovery horizon of approximately 320 weeks; a threefold increase in misalignment energy under an exogenous shock confirms the diagnostic sensitivity of the model. The scientific contribution lies in a mathematical model that combines sheaf-cohomological diagnostics of temporal gaps with empirical calibration of restriction maps using the Procrustes method. The findings provide a foundation for developing monitoring and adaptive governance systems for digital platforms and multi-agent economic ecosystems.

**Keywords:** sheaf theory, temporal dynamics, adaptive economic system, sheaf cohomology, sheaf Laplacian, digital platform

**Citation:** Danilenko K.V. (2026) A mathematical model of temporal dynamics in adaptive economic systems based on sheaf theory. *П-Economy*, 19 (3), 148–163. DOI: <https://doi.org/10.18721/JE.19310>

## Введение

Цифровые платформы формируют новый класс экономических систем, в которых множество гетерогенных агентов – поставщики, потребители, партнеры, регуляторы – взаимодействуют в едином распределенном пространстве, порождая сетевые эффекты и ценность, недостижимую в рамках традиционных линейных бизнес-моделей. Архитектура бизнес-модели цифровой платформы традиционно описывается как устойчивая конфигурация ценностного предложения, ресурсов, каналов и потоков доходов. Однако в условиях нарастающей турбулентности – технологических сдвигов, рыночной нестабильности, поведенческой изменчивости агентов – статическая архитектурная модель теряет объяснительную и прогностическую силу [1–5].

Ключевой характеристикой адаптивной бизнес-модели цифровой платформы является не описание стабильного состояния, а способность управляемо переходить между режимами работы: от режима операционной стабильности к режиму активной адаптации и обратно — сохраняя при этом ключевые инварианты (ценностное предложение, глобальную согласованность агентов, операционную непрерывность) и наращивая адаптивный потенциал в каждом цикле. Таким образом, архитектура адаптивной бизнес-модели выступает как конституция переходов: формальный набор правил, ресурсов и механизмов, регулирующих, когда и как платформа меняет режим работы и что при этом сохраняется.

Для решения данной проблемы в настоящей работе предлагается использование аппарата теории пучков (англ. *sheaf theory*), позволяющего:

- а) формализовать локальные стратегии агентов и условия их глобальной согласованности через когомологическую группу  $H^1(X, F)$ ;
- б) связать архитектурные инварианты с наблюдаемыми операционными параметрами платформы через метод Прокруста;
- в) верифицировать устойчивость механизма переключения режимов через спектральные свойства пучкового лапласиана [10–13].

Введение временного пучка над произведением пространства состояний и решетки временных интервалов позволяет отслеживать динамику координационных разрывов в моменты архитектурных переходов, что непосредственно соответствует задаче описания циклической смены режимов работы платформы [14–19].

Центральной проблемой при проектировании такой архитектуры является обеспечение глобальной координационной согласованности стратегий агентов при смене режима работы платформы. Пространственная фрагментация мультиагентной системы порождает локальные несогласования, которые при отсутствии формального механизма мониторинга накапливаются и разрушают архитектурные инварианты переходного цикла. Существующие аналитические инструменты — системная динамика, теория динамических способностей, модели платформенных экосистем — не предоставляют математически строгого критерия верификации того, что переход между режимами сохраняет глобальную согласованность локальных стратегий агентов.

Настоящая работа устраняет указанный пробел. Предложена конструкция темпорального экономического пучка на произведении  $X \times I$ , связывающая пространственную и темпоральную несогласованность стратегий в единой формальной модели. Карты ограничения идентифицируются непосредственно из наблюдаемых данных методом ортогонального Прокруста [20–22], что обеспечивает первую эмпирически верифицируемую реализацию пучковой диагностики координации для цифровой платформы.

### **Степень научной разработанности проблемы**

Исследования, связанные с координацией и динамикой экономических систем, традиционно развиваются в рамках нескольких крупных направлений. Классическая модель общего равновесия Эрроу–Дебрё описывает существование глобального ценового вектора и набора планов производства и потребления в рамках единого рыночного пространства, опираясь на теоремы неподвижной точки и жесткие допущения о полноте рынков и рациональности агентов [1]. Эти модели заложили фундаментальный понятийный аппарат координации экономических агентов, однако изначально не были ориентированы на анализ фрагментированных, сетевых и темпорально-неоднородных систем цифровой экономики. Дальнейшее развитие теории игр показало, что даже при наличии стратегических комплементарностей глобальная согласованность поведения агентов не гарантируется: в условиях множественности равновесий система может устойчиво оставаться в субоптимальных состояниях координации [2].

В прикладных исследованиях динамики широко используются методы системной динамики и многоагентного моделирования, позволяющие строить сценарные модели развития отраслей



и предприятий, анализировать обратные связи и чувствительность к параметрам [4, 5]. Агентное моделирование как самостоятельное направление вычислительной экономики систематизировано в фундаментальном руководстве под редакцией Л. Тесфациона и К.Л. Джадда, где показано, что взаимодействие множества гетерогенных агентов порождает макроэкономические паттерны, не сводимые к поведению отдельных участников [6]. В работах по устойчивости бизнес-моделей акцент делается на ISS-подходах и функциях Ляпунова, которые хорошо описывают локальную динамику, но не дают строгих критериев глобальной согласованности множества локальных стратегий во времени [27, 28, 32].

С распространением цифровых платформ и экосистем координационная проблематика приобрела новое измерение. Теория двусторонних рынков формализует роль платформы как посредника, балансирующего интересы нескольких групп агентов через ценовые механизмы [3, 9]. Однако эта модель предполагает статическое ценовое равновесие и не описывает темпоральную эволюцию стратегий участников: вопрос о том, каким образом стратегии поставщиков, операторов и логистических партнеров становятся согласованными или рассогласованными во времени, в рамках двусторонних рынков не ставится [7, 8].

За последние годы в смежных дисциплинах сформировался новый класс работ, использующих теорию пучков для анализа распределенных систем. Спектральная теория пучков на клеточных комплексах, развитая Дж. Хансеном, показывает, что второе собственное значение пучкового лапласиана играет ту же роль, что число Фидлера в классической теории графов: оно определяет скорость диффузии состояний и достижимость глобально согласованного решения [11]. В математике и теории управления разработаны конструкции *sheaf*-моделей динамических систем, где пучки задают согласованность локальных динамик и наблюдений на графах и более общих топологических пространствах [10]. В обзорных работах по вычислительной теории пучков показано, что когомологии пучков служат удобным инструментом для выявления структурных «дыр» и обструкций к глобальной согласованности [16–18].

Применительно к экономике ключевым шагом стала *sheaf*-модель общего равновесия, в которой локальные рынки представляются как открытые множества топологического пространства, глобальное равновесие трактуется как секция пучка, а первая когомология  $H^1$  интерпретируется как мера координационных разрывов [19]. В области многоагентных систем разработаны модели динамики мнений (англ. *opinion dynamics*), в которых пучковый лапласиан описывает процессы диффузии состояний по сложным графам: показано, что спектральные свойства этого оператора непосредственно связаны со скоростью и возможностью достижения согласованного состояния [12]. Параллельно развивается категориальный аппарат для работы с временными данными: в подходе «нарративов» эволюция системы во времени представляется в виде пучков на частично упорядоченных множествах временных интервалов, что позволяет формализовать согласованность данных не только по пространству, но и по времени [13].

Вместе с тем во всех перечисленных работах карты ограничения пучка — параметры, описывающие «когнитивный зазор» между агентами, то есть то, с каким структурным расхождением каждый агент интерпретирует стратегический вектор своего контрагента, — либо задаются аналитически для модельных примеров, либо определяются экспертно. Вопрос об их эмпирической идентификации из наблюдаемых данных не ставится ни в одной из упомянутых работ, что принципиально ограничивает практическую верифицируемость пучковых моделей. Наиболее близкой по духу является работа Л. ди Нино и др. [31], в которой карты ограничения пучка инференцируются из наблюдаемых данных через оптимизацию нормы Фробениуса пучкового лапласиана. Однако указанная работа не рассматривает темпоральное измерение, не использует  $H^1$  как диагностическую меру координационных разрывов и относится к задачам обработки сигналов на графах, а не к экономическим системам. Между тем в многомерной статистике давно разработан инструмент, точно решающий эту задачу: ортогональный метод Прокруста находит

оптимальную матрицу поворота, сближающую два набора векторов при ограничении на ортогональность преобразования. Классическое SVD-решение этой задачи предложено П.Х. Шёнemannом [20], а его обобщения и приложения систематически изложены в [21, 22], а также в стандартном учебнике многомерного анализа. Применение метода Прокруста для калибровки карт ограничения в экономических пучковых моделях до настоящего времени не предпринималось.

Спектральные свойства пучкового лапласиана связаны со скоростью и возможностью достижения согласованного состояния в распределенных системах управления и мультиагентных сетях [23, 24]. В более поздних работах sheaf-модель применяется к анализу причинно-следственной структуры и устойчивости распределенных вычислительных и технических систем, где кохомологии пучков интерпретируются как обструкции к достижению глобально согласованных решений [29, 30].

При этом автором не обнаружены работы, которые одновременно:

- рассматривали бы адаптивные экономические системы как пространственно фрагментированные и темпорально развивающиеся объекты;
- описывали бы темпоральную несогласованность стратегий с использованием кохомологий пучков на произведении пространства состояний и времени;
- связывали бы такую кохомологическую диагностику с конкретным механизмом адаптации на основе динамики пучкового лапласиана.

Таким образом, несмотря на наличие развитого аппарата в классической теории равновесия [1], теории платформ [3], системной динамике [4–6] и развивающемся направлении sheaf-моделей распределенных систем [10–12], комплексная теоретико-категорная модель темпоральной динамики адаптивных экономических систем с эмпирически верифицируемыми параметрами остается практически не разработанной.

### ***Цель и задачи исследования***

Целью исследования является разработка математической модели адаптивных экономических систем на основе аппарата теории пучков, позволяющего строго формализовать темпоральную согласованность стратегий распределенных агентов и механизмы возврата системы к координированному состоянию после нарушений. Для этого используется аппарат теории пучков, который в более общей форме уже применялся в экономике и теории динамических систем [1, 4, 13].

*Объектом исследования* выступают адаптивные экономические системы — цифровые платформы, в которых множество акторов непрерывно перестраивает свое поведение под воздействием внешних и внутренних изменений. *Предметом исследования* является структура темпоральной согласованности и несогласованности локальных стратегий агентов таких систем — как в пространстве взаимодействий между подсистемами, так и во времени между различными этапами развития, — описываемая через конструкции теории пучков, кохомологии и пучковый лапласиан.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

- 1) показать, почему классических инструментов — моделей равновесия, системной динамики и теории платформ — недостаточно для описания ситуаций, когда стратегии агентов расходятся во времени [1, 3, 5].
- 2) построить модель, которая одновременно описывает пространство взаимодействий между агентами и динамику его изменения во времени, обеспечивая тем самым формализацию количественной меры темпоральной несогласованности [10, 13].
- 3) разработать способ извлечения параметров модели непосредственно из наблюдаемых данных о стратегиях агентов с помощью ортогонального метода Прокруста, что обеспечит эмпирическую верифицируемость всей конструкции [20, 22].



4) описать то, как система адаптируется и возвращается к согласованному состоянию после шока, и установить связи между структурными параметрами модели и скоростью этого восстановления [11, 12].

5) проверить предложенную модель на реальных данных цифровой платформы за второе полугодие 2025 г. и продемонстрировать, как модель воспроизводит наблюдаемые фазы координации и рассогласования агентов.

### Материалы и методы

Статья опирается на аппарат теории пучков для описания координации в экономических системах. Адаптивная экономическая система моделируется как топологическое пространство  $(X, \tau)$ , где открытые множества  $U \subseteq X$  соответствуют локальным рынкам или группам агентов [15]. Пучок  $E$  на  $X$  каждому  $U$  ставит множество допустимых локальных конфигураций  $E(U)$ , а вложению  $U \subseteq V$  — карту ограничения  $\rho_{U,V}: E(V) \rightarrow E(U)$ , обеспечивающую согласованность на пересечениях. Интуитивно это понимается таким образом, что если у нас есть описание состояния всей системы на большем множестве  $V$ , то через оператор  $\rho_{U,V}$  мы можем «посмотреть», как это состояние выглядит внутри меньшей области  $U$ .

Ключевое свойство пучка формулируется через аксиому склеивания. Если пространство  $X$  покрыто семейством открытых множеств  $\{U_i\}$ , на каждом из них задана локальная стратегия  $s_i \in E(U_i)$  и на всех пересечениях выполняется условие согласованности  $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ , то существует единственная глобальная стратегия  $s \in E(X)$ , такая, что  $\rho_{U_i, X}(s) = s_i$  для всех  $i$ . В рамках экономической интерпретации это означает: если стратегии всех подсистем совместимы на стыках, то они могут быть реализованы как стратегия всей системы в целом.

Для анализа ситуаций, когда локальные стратегии не удастся собрать в единую глобальную картину, используется аппарат когомологий пучков. Нулевая когомология  $H^0(X, E)$  описывает множество глобальных секций, то есть всех стратегий, согласованных на всем пространстве сразу. Первая когомология  $H^1(X, E)$  интерпретируется как мера обструкций к склеиванию: ненулевой элемент в  $H^1$  указывает на то, что существует конфигурация локальных стратегий, которые выглядят согласованными попарно, но не могут быть реализованы как единая глобальная стратегия. В самом простом виде это можно записать как условие: если  $H^1(X, E) = 0$ , то любая локально согласованная система стратегий склеивается в глобальную, а если  $H^1(X, E) \neq 0$ , то в структуре системы присутствуют неустраняемые разрывы координации.

Центральной методологической проблемой применения пучкового аппарата к реальным экономическим данным является операциональная идентификация карт ограничения  $\rho_{e \leftarrow v}: F(v) \rightarrow F(e)$ . В теоретических работах эти карты либо задаются аналитически, либо определяются экспертно, что принципиально ограничивает эмпирическую верификацию результатов. В настоящей работе карты ограничения идентифицируются непосредственно из наблюдаемых стратегических данных агентов с помощью ортогонального метода Прокруста.

Задача ортогонального метода Прокруста формулируется следующим образом. Пусть для пары агентов  $(v_i, v_j)$ , соединенных ребром  $e_{ij}$ , наблюдаются временные ряды стратегических векторов, организованные в матрицы  $A \in \mathbb{R}^{k \times T}$  и  $B \in \mathbb{R}^{k \times T}$  соответственно, где  $k$  — размерность стратегического пространства,  $T$  — число периодов наблюдения. Требуется найти ортогональную матрицу  $R \in O(k)$ , минимизирующую норму Фробениуса:

$$R^* = \arg \min_{R \in O(k)} \|B - RA\|_F.$$

Классическое решение этой задачи получается через сингулярное разложение матрицы  $M = B^T A = U \Sigma V^T$ , после чего оптимальная матрица имеет вид  $R^* = UV^T$ . Это результат впервые

доказан П.Х. Шёнеманном [20] и обобщен Дж.К. Гауэром на случай нескольких матриц (обобщенный анализ Прокруста) [21, 22]. Алгоритм Кабша–Умеямы, широко применяемый в структурной биоинформатике и компьютерном зрении, представляет собой частный случай той же процедуры для трехмерных конфигураций.

Выбор метода Прокруста для идентификации карт ограничения обоснован рядом теоретических соображений. Во-первых, ортогональные матрицы сохраняют нормы и скалярные произведения, что соответствует интерпретации карты ограничения как «правила перевода» стратегического вектора без изменения его масштаба, — только направление интерпретации меняется. Во-вторых, угол  $\theta_{ij} = \arctan(R_{10}^*/R_{00}^*)$ , получаемый из оптимальной матрицы, характеризует «когнитивный зазор» — расхождение систем координат, в которых агенты интерпретируют общее стратегическое пространство. В-третьих, минимизация нормы Фробениуса в классе ортогональных матриц обеспечивает единственность и статистическую оптимальность оценки.

Для каждого ребра  $e_{ij} \in E$  процедура включает четыре шага:

- 1) нормализацию временных рядов по z-score;
- 2) компоновку нормализованных векторов в матрицы  $A$  и  $B$ ;
- 3) сингулярное разложение  $M = B^T A = U \Sigma V^T$ ;
- 4) построение оптимальной матрицы  $R_{ij}^* = UV^T$  и извлечение угла  $\theta_{ij}$ .

Чтобы учесть временную динамику, рассматривается не только пространство агентов  $X$ , но и упорядоченное множество временных интервалов  $I$ . Вводится категория временных интервалов, элементы которой — отрезки вида  $[a, b]$ , а морфизмы соответствуют вложениям одного интервала в другой [13]. Темпоральный экономический пучок  $F$  определяется на произведении  $X \times I$  и каждой паре (локальная область  $U$ , временной интервал  $[a, b]$ ) ставит в соответствие множество конфигураций  $F([a, b], U)$  — стратегий, действующих на  $U$  в течение периода  $[a, b]$ .

Требования согласованности теперь относятся как к пространству, так и ко времени. По пространству они означают, что стратегии на соседних рынках должны совпадать на их пересечениях, по времени — что стратегии, заданные на двух последовательных интервалах  $[a, p]$  и  $[p, b]$ , должны стыковаться в момент  $p$ , чтобы определить единую стратегию на всем промежутке  $[a, b]$ . Глобальная темпоральная конфигурация системы в такой модели — это глобальная секция пучка  $F$  на всем множестве  $X \times I$ . Ее существование или отсутствие количественно характеризуется первой когомологией  $H^1(X \times I, F)$ : при  $H^1(X \times I, F) = 0$  любая локально согласованная по пространству и времени система траекторий может быть собрана в единый «нарратив» развития, а при  $H^1(X \times I, F) \neq 0$  остаются темпоральные разрывы, которые невозможно устранить локальными изменениями в отдельных подсистемах или на отдельных временных участках.

Для описания того, как система может выходить из состояния рассогласованности, используется понятие пучкового лапласиана. В случае графа взаимодействий  $G = (V, E)$  с заданным на нем пучком  $F$  строится матрица  $\delta$ , обобщающая матрицу инцидентности графа, и на ее основе определяется оператор  $L_F = \delta^T \delta$  [12]. Этот оператор измеряет, насколько сильно отличаются состояния соседних вершин с учетом заданных правил сопоставления. Энергия рассогласования может быть записана в виде квадратичной формы  $\langle x, L_F x \rangle$ , где вектор  $x$  собирает в себе состояния всех агентов. Чем больше эта энергия, тем сильнее напряжение между локальными стратегиями.

Динамика адаптации в стилизованной модели описывается уравнением диффузионного типа

$$\frac{dx(t)}{dt} = -L_F x(t) + g(t),$$

где  $x(t)$  — вектор состояний агентов во времени,  $L_F$  — пучковый лапласиан, а  $g(t)$  — внешние воздействия. При отсутствии внешних шоков ( $g(t) = 0$ ) решения этого уравнения стремятся к



подпространству, где  $L_F x = 0$ , то есть к состояниям минимального рассогласования [25, 26]. Скорость сходимости определяется спектральными характеристиками  $L_F$ , в первую очередь величиной второго по величине собственного значения, которое играет роль показателя «скорости восстановления координации» после нарушений.

В численном примере, рассматриваемом в разделе «Результаты и обсуждение», все конструкции реализуются в конечномерном виде: пространство агентов представлено полным графом  $K_3$ , пучок задается двумерными векторными пространствами на вершинах и ребрах, карты ограничения идентифицируются из реальных недельных данных методом Прокруста, кохомология  $H^0$  вычисляется по конечному комплексу Чеха, а динамика  $\dot{x} = -L_F x + g(t)$  моделируется стандартными методами решения дифференциальных уравнений. Это позволяет наглядно показать, как предложенный теоретико-категорный аппарат с эмпирически верифицированными параметрами фиксирует появление и исчезновение разрывов координации в адаптивной экономической системе.

### Результаты и обсуждение

Эмпирическую основу раздела составляют недельные операционные данные реальной цифровой платформы за период с 1 июля по 31 декабря 2025 г. (недели W27–W52, 26 наблюдений). Исходные данные приведены в Приложении А.2. В качестве трех агентов, чьи стратегии подлежат формализации в рамках клеточного пучка, выступают: поставщик товаров  $v_1$ , маркетплейс-оператор  $v_2$  и логистический оператор  $v_3$ . Каждому агенту сопоставляется двумерный вектор стратегических параметров, наблюдаемых еженедельно: поставщику – маржа продаж и широта ассортимента (SKU), маркетплейсу – комиссионная ставка и доля скидочного оборота в общем объеме оборота товаров (GMV), логистическому оператору – тариф доставки и число обработанных заказов как прокси скорости обработки.

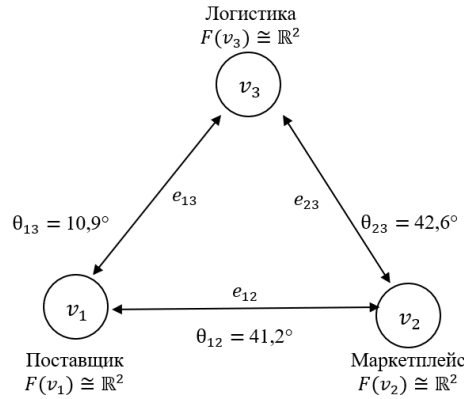
Перед построением пучка все шесть временных рядов нормализованы по z-score, что устраняет различие в единицах измерения и масштабах и позволяет корректно сравнивать направления стратегических векторов. Тем самым каждая неделя  $t$  порождает вектор состояния системы  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ , компонентами которого служат нормализованные стратегические параметры трех агентов.

Центральным параметром клеточного пучка является набор карт ограничения  $\rho_{e \leftarrow v}: F(v) \rightarrow F(e)$ , которые описывают, с каким «когнитивным зазором» каждый агент интерпретирует стратегический вектор своего контрагента. В отличие от моделей, в которых карты ограничения задаются произвольно, в настоящей работе углы  $\theta_{ij}$  калибруются из наблюдаемых данных с помощью ортогонального метода Прокруста. Для каждого ребра графа  $G$  находится ортогональная матрица  $R$ , минимизирующая норму разности  $\|B - RA\|_F$ , где  $A$  и  $B$  – матрицы, столбцами которых являются наблюдаемые стратегические векторы двух смежных агентов. Угол поворота извлекается из оптимальной матрицы  $R$  стандартным образом:  $\theta = \arctan(R_{10}/R_{00})$ . Выбор метода Прокруста обеспечивает идентификацию именно ортогонального (то есть сохраняющего нормы) компонента несоответствия стратегий, что соответствует теоретической постановке раздела «Материалы и методы».

Полученные эмпирические оценки углов фиксируют значимое структурное рассогласование (рис. 1). Маркетплейс и оба его контрагента демонстрируют значительный когнитивный зазор, тогда как логистический оператор поддерживает существенно более прямую операционную связь с поставщиком, чем с маркетплейсом. Полный набор откалиброванных карт ограничения приведен в Приложении А.1.

### Диагностика структурного рассогласования

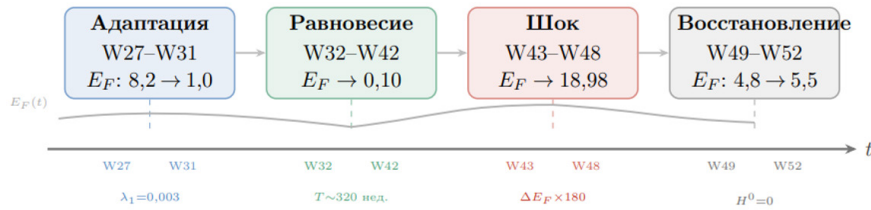
На основе откалиброванных карт ограничения строится пучковый лапласиан  $L = D^\top D$ , где  $D$  – кобаундарный оператор полного графа  $K_3$ . Спектр оператора содержит шесть значений:  $\lambda_1 =$



Источник: создано автором.

Рис. 1. Граф взаимодействий с клеточным пучком  $F$

Fig. 1. Interaction graph with cell sheaf  $F$



Источник: создано автором.

Рис. 2. Четыре фазы жизненного цикла рассогласования на цифровой платформе

Fig. 2. Four phases of the digital platform misalignment life cycle

$= \lambda_2 = 0,0031$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 2,90$ ,  $\lambda_5 = \lambda_6 = 3,10$ . Строгая положительность  $\lambda_1$  означает  $H^0(G; F) = 0$ : нулевая пучковая когомология тривиальна, а состояние полной одновременной координации всех агентов топологически исключено при сложившейся архитектуре взаимодействий.

Из наименьшего собственного значения следует характерный горизонт релаксации:  $T \sim 1/\lambda_1 \approx \approx 320$  недель. Без целенаправленного изменения карт ограничения — пересмотра контрактных условий или форматов обмена данными — платформа не восстановит координацию самостоятельно.

Для количественной оценки рассогласования в каждой из 26 наблюдаемых недель вычислялась энергия Дирихле:

$$E_F(x(t)) = \frac{1}{2} x(t)^\top L x(t).$$

На наблюдаемом горизонте W27–W52 выделяются четыре фазы (рис. 2). В фазе адаптации (W27–W31)  $E_F$  убывает с 8,23 до 0,98 — в соответствии с экспоненциальной релаксацией по медленнейшей собственной моде. В фазе равновесия (W32–W42) рассогласование минимально: среднее  $E_F = 2,09$ , абсолютный минимум  $E_F = 0,10$  достигнут в W42. Данная точка является наилучшим достижимым распределением при заданной структуре пучка и принимается за точку отсчета.



Источник: создано автором.

Рис. 3. Динамика энергии рассогласования  $E_F(t)$  по неделям W27–W52

Fig. 3. Dynamics of the mismatch energy  $E_F(t)$  by weeks W27–W52

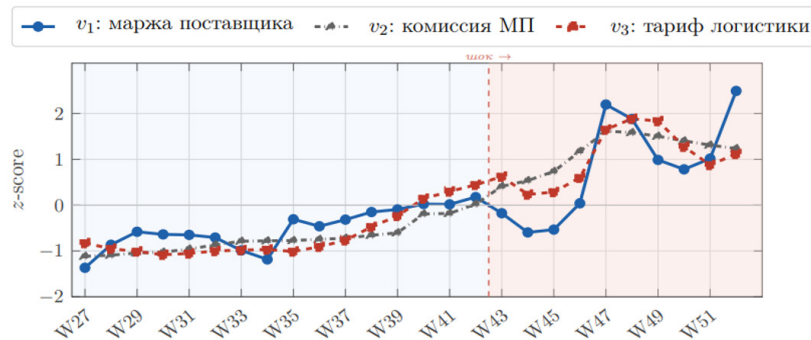


Рис. 4. Нормализованные стратегические параметры агентов  $v_1, v_2, v_3$

Fig. 4. Normalized strategic parameters of agents  $v_1, v_2, v_3$

С W43 фиксируется экзогенный шок (рис. 3): маркетплейс повысил комиссию с 0,24 до 0,33 (+37,5%), логистический оператор поднял тариф с 91 до 158 единиц (+73%), объем GMV почти утроился на фоне предновогоднего спроса (рис. 4). Стратегический вектор агента  $v_3$  претерпевает скачок,  $E_F$  немедленно возрастает. Пики зафиксированы в W47 ( $E_F = 15,75$ ) и W52 ( $E_F = 18,98$ ) – оба более чем в 180 раз превышают минимум W42. Среднее по шокующему периоду W43–W52 составляет  $E_F = 6,55$ , что в 3,1 раза выше стабильного уровня W27–W42. Умеренное снижение до 3,81 в W50 свидетельствует о начале фазы восстановления, однако выход на новое равновесие в рамках наблюдаемого периода не достигается.

#### Диагностические инструменты и границы применимости

Сопоставление теоретической модели с эмпирической калибровкой подтверждает качественную адекватность модели:  $H^0 = 0$  верифицировано спектрально, щель строго положительна,  $E_F$  убывает в отсутствие шоков и резко возрастает при внешнем воздействии.

Тем не менее содержательная интерпретация полученных количественных оценок требует явного указания на условия, при которых они справедливы (табл. 1). На протяжении всего периода наблюдения карты ограничения принимались неизменными; между тем скользящий пересчет  $\lambda_1$  по четырехнедельным окнам обнаруживает существенный дрейф – от  $\sim 10^{-8}$  в W32 до  $\sim 1,5 \times 10^{-2}$  в W47, – что указывает на нестационарность реальных карт ограничения и обосновывает необходимость темпорального расширения модели посредством конструкции пучка на  $X \times I$ . Помимо этого, второй стратегический параметр логистического агента измерялся через

**Таблица 1. Результаты пучковой диагностики координации цифровой платформы**  
**Table 1. Results of sheaf-based coordination diagnostics for the digital platform**

| Диагностический инструмент | Результат    | Интерпретация                       |
|----------------------------|--------------|-------------------------------------|
| $H^0(G; F)$                | 0            | Глобальная секция отсутствует       |
| $\lambda_1$                | 0,0031       | $T \sim 320$ недель до координации  |
| $\theta_{12}$              | $41,2^\circ$ | Высокий зазор маркетплейс—поставщик |
| $\theta_{23}$              | $42,6^\circ$ | Высокий зазор логистика—маркетплейс |
| $\theta_{13}$              | $10,9^\circ$ | Низкий зазор логистика—поставщик    |
| $E_F$ в норме              | 2,09 (ср.)   | Базовый уровень рассогласования     |
| $E_F$ при шоке             | 6,55 (ср.)   | Рост рассогласования $\times 3,1$   |

Источник: создано автором.

прокси-переменную (число заказов вместо скорости обработки), что систематически занижает оценку  $\theta_{13} = 10,9^\circ$ ; данную величину следует трактовать как нижнюю границу реального когнитивного зазора по соответствующему каналу. Наконец, наблюдаемая выборка охватывает один сезонный цикл — объем, достаточный для качественной верификации теоретических выводов, однако не позволяющий получить устойчивые оценки стационарных параметров модели.

### Заключение

В ходе проведенного исследования получены следующие основные результаты:

1. Систематизированы ограничения классических подходов — моделей общего равновесия, системной динамики и теории двусторонних рынков — и показано, что ни один из них не располагает строгим критерием для оценки условий глобальной согласованности локальных стратегий агентов во времени и пространстве.

2. Разработана математическая модель темпоральной динамики адаптивных экономических систем на основе теории пучков: темпоральный экономический пучок определен на произведении  $X \times I$ , первая когомология  $H^1(X \times I, F)$  формализована как количественная мера обструкции к глобальной координации, объединяющая пространственное и темпоральное измерения.

3. Разработана процедура эмпирической калибровки параметров модели: карты ограничения идентифицированы из наблюдаемых данных посредством ортогонального метода Прокруста [20–22]; для исследуемой платформы получены оценки когнитивных зазоров  $\theta_{12} = 41,2^\circ$ ,  $\theta_{23} = 42,6^\circ$ ,  $\theta_{13} = 10,9^\circ$ , что обеспечивает эмпирическую верифицируемость модели.

4. Описана динамика адаптации как диффузионный процесс убывания энергии Дирихле; установлена связь спектральной щели  $\lambda_1 = 0,0031$  с характерным горизонтом восстановления координации  $T \sim 320$  недель. Спектральная щель интерпретирована как операциональный индикатор управляемости платформы: ее увеличение через реструктуризацию карт ограничения сокращает время возврата системы к согласованному состоянию.

5. Проведена эмпирическая апробация на операционных данных реальной цифровой платформы; качественная структура модели воспроизведена в полном объеме:  $H^0(G; F) = 0$ , спектральная щель строго положительна, энергия рассогласования убывает в отсутствие шоков и резко возрастает при экзогенном воздействии с трехкратным превышением стабильного уровня.

Совокупность полученных результатов восполняет методологический пробел на пересечении теории пучков, экономики координации и эмпирического анализа платформенных экосистем

и открывает перспективы для разработки управленческих механизмов на основе спектральных характеристик пучкового лапласиана.

#### **Направления дальнейших исследований**

Выявленные ограничения определяют три направления продолжения работы.

Первое связано с переходом к нестационарным картам ограничения: адаптивная переоценка по скользящим окнам позволит отслеживать структурные изменения в поведении агентов в реальном времени.

Второе направление состоит в разработке механизмов управления спектральной щелью лапласиана посредством реструктуризации контрактных условий и форматов обмена данными — задача, аналитически обозначенная в настоящей работе, однако требующая самостоятельного рассмотрения.

Третье направление предполагает апробацию модели на системах с большим числом агентов и более высокой размерностью стратегических пространств с целью верификации масштабируемости метода и установления границ его применимости при управлении крупными цифровыми экосистемами [10, 11].

### **Приложение А. Исходные данные и откалиброванные параметры**

#### **Приложение А.1. Откалиброванные карты ограничения (метод Прокруста)**

**Table A.1. Calibrated constraint maps (Procrustes method)**

| Ребро    | Карта от вершины         | Матрица $R$      | Угол $\theta$ |
|----------|--------------------------|------------------|---------------|
| $e_{12}$ | $v_1 \rightarrow e_{12}$ | $I_2$            | $0^\circ$     |
| $e_{12}$ | $v_2 \rightarrow e_{12}$ | $R(\theta_{12})$ | $41,2^\circ$  |
| $e_{23}$ | $v_2 \rightarrow e_{23}$ | $I_2$            | $0^\circ$     |
| $e_{23}$ | $v_3 \rightarrow e_{23}$ | $R(\theta_{23})$ | $42,6^\circ$  |
| $e_{13}$ | $v_1 \rightarrow e_{13}$ | $I_2$            | $0^\circ$     |
| $e_{13}$ | $v_3 \rightarrow e_{13}$ | $R(\theta_{13})$ | $10,9^\circ$  |

Источник: создано автором.

#### **Приложение А.2. Недельные операционные данные платформы (W27–W52, 2025)**

**Table A.2. Weekly platform operating data (W27–W52, 2025)**

| Отчет по товарам за период 2025-07-01 – 2025-12-31 |                |           |                  |                   |                |               |                   |                    |                   |
|----------------------------------------------------|----------------|-----------|------------------|-------------------|----------------|---------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| Период                                             | Комиссия<br>МП | GMV       | Скидка<br>МП/GMV | Маржа<br>продавца | SKU<br>ассорт. | Лог.<br>тариф | Кол-во<br>заказов | Неделя<br>(начало) | Неделя<br>(конец) |
| 202527                                             | 0,1308         | 1146263   | 0,1198           | 85145             | 1501           | 91,51         | 1501              | 2025-07-01         | 2025-07-06        |
| 202528                                             | 0,1326         | 1553371   | 0,1197           | 1151999           | 2102           | 88,49         | 2102              | 2025-07-07         | 2025-07-13        |
| 202529                                             | 0,1361         | 1776939   | 0,1139           | 1321747           | 2325           | 87,06         | 2325              | 2025-07-14         | 2025-07-20        |
| 202530                                             | 0,1375         | 1730095   | 0,1125           | 1287148           | 2281           | 85,31         | 2281              | 2025-07-21         | 2025-07-27        |
| 202531                                             | 0,1425         | 1 733 593 | 0,1126           | 1280777           | 2270           | 85,98         | 2270              | 2025-07-28         | 2025-08-03        |
| 202532                                             | 0,1492         | 1698373   | 0,1112           | 1245977           | 2165           | 87,27         | 2165              | 2025-08-04         | 2025-08-10        |
| 202533                                             | 0,1551         | 1477644   | 0,1093           | 1078199           | 1840           | 87,78         | 1840              | 2025-08-11         | 2025-08-17        |

Окончание таблицы 2

| Период | Комиссия<br>МП | GMV     | Скидка<br>МП/GMV | Маржа<br>продавца | SKU<br>ассорт. | Лог.<br>тариф | Кол-во<br>заказов | Неделя<br>(начало) | Неделя<br>(конец) |
|--------|----------------|---------|------------------|-------------------|----------------|---------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 202534 | 0,1556         | 1323555 | 0,1131           | 961192            | 1699           | 88,09         | 1699              | 2025-08-18         | 2025-08-24        |
| 202535 | 0,1562         | 2115240 | 0,1370           | 1484813           | 3330           | 87,02         | 3330              | 2025-08-25         | 2025-08-31        |
| 202536 | 0,1581         | 1993647 | 0,1384           | 1393043           | 3081           | 89,54         | 3081              | 2025-09-01         | 2025-09-07        |
| 202537 | 0,1599         | 2113550 | 0,1351           | 1479894           | 3071           | 92,97         | 3071              | 2025-09-08         | 2025-09-14        |
| 202538 | 0,1646         | 2262281 | 0,1326           | 1578967           | 2997           | 100,13        | 2997              | 2025-09-15         | 2025-09-21        |
| 202539 | 0,1686         | 2309620 | 0,1284           | 1612445           | 2799           | 105,95        | 2799              | 2025-09-22         | 2025-09-28        |
| 202540 | 0,1989         | 2472634 | 0,1157           | 1683109           | 2484           | 115,15        | 2484              | 2025-09-29         | 2025-10-05        |
| 202541 | 0,1998         | 2474341 | 0,1169           | 1678570           | 2431           | 118,96        | 2431              | 2025-10-06         | 2025-10-12        |
| 202542 | 0,2147         | 2676171 | 0,1176           | 1773902           | 2569           | 122,48        | 2569              | 2025-10-13         | 2025-10-19        |
| 202543 | 0,2432         | 2456124 | 0,1152           | 1563196           | 2230           | 126,88        | 2230              | 2025-10-20         | 2025-10-26        |
| 202544 | 0,2525         | 2102772 | 0,1177           | 1313296           | 2109           | 117,32        | 2109              | 2025-10-27         | 2025-11-02        |
| 202545 | 0,2673         | 2174134 | 0,1067           | 1349660           | 1955           | 118,68        | 1955              | 2025-11-03         | 2025-11-09        |
| 202546 | 0,2997         | 2813235 | 0,0936           | 1692391           | 2085           | 126,26        | 2085              | 2025-11-10         | 2025-11-16        |
| 202547 | 0,3321         | 5280575 | 0,0983           | 2 980 462         | 3415           | 151,94        | 3415              | 2025-11-17         | 2025-11-23        |
| 202548 | 0,3297         | 4954193 | 0,1012           | 2792765           | 3181           | 157,69        | 3181              | 2025-11-24         | 2025-11-30        |
| 202549 | 0,3239         | 3988036 | 0,1045           | 2258945           | 2663           | 156,44        | 2663              | 2025-12-01         | 2025-12-07        |
| 202550 | 0,3164         | 3734545 | 0,1066           | 2135881           | 2788           | 142,77        | 2788              | 2025-12-08         | 2025-12-14        |
| 202551 | 0,3096         | 3962094 | 0,1109           | 2 275 572         | 3302           | 133,09        | 3302              | 2025-12-15         | 2025-12-21        |
| 202552 | 0,3040         | 5435719 | 0,1099           | 3158310           | 4300           | 138,91        | 4300              | 2025-12-22         | 2025-12-31        |

Источник: создано автором.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Arrow K.J., Debreu G. (1954) Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, 22 (3), 265–290. DOI: 10.2307/1907353
2. Milgrom P., Roberts J. (1990) Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities. *Econometrica*, 58 (6), 1255–1277. DOI: 10.2307/2938316
3. Rochet J.-C., Tirole J. (2003) Platform Competition in Two-Sided Markets. *Journal of the European Economic Association*, 1 (4), 990–1029. DOI: 10.1162/154247603322493212
4. Forrester J.W. (1961) *Industrial Dynamics*, Cambridge, MA: MIT Press.
5. Sterman J.D. (2000) *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World*, New York: McGraw-Hill/Irwin.
6. Tesfatsion L., Judd K.L. (2006) *Handbook of Computational Economics: Agent-Based Computational Economics*, vol. 2, Amsterdam: Elsevier North-Holland.
7. Tsai C.H., Zdravkovic J., Stirna J. (2022) Modeling Digital Business Ecosystems: A Systematic Literature Review. *Complex Systems Informatics and Modeling Quarterly*, 30, art. no. 168. DOI: 10.7250/csimq.2022-30.01
8. Evans D.S., Schmalensee R. (2016) *Matchmakers: The New Economics of Multisided Platforms*, Boston: Harvard Business Review Press.
9. Armstrong M. (2006) Competition in two-sided markets. *The RAND Journal of Economics*, 37 (3), 668–691. DOI: 10.1111/j.1756-2171.2006.tb00037.x
10. Schultz P., Spivak D.I., Vasilakopoulou C. (2020) Dynamical Systems and Sheaves. *Applied Categorical Structures*, 28 (4), 1–57. DOI: 10.1007/s10485-019-09565-x
11. Hansen J., Ghrist R. (2019) Toward a spectral theory of cellular sheaves. *Journal of Applied and Computational Topology*, 3 (4), 315–358. DOI: 10.1007/s41468-019-00038-7



12. Hansen J., Ghrist R. (2021) Opinion Dynamics on Discourse Sheaves. *arXiv:2005.12798*. DOI: 10.48550/arXiv.2005.12798
13. Bumpus B.M., Fairbanks J., Karvonen M., Leal W., Simard F. (2025) Towards a Unified Theory of Time-Varying Data. *arXiv:2402.00206v3*. DOI: 10.48550/arXiv.2402.00206
14. Ghrist R. (2008) Barcodes: The persistent topology of data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45 (1), 61–75. DOI: 10.1090/S0273-0979-07-01191-3
15. Robinson M. (2014) *Topological Signal Processing*, Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-36104-3
16. Barbarossa S., Sardellitti S. (2020) Topological Signal Processing Over Simplicial Complexes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68, 2992–3007. DOI: 10.1109/TSP.2020.2981920
17. Riess H., Ghrist R. (2022) Cellular Sheaves of Lattices and the Tarski Laplacian. *arXiv:2007.04099*. DOI: 10.48550/arXiv.2007.04099
18. Lim L.-H. (2020) Hodge Laplacians on graphs. *arXiv:1507.05379*. DOI: 10.48550/arXiv.1507.05379
19. Bodnar C., Di Giovanni F., Chamberlain B.P., Liò P., Bronstein M.M. (2022) Neural Sheaf Diffusion: A Topological Perspective on Heterophily and Oversmoothing in GNNs. *arXiv:2202.04579v4*. DOI: 10.48550/arXiv.2202.04579
20. Schönemann P.H. (1966) A Generalized Solution of the Orthogonal Procrustes Problem. *Psychometrika*, 31 (1), 1–10. DOI: 10.1007/BF02289451
21. Ten Berge J.M.F. (1977) Orthogonal Procrustes Rotation for Two or More Matrices. *Psychometrika*, 42 (2), 267–276. DOI: 10.1007/BF02294053
22. Gower J.C., Dijksterhuis G.B. (2004) *Procrustes Problems*, Oxford: Oxford University Press. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198510581.001.0001
23. Teece D.J. (2007) Explicating Dynamic Capabilities: The Nature and Microfoundations of (Sustainable) Enterprise Performance. *Strategic Management Journal*, 28 (13), 1319–1350. DOI: 10.1002/smj.640
24. Tolstykh T., Gamidullaeva L., Shmeleva N. (2020) Elaboration of a Mechanism for Sustainable Enterprise Development in Innovation Ecosystems. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 6 (4), art. no. 95. DOI: 10.3390/joitmc6040095
25. Irajifar L., Chen H., Lak A., Sharifi A., Cheshmehzangi A. (2023) The nexus between digitalization and sustainability: A scientometrics analysis. *Heliyon*, 9 (5), art. no. e15172. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e15172
26. Гимранов Р.Д., Лугачев М.И., Тамбовцев В.Л. (2023) Динамические способности управленческих подразделений большой компании. *Вопросы регулирования экономики*, 14 (4), 31–47. DOI: 10.17835/2078-5429.2023.14.4.031-047
27. Sontag E.D. (2008) Input to State Stability: Basic Concepts and Results. In: *Nonlinear and Optimal Control Theory* (eds. P. Nistri, G. Stefani), Berlin, Heidelberg: Springer, 163–220. DOI: 10.1007/978-3-540-77653-6\_3
28. Mironchenko A., Prieur C. (2020) Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions. *arXiv:1910.01714*. DOI: 10.48550/arXiv.1910.01714
29. Smith W.K., Lewis M.W. (2011) Toward A Theory of Paradox: A Dynamic Equilibrium Model of Organizing. *Academy of Management Review*, 36 (2), 381–403. DOI: 10.5465/AMR.2011.59330958
30. O'Reilly C.A., Tushman M.L. (2013) Organizational Ambidexterity: Past, Present, and Future. *Academy of Management Perspectives*, 27 (4), 324–338.
31. Di Nino L., Barbarossa S., Di Lorenzo P. (2025) Learning Sheaf Laplacian Optimizing Restriction Maps. *arXiv:2501.19207v1*. DOI: 10.48550/arXiv.2501.19207
32. Даниленко К., Брусакова И. (2025) Анализ устойчивости адаптивной бизнес-модели цифрового предприятия в многокомпонентной среде. *Sustainable Development and Engineering Economics*, 18 (4), ст. № 5. DOI: 10.48554/SDEE.2025.4.5

## REFERENCES

1. Arrow K.J., Debreu G. (1954) Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, 22 (3), 265–290. DOI: 10.2307/1907353

2. Milgrom P., Roberts J. (1990) Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities. *Econometrica*, 58 (6), 1255–1277. DOI: 10.2307/2938316
3. Rochet J.-C., Tirole J. (2003) Platform Competition in Two-Sided Markets. *Journal of the European Economic Association*, 1 (4), 990–1029. DOI: 10.1162/154247603322493212
4. Forrester J.W. (1961) *Industrial Dynamics*, Cambridge, MA: MIT Press.
5. Sterman J.D. (2000) *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World*, New York: McGraw-Hill/Irwin.
6. Tesfatsion L., Judd K.L. (2006) *Handbook of Computational Economics: Agent-Based Computational Economics*, vol. 2, Amsterdam: Elsevier North-Holland.
7. Tsai C.H., Zdravkovic J., Stirna J. (2022) Modeling Digital Business Ecosystems: A Systematic Literature Review. *Complex Systems Informatics and Modeling Quarterly*, 30, art. no. 168. DOI: 10.7250/csimq.2022-30.01
8. Evans D.S., Schmalensee R. (2016) *Matchmakers: The New Economics of Multisided Platforms*, Boston: Harvard Business Review Press.
9. Armstrong M. (2006) Competition in two-sided markets. *The RAND Journal of Economics*, 37 (3), 668–691. DOI: 10.1111/j.1756-2171.2006.tb00037.x
10. Schultz P., Spivak D.I., Vasilakopoulou C. (2020) Dynamical Systems and Sheaves. *Applied Categorical Structures*, 28 (4), 1–57. DOI: 10.1007/s10485-019-09565-x
11. Hansen J., Ghrist R. (2019) Toward a spectral theory of cellular sheaves. *Journal of Applied and Computational Topology*, 3 (4), 315–358. DOI: 10.1007/s41468-019-00038-7
12. Hansen J., Ghrist R. (2021) Opinion Dynamics on Discourse Sheaves. *arXiv:2005.12798*. DOI: 10.48550/arXiv.2005.12798
13. Bumpus B.M., Fairbanks J., Karvonen M., Leal W., Simard F. (2025) Towards a Unified Theory of Time-Varying Data. *arXiv:2402.00206v3*. DOI: 10.48550/arXiv.2402.00206
14. Ghrist R. (2008) Barcodes: The persistent topology of data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45 (1), 61–75. DOI: 10.1090/S0273-0979-07-01191-3
15. Robinson M. (2014) *Topological Signal Processing*, Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-36104-3
16. Barbarossa S., Sardellitti S. (2020) Topological Signal Processing Over Simplicial Complexes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68, 2992–3007. DOI: 10.1109/TSP.2020.2981920
17. Riess H., Ghrist R. (2022) Cellular Sheaves of Lattices and the Tarski Laplacian. *arXiv:2007.04099*. DOI: 10.48550/arXiv.2007.04099
18. Lim L.-H. (2020) Hodge Laplacians on graphs. *arXiv:1507.05379*. DOI: 10.48550/arXiv.1507.05379
19. Bodnar C., Di Giovanni F., Chamberlain B.P., Liò P., Bronstein M.M. (2022) Neural Sheaf Diffusion: A Topological Perspective on Heterophily and Oversmoothing in GNNs. *arXiv:2202.04579v4*. DOI: 10.48550/arXiv.2202.04579
20. Schönemann P.H. (1966) A Generalized Solution of the Orthogonal Procrustes Problem. *Psychometrika*, 31 (1), 1–10. DOI: 10.1007/BF02289451
21. Ten Berge J.M.F. (1977) Orthogonal Procrustes Rotation for Two or More Matrices. *Psychometrika*, 42 (2), 267–276. DOI: 10.1007/BF02294053
22. Gower J.C., Dijksterhuis G.B. (2004) *Procrustes Problems*, Oxford: Oxford University Press. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198510581.001.0001
23. Teece D.J. (2007) Explicating Dynamic Capabilities: The Nature and Microfoundations of (Sustainable) Enterprise Performance. *Strategic Management Journal*, 28 (13), 1319–1350. DOI: 10.1002/smj.640
24. Tolstykh T., Gamidullaeva L., Shmeleva N. (2020) Elaboration of a Mechanism for Sustainable Enterprise Development in Innovation Ecosystems. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 6 (4), art. no. 95. DOI: 10.3390/joitmc6040095
25. Irajifar L., Chen H., Lak A., Sharifi A., Cheshmehzangi A. (2023) The nexus between digitalization and sustainability: A scientometrics analysis. *Heliyon*, 9 (5), art. no. e15172. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e15172
26. Gimranov R.D., Lugachev M.I., Tambovtsev V.L. (2023) Dynamic Abilities of Management Units in a Large Company. *Journal of Economic Regulation*, 14 (4), 31–47. DOI: 10.17835/2078-5429.2023.14.4.031-047
27. Sontag E.D. (2008) Input to State Stability: Basic Concepts and Results. In: *Nonlinear and Optimal Control Theory* (eds. P. Nistri, G. Stefani), Berlin, Heidelberg: Springer, 163–220. DOI: 10.1007/978-3-540-77653-6\_3



28. Mironchenko A., Prieur C. (2020) Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions. *arXiv:1910.01714*. DOI: 10.48550/arXiv.1910.01714
29. Smith W.K., Lewis M.W. (2011) Toward A Theory of Paradox: A Dynamic Equilibrium Model of Organizing. *Academy of Management Review*, 36 (2), 381–403. DOI: 10.5465/AMR.2011.59330958
30. O'Reilly C.A., Tushman M.L. (2013) Organizational Ambidexterity: Past, Present, and Future. *Academy of Management Perspectives*, 27 (4), 324–338.
31. Di Nino L., Barbarossa S., Di Lorenzo P. (2025) Learning Sheaf Laplacian Optimizing Restriction Maps. *arXiv:2501.19207v1*. DOI: 10.48550/arXiv.2501.19207
32. Danilenko K., Brusakova I. (2025) Sustainability analysis of an adaptive digital enterprise business model in a multi-component systems. *Sustainable Development and Engineering Economics*, 18 (4), art. no. 5. DOI: 10.48554/SDEE.2025.4.5

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT AUTHOR

**ДАНИЛЕНКО Кирилл Викторович**

E-mail: danilenko@kirill-viktorovich.ru

**Kirill V. DANILENKO**

E-mail: danilenko@kirill-viktorovich.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-7753-193X>

*Поступила: 28.03.2026; Одобрена: 15.06.2026; Принята: 15.06.2026.*

*Submitted: 28.03.2026; Approved: 15.06.2026; Accepted: 15.06.2026.*