Научная статья
УДК 534.16
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19206

СМЕШАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАНИЯ: ДЕЙСТВИЕ НА НИХ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ, ВЫЗЫВАЮЩЕГО АВТОКОЛЕБАНИЯ

А. А. Алифов ✉

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

✉ alishir@mail.ru

Аннотация. В работе изучены смешанные параметрические и автоколебания при наличии нелинейного параметрического воздействия и запаздывания в трении, вызывающего автоколебания. Для этого использована модель фрикционной автоколебательной системы, взаимодействующей с источником энергии ограниченной мощности. Решение нелинейных дифференциальных уравнений движения достигнуто методом прямой линеаризации. Получены соотношения между нестационарными и стационарными режимами колебаний. С применением критериев Рауса – Гурвица установлены условия устойчивости стационарных колебаний. Проведены расчеты с целью получения информации о динамике колебаний. Анализ полученных данных показал, что под действием запаздывания амплитудно-частотная зависимость изменяет свое поведение. Запаздывание приводит также к появлению участков устойчивости на нижних ветвях амплитудных кривых, и возникает зависимость от крутизны характеристики источника энергии.

Ключевые слова: нелинейность, параметрическое возбуждение, запаздывание, смешанные колебания, параметрические колебания, автоколебания, линеаризация

Финансирование: Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FFGU-2024-0018).

Для цитирования: Алифов А. А. Смешанные параметрические и автоколебания: действие на них нелинейного параметрического возбуждения и запаздывания, вызывающего автоколебания // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2026. Т. 19. № 2. С. 68–75. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19206

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19206

THE MIXED PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS: THE EFFECT OF NONLINEAR PARAMETRIC EXCITATION AND DELAYS ON THEM CAUSING SELF-OSCILLATIONS

A. A. Alifov ✉

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

✉ alishir@mail.ru

Abstract. In the paper, the mixed parametric and self-oscillations in the presence of a nonlinear parametric action and a delay in friction causing self-oscillations have been studied. For this purpose, a model of a frictional self-oscillating system interacting with an energy source of limited power was used. The solution of nonlinear differential equations of motion was constructed using the direct linearization method. The relations of nonstationary and stationary oscillation modes were obtained. By application of the Routh – Hurwitz criteria, the conditions for the stability of stationary oscillations were derived. The calculations were carried out in order to gain information about the dynamics of fluctuations. An analysis of the data showed that

© Алифов А. А., 2026. Издатель: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

the amplitude-frequency dependence changed its behavior under the influence of the delay. The latter also led to the appearance of stability regions on the lower branches of the amplitude curves, and a dependence arose on the steepness of the energy source characteristic.

Keywords: nonlinearity, parametric excitation, delay, mixed oscillations, parametric oscillations, self-oscillations, method, linearization, energy source

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment for Fundamental Research (Subject Code FFGU-2024-0018).

For citation: Alifov A. A., The mixed parametric and self-oscillations: The effect of nonlinear parametric excitation and delays on them causing self-oscillations, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 19 (2) (2026) 68–75. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19206

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Введение

Исследованию различных колебательных процессов посвящено большое число работ. По известной классификации, в теории колебаний выделяют четыре типа колебаний, которые образуют четыре класса смешанных (взаимодействие типов) колебаний [1 – 3]. К одному из классов смешанных колебаний относятся смешанные параметрические и автоколебания.

Цель настоящей работы – анализ смешанных параметрических и автоколебаний с учетом трех факторов: нелинейного параметрического возбуждения, запаздывания в трении, вызывающего автоколебания, и ограниченной мощности источника энергии.

Вопросы энергопотребления приобрели в современном мире большую актуальность, а запаздывание может присутствовать во многих системах [4 – 10].

Параметрические колебания, которые математически описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, могут возникать при функционировании различных систем. Работа [11] содержит многостороннее исследование параметрических колебаний при квадратичном параметрическом возбуждении.

В настоящей работе решение нелинейных дифференциальных уравнений смешанных параметрических и автоколебаний построено методом линеаризации и замены переменных с усреднением [17].

Уравнения движения

Рассмотрим смешанные параметрические и автоколебания на основе достаточно широко используемой схемы автоколебательной системы [1, 2, 15]. В этой схеме пружина (ее концы неподвижно закреплены) и демпфер соединены с телом, лежащим на ленте, непрерывно движущейся с определенной скоростью V. Параметры c_0 и γ – соответственно коэффициенты линейной и нелинейной частей силы упругости пружины; k_0 – коэффициент демпфирования (все три параметра – константы). Скорость V следует выражению $V = r_0\dot{\varphi}$. Тело обладает массой m и скоростью $\dot{x}$ по направлению движения x. Лента приводится в движение двигателем со скоростью $\dot{\varphi}$ вращения ротора и моментной характеристикой $M(\dot{\varphi})$, включающей силу сопротивления вращению. Между телом и лентой возникает сила трения $T(U)$, вызывающая автоколебания и зависящая от относительной скорости $U = r_0\dot{\varphi} - \dot{x}$.

Система дифференциальных уравнений, описывающая смешанные параметрические и автоколебания при нелинейном параметрическом возбуждении и запаздывании, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0 x = T(U_\Delta) - \gamma x^3 - bx^3\cos\nu t, \\ I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}) - r_0 T\left(U_\Delta\right), \end{gathered} \tag{1}$$

© Alifov A. A., 2026. Published by Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

где $bx^3\cos(\nu t)$ – слагаемое, выражающее нелинейное параметрическое возбуждение (b = const, ν = const); r_0 – радиус точки приложения силы трения (r_0 = const); U_Δ – относительная скорость ($U_\Delta = r_0\dot{\varphi} - \dot{x}_\Delta$, $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t-\Delta)$, Δ = const – запаздывание); I – момент инерции ротора двигателя, I = const.

Характеристику силы трения $T(U_\Delta)$ примем в виде

$$T\left(U_\Delta\right) = T_0\left(\operatorname{sgn} U_\Delta - \alpha_1 U_\Delta + \alpha_3 U_\Delta^3\right), \tag{2}$$

где T_0 – нормальная сила реакции (T_0 = const); коэффициенты α_1 и α_3 – константы; $\operatorname{sgn}(U_\Delta) = +1$ при $U_\Delta > 0$, $\operatorname{sgn}(U_\Delta) = -1$ при $U_\Delta < 0$.

В случае $U_\Delta = 0$ характеристика $T(0)$ лежит в интервале

$$-T_0 \le T(0) \le T_0.$$

Интересно отметить, что характеристика (2) имела место и при опытах в космических условиях [16].

С помощью метода прямой линеаризации [17 – 20] заменим выражение (2) функцией вида

$$T(U_\Delta) = T_0[\operatorname{sgn}(U_\Delta) + B_T + k_T\dot{x}],$$

где коэффициенты линеаризации B_T и k_T определяются выражениями

$$\begin{gathered} B_T = -\alpha_1 u + \alpha_3 u^3 + 3N_2\alpha_3 u p^2 a^2,\ k_T = -\alpha_3\bar{N}_3\left(p^2a^2 - h\right),\ h = 3\left(u_0^2 - u^2\right)/\bar{N}_3, \\ u_0^2 = \alpha_1/3\alpha_3,\ N_2 = \left(2r+1\right)/\left(2r+3\right),\ \bar{N}_3 = \left(2r+3\right)/\left(2r+5\right), \end{gathered} \tag{3}$$

$a = \max|x|$ – амплитуда.

Методом прямой линеаризации также заменим нелинейную часть силы упругости γx^3 линейной $c_f x$ с коэффициентом линеаризации $c_f = \bar{N}_3\gamma a^2$. Уравнения (1) с учетом линеаризации принимают вид

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c\,x = T_0\left(B_T + \operatorname{sgn} U_\Delta + k_T\dot{x}_\Delta\right) - bx^3\cos\nu t, \tag{4}$$

$$I\ddot{\varphi} = M\left(\dot{\varphi}\right) - r_0T_0\left(\operatorname{sgn} U_\Delta + B_T + k_T\dot{x}_\Delta\right),$$

где $c = c_0 + c_f$.

Решение уравнений и условия устойчивости стационарных колебаний

Решения (4) по методу замены переменных с усреднением [17] имеют, с учетом уравнения

$$\dot{x}_\Delta = -ap\sin(\psi - p\Delta),$$

следующий вид:

$$x = a\cos\psi,\ \dot{x}_\Delta = -ap\sin\psi,\ \psi = pt + \xi,\ p = \nu/2,\ \dot{\varphi} = \Omega. \tag{5}$$

Решения (4) для случаев $U_\Delta > 0$ и $U_\Delta < 0$ различны, и уравнения для определения нестационарных значений амплитуды a, фазы ξ колебаний и скорости u, которая следует выражению $u = r_0\Omega$, имеют следующий вид.

а) $u \ge ap$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm}\left(2aG - 0{,}5ba^3\sin 2\xi\right), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma}\left(2aW + ba^3\cos 2\xi\right), \end{aligned} \tag{6а}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{I}\left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 T_0\left(1 + B_T\right)\right]; \tag{6a}$$

b) $u < ap$:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{4pm}\left[2aG - 0.5ba^3 \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap}\sqrt{a^2p^2 - u^2}\right],$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{4pma}\left(2aW + ba^3 \cos 2\xi\right), \tag{6b}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{I}\left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 T_0\left(1 + B_T\right) - \frac{r_0 T_0}{\pi}\left(3\pi - 2\psi_*\right)\right],$$

где $\omega_0^2 = c_0/m$, $G = p[k_0 - T_0 k_T \cos(p\Delta)]$, $W = m(\omega_0^2 - p^2) + c_f - pT_0 k_T \sin p\Delta$, $\psi^* = 2\pi - \arcsin(u/ap)$.

Стационарные значения амплитуды и фазы определяются условиями $\dot{a} = 0, \dot{\xi} = 0$. В случае значений скорости $u \geq ap$ они находятся из соотношений

$$4(4G^2 + W^2) = b^2a^4, \operatorname{tg}(2\xi) = -2G/W,$$

а при $u < ap$ для стационарной амплитуды имеет место соотношение $a \approx u/p$.

Нагрузка на источник энергии со стороны колебательной системы определяется условием $\dot{u} = 0$, из которого следует соотношение

$$M(u/r) - S(a, u) = 0,$$

где

а) $u \geq ap$: $S(a, u) = r_0 T_0(1 + B_T)$;

б) $u < ap$: $S(a, u) = r_0 T_0[(1 + B_T) + \pi^{-1}(3\pi - 2\psi)]$.

Стационарные значения скорости u можно найти по точкам пересечения кривых $M(u/r)$ и $S(a, u)$.

Чтобы вывести условия устойчивости стационарных колебаний составляем уравнения в вариациях для уравнений (6) и, применяя критерии Рауса – Гурвица, получаем:

$$B_1 > 0, B_3 > 0, B_1B_2 - B_3 > 0, \tag{7}$$

где $B_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$, $B_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$, $B_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{22}b_{13}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$.

В случае $u \geq ap$ имеем:

$$b_{11} = \frac{r_0}{I}\left(Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u}\right), b_{12} = -6I^{-1}r_0^2 T_0 N_2 \alpha_3 u a p^2, b_{13} = 0,$$

$$b_{21} = -3m^{-1}T_0 a\alpha_3 u \cdot \cos\left(p\Delta\right),$$

$$b_{22} = -\frac{1}{4pm}\left\{2p\left[k_0 + T_0\bar{N}_3\alpha_3\left(3a^2p^2 - h\right)\cos\left(p\Delta\right)\right] - \frac{3}{2}ba^2 \sin 2\xi\right\},$$

$$b_{23} = \frac{ba^3}{4pm}\cos 2\xi, b_{31} = -3m^{-1}T_0\alpha_3 u \cdot \sin\left(p\Delta\right),$$

$$b_{32} = \frac{1}{2pm}\left\{\bar{N}_3 a\left[\gamma + 2T_0\alpha_3 p^3 \sin\left(p\Delta\right)\right] + ba\cos 2\xi\right\}, b_{33} = -\frac{ba^3}{2pma}\sin 2\xi,$$

$$\frac{\partial B_T}{\partial u} = -\left(\alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - 3\alpha_3 N_2 a^2 p^2\right), \frac{\partial k_T}{\partial a} = -2\bar{N}_3\alpha_3 a p^2,$$

где $Q = \dfrac{d}{du} M\left(\dfrac{u}{r_0}\right)$.

В случае $u < ap$ имеют место следующие коэффициенты:

$$b_{11} = \frac{r_0}{I}\left[Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u} - \frac{2 r_0 T_0}{\pi\sqrt{a^2 p^2 - u^2}}\right],$$

$$b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I}\left[\frac{\partial B_T}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a\sqrt{a^2 p^2 - u^2}}\right],$$

$$b_{21} = -\frac{auT_0}{m}\left[3\alpha_3 \cos(p\Delta) - \frac{2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}}\right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{4pm}\left\{2p\left[k_0 + T_0 \bar{N}_3 \alpha_3 \left(3a^2 p^2 - h\right)\cos(p\Delta)\right] - \frac{3}{2} b a^2 \sin 2\xi\right\} - \frac{2T_0 u^2}{\pi m a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}},$$

а коэффициенты b_{13}, b_{23}, b_{31}, b_{33} не изменяются.

Расчеты стационарных режимов колебаний

Для проведения расчетов были выбраны следующие значения параметров:

$$m = 9{,}8\ \text{Н}\cdot\text{с}^2\cdot\text{см}^{-1},\ k_0 = 0{,}196\ \text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1},\ c_0 = \text{Н}\cdot\text{см}^{-1},\ b = 0{,}686\ \text{Н}\cdot\text{см}^{-1},$$

$$\gamma = \pm 1{,}96\ \text{Н}\cdot\text{см}^{-3},\ T_0 = 4{,}9\ \text{Н},\ \alpha_1 = 0{,}84\ \text{с}\cdot\text{см}^{-1},\ \alpha_3 = 0{,}18\ \text{с}^3\cdot\text{см}^{-3},$$

$$r_0 = 1\ \text{см},\ I = 9{,}8\ \text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^2,\ p\Delta = \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2.$$

Некоторые результаты расчетов при $u = 1{,}2\ \text{см}\cdot\text{с}^{-1}$ и различных характеристиках силы упругости ($\gamma > 0$, $\gamma < 0$) показаны на рис. 1. Сплошные линии отражают случаи запаздывания $p\Delta = \pi/2$, штриховые – $p\Delta = \pi$, пунктирные – $p\Delta = 3\pi/2$.

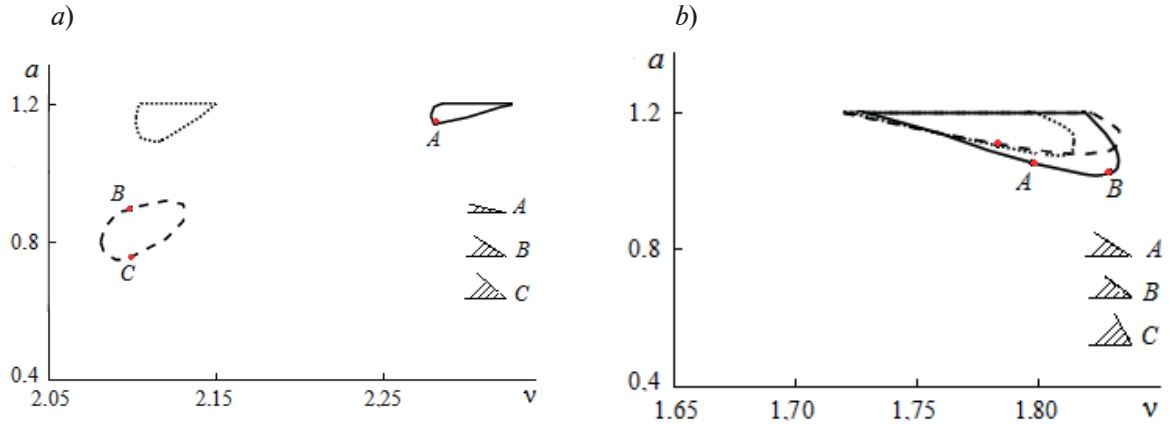


Рис. 1. Результаты численных расчетов амплитудно-частотных характеристик рассматриваемой системы для сил упругости $\gamma = 0{,}2$ (*a*) и $\gamma = -0{,}2$ (*b*).

Представлены 3 случая запаздывания $p\Delta$:$\pi/2$ (сплошные линии), π(штриховые) и $3\pi/2$ (пунктирные). Красные точки *A*, *B*, *C* соответствуют заштрихованным секторам, относящимся к крутизне *Q* характеристики источника энергии (колебания устойчивы в пределах этих секторов)

Заштрихованные секторы относятся к крутизне Q характеристики источника энергии, при которых колебания устойчивы. Эти секторы было бы правильнее расположить на кривой нагрузки $S(a, u)$, но для экономии места они показаны на амплитудных кривых.

Заключение

Рассмотрена динамика смешанных параметрических и автоколебаний при нелинейном параметрическом возбуждении и запаздывании в автоколебаниях. Для получения информации о свойствах этих колебаний использована модель фрикционной автоколебательной системы, взаимодействующей с источником энергии ограниченной мощности, и проведены расчеты стационарных режимов колебаний.

Анализ полученных данных позволил сделать ряд выводов.

Во-первых, амплитудная кривая значительно сдвигается в амплитудно-частотной плоскости, по сравнению со случаем отсутствия запаздывания, и зона резонанса увеличивается.

Во-вторых, на некоторых участках нижних ветвей амплитудных кривых наблюдается появление устойчивости, зависящей от крутизны характеристики источника энергии.

Ряд эффектов, имеющих место при взаимодействии колебательной системы с источником энергии в случае линейного параметрического возбуждения, подробно описаны в монографии [1]. Как показало настоящее исследование, подобные эффекты имеют место и в случае нелинейного параметрического возбуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Alifov A. A., Frolov K. V.** Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.

2. Вибрации в технике. Справочник: В 6-ти т. Ред. совет: В. Н. Челомей (пред., гл. ред.) и др. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.

3. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 568 с.

4. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.

5. **Тхан В. З., Дементьев Ю. Н., Гончаров В. И.** Повышение точности расчета систем автоматического управления с запаздыванием // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 3. С. 521– 526.

6. **Keller A. A.** Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control // International Journal of Mathematics and Computers in Simulation. 2018. Vol. 12. Pp. 64–73.

7. **Sykora H. T., Sadeghpour M., Ge J. I., Bachrathy D., Orosz G.** On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020. Vol. 30. No. 18. Pp. 8074–8097.

8. **Gupta S. K., Wang J., Barry O. R.** Nonlinear vibration analysis in precision motion stage with PID and time-delayed feedback controls // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 101. No. 2. Pp. 439–464.

9. **Цыкунов А. М.** Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием и неизвестным порядком математической модели // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 4. С. 219–227.

10. **Рубаник В. П.** Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.

11. **Шмидт Г.** Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.

12. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

13. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

14. **Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.** Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.

15. **Климов Д. М.** Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–12.

16. **Броновец М. А., Журавлёв В. Ф.** Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.

17. **Алифов А. А.** Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 74 с.

18. **Alifov A. A.** Method of the direct linearization of mixed nonlinearities // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No. 2. Pp. 128–131.

19. **Alifov A. A.** About direct linearization methods for nonlinearity // Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.) Conference proceedings: "Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III (AIMEE 2019)" (Book Series "Advances in Intelligent Systems and Computing". Vol. 1126). Cham, Switzerland: Springer, 2020. Pp. 105–114.

20. **Alifov A. A.** On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply // Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (Eds.). Conference proceedings: "Advances in Computer Science for Engineering and Education II (ICCSEEA 2019)" (Book Series "Advances in Intelligent Systems and Computing". Vol. 938). Cham, Switzerland: Springer, 2020. Pp. 23–31.

REFERENCES

1. **Alifov A. A., Frolov K. V.,** Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources; Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1990.

2. **Chelomey V. N.** (Chairman), Vibratsii v technike: spravochnik [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 2; Ed. by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).

3. **Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.,** Theory of vibration, Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).

4. **Krasnoselskiĭ M., Pokrovskiĭ A.,** Systems with hysteresis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1989.

5. **Tkhan V. Z., Dementev Yu. N., Goncharov V. I.,** Improving the accuracy calculation of time delay automatic control, Software & Systems. 31 (3) (2018) 521–526 (in Russian).

6. **Keller A. A.,** Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control, Math. Comput. Simul. 12 (2018) 64–73.

7. **Sykora H. T., Sadeghpour M., Ge J. I., et al.,** On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems, Int. J. Robust Nonlin. 30 (18) (2020) 8074–8097.

8. **Gupta S. K., Wang J., Barry O. R.,** Nonlinear vibration analysis in precision motion stage with PID and time-delayed feedback controls, Nonlinear Dyn. 101 (2) (2020) 439–464.

9. **Tsykunov A. M.,** Robust control of object with distributed delay and unknown order of mathematical model, Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie [Mechatronics., Automatization, Control]. 17 (4) (2016) 219–227 (in Russian).

10. **Rubanik V. P.,** Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniyem [Oscillations of quasilinear systems having delay], Nauka Publishing, Moscow, 1969 (in Russian).

11. **Schmidt G., Schulz R.,** Parametererregte Schwingungen, Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, Berlin, 1975.

12. **Bogolyubov N. N., Mitropolsky Y. A.,** Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, CRC Press, Florida, USA, 1961.

13. **Moiseev N. N.,** Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).

14. **Butenin N. V., Neymark Yu. I., Fufayev N. A.,** Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations], Nauka, Moscow, 1976) (in Russian).

15. **Klimov D. M.,** On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction, Mech. Solids. 38 (3) (2003) 1–7.

16. **Bronovets M. A., Zhuravlev V. F.,** On self-excited vibrations in friction source measurement systems, Mech. Solids. 47 (3) (2012) 261–268.

17. **Alifov A. A.,** Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow, 2015 (in Russian).

18. **Alifov A. A.,** Method of the direct linearization of mixed nonlinearities, J. Mach. Manuf. Reliab. 46 (2) (2017) 128–131.

19. **Alifov A. A.,** About direct linearization methods for nonlinearity, Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.); Conf. proc.: "Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III (AIMEE 2019)" (Book Ser. "Advances in Intelligent Systems and Computing". Vol. 1126). Springer, Cham, Switzerland (2020) 105–114.

20. **Alifov A. A.,** On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply, Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (Eds.); Conf. proc.: "Advances in Computer Science for Engineering and Education II (ICCSEEA 2019)" (Book Ser. "Advances in Intelligent Systems and Computing". Vol. 938). Springer, Cham, Switzerland (2020) 23–31.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛИФОВ Алишир Али оглы – *доктор технических наук, главный научный сотрудник Лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.*

101000, Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4
alishir@mail.ru
ORCID: 0000-0003-2327-068X

THE AUTHOR

ALIFOV Alishir A.
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences
4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia
alishir@mail.ru
ORCID: 0000-0003-2327-068X

Статья поступила в редакцию 01.12.2025. Одобрена после рецензирования 06.02.2026. Принята 06.02.2026.

Received 01.12.2025. Approved after reviewing 06.02.2026. Accepted 06.02.2026.

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2026