Механика

Научная статья
УДК 531.53
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19215

ПОДАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Н. А. Смирнова ✉
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
✉ smirnova_na@spbstu.ru

Аннотация. В работе исследована эффективность системы параметрического демпфирования колебаний линейного, изначально слабодемпфированного маятника. Для этого построена система стабилизации с обратной связью по отклонению положения однозвенного маятника от заданного. В замкнутой системе использован регулятор, структура которого следует из уравнения Матье, а варьируемые коэффициенты подобраны с учетом предложенной методики. Установлено, что параметрический регулятор (ПР) способен сократить время установления благодаря увеличению демпфирования. Поэтому ПР целесообразно добавлять в систему с традиционным пропорциональным регулятором по отклонению для улучшения динамических показателей и повышения точности в установившемся режиме. Показано, что ПР успешно подавляет гармонические внешние возмущения. Для плоского двухзвенного маятника построен ПР по отклонению одного звена. Регулятор демпфирует колебания с низшей частотой, но этого оказывается достаточно для существенного повышения быстродействия при стабилизации.

Ключевые слова: линейный слабодемпфированный маятник, первый параметрический резонанс, замкнутая система, параметрический регулятор, метод стационаризации

Для цитирования: Смирнова Н. А. Подавление колебаний маятника с помощью параметрического регулятора // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2026. Т. 19. № 2. С. 178–188. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.19215

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19215

THE DAMPING OF PENDULAR OSCILLATIONS USING A PARAMETRIC CONTROLLER

N. A. Smirnova ✉
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
✉ smirnova_na@spbstu.ru

Abstract. In the paper, the efficiency of a parametric damping system for the oscillations of a linear, initially, lightly damped pendulum has been studied. A closed-loop stabilization system included the feedback based on the deviation of the simple pendulum's position from the prearranged one. Our system was equipped with a controller whose structure followed from the Mathieu equation, and the variable coefficients were selected taking into account the proposed methodology. The parametric controller (PC) was shown to be able to shorten the settling time via increasing the damping. Because of this, it makes sense to add the PC to a system with a traditional offset-based P-controller to improve dynamic performance and to increase accuracy in the steady state. Moreover, the PC successfully suppressed harmonic

© Смирнова Н. А., 2026. Издатель: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

external disturbances. The PC based on the offset of one link was constructed for a planar two-link pendulum. The controller damped lower frequency oscillations, but this turned out to be enough to significantly improve the stabilization response.

Keywords: linear lightly damped pendulum, first parametric resonance, feedback system, parametric controller

For citation: Smirnova N. A., The damping of pendulum oscillations using a parametric controller, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 19 (2) (2026) 178–188. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.19215

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Введение

Параметрическое возбуждение может играть дестабилизирующую роль, если возникает параметрический резонанс [1], или способствовать стабилизации неустойчивой системы [2]. При изучении колебательных процессов периодически нестационарных, динамических систем основное внимание уделяется построению и уточнению областей возникновения резонансов на плоскости параметров периодического коэффициента [3, 4] или (с учетом демпфирования) в трехмерном пространстве [5]. Вне областей параметрического резонанса расположены области вибрационной стабилизации неустойчивых объектов [6 – 8]. Обычно границы зон параметрического возбуждения строятся путем отыскания приближенных периодических решений, разделяющих области с устойчивыми и неустойчивыми движениями. К наиболее востребованным асимптотическим методам относятся: метод многих масштабов [9], метод усреднения (или ван дер Поля) [10], метод гармонического баланса и другие [11 – 13]. Метод стационаризации периодического параметра [14], используемый в настоящей работе, является развитием метода гармонической линеаризации. Для его применения необходимо выполнение гипотезы фильтра линейной части системы, но не требуется выделения малого параметра или медленности изменения огибающей колебательного процесса.

Параметрическое возбуждение можно использовать не только для стабилизации колебаний неустойчивых объектов, но и для повышения демпфирования с целью ускорить стабилизацию объектов устойчивых. В системах с несколькими степенями подвижности известно явление параметрического антирезонанса [15]. Механизм такого антирезонанса основан на эффекте связи медленных модальных движений через параметрическое возбуждение. Для фундаментальной матрицы медленного движения, в соответствии с методом Флоке, строится матрица монодромии и для зафиксированных частоты и амплитуды параметра вычисляются характеристические числа (мультипликаторы). Показано, что параметрическое возбуждение определенной частоты (комбинационной для собственных частот объекта) перемещает характеристические числа матрицы монодромии к центру единичного круга [16]. Эффект демпфирования значителен для колебаний с низшей упругой частотой. Система демпфирования реализуется по принципу программного управления, поскольку частота параметрического возбуждения вычисляется по модели объекта.

Другой принцип повышения демпфирования реализуется в замкнутой системе, демпфирующие свойства которой зависят от баланса амплитуд и фаз циркулирующих в ней сигналов. Для линейных замкнутых систем эти свойства называются запасами устойчивости и определяются по критерию Найквиста на частоте среза. Создание в замкнутой системе условий, подобных и отличных от тех, при которых возбуждается первый параметрический резонанс, приводит к повышению демпфирования в этой системе. Подобие условий касается выбора частоты и амплитуды колебаний параметра. Отличие заключается в значении временного (или фазового) сдвига между колебаниями параметра и колебаниями выходной переменной объекта. Известно, что когда параметрический резонанс возбуждается, то устанавливается определенный сдвиг. Если же управлять этим сдвигом, то можно регулировать запасы устойчивости в замкнутой системе. Следовательно, вместо параметрического резонанса можно добиться параметрического демпфирования.

© Smirnova N. A., 2026. Published by Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

В работах [17, 18] временной сдвиг между периодическим изменением параметра и колебаниями выходной координаты используется для демпфирования колебаний выхода. В статье [19] показано, что в задаче вибрационной стабилизации гибкого длинного стержня, при различных условиях его закрепления, область притяжения вертикального положения существенно зависит от начальной фазы колебаний основания.

В настоящей работе исследована эффективность параметрического демпфирования в задачах стабилизации маятников, осуществляемого с помощью системы управления с обратной связью. Предложена методика настройки варьируемых коэффициентов параметрического регулятора. Результаты численного моделирования продемонстрировали робастность алгоритма стабилизации.

Модель параметрического регулятора в замкнутой системе стабилизации

Рассмотрим задачу управляемой стабилизации устойчивого положения равновесия маятника. Цель управления – повышение быстродействия при стабилизации. В качестве объекта управления примем линейную модель однозвенного маятника. Принципиальной особенностью объекта управления является слабое демпфирование, не позволяющее добиться приемлемого качества процессов в замкнутой системе с пропорциональным регулятором.

Уравнение Матье, описывающее колебания линейного маятника, вызванные периодическим изменением параметра, имеет вид

$$\ddot{\alpha}(t) + 2\nu\dot{\alpha}(t) + \left[1 + \mu\sin\left(kt - \varphi\right)\right]\alpha(t) = 0, \tag{1}$$

где t – безразмерное время, $t = \omega_0\tilde{t}$ (ω_0 – собственная частота колебаний маятника, $\tilde{t}$ – размерное время); α – отклонение маятника от положения равновесия, $\alpha^d = 0$; k – отношение частоты колебаний параметра к величине ω_0; μ – безразмерная амплитуда колебаний параметра ($\mu < 1$); φ – сдвиг фазы между колебаниями параметра и маятника; ν – относительное затухание.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{\alpha} + 2\nu\dot{\alpha} + \alpha = -\left[\mu\sin\left(kt - \varphi\right)\right]\alpha = u \tag{2}$$

и будем считать правую часть уравнения (2) управляющим входом u. Тогда выражение в квадратных скобках – это алгоритм параметрического регулирования, а уравнение (2) описывает модель замкнутой системы.

Следовательно, в замкнутой системе может возникать неустойчивый колебательный процесс с безразмерной частотой $k/2$, называемый первым параметрическим резонансом.

Целью работы является определение таких значений варьируемых коэффициентов регулятора, которые бы обеспечивали подавление колебаний выхода $\alpha(t)$. Качество подавления колебаний в замкнутой системе будем оценивать по времени установления.

Определим границы возбуждения первого параметрического резонанса в замкнутой системе. Пусть в уравнении (2) имеют место незатухающие колебания переменной

$$\alpha(t) = A\sin\,(k/2)t,$$

где A – амплитуда, $k/2$ – безразмерная частота.

Тогда алгоритм управления имеет следующий вид:

$$u = -\mu A\cdot\sin[(k/2)t]\cdot\sin(kt - \varphi) = -0{,}5\mu\, A\{\cos\,[(k/2)t - \varphi] - \cos\,[(3k/2)t - \varphi]\}. \tag{3}$$

Если отношение $k/2 \approx 1$, т.е. близко к собственной частоте осциллятора, то вторым слагаемым в правой части алгоритма (3) можно пренебречь и после тригонометрических преобразований получить приближенный алгоритм управления:

$$u = -0{,}5\mu\{\sin\varphi + [(2/k)\cos\varphi]d\}\cdot A\sin(k/2)t, \tag{3а}$$

где d – оператор дифференцирования по безразмерному времени.

Алгоритм (3а) преобразует гармонический сигнал отрицательной обратной связи в гармонический управляющий сигнал той же частоты $k/2$.

Поскольку справедливо равенство вида

$$\{\sin\varphi + [(2/k)\cos\varphi]d\}|_{d=ik/2} = \exp\{i\,[(\pi/2) - \varphi)]\},$$

модель параметрического регулятора для определения границы возбуждения параметрического резонанса можно записать в виде комплексного коэффициента передачи [14]:

$$W(i\varphi) = (\mu/2)\cdot\exp\{i\,[(\pi/2) - \varphi]\}. \quad (4)$$

Рассмотрим систему, замкнутую жесткой отрицательной обратной связью; ее прямая цепь образована последовательным соединением параметрического регулятора и осциллятора с передаточной функцией

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\nu p + 1}.$$

Согласно критерию Найквиста, в замкнутой системе установится периодический режим с частотой $k/2$, если соблюдено равенство модулей

$$\left|W(i\varphi)\right| = \left|H^{-1}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right|_{\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{k}{2}},$$

следовательно,

$$\frac{\mu}{2} = \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)^2 + \nu^2 k^2}, \quad (5)$$

и также соблюдено равенство фаз

$$\pi/2 - \varphi - \mathrm{arctg}[\nu k/(1 - k^2/4)] = -\pi. \quad (6)$$

Для случая $k = 2$ определим по формулам (5) и (6) значения амплитуды $\mu = 4\nu$ и сдвига фаз $\varphi = \pi$, при которых замкнутая система оказывается на границе устойчивости. Последовательность действий при настройке коэффициентов регулятора следующая.

Шаг 1. Зафиксируем частоту колебаний параметра $k = 2$.

Шаг 2. Выберем амплитуду колебаний параметра из диапазона $4\nu < \mu < 1$ в области возбуждения параметрического резонанса.

Шаг 3. Сдвиг фаз φ будем подбирать так, чтобы обеспечить в замкнутой системе достаточный запас устойчивости по фазе.

Ответ на вопрос о том, можно ли ускорить процесс стабилизации в замкнутой системе, по сравнению с неуправляемым процессом, был получен в ходе численного эксперимента. Основная цель при численной реализации параметрического регулятора состояла в получении сигнала с заданным периодом колебаний по имеющимся точным измерениям затухающих колебаний выхода $\alpha(t)$. Для этого в графической среде Simulink выход $\alpha(t)$ последовательно проходил через квадратичную функцию, дифференцирующее звено, звено чистого запаздывания с передаточной функцией

$$H_{dt}(p) = \exp(-\tau p)$$

и подавался на вход двухпозиционного реле [17]. На выходе реле формировался прямоугольный сигнал с периодом вдвое меньшим, по сравнению с «периодом» колебаний выхода $\alpha(t)$, и сдвинутый по фазе на $\varphi = (\pi/2) - k\tau$.

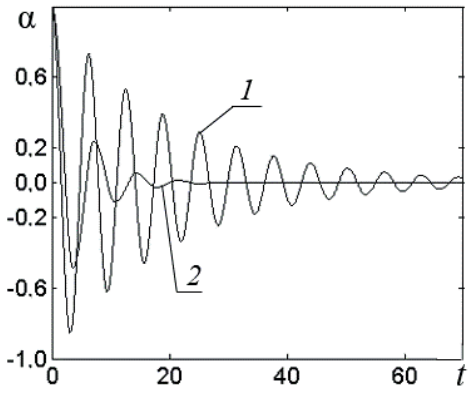


Рис. 1. Осциллограммы свободных колебаний маятника при значении относительного затухания $\nu = 0{,}05$ (кривая *1*) и выхода замкнутой системы $\alpha(t)$ при значениях коэффициентов параметрического регулятора $\mu = 0{,}5$ и $\tau = 0$ (кривая *2*)

На рис. 1 показаны осциллограмма выхода замкнутой системы стабилизации положения равновесия маятника $\alpha^d = 0$ и осциллограмма свободных колебаний маятника при $\alpha(0) = 1$. Время установления в замкнутой системе сократилось в четыре раза.

Эффективность стабилизации сохраняется при варьировании амплитуды μ и запаздывания τ в широком диапазоне. Можно рекомендовать при $\tau = 0$ выбирать значение μ ближе к верхней границе. Таким образом, отличительной чертой параметрического регулятора является его робастность.

Исследуем работоспособность параметрического регулятора в задаче подавления внешнего гармонического возмущения. Добавим в правую часть уравнения (2) гармонический возмущающий момент. Если заменить периодический параметр комплексным коэффициентом (4), то получим приближенное уравнение замкнутой системы:

$$\ddot{\alpha} + 2\nu\dot{\alpha} + \alpha + \frac{\mu}{2}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]\alpha = B\exp\left[i\left(\lambda t - \theta\right)\right], \tag{7}$$

где λ – отношение частоты колебаний возмущающего момента к собственной частоте осциллятора ω_0, B – амплитуда, θ – фаза возмущения.

Качество подавления вынужденных колебаний оценим по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы. Будем искать установившееся решение уравнения (7) в виде

$$\alpha_\infty = A\exp\left[i\left(\lambda t - \psi\right)\right], \tag{8}$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний выхода замкнутой системы, ψ – сдвиг фазы.

Заметим, что описание параметрического регулятора комплексным коэффициентом $W(i\varphi)$ становится неадекватным для значений $\lambda < 1$, поскольку в диапазоне низких частот возмущающего воздействия вторым слагаемым в правой части формулы (3) пренебрегать нельзя. Подставив решение (8) в уравнение (7), получим:

$$(B/A)\exp\left[i\left(\psi - \theta\right)\right] = H^{-1}(i\lambda) + W(i\varphi), \tag{9}$$

где $H^{-1}(i\lambda) = -\lambda^2 + 2\nu i\lambda + 1$.

Принципиальная возможность возникновения режима вынужденных колебаний следует из баланса фаз при графическом решении уравнения (9). Баланс модулей в уравнении (9) дает выражение для амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы, имеющей вид

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \lambda^2 + \frac{\mu}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(2\nu\lambda + \frac{\mu}{2}\cos\varphi\right)^2}}. \tag{10}$$

Если в выражении (10) положить $\varphi = 0$, что в совокупности с условием $4\nu < \mu < 1$ обеспечивает наименьшее время установления в замкнутой системе, то АЧХ преобразуется к виду

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \lambda^2\right)^2 + \left(2\nu\lambda + \frac{\mu}{2}\right)^2}}. \tag{11}$$

На собственной частоте $\lambda = 1$ маятника значение АЧХ замкнутой системы следует выражению

$$\left.\frac{A}{B}\right|_{\lambda=1} = \frac{1}{2\nu + \frac{\mu}{2}}$$

и снижается с увеличением значения μ.

На рис. 2 точками показаны значения амплитуд вынужденных колебаний, полученные в ходе вычислительного эксперимента при $B = 1$. Для сравнения приведена АЧХ (сплошная линия), построенная по формуле (11).

Видно, что наибольшее различие наблюдается в области низких частот и объясняется, по-видимому, неадекватным описанием параметрического регулятора комплексным

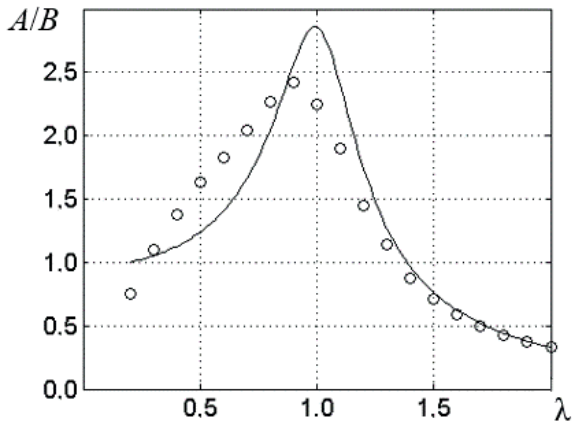


Рис. 2. АЧХ замкнутой системы, полученные по формуле (11) (сплошная линия) и численно (символы). Амплитуды A вынужденных колебаний вычислены при значениях коэффициентов $B = 1$, $\nu = 0{,}05$, $\mu = 0{,}5$, $\tau = 0$

коэффициентом. Важно отметить, что значение АЧХ замкнутой системы при $\lambda = 1$ гораздо ниже резонансного значения АЧХ линейного осциллятора $A_{osc} = 1/2\nu$.

Параметрический регулятор как дополнение к традиционному пропорциональному регулятору

Рассмотрим задачу управляемой стабилизации произвольного положения $\alpha^d \neq 0$, не совпадающего с положением устойчивого равновесия маятника. Дополним модель маятника моделью привода, приняв ее инерционным звеном первого порядка. Модель замкнутой системы с пропорциональным регулятором (П-регулятор) имеет вид

$$(Td + 1)(d^2 + 2\nu d + 1)\alpha(t) = K_p\,[\alpha^d - \alpha(t)],$$

где d – оператор дифференцирования по безразмерному времени; $T = \tilde{T}\omega_0$ – безразмерная постоянная инерционного звена; K_p – коэффициент усиления П-регулятора.

Эффективность П-регулятора в рассматриваемой задаче ограничена необходимостью обеспечить компромисс между требованиями к переходному и установившемуся (α_∞) режимам. Для уменьшения установившейся ошибки, имеющей вид

$$e_\infty = \alpha^d - \alpha_\infty = \alpha^d/(1 + K_p),$$

следует увеличивать коэффициент K_p. Для обеспечения устойчивости замкнутой системы значение коэффициента K_p должно удовлетворять неравенству

$$1 + K_p < (2\nu/T)\,(1 + 2\nu/T). \qquad (12)$$

На рис. 3 показан переходный процесс ($\alpha^d = 1$) в замкнутой системе с П-регулятором, коэффициент усиления $K_p = 2{,}6$ которого обеспечивает стандартный (60°) запас по фазе в замкнутой системе при выбранных значениях параметров объекта управления $\nu = 0{,}05$, $T = 0{,}01$.

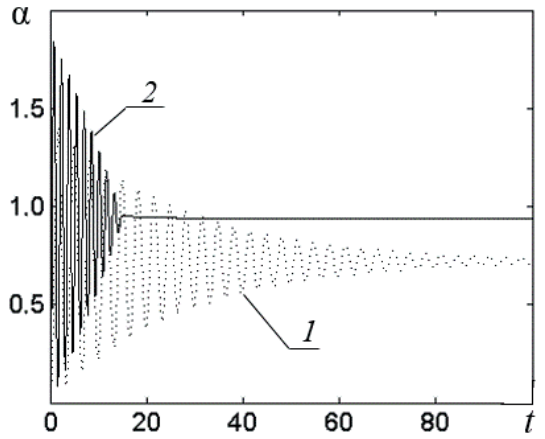


Рис. 3. Осциллограммы переходных процессов в замкнутой системе с П-регулятором (коэффициент усиления $K_p = 2{,}6$, кривая *1*), а также с П-регулятором (коэффициент усиления $K_p = 15$) и параметрическим регулятором при $\mu = 0{,}5$ и $\tau = 0$ (кривая *2*)

Включим в структурную схему замкнутой системы параметрический регулятор так, чтобы его выход суммировался с выходом П-регулятора. Добавление параметрического регулятора позволяет при неизменном значении коэффициента K_p добиться в замкнутой системе скорейшего установления переходного процесса. Кроме того, удается существенно расширить (по сравнению с условием (12)) диапазон возможных значений K_p, при которых замкнутая система устойчива. Последнее обстоятельство дает возможность уменьшить установившуюся ошибку в замкнутой системе. На рис. 3 показан переходный процесс в замкнутой системе, включающей П-регулятор с коэффициентом усиления $K_p = 15$ и параметрический регулятор. В результате установившаяся ошибка снизилась в 4,5 раза, а время установления – в 5,6 раз.

Стабилизация плоского двойного маятника

Рассмотрим задачу управляемой стабилизации устойчивого положения равновесия плоского двойного маятника. Воспользуемся линейной моделью двойного маятника, причем для простоты будем полагать массы концевых грузов и длины обоих звеньев одинаковыми. Запишем модель в обезразмеренном виде (как это было сделано в работах [20, 21]), для чего введем собственную частоту колебаний однозвенного маятника ω_0 и безразмерное время $t = \omega_0\tilde{t}$:

$$M\begin{bmatrix}\ddot{\alpha}_1\\ \ddot{\alpha}_2\end{bmatrix} + 2B\begin{bmatrix}\dot{\alpha}_1\\ \dot{\alpha}_2\end{bmatrix} + C\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u\\ 0\end{bmatrix}, \tag{13}$$

где α_1 – отклонение первого звена от вертикали, $\alpha_d = 0$; α_2 – отклонение второго звена от линии продолжения первого звена; ν – относительное затухание, одинаковое в обоих шарнирах; M, B, C – матрицы инерционных, диссипативных и квазиупругих коэффициентов, соответственно; u – управляющее воздействие в подвесе.

Квадратные матрицы имеют следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}\nu & 0\\ 0 & \nu\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Поскольку выполняется соотношение

$$B = \nu(2C - M),$$

характеристический полином модели (13) имеет вид

$$x(p) = \det[M(p^2 - 2\nu p) + C(1 + 4\nu p)],$$

и следовательно,

$$x(p) = [p^2 - 2\nu p + (\omega_1)^2(1 + 4\nu p)]\cdot[p^2 - 2\nu p + (\omega_2)^2(1 + 4\nu p)], \tag{14}$$

где ω_1, ω_2 – безразмерные собственные частоты двойного маятника;

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0,77,\ \omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1,85.$$

Приняв за выход переменную $\alpha_1(t)$, запишем модель объекта управления

$$\alpha_1(p) = H_2(p)u(p),$$

где $H_2(p) = \dfrac{p^2 + 2\nu p + 1}{x(p)}$ – передаточная функция.

Процессы в замкнутой системе с параметрическим регулятором

$$u = -[\mu \sin(kt - \varphi)]\alpha_1 \tag{15}$$

удовлетворяют уравнению

$$H_2^{-1}(d)\cdot\alpha_1 + [\mu\cdot\sin(kt - \varphi)]\cdot\alpha_1 = 0. \tag{16}$$

Диапазон допустимых значений безразмерной амплитуды параметра μ вычисляется так же, как и в уравнении Матье:

$$\mu < H_2^{-1}(0) = \omega_1^2\omega_2^2 = 2.$$

Для определения границы возбуждения первого параметрического резонанса используем комплексный коэффициент передачи (4) в качестве приближенной модели параметрического регулятора. Варьируя значения μ, будем вычислять значения частот, которые являются корнями уравнения

$$\left|W^{-1}(i\varphi)\right| = \frac{2}{\mu} = \left|H_2\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right|_{\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{k}{2}}. \tag{17}$$

Искомых корней уравнения (17) может быть четыре, поэтому область возбуждения первого параметрического резонанса для двухзвенного маятника объединяет две подобласти в окрестности удвоенных собственных частот. Параметрический резонанс в замкнутой системе (16) наступает, если частота колебаний параметра k близка к удвоенной первой собственной частоте ω_1 или к удвоенной второй собственной частоте ω_2. Определение границ возбуждения резонанса удобно проводить с использованием диаграмм Боде

$$L_2 = 20 \log| H_2(i\omega/\omega_0) |.$$

На рис. 4, *a* показана диаграмма Боде L_2 при $\nu = 0{,}05$, которая может иметь только две точки пересечения с прямой

$$L_1 = 20 \log(2/\mu) \text{ при } \mu < 2.$$

Следовательно, в рассматриваемой замкнутой системе область возбуждения первого параметрического резонанса расположена в окрестности удвоенной первой собственной частоты. На рис. 4, *b* показана граница первого параметрического резонанса.

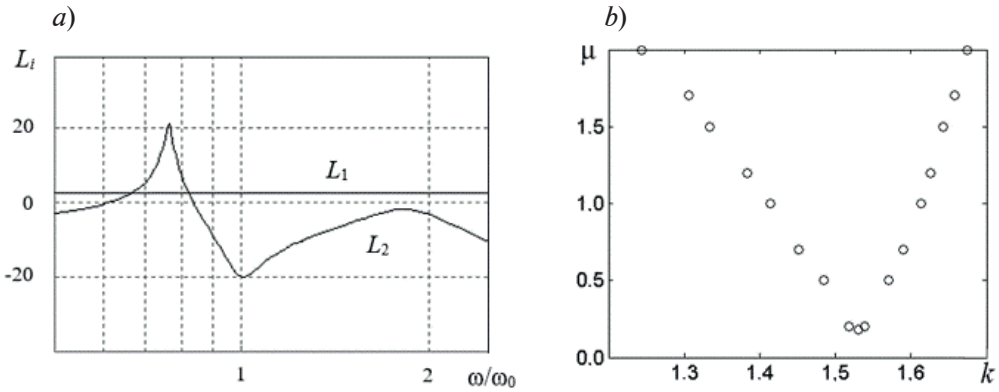


Рис. 4. Графическое представление решения уравнения (17) при значениях коэффициентов $\nu = 0{,}05$, $\mu = 1{,}5$ (*a*) и зависимость $\mu(k)$, являющаяся границей первого параметрического резонанса (*b*)

Реализация параметрического регулятора (15) осуществляется приближенно (как это было описано выше), поэтому результаты измерения угла $\alpha_1(t)$ на первом этапе возводятся в квадрат, чтобы сформировать периодический сигнал. Однако для произвольных начальных условий свободные колебания двухзвенного маятника представляют собой двухчастотный процесс, поскольку корни характеристического полинома (14) имеют вид

$$p_{12} = -(3-2\sqrt{2})\nu \pm i\sqrt{2-\sqrt{2}-(17-12\sqrt{2})\nu^2};$$
$$p_{34} = -(3+2\sqrt{2})\nu \pm i\sqrt{2+\sqrt{2}-(17+12\sqrt{2})\nu^2}.$$

Следовательно, переменная $\alpha_1(t)$ представляет собой суперпозицию экспоненциально затухающих колебаний с частотами, зависящими от значения ν. Для значения $\nu = 0{,}05$ логарифмический декремент затухания колебаний со второй частотой в 14,2 раза больше, чем таковой с первой частотой. Поэтому основная задача параметрического регулирования – это демпфирование колебаний с низшей частотой. Следует ожидать, что в замкнутой системе (16), по прошествии некоторого времени, в измерениях $\alpha_1(t)$ останется составляющая с низшей частотой. Параметрический регулятор будет эффективно гасить колебания $\alpha_1(t)$, если, разумеется, амплитуда μ будет достаточной, а сдвиг фаз φ обеспечит устойчивость замкнутой системы.

Поскольку в сочленении двух звеньев активный управляющий сигнал не предусмотрен, переменная $\alpha_2(t)$ изменяется в соответствии с уравнением

$$\ddot{\alpha}_2 + 2\nu\dot{\alpha}_2 + \alpha_2 = -2\ddot{\alpha}_1 - \alpha_1.$$

Результаты численного моделирования процессов в замкнутой системе, которая отличается от уравнения (16) приближенной реализацией параметрического регулятора, показаны на рис. 5. Чтобы продемонстрировать эффективность работы параметрического регулятора, там же приведены осциллограммы свободных колебаний слабодемпфированного двухзвенного маятника.

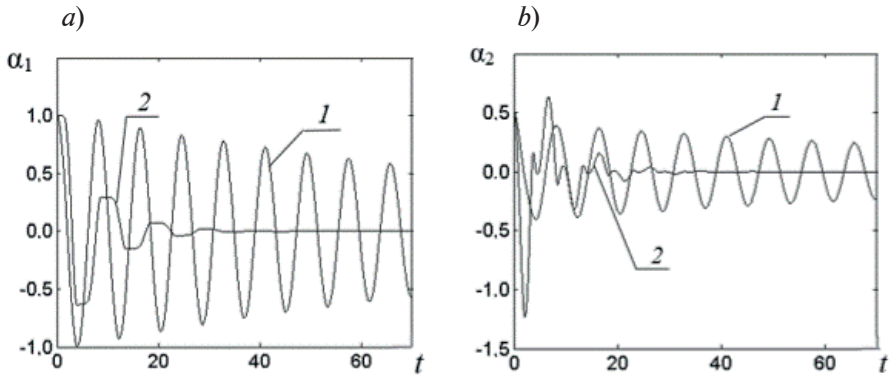


Рис. 5. Осциллограммы переменных α_1 (*a*) и α_2 (*b*):
свободные колебания при $\nu = 0{,}05$ (кривые *1*) и процессы в замкнутой системе с параметрическим регулятором при $\mu = 1{,}5$, $\tau = 0$ (кривые *2*)

Время установления в замкнутой системе значительно сократилось, по сравнению с временем установления свободных колебаний.

Заключение

Исследована работоспособность параметрического регулятора, включенного в замкнутую систему, которая предназначена для ускорения процесса стабилизации. Предложен способ настройки варьируемых коэффициентов регулятора. Путем численного моделирования установлено, что для получения эффекта параметрического демпфирования не требуется точной настройки регулятора, достаточно выбрать амплитуду и запаздывание из расчетного диапазона, а частота удваивается автоматически. Решены различные по постановке задачи стабилизации слабодемпфированного осциллятора, в которых параметрическое управление оказалось эффективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Болотин В. В.** О поперечных колебаниях стержней, вызываемых периодическими продольными силами // Сб. статей «Поперечные колебания и критические скорости». Вып. 1. Изд. АН СССР, 1951. С. 46–77.

2. **Капица П. Л.** Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44. № 1. С. 7–20.

3. **Бутиков Е. И.** Расширенный и уточненный критерий устойчивости маятника Капицы // Компьютерные инструменты в образовании. 2011. № 2. С. 16–26.

4. **Беломытцева Е. Г., Курин А. Ф., Туленко Е. Б.** Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2018. № 3. С. 105–125.

5. **Майлыбаев А. А., Сейранян А. П.** Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. № 5. С. 779–792.

6. **Сейранян А. П., Майлыбаев А. А.** Вибрационная стабилизация статически неустойчивых систем // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 480–486.

7. **Архипова И. М.** О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры произвольной частоты // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 2. С. 281–287.

8. **Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.** Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5. № 3. С. 477–488

9. **Найфэ А. Х.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

10. **Трубецков Д. И., Рожнёв А. Г.** Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 415 с.

11. **Блехман И. И.** Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 400 с.

12. **Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.** Нелинейные колебания. (Серия «Современная теория колебаний и волн»). М.: Физматлит, 2002. 292 с.

13. **Буданов В. М.** Редукция уравнения Матье к нелинейному уравнению первого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2016. № 4. С. 66–69.

14. **Чечурин Л. С.** Метод гармонической стационаризации и оценка робастности периодически нестационарных систем управления // Сб. трудов «Управление большими системами». Вып. 22. М.: ИПУ РАН, 2008. С. 70–85.

15. **Tondl A., Půst L.** To the parametric anti-resonance application // Engineering Mechanics. 2010. Vol. 17. No. 2. Pp. 135–144.

16. **Dohnal F.** Damping by parametric stiffness excitation: Resonance and anti-resonance // Journal of Vibration and Control. 2008. Vol. 14. No. 5. Pp. 669–688.

17. **Чечурин С. Л., Чечурин Л. С.** Физические основы теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2005. 256 с.

18. **Chechurin L., Mandrik A., Vostrov K., Chechurin S.** Parametric and coordinate control of oscillating systems: Physics-based oscillation feedback design // IEEE Access. 2021. Vol. 9. 03 August. Pp. 113500–113507.

19. **Кулижников Д. Б., Товстик П. Е., Товстик Т. П.** Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 3. С. 482–492.

20. **Смирнов А. С., Смольников Б. А.** Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9. № 2. С. 357–365.

21. **Смирнов А. С., Смольников Б. А.** Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10. № 1. С. 121–138.

REFERENCES

1. **Bolotin V. V.,** On the transverse vibrations of rods excited by periodic longitudinal forces, In collected works: “Transverse vibrations and critical velocities”, No. 1., USSR Acad. Sci. Publ., Moscow (1951) 46 –77 (in Russian).

2. **Kapitsa P. L.,** Pendulum with vibrating suspension, Physics-Uspekhi. 44 (1) (1951) 7–20 (in Russian).

3. **Butikov E. I.,** Rasshirennyy i utochnennyy kriteriy ustoychivosti mayatnika Kapitsy [Extended and stable criteria of Kapitsa's pendulum], Computer Tools in Education Journal. (2) (2011) 16–26 (in Russian).

4. **Belomytseva E. G., Kurin A. F., Tulenko E. B.,** The Cauchy problem for the Mathieu equation with damping at parametric resonance, Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. (3) (2018) 105–125 (in Russian).

5. **Mailybayev A. A., Seyranian A. P.,** Parametric resonance in systems with small dissipation, J. Appl. Math. Mech. 65 (5) (2001) 755–767.

6. **Seyranyan A. P., Maylybayev A. A.,** Vibrational stabilization of statically unstable systems, Doklady Physics. 54 (6) (2009) 294–300.

7. **Arkhipova I. M.,** On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency, Vestnik of the St. Peterburg University. Mathematics. 52 (2) (2019) 194–198.

8. **Belyayev A. K., Tovstik T. P., Morozov N. F., Tovstik P. E.,** The stability of a flexible vertical rod on a vibrating support, Vestnik of the St. Petersburg University. Mathematics. 51 (3) (2018) 296–304.

9. **Nayfeh A. H.,** Introduction to perturbation techniques, John Wiley & Sons, New York, 1981.
10. **Trubetskov D. I.,** Oscillations and waves: In linear and nonlinear systems (Book series "Mathematics and its applications"), Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
11. **Blekhman I. I.,** Vibrational mechanics. Nonlinear dynamic effects, general approach, applications, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., Singapore, 2000.
12. **Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M.,** Nelineynyye kolebaniya [Nonlinear oscillations], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2002 (in Russian).
13. **Budanov V. M.,** Reduction of the Mathieu equation to a nonlinear equation of the first order, Moscow University Mechanics Bulletin. 71 (4) (2016) 98–101.
14. **Chechurin L. S.,** Harmonic stationarization method and evaluation of robustness of periodic time-variant control systems, In collection of scientific papers "Large-scale Systems Control", Iss. 22, Institute of Control Sciences RAS, Moscow (2008) 70–85 (in Russian).
15. **Tondl A., Půst L.,** To the parametric anti-resonance application, Eng. Mech. 17 (2) (2010) 135–144.
16. **Dohnal F.,** Damping by parametric stiffness excitation: Resonance and anti-resonance, J. Vib. Control. 2008. Vol. 14 (5) (2008) 669–688.
17. **Chechurin L., Chechurin S.,** Physical fundamentals of oscillations: Frequency analysis of periodic motion stability, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2018.
18. **Chechurin L., Mandrik A., Vostrov K., Chechurin S.,** Parametric and coordinate control of oscillating systems: Physics-based oscillation feedback design, IEEE Access. 9 (03 Aug) (2021) 113500–113507.
19. **Kulizhnikov D. B., Tovstik P. E., Tovstik T. P.,** The basin of attraction in the generalized Kapitsa problem, Vestnik of the St. Petersburg University. Mathematics. 52 (3) (2019) 309–316.
20. **Smirnov A. S., Smolnikov B. A.,** Optimization of oscillation damping modes of a spatial double pendulum: 1. Formulation of the problem, Vestnik of the St. Petersburg University. Mathematics. 55 (2) (2022) 243–248.
21. **Smirnov A. S., Smolnikov B. A.,** Optimization of oscillation damping modes of a spatial double pendulum: 2. Solution of the problem and analysis of the results, Vestnik of the St. Petersburg University. Mathematics. 56 (1) (2023) 93–106.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

СМИРНОВА Нина Анатольевна – *кандидат технических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
smirnova_na@spbstu.ru
ORCID: 0000-0001-8831-743x

THE AUTHOR

SMIRNOVA Nina A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
smirnova_na@spbstu.ru
ORCID: 0000-0001-8831-743x

Статья поступила в редакцию 16.01.2026. Одобрена после рецензирования 09.02.2026. Принята 09.02.2026.
Received 16.01.2026. Approved after reviewing 09.02.2026. Accepted 09.02.2026.

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2026