



**ПОЛИТЕХ**  
Институт компьютерных  
наук и технологий

**120**



**ПОЛИТЕХ**  
Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого



**ПОЛИТЕХ-ПРЕСС**

ISSN 2658-5243

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОЕКТИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
XXIII МЕЖДУНАРОДНОЙ  
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

10 – 11 ИЮНЯ 2019 ГОДА

Часть 2



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Международная академия наук высшей школы  
Санкт-Петербургское отделение

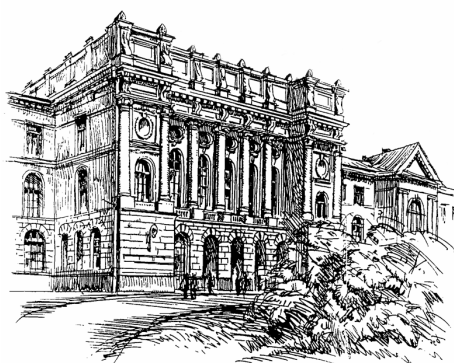
Центральный экономико-математический институт РАН  
Центр по изучению проблем информатики  
Института научной информации по общественным наукам РАН  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова-Ленина  
Санкт-Петербургский государственный экономический университет

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОЕКТИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ

Сборник научных трудов  
XXIII Международной научно-практической конференции  
*10 – 11 июня 2019 года*

Часть 2  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО  
АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ**



**ПОЛИТЕХ-ПРЕСС**

Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого

Санкт-Петербург

2019

**УДК 303.732**  
**ББК 32.965я73**

**Системный анализ в проектировании и управлении:** Сборник научных трудов XXIII Междунар. науч.-практич. конф. Ч. 2. Математические методы системного анализа и управления – СПб.: Изд-во Политех-Пресс, 2019. – 116 с.

В сборник научных трудов научно-практической конференции «Системный анализ в проектировании и управлении», проводимой Санкт-Петербургским политехническим университетом Петра Великого совместно с Южным Федеральным университетом, Санкт-Петербургским отделением Международной академией наук высшей школы, Центральным экономико-математическим институтом РАН, Центром по изучению проблем информатики Института научной информации по общественным наукам РАН, Санкт-Петербургским гос. электротехническим университетом «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова-Ленина, Санкт-Петербургским гос. экономическим университетом, включены работы ученых, аспирантов и студентов, работающих в области теории систем и системного анализа, из ряда городов России, Украины, Австрии, Германии, Китая, Норвегии, Польши, США, Финляндии, Швеции, Эстонии.

**Председатель Программного комитета конференции** – научный руководитель СПбПУ, академик РАН, д-р техн. наук, профессор **Ю.С. Васильев**.

**Сопредседатели Программного комитета конференции:**

Заместитель председателя СПб отделения МАН ВШ, д-р техн. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ **В.Н. Козлов**; член МАН ВШ, д-р экон. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ **В.Н. Волкова**, д-р экон. наук, профессор ЮФУ, заслуженный работник высшей школы РФ **В.Е. Ланкин**.

**Члены программного комитета:**

**Клейнер Г.Б.** – чл.-корр. РАН, д-р экон. наук, проф. (ЦЭМИ РАН, Москва);  
**Малинецкий Г.Г.** – д-р физ.-мат. наук, проф. (Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва);  
**Малышев Н.Г.** – чл.-корр. РАН, д-р экон. наук, проф., ректор (Московский университет имени С.Ю. Витте);  
**Брусакова И.А.** – чл.-корр. МАН ВШ, д-р экон. наук, проф. (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»);  
**Гаврилова Т.А.** – д-р техн. наук, проф. (СПбГУ);  
**Горелова Г.В.** – член. МАН ВШ, д-р техн. наук, проф. (ЮФУ, Таганрог);  
**Гриненко С.В.** – д-р экон. наук, проф. (Сочинский университет, Сочи);  
**Ефремов А.А.** – канд. физ.-мат. наук, доц. (СПбПУ);  
**Кацко И.А.** – д-р экон. наук, проф. (Кубанский гос. аграрный университет, Краснодар);  
**Кукор Б.Л.** – чл.-корр. МАН ВШ, д-р экон. наук, проф. (СПбГЭУ);  
**Мазин В.Д.** – д-р техн. наук, проф. (СПбПУ);  
**Малыхина Г.Ф.** – д-р техн. наук, проф. (СПбПУ);  
**Микони С.В.** – д-р техн. наук, проф. (СПИИРАН);  
**Станкевич Л.А.** – канд. техн. наук, проф. (СПИИРАН);  
**Фирсов А.Н.** – чл.-корр. МАН ВШ, д-р техн. наук, проф. (СПбПУ);  
**Халин В.Г.** – член МАН ВШ, д-р экон. наук, проф. (СПбГУ);  
**Черненко Л.В.** – член МАН ВШ, д-р техн. наук, проф. (СПбПУ);  
**Черный Ю.Ю.** – канд. филос. наук, руководитель Центра по изучению проблем информатики ИНИОН РАН (Москва);  
**Чудесова Г.П.** – член МАН ВШ и МАОР, д-р экон. наук, проф. (СПБИТМО);  
**Шкодырев В.П.** – д-р техн. наук, проф. (СПбПУ);  
**Яковлева Е.А.** – чл.-корр. МАН ВШ, д-р экон. наук, проф. (СПбГЭУ).

**Ученые секретари конференции:**

**Широкова С.В.** – канд. техн. наук, доцент СПбПУ,  
**Логинова А.В.** – канд. экон. наук, доцент СПбПУ

**Зарубежные члены программного комитета:**

**John-Erik Andreassen** – M.Sc., Ass. Prof. (Ostfold University College, Ostfold, Norway);  
**Igor B. Arefiev** – Dr. of Technical Sc., Prof. (Maritime University of Szczecin, Szczecin, Poland);  
**Idilia Batchkova** – Dr. Sc., Prof. (University of Chemical Technology and Metallurgy, Sofia, Bulgaria);  
**Leon Bazil** – Dr. of Economics, Prof. (Montclair State University, Montclair, NJ, USA);  
**Zanna Bober** – M.Sc. (MTU “EVRIKA”, Narva, Estonia);  
**Bencion Fleishman** – Dr. Sc., Prof. (New York, NY, USA);  
**Rainer Grunwald** – Dr. of Engineering Sc., Prof. (Techn. Universitat Ilmenau, Ilmenau, Germany);  
**Stein Erik Johansen** – Dr. Philos., Prof. (Institute For Basic Research, Palm Harbor, FL, USA);  
**Ignat A. Kulkov** – Candidate of Economic Sc. (Abo Akademi, Turku, Finland);  
**Nataliya D. Pankratova** – Member of the International Higher Education Academy of Sciences, Dr. of Engineering Sc., Prof. (Institute for Applied System Analysis, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine);  
**Georgi Popov** – Dr. Sc., DHC, Prof. (Technical University of Sofia, Sofia, Bulgaria);  
**Elmar Schrufer** – Dr. of Natural Sc., Prof. (Technical University of Munich, Munich, Germany);  
**Adolf Josef Schwab** – Dr. of Engineering Sc., Prof. (Karlsruhe University, Karlsruhe, Germany);  
**Hans-Rolf Trankler** – Dr. of Engineering Sc., Prof. (Bundeswehr University Munich, Munich, Germany);  
**Valeriy V. Vyatkin** – Dr. Philos., Prof. (Lulea tekniska Universite, Lulea, Sweden);  
**Roland Werthschuetzky** – Dr. of Engineering Sc., Prof. (Technical University of Darmstadt, Germany);  
**Reinhold Wessely** – Dr. Sc., Prof. (Vienna, Austria).

чл.-корр. МАН ВШ

ISSN 2658-5243

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

*Конференция посвящается 90-летию  
Научного руководителя Санкт-Петербургского  
политехнического университета Петра Великого,  
академика Российской академии наук,  
доктора технических наук, профессора  
Васильева Юрия Сергеевича*

*Международная* научно-практическая конференция «Системный анализ в проектировании и управлении» проводится ежегодно с 1998 года Научно-педагогической школой с таким же названием, объединяющей ученых, развивающих теорию систем и системного анализа в различных вузах России и др. стран.

Становление и развитие школы с самого начала поддерживает **Юрий Сергеевич Васильев**, который открыл первое заседание конференции 23 июня 1998 года, а с 2016 года является председателем Программного комитета конференции.

Программный комитет конференции принял решение посвятить конференцию в этом году 90-летию Юрия Сергеевича.

Научно-педагогическая школа «Системный анализ в проектировании и управлении» развивается в Политехническом университете с 1998 года.

Школа считает себя преемницей:

школы Московского энергетического института, в котором д-р техн. наук, профессор Ф.Е. Темников (1906–1993), создал в 1970 году первую в стране кафедру по направлению теории систем и системных исследований – кафедру Системотехники;

школы Ленинградского политехнического института (ЛПИ), в котором с 1973 года на факультете технической кибернетики А.А. Денисов (1934–2010) исследовал общность процессов в системах различной физической природы и предложил теорию информационного поля и информационный подход к анализу систем.

Инициатором становления школы является кафедра «Системный анализ и управление», созданная в 1994 году на основе кафедры «Техническая кибернетика». На базе этой кафедры было открыто новое одноименное направление подготовки бакалавров и магистров многоуровне-



вой системы высшего профессионального образования, что сыграло важнейшую роль в становлении и развитии в Политехническом университете школы системного анализа в проектировании и управлении.

Важной целью школы является развитие методологических основ и терминологического аппарата теории систем и системного анализа на основе широкого спектра математических методов.

В настоящее время это направление развивается как научное направление подготовки бакалавров и магистров в Высшей школе киберфизических систем и управления Института компьютерных наук и технологий СПбПУ. Директор – д-р техн. наук, профессор **Вячеслав Петрович Шкодырев**, руководитель ООП "Теория и математические методы системного анализа и управления в технических, экономических и социальных системах" по направлению подготовки бакалавров и магистров «Системный анализ и управление» – канд. физ.-мат. наук, доцент **Артем Александрович Ефремов**.

Проводимые ежегодные конференции способствуют развитию идей теории систем и системного анализа и их использованию в учебных планах и программах не только нашего вуза, но и других вузов страны.

Большое влияние на реализацию и распространение идей научно-педагогической школы «Системный анализ в проектировании и управлении» оказывают подготавливаемые учебники и учебные пособия. В числе авторов учебников ученые других вузов, принимающие активное участие в ежегодно проводимых конференциях. Школа выполняет важную миссию по подготовке научных кадров высшей квалификации. На конференции традиционно обсуждаются доклады аспирантов и студентов Политехнического университета и других вузов.

Научные результаты, обсуждаемые на заседаниях конференции, представлены в ежегодно выпускаемых сборниках научных трудов, в коллективных учебниках и монографиях, подготовленных участниками этих конференций и на сайте *System Analysis in Engineering and Control* – [saenco.neva.ru](http://saenco.neva.ru).

Мы благодарны **Юрию Сергеевичу Васильеву** за активную поддержку инициатив школы «Системный анализ в проектировании и управлении» и участие в ее развитии.

**Сопредседатели Программного комитета конференции**

д-р техн. наук, профессор **В.Н. Козлов**,

д-р экон. наук, профессор **В.Н. Волкова**

**Секция 2**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**  
**СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 517.5

*Козлов Владимир Николаевич*<sup>1</sup>,  
д-р техн. наук, профессор,  
*Ефремов Артём Александрович*<sup>2</sup>,  
канд. физ.-мат. наук, доцент

**ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИКИ**  
**УПРАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ**  
**ПРОСТРАНСТВАХ**

Россия, Санкт-Петербург,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
<sup>1</sup>v1945kozlov@yandex.ru, <sup>2</sup>eartm@mail.ru

**Аннотация.** В работе представлено обобщение проекционного метода квадратичной локально-оптимальной стабилизации на случай пространства векторных функций.

**Ключевые слова:** оптимальная стабилизация, проекционные методы, квадратичная локально-оптимальная стабилизация

*Vladimir N. Kozlov*<sup>1</sup>,  
D-r of Technical. Sc., Professor,  
*Artyom A. Efremov*<sup>2</sup>,  
Cand. Ph.-mat. Sc, Assistant Professor

**PROJECTIONAL METHOD OF OPTIMIZATION OF CONTROL**  
**DYNAMICS IN FINITE-DIMENSIONAL**  
**AND FUNCTIONAL SPACES**

Russia, Saint-Petersburg,  
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University,  
<sup>1</sup>v1945kozlov@yandex.ru, <sup>2</sup>eartm@mail.ru

**Abstract.** The paper presents a generalization of the projection method of quadratic locally optimal stabilization for the case of a space of vector functions.

**Keywords:** optimal stabilization, projection methods, quadratic local optimal stabilization

Задачи локально линейной и квадратичной оптимальной стабилизации в конечномерных и функциональных пространствах на основе

проеекционного метода исследованы в ряде работ [1, 2, 4, 5], а также в цикле других исследований. В данной статье сформулирована задача квадратичной локально оптимальной программной стабилизации в функциональном пространстве, из которой следует задача квадратичной локально оптимальной стабилизации положения равновесия динамической системы.

**1. Постановка задачи.** Пусть динамика управляемого объекта в пространстве вектор-функций  $R^n(L^2[0, T])$  представлена линейным дифференциальным оператором

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где класс вектор-функций задан равенствами

$$x(t) \in R^n(L^2[0, T]), \quad u(t) \in R^m(L^2[0, T]),$$

числовые матрицы объекта управления (1) принадлежат пространствам

$$A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times m}.$$

Пусть для матриц и выполнен, например, ранговый критерий управляемости по Р. Калману, гарантирующий существование непустого множества управлений, стабилизирующих исследуемый объект управления. Другими словами, указанные матрицы образуют асимптотически стабилизируемую пару.

Требуется синтезировать вектор оптимальных управлений в заданном классе функций для оптимальной стабилизации положения равновесия данной системы в смысле минимума заданного локального функционала

$$\varphi = \|z(t)\|_{L^2[0, T]}^2 \in R, \quad (2)$$

который задается на обобщенном векторе

$$z(t) \square [x(t) | u(t)] \in R^{n+m}(L^2[0, T]),$$

который включает вектор координат состояний и управлений модели динамического объекта типа (1).

**2. Общая постановка задач синтеза локально оптимальных управлений.** Для синтеза стабилизирующих управлений будет использован обратный оператор для оператора (1) в виде интегрального оператора Коши, который определяет прогнозы оптимизируемых координат состояний и управлений на основе решения задачи для оператора (1) в виде

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Задача синтеза формулируется на основе минимизации функционала

$$\varphi = \|z(t) - C_z(t)\|_{R^n(L^2[0,T])}^2 = \int_0^T [z(t) - C_z(t)]^T [z(t) - C_z(t)] dt \quad (4)$$

при ограничениях типа равенств и неравенств

$$Az(t) = b(t), \quad \|z(t)\|_{R^n(L^2[0,T])}^2 \leq r^2, \quad (5)$$

которые в  $R^n(L^2[0,T])$  определены пересечением линейного многообразия и шара.

При этом в пространстве обобщенных векторов

$$z(t) = [x(t) | u(t)]^T \in R^{n+m}(L^2[0,T])$$

линейное многообразие определено следующим соотношением

$$Az(t) = A \left[ x(t) \mid - \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] = e^{At} x^0 = b(t) \quad (6.a)$$

конечномерного пространство вектор-функций.

Шар ограничений-неравенств этого пространства определен квадратичным неравенством

$$\|z(t)\|_{R^n(L^2[0,T])}^2 = \int_0^T z^T(t) z(t) d\tau \leq r^2 < \infty. \quad (6.b)$$

Тогда квадратичный функционал качества, определенный на обобщенных векторах для задачи локально оптимальной программной стабилизации будет иметь вид

$$\varphi = \|z(t) - C_z(t)\|_{R^{n+m}(L^2[0,T])}^2 = \left\| [x(t) | u(t)]^T - C_{xu}(t) \right\|_{R^{n+m}(L^2[0,T])}^2, \quad (7.a)$$

где  $C_z(t) = C_{xu}(t) \in R^n(L^2[0,T])$  – целевой стабилизируемый обобщенный вектор задачи локально оптимальной программной стабилизации. Если вектор-функция программного воздействия удовлетворяет условию

$$C_z(t) = C_{xu}(t) = 0_{n+m} \in R^{n+m}(L^2[0,T]) \quad (7.b)$$

то задача (3) преобразуется из «задачи квадратичной программной стабилизации» в задачу «оптимальной стабилизации нулевого положения равновесия» динамического объекта (1) для системы с обратной связью.

Таким образом, на основе соотношений (3) – (7) можно формулировать две основные задачи вычисления управлений:

1. Задача синтеза управлений для локально оптимальной *системы программной стабилизации* в дискретно-непрерывном времени, которая может конструироваться в виде задач конечномерной (аппроксимирующей) оптимизации и для этого варианта эта задача сформулирована на основе соотношений типа (3) – (7) и решена далее в п. 3.

2. Задачи вычисления управлений для локальной или интервальной оптимальной стабилизации нулевого положения или заданного программного вектора  $C_z(t)$ , которые также конструируются на основе соотношений (3) – (7) в *бесконечномерном пространстве* для стабилизации нулевого положения равновесия, анализируемые в п. 4.

На основании целей задачи локально оптимальной стабилизации формулируется задача синтеза: вычислить оптимальный обобщенный вектор типа  $z(t)$ , определенный равенством (2), заданный на траекториях объекта (3) при ограничениях (4) в форме, которые в  $\square^{n+m}(L^2[0,T])$  имеют вид (6).

**3. Вычисление оптимальных управлений на основе конечномерных проекторов оптимизации.** Оптимальные управления вычисляются на основе оператора объекта, который для кусочно-постоянных управлений

$$u(kh) = \sum_{s=0}^{kh} u(t_s), \quad (8)$$

и с учетом свойства аддитивности интеграла в (3) принимает вид

$$\begin{aligned} x(t_k) \square x(kh) &= e^{Akh} x^0 + \int_0^{kh} e^{A(kh-\tau)} d\tau B \sum_{s=0}^{kh} u(t_s) = \\ &= e^{At} x^0 + A^{-1} (e^{Akh} - E_n) B \sum_{s=0}^{kh} u(t_s). \end{aligned} \quad (9)$$

В результате задача синтеза как задача конечномерной условной минимизации имеет вид: вычислить счетное множество управлений в виде кусочно-постоянных вектор-функций  $u_*(ph)$ , которые на дискретном интервале прогноза  $[0, p] \in N$ , обеспечивают минимум функционала

$$\begin{aligned} u_*(ph) &= T_u \arg \min \left\{ \varphi = \|z(ph) - C_z(ph)\|^2_{\square^n(L^2[0,T])} \mid Az(ph) = b(z(ph)), \right. \\ &\quad \left. x(ph) - A^{-1} (e^{Aph} - E_n) B \sum_{s=0}^{ph} u(t_s) = e^{Aph} x^0, \|z(ph)\| \leq r^2 \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где «фильтрующая» матрица  $T_u \in R^{m \times (n+m)}$  «выделяет» из обобщенного вектора  $z(ph)$  управлений  $u_*(ph)$ .

Конечномерная задача условной минимизации (10) для стабилизации вектора программных воздействий может быть решена на основе сведения к экстремальной задаче и проекционных операторов конечномерной минимизации типа (12.а) и (12.б), рассмотренных в [3, 4].

Как отмечено выше, для вычисления оптимальных управлений будут использованы квазианалитические операторы оптимизации, доставляющие решения в виде конечных соотношений. Оператор минимизации для решения конечномерной неклассической экстремальной задачи имеет вид: вычислить вектор

$$x_* = \arg \min \left\{ \varphi(x) = \|x - C\|_2^2 \mid Ax = b, A \in R^{m \times n}, \text{rang } A = m, x^T x \leq r^2 \right\} \in R^n, \quad (11)$$

где вектор программных воздействий управлений отделен от нуля, т.е. удовлетворяет неравенству

$$0 < \underline{\delta}_C^2 \leq \|C\|_2^2 \leq \bar{\delta}_C^2 \leq r^2 - r_C^2,$$

разделяющему ресурсы системы для программной и стабилизирующей составляющих управления. В задаче (10) функционал качества  $\|x - C\|_2^2 = (x - C)^T (x - C) \in R$  задан квадратом евклидовой нормы, а допустимое множество определено непустым пересечением линейного многообразия и шара, аппроксимирующего параллелепипед (шар) [3, 4].

**Утверждение** о квазианалитическом проекционном операторе квадратичной оптимизации для неклассической задачи (11). Пусть (11) – корректная задача и пересечение линейного многообразия и шара – не пусто и выполнены условия:

1. Решение задачи оптимизации (11) в силу «принципа граничных лагранжевых экстремумов» и «сужения допустимой области» представлено выпуклой линейной комбинацией образов для регуляризованных ортогональных проекторов [1 - 5]

$$\begin{aligned} x_* &= (1 - \theta_*) x_3(\eta_+) + \theta_* x_3(\eta_-) = \\ &= P^+ b(t) + (1 - 2\theta_*) P^0 C(t) \eta. \end{aligned} \quad (12.a)$$

2. Лагранжевы векторы  $x_3(\eta_+)$  и  $x_3(\eta_-)$  в (12.а), принадлежащие пересечению линейного многообразия (подпространства) и сферы как границе шара в (11), определены ортогональными проекторами



$$x_{3\pm} = x_3(\pm\eta) = P^+b(t) \pm P^0C(t)\rho^{-1}(\alpha/\rho)^{1/2}, \quad (12.6)$$

где операторы имеют вид

$$P^+ = A^T (AA^T)^{-1}, \quad P^0 = E_n - P^+A, \quad \eta = (\alpha/\rho)^{1/2},$$

$$\rho = \|P^0C\|_2^2, \quad \alpha = r^2 - \|P^+b\|_2^2, \quad \rho = \|P^0C\|_2^2.$$

Тогда, как показано в [4, 5, 8], для оптимальности решения (12.а), (12.б) необходимо и достаточно, чтобы оптимальный параметр в (12) был задан равенством

$$\theta_* = P(\theta_0) = 0,5(|\theta_0| - |\theta_0 - 1| + 1) \in [0, 1], \quad (12.в)$$

где

$$\theta_0 = 0,5(1 - \eta^{-1}), \quad \eta^{-1} = \sigma = (\rho/\alpha)^{1/2}, \quad \alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b, \quad \rho = C^T P^0 C.$$

Операторы, сформулированные в утверждении, далее используются для проекционно-операторного представления задач оптимальной стабилизации положения равновесия или программного задания, исследуемых в данной работе.

**4. К вычислению управлений для задачи вычисления локально оптимальных стабилизирующих управлений положения равновесия.** В этом случае на основе соотношений (3) – (7) необходимо использовать функцию Лагранжа, которая для программной оптимальной стабилизации имеет вид [5, 8]

$$L = \|z(t)\|_2^2 + \lambda_0 \left( x(t) \left| - \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau - e^{At} x^0 \right| \right) + \lambda \left( \|z(t)\|_2^2 - r^2 \right). \quad (13)$$

Для задачи локально оптимальной стабилизации положения равновесия функционал качества следует из (11.а) при  $C(t) = 0$ . Как показано в [4, 5] вектор оптимальных управлений вычисляется оператором, следующим из (12.а), (12.б), имеющим вид

$$x_* = P^+b(t), \quad (14)$$

поскольку второе слагаемое в равенстве (12.б) равно нулю в силу  $C(t) = 0$ .

**Заключение.** Таким образом, сформулированы принципы вычисления оптимальных управлений в пространствах «состояний-

управлений» для объектов с моделями типа (1) или (3) для задач оптимальной стабилизации положения равновесия и задач оптимальной стабилизации программных воздействий. В отличие от классических методов оптимизации оптимальные управления вычислены на основе решения задач математического программирования, которые представлены в квазианалитических проекционных проекторов, позволяющих выполнить качественный анализ динамики систем с обратной связью.

Результаты исследований использованы для оптимизации систем управления частотой и активной мощностью энергетических объединений, для управления передачей углеводородов по линиям магистральных трубопроводных сетей, а также при исследовании процессов многослойной теплопроводности в твердых многослойных объектах.

### Список литературы

1. Козлов В. Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та им. А. А. Жданова, 1986. – 166 с.
2. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Заборовский В. С. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та им. А. А. Жданова, 1989. – 220 с.
3. Kozlov V. N. The Metod of Minimization of Linear Functionals Based on Compact Sets // Proceedings of the 12<sup>th</sup> international workshop on computer science and information technologies (CSIT 2010), Russia, Moscow-Saint-Petersburg, Russia, 2010. Volume 2. pp. 157–159.
4. Козлов В. Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость энергообъединений. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского политехнического университета, 2012. 177 с.
5. Козлов В. Н. Проекционный метод оптимизации оптимальных ограниченных управлений динамических систем. – СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2018. – 190 с.
6. Козлов В. Н. Операторы минимизации линейных и негладких функционалов на компактных множествах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, N 1(165), 2013. С. 164 – 170.
7. Козлов В. Н. Операторы минимизации нормы на компактных множествах евклидова пространства // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, N 3 (167), 2013.
8. Козлов В. Н., Ефремов А. А. Введение в функциональный анализ. – СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация вузов, 2018. – 79 с.

УДК 621.311

**Будник Светлана Владимировна**<sup>1</sup>,  
студент, бакалавр.

**Шашихин Владимир Николаевич**<sup>2</sup>,  
профессор, д-р техн. наук, профессор

## УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого»,  
<sup>1</sup>budnik.sveta@mail.ru, <sup>2</sup>shashihin@bk.ru

**Аннотация.** В работе предложен метод управления хаотической динамикой. Метод заключается во введении в нелинейную систему обратной связи по состоянию и изменении энтропии замкнутой системы для достижения желаемого результата – усиления хаоса в системе или перехода от хаотического к регулярному движению. Рассматривается решение с помощью предложенного метода задач стабилизации и усиления хаоса для системы Чуа.

**Ключевые слова:** управление хаосом, характеристические показатели Ляпунова, энтропия, обратная связь по фазовому вектору.

**Svetlana V. Budnik**<sup>1</sup>,  
student, bachelor.

**Vladimir N. Shashikhin**<sup>2</sup>,  
Professor, Doctor of Technical Sciences

## CONTROL OF CHAOTIC DYNAMICS FOR NONLINEAR SYSTEMS

Russia, Sankt-Petersburg,  
Peter the Great Sankt-Petersburg Polytechnic University,  
<sup>1</sup>budnik.sveta@mail.ru, <sup>2</sup>shashihin@bk.ru

**Abstract.** In the paper a method for controlling chaotic dynamics chaos is proposed. The method consists in introducing into the nonlinear system the feedback and change of the entropy of a closed system in order to achieve the desired result – amplification of chaos in a chaotic system or transition from chaotic to regular motion. With the help of the proposed method, chaos control in system of Chua is considered.

**Keywords:** Chaos control, Lyapunov characteristic parameters, entropy, coordinate feedback.

В настоящее время для управления хаотической динамикой используются методы на основе введения в нелинейную систему обратной связи по фазовому вектору. Метод линеаризации отображения Пуанкаре (метод OGY) [5] позволяет стабилизировать неустойчивые периодиче-

ские решения хаотической системы в окрестности неподвижной точки, соответствующей исходному циклу. Недостатком метода является неустойчивость неподвижной точки отображения Пуанкаре и необходимость точного знания параметров матрицы, соответствующей многообразиям неподвижной точки.

Метод Пирагаса обеспечивает стабилизацию периодической орбиты нелинейной системы путём построения обратной связи по фазовому вектору с запаздывающим аргументом [3]. Метод Пирагаса чувствителен к выбору времени запаздывания в зависимости от периода цикла, который, как правило, неизвестен в хаотических системах, поэтому достичь требуемой сходимости можно в редких случаях.

Также для управления хаотической динамикой используются традиционные подходы и методы автоматического управления [1]. Например, в работе [6] стабилизация хаотической системы осуществляется с помощью обратной связи по отклонению, а для выбора коэффициентов регулятора используется критерий Рауса-Гурвица.

Данная работа посвящена синтезу управления нелинейной системы путем введения обратной связи, которое позволяет решать задачи как усиления хаоса, так и его подавления. В качестве меры хаоса используется энтропия системы.

**Постановка задачи.** Пусть уравнения состояния автономной нелинейной динамической системы имеют вид:

$$\dot{x} = F(x) + bu(t), \quad (1)$$

где  $t \in R^1$  – время;

$x = x(t) \in R^n$  – вектор координат состояния;

$u = u(t) \in R^1$  – управляющее воздействие;

$F(x)$  – нелинейная вектор-функция;

$b$  - матрица (столбец) входных параметров.

Пусть при  $u(t) = 0$  любое решение  $x(t)$  системы (1) с начальными условиями из множества  $\Omega$ :  $x(0) = x_0 \in \Omega$  является хаотическим.

Рассмотрим задачу стабилизации хаотической системы (1), заключающуюся в подавлении хаотических колебаний путем приведения их к регулярным колебаниям или к стационарной точке с помощью управляющих воздействий и задачу усиления хаоса – увеличении меры хаоса (энтропии системы).

**Синтез обратной связи.** Методику синтеза регулятора рассмотрим для цепи Чуа [4], модель которой при использовании безразмерных переменных и коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1^3 - cx_1); \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь параметры модели равны:  $\alpha = 10$ ;  $\beta = 16$ ;  $c = -0,143$ .

Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (2) имеет вид

$$\lambda_1 = 0,3079; \quad \lambda_2 = -0,0179; \quad \lambda_3 = -2,8897.$$

и содержит положительный, нулевой и отрицательный характеристические показатели Ляпунова, что свидетельствует о наличии хаоса и, следовательно, аттрактор системы странный.

Энтропия системы связана с характеристическими показателями Ляпунова, при расчёте которых используется матрица Якоби. Предлагается изменить собственные числа матрицы Якоби в одной точке на траектории системы для изменения её энтропии. Причём чтобы не игнорировать собственную динамику системы, желательно выбирать собственные значения матрицы Якоби с минимальной зависимостью от фазовых координат.

Для системы Чуа матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(3x_1^2 + c) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Якобиан (3) при заданных параметрах системы зависит только от фазовой координаты  $x_1$ .

Выберем точку  $x^*$  на траектории неуправляемой системы (2), в которой необходимо изменить собственные числа Якобиана. Для этого рассмотрим зависимость собственных чисел Якобиана  $\{v_i\}_{i=1}^n$  от  $x_1$  на траектории системы (2), начинающейся в точке  $x(0) = [0,46619; 0,066858; -0,46044]^T$ . Графики изменения собственных чисел Якобиана от компоненты  $x_1$  представлены на рис. 1 – рис. 3.

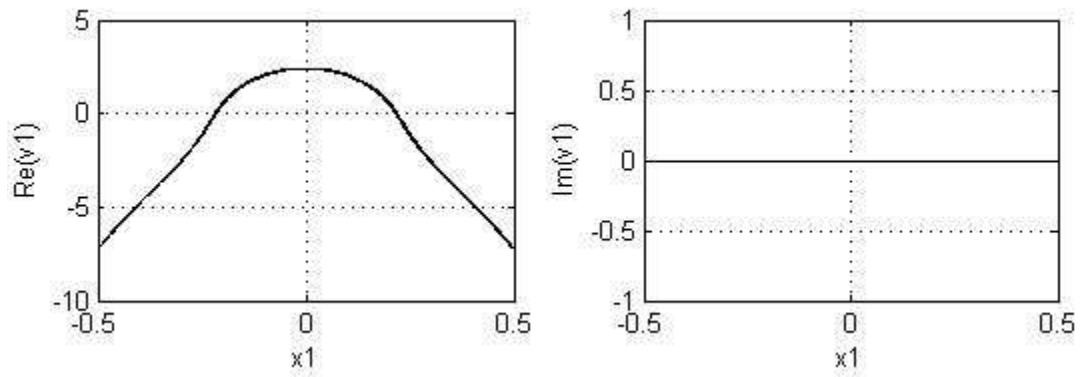


Рис. 1. Зависимость действительной и мнимой части  $v_1$  от  $x_1$

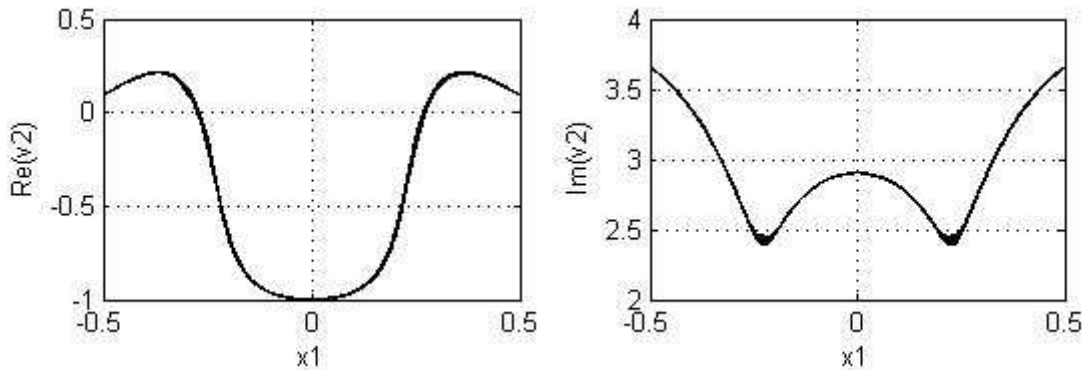


Рис. 2. Зависимость действительной и мнимой части  $v_2$  от  $x_1$

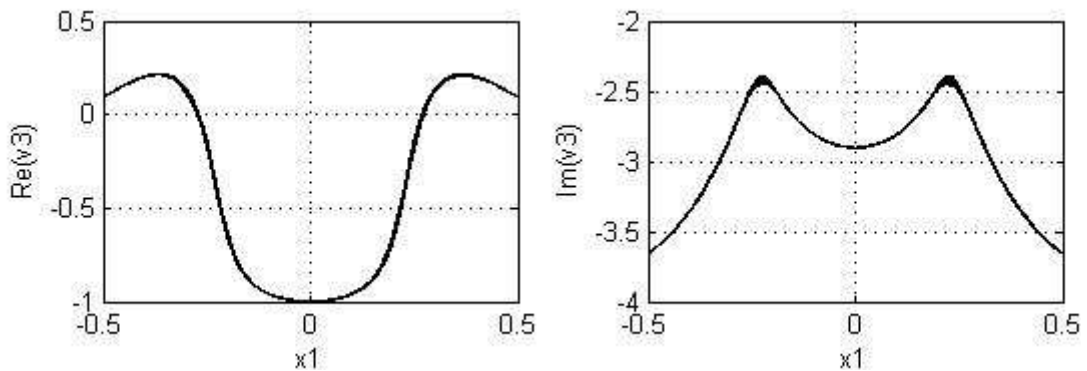


Рис. 3. Зависимость действительной и мнимой части  $v_3$  от  $x_1$

Из представленных графиков (см. рис. 1 – рис. 3) видно, что значения собственных чисел Якобиана симметричны относительно точки  $x_1 = 0$ , и эта точка является точкой локального экстремума функций  $v_i(x_1)$ . В качестве точки  $x^*$  выбираем точку, в которой  $x_1 = 0$ . В выбранной точке  $x^*$  матрица Якоби равна  $J^*$ , а вектор её собственных значений равен  $v^*$ :

$$v^* = \begin{bmatrix} 2,4283 + 0,0000i \\ -0,9991 + 2,9024i \\ -0,9991 - 2,9024i \end{bmatrix}.$$

Изменим исходную систему (2) так, чтобы в точке  $x^*$  Якобиан  $\bar{J}^*$  замкнутой системы имел заданные собственные значения:

$$\bar{v}^* = \alpha v^*,$$

где  $\alpha$  – коэффициент, близкий к единице.

Якобиан замкнутой системы-выберем в виде

$$\bar{J}^* = J^* + bk,$$

где  $k \in R^{1 \times n}$  – коэффициент обратной связи, который находится по методике синтеза модального регулятора [2].

При управлении первой компонентой фазового вектора система (2) с введённой обратной связью по состоянию принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1^3 - cx_1) + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3; \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим зависимость старшего показателя Ляпунова  $\lambda_1$  от  $\alpha$  при  $x_1 = 0$  (рис. 4).

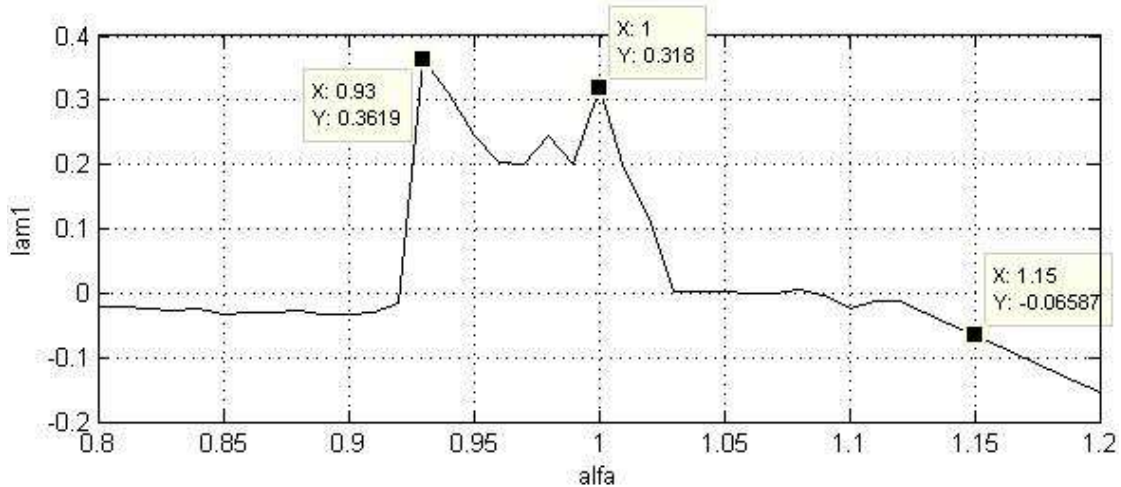


Рис. 4. Зависимость  $\lambda_1$  от  $\alpha$

Для системы (4) энтропия равна старшему характеристическому показателю Ляпунова  $\lambda_1$ , если он положителен. Выберем значение  $\alpha^*$  в зависимости от цели управления и введём в систему обратную связь по фазовому вектору с коэффициентом  $k^* \in R^{1 \times 3}$ , соответствующим  $\alpha^*$ . Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1^3 - cx_1) + k^* \cdot x; \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2. \end{cases} \quad (5)$$

*Задача усиления хаоса в системе (2).* Выберем по графику на рис. 4 коэффициент  $\alpha^* = 0,93$ . Ему соответствует коэффициент обратной связи, рассчитанный по методике синтеза модального регулятора, равный  $k^* = [-0,0300; 0,6475; 0,2498]$ .

Рассмотрим, как изменились спектр характеристических показателей Ляпунова и поведение траекторий системы (2) в фазовом пространстве после введения в неё обратной связи по состоянию. Спектр характеристических показателей Ляпунова замкнутой системы (5) равен

$$\lambda_1 = 0,3619; \lambda_2 = 0,0017; \lambda_3 = -2,5382.$$

Спектр характеристических показателей Ляпунова исходной системы без регулятора, рассчитанный выше равен

$$\bar{\lambda}_1 = 0,3180; \bar{\lambda}_2 = -0,0162; \bar{\lambda}_3 = -2,9026.$$

Старший характеристический показатель Ляпунова увеличился в  $\lambda_1/\bar{\lambda}_1 = 1,14$  раза. Следовательно, увеличилась энтропия замкнутой системы и её хаотичность.

График проекции траектории исходной системы (2) с начальными условиями  $x(0) = [0,46619; 0,066858; -0,46044]^T$  на фазовую плоскость  $x_1, x_2$  представлен на рис. 5.

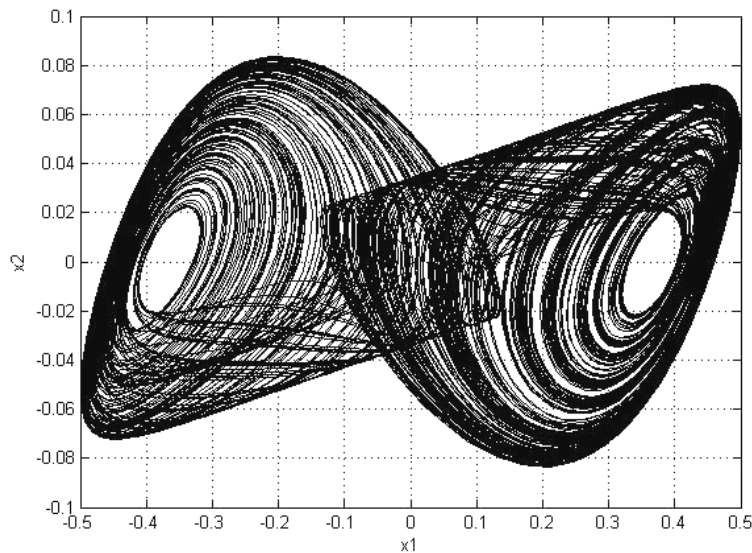


Рис. 5. Проекция траектории исходной системы на фазовую плоскость  $x_1, x_2$

График проекции траектории замкнутой системы с начальными условиями  $x(0) = [0,46619; 0,066858; -0,46044]^T$  на фазовую плоскость  $x_1, x_2$  представлен на рис. 6. Форма аттрактора исходной системы (2) после введения обратной связи стала более «запутанной».



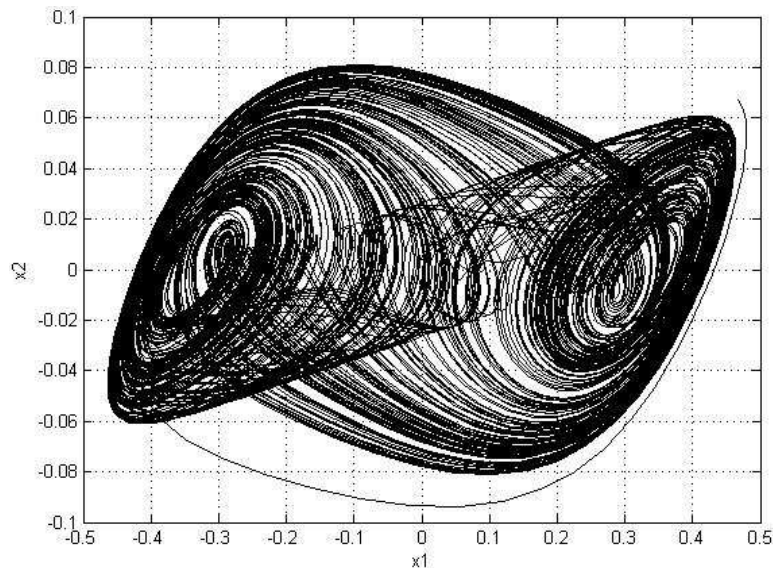


Рис. 6. Проекция траектории замкнутой системы на фазовую плоскость  $x_1, x_2$

*Задача стабилизации системы (2).* Из графика зависимости  $\lambda_1$  от  $\alpha$  (см. рис. 4) выберем  $\alpha^*$  так, чтобы подавить хаос в системе. Для этого подходят все  $\alpha$ , в которых  $\lambda_1 \leq 0$ . Выберем для стабилизации системы Чуа значение  $\alpha^* = 1,15$ . Ему соответствуют коэффициент обратной связи

$$k^* = [0.0646 \quad -1.5383 \quad -0.6802]$$

и спектр отрицательных характеристических показателей Ляпунова

$$\lambda_1 = -0,0659; \quad \lambda_2 = -0,0656; \quad \lambda_3 = -5,8984,$$

что свидетельствует об устойчивости замкнутой нелинейной системы.

График проекции траектории замкнутой системы с начальными условиями  $x(0) = [0,46619; 0,066858; -0,46044]^T$  на фазовую плоскость  $x_1, x_2$  представлен на рис. 7. Из графика видно, что аттрактор системы является регулярным в виде стационарной точки типа фокус.

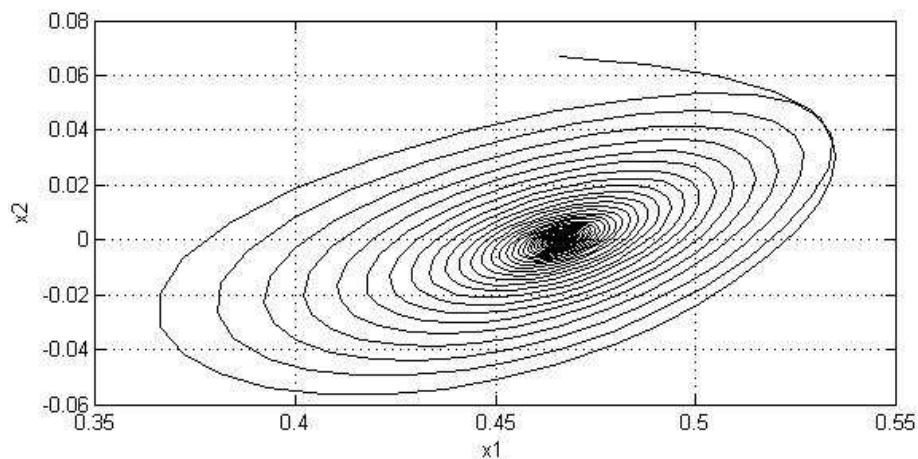


Рис. 7. Проекция траектории замкнутой системы на фазовую плоскость  $x_1, x_2$

**Заключение.** Для решения задач управления хаосом в работе предложен метод, основанный на введении обратной связи по состоянию и изменении энтропии замкнутой системы. Изменение энтропии осуществляется за счёт введения вектора коэффициентов обратной связи, который находится по методике синтеза модального регулятора. Желаемые собственные числа Якобиана замкнутой системы связаны с собственными числами Якобиана исходной системы коэффициентом пропорциональности. Работоспособность метода проверена на нелинейной хаотической системе – системе Чуа.

#### **Список литературы**

1. Андриевский Б.Р. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5. – С. 3–45.
2. Козлов В.Н. Теория автоматического управления: учеб. пособие по курсовому проектированию / В.Н. Козлов, В.Е. Куприянов, В.Н. Шашихин – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 127 с.
3. Шашихин В.Н. Хаос и нелинейная динамика. Регулярная и хаотическая динамика: учеб. пособие / В.Н. Шашихин – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 211 с.
4. Chua L.O. Bifurcation Analysis of Chua's Circuit / L.O. Chua, L.T. Huynh // [1992] Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems. 1992. pp. 746–751.
5. Ott E. Controlling chaos / E. Ott, C. Grebogi, G. Yorke // Phys. Rev. Lett. 1990. V.64. (11) 1196–1199.
6. Yamapi R. Harmonic oscillations, stability and chaos control in a non-linear electromechanical system / R. Yamapi, J.B. Chabi Orou // Journal of Sound and Vibration. 2003. 259(5). pp. 1253–1264.

**УДК 533**

***Ефремов Артем Александрович,**  
канд. физ.-мат. наук, доцент,  
**Козлов Владимир Николаевич,**  
д-р тех. наук, профессор*

### **СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕДИНЕНИЙ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ ГЕНЕРАТОРОВ В ФАЗНЫХ ОСЯХ**

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого,  
<sup>1</sup>v1945kozlov@yandex.ru, <sup>2</sup>eartm@mail.ru

**Аннотация.** На базе дифференциальных уравнений электромагнитных процессов синхронного генератора в фазных осях выводится модифицированная структурно-инвариантная модель электроэнергетических объединений.

**Ключевые слова:** синхронный генератор, структурно-инвариантная модель, уравнения в фазных осях, электромагнитные процессы, анализ динамики.

**Artem A. Efremov**<sup>1</sup>,

PhD, Associate Professor

**Vladimir N. Kozlov**<sup>2</sup>,

Doctor of Technichn Sciences, Professor

## STRUCTURAL-INVARIANT MODEL OF POWER ASSOCIATIONS ON THE BASIS OF THE GENERATOR EQUATIONS IN PHASE AXES

Russia, St. Petersburg, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
<sup>1</sup>earm@mail.ru, <sup>2</sup>v1945kozlov@yandex.ru

**Abstract.** On the basis of the differential equations of electromagnetic processes of a synchronous generator in phase axes, a modified structurally invariant model of electrical power associations is derived.

**Keywords:** synchronous generator, structurally invariant model, electromagnetic processes, equations in phase axes

**Введение.** В работах [1–3] рассматривается методика синтеза структурно-инвариантных уравнений совместной динамики электромеханических (ЭМХ-процессов) и электромагнитных (ЭМГ-процессов) процессов синхронных генераторов на базе уравнений Парка-Горева. В данной работе синтезированы структурно-инвариантные дифференциальные операторы в качестве модели электроэнергетических объединений для анализа совместной динамики на базе уравнений синхронного генератора в фазных осях.

**1. Исходные уравнения.** Уравнения Парка-Горева исследованы во многих работах. В отличие от работ [2, 3] в качестве исходных уравнений дифференциальных уравнений электромагнитных процессов синхронного генератора выбраны уравнения в фазных осях [4–6]. Эти уравнения определяют ЭМГ-процессы в статорных обмотках

$$U_{sa} = \psi'_a + R_a \cdot I_a, \quad U_{sb} = \psi'_b + R_b \cdot I_b, \quad U_{sc} = \psi'_c + R_c \cdot I_c, \quad (1)$$

и обмотках ротора (обмотка возбуждения и две демпферные обмотки)

$$u_f = \psi'_f + i_f r_f, \quad 0 = \psi'_D + i_D r_D, \quad 0 = \psi'_Q + i_Q r_Q, \quad (2)$$

где  $U_{sa}, U_{sb}, U_{sc}$ , – напряжения фаз сети;  $I_a, I_b, I_c$ , – токи в обмотках ста-

тора и  $\psi_a, \psi_b, \psi_c$  – потокосцепления обмоток статора;  $R_a, R_b, R_c$ , – активные сопротивления обмоток статора,  $U_f$  – в обмотке возбуждения;  $I_f$  – ток в обмотке возбуждения;  $\psi_f$  – потокосцепление и  $R_f$  – сопротивление в обмотки возбуждения;  $I_D, I_Q$  – токи, индуцированные в демпферных обмотках;  $\psi_D, \psi_Q$  – потокосцепления и  $R_D, R_Q$  – сопротивления в демпферных обмотках продольного и поперечного успокоительных контуров.

В общем виде связи между потокосцеплениями и токами синхронного генератора описываются матрицей индуктивностей [5, 6]:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_f \\ I_D \\ I_Q \end{bmatrix}, \quad (3)$$

которой соответствует следующая система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_a &= L_{aa}I_a + L_{ab}I_b + L_{ac}I_c + L_{fa}I_f + L_{Da}I_D + L_{Qa}I_Q; \\ \psi_b &= L_{ba}I_a + L_{bb}I_b + L_{bc}I_c + L_{fb}I_f + L_{Db}I_D + L_{Qb}I_Q; \\ \psi_c &= L_{ca}I_a + L_{cb}I_b + L_{cc}I_c + L_{fc}I_f + L_{Dc}I_D + L_{Qc}I_Q; \\ \psi_f &= L_{fa}I_a + L_{fb}I_b + L_{fc}I_c + L_{ff}I_f + L_{Df}I_D; \\ \psi_D &= L_{Da}I_a + L_{Db}I_b + L_{Dc}I_c + L_{Df}I_f + L_{DD}I_D; \\ \psi_Q &= L_{Qa}I_a + L_{Qb}I_b + L_{Qc}I_c + L_{QQ}I_Q. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (3) - (4) параметры  $L_{jk}$  ( $L_{jk} = L_{kj}$ ) определяют собственные индуктивности при  $j = k$  и взаимные индуктивности при  $j \neq k$ .

**2. Преобразования уравнений.** Подставляя значения потокосцеплений из (4) в уравнения (1) и (2), можно получить для координат «напряжения - токи» систему дифференциальных уравнений синхронного генератора

$$\begin{aligned}
U_{sa} &= L_{aa}I'_a + L_{ab}I'_b + L_{ca}I'_c + L_{fa}I'_f + L_{Da}I'_D + L_{Qa}I'_Q + R_a \cdot I_a, \\
U_{sb} &= L_{ba}I'_a + L_{bb}I'_b + L_{cb}I'_c + L_{fb}I'_f + L_{Db}I'_D + L_{Qb}I'_Q + R_b \cdot I_b, \\
U_{sc} &= L_{ca}I'_a + L_{cb}I'_b + L_{cc}I'_c + L_{fc}I'_f + L_{Dc}I'_D + L_{Qc}I'_Q + R_c \cdot I_c, \\
U_f &= L_{fa}I'_a + L_{fb}I'_b + L_{cf}I'_c + L_{ff}I'_f + L_{Df}I'_D + R_f I_f, \\
0 &= L_{Da}I'_a + L_{Db}I'_b + L_{cD}I'_c + L_{fD}I'_f + L_{DD}I'_D + R_D I_D, \\
0 &= L_{Qa}I'_a + L_{Qb}I'_b + L_{cQ}I'_c + L_{QQ}I'_Q + R_Q I_Q.
\end{aligned} \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения типа (5) для  $i$ -го синхронного генератора имеют матричную форму:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{I}'_i + \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i = \mathbf{U}_i. \tag{6}$$

Векторы и матрицы системы (6) определяются совокупностью следующих равенств:  $\mathbf{I}'_i = (i'_{ai}, i'_{bi}, i'_{ci}, i'_{fi}, i'_{Di}, i'_{Qi})^T$  – вектор производных токов синхронного генератора в фазных координатах;  $\mathbf{I}_i = (i_{ai}, i_{bi}, i_{ci}, i_{fi}, i_{Di}, i_{Qi})^T$  – вектор токов синхронного генератора в фазных координатах;  $\mathbf{U}_i = (u_{ai}, u_{bi}, u_{ci}, u_{fi}, 0, 0)^T$  – вектор напряжений синхронного генератора;  $\mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{L}_i$  – *матрицы числовых параметров* синхронного генератора

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix}.$$

С учетом значений индуктивности из [5, 6] *матрицу функциональных параметров*  $\mathbf{L}$  можно представить в блочном виде

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1i} & \mathbf{L}_{2i} \\ \mathbf{L}_{3i} & \mathbf{L}_{4i} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Блочные подматрицы в матрице (7) определяются равенствами

$$\mathbf{L}_{1i} = \begin{bmatrix} L_s + L_m \operatorname{cs} 2\theta & -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta + \pi/6) & -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 5\pi/6) \\ -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta + \pi/6) & L_s + L_m \operatorname{cs} 2(\theta - 2\pi/3) & -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta - \pi/2) \\ -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 5\pi/6) & -M_s - L_m \operatorname{cs} 2(\theta - \pi/2) & L_s + L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{2i} = \begin{bmatrix} M_f \operatorname{cs} \theta & M_D \operatorname{cs} \theta & M_Q \operatorname{sn} \theta \\ M_f \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta - 2\pi/3) \\ M_f \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{3i} = \begin{bmatrix} M_f \operatorname{cs} \theta & M_f \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_f \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) \\ M_D \operatorname{cs} \theta & M_D \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) \\ M_Q \operatorname{sn} \theta & M_Q \operatorname{sn}(\theta - 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{4i} = \begin{bmatrix} L_f & M_R & 0 \\ M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix}.$$

Можно отметить, что матрица (7) является суммой числовой и функциональной матриц так, что  $L_i = L_{ci} + L_{\theta i}$ , где

$$\mathbf{L}_{ci} = \begin{bmatrix} L_s & -M_s & -M_s & 0 & 0 & 0 \\ -M_s & L_s & -M_s & 0 & 0 & 0 \\ -M_s & -M_s & L_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_f & M_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{\theta i} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\theta 1} & \mathbf{L}_{\theta 2} \\ \mathbf{L}_{\theta 3} & \mathbf{L}_{\theta 4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{\theta 1} = \begin{bmatrix} L_m \operatorname{cs} 2\theta & -L_m \operatorname{cs} 2(\theta + \pi/6) & -L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 5\pi/6) \\ -L_m \operatorname{cs} 2(\theta + \pi/6) & L_m \operatorname{cs} 2(\theta - 2\pi/3) & -L_m \operatorname{cs} 2(\theta - \pi/2) \\ -L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 5\pi/6) & -L_m \operatorname{cs} 2(\theta - \pi/2) & L_m \operatorname{cs} 2(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{\theta 2} = \begin{bmatrix} M_f \operatorname{cs} \theta & M_D \operatorname{cs} \theta & M_Q \operatorname{sn} \theta \\ M_f \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta - 2\pi/3) \\ M_f \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{\theta 3} = \begin{bmatrix} M_f \operatorname{cs} \theta & M_f \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_f \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) \\ M_D \operatorname{cs} \theta & M_D \operatorname{cs}(\theta - 2\pi/3) & M_D \operatorname{cs}(\theta + 2\pi/3) \\ M_Q \operatorname{sn} \theta & M_Q \operatorname{sn}(\theta - 2\pi/3) & M_Q \operatorname{sn}(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{\theta 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу (6) обобщенные дифференциальные уравнения в форме Коши для

ЭМГ-процессов  $i$ -го синхронного генератора примут вид

$$\mathbf{I}'_i = -(\mathbf{L}_{ci} + \mathbf{L}_{\theta i})^{-1} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i + (\mathbf{L}_{ci} + \mathbf{L}_{\theta i})^{-1} \mathbf{U}_i, \quad (8)$$

**3. Структурно инвариантные уравнения совместной динамики ЭМХ и ЭМГ – процессов.** Структурно инвариантная модель электро-энергетических объединений, учитывающая ЭМГ-процессы, формируется по методике [1-3] заменой скалярных параметров на матричные параметры. В результате можно получить дифференциальные операторы

$$\mathbf{I}'_{\text{ЭМГ}} = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{I} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}'_a \\ \mathbf{I}'_b \\ \mathbf{I}'_c \\ \mathbf{I}'_f \\ \mathbf{I}'_D \\ \mathbf{I}'_Q \end{bmatrix} = -\mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_b & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_c & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_f & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_D & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \\ \mathbf{I}_c \\ \mathbf{I}_f \\ \mathbf{I}_D \\ \mathbf{I}_Q \end{bmatrix} + \mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где обобщенные векторы координат состояний ЭМГ-уравнений для синхронных генераторов определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= (I_{a1}, I_{a2}, \dots, I_{an})^T, \quad \mathbf{I}_b = (I_{b1}, I_{b2}, \dots, I_{bn})^T, \quad \mathbf{I}_c = (I_{c1}, I_{c2}, \dots, I_{cn})^T, \\ \mathbf{I}_f &= (I_{f1}, I_{f2}, \dots, I_{fn})^T, \quad \mathbf{I}_D = (I_{D1}, I_{D2}, \dots, I_{Dn})^T, \quad \mathbf{I}_Q = (I_{Q1}, I_{Q2}, \dots, I_{Qn})^T, \\ \mathbf{U}_a &= (U_{a1}, U_{a2}, \dots, U_{an})^T, \quad \mathbf{U}_b = (U_{b1}, U_{b2}, \dots, U_{bn})^T, \\ \mathbf{U}_c &= (U_{c1}, U_{c2}, \dots, U_{cn})^T, \quad \mathbf{U}_f = (U_{f1}, U_{f2}, \dots, U_{fn})^T. \end{aligned}$$

а функциональные матрицы относительно частот и параметрические матричные параметры введены равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \text{diag}(R_{ai})_{i=1}^n, \quad \mathbf{R}_b = \text{diag}(R_{bi})_{i=1}^n, \quad \mathbf{R}_c = \text{diag}(R_{ci})_{i=1}^n, \\ \mathbf{R}_f &= \text{diag}(R_{fi})_{i=1}^n, \quad \mathbf{R}_D = \text{diag}(R_{Di})_{i=1}^n, \quad \mathbf{R}_Q = \text{diag}(R_{Qi})_{i=1}^n. \end{aligned}$$

Объединяя структурно-инвариантные уравнения ЭМГ-процессов

(10) и структурно-инвариантные уравнения ЭМХ-процессов, по методике, предложенной в работах [1, 2], можно сформулировать структурно-инвариантные блочные дифференциальные операторы для описания совместной динамики ЭМХ и ЭМГ– процессов энергообъединений. Тогда полученные дифференциальные операторы примут вид

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}, \quad (11)$$

где векторы и матричные операторы определяются равенствами

$$\mathbf{X} = [\mathbf{I}_a \quad \mathbf{I}_b \quad \mathbf{I}_c \quad \mathbf{I}_f \quad \mathbf{I}_D \quad \mathbf{I}_Q \quad \Phi \quad \Omega \quad \mathbf{P} \quad \Sigma]^T,$$

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_b & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_c & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_f & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_D & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{R}_Q \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ -\bar{\mathbf{T}}_a \mathbf{R}_\rho & -\bar{\mathbf{T}}_a \mathbf{T}_y & \bar{\mathbf{T}}_a & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \bar{\mathbf{T}}_\Pi \mathbf{K}_\Omega & -\bar{\mathbf{T}}_\Pi & \bar{\mathbf{T}}_\Pi \mathbf{K}_\Pi \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & -\bar{\mathbf{T}}_C \end{bmatrix}.$$

Блочные матрицы  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{A}_3$  определяют связь между ЭМХ и ЭМГ – процессами в энергетических системах.

**Заключение.** Структурно-инвариантные дифференциальные операторы являются основными моделями для решения комплекса задач анализа и синтеза систем управления перетоками активной мощности в крупных энергообъединениях с учетом воздействия систем регулирования напряжения. При этом имеется возможность квазианалитического исследования хаотической динамики на основе спектрального метода для функциональных матриц [7 – 10], который позволяет исследовать «спектрально-фазовую динамику на основе выделенных блочных матриц» или непосредственно спектр матриц Якоби, предложенный чл.-корр. РАН Г.А. Леоновым.



### Список литературы

1. Козлов В.Н. Управление частотой и перетоками активной мощности электроэнергетических объединений с учетом энергетической безопасности // Известия РАН. «Энергетика», № 3, 2012.
2. Козлов В.Н., Г.А. Рябов, А.А. Ефремов, И.У. Тресько. Структурно-инвариантные уравнения энергообъединений для синтеза систем ограничения перетоков и регулирования напряжений. Сборник научных трудов XIX Международной научно-практической конференции, СПб.: Политехн. ун-т, 2015.
3. Ефремов А.А. Модифицированная структурно-инвариантная модель электроэнергетических объединений. Сборник научных трудов XXI Международной научно-практической конференции, СПб.: Политехн. ун-т, 2017.
4. Горев А.А. Переходные процессы синхронной машины. Автор: Александр Александрович Горев. Л. – М.: Госэнергоиздат, 1950.
5. Андерсон П., Фуад А. Управление энергосистемами и устойчивость: М. – Энергия, 1980.
6. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: – Высш. шк., 1985.
7. Козлов В.Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость энергообъединений. Изд-во Политехн. ун-та. 2012. 177 с.
8. Козлов В.Н., Тресько И.У. Регулярная и хаотическая динамика крупных энергообъединений. Изв. РАН- серия «Энергетика». 2016 г., № 1. С. 1-6.
9. Козлов В.Н., А.А. Ефремов, И.У. Тресько. Спектральный метод анализа хаотических режимов динамических систем. Труды XXII Международной научно-практической конференции «Системный анализ в проектировании и управлении». СПб.: 2018.
10. Козлов В.Н. Проекционный метод синтеза оптимальных ограниченных управлений динамических систем. Межвузовская издательская ассоциация. СПб.: 2018.- 140 с.

УДК 681.5

**Саитова Гузель Асхатовна<sup>1</sup>**,  
доцент, канд. техн. наук, доцент,  
**Елизарова Анастасия Валерьевна<sup>2</sup>**,  
инженер каф. АСУ

### ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Россия, Уфа, Уфимский государственный авиационный  
технический университет,

<sup>1</sup> [saitova@bk.ru](mailto:saitova@bk.ru)

<sup>2</sup> [elizarovaanastasia@gmail.com](mailto:elizarovaanastasia@gmail.com)

**Аннотация.** Задача управления объектами с запаздыванием довольно непростая. Наличие задержки в контуре управления приводит к возрастанию фазового сдвига, что способна спровоцировать неустойчивость системы. В работе предлагается исследование нелинейной многосвязной системы автоматического управления

объектом с запаздываниями (по управлению и выходу) частотными методами, на основе метода гармонической линеаризации и системного описания характеристик МСАУ. Рассматривается МСАУ с нелинейным элементом и запаздыванием в прямых каналах, при условии, что данная МСАУ состоит из множества идентичных сепаратных подсистем, взаимные связи между подсистемами однократные. Используя частотные методы определены параметры ПД в нелинейных однотипных МСАУ и оценена их устойчивость. В работе приведены примеры, наглядно демонстрирующие использование предложенных методик для оценки устойчивости МСАУ и нахождения параметров ПД. Результаты исследования подтверждены путем моделирования с использованием пакета MATLAB SIMULINK.

**Ключевые слова:** многосвязная система автоматического управления, запаздывание, нелинейный элемент, периодические движения, частотный метод, устойчивость, прямые каналы.

***Guzel A. Saitova***<sup>1</sup>,

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

***Anastasia V. Elizarova***<sup>2</sup>,

Engineer of the department of ACS

## INVESTIGATION OF NONLINEAR MULTI-CONNECTED SYSTEMS OF AUTOMATIC CONTROL WITH DELAY

Russia, Ufa, Ufa State Aviation Technical University,

<sup>1</sup> [saitova@bk.ru](mailto:saitova@bk.ru)

<sup>2</sup> [elizarovaanastasia@gmail.com](mailto:elizarovaanastasia@gmail.com)

**Abstract.** The problem of controlling objects with time delay is quite complicated. The presence of a delay in the control loop leads to an increase in the phase shift, which can provoke instability of the system. The paper proposes a study of a nonlinear multi-connected system of automatic control (MSAC) of an object with a delay by frequency methods, based on the method of harmonic linearization and a system description of the characteristics of a multi-connected automatic control system. A nonlinear multi-connected automatic control system with delay in direct channels is considered. The nonlinear multi-connected automatic control system with delay consists of a set of identical separate subsystems and mutual connections between subsystems are single. With the help of frequency methods, the parameters of periodic motions (PM) in nonlinear homogeneous multi-connected automatic control systems with delay (amplitude and frequency of self-oscillations) are determined and their stability is estimated according to the proposed criteria. The paper presents examples that demonstrate the use of the proposed techniques to assess the stability of a nonlinear multi-connected system of automatic control of the object with delay both in direct communication channels and cross and finding the parameters (amplitude and frequency) of periodic movements. The results of the study were confirmed by simulation using MATLAB SIMULINK package.

**Keywords:** multi-connected systems of automatic control, delay, nonlinear element, periodic motion, frequency method, stability, direct channels.

Во многих современных технических объектах управления (ОУ) можно наблюдать явление запаздывания, заключающееся в том, что с началом изменения сигнала на входе ОУ сигнал на выходе объекта начинает изменяться только через некоторый интервал времени. Примером объектов с запаздываниями по управлению могут служить реактивные двигатели в переходных режимах, ленточные транспортеры, прокатные станы, процессы сушки и горения, по состоянию – процессы с рециклом, в частности, процессы в измельчительных машинах или процессы в химических реакторах, по выходу – объекты управления с более инерционными датчиками измерения, чем сам объект [1,7].

Как правило, влияние запаздываний на процессы управления негативно. Поэтому методы исследования систем управления для вышеперечисленных объектов, не учитывающие фактор запаздывания, оказываются малоэффективными. Проблема конструирования подобных систем управления еще более усложняется в случае, если объект управления является многосвязным и нелинейным.

Известно большое количество работ, посвященных исследованию систем автоматического управления (САУ) с запаздыванием по управлению с одним входом и одним выходом. Многомерным (многосвязным) системам управления с запаздываниями посвящено небольшое количество научных работ.

В работе предлагается исследование многосвязной нелинейной системы автоматического управления объектом с запаздываниями (по управлению и выходу) частотными методами, на основе метода гармонической линеаризации и системного описания характеристик МСАУ [3].

### 1. Постановка задачи

Будем считать в дальнейшем, что данный класс многосвязных систем состоит из множества идентичных сепаратных и взаимные связи между подсистемами однократные (рис.1).

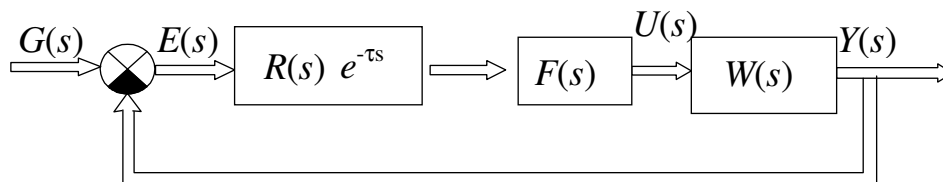


Рис. 1. Структура нелинейной однотипной МСАУ с запаздыванием

Для систем с нелинейностями в прямых каналах сепаратных подсистем) в качестве локальной характеристики гармонически линеаризованной  $i$ -ой подсистемы можно рассмотреть ее передаточную функцию  $\Phi i(s,a)$  в режиме управления:

$$\Phi_i(s,a)=\frac{W_{hi}[q_i(a),q'_i(a)]W_{ii}(s)e^{-\tau s}}{1+W_{hi}[q_i(a),q'_i(a)]W_{ii}(s)e^{-\tau s}}, \quad (1)$$

где  $W_{hi}[q_i(a),q'_i(a)]$  – передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента  $i$ -ой сепаратной подсистемы;  $q(a), q'(a)$  – коэффициенты гармонической линеаризации;  $W_{ii}(s)e^{-\tau s}$  – передаточные функции линейного многомерного объекта с запаздыванием  $\tau$  по  $i$ -му каналу и регулятора  $i$ -ой сепаратной подсистемы [6].

Для класса нелинейных однотипных МСАУ справедлива гипотеза идентичности динамических характеристик гармонически линеаризованных подсистем, содержащих в своем составе идентичные нелинейные элементы:

$$\Phi_1[q_1(a),q'_1(a),s]=\Phi_2[q_2(a),q'_2(a),s]=\dots=\Phi[q(a),q'(a),s].$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной однотипной МСАУ можно записать в следующей форме [2]:

$$1+h_2\Phi^2[q(a),q'(a),s]+h_3\Phi^3[q(a),q'(a),s]+\dots+h_n\Phi^n[q(a),q'(a),s]=0, \quad (2)$$

где  $h_i$  ( $i=\overline{2,n}$ ) – обобщенные числовые характеристики многомерных элементов связи между сепаратными подсистемами, вычисляемые по формулам, предложенным в [2].

Ведем в рассмотрение алгебраическое уравнение связи относительно некоторой переменной  $x=\Phi[q(a),q'(a),s]$ , полученное из (2):

$$1+h_2x^2+h_3x^3+\dots+h_nx^n=0 \quad (3)$$

$\{x_i\}$  – множество корней уравнения (3), где  $i=1,2 \dots n$

По частотному критерию: условием наличия в данной системе периодических движений (ПД) является прохождение локальной амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФХ)  $\Phi(a,j\omega)$  гармонически линеаризованной подсистемы через один из корней множества  $\{x_i\}$ , играющих роль критических точек.

При изменении  $0 < a < \infty$  деформируется форма годографа  $\Phi(a,j\omega)$ . В общем случае критической точкой будет корень  $x_i^* = \alpha_i - j\beta_i$ , через которую проходит АФХ  $\Phi(a,j\omega)$ . Тогда справедливо равенство

$$\Phi(a,j\omega)=\frac{W_{hi}[q_i(a),q'_i(a)]W_{ii}(s)e^{-\tau s}}{1+W_{hi}[q_i(a),q'_i(a)]W_{ii}(s)e^{-\tau s}}=x_i^*, \quad (4)$$

Рассмотрим нелинейную однотипную МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях. Тогда в характеристическом уравнении (2) для полной МСАУ, состоящей из  $n$  подсистем, характеристика связи (ХС) в

общем виде между  $k$  подсистемами имеет вид: 
$$h_k^*(s) = \frac{\det [W_{ij}(s)\gamma_{ij}]_{k \times k}}{\det [W_{ij}(s)\delta_{ij}]_{k \times k}},$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ e^{-\tau s}, & i \neq j, \end{cases}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad k = \overline{2, n}; \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

а локальная характеристика гармонически линеаризованной  $i$ -ой подсистемы  $\Phi_i(s, a) = \frac{W_{ni}(a)W_{ii}(s)}{1 + W_{ni}(a)W_{ii}(s)}$ . Наличие ПД в нелинейной МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях выполнение условия:

$$\Phi_i(s, a) = \frac{W_{ni}(a)W_{ii}(s)}{1 + W_{ni}(a)W_{ii}(s)} = x_i^*(s, \tau) \quad (5)$$

Таким образом, на основе равенства (4) и (5) можно, используя частотные методы, определить параметры амплитуды  $a_i^*$  и частоты  $\omega_i^*$  ПД в нелинейных однотипных МСАУ с запаздыванием и оценить их устойчивость [3].

## 2. Определение параметров периодических движений

Определяем параметры, амплитуду  $a_i^*$  и частоту  $\omega_i^*$ , периодических движений. Выделим линейные и нелинейные характеристики разомкнутой подсистемы из уравнения (4):

$$W_n(a)W(j\omega)e^{-\tau j\omega} = \frac{\Phi(a, j\omega)}{1 - \Phi(a, j\omega)}, \quad (6)$$

где  $W_n(a) = q(a) + jq'(a)$ ,

$$\begin{aligned} W_3(j\omega) &= W(j\omega)e^{-\tau j\omega} = (U(\omega) + jV(\omega))(\cos \omega\tau - j\sin \omega\tau) = \\ &= (U(\omega)\cos \omega\tau - V(\omega)\sin \omega\tau) + j(V(\omega)\cos \omega\tau - U(\omega)\sin \omega\tau) = \\ &= U_3(\omega) + jV_3(\omega). \end{aligned}$$

Подставляем  $x_i^*$  вместо  $\Phi(a, j\omega)$  в уравнение (6):

$$W_n(a)W_3(j\omega) = \frac{x_i^*}{1 - x_i^*} = c_i + jd_i. \quad (7)$$

Для решения уравнения (7) выделим линейные части системы и воспользуемся двумя скалярными уравнениями:

$$\begin{cases} |W_3(j\omega)| = \frac{|c_i + jd_i|}{|W_H(a)|}; \\ \arg W_3(j\omega) = \arg(c_i + jd_i) - \arg W_H(a); \end{cases}$$

или можно записать

$$\begin{cases} \sqrt{U_3^2(\omega) + V_3^2(\omega)} = \frac{\sqrt{c_i^2 + d_i^2}}{\sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}}; \\ \arctg \frac{V_L(\omega)}{U_L(\omega)} - \arctg(\omega t) = \arctg\left(\frac{d_i}{c_i}\right) - \arctg\left(\frac{q'(a)}{q(a)}\right); \end{cases}.$$

Решив систему из двух уравнений, найдем значения  $a^*$  и  $\omega^*$ .

### 3. Анализ устойчивости периодических движений в нелинейной МСАУ

Для определения параметров ПД и анализа их устойчивости можно воспользоваться графоаналитическим методом, состоящим из следующих этапов:

1. Найдем корни  $x_i$  уравнения связи (3);
2. Из уравнения (7) выделим линейную и нелинейную части системы

$$W_3(j\omega) = Z_H^*(ja), \text{ где } Z_H^*(ja) = \frac{1}{W_H(a)} \frac{x_i^*}{1 - x_i^*} = \frac{c_i + jd_i}{W_H(a)}.$$

3. Построим на комплексной плоскости  $W_3(j\omega)$  и  $Z_H^*(ja)$ ;
4. Определим параметры  $a_i^*$  и  $\omega_i^*$  периодических движений по точке пересечения характеристик  $W_3(j\omega)$  и  $Z_H^*(ja)$ ;
5. Оценить устойчивость периодических движений по частотному критерию [5].

Периодические движения в нелинейной однотипной МСАУ будут устойчивыми, если при увеличении (уменьшении) амплитуды  $a^*$  на  $\Delta a$  в точке, соответствующей пересечению годографов  $W_3(j\omega)$  и  $Z_H^*(ja)$ , АФХ  $W_3(j\omega)$  не охватывает новую точку  $a = a^* + \Delta a$ , в противном случае ПД будет неустойчивым [3,4].

**Пример 1.** Исследуем двухсвязную систему (рис. 1) на наличие автоколебаний при наличии нелинейного элемента типа «насыщения» (рис. 2) и запаздываний в подсистемах.

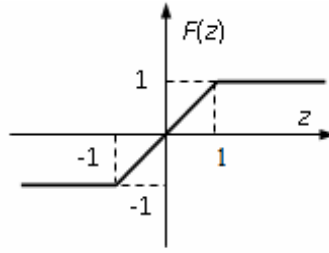


Рис.2. Нелинейный элемент типа «насыщение»

Коэффициенты гармонической линеаризации для характеристики  $F(z)$  типа «насыщение» равны:

$$q(a) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \text{ при } a \geq b; b=1$$

$$q(a) = k \text{ при } a < b;$$

$$q'(a) = 0.$$

Передаточная функция двухмерного объекта с запаздыванием

$$W_{ij}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, i=j=1,2; \tau=1.$$

Рассмотрим решение этой задачи поэтапно.

1. Передаточные функции  $\Phi_i(s, a)$ ,  $i=1,2$  сепаратных каналов в режиме управления

$$\Phi(a, s) = \frac{W_{\text{н}}(a)W(s)e^{-\tau s}}{1 + W_{\text{н}}W(s)e^{-\tau s}} = \frac{q(a)e^{-\tau s}}{s^2 + s + q(a)e^{-\tau s}}.$$

Характеристическое уравнение системы

$$1 + h_2 \Phi(a, j\omega, e^{-\tau s})^2 = 0, \text{ где } h_2 = 4.$$

Уравнение связи

$$1 + 4x^2 = 0$$

Корни уравнения связи равны  $x_1 = +j0.5$ ,  $x_2 = -j0.5$ .

2. Выделим линейную и нелинейную части системы

$$W_3(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{(j\omega)^2 + j\omega}; \quad Z_{\text{н}}^*(ja) = \frac{x_2}{1 - x_2} \cdot \frac{1}{W_{\text{н}}(ja)} = \frac{-0.2 - 0.4j}{q(a)},$$

3. Построим на комплексной плоскости годографы  $W_3(j\omega)$  и  $Z_{\text{н}}^*(ja)$  (рис. 3).

4. Из рисунка 3 видно, что в системе присутствуют ПД. В точке 1 пересекаются годографы  $W_3(j\omega)$  и  $Z_{\text{н}}^*(ja)$  при запаздывание  $\tau=1$  с

параметрами ПД  $a=11.8$ ,  $\omega=0.23$  (рис. 4), в точке 2 при запаздывании  $\tau=0$  с параметрами ПД  $a=4.9$ ,  $\omega=0.5$  (рис. 5).

5. Оценим устойчивость периодических движений по частотному критерию [5].

6. Периодические движения в исследуемой системе устойчивы, т.к. при увеличении амплитуды  $a^*$  на  $\Delta a$  в точках 1 и 2, соответствующей пересечению годографов  $W_3(j\omega)$  и  $W(j\omega)$  с годографом  $Z_n^*(ja)$ , АФХ  $W_3(j\omega)$  и  $W(j\omega)$  не охватывают новую точку  $a=a^*+\Delta a$ .

7. Результаты подтверждают переходные процессы (рис. 4, 5), полученные путем моделирования исходной системы.

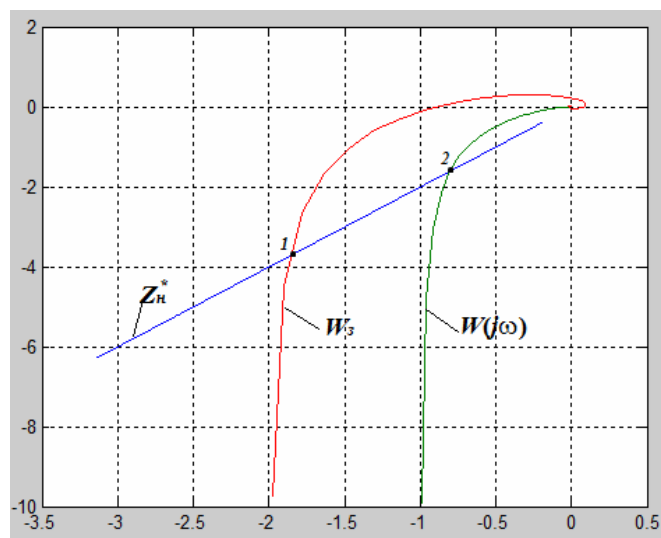


Рис. 3. Пересечение годографов  $W_3(j\omega)$  и  $W(j\omega)$  с годографом  $Z_n^*(ja)$

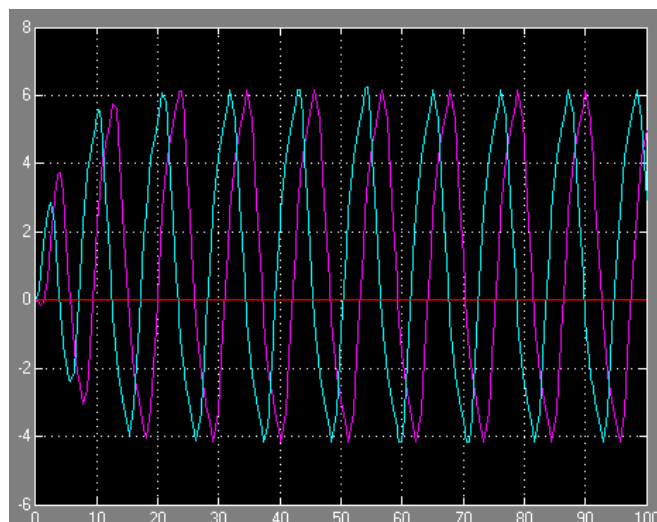


Рис. 4. ПД в системе с запаздыванием (точке 1) с параметрами  $a=4.9$ ,  $\omega=0.5$



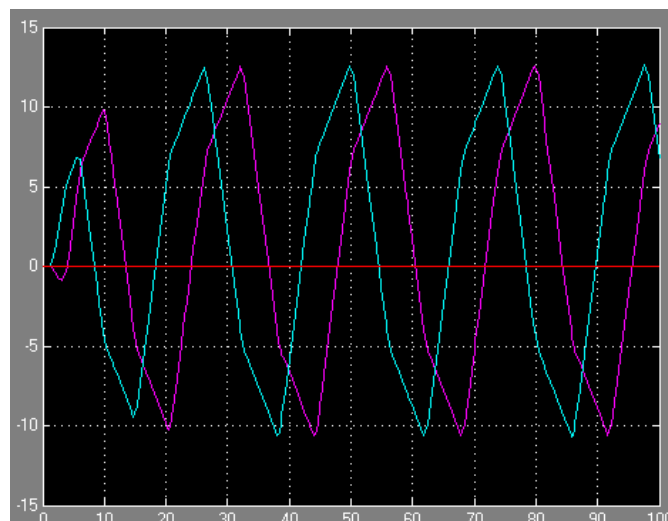


Рис. 5. ПД в системе без запаздывания (точке 2) с параметрами  $a=11.8$ ,  $\omega=0.23$

Таким образом, в работе предложен подход, сформированный на базе частотных методов и метода гармонической линеаризации, позволяющий оценить параметры и устойчивость периодических движений в однотипной нелинейной МСАУ с нелинейностями и запаздыванием в прямых каналах.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-08-00702 А, 17-48-020956 р\_а).

### Список литературы

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. - СПб, Изд-во «Профессия», 2014. - 752 с.
2. Ерофеев, А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / А.А. Ерофеев. - СПб.: Политехника, 2008. - 302 с.
3. Ильясов Б.Г., Кабальнов Ю.С. Исследование устойчивости однотипных многосвязных систем автоматического управления с гомономными связями между подсистемами // Автоматика и телемеханика. - 1995. - №7.-С.82-90.
4. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018, № 2. С. 3-10.
5. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Системный подход к исследованию многосвязных систем автоматического управления на основе частотных методов. Автоматика и телемеханика. 2013. № 3. с. 173-191.
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. - М.: Физматлит, 2016. - 441 с.
7. Филимонов А. Б. Спектральная декомпозиция систем с запаздываниями. Компенсация запаздываний. М.: Изд-во физ.-мат. Лит-ры, 2002. 288 с.

## **ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО СИСТЕМЕ ТРУБОПРОВОДОВ**

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого, sorokinaspbpu@gmail.com

**Аннотация.** В данной работе приводится решение обратной задачи гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, движущейся по трубе круглого сечения без свободной поверхности. При заданном расходе жидкости на одном из выходов трубопроводной системы определяется необходимое давление на входе в неё. Проводится численное моделирование изменения скорости жидкости в трубопроводной системе при заданном законе изменения давления на входе в систему.

**Ключевые слова:** управление, несжимаемая жидкость, трубопроводная система, давление, расход жидкости.

*Natalia V. Sorokina,*  
Assistant

## **A PROBLEM OF CONTROL OF THE VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID MOTION THROUGH A PIPELINE SYSTEM**

Russia, Saint-Petersburg, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic  
University, sorokinaspbpu@gmail.com

**Abstract.** In this paper a solution of the inverse problem of the hydrodynamics of a viscous incompressible liquid moving through a pipe of the circular cross-section without free surface is presented. For the given mass flow at one of the pipeline system outlets the necessary pressure at its inlet is determined. A numerical simulation of the change of the liquid velocity for the given principle of inlet pressure change is performed.

**Key words:** control, incompressible liquid, pipeline system, pressure, liquid mass flow.

Задача управления потоками жидкости в трубопроводных сетях является актуальной проблемой разных отраслей промышленности и народного хозяйства, от тепловых сетей в городах до нефтегазовых трубопроводных сетей. Исследователями изучаются вопросы потокораспределения в больших гидравлических сетях [4-6], управления переходом от ламинарного течения газа к турбулентному [3], расчётом гидродинамических систем с распределёнными параметрами [1] и т.п.

Не менее важными и интересными являются «обратные» задачи, касающиеся построения такого управления потоком жидкости в трубо-

проводе, которое позволяет получить требуемый конечный результат, связанный с желаемой структурой и характеристиками потока.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим трубопроводную систему, состоящую из главной трубы и двух ответвлений (рис.1). Считаем, что на входе главной трубы действует давление насоса  $p_p$ , на двух выходах действуют заданные давления  $p_1$  и  $p_2$ .

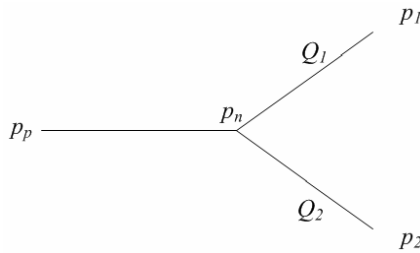


Рис.1. Схема трубопроводной сети

Будем считать течение ламинарным. Модель, описывающая ламинарное изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости по трубе круглого сечения получена из уравнений Навье-Стокса [2, 8]. Эта модель предполагает напорное течение жидкости, т.е. поперечное сечение трубы заполнено жидкостью целиком и свободных поверхностей нет. Примем, что расход жидкости в главной трубе распределяется между двумя ответвлениями так, чтобы течение в этих трубах так же было напорным. Значит, можем записать

$$Q_m = Q_1 + Q_2, \quad (1)$$

где  $Q_m$  – расход главной трубы,  $Q_1$  – расход первого ответвления,  $Q_2$  – расход второго ответвления. Расход жидкости в трубе круглого сечения вычисляется по формуле [2]

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} R^4, \quad (2)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $R$  – радиус трубы,  $l$  – длина трубы,  $\Delta p$  – разность давлений в конце и начале трубы. Таким образом, видно, что расход главной трубы  $Q_m$  можно регулировать, изменяя давление на входе или на выходе (или и там, и там). В свою очередь, с изменением величины  $Q_m$  будут изменяться и  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Поставим задачу следующим образом: определить, каким должно быть давление  $p_p$ , чтобы обеспечить расход  $Q_1$  при заданных  $p_1$ ,  $p_2$  и  $Q_2$  (все последующие выкладки применимы и в том случае, если заменить  $Q_1$  на  $Q_2$ ).

## 2. Решение

Перепишем формулу (1) с учётом (2) и разницы давлений для трёх рассматриваемых труб (индекс  $m$  относится к главной трубе, 1 – к первому ответвлению, 2 – ко второму):

$$-\frac{\pi}{8\mu} \frac{p_n - p_p}{l_m} R_m^4 = Q_1 - \frac{\pi}{8\mu} \frac{p_2 - p_n}{l_2} R_2^4,$$

или

$$\frac{p_n - p_p}{l_m} R_m^4 = -\frac{8\mu}{\pi} Q_1 + \frac{p_2 - p_n}{l_2} R_2^4.$$

Выразим из последнего соотношения давление насоса:

$$p_p = \frac{8\mu l_m}{\pi R_m^4} Q_1 + p_n \frac{l_m R_2^4 + R_m^4 l_2}{l_2 R_m^4} - \frac{p_2 R_2^4 l_m}{l_2 R_m^4}. \quad (3)$$

Исключим из этого уравнения давление в узле  $p_n$ , выразив его через расход первой трубы:

$$Q_1 = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{p_1 - p_n}{l} R_1^4, \\ p_n = \frac{8\mu l_1}{\pi R_1^4} Q_1 + p_1.$$

Подставим это соотношение в (3):

$$p_p = \frac{8\mu}{\pi} \left( \frac{l_m}{R_m^4} + \frac{l_1 (l_m R_2^4 + R_m^4 l_2)}{l_2 R_m^4 R_1^4} \right) Q_1 + \frac{l_m R_2^4}{l_2 R_m^4} (p_1 - p_2) + p_1. \quad (4)$$

Значение давления, которое выражается формулой (4), – это то давление, которое должен поддерживать насос, расположенный в начале трубопроводной системы, чтобы обеспечить расход  $Q_1$ . Как видно, давление зависит от других известных параметров системы, таких как диаметры труб, их длины, вязкость жидкости и давления на концах системы.

## 3. Численное моделирование

Важным аспектом управления течением в рассматриваемой системе является сохранение ламинарности потока. Как известно, течение вязких несжимаемых жидкостей является ламинарным, если число Рейнольдса  $Re$  не превышает 2300 [2]. Для вычисления числа Рейнольдса необходимо знать скорость жидкости в трубе, следовательно, будем проводить моделирование распределения скоростей в рассматриваемой трубопроводной системе.

Скорость жидкости в трубах будем рассчитывать по формуле [7]

$$v_z(t, r) = \int_0^R G(r, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{\rho} \int_0^t \int_0^R G(r, \xi, t - \tau) f(\tau) d\xi d\tau, \quad (5)$$

$$G(r, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi \cdot e^{-\nu \frac{\mu_n^2}{R^2} t}}{R^2 (J_1(\mu_n))^2} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \xi\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad (6)$$

$$G(r, \xi, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi \cdot e^{-\nu \frac{\mu_n^2}{R^2} (t - \tau)}}{R^2 (J_1(\mu_n))^2} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \xi\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \quad (7)$$

где  $f(\tau)$  – функция, описывающая изменение градиента давления со временем.

Зададим следующие параметры:  $p_p = 7 \cdot 10^5$  Па,  $p_1 = 5 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 5 \cdot 10^5$  Па,  $R_m = 0.5$  м,  $R_1 = 0.25$  м,  $R_2 = 0.4$  м,  $l_m = 2000$  м,  $l_1 = 500$  м,  $l_2 = 1000$  м. Для начала рассчитаем стационарное распределение скоростей в рассматриваемой системе, под действием указанных давлений. Следует отметить, что при условии (1) узловое давление будем задаваться следующим соотношением:

$$p_n = \frac{\frac{R_m^4 p_p}{l_m} + \frac{R_1^4 p_1}{l_1} + \frac{R_2^4 p_2}{l_2}}{\frac{R_m^4}{l_m} + \frac{R_1^4}{l_1} + \frac{R_2^4}{l_2}}. \quad (8)$$

Результаты моделирования представлены на рис.2.

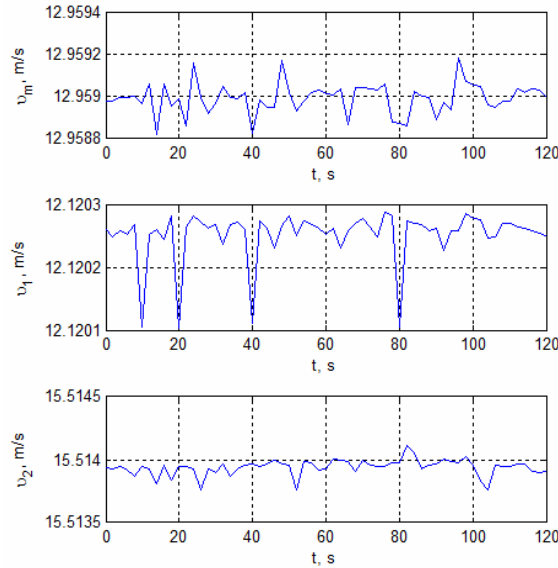


Рис. 2. Изменение скорости жидкости в трёх трубах с течением времени при постоянном давлении на входе в систему

На этом рисунке представлены графики скорости на оси труб. Видно, что с незначительными колебаниями скорости сохраняют постоянное значение; числа Рейнольдса для потоков в трёх трубах не превы-

шают 2300, что свидетельствует о сохранении ламинарного режима течения.

Теперь зададим желаемое значение расхода первой трубы  $Q_1 = 2.5 \text{ м}^3/\text{с}$ . По формуле (4) определяем давление насоса, которое обеспечит указанный расход, и постепенно изменяем давление до данного значения. Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4.

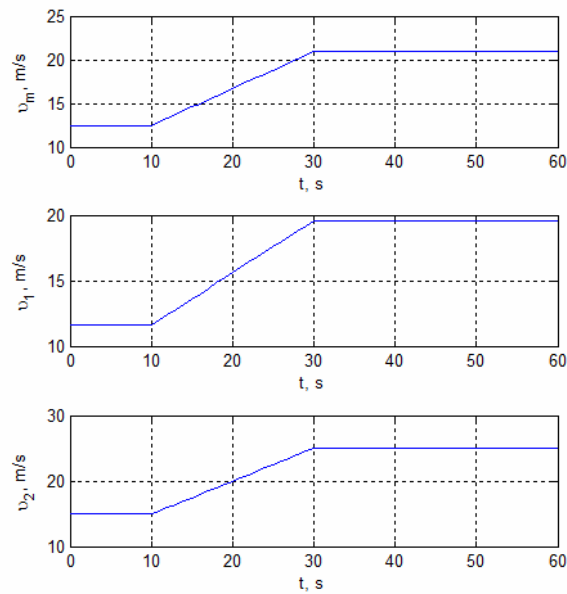


Рис. 3. Изменение скорости жидкости в трёх трубах с изменением давления на входе в трубопроводную систему

Далее в некоторый момент времени зададим  $Q_1 = 2.5 \text{ м}^3/\text{с}$ , а потом произведём переход к значению  $Q_1 = 2 \text{ м}^3/\text{с}$ .

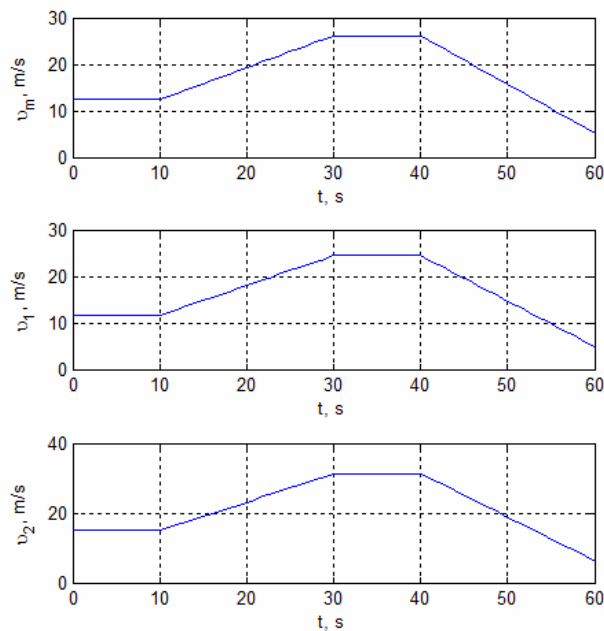


Рис. 4. Изменение скорости жидкости в трёх трубах с изменением давления на входе в трубопроводную систему

## **Заключение**

В представленной работе был сделан первый шаг в решении обратной задачи управления течением вязкой несжимаемой жидкости по системе трубопроводов. По заданному расходу на одном из выходов вычисляется необходимое давление на входе и, затем, давление «насоса» постепенно доводится до этого уровня. В дальнейшем предстоит определить оптимальное время, за которое должно изменяться давление.

## **Список литературы:**

1. Автушенко Н.А., Ленецкий Г.С. Математическое описание движения жидкости в трубопроводе с учетом распределённости параметров // Вестник Могилевского государственного технического университета, 2006, №2 (11)
2. Валландер С.В. Лекции по гидроаэродинамике – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973, 296 с.
3. ламинарно-турбулентным переходом с помощью диэлектрического барьерного разряда // Учёные записки ЦАГИ, 2011, том 42, №6.
4. Козлов В.Н., Нгуен Д.Х., Фирсов А.Н. Математическое моделирование и оптимизация гидравлических сетей при установившихся режимах транспортировки слабо сжимаемой жидкости. // НТВ СПб ГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 4, 2011. – с. 42-46.
5. Логинов К.В., Мызников А.М., Файзуллин Р.Т. Расчёт, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование, 2006, том 18, № 9, С. 92-106.
6. Нгуен Д.Х., Козлов В.Н., Фирсов А.Н. Решение задачи об управлении нестационарной транспортировкой вязкой жидкости по системе трубопроводов. // НТВ СПб ГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 6, 2011. – с. 190-194.
7. Сорокина Н., Фирсов А. Задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения с нестационарными краевыми условиями. В кн. III international scientific and technical conference “Technics. Technologies. Education. Safety”: Proceedings, Vol.2. Велико Тырново, Болгария, 28-29 мая 2015, С.9-10.
8. Sorokina N. Analytical and numerical aspects of the solution of the problem of a viscous weakly compressible liquid mixture motion through the vertical pipe of the circular cross-section // Industry 4.0. – 2018 – Issue 2/2018. – P.66-68.

**УДК 517.9**

**Лэ Ван Хань<sup>1</sup>,**

магистрант,

**Фирсов Андрей Николаевич<sup>2</sup>,**

д-р техн. наук, профессор

## **ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ ЕЁ ЭЛЕМЕНТОВ**

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого

<sup>1</sup>levankhanhth@gmail.com; <sup>2</sup>anfirs@yandex.ru

**Аннотация.** В работе предложен численный алгоритм решения обратной задачи устойчивости динамической системы при многопараметрическом возмущении

её элементов.

**Ключевые слова:** динамические системы, малые возмущения параметров, обратная задача устойчивости.

*Le Van Khanh*<sup>1</sup>,  
Master's student,  
*Andrei N. Firsov*<sup>2</sup>,  
Dr. Tech. Sci., professor

## NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING THE REVERSE PROBLEM OF STABILITY OF A DYNAMIC SYSTEM UNDER A MULTIPARAMETRIC PERTURBATION OF ITS ELEMENTS

Russia,, Saint Petersburg, Peter the Great Polytechnic University  
<sup>1</sup>levankhanhth@gmail.com; <sup>2</sup>anfirs@yandex.ru

**Abstract.** The paper proposes a numerical algorithm for solving the inverse problem of the stability of a dynamic system with multi-parametric perturbation of its elements.

**Keywords:** Dynamic systems, small perturbations of parameters, inverse stability problem.

### Введение

Понятие устойчивости динамических систем характеризует свойство системы стабильно работать в режимах, при которых имеются неопределённости в значениях тех или иных системных элементов. Из-за сложности, а иногда практической невозможности указать необходимые и достаточные допустимые диапазоны изменения соответствующих параметров, большой интерес могут представить хотя бы достаточные оценки. С другой стороны, практика показывает, что стремление к универсальности теоретических результатов, как правило, приводит к большим затруднениям в применении таких результатов для решения конкретных задач. Мы считаем, что учет такого рода соображений должен лежать в основе построения теоретических конструкций, направленных на решение конкретных прикладных задач. В настоящей работе предлагается решение задачи об условиях сохранения свойства устойчивости линейной динамической системы при малых возмущениях её матрицы. При этом, даётся достаточная оценка малости параметров возмущения.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \tag{1}$$
$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T.$$



Здесь  $A$  – «невозмущенная» матрица. Предположим, что матрица  $A$  имеет простые различные собственные значения  $\lambda_j, j=1,2,\dots,n$  и  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, j=1,2,\dots,n$ , т.е. система (1) предполагается устойчивой.

Пусть далее

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{nn})^T \in C^{n^2},$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – неизвестные «возмущения» элементов исходной матрицы. Параметры возмущения  $\varepsilon_{ij}$  будем считать достаточно малыми в том смысле, что величиной  $\varepsilon_{ij}^2$  можно пренебречь по сравнению с  $\varepsilon_{ij}$ :  $\varepsilon_{ij}^2 \ll \varepsilon_{ij}$ .

Нашей задачей является «достаточная» оценка величины элементов  $\varepsilon_{ij}$  «возмущенной» системы

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\vec{\varepsilon}) X(t), \quad (2)$$

которая гарантирует устойчивость последней.

Далее будем считать, что

$$A(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{nn}) = A + \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij} A_{ij}, \quad (3)$$

где  $A_{ij}$  – известные матрицы. При этом  $\lambda_j(\vec{\varepsilon}), j=1,2,\dots,n$  – собственные значения матрицы  $A(\vec{\varepsilon})$  являются достаточно гладкими функциями параметров  $\varepsilon_{ij}, i, j=1,2,\dots,n$  в окрестности нуля.

## 2. Метод анализа устойчивости линейной динамической системы при неопределенных возмущениях ее параметров

В основу анализа устойчивости динамической системы (см. систему (2) или (3)) при неопределенных возмущениях ее параметров, мы положим анализ изменения знака некрatных собственных значений матрицы  $A(\vec{\varepsilon})$  в зависимости от  $\vec{\varepsilon}$ . В дальнейшем мы опираемся на работу Sun'a [1].

Пусть  $\lambda_s$  – некрatное собственное значение, вообще говоря, не-симметричной матрицы  $A \in C^{n \times n}$ , которому соответствуют  $\vec{x}_s$  и  $\vec{y}_s$  – правый и левый собственные векторы соответственно, причём мы принимаем  $\|\vec{x}_s\| = 1$  (где  $\|\vec{x}_s\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{si})^2}$ ,  $x_{si}$  – координаты вектора  $\vec{x}_s$ ) и  $\vec{y}_s^T \cdot \vec{x}_s = 1$ .

Тогда для любого  $\lambda_s$  существуют такие  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in C^{n \times (n-1)}$ , что для матриц  $X = (\vec{x}_s, \tilde{X})$  и  $Y = (\vec{y}_s, \tilde{Y})$ , выполняются следующие соотношения:

$$Y^T X = I_n, \quad (4)$$

$$Y^T A X = \begin{pmatrix} \lambda_s & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \lambda_s \notin \lambda(\tilde{A}). \quad (5)$$

где  $\lambda_s, s = \overline{1, n}$  – некрратные собственные значения матрицы  $A$ .

Из [1] следует, что возмущенная матрица  $A(\vec{\varepsilon})$ , имеет некрратное собственное значение  $\lambda_s(\vec{\varepsilon})$  ( $\lambda_s(\vec{0}) = \lambda_s$ ), которому соответствуют правый и левый собственные векторы  $\vec{x}_s(\vec{\varepsilon}), \vec{y}_s(\vec{\varepsilon}), \vec{x}_s(\vec{0}) = \vec{x}_s, \vec{y}_s(\vec{0}) = \vec{y}_s$ .

Функции  $\lambda_s(\vec{\varepsilon}), \vec{x}_s(\vec{\varepsilon})$  и  $\vec{y}_s(\vec{\varepsilon})$  – действительные аналитические функции от  $\vec{\varepsilon}$  в некоторой окрестности  $U(\vec{0})$ . Таким образом, функция  $\lambda_s(\vec{\varepsilon})$  имеет непрерывные производные вплоть до  $(n+1)$ -го порядка в точке  $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ , и, следовательно, её можно представить рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} \lambda_s(\vec{\varepsilon}) = & \lambda_s + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial \lambda_s(\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \lambda_s(\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,r,t,k,l=1}^n \left( \frac{\partial^3 \lambda_s(\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{rt} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rt} \varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Далее ограничимся формулой Тейлора для  $\lambda_s(\vec{\varepsilon})$  в окрестности точки  $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$  до 2-го порядка:

$$\lambda_s(\vec{\varepsilon}) = \lambda_s + \vec{y}_s^T E \vec{x}_s + \vec{y}_s^T E \tilde{X} (\lambda_s I - \tilde{A})^{-1} \tilde{Y}^T E \vec{x}_s + O(\|E\|^3), \quad (7)$$

где  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ , и  $\tilde{A}$  вычисляются по формулам (4) и (5) и  $E = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^n$  – «матрица возмущений».

**Лемма** [5]. Пусть  $(-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i), \hat{\varepsilon}_i > 0$  – интервал, все точки  $\varepsilon_j, j = \overline{1, m}$  которого являются решениями неравенства  $f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) < -\delta/2$  для некоторого  $0 < \delta < 1$ , общего для всех  $i$ . Тогда  $m$ -мерный куб

$$Q = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) : \varepsilon_j \in (-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i) = \bigcap_{i=1}^k (-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i); j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (8)$$

Условие сохранения интересующего нас свойства (свойств) системы (1) определяется требованием выполнения следующих условий относительно  $m$  параметров  $\{\varepsilon_j\}, j = 1, 2, \dots, m$ , связанных с этой системой:

$$\lambda_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) < 0, s = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Каждая функция  $\lambda_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$  непрерывна в соответствующей области  $\Omega_i \subset R^m$  причем

$$\vec{0} \in \bigcap_{s=1}^n \Omega_s, \vec{0} \equiv (0, 0, \dots, 0)^T \in R^m. \quad (10)$$

Для всех  $\lambda_s$  в точке  $\vec{0}$  имеют место неравенства  $\lambda_s(\vec{0}) \leq -\delta$  для некоторого  $\delta > 0$ . Отсюда следует, что существует  $m$ -мерный шар  $D_\rho$  некоторого ненулевого радиуса  $\rho$  с центром в  $\vec{0}$ , для всех точек которого одновременно выполнены неравенства

$$\lambda_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) < -\delta/2, s = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

По лемме можем переписать неравенство (11) следующим образом

$$\lambda_s(\varepsilon) < -\delta/2, s = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

где  $\varepsilon \in (-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i)$ ,  $\hat{\varepsilon}_i > 0$

### 3. Алгоритм численного решения обратной задачи устойчивости динамической системы с неопределёнными параметрами

**Шаг 1:** Находим  $\lambda_s$  – собственные значения матрицы  $A$ , и соответствующие им правый и левый собственные векторы  $\vec{x}_s, \vec{y}_s$ .

$$\begin{cases} (A - \lambda_s I) \vec{x}_s = \vec{0} \\ \vec{y}_s^T (A - \lambda_s I) = \vec{0} \end{cases}, \text{ где } \vec{y}_s^T \vec{x}_s = 1.$$

**Шаг 2:** Нахождение матриц  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  и  $\tilde{A}$ . По теореме 1 мы строим матрицу

$$X = (\vec{x}_s, \tilde{X}) \text{ и } Y = (\vec{y}_s, \tilde{Y}).$$

Шаг 2.1.

**Случай 1:** Правый собственный вектор имеет вид

$\vec{x}_s = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0)^T$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Таким образом, можно сразу сформировать матрицу

$$Y = (\vec{y}_s, \tilde{Y}) = \left( \begin{array}{c|cccccc} y_s^1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_s^{i-1} & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_s^{i+1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_s^n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)_{n \times n},$$

то есть  $\tilde{Y}^T \vec{x}_s = 0_{(n-1) \times 1}$ .

**Случай 2:** Координаты правого собственного вектора  $x_s^i \neq 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пусть матрица

$$Z' = \left( \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \tilde{x}_s & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)_{n \times n} = \left( \begin{array}{c|cccc} x_s^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_s^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_s^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_s^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)_{n \times n}.$$

Применяя к матрице  $Z'$  ортогонализацию Грама – Шмидта, получим матрицу  $Z = (\tilde{x}_s, \tilde{Y}) \in C^{n \times n}$  – ортогонально, т.е.  $\tilde{Y}^T \tilde{x}_s = 0_{(n-1) \times 1}$  и матрицу  $Y = (\tilde{y}_s, \tilde{Y})$ .

**Шаг 2.2:** формируем матрицу  $X = (\tilde{x}_s, \tilde{X})$ .

Имеем  $\det(Y) = \pm 1$ , откуда следует, что для  $Y$  существует обратная матрица. Вычисляем матрицу

$$H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n = Y^{-1},$$

Откуда получаем матрицу

$$\tilde{X}_{(n \times (n-1))} = \left[ \{h_{i,j}\}_{i=2,j=1}^n \right]^T = \left[ (h_2)^T \quad (h_3)^T \quad \cdots \quad (h_n)^T \right],$$

где  $h_i, i = 2 \dots n$  – строки матрицы  $H$ . т.е.  $\tilde{y}_s^T \tilde{X} = 0_{1 \times (n-1)}$ .

**Шаг 3:** теперь можно построить разложение (7) для  $\lambda_s(\bar{\varepsilon})$ . По Лемме (в п. 3) заменим все  $\varepsilon_{ij}$  на  $\varepsilon$ .

Тогда мы получим систему  $\lambda_s(\varepsilon) < -\delta/2, 0 < \delta < 1, s = \overline{1, n}$ . откуда находим допустимый интервал для  $\varepsilon$ .

## Выводы

В работе представлен и обоснован алгоритм вычисления диапазонов малых возмущений элементов матрицы системы дифференциальных уравнений, при которых сохраняется свойство устойчивости системы.

## Список литературы

1. Sun Ji-guang. Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on several parameters. J. Comput. Math., 3, 351-364 (1985).
2. Kato T. A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators, N.-Y.: Springer-Verlag, 1982.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: «Наука», 1978.
5. Bulkina E, Firsov A. Numerical-analytical method for solving the inverse problem of stability for technical systems with multiple uncertain parameters. “Machines. Technologies. Materials.” International journal for science, technics and innovations for the industry.

**Фирсов Андрей Николаевич,**  
д-р техн. наук, профессор

## **ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ДВУХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ**

Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого, anfirs@yandex.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрены две задачи. Первая связана с исследованием качественных свойств решения задачи Коши для линеаризованного уравнения Больцмана в случае «жестких» потенциалов межмолекулярного взаимодействия (степенные потенциалы с показателем степени больше четырех). Показано, что если начальные условия обладают определенными свойствами, то установление равновесия происходит экспоненциально быстро. Вторая задача связана с построением точного аналитического решения (в виде степенного ряда по времени) решения задачи Коши для линеаризованного пространственно-однородного уравнения Больцмана. В основу доказательства сходимости упомянутого степенного ряда положено использование дискретного преобразования Лапласа и известные свойства оператора столкновений. Полученный результат позволяет строить явные аналитические приближения функции распределения, что может оказаться весьма полезным в прикладных задачах, связанных с исследованиями течений разреженного газа.

**Ключевые слова:** уравнение Больцмана, задача Коши, устойчивость решений, точные решения.

**Andrey N. Firsov,**  
Dr. Tech. Sci., professor.

## **EXPONENTIAL STABILITY AND EXACT SOLUTIONS OF THE BOLTZMANN EQUATION IN TWO SPECIAL CASES**

Russia, St.Petersburg, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic  
University, anfirs@yandex.ru

**Abstract.** In the first part of the paper it is shown, that in the case of specific initial conditions, solutions of the Cauchy problem for linearized Boltzmann equation have exponential damping when time tends to infinity. In the second part of the paper exact analytic solution of spatially homogeneous linearized Boltzmann equation is built by the use of discrete Laplace transform. The result may be useful in research tasks inside the area of applied rarefied gas dynamics.

**Key words:** Boltzmann equation, Cauchy problem, solution stability, exact solutions.

## 1. Введение

Уравнение Больцмана хорошо известно как основное уравнение кинетической теории разреженных газов. Уже Л. Больцман понимал роль этого уравнения для обоснования макроскопических моделей аэродинамики. В 1916 - 1917 гг. Д. Энског и С. Чепмен независимо предложили формально-математический вывод макроскопических уравнений аэродинамики из уравнения Больцмана, включая естественный вывод макроскопических соотношений для коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии (так наз. метод Чепмена-Энскаго, считающийся сейчас классическим).

С другой стороны, исследование уравнения Больцмана как математического объекта (теория существования и единственности решений, анализ качественных свойств решений, корректность постановки различных задач для этого уравнения и т.п.) получило заметное развитие лишь во второй половине XX века. Причиной этому послужили, как нам представляется, в основном два обстоятельства.

Во-первых, реальная необходимость приоритетного использования кинетического подхода при рассмотрении практических задач аэродинамики возникла с развитием ракетной и космической техники и высотной авиации, вакуумной техники и т.п. При достаточно большой степени разрежения газа (когда средняя длина свободного пробега молекулы становится сравнимой с размерами движущегося в газе тела, что для земной атмосферы соответствует высотам более 100 км.), классическая аэродинамика должна быть заменена кинетической теорией газов. В основе этой теории, как уже было отмечено, лежит уравнение Больцмана.

Таким образом, при решении практических инженерных задач, связанных с движением тел в высотных слоях атмосферы, появилась необходимость развития адекватных приближенных, в частности, численных методов решения уравнения Больцмана. Но для надежного использования тех или иных приближенных методов необходимо их строгое обоснование, которого нельзя получить без математически точных результатов о существовании и свойствах решений этого уравнения.

Во-вторых, математический аппарат, который оказался подходящим для строгого анализа уравнения Больцмана, был в достаточной степени развит лишь во второй половине прошлого века. Речь идет, в первую очередь, о методах функционального анализа, относящихся, в частности, к теории неограниченных операторов в банаховых пространствах, теории однопараметрических полугрупп операторов, теории обобщенных функций. При этом, многие математические задачи, связанные с уравнением Больцмана, оказываются не по зубам даже продвинутым методам функционального анализа.

Можно констатировать, что, несмотря на серьезные успехи, достигнутые трудами не слишком многочисленных зарубежных (Т. Карлеман, Г. Грэд, К. Черчиньяни, С. Укаи и др.) и отечественных (А.А. Арсеньев, Н.Б. Маслова, А.В. Бобылев, А.Н. Фирсов и др.) исследователей, математическая теория уравнения Больцмана еще далека от сколько-нибудь завершенного вида.

С этой точки зрения, даже частные результаты, относящиеся к математической теории уравнения Больцмана, могут оказаться даже весьма познавательными и практически полезными.

Настоящая работа посвящена двум математическим задачам, относящимся к уравнению Больцмана. Первая касается асимптотических свойств решений линеаризованного уравнения Больцмана на бесконечном промежутке времени, вторая – алгоритму построения точного решения пространственно-однородного уравнения Больцмана.

## **2. Экспоненциальная устойчивость решений задачи Коши для линеаризованного уравнения Больцмана.**

Рассмотрим задачу Коши для линеаризованного уравнения Больцмана кинетической теории газов [1, 2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = L[f], \quad t > 0, \quad L[f] = K[f] - \nu f, \quad (1)$$

$$f = f(\vec{x}, \vec{u}, t), \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^3, \quad \vec{u} \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0, \quad f|_{t=0} = f_0(\vec{x}, \vec{u}). \quad (2)$$

Здесь  $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$  - линеаризованная функция распределения молекул по координатам  $\vec{x}$  и скоростям  $\vec{u}$  в момент времени  $t$ .  $K[f]$  - линейный ограниченный оператор, действующий на  $f$  как функцию  $\vec{u}$ ;  $\nu = \nu(u) = O(u^\beta)$  при  $u \rightarrow \infty$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ,  $u = |\vec{u}|$ . Свойства функции  $\nu(u)$  зависят от конкретной модели межмолекулярного взаимодействия, принимаемой при выводе кинетических уравнений. Подробности см. в [1, 2].

Известно [3а,б], что решение задачи (1), (2) - в случае «жестких» потенциалов межмолекулярного взаимодействия  $U : r^{-k}$ ,  $k > 4$  - имеет при  $t \rightarrow \infty$  в общем случае степенную асимптотику вида  $O\left(\frac{1}{1+t^\mu}\right)$ ,  $\mu > 0$ . Этот результат получается в предположении, что  $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$  при  $x = |\vec{x}| \rightarrow \infty$  ведет себя как функция из  $L_p(\mathbf{R}_x^3)$ ,  $p > 1$ .

Оказывается, что если на поведение  $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$  при  $x \rightarrow \infty$  наложить более жесткие требования, например, потребовать, чтобы  $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$  удовлетворяла по  $\vec{x}$  (и равномерно по  $\vec{u}, t$ ) условию

$$f(\vec{x}, \vec{u}, t) = O\left(\exp\left(-\alpha|\vec{x}|^{1+\varepsilon}\right)\right), \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

то установление равновесия (т.е. стремление функции  $f$  к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ) происходит экспоненциально быстро.

Идея доказательства состоит в следующем (ниже используются обозначения из [7, 8]). Будем искать  $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$  в классе функций таких, что при почти всех  $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$  и всех  $t > 0$   $f(\vec{x}, \vec{u}, t) \in E'_x$ , т.е. функцию  $f$  можно представить в виде (см. [7, 8])

$$f(\vec{x}, \vec{u}, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|q|=r} c^{(q)}(\vec{u}, t) \delta^{(q)}(\vec{x}). \quad (4)$$

Подставляя это выражение в (1) и учитывая теорему 3.1 и формулу (3.3) из [8], получим для коэффициентов  $c^{(q)}(\vec{u}, t)$  бесконечную «зацепляющуюся» систему уравнений вида

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial t} = L[c^{(0)}], \quad (5)_1$$

$$\frac{\partial c^{(q)}}{\partial t} = L[c^{(q)}] - [u_1 c^{(q-I_1)} + u_2 c^{(q-I_2)} + u_3 c^{(q-I_3)}], \quad |q| \neq 0, \quad (5)_2$$

где через  $I_1, I_2, I_3$  обозначены мультииндексы  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$  соответственно.

Уравнения  $(5)_2$  представляют собой неоднородные уравнения вида

$$\frac{\partial c^{(q)}}{\partial t} = L[c^{(q)}] - g_q(\vec{u}, t), \quad |q| \neq 0,$$

где  $g_q(\vec{u}, t)$  – известная функция (на каждом шаге – своя). Таким образом, свойства функций  $c^{(q)}(\vec{u}, t)$  зависят от свойств оператора  $L$ . Последние достаточно полно изучены [1-6]. В частности, оператор  $L$  на подпространстве функций  $w(\vec{u}, t)$ , ортогональных в смысле  $L_2(\mathbf{R}_u^3)$  подпространству аддитивных инвариантов (что, по существу, эквивалентно выполнению классических законов сохранения для массы газа), порождает полугруппу  $T(t), t > 0$  ограниченных операторов [9], дающую решение абстрактной задачи Коши для уравнения  $(5)_1$ ; при этом оказывается  $\|T(t)\| \leq \text{const} \cdot e^{-\mu t}, \mu > 0$ . Методом, аналогичным использованному в [3, 4], по индукции получаем для решений уравнений  $(5)_2$  оценку вида, в которой норма понимается в следующем смысле

$$L_2(\mathbf{R}_u^3): \|c^{(q)}(t)\| \leq \text{const} \cdot e^{-\gamma t}, \gamma > 0,$$



где  $const$  зависит от начальной функции распределения  $f_0(\vec{x}, \vec{u})$  и оператора  $L$ . Последняя оценка, с учетом теоремы 1.8 из [7], позволяет сделать заключение об *экспоненциально быстром* (по времени) установлении равновесия в системе, описываемой задачей (1) – (2).

**3. Точное аналитическое решение пространственно-однородного линеаризованного уравнения Больцмана.** Рассмотрим задачу Коши для пространственно-однородного линеаризованного уравнения Больцмана в случае «жестких» потенциалов межмолекулярного взаимодействия  $U : r^{-k}, k > 4$  (обозначения и терминология здесь и далее см., например, в работах [1, 2]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = L[f], \quad t > 0, \quad L[f] = K[f] - \nu f, \quad (6)$$

$$f = f(\vec{u}, t), \quad \vec{u} \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0, \quad f(\vec{u}, 0) = f_0(\vec{u}). \quad (7)$$

Здесь  $f(\vec{u}, t)$  - линеаризованная функция распределения молекул по скоростям  $\vec{u}$  в момент времени  $t$ .  $K[f]$ - линейный ограниченный оператор, действующий на  $f$  как функцию  $\vec{u}$ ;  $\nu = \nu(u) = O(u^\beta)$  при  $u \rightarrow \infty$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ,  $u = |\vec{u}|$ . Свойства функции  $\nu(u)$  зависят от конкретной модели межмолекулярного взаимодействия, принимаемой при выводе кинетических уравнений. Подробности см. в [1, 2]. Требования «жесткости» потенциалов определяют свойства оператора  $K[f]$  и функции  $\nu(u)$ . Эта задача достаточно хорошо изучена с математической точки зрения в отношении вопросов корректности и качественных свойств решений задачи (6)-(7) (см., например, [1, 2, 10, 11]).

Однако, важным не только с теоретической, но и с практической точки зрения, остается вопрос построения (хотя бы в частных случаях) точных аналитических решений этого уравнения. Это связано, в частности, с тем, что общие теоремы существования и единственности для уравнения Больцмана, ввиду его сложности, дают результаты, мало приспособленные к задачам *построения* его решений (даже приближенных). Достаточно полный обзор этих результатов можно найти в [12-14] (со времени написания этих обзоров в отношении интересующих нас вопросов мало что изменилось). Численные методы решения уравнения Больцмана основаны, как правило, на методах статистического моделирования, и далеко не всегда строго обоснованы [15, 16]. С другой стороны, наличие в запасе точных аналитических решений даже частных задач может быть полезным для анализа математических моделей более общих процессов. Настоящая заметка как раз и посвящена этому, последнему, вопросу – построению точного аналитического решения зада-

чи (6)-(7). Введем обозначение

$$\varphi_k = \varphi_k(\vec{u}) = \left. \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right|_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi_0(\vec{u}) = f_0(\vec{u}).$$

Будем искать решение в виде

$$f(\vec{u}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_k / k!) t^k \quad (8)$$

Ясно, что если ряд (8) абсолютно и равномерно (относительно  $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ ) сходится, то мы, тем самым, получаем аналитическое по  $t$  решение задачи (6)-(7).

Докажем сходимость ряда (8). Перейдем в (6) к  $\varphi_k$  и, затем, к дискретному преобразованию Лапласа [17, гл. 8]:

$$\varphi_{k+1} = K[\varphi_k] - \nu \varphi_k; \quad \Phi^*(q, \vec{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk} \varphi_k(\vec{u}), \quad \operatorname{Re} q > 0.$$

Для  $\Phi^*(q, \vec{u})$  получаем, следовательно, уравнение

$$\Phi^* = \frac{1}{\nu + e^q} (K[\Phi^*]) + \varphi_0 \equiv A_q[\Phi^*].$$

Легко понять, что при достаточно больших  $\operatorname{Re} q$  оператор  $A_q$  будет сжимающим (в любом  $\vec{u}$ -пространстве, в котором оператор  $K$  ограничен). Отсюда следует ограниченность  $\Phi^*$  по  $q$ . Но тогда существует обратное преобразование

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\pi}^{s+i\pi} \Phi^*(q, \vec{u}) e^{qk} dq,$$

откуда следует, что

$$|\varphi_k(\vec{u})| \leq \rho e^{\mu k},$$

где  $\rho$  и  $\mu$  – постоянные. Отсюда немедленно получаем абсолютную и равномерную (по  $\vec{u}$ ) сходимость ряда (8), что и требовалось. Небезынтересным является, на наш взгляд, и отмеченный выше факт аналитичности решения по времени.

### Список литературы

1. Гред Г. Асимптотическая теория уравнения Больцмана. II // Некоторые вопросы кинетической теории газов. - М.: Мир, 1965, с. 93 – 128.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 480 с.

- 3а. Маслова Н.Б., Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. I // Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 19, с. 83 – 88.
- 3б. Маслова Н.Б., Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. II // Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 1, с. 97 – 103.
4. Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения Больцмана // Аэродинамика разреженных газов. Вып. 8. – Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1976, с. 22 - 37.
5. Маслова Н.Б. Математические методы исследования уравнения Больцмана // Алгебра и анализ. Т. 3, вып. 1. – Л., 1991, с. 3 – 56.
6. Maslova N.B. Nonlinear evolution equations. Kinetic approach. // Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 10. – World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993. – x+193 p.
7. Фирсов А.Н. Моментное представление быстро убывающих функций и его приложения // «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке»: Материалы XVII Междунар. науч.-метод. конф. 11-12 февраля 2010 г. Пленарные доклады. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, с. 114-124.
8. Фирсов А.Н. Метод моментов в теории обобщенных функций и его приложения в задачах системного анализа и управления. Основы теории // НТВ СПб ГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 6, 2010. – с. 74-81.
9. Хилле Э., Филиппс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.
10. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. – 247 с.
11. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. – М.: ИЛ, 1960. – 124 с.
12. Фирсов А.Н. Исследование решений уравнения Больцмана, близких к равновесным : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 : защищена 18.12.1975 : утв. 21.04.1976 // Фирсов Андрей Николаевич. – Л., ЛГУ, 1975. – 129 с.
13. Maslova N.B. Nonlinear evolution equations. Kinetic approach. // Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 10. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 1993. – 193 p.
14. Маслова Н.Б. Математические методы исследования уравнения Больцмана // Алгебра и анализ. Т. 3, вып. 1. – Л., 1991, с. 3 – 56.
15. Вычислительные методы в динамике разреженных газов. Сборник статей под ред. В.П. Шидловского. – М.: Мир, 1969. – 277 с.
16. Muntz E.R. Rarefied gas dynamics // Ann. Rev. Fluid Mech., v. 21, 1989. - p. 387-417.
17. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОЙ  
СМЕСИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРУБЕ  
КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ**

Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого, sorokinaspbpu@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматривается вариант численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарное течение вязкой жидкости по вертикальной прямолинейной трубе круглого сечения. Полученный результат не является окончательным, по причине того, что предложенная схема аппроксимации является самой простой и обеспечивает лишь первый порядок точности. Компьютерное моделирование показало, что такая аппроксимация подходит лишь для маленького временного промежутка.

**Ключевые слова:** нестационарная гидродинамика, жидкие смеси, слабая сжимаемость, вертикальная труба, математическое моделирование, численное решение.

*Natalia V. Sorokina,*  
Assistant

**ANALYTICAL AND NUMERICAL ASPECTS OF THE SOLUTION OF  
THE PROBLEM OF A VISCOUS WEAKLY COMPRESSIBLE  
LIQUID MIXTURE MOTION THROUGH THE VERTICAL PIPE  
OF THE CIRCULAR CROSS-SECTION**

Russia, St.Petersburg, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic  
University, sorokinaspbpu@gmail.com

**Abstract:** The paper considers a way of the numerical solution of a system of partial differential equations describing the nonstationary flow of a viscous liquid along a vertical straight pipe of circular cross-section. The result obtained is not final, because the proposed approximation scheme is the simplest and provides only the first order of accuracy. Computer modeling has shown that such an approximation is suitable only for a small time interval.

**Keywords:** non-stationary hydrodynamics, liquid mixtures, weak compressibility, vertical pipe, mathematical modeling, numerical solution.

**Введение**

Задача исследования движения вязкой жидкости по вертикальной трубе возникает в сфере добычи нефтепродуктов. Необходимо спрогнозировать давление, вязкость и скорость той смеси, что поднимается из

глубины по трубе. Понять, будут ли, к примеру, изменения давления настолько критичными, что приведут к частичному разрушению оборудования.

Известно, что аналитическое решение уравнений, описывающих реальные физические процессы, возможно лишь для узкого класса задач (например, уравнение теплопроводности или волновое уравнение на прямой или в областях простой формы). В остальных случаях приходится применять численные методы для получения приближённого решения задачи. Здесь на пути встают вопросы сходимости и устойчивости численного алгоритма.

### 1. Математическая модель

Уравнения, описывающие движение вязкой слабосжимаемой жидкости по вертикальной цилиндрической трубе круглого сечения имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\rho g + \frac{1}{\rho} \left( \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Система уравнений (1)-(3) была получена на основе основных уравнений гидродинамики [2]. Три уравнения содержат в себе три неизвестных функции: плотность  $\rho(z)$ , давление  $p(z)$  и скорость  $v_z(r, z, t)$ . Для однозначной разрешимости этих уравнений необходимо иметь начальные и граничные условия:

- давление на входе трубы и возле стенки:

$$p(r, 0, t) = p_0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \bigg|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

- плотность в начальный момент времени и на входе трубы:

$$\rho(r, z, 0) = \rho_0, \quad (6)$$

$$\rho(r, 0, t) = \rho_0; \quad (7)$$

- скорость в начальный момент времени:

$$v(r, z, 0) = \varphi(r, z); \quad (8)$$

- скорость возле стенки трубы:

$$v(R, z, t) = 0; \quad (9)$$

- скорость на выходе трубы:

$$v(r, L, t) = \psi(r, t). \quad (10)$$

Предположим, что плотность слабо меняется при изменении координаты  $z$ , следовательно, в уравнении (1) можно пренебречь произведением  $v \frac{\partial \rho}{\partial z}$ , т.к. оно очень мало по сравнению с остальными слагаемыми.

## 2. Построение разностной схемы

Для поиска численного решения системы (1)-(3) введём равномерную сетку:

$\bar{\omega}_r = \left\{ r_i = i \cdot h_r, \ i = \overline{0, M}, \ h_r = \frac{R}{M}, \ r_0 = 0, \ r_M = R \right\}$  – сетка по переменной  $r$ ,

$\bar{\omega}_z = \left\{ z_j = j \cdot h_z, \ j = \overline{0, N}, \ h_z = \frac{L}{N}, \ z_0 = 0, \ z_N = L \right\}$  – сетка по переменной  $z$ ,

$\bar{\omega}_t = \left\{ t_k = k \cdot h_t, \ k = \overline{0, K}, \ h_t = \frac{T}{K}, \ t_0 = 0, \ t_K = T \right\}$  – сетка по переменной  $t$ .

Для аппроксимации уравнений воспользуемся конечными разностями. Рассмотрим уравнение (1), и с учётом предположения, сделанного выше, получим следующую разностную схему:

$$\frac{\rho_{i,j}^{k+1} - \rho_{i,j}^k}{h_t} + \rho_{i,j}^k \frac{v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k}{h_z} = 0.$$

Отсюда нетрудно получить

$$\rho_{i,j}^{k+1} = \rho_{i,j}^k \left( 1 - \frac{(v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) h_t}{h_z} \right). \quad (1')$$

Граничные и начальные условия для плотности аппроксимируются точно:

$$\rho_{i,j}^0 = \rho_0, \quad (6')$$

$$\rho_{i,1}^{k+1} = \rho_0. \quad (7')$$

Так же поступим с уравнением (2):

$$p_{i-1,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k+1} - \frac{v_{i+1,j+1}^{k+1} - v_{i-1,j+1}^{k+1} - v_{i+1,j-1}^{k+1} + v_{i-1,j-1}^{k+1}}{4dz}, \quad (2)$$

и его граничные условия

$$p_{i,0}^k = p_0, \quad (4')$$

$$p_{M,j}^{k+1} = \frac{(p_{M,j-1}^{k+1} - p_{M-1,j-1}^{k+1})dz}{dr} + p_{M,j-1}^{k+1}. \quad (5')$$

Для уравнения (3) применим простейшую явную разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{dt} + v_{i,j}^k \frac{v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k}{dz} = \\ & = -\rho_{i,j}^k g + \frac{1}{\rho_{i,j}^k} \left( \mu \left[ \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{v_{i,j}^k - v_{i-1,j}^k}{dr} \right] + \lambda \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{dz^2} - \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j-1}^{k+1}}{dz} \right). \end{aligned}$$

Выразим  $v_{i,j}^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{k+1} = & -\rho_{i,j}^k g dt + \frac{dt}{\rho_{i,j}^k} \left( \mu \left[ \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{v_{i,j}^k - v_{i-1,j}^k}{dr} \right] + \lambda \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{dz^2} - \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j-1}^{k+1}}{dz} \right) - \\ & - v_{i,j}^k \frac{v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k}{dz} dt + v_{i,j}^k. \end{aligned} \quad (3')$$

Уравнение (1') решается на основе известных значений скорости и плотности на предыдущем временном слое. Уравнения (2') и (3') нужно решать совместно на одном временном слое, но последовательно по координате  $z$ , из-за граничных условий. Давление на новом слое по высоте вычисляется от стенки трубы к её оси.

Зададимся простыми начальными условиями: распределение Пуазейля для скоростей, одинаковая во всех точках плотность, заданный перепад давлений (рис.1, 2, 3).

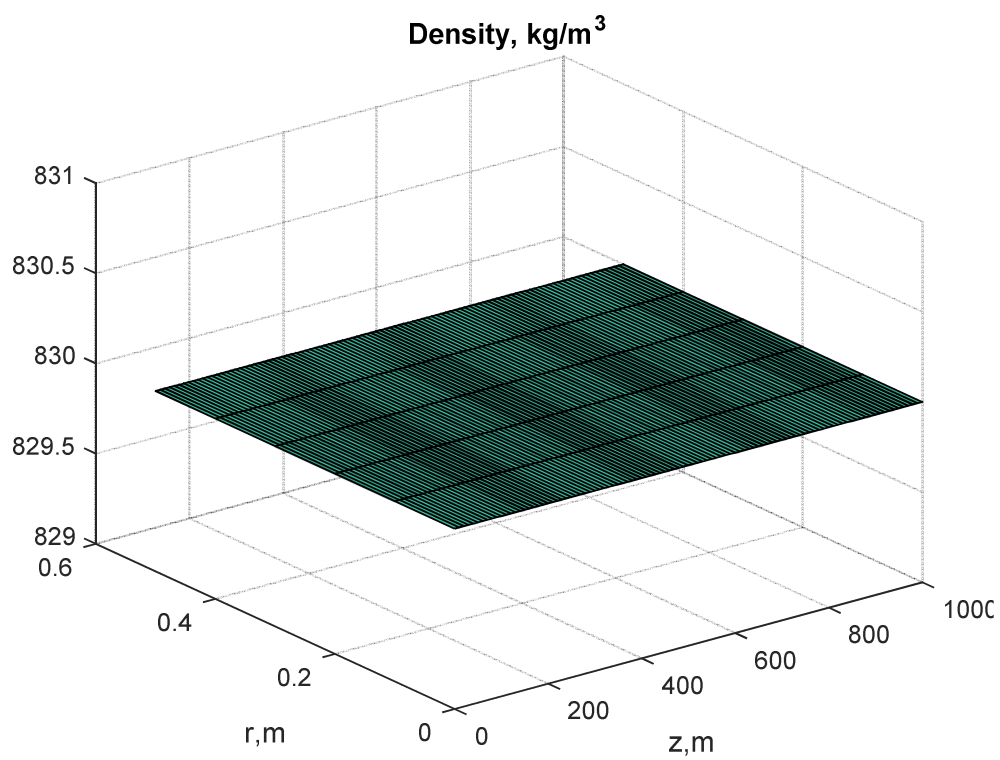


Рис. 1. Плотность в начальный момент времени

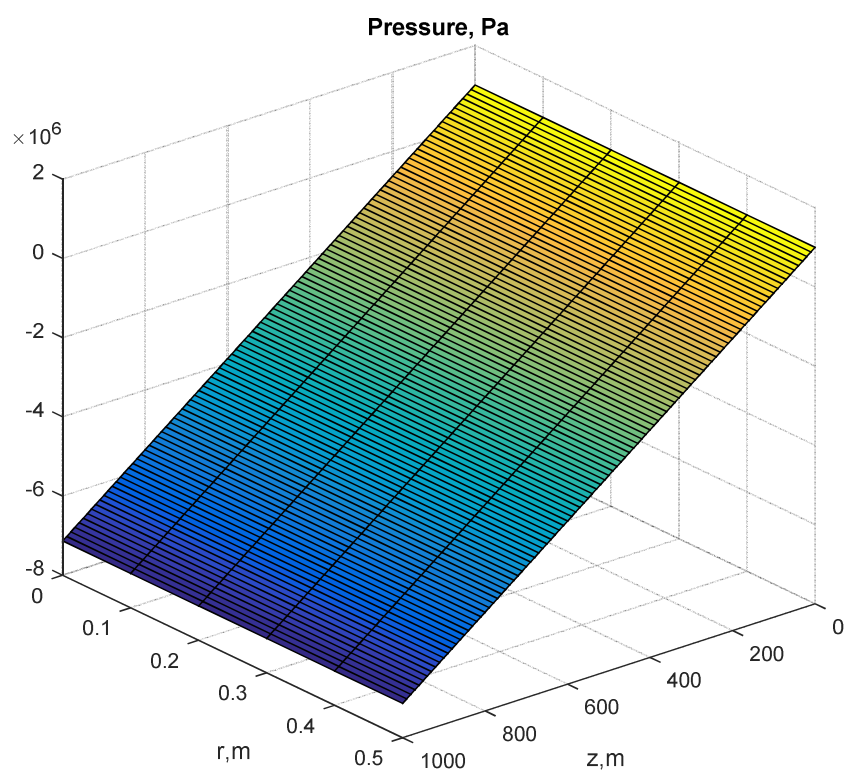


Рис. 2. Распределение давления в начальный момент времени



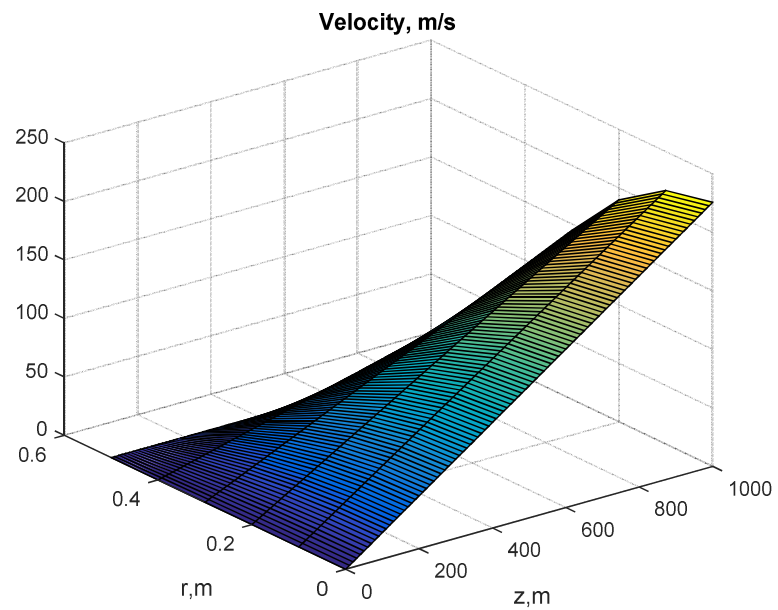


Рис. 3. Распределение скоростей в начальный момент времени

После проведённых в среде Matlab вычислений получаем следующие результаты (рис.4,5,6).

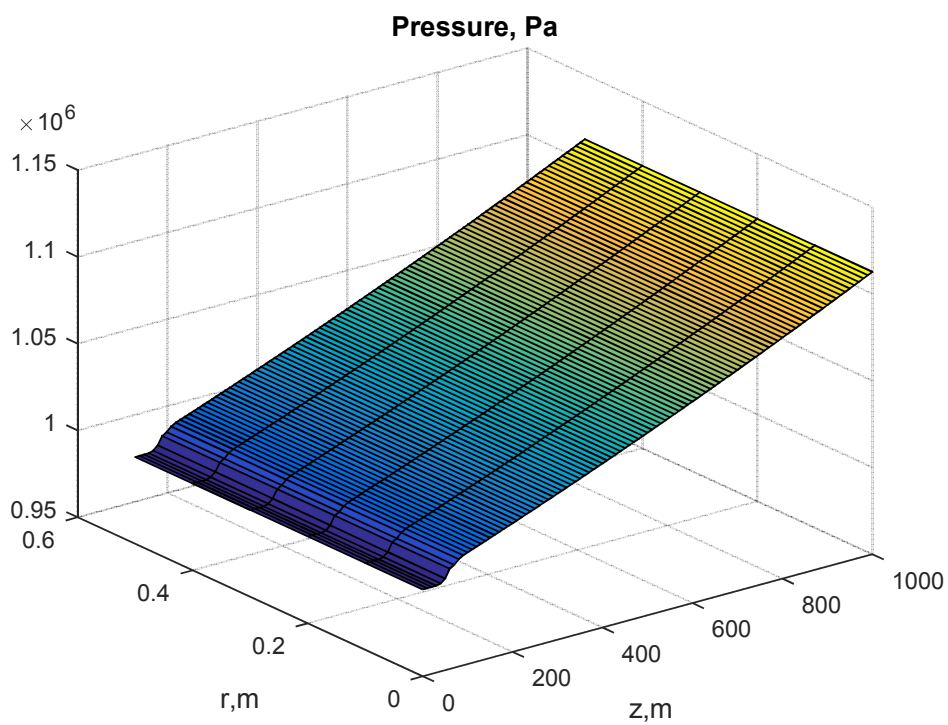


Рис.4. Поле давлений

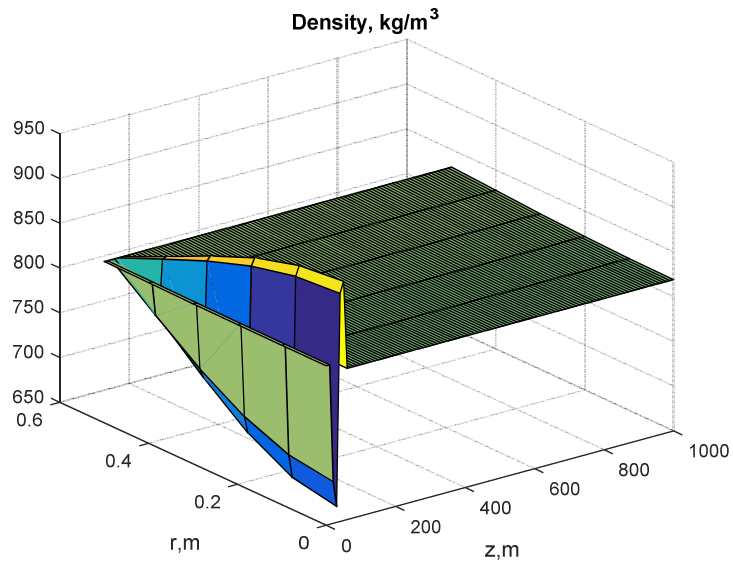


Рис. 5. Плотность

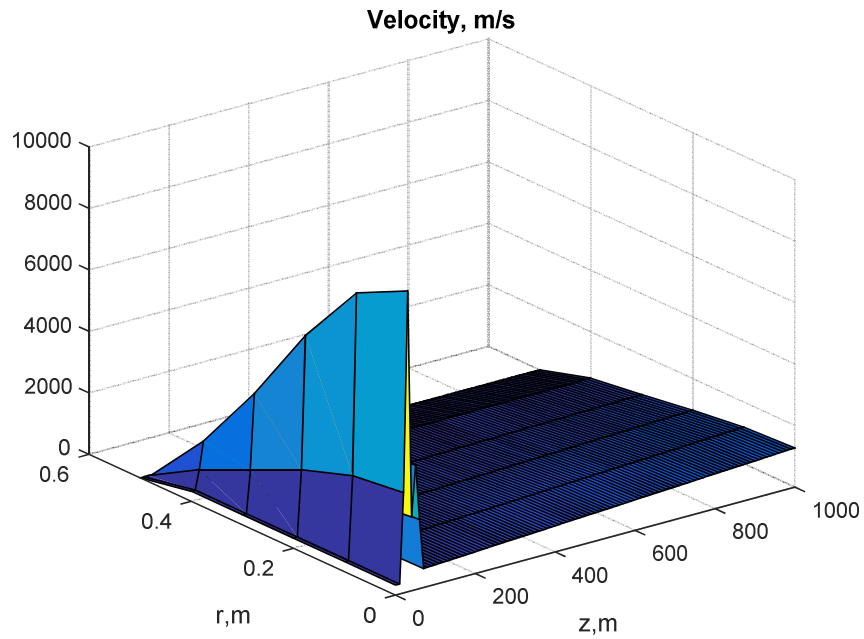


Рис. 6. Поле скоростей

Предложенная схема является условно устойчивой, и в рассматриваемой задаче приемлемые результаты получаются для небольшого временного интервала и маленького шага по времени.

В дальнейшем при аппроксимации уравнения (2), скорее всего, придётся пойти по другому пути. Так это уравнение можно проинтегрировать по  $r$ :

$$p(r, z, t) = \frac{\partial v}{\partial z} + f(z, t).$$

Функцию  $f(z, t)$  логично определить как гидростатическое давление, которое действует в жидкости помимо динамического, и которое зависит лишь от уровня подъёма жидкости, т.е. от координаты  $z$  (и неявным образом от  $t$ ).

### **Заключение**

Описанный в работе метод является лишь первым приближением к решению системы уравнений (1)-(3). Главная трудность состоит в том, что в эту систему входят дифференциальные уравнения разных порядков, а уравнение (3) является к тому же нелинейным. В дальнейшем будут рассмотрены методы аппроксимации, обеспечивающие большую точность данных уравнений, и методы решения, подходящие к системе дифференциальных уравнений в частных производных разного порядка.

### **Список литературы**

- [1] Sorokina N. A mathematical model of the viscous liquid mixture motion through a vertical cylindrical pipe // Mathematical modeling – Year 1, issue 4, 2017 –P.178-179
- [2] Vallander, S.V. Lectures on fluid dynamics. – L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1973, 296 p. (in Russian)
- [3] Guseinzade M.A., Ufin V.A. The nonstationary motion of oli and gas in the main pipelines. – M.: Nedra, 1981 [in Russian]

УДК 517.977.55

***Богданов Сергей Сергеевич,***

д-р.техн. наук, профессор,  
Генеральный директор «АО «Завод КРИЗО»,

***Козлов Владимир Николаевич<sup>1</sup>,***

д-р техн. наук, профессор,  
***Пономарев Алексей Геннадьевич<sup>2</sup>,***  
канд. техн.. наук, доцент,

***Халиуллин Юрий Михайлович,***

д-р техн. наук, профессор,  
председатель Совета директоров «АО «Завод КРИЗО»

## **КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ АВАРИЙНЫХ СОСТОЯНИЙ ОБЪЕКТОВ**

Россия, г. Санкт-Петербург,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

<sup>1</sup>v1945kozlov@yandex.ru, <sup>2</sup>alexey.g.ponomarev@gmail.com

**Аннотация.** В статье предложен метод решения задач идентификации аварийных и предаварийных состояний технологических объектов и систем по наблюдению координат состояния на основе показаний первичных датчиков на основе кор-

реляционно-дисперсионных селективных алгоритмов.

**Ключевые слова:** технологические объекты, системы наблюдения, идентификация предаварийных состояний

**Sergey S. Bogdanov,**

D-r of Technical. Sc., Professor,  
General Director of JSC "Plant KRIZO"

**Vladimir N. Kozlov<sup>1</sup>,**

D-r of Technical. Sc., Professor,

**Aleksey G. Ponomarev<sup>2</sup>,**

Assistant professor, c.t.s.,

**Yuri M. Khaliullin,**

D-r of Technical. Sc., Professor,  
Chairman of the Board of Directors  
of JSC "Plant KRIZO"

## **CORRELATION AND DISPERSION LOGICAL METHODS OF IDENTIFICATION OF EMERGENCY STATES OF OBJECTS**

Russia, St.Petersburg,

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University,

<sup>1</sup>v1945kozlov@yandex.ru, <sup>2</sup>alexey.g.ponomarev@gmail.com

**Abstract.** The article proposes a method for solving problems of identifying emergency and pre-emergency states of technological objects and systems for observing state coordinates based on indications of primary sensors based on correlation-dispersive selective algorithms.

**Keywords:** technological objects, surveillance systems, identification of pre-emergency conditions.

### **1. Постановка задачи**

Рассматривается задача идентификации аварийных и предаварийных режимов технологических объектов в следующей постановке:

**1.** Состояние технологического объекта характеризуется наблюдаемыми значениями сигналов, поступающих от датчиков состояния (фиксирующих, например, температуру, уровень задымленности, интенсивность инфракрасного излучения и т.п.)

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.a)$$

**2.** Предполагается, что наблюдение за состоянием объекта производится в дискретном времени:  $t \in \mathbb{N}$ . Таким образом, вектор значений сигналов

$$X(t) = \{x_1(t) \dots x_n(t)\} \in R^n, \quad (1,6)$$

является вектором контролируемых координат состояния объекта.

3. Аварийные режимы характеризуются превышением контролируемыми координатами заданных предельных значений:

$$x_i(t) > x_{i\max}. \quad (2)$$

Предаварийные режимы соответствуют приближению состояния объекта к аварийному режиму, и, соответственно, приближению контролируемых координат к предельно допустимым порогам.

Задача идентификации особых режимов состоит в формировании критериев, позволяющих:

а) идентификация появления или исчезновение аварийного режима технических объектов;

б) сигнализация о предаварийном состоянии системы, т.е. о приближении системы к аварийному режиму (упреждающая сигнализация)

В данной статье для решения поставленной задачи предлагается семейство корреляционно-логических и дисперсионно-логических алгоритмов формирования сигналов на основе адекватных критериев состояний контролируемых объектов.

Применение оценок состояний, доставляемых корреляционно-логическим методе идентификации основано на следующих предположениях. Предаварийное состояние объекта характеризуется приближением нескольких контролируемых координат состояния к предельно допустимым значениям, или, в более общем случае, одновременным устойчивым увеличением этих значений. В частности, при возникновении пожароопасной ситуации можно ожидать адекватных статистически-устойчивых изменений значений сигналов датчиков температуры и задымления.

При этом может потребоваться идентификация не только одновременного увеличения значений, но и приближения сигналов к предельным значениям с запаздыванием по отношению друг к другу. В этом случае во внимание принимается временная задержка

$$s \in \{0, 1, \dots, s_{\max}\} \in R,$$

где  $s_{\max}$  — максимальная величина запаздывания, при которой требуется идентификация предаварийного режима контролируемых систем.

## 2. Методика математического моделирования

Оценки взаимных парных корреляционно-логических функций и совокупности парных взаимных дисперсионно-логических функций исследованы методами математического моделирования. Далее для идентификации использованы парные взаимные корреляционные функции и взаимные дисперсии, определяемые на основе выборочных статистических числовых характеристик. Эти характеристики парных физических процессов для дискретного времени в помещениях контролируемого объекта определяются соответствующей информацией:

- начальными выборочными первыми моментами случайных величин;
- вторыми центральными и взаимными корреляционными моментами дискретных случайных величин;
- взаимными выборочными дисперсионными моментами дискретных случайных величин.

Как известно, эти функции позволяют определить степень «близости свойств или связи (корреляции) свойств» случайных сигналов или во времени с учетом сдвига для корреляционных моментов или без учета для взаимных дисперсий.

**Выборочная взаимная корреляционная функция для пары процессов  $x_i$  и  $y_j$**  при временном сдвиге  $s$  на периоде  $T$  вычисляется на основе следующего соотношения

$$K_{x_i y_j}(s) = T^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} [x_i(k) - \bar{X}_i] \times [y_j(k-s) - \bar{Y}_j], \quad (3),$$

где  $\bar{X}_i, \bar{Y}_j$  – соответствующие выборочные математические ожидания процессов как их первые *выборочные* начальные моменты.

**Выборочная взаимная дисперсия для пары процессов  $x_i$  и  $y_j$**  соответствует значению временного сдвига  $s = 0$  и вычисляется на основе соотношения

$$K_{x_i y_j}(0) = T^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} [x_i(k) - \bar{X}_i] \times [y_j(k) - \bar{Y}_j], \quad (3)$$

Однако, применение данного критерия непосредственно к наблюдаемым значениям сигналов для идентификации предаварийных состояний приводит к трудностям (возникновению ложных срабатываний), поскольку такой критерий будет одинаково чувствительным и к одновременному возрастанию, и к одновременному убыванию сигналов. В связи с этим, предлагается использование корреляционно-логических и дисперсионно-логических функций, вычисляемых только на множествах,

соответствующих одновременному положительному приращению контролируемых координат. Последнее соответствует условию одновременного опасного положительного (или отрицательного) роста амплитуд двух опасных процессов. Это достигается логической обработкой наблюдаемых сигналов. Тогда при вычислении корреляционных и дисперсионных моментов значения выборочных наблюдений, соответствующие одновременным отрицательным приращениям сигналов, полагаются равными нулю.

Кроме того, величины корреляционных и дисперсионных моментов, вычисленные таким образом, будут тем больше, чем больше абсолютные значения в выборках. В связи с этим целесообразно использование нормализованных корреляционных функций и взаимных дисперсий, значения которых принадлежат отрезку  $[-1; +1]$ , причем значения, равные единице, соответствует максимально возможной корреляции сигналов.

**Выборочные корреляционно-логические функции** нормализованного типа для дискретного времени  $k \in R$  для пары наблюдаемых процессов

$$x \rightarrow \{x_k\}_{k=0}^{k=s}, \quad k \in R, \quad y \rightarrow \{y_k\}_{k=0}^{k=s}, \quad k \in R,$$

формировались на основе совокупности дискретных выборок указанных парных процессов. В результате формируются выборочные корреляционные функции, зависящие от параметра временного сдвига  $s \in \mathbb{Z}$ .

**Нормированные оценки корреляционных функций**, формируемые на интервале наблюдений  $k \in [0, T] \subset R$  вычисляются в соответствии с классическим равенством

$$\bar{K}_{xy}(s) = K_{xy}(s) / \sqrt{K_{xx}(0)K_{yy}(0)}, \quad (5)$$

где  $T \in R$  – длина дискретного интервала наблюдений (выборки).

Дисперсионно-логический метод использует совокупность выборочных дисперсионных моментов (дисперсий) дискретных случайных процессов. При этом метод реализует заданную логику наблюдений за характеров изменения парных процессов. При этом совокупность нормированных выборочных дисперсий вычисляется на основе равенств, аналогичных с (5) так,

$$\bar{D}_{xy} = K_{xy}(0) / \sqrt{K_{xx}(0)K_{yy}(0)}. \quad (6).$$

Для идентификации аварийных и предаварийных режимов предлагается использовать вычисленные на «селективных» множествах значе-

ния нормализованной корреляционной функции сигналов, при временном сдвиге  $s$ , лежащем в заданном диапазоне, или нормализованной взаимной дисперсии, с последующим сравнением найденных значений корреляционной функции с заданными значениями (эти значения определяют характер формируемого алгоритмом сигнала, например, 0 – нормальный режим, 0.5 – предаварийный режим, 0.8 – аварийный режим).

**Предварительная обработка сигналов.** Для корректной работы предложенных алгоритмов требуется дополнительная предварительная обработка значений, полученных от датчиков состояния системы.

а) *Нормировка данных* для обработки показаний датчиков, имеющих разные интервалы измерения. Значения каждого сигнала  $x_i(t)$  с помощью линейного или кусочно-линейного преобразования приводятся к диапазону  $[0;1]$  или  $[-1;1]$ . Например, в простейшем случае, если известно, что допустимые значения сигнала лежат в диапазоне  $[0; x_{\max}]$  нормировка производится согласно формуле

$$x_{\text{norm}}(t) = \begin{cases} x(t)/x_{\max}, & x(t) \leq x_{\max}; \\ 1, & x(t) > x_{\max}. \end{cases} \quad (7)$$

б) *Фильтрация сигнала* для устранения случайных помех. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что селективные корреляционные и дисперсионные критерии чувствительны к наличию высокочастотных случайных составляющих, вызванных особенностями работы датчиков состояния системы (попадание частиц пыли в датчик дыма и т.п.). В связи с этим может оказаться целесообразной предварительная фильтрация значений для устранения этих помех и выделения основной составляющей (тенденции), характеризующей изменение состояния системы. В частности, такая фильтрация может быть осуществлена с применением метода скользящего среднего.

### 3. Оценки качества корреляционно-логического и дисперсионно-логического методов и алгоритмов

Как показано выше, для оценки степени опасности состояний контролируемых объектов предложены два подхода, использующие корреляционно-логический или дисперсионно-логический методы обработки первичной информации основанные на измерении заданной совокупности парных данных для выборочных измерений показания цифровых датчиков.

Выполнена серия вычислительных экспериментов для предварительной оценки качества алгоритмов дисперсионно-корреляционного



метода для системы пожарной сигнализации по показаниям датчиков температуры и дыма.

Выборка дискретных сигналов датчиков (ДСД) для двух координат, соответствующим измеренным значениям температуры и дыма

$$x_k \text{ и } y_k, \quad k \in [0, T] \subset R. \quad (8)$$

Выполнены на основе периодических измерений с периодом  $h$  значений ДСД, которые равны суммам

$$x_k = x_k^h + \Delta x_k^e, \quad y_k = y_k^h + \Delta y_k^e. \quad (9)$$

Периодические *низкочастотные сигналы*  $x_k^h$ ,  $y_k^h$  имеют вид

$$x_k^h = a_x \sin(\omega_x kh), \quad y_k^h = a_y \sin(\omega_y kh), \quad (10)$$

и периодические *высокочастотные помехи* удовлетворяют условиям

$$\Delta x_k^e = a_{\Delta x} \sin(\omega_{\Delta x} kh), \quad \Delta y_k^e = a_{\Delta y} \sin(\omega_{\Delta y} kh), \quad \omega_{\Delta x} \gg \omega_x, \omega_{\Delta y} \gg \omega_y, \quad (11)$$

т.е. имеют меньшую амплитуду по сравнению с основным сигналом

$$a_{\Delta x} \ll a_x, \quad a_{\Delta y} \ll a_y, \quad (12)$$

и более высокую частоту (меньший период).

Требуется исследовать влияние помехи на качество алгоритма вычисления достоверных оценок:

- выборочной взаимной корреляционной функции,
- совокупности выборочных взаимных дисперсий.

Для вычисления выборочных взаимных корреляционно-логических функций и взаимных дисперсионно-логических функций выполнено разделение аргумента сигналов на участки, для которых сигнал возрастает или убывает. Фиксировалась совокупность дискретных значений сигналов в моменты времени

$$t_k \in [0, T] \subset R, \quad k \in R,$$

где параметр  $T$  определяет длину интервала усреднения для получения:

- оценок выборочных взаимных корреляционных функций или
- совокупности выборочных взаимных дисперсий двух сигналов.

При этом наблюдаемые значения сигналов для дискретного времени, изменяющегося в заданном интервале, значения функций со сдвигом на значения от 0 до  $s$  фиксировались для дальнейшей обработки с целью получения корреляционно-логических функций, которые регистрировались в счетчиках.

Для хранения каждого сигнала организованы два отдельных массива. *Первый массив* содержит сигналы с положительными первыми разностями, т.е. для таких сигналов имеются положительные приращения. *Второй массив* содержит сигналы с отрицательными первыми разностями, т.е. сигналы, убывающие в моменты выборки на интервале.

Если сигнал в текущий момент убывает, то соответствующее ему значение в счетчике неубывающих значений полагается равным нулю. Аналогично организована работа для счетчика убывающих значений (возрастающим участкам соответствуют значения равные нулю).

Все вычислительные эксперименты выполнены при нормализации сигналов, обеспечивающих их принадлежность интервалу  $[0,1]$ . В процессе эксперимента были вычислены селективные корреляционные функции для процессов  $x(k)$  и  $y(k)$ , соответствующие участкам одновременного возрастания и одновременного убывания этих сигналов.

Эксперименты выполнены при следующих исходных данных. В качестве входных сигналов  $x(t)$ ,  $y(t)$  принимались синфазные медленно меняющиеся гармонические сигналы заданной частоты с быстро меняющейся аддитивной гармонической помехи с амплитудой  $a_{\Delta x} = K_A a_x$ ,  $a_{\Delta y} = K_A a_y$ , и частотой, равной

$\omega_{\Delta x} = K_\omega \omega_x$ ,  $\omega_{\Delta y} = K_\omega \omega_y$ , где  $K_A$ ,  $K_\omega$  – коэффициенты амплитуды и частоты помехи по отношению к базовому сигналу. В результате исследования определены графики значений  $D_{xy}$  для участков совместного возрастания и совместного убывания сигналов. Взаимные дисперсии вычислены с помощью *дисперсионно-логической функции*. Эксперименты выполнены в условиях:

а). **При отсутствии предварительной фильтрации** сигналов ширина окна для вычисления скользящего среднего равна единице.

б). **При наличии предварительной фильтрации** входных сигналов ширина окна принадлежит интервалу  $[4; 6]$ .

**5. Результаты вычислительных экспериментов.** Для оценки эффективности методик анализа опасных состояний объекта контроля проведен ряд экспериментов.

**Эксперимент № 1.** Исходные данные эксперимента: параметры равны:

$$K_A = 0,15, \quad K_\omega = 8.$$

Цифровая фильтрация отсутствует, процессы представлены на рис.1.

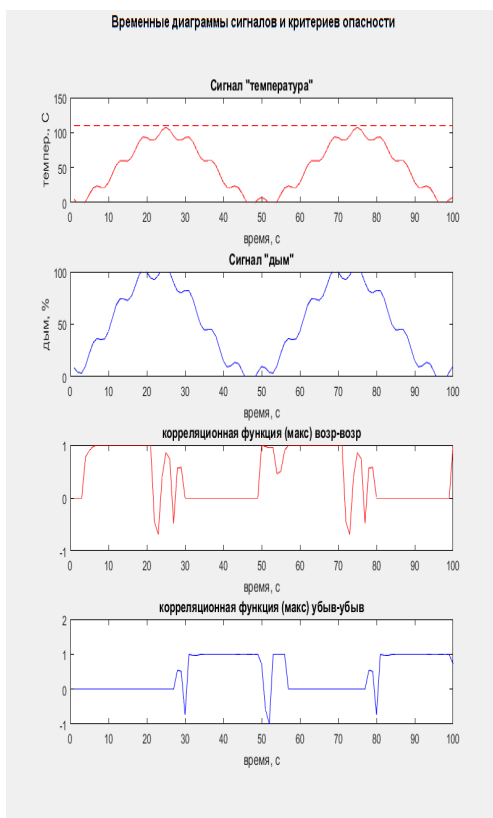


Рис. 1. Модельные входные и выходные сигналы эксперимента № 1

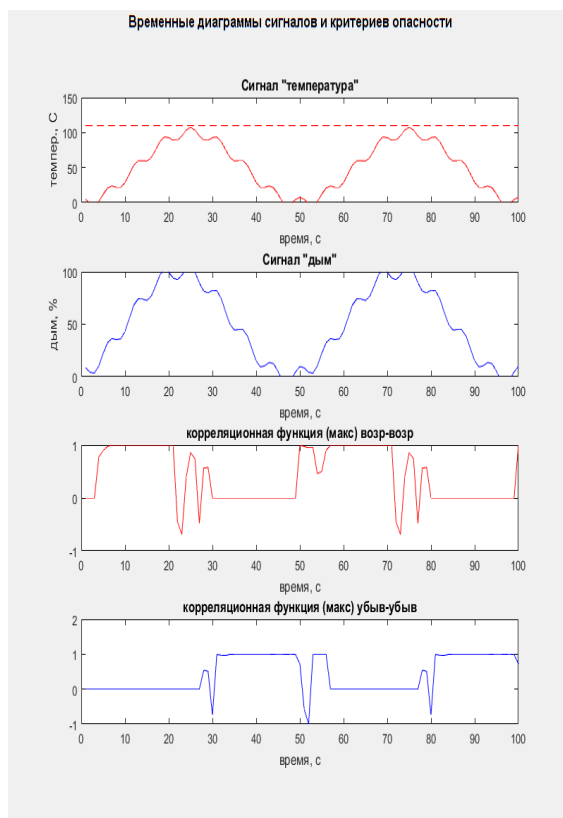


Рис. 2. Модельные входные и выходные сигналы эксперимента № 2

**Вывод:** процессы при отсутствии фильтрации имеют типовой нерегулярный характер, соответствующий ранее полученным результатам. При этом из характера процессов формирования дискретных выходных координат ЦСПС следует, что для частичной регуляризации процессов требуется соответствующая фильтрация.

**Эксперимент № 2.** Исходные данные эксперимента:

$$K_A = 0,15, \quad K_\omega = 8.$$

Фильтрация включена с шириной окна фильтрации  $N = 4$ .

**Вывод:** наблюдается типовой характер квазирегулярных процессов формирования выходных координат, нарушающийся при изменении переходных условий, что иллюстрирует сильное влияние помех на рассматриваемые процессы.

Эксперименты № 3 и 4 позволяют сделать вывод о том, что также имеет место устойчивое формирование основной части процесса формирования при сильном влиянии аддитивной помехи выходных координат. При этом для выходных сигналов типа «Пожар» характерны «одноколебательными» составляющие в конце интервалов оценивания процессов взаимной корреляции и дисперсии.

Таким образом, предлагаемые методы идентификации пожаро-

опасных состояний технических объектов на основе обработки избыточных данных дополняют известные методы идентификации критических ситуаций.

#### **Список литературы**

1. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов с атомарными функциями и вейвлетами. ТЕХНОСФЕРА, 2018.– 182 с.
2. Богданов С.С., Козлов В.Н., Халиуллин Ю.М. Корреляционно-логический метод идентификации пожароопасных состояний технических объектов. Изд-во Политехн. ун-та. СПб.: 2018.– 110 с.

УДК 517.9

**Фирсов Андрей Николаевич,**  
д-р техн. наук., профессор

### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛМОГОРОВА-ФЕЛЛЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА**

Россия, Санкт Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
anfirs@yandex.ru

**Аннотация:** Работа посвящена построению аналитических алгоритмов решения стохастических интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова-Феллера, которые встречаются в задачах теории управления, теории связи, звёздной динамике и т.п.

**Ключевые слова:** уравнение Колмогорова-Феллера, нелинейный коэффициент сноса, аналитические алгоритмы решения

**Andrei N. Firsov,**  
Dr.Tech.Sci., professor

### **ANALYTIC SOLUTION OF A NONSTATIONARY EQUATION OF KOLMOGOROV-FELLER TYPE WITH A NONLINEAR DRIFT COEFFICIENT**

Russia, Saint Petersburg, Peter the Great Polytechnic University,  
anfirs@yandex.ru

**Abstract.** The paper is devoted to the construction of analytical algorithms for solving stochastic integro-differential equations of Kolmogorov-Feller type. Such equations are encountered in problems of control theory, communication theory, stellar dynamics, and so on.

**Keywords:** Kolmogorov-Feller equation, nonlinear drift coefficient, analytical solution algorithms.

**Введение.** Настоящая заметка посвящена построению аналитического алгоритма решения стохастических интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова-Феллера, которые встречаются в задачах теории управления, теории связи, звёздной динамике и т.п. В известных автору работах [1–5], содержащих варианты аналитических и/или численных алгоритмов решения подобных уравнений, рассматриваются, как правило, случаи линейной зависимости коэффициента сноса от пространственной координаты. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм аналитического решения не предполагает подобного ограничения, и опирается на разработанную ранее автором теорию быстро убывающих обобщённых функций [6–8], где, в частности, предложена конструкция восстановления «достаточно быстро убывающей на бесконечности функции» по её степенным моментам. Для простоты изложения мы здесь ограничимся случаем квадратичной зависимости коэффициента сноса от пространственной координаты.

### 1. Постановка задачи. Ищется решение уравнения

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [(\alpha x + \beta x^2) W(x, t)] + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} p(A) W(x - A, t) dA - \gamma W(x, t) \quad (1.1)$$

$W(x, 0) = W_0(x)$  – известная функция,

$$W(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \forall t, \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = 1,$$

при этом, очевидны требования  $p(A) \stackrel{\text{R}}{A \in \mathbb{R} \pm \Gamma} 0$ ;  $\int_{-T}^T P(A) dA = 1/$  .

Мы дополнительно предположим, что

$$p(A) = O(\exp(-\omega |A|^{1+\delta})), \quad |A| \rightarrow \infty, \quad \omega > 0, \quad \delta > 0 \quad (1.3)$$

Решения задачи (1.1) – (1.2) будем искать в классе «достаточно быстро» убывающих функций (подробности см. ниже).

**2. О представлении быстро убывающей функции через её моменты.** Пусть:  $f(x)$  – непрерывна, и

$$f(x) = O(\exp(-\lambda|x|^{1+\mu})), |x| \rightarrow \infty; \lambda > 0, \mu > 0.$$

Положим далее,

$$C^{(n)} \triangleq \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пользуясь методами, развитыми в [7], сравнительно несложно доказать, что имеет место соотношение

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{(n)}}{\varepsilon} \sigma^{(n)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В частности,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{(n)}}{\varepsilon} \sigma^{(n)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Здесь

$$\sigma^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{k!}{(k-s)!} \frac{\sin\left(x + (k-s)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{s+1}}.$$

Нетрудно увидеть, что имеют место следующие равенства:

$$\sigma^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2k+2s+1)(2s)!}$$

$$\sigma^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{(2k+2s+3)(2s+1)!}$$

$$\sigma^{(2k)}(x) = \frac{(-1)^k}{2k+1} + O(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sigma^{(2k+1)}(x) = O(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sigma^{(k)}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

$$\sigma^{(k)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{(i)^k}{2} \varepsilon^{k+1} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \tau^k e^{ix\tau} d\tau.$$

**3. Построение решения задачи (1.1), (1.2).** Положим далее:

$$C^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x^n W(x, t) dx \right].$$

Тогда из (1.1) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} C^{(n)}(t) = \frac{d^{(k-1)}}{dt^{(k-1)}} \left( -\gamma C^{(n)}(t) + \gamma \sum_{s=0}^n p^{(s)} C^{(n-s)}(t) - \alpha n C^{(n)}(t) \right) + \\ + n(n+1) \beta \frac{d^{(k-1)}}{dt^{(k-1)}} C^{(n+1)}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{dC^{(0)}(t)}{dt} = -\gamma C^{(0)}(t) + \gamma p^{(0)} C^{(0)}(t), \quad (3.2)$$

где 
$$p^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} p(A) A^k dA, \quad p^{(0)} = 1.$$

Условия (1.2) перейдут в

$$C^{(n)}(0) \equiv C_0^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, t) x^n dx, \quad C^{(0)}(t) \equiv 1. \quad (3.3)$$

Обозначим, далее,  $\xi_{k,n}(t) = \frac{d^k}{dt^k} C^{(n)}(t)$  (отметим, что величины  $\xi_{0,n}(0) = C_0^{(n)}$  - известны). Тогда (3.1) перепишется в виде:

$$\xi_{k,n} = (-\gamma - \alpha n) \xi_{k-1,n} + \gamma \sum_{s=0}^n p^{(s)} \xi_{k-1,n-s} + n(n+1) \beta \xi_{k-1,n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Поскольку нам известны  $\xi_{0,n}(0)$ , из (3.4), полагая  $t = 0$ , можно найти  $\xi_{1,n}(0)$ , зная  $\xi_{1,n}(0)$ , можно найти  $\xi_{2,n}(0)$  и т.д. Таким путем могут быть найдены все  $\xi_{k,n}(0) = \frac{d^k}{dt^k} C^{(n)}(t)_{t=0}$ . Но тогда, очевидно, справедливо равенство

$$C^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_{k,n}(0)}{k!} t^k. \quad (3.5)$$

Использовать ряд (3.5) удобнее для малых  $t$ :  $0 \leq t \leq T < 1$ , ограничиваясь конечным числом членов. Построив решение на промежутке  $[0, T]$ , и приняв за новые начальные условия  $C^{(n)}(T)$ , можно построить  $C^{(n)}(t)$  для  $t \in [T, 2T]$ :

$$C^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_{k,n}(0)}{k!} (t-T)^k, \quad t \in [T, 2T] \text{ и т.д.}$$

В заключение сделаем одно полезное *замечание*. Пусть:

$$\varphi(k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n C^{(n)}(t) k^n.$$

Тогда нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$W(x, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(k, t) e^{ikx} dk.$$

### Список литературы

1. Баранов Н.А., Турчак Л.И. Численное решение уравнения Колмогорова-Феллера. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, т. 47, № 7, с. 1221-1228.
2. Баранов Н.А., Турчак Л.И. Численное решение уравнения Колмогорова-Феллера с сингулярными особенностями. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, № 2, с. 347-351.
3. Александров В.Д. Точное решение стационарного уравнения Колмогорова-Феллера. – Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, вып. 1, с. 106.
4. Кинг А.Р. Введение в классическую звездную динамику. Пер. с англ. - М.: УРСС, 2011.
5. Баранов Н.А., Турчак Л.И. Методы анализа функциональной безопасности сложных технических систем. – М.: ВЦ РАН, 2006.
6. Фирсов А.Н. Метод моментов в теории обобщенных функций и его приложения в задачах системного анализа и управления. Основы теории. - НТВ СПбГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 6, 2010. – с. 74-81.
7. Фирсов А.Н. Моментное представление быстро убывающих функций и его приложения. – «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке»: Материалы XVII Междунар. науч.-метод. конф. 11-12 февраля 2010 г. Пленарные доклады. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, с. 114-124.
8. Фирсов А.Н. Обобщенные математические модели и методы анализа динамических процессов в распределенных системах. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013.
9. Firsov A., Koval A. "Moment" representation of "fast decreasing" generalized functions and their application to several applied stochastic problems. - Machines. Technologies. Materials. International journal for science, technics and innovations for the industry (Bulgaria), issue 6, 2015, p. 21-23.



**Горелова Галина Викторовна**

д-р техн. наук, профессор,  
научный руководитель Института управления в социальных,  
экономических и экологических системах Инженерно-технологической  
академии Южного федерального университета

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ**

Россия, г. Таганрог, Южный федеральный университет  
gorelova-37@mail.ru

**Аннотация.** Целью настоящей работы является представление информации об исследованиях в области теории и практики принятия решений в условиях вероятностной неопределенности (задачи и модели оптимума номинала), активно проводимых в нашей стране в период 60-90-х годов прошлого столетия.

Вероятностная неопределенность присуща всем производственным процессам и учет ее находит выражение, в том числе, в задании не только номинала, но и допусков на готовую продукцию, в наличии вероятности получения не только годной продукции, но и брака. Автором постановки задач и разработки многих моделей оптимума номинала был Д.В. Свечарник. В моделях задач оптимума номинала учитывается разная полезность вероятностей выходных показателей производственных объектов, характеризующихся как сложные системы. Можно провести некоторую аналогию между идеей Д.В. Свечарника и практически одновременно развиваемыми идеями оптимальных статистических решений, игр с природой, теории полезности, функцией потерь Тагути. В данной работе проведен анализ этих идей и моделей, определено существенное отличие. Теория и практика моделирования задач оптимума номинала успешно развивалась в двух направлениях: исследованиях технологических процессов и в проектировании новых изделий. В данной работе представлены новые математические модели в виде обобщенной функции эффективности оптимума номинала в одномерном и многомерном случаях, а также статические и многошаговые задачи при «управлении» параметрами распределения для достижения максимальной ожидаемой полезности результатов. Приведены формулы и рисунки, иллюстрирующие постановку задач об оптимуме номинала.

**Ключевые слова:** производственные процессы, принятие решений, вероятностная неопределенность, полезность, модель оптимума номинала, функция эффективности.

**Galina V. Gorelova,**

Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Scientific Director of the Institute of Management in Social, Economic  
and Ecological Systems of the Engineering and Technological Academy of  
the Southern Federal University

## **MODELING DECISION-MAKING PROBLEMS IN THE CONDITIONS OF PROBABILISTIC UNCERTAINTY FOR INDUSTRIAL SYSTEMS**

Russia, Taganrog, Southern Federal University, gorelova-37@mail.ru

**Abstract.** The purpose of this paper is to provide information on research in the field of theory and practice of decision making under probabilistic uncertainty (models of tasks the optimum of the nominal). In our country, in the period 60-90-ies carried out such studies. It is proposed to use the results of these studies in the new conditions - in terms of the design and operation of cyber-physical systems. Probabilistic uncertainty is inherent in all production processes and its accounting finds expression, including in the task not only of the nominal value, but also of the tolerances on the finished product, in the presence of the probability of obtaining not only suitable products, but also defective products. The author of the formulation of tasks and the development of many models of tasks the optimum of the nominal was D.V. Svecharnik. In models of problems of optimum nominal, the different utility of probabilities of output indicators of production facilities characterized as complex systems is taken into account. Some analogy can be drawn between the idea of D.V. Svecharnik and almost simultaneously developed ideas of optimal statistical solutions, games with nature, utility theory, Taguchi loss function. In this paper, an analysis of these ideas and models is carried out, a significant difference is determined. The theory and practice of modeling of tasks the optimum of the nominal was successfully developed in two directions: research of technological processes and in the design of new products. This paper presents new mathematical models in the form of a generalized efficiency function of optimum nominal in one-dimensional and multidimensional cases, as well as static and multi-step problems with “managing” distribution parameters to achieve the maximum expected utility of the results. Formulas and figures are given illustrating the formulation of tasks the optimum of the nominal.

**Keywords:** decision-making, production processes, probabilistic uncertainty, utility, tasks on the optimum of the nominal, efficiency function.

## **Введение**

Настоящее время принято определять как четвертую промышленную революцию, для которой характерно полное взаимопроникновение цифровых технологий в промышленность. Основы их возникновения закладывались в прошлом веке, когда создавались различные автоматизированные системы управления в промышленности и началось внедрение вычислительной техники в управление производственными процессами. В то же время активно развиваются различные направления теории управления и принятия оптимальных решений, которые являются математическим фундаментом цифровизации управления.

Совершенствование системы управления производством, повышение его эффективности, улучшение качества изделий на всех этапах – проектирования, изготовления, эксплуатации - является важнейшей задачей. Проблема принятия оптимальных решений, являясь одной из самых сложных проблем управления, усугубляется еще и тем, что весьма часто решения необходимо принимать в условиях неопределенности и при неполных знаниях о возможных последствиях управления. В таких условиях необходимо предварительное моделирование возможных ситуаций принятия решений и оценка их последствий с последующим выбором лучшего решения. В этих целях в статье предлагается использовать идеи Д.В. Свечарника, которые впервые были опубликованы в ра-

боте «Задача об оптимуме номинала при вероятностных расчетах» в 1957 году [15], но разработаны были в начале 40-х. Далее модели и методы оптимума номинала развивались в трудах его учеников [1-14].

Задачи об оптимуме номинала относятся к классу задач принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. Интересно отметить, что в этот же период начинают активно развиваться и другие подходы к решению задач принятия решений в условиях разного рода неопределенности, которые можно сопоставить с подходом Д.В. Свечарника. Это работы в области оптимальных статистических решений, игр с природой, теории полезности, управления качеством Тагути. Проведем сопоставление соответствующих моделей принятия решений.

### **1. О некоторых моделях задач принятия решений в условиях вероятностной неопределенности.**

*Идея оптимума номинала.* Представим простейшую задачу об оптимуме номинала словами автора [15, стр.1]: «I. Зная установленный на станке-автомате номинал, распределение плотности вероятности ошибок или иные подходящие характеристики точности работы станка и значения отклонений от номинала, определяющие собой сортность продукции, подсчитывают вероятность выдачи автоматом продукции того или иного сорта. При наличии сведений о прибыли соответственно по каждому сорту и об убытке от брака при выходе продукции из допуска в ту или другую сторону мы можем подсчитать экономичность станка». Задача в такой постановке была названа «пассивной», поскольку ее решение позволяет только определить лишь конкретную существующую характеристику системы - экономичность станка при заданном номинале, допусках, стоимости годной продукции и брака (заметим, что в 1935-1937 годах Д.В. Свечарник, специалист в электромеханической технике, разработал и внедрил на Днепродзержинском металлургическом комбинате первую в СССР систему автоматизации прокатных станков). «Активными» должны быть названы задачи [15, стр.1] «...у которых *непосредственный результат* расчета позволял бы, например, выбрать такую установку номинала на станке-автомате, при которой *его экономичность была бы наиболее высокой* при заданном распределении допусков и стоимости отдельных сортов и брака». Свою идею автор представляет в математической форме в виде различных форм функции эффективности оптимума номинала. Простейший вариант функции эффективности  $\varphi$  имеет вид:

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^n c_i \int_i^{i+1} f(y) dy \quad (1)$$

где  $y$  – выходной показатель произведенной продукции (параметр изделия),  $i$  - полоса качества продукции,  $c_i$  - «ценность», «полезность»  $i$ -й по-

лосы (например, ценность годной продукции в поле/полосе допуска, «ценность» брака в «+» и в «-»),  $f(y)$  – плотность распределения значений показателя,

$$P_i = \int_i^{i+1} f(x) dx \quad (2)$$

– вероятность попадания в интервал  $[i, i+1]$ .

Задача оптимума номинала состоит в определении  $y = y_{\text{ном}}^0$  такого, при котором достигается

$$\varphi^0 = \max \{ \varphi(y) = \sum_{i=1}^n c_i \int_i^{i+1} f(y) dy \} \quad (3)$$

Экстремум функции эффективности  $\varphi^0$  и соответствующий оптимум номинала  $y_{\text{ном}}^0$  определяется тем или иным численным методом в зависимости от конкретного определения функции эффективности. Заметим, решение не тривиально (не совпадает с заданным номиналом), когда несимметрично распределение и/или функция цены. Рис.1 иллюстрирует постановку задачи (1).

Фактически, формула (1) является формулой определения ожидаемой полезности, концепция которой была выдвинута еще в 1738 году Д. Бернулли: ожидаемая полезность – это сумма частных полезностей, умноженных на их вероятности. Формула (3) – максимизация ожидаемой полезности («рациональное поведение»).

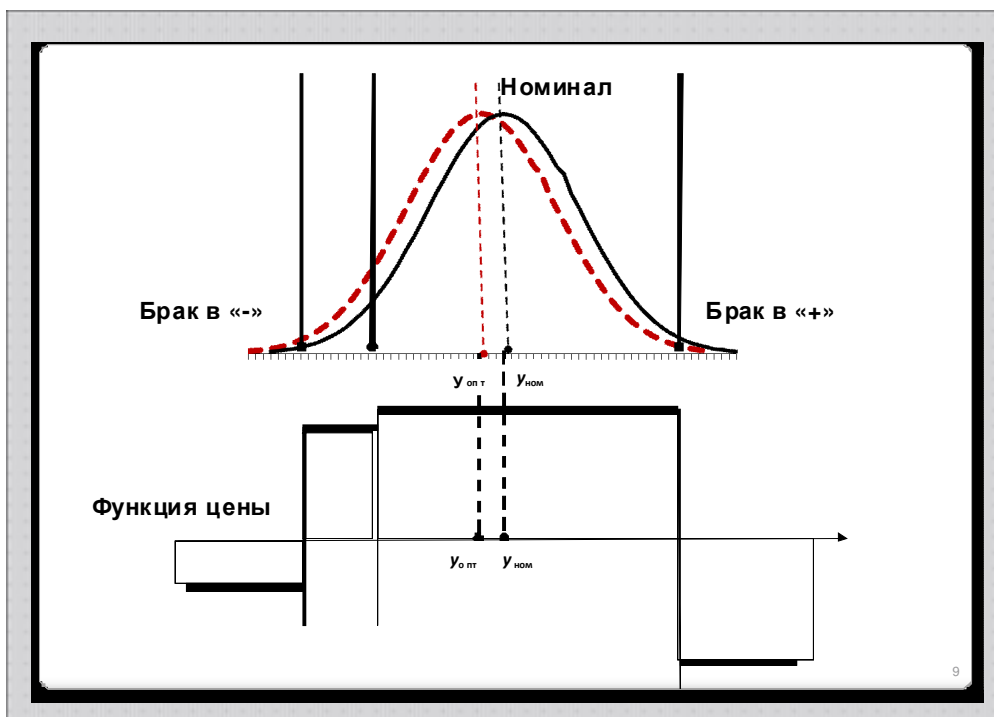


Рис. 1. Иллюстрация постановки задачи оптимума номинала

*Модели задач с риском, оптимальные статистические решения, игры с природой.* В середине прошлого века, когда разрабатывалась математическая теория принятия решений, было предложено немало критериев и методов принятия решений для выбора наилучшего в зависимости от вида неопределенности.

В работах, например, Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, М. де Гроота, П. Фишберна и др. была предложена форма модели определения ожидаемой полезности в виде:

$$U = \sum_{j=1}^n u_j P_j, \quad (4)$$

где  $P_i$ ,  $u_i$  – вероятность и полезность (utility) результата  $i$ .

Если необходим выбор между стратегиями  $\alpha_i$ , то для принятия оптимального решения можно использовать критерий максимума ожидаемой полезности

$$U^o = \max_i \left\{ U_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} P_{ij} \right\}, \quad i = 1, 2 \dots m. \quad (5)$$

Отличие (4) от модели Д.В. Свечарника (1) состоит не только в задании  $P_i$  – формула (2), но и в концепции постановки задач принятия решений с риском как «активных» задач. Это отличие расширило поле исследований и дало возможность формулировать различные варианты задач оптимума номинала, как задач «управления» параметрами распределения характеристик (показателей) производственных процессов.

«Управление качеством». Рассмотрим теперь идею Г. Тагути (Genichi Taguchi) – «инжиниринг качества» в сопоставлении с идеей Д.В. Свечарника.

Как известно, Тагути предложил параболическую функцию потерь, в которой объединил стоимостные и качественные показатели:

$$L(x) = c(x - x_0)^2, \quad (7)$$

где  $c$  – постоянная потеря, определяемая с учетом расходов производителя изделий;  $(x - x_0)$  – отклонение измеряемой характеристики  $x$  от номинала  $x_0$ ;  $L(x)$  – функция потерь – величина, которая учитывает потери от бракованной продукции как со стороны потребителя, так и со стороны производителя, это «потери для общества». Показатели качества продукции, которые полностью совпадают с их номинальными значениями, считаются качественными, всякое отклонение от номинала – потеря качества. Оптимальное решение – минимизация потерь.

Как видим, отличие идеи оптимума номинала от идеи Тагути состоит, во-первых, в разных подходах к оценке результатов производства изделий. В моделях Свечарника используется идея функции полезности, в

модели Тагути – функция потерь. Если рассматривать эти идеи с позиций психологической теории принятия решений, то подход Тагути близок к теории проспектов («теории перспектив», Д. Канеман, А. Тверски, 1979 г): «люди придают большое значение потерям, чем приобретениям, даже если их величина одинакова». Еще одним отличием модели оптимума номинала (1) от (7) является то, что в ней присутствуют вероятности получения различных результатов, теоретически предусмотрена возможность учета большого числа «интервалов качества» и оценочная функция  $S$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, становясь функцией потерь в области брака.

Для дальнейшего раскрытия модели задачи оптимума номинала приведем пример расчета значений функции эффективности.

**2. Пример решения задачи оптимума номинала.** Пусть производится продукция 3-х сортов, и может быть получен брак в «+» и в «-». Определены «полезности» каждого из 5 интервалов значений Распределение значений  $y$  показателя качества продукции подчиняется нормальному закону распределения с определенными математическим ожиданием  $m$ , совпадающим с номиналом ( $m_{\text{ном}}$ ), и среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ . Исходные данные пронормированы и приведены в табл. 1.

Для расчетов воспользуемся авторской программной системой FE-FON.

Таблица 1.

Фрагмент расчетов функции эффективности оптимума номинала

| Принятие решений. Оптимум номинала. |              |          |        |             |        |         |        |        |        |        |       |                     |
|-------------------------------------|--------------|----------|--------|-------------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|-------|---------------------|
| №                                   | $m / \sigma$ | P1/C1    | P2/C2  | P3/C3       | P4/C4  | P5/C5   | P6/C6  | P7/C7  | P8/C8  | P9/C9  | P0/C0 | $\Phi$              |
| Инт.                                |              | -4       | -3     | -2          | -1     | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      |       |                     |
| 1 $m_1 =$                           | 0.2          | 1.0E-4   | 0.0024 | 0.0355      | 0.1942 | 0.391   | 0.2897 | 0.079  | 0.0079 | 3.0E-4 |       | $\Sigma P = 1.0001$ |
| $\sigma_1 =$                        | 1            | -20      | -20    | 50          | 50     | 50      | 50     | -50    | -50    | -50    |       | $\sigma = 41.11$    |
| 2 $m_2 =$                           | 0            | 1.0E-4   | 0.0044 | 0.054       | 0.242  | 0.3989  | 0.242  | 0.054  | 0.0044 | 1.0E-4 |       | $\Sigma P = 0.9999$ |
| $\sigma_2 =$                        | 1            | -20      | -20    | 50          | 50     | 50      | 50     | -50    | -50    | -50    |       | $\sigma = 43.83$    |
| 3 $m_3 =$                           | -0.2         | 3.0E-4   | 0.0079 | 0.079       | 0.2897 | 0.391   | 0.1942 | 0.0355 | 0.0024 | 1.0E-4 |       | $\Sigma P = 1.0001$ |
| $\sigma_3 =$                        | 1            | -20      | -20    | 50          | 50     | 50      | 50     | -50    | -50    | -50    |       | $\sigma = 45.631$   |
| 4 $m_4 =$                           | -0.6         | 0.0012   | 0.0224 | 0.1497      | 0.3683 | 0.3332  | 0.1109 | 0.0136 | 6.0E-4 | 0.0    |       | $\Sigma P = 0.9999$ |
| $\sigma_4 =$                        | 1            | -20      | -20    | 50          | 50     | 50      | 50     | -50    | -50    | -50    |       | $\sigma = 46.923$   |
| 5 $m_5 =$                           | -1           | 0.0044   | 0.054  | 0.242       | 0.3989 | 0.242   | 0.054  | 0.0044 | 1.0E-4 | 0.0    |       | $\Sigma P = 0.9998$ |
| $\sigma_5 =$                        | 1            | -20      | -20    | 50          | 50     | 50      | 50     | -50    | -50    | -50    |       | $\sigma = 45.452$   |
| Расчет                              |              | Очистить |        | Тест данные |        | Закреть |        |        |        |        |       |                     |

По данным расчетов построена кривая функции эффективности оп-

тимума номинала, рис.2. Оптимальное решение найдено в данном случае методом регулярного поиска с переменным интервалом поиска:

$\varphi^0 = 46,92$  при  $m/\sigma = -0,6$ . При настройке процесса на номинальное значение  $m/\sigma = 0$  функция эффективности  $\varphi = 43,83$ .

Рассмотренная задача оптимума номинала является математически достаточно простой, но постановка ее для реального производства требует серьезных исследований по определению параметров задачи: закона распределения показателей качества продукции, установления функции цены и др. В работах [3-6,8, 16] рассмотрено решение реальных производственных задач.

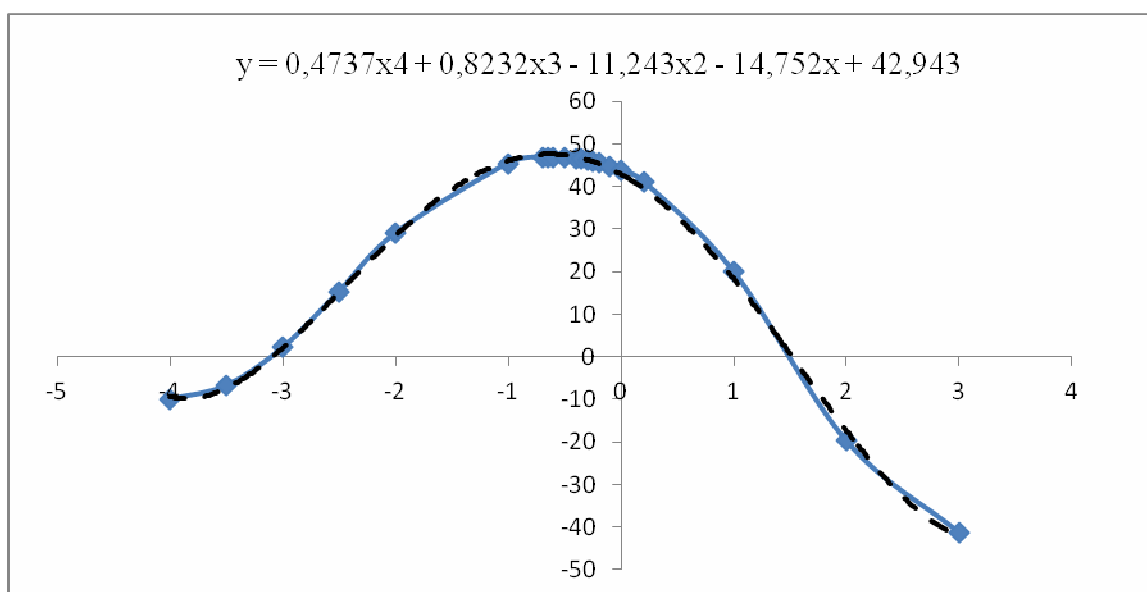


Рис.2.График функции эффективности

Определение оптимума номинала или оптимальной номинальной программы управления обусловлено спецификой производственных процессов, усложняющей постановку и решение задачи. Производственные процессы характеризуются наличием многих показателей качества, наличием большого количества управляющих факторов и неуправляемых условий протекания процесса; возможна множественность оценок и возможность нескольких способов оценок одних и тех же значений выходных показателей, причем иногда противоположных друг другу; функционирование производственных объектов происходит в условиях всевозможных помех. Кроме того, часто необходимо согласовывать частные цели отдельных звеньев технологического процесса с общей задачей производства или согласовывать цели нескольких производств между собой. Все это привело к разработке вариантов моделей задач оптимума номинала.

Задачи типа (1) были названы задачами оптимума номинала первого

класса с дискретной функцией цены. В этих задачах оптимум определяется только по математическому ожиданию показателя качества (или по сдвигу от номинального математического ожидания).

Модель имеет вид:

$$\varphi(C, m_y) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{y_{in}}^{y_{ik}} f(y, m_y) dy. \quad (8)$$

Практически, установка оптимума номинала в этом случае требует поднастройки технологического процесса к условиям конкретного производства с учетом соответствующих ему экономических оценок.

Если оптимум номинала определяется с учетом варьирования  $\sigma$  (требуется установка более точных регуляторов, появляются затраты на «управление»  $\sigma$ ), а также с учетом варьирования параметров распределения несимметричного распределения (ассиметрии, эксцесса), то такие задачи были отнесены к задачам второго класса.

Названные модели задач оптимума номинала являются целевыми функциями без ограничений, учитываемых в явном виде. В работах [11,12,13] была предложена идея *обобщенной функции эффективности оптимума номинала*, в которой помимо целевой функции имеются ограничения на взаимосвязь переменных и на параметры. Так, для задачи второго класса с варьируемыми  $m$  и  $\sigma$  модель имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(C, m_y, \sigma) &= \sum_{i=1}^n c_i(y, X) \int_{y_{in}}^{y_{ik}} f(y, m_y, \sigma) dy \\ m_y^{(A)} &= \eta(X); & (a) \\ m_y^{(B)} &= \eta(X); & (b) \\ X \in X_{дон}^{(A)}; \quad X \in X_{дон}^{(B)}; \quad y \in Y_{дон} & & (c) \end{aligned} \quad (9)$$

В модели (9): - целевая функция, (a) и (b) – ограничения на взаимосвязь переменных («уравнения управления» параметрами распределения), (c) – ограничения на показатель. Рис.4 иллюстрирует постановку такой задачи.

На рис. 3: а) - первые группа графиков изображают сдвиги по оси  $y$  кривых плотности распределения с малой (сплошные линии) и большой дисперсиями (штрихпунктирные линии), которые изменяются (управляются) согласно функциям А и Б; на оси  $X$  отмечены границы допустимых значений; б) – вторая группа графиков изображает дискретные функции цены для вариантов А и Б; в) – третья группа графиков изображают функции эффективности оптимума номинала для решения задач с большей и меньшей дисперсией; графики (г) изображают производную



от функций эффективности. На графиках функции эффективности дополнительно проиллюстрированы возможные отклонения  $\Delta\varphi$  от расчетного значения  $\varphi^0$  при исследовании чувствительности решений к вариациям параметров

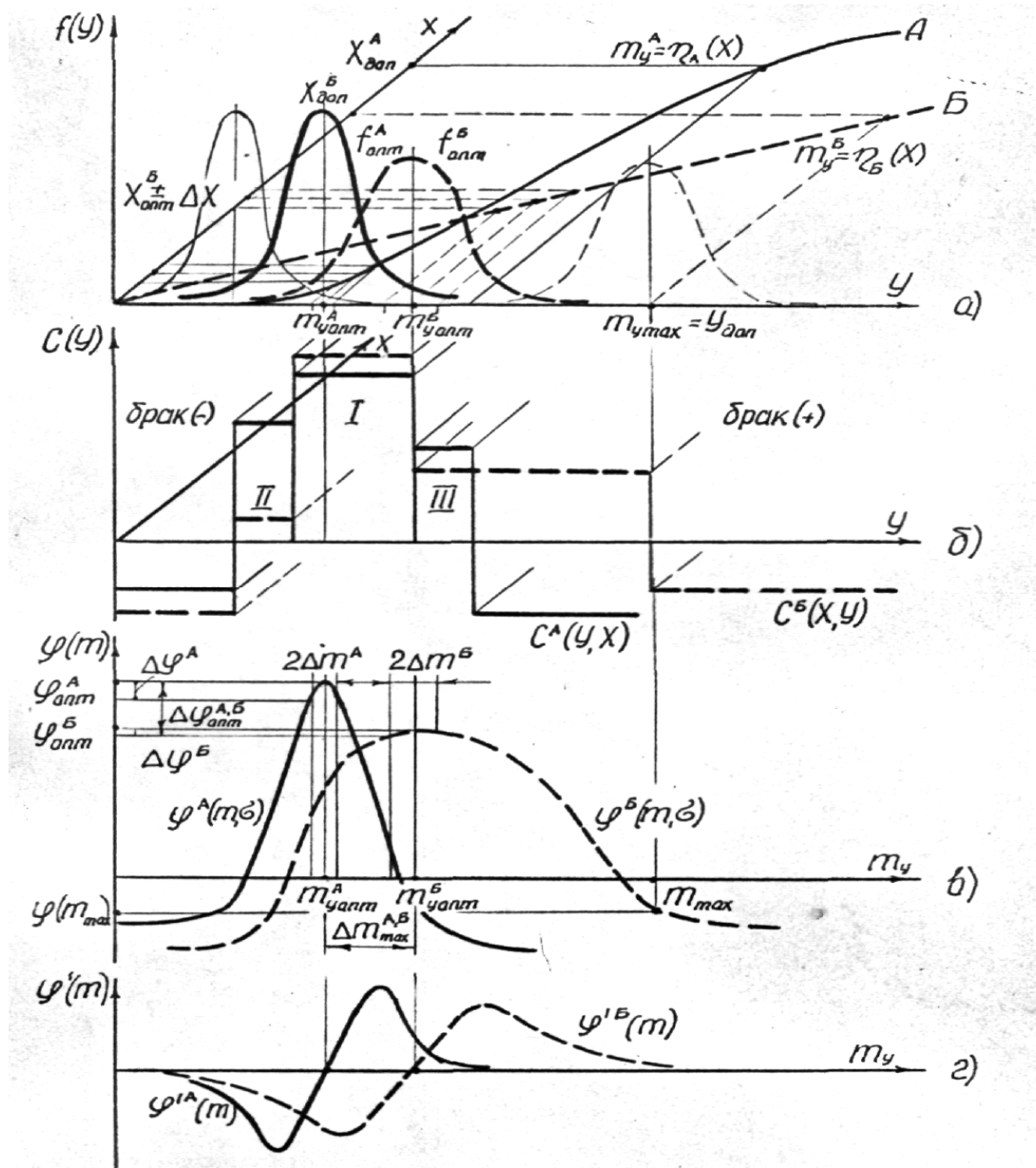


Рис. 3. Иллюстрация постановки и решения задачи оптимума номинала второго класса на модели обобщенной функции эффективности

**3. Варианты обобщенной функции эффективности оптимума номинала.** В процессе исследований было предложено четыре типа моделей оптимума номинала: одномерные, многомерные, динамические, многошаговые, в каждом из которых выделялись группы задач первого и второго классов с дискретной и непрерывной функциями цены, случайными и неслучайными ценами и границами областей. Целевые функции

в общем виде строились как функции от моментов распределения, что, в том числе, удобнее при обработке данных о распределениях, получаемых при контроле за выпускаемой продукцией. Например, для одномерной задачи оптимума номинала второго класса с дискретной функцией цены модель имеет вид

$$\varphi(C, M_h); \quad C(X, y, M_h); \quad C = \{c_i\}; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\varphi(C, M_h) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{y_{in}}^{y_{ig}} f(y, M_h) dy \quad ,$$

$$\begin{cases} M_h = \eta(X), h = 1, 2, 3, 4 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \in X_{don}, \quad y \in y_{don} & (b) \end{cases}$$

где  $M_h$  – моменты распределения,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  – оценки соответственно математического ожидания, дисперсии, меры косости и крутости распределения.

Модель многомерной динамической функции эффективности второго класса с непрерывной функцией цены имеет вид

$$\varphi(C, \bar{M}_h, t); \quad \psi(c) = \psi(X, Y, \bar{M}_{ht});$$

$$X = \{x_s\}; Y = \{y_s\}; \bar{M}_{ht} = \{M_{sht}\};$$

$$\varphi(C, \bar{M}_h) = \int_C \psi(c) dc \iint_{\bar{Y}} \dots \int dF(Y, \bar{M}_{ht}, t) \quad .$$

$$\begin{cases} \bar{M}_{ht} = \eta(X, t), h = 1, 2, 3, 4 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \in X_{don}, \quad Y \in Y_{don} & (b) \end{cases}$$

Производственные процессы чаще всего многоэтапны, обработка исходных материалов на разных стадиях может происходить в разных агрегатах (станках) – рис. 4.

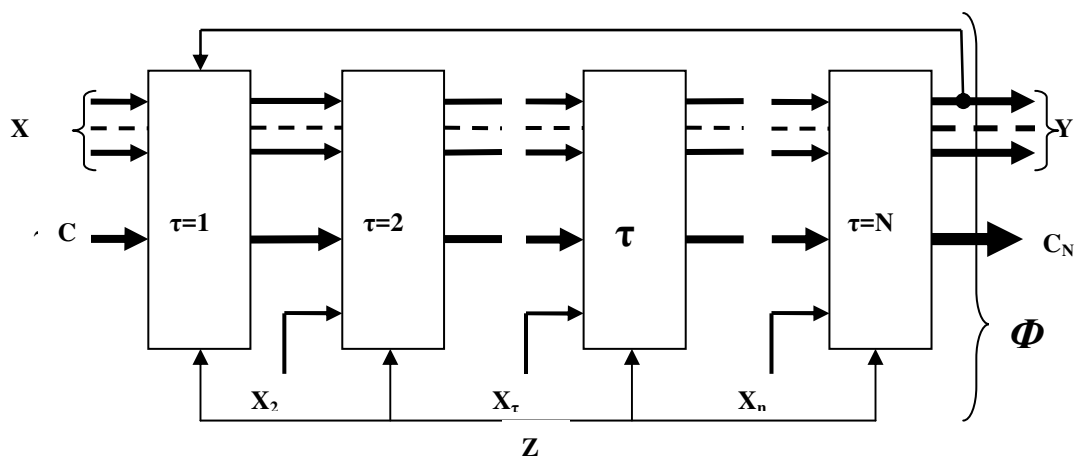


Рис. 4. Многоэтапный производственный процесс

Для многоэтапных процессов предложены модели многошаговых задач оптимума номинала

$$\Phi = \sum_{\tau=1}^N \varphi_{\tau}, \quad (10)$$

где  $\varphi$  – один из типов функции эффективности оптимума номинала.

### **Заключение**

Представленный краткий обзор моделей оптимума номинала предназначен для ознакомления с направлением работ в области вероятностных задач принятия решений для различных технологических процессов и производственных систем. Для сложных систем, которые представляют собой единое целое из различных природных объектов и искусственных подсистем, требуются новые подходы к моделированию, к обеспечению связи между вычислительными и физическими ресурсами. Подход к обоснованию и принятию управленческих решений на основе концепции оптимума номинала много шире применения его к производственным системам. Математический аппарат задач оптимума номинала может рассматриваться не только в техническом, но и в более широком, экономическом аспекте.

### **Список литературы**

1. Абрамов О.В., Здор В.В., Супоня А.А. Допуски и номиналы систем управления. – М.: Наука., 1976. – 160 с .
2. Абрамов О.В., Бернацкий Ф.И., Здор В.В. Параметрическая коррекция систем управления. – М.: Энергоиздат. 1982. – 176 с
3. Бернацкий Ф.И., Здор В.В. и др. Автоматизированное управление химической технологией. – М.: Наука, 1981. – 216 с.
4. Горелова Г.В., Здор В.В., Свечарник Д.В. Метод оптимума номинала и его применения. – М.: Энергия, 1970. – 200 с.
5. Горелова Г.В. Оптимизация управления синтезом аммиака по одному параметру // Электромеханика. – 1966. – № 8.
6. Горелова Г.В. Определение оптимальных температурных режимов дистилляционной установки с помощью статистической оптимизации // Электромеханика. – 1966. – № 3.
7. Горелова Г.В., Свечарник Д.В., Здор В.В. Чувствительность технологических объектов к выбору оптимума номинала // Тр. П Международного симпозиума по теории чувствительности и адаптации, Югославия, 1968.
8. Горелова Г.В., Малышев Н.Г., Очерет В.П., Свечарник Д.В. Статистическая оптимизация некоторых металлургических процессов // Приборы и системы управления. – М., 1970. – № 3.
9. Горелова Г.В. Метод оптимума номинала в совершенствовании процесса принятия решений // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 1974. – № 3. – С. 14-17.
10. Горелова Г.В. Исследование чувствительности функции эффективности оптимума номинала к вариациям параметров технологического процесса // Методы построения алгоритмических моделей сложных систем: Межвуз.науч.-техн.сб. Вып. 1. – Таганрог: Изд-во ТРТИ, 1976. – С. 176-185.
11. Горелова Г.В. Обобщенная функция эффективности оптимума номинала // Оптимум номинала и задачи принятия решений: Межвуз. темат. науч. сб. Вып. 2. – Таганрог: Изд-во ТТИ, 1978. – С. 26-42.

12. Gorelova G.V. Using the step cut method // 14<sup>th</sup> Conf. on System modeling and optimization, Leiptig, 1990. – P. 89-94.
13. Gorelova G.V. Decision adapted system for information network control // G-11A-Symposium, Bochum,DDR, 1996. – P. 121-126.
14. Г.В. Горелова. Модели принятия решений при проектировании и управлении объектами в условиях вероятностной неопределенности / Известия ЮФУ. Технические науки. №1-2019. pp. 177-188
15. Свечарник Д.В. Задача об оптимуме номинала // Труды Института машиноведения. – М.: Изд-во АН СССР, 1957. – Вып. 10. – С. 78-94.
16. Свечарник Д.В., Гаспарян Ю.М., Налчаджан Т.А. Адаптированный поиск оптимума номинала // Известия АН АССР. Сер. технических наук. – 1970. – XXIII, № 4.

УДК 004.056.55

*Сергеев Александр Сергеевич,*  
кандидат технических наук

# **РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОМБИНИРОВАННЫХ БИОИНСПИРИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРИПТОАНАЛИЗА АСИММЕТРИЧНЫХ И БЛОЧНЫХ СИСТЕМ ШИФРОВАНИЯ**

Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет, sergeev00765@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача криптоанализа с использованием новой модели оптимизационных стратегий – комбинированных биоинспирированных алгоритмов, разработанных по методу гибридизации вложением. Исследуется возможность построения математических моделей и разработки численных методов криптоанализа на основе комбинированных биоинспирированных методов, а также их применение для криптоанализа асимметричных и блочных систем шифрования.

**Ключевые слова:** криптоанализ, биоинспирированный алгоритм, гибридизация вложением, математическое моделирование, асимметричные и блочные крипто-системы.

*Aleksandr S. Sergeev,*  
Candidate of Science in Engineering

# **DEVELOPMENT AND RESEARCH OF MATHEMATICAL MODELS OF COMBINED BIOINSPIRED ALGORITHMS AND THEIR APPLICATION FOR SOLVING PROBLEMS FOR CRYPTANALYSIS OF ASYMMETRIC AND BLOCK ENCRYPTION SYSTEMS**

Russia, Rostov-on-Don, Don State Technical University,  
sergeev00765@mail.ru

**Abstract.** The problem of cryptanalysis using a new model of optimization strategies – combined bioinspired algorithms developed by the method of hybridization by investment

- is considered. The possibility of creation of mathematical models and development of numerical methods of cryptanalysis on the basis of the combined bioinspired methods and also their application for cryptanalysis of asymmetric and block systems of enciphering is investigated.

**Keywords:** cryptanalysis, bioinspired algorithm, hybridization of the investment, mathematical modeling, block and asymmetrical cryptosystems.

Известно, что научное направление «природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложен принцип природных механизмов принятия решений, в последние годы получает все более широкое распространение для решения различного круга задач оптимизации, в том числе задач криптоанализа. В [1] авторами рассматривалось решение задач криптоанализа, относящихся к переборным задачам с экспоненциальной временной сложностью: традиционных симметричных криптосистем, использующих шифры перестановки и замены, в [2,4] – симметричных и ассиметричных криптосистем с использованием алгоритмов муравьиных и пчелиных колоний. Исследованию возможности применения методов генетического поиска для реализации криптоанализа блочных криптосистем посвящена работа [3]. Поскольку данные задачи криптоанализа в большинстве случаев являются NP-полными и имеют комбинаторную сложность, то, как отмечено в [1], основным мотивом для разработок новых алгоритмов решения комбинаторных задач являются возникшие потребности в решении задач большой и очень большой размерности.

Тем не менее, как отмечено в ряде работ (например, в [2]), существующие структуры алгоритмов генетического поиска фактически являются “слепыми” поисковыми структурами с присущими им недостатками. Поэтому можно утверждать, что актуальной является задача исследования и разработки эвристических методов, являющихся аналогами природных систем, в которых осуществляется поэтапное построение решения задачи.

В настоящее время возникает вопрос о возможности применения комбинированных биоинспирированных алгоритмов для реализации криптоанализа, в частности, о возможности разработки методов, сочетающих основные черты генетических и муравьиных алгоритмов. В этом плане можно отметить работу [5], посвященную разработке популяционных алгоритмов оптимизации (в том числе гибридизации популяционных алгоритмов), в которой отмечаются три категории гибридных алгоритмов: вложенные алгоритмы, алгоритмы типа препроцессор/постпроцессор, коалгоритмы.

В категории методов *гибридизации вложением* выделяют высокоуровневую и низкоуровневую гибридизации.

*Высокоуровневая гибридизация* вложением предполагает слабую

связь объединяемых алгоритмов, обычно при этом данные алгоритмы сохраняют значительную независимость.

При *низкоуровневой гибридизации* комбинируемые алгоритмы объединены достаточно сильно, так что при низкоуровневой гибридизации алгоритмов, по сути, имеет место формирование нового алгоритма. Общая схема последовательной высокоуровневой гибридизации вложением представлена в [5], примеры высокоуровневой гибридизации – комбинированные алгоритмы криптоанализа шифров перестановок (комбинирование генетического алгоритма, а также алгоритмов муравьиных и пчелиных колоний) приведены в [6,7]. Отметим также, что в [6,7] приводится соотношение, показывающее, что при использовании комбинированных биоинспирированных алгоритмов вероятность улучшения частичного решения на каждой итерации не может быть меньше вероятности улучшения частичного решения при использовании каждого классического биоинспирированного алгоритма. Этот вывод подтверждает целесообразность разработки и использования комбинированных биоинспирированных методов и алгоритмов для решения оптимизационных одно- и многоэкстремальных задач.

В данной работе рассматриваются возможности построения математических моделей на основе комбинированных биоинспирированных методов и их применение для криптоанализа асимметричных и блочных систем шифрования.

**Математическое моделирование как инструмент криптоанализа.** Криптоанализ тесно связан с математическим моделированием. Под *математической моделью* применительно к криптоанализу понимается представление о скрытой реальности<sup>1</sup> (процессов шифрования и дешифрования сообщений) в математическом описании некоторой системы, исследование которой предоставляет информацию о данной реальности. *Математическое моделирование* в задачах криптоанализа представляет собой процессы обоснования, формирования и исследования математических моделей для решения задач криптоанализа. В задачах криптоанализа объектом исследования являются закрытые и соответствующие им открытые сообщения, а предметом исследования – методы и алгоритмы шифрования и дешифрования. Объект исследования заменяется математической моделью, которая подвергается изучению.

Среди основных *требований к моделям системы криптоанализа* можно отметить следующие основные: *адекватность* (модель должна достаточно точно отображать свойства объекта – системы криптоанализа); *полнота* (модель должна обеспечить пользователя всей необходимой информацией о системе криптоанализа); *гибкость* (то есть возможность воспроизводить различные ситуации криптоанализа во всем диа-

пазоне изменения условий шифрования/дешифрования и различных параметров открытых и закрытых сообщений); *приемлемая трудоёмкость* (трудоёмкость и временная сложность разработки модели криптоанализа должна быть в рамках предоставляемых разработчику модели временных и программных ресурсов).

Таким образом, в результате моделирования реализуется процесс построения модели объекта–системы криптоанализа и производится исследование свойств моделируемой системы для решения различных задач с использованием разнообразных методов и средств. Математические методы криптоанализа описывают объекты или процессы в их идеальном состоянии, которые построены на этапе *содержательного моделирования*.

*Модели криптоанализа* можно классифицировать по способу представления объекта исследования (на закрытые и соответствующие им открытые сообщения) – на структурные и функциональные модели криптоанализа.

*Структурные модели* описывают объект исследования в виде детализированной системы шифрования и дешифрования или криптоанализа.

*Функциональные модели* отражают только входные и выходные информационные потоки, проходящие через «чёрный ящик»-систему криптоанализа. На практике возможна *комбинация* структурных и функциональных моделей шифрования или криптоанализа.

Для *упрощения модели криптоанализа* её, по возможности, сводят к *линейной, детерминистской, динамической, сосредоточенной и непрерывной*. При её построении проводится много допущений, которые на практике не всегда выполняются.

В некотором приближении подобные упрощённые модели криптоанализа могут в достаточной степени описывать реальную систему шифрования и дешифрования. При уточнении отдельных параметров, касающихся исходных данных, алгоритмов шифрования можно расширить область применения исследуемой модели криптоанализа.

Математические модели криптоанализа могут обладать важным свойством *универсальности*, благодаря которому принципиально разные реальные процессы шифрования/дешифрования могут описываться идентичной математической моделью (изоморфизм законов). Таким образом, важно систематизировать процессы, чтобы минимизировать количество моделей криптоанализа, покрывающих множество исходных данных и алгоритмов.

Представляется весьма важным *этап оценки эффективности алгоритмов и методов криптоанализа*, интегрированных в математиче-

скую модель. Показателем эффективности криптоанализа может быть отношение величины объёма расшифрованных сообщений к общему объёму закрытых сообщений по определённому алгоритму за некоторое время, что может быть также выражено в виде стоимости операций криптоанализа (стоимости разработки математического и программного обеспечения плюс стоимость машинного времени).

**Численные методы криптоанализа и их программные реализации.** Под *численными методами* понимаются методы приближённого решения математических задач, которые сводятся к выполнению определённого количества элементарных операций над числами. Благодаря численным методам, математические задачи сводятся к вычислениям, производимыми вручную или с помощью компьютеров. Численные методы составляют отдельную область математики и используются в различных прикладных направлениях. Современные проблемы криптоанализа невозможно решить без привлечения мощной вычислительной техники, которая функционирует по алгоритмам, базирующимся на численных методах.

К вычислительным (численным) методам относятся методы решения математических задач в численном виде.

Основными для вычислительных методов являются:

- методы решения систем линейных уравнений;
- методы интерполирования и приближённого вычисления функций;
- методы численного интегрирования;
- методы численного решения системы нелинейных уравнений;
- методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- методы численного решения уравнений в частных производных (уравнений математической физики);
- методы решения задач оптимизации.

Каждый из численных методов имеет некоторый набор характеристик, важнейшей из которых является *точность*. Для задач криптоанализа важно получить результат расшифровки сообщения, наиболее соответствующий исходному открытому сообщению. При этом при решении задач криптоанализа возникают *погрешности*, которые влияют на точность конечного результата расшифровки.

Переходы от непрерывных к дискретным моделям формируют *погрешности* в аппроксимации, к которым добавляются погрешности округления вычислений, которые могут затруднить конечную идентификацию открытых сообщений.



На точность криптоанализа влияет *сходимость* используемых для подобной задачи численных методов. Например, применительно к дискретным методам (при замене непрерывных функций на множество пар значений абсцисс и ординат) сходимость выражается в стремлении значений решения метода к определённым значениям решения исходной задачи при минимизации параметра дискретизации значений абсциссы.

Задача криптоанализа считается *корректно поставленной*, если при любых значениях закрытых сообщений существует единственное и устойчивое решение в виде открытого сообщения. *Некорректно сформулированные задачи* не могут иметь однозначных решений с помощью численных методов, ввиду возникающих погрешностей в вычислениях, которые приведут к значительным искажениям результатов.

*Устойчивость* численного метода криптоанализа – это чувствительность метода к отклонениям в исходных данных по алгоритмам шифрования, ключам и закрытым сообщениям. Задача криптоанализа будет устойчивой, если небольшие *погрешности* в исходных параметрах ведут к незначительным и устранимым погрешностям в решении.

Задача криптоанализа *не устойчива*, если незначительные погрешности в исходных параметрах вызывают значительные отклонения в решении или к неверным результатам. *Неустойчивые задачи* криптоанализа, обычно, чувствительны к незначительным отклонениям в исходной информации, что характерно для современных алгоритмов шифрования. Подобные классы задач нуждаются в гарантированных оценках точности вычислений открытых сообщений, что привело к появлению *интервального анализа*.

Таким образом, *оптимальным алгоритмом* будет являться алгоритм, у которого погрешность вычислений минимальна, либо минимально количество операций при заданной погрешности. Следовательно, для достижения необходимой точности задачи криптоанализа необходима её корректная постановка, а используемый численный метод должен быть устойчивым, корректным и иметь сходимость.

Для задач криптоанализа, вместе с показателями точности, сходимости, устойчивости и корректности, имеет большое значение *минимизация трудоёмкости* вычислительного процесса, поскольку методы шифрования противоположной стороны направлены именно на повышение вычислительной сложности криптоанализа. Собственно, сами вычислительные задачи определяются *объёмом памяти*, необходимым для поиска решения, а также *временем*, которое требуется при выполнении вычислений, измеряемое количеством элементарных операций (сложения, умножения, и т.д.), необходимых для решения задачи.

Таким образом, *процесс решения* задачи криптоанализа с модели-

рованием процесса расшифровки закрытого сообщения представляется в виде последовательности следующих этапов.

1. Постановка задачи криптоанализа с учётом физики процесса.
2. Математическая постановка задачи криптоанализа.
3. Алгоритмизация.
4. Программирование.
5. Отладка программы.
6. Проведение вычислительных расчетов.
7. Анализ полученных результатов

**Применение математических моделей криптоанализа (комбинированных биоинспирированных алгоритмов) для криптоанализа асимметричных криптосистем.** Основные понятия асимметричных криптосистем, а также их первый представитель – алгоритм *RSA* – описаны в [2]. Следует заметить, что действующие ассиметричные алгоритмы шифрования, в основном, основаны на задачах факторизации (например, алгоритм *RSA*) и дискретного логарифмирования в различных алгебраических структурах. Для криптоанализа асимметричных шифров применяется универсальный метод, например, так называемый метод «встречи посередине».

Также возможный подход для криптоанализа асимметричных криптосистем связан с проблемой факторизации целых чисел и дискретного логарифмирования, на которой основывается асимметричный шифр *RSA*.

Отметим, что в [2] описано применение алгоритма генетического поиска для решения задачи определения вариантов разложения заданного числа  $N$  на множители (то есть нахождения делителей большого целого числа  $N$ ). При этом при криптоанализе асимметричных криптосистем (с помощью алгоритма *RSA*) актуальной является задача: если число  $N$  известно получателю в качестве модуля, то можно ли представить число  $N$  в виде произведения двух простых чисел  $P$  и  $Q$ , то есть  $N=P \cdot Q$ , где  $P$  и  $Q$  – простые числа. Как отмечено в [2], задача разложения чисел на простые множители, как и задача проверки простоты числа является одной из основных теоретико-числовых задач, используемых в криптографии.

Рассмотрим возможность применения комбинированного метода, представляющего собой комбинирование генетического и муравьиного алгоритмов нахождения делителей числа, разработанных в [2, 4], для поиска на числовом отрезке  $[0, N]$  точки  $D$ , удовлетворяющей условию

$$OD=n_1 \cdot P, DN=n_2 \cdot P, n_1 \cdot P + n_2 \cdot P = P \cdot Q,$$

где  $O$  – начало отрезка,  $N$  – конец отрезка,  $n_1, n_2$  – целые числа,  $P, Q$  –

простые числа (то есть для поиска точки  $D$ , являющейся делителем числа  $N$ ).

1. Представить пространство отрезка  $[0, N]$  в виде вершин графа, где вершины соответствуют популяции чисел, принадлежащих данному отрезку. Определить оценки:  $L^*$  – длины оптимального маршрута,  $F^*$  – точности решения, задать номер итерации  $t=1$ .

2. Случайным равновероятным образом формируются  $M$  маршрутов муравьев, включающих заданное число вершин  $m$ , для каждого маршрута  $i$  определить значение целевой функции  $L_i$  как  $L_i = \sum_{i=1}^m F(x_i)$ ,

где  $F(x_i)$  – вес вершины графа  $x_i$ , определяемый как

$F(x_i) = \left( \frac{N}{x_i} \right) - \left[ \frac{N}{x_i} \right]$ , то есть равен дробной части частного, полученного

от деления числа  $N$  на число  $x_i$ . Подсчитать значение целевой функции для каждой вершины  $D$  маршрута как  $\frac{N-D}{D} = n$  – целое,  $D(n+1) = N$ .

3. Проведение операции кроссинговера полученных маршрутов-индивидуумов путем представления множества чисел, соответствующих вершинам, в двоичной форме и проведения кроссинговера над полученными двоичными хромосомами.

4. Проведение операции мутации индивидуумов популяции на основе заданной нормы мутации, получение заданного количества мутированных потомков путем обмена значений генов в произвольно выбранных позициях. Подсчет целевых функций  $L_i$  вновь полученных маршрутов-индивидуумов.

5. Провести отбор маршрутов-индивидуумов для формирования нового поколения и сокращения популяции в соответствии с заданным критерием отбора.

6. На ребрах  $ij$  каждого маршрута  $r$  отложить количество феромона, определяемое как  $\Delta\tau_{ij}^r = \frac{W}{L_r(t)}$  ( $W$  – параметр порядка длины оптимального маршрута, определяющий уменьшение  $\Delta\tau_{ij}^r$  с увеличением целевой функции (длины маршрута  $L_r(t)$ )).

7. Для каждого ребра  $ij$  определить результирующую концентрацию феромона как  $\tau_{ij} = \sum_{n=1}^p \Delta\tau_{ij}^n$ , где  $p$  – количество маршрутов, которым принадлежит данное ребро.

8. Для каждого ребра провести испарение феромона в соответствии с формулой  $\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho) \cdot \tau_{ij}(t)$ , где  $\rho$  – коэффициент ис-

парения.

9. Если получен маршрут  $T_r(\tau)$  длиной  $L_r(\tau)$ , которая предпочтительнее  $L^*$ , и маршрут содержит вершину  $x_i$ , для которой  $([F(x)]i) < F^*$ , то обновить  $L^*$  и  $F$ .

10. Сформировать  $d \cdot M$  новых маршрутов муравьев ( $d < 1$ ), для которых определяются критерии  $L_{M+1}, \dots, L_{M+d}$ . Если оптимальное значение критерия не изменяется в течение достаточно большого количества циклов, то поиск завершается с найденным значением кратчайшей длины маршрута  $L^*$  и вершины  $x_i$ , для которой  $([F(x)]i)$  минимально, в противном случае провести селекцию индивидуумов, определить  $t = t + 1$  и произвести возврат к шагу 3 алгоритма.

Отметим, что, как и в [6], в данном алгоритме операторы 2-5, 10 соответствуют операторам генетического алгоритма обеспечивая формирование пространства решений и глобальный поиск, операторы 6-9 соответствуют операторам муравьиного алгоритма и обеспечивают локальный поиск в пространстве решений.

Отметим, что для повышения эффективности гибридного алгоритма возможно (аналогично [6]) использование весового коэффициента  $R$ , который может быть использован для уменьшения (или увеличения) веса вершин, наиболее близкого к оптимальному (или далекого от оптимального). Также для формирования маршрутов может быть использовано определение вероятности перехода  $P_{ij}$  между вершинами  $x_i$  и  $x_j$ , которая аналогично [2,4] может быть определена как

$$P_{ij}(t) = \frac{1}{\frac{F_j}{\sum_{l \in J} F_l}},$$

где  $F_j$  – вес вершины  $j$ ,  $J$  – множество всех вершин пространства поиска. Очевидно, применение данного соотношения при формировании маршрутов приведет к тому, что вершины с наименьшим весом (то есть являющиеся делителями числа  $N$  с наибольшей точностью) будут принадлежать максимальному количеству маршрутов с наибольшей вероятностью.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий возможность факторизации составного числа [2]. Пусть  $N=40217$ , вычислительная система содержит 128 параллельно работающих процессоров, и в интервале  $[0,314]$  при формировании маршрута 1 ему принадлежит вершина, соответствующая числу  $D_{11}=305=(100110001)_2$ , при формировании маршрута 2 ему принадлежит вершина, соответствующая числу  $D_{12}=187=(010111011)_2$ , при формировании маршрута 3 ему принадлежит вершина, соответствующая числу  $D_{13}=214=(011010110)_2$ . В этом случае при проведении однокроссингового кроссинговера между маршрутами 2 и 3 и двоичных хромосом, соот-

ветствующих числам  $D_{12}$  и  $D_{13}$  при выборе точки скрещивания после 3 позиции получим потомков  $D_1' = (010010110)_2 = 150$ ,  $D_2' = (011111011) = 251$ .

Определяя целевую функцию для данных вершин-потомков в соответствии с п. 2 алгоритма, получим:  $\frac{N - D_1'}{D_1'} = 267,1$ ;  $D_1' \cdot 268 = 40200$ ;  $\frac{N - D_2'}{D_2'} = 159,2$ ;  $D_2' \cdot 160 = 40160$ . В данном случае оптимум не достигнут.

Пусть далее проводится кроссинговер между маршрутом 1 и маршрутом, содержащим потомок 1. В этом случае при скрещивании двоичных хромосом, соответствующих числам  $D_{11}$  и  $D_1'$  и выборе точки скрещивания после 4 позиции получим потомков  $D_1'' = (010010001)_2 = 145$ ,  $D_2'' = (100110110)_2 = 310$ . Для данных хромосом оптимум целевой функции также не достигается:  $\frac{N - D_1''}{D_1''} = 276,3$ ;  $D_1'' \cdot 277 = 40165$ ;  $\frac{N - D_2''}{D_2''} = 128,7$ ;  $D_2'' \cdot 129 = 39990$ .

Пусть после проведения кроссинговера в потомке  $D_1''$  проведена мутация путем замены генов в 5 и 8 позициях, тогда будет иметь вид  $D_1''' = (010000011)_2 = 131$ . Данная хромосома приводит к достижению оптимума, так как  $\frac{N - D_1'''}{D_1'''} = 306$ ;  $D_1''' \cdot 307 = 40217$ .

Проводя в потомке 2 мутацию путем замены генов в 7 и 9 позициях, получим потомок  $D_2''' = (100110011)_2 = 307$ . Данная хромосома приводит к достижению оптимума, так как  $\frac{N - D_2'''}{D_2'''} = 130$ ;  $D_2''' \cdot 131 = 40217$ .

Таким образом, проводя реализацию комбинированного алгоритма в интервале  $[0, 314]$  можно определить вершины графа, соответствующие числам  $D_1 = 131$  и  $D_2 = 307$ , являющиеся делителями числа  $N = 40217$ . Поскольку других вершин графа, определяющих оптимум целевой функции, не определено, число  $N$  не имеет других делителей, и числа  $D_1$  и  $D_2$  являются простыми. Как отмечено в [2], если при бесконечном увеличении числа интервалов поиска точка  $D$  не определяется, число  $N$  с большой долей вероятности является простым.

**Применение математических моделей криптоанализа (комбинированных биоинспирированных алгоритмов) для криптоанализа блочных криптосистем.** Отметим, что применение биоинспирированных методов для криптоанализа блочных криптосистем (генетических алгоритмов, алгоритмов муравьиных и пчелиных колоний) рассмотрено в [3]. Как отмечено в [3], отличительной особенностью применения биоинспирированных методов криптоанализа является возможность использования самого алгоритма шифрования (или расшифрования) в качестве целевой функции для оценки пригодности ключа, определенного с помощью генетических операций. Поэтому можно утверждать, что при

использовании биоинспирированных методов процесс определения секретного ключа зависит не столько от сложности шифрующих преобразований, сколько от самого биоинспирированного метода, который должен обеспечивать достаточное разнообразие генерации ключей. Данный момент является определяющим также при использовании комбинированных методов определения ключей, реализация которых может осуществляться аналогично методам, описанным в [3].

Следует также заметить, что задача определения секретного ключа является в общем случае задачей нахождения экстремума немонотонной функции, значение которой в каждой точке не дает информации о приближении к оптимуму. В этом плане изучение эффективности применения биоинспирированных методов направленно-случайного поиска и их комбинированных вариантов (с использованием гибридизации «вложением») является одной из актуальных на сегодняшний день задач.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе была отмечена актуальность исследования возможности применения методов направленно-случайного поиска (биоинспирированных методов) для решения задачи криптоанализа, рассмотрены возможности построения математических моделей криптоанализа на основе комбинированных биоинспирированных методов, разработан «гибридный» биоинспирированный алгоритм для задачи факторизации составных чисел.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00375)*

#### **Список литературы**

1. Криптографические методы и генетические алгоритмы решения задач криптоанализа: монография / Ю.О. Чернышев, А.С. Сергеев, Е.О. Дубров, А.В. Крупенин, О.П. Третьяков. Краснодар: ФВАС, 2013, 138 с.
2. Биоинспирированные алгоритмы решения задач криптоанализа классических и асимметричных криптосистем: монография / Ю.О. Чернышев, А.С. Сергеев, Е.О. Дубров, А.В. Крупенин, С.А. Капустин, А.Н. Рязанов. Краснодар: КВВУ, 2015. 132 с.
3. Применение биоинспирированных методов оптимизации для реализации криптоанализа блочных методов шифрования: монография / Чернышев Ю.О., Сергеев А.С., Дубров Е.О., Рязанов А.Н. Ростов-на-Дону: изд-во ДГТУ, 2016. 177 с.
4. Сергеев А.С., Третьяков О.П., Васильев А.Е., Чернышев Ю.О. Биоинспирированные методы криптоанализа асимметричных алгоритмов шифрования на основе факторизации составных чисел // Вестник ДГТУ, том 11, № 9(60), 2011, с. 1544-1554.
5. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2017. 446 с.
6. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С. Применение комбинированного биоинспирированного алгоритма (генетический алгоритм и алгоритм муравьиных колоний) для реализации криптоанализа шифров перестановок // Известия СПбГЭТУ "ЛЭТИ". – 2017. - № 9. - с. 33-44.

7. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С. Применение комбинированных биоинспирированных стратегий (генетический алгоритм и алгоритм пчелиных колоний) для реализации криптоанализа классических шифров перестановок // Инженерный вестник Дона, 2017, № 4, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4518](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4518).

УДК 303.7032.4

*Тренина Екатерина Викторовна,*  
аспирант

## **ОЦЕНКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ И КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

г. Санкт-Петербург, Россия,  
Санкт-Петербургский горный университет,  
E-mail: [troninaev@mail.bk](mailto:troninaev@mail.bk)

**Аннотация.** В статье для обоснования функционально однородных групп сравнения применяется метод многомерной иерархической классификации, который позволяет анализировать большие по объему наборы данных. Рассматриваются теоретические аспекты методов сравнения сложных систем на основе математического аппарата методов сравнения по совокупности качественных и количественных показателей. Также используются подходы на основе математических моделей нормирования минимизируемых и максимизируемых показателей.

**Ключевые слова:** анализ, прогноз, оценка, мера, кластерный анализ.

*Catherine V. Tronina,*  
graduate student

## **EVALUATION OF COMPLEX SYSTEMS BASED ON THE RESEARCH OF THEIR QUANTITATIVE AND QUALITATIVE INDICATORS**

Russia, Saint Petersburg, Saint Petersburg Mining University  
E-mail: [troninaev@mail.bk](mailto:troninaev@mail.bk)

**Abstract** The article uses a multidimensional hierarchical classification method to justify functionally homogeneous comparison groups, which allows analyzing large data sets. The theoretical aspects of the comparison methods of complex systems are considered on the basis of the mathematical apparatus of the comparison methods on the basis of a set of qualitative and quantitative indicators. Approaches based on mathematical models of valuation of minimized and maximized indicators are also used.

**Keywords:** analysis, forecast, evaluation, measure, cluster analysis.

Сегодня существует определенная совокупность методов для сравнения альтернативных образцов сложных систем или проектов и оценки

уровня качества. Тем не менее встречаются затруднения в их применении, которые вынуждают продумывать другие подходы, которые смогли бы учитывать своеобразность задачи сравнения, которая заключается в следующем:

- обосновании функционально однородных групп сравнения сложных технических систем и альтернативных образцов,
- в сравнении аналогов образцов техники.

В ходе сравнения и выбора альтернативы зачастую необходимо решить вопрос предпочтительности того или иного варианта по нескольким показателям.

Одним из достаточно простых методов, дающих понятные и легко интерпретируемые результаты является кластерный анализ. Он позволяет анализировать большие по объему наборы данных.

В целом, под кластерным анализом (кластеризацией) понимается задача разбиения всей совокупности рассматриваемых объектов на отдельные группы (классы) со сходными характеристиками и определение взаимных отношений между ними.

Алгоритмы кластерного анализа делятся на два основных типа: иерархические и неиерархические. Основное их отличие в том, что алгоритмы первого типа кроме разбиения объектов на группы (кластеры) показывают и их взаимное расположение (иерархию). Методы второго типа ограничивается описанием того, к каким классам относятся анализируемые объекты.

Для сравнения предлагается использовать метод многомерной иерархической классификации, являющейся одним из подходов кластерного анализа, который дает возможность:

- обозначить наиболее важные характеристики;
- на их основе разложить исходный набор образцов на группы;
- прийти выбору одного или нескольких предпочтительных вариантов.

Задача разбиения элементов множества на отдельные группы объектов называется кластеризацией. Полученные группы называют кластерами. Внутри каждого кластера должны находиться наиболее схожие объекты, и элементы разных кластеров должны быть отличны друг от друга.

Кластеризация отличается от классификации тем, что количество групп (кластеров) не задано и будет определено посредством работы алгоритма.

Применение кластерного анализа разбивается на нижеперечисленные этапы:

1. Выбор объектов.



2.Определение параметров, оценивающих объект. При необходимости – нормализация значений переменных.

3.Расчет меры сходства объектов.

4.Применение методов кластерного анализа.

5.Выведение результата кластеризации.

Сначала необходимо определить вектор характеристик для каждого объекта. После этого проводится нормализация характеристик для того, чтобы они имели одинаковый вклад при вычислении расстояния.

Алгоритм решения предполагает следующие этапы:

1. Представление исходной матрицы «объект-свойство» в виде нормированной матрицы  $\|z_{ij}\|$ . Для этого по формуле (1) вычисляется математическое ожидание каждой из характеристик объекта, а также по формуле (2) величина среднего квадратического отклонения:

$$\tilde{m}_{xj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (1)$$

$$\tilde{G}_{xj} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \tilde{m}_{xj})^2} \quad (2)$$

Каждый элемент матрицы  $\|z_{ij}\|$  определяется исходя из выражения:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \tilde{m}_{xj}}{\tilde{G}_{xj}} \quad (3)$$

2. Расчет весовых коэффициентов (потенциалов) характеристик объектов. Данное действие выполняется в предположении того, что в качестве меры близости предлагается использовать «взвешенное» Евклидово расстояние. Потенциалы характеристик предлагается определять, используя выражение (4):

$$\omega_j = \frac{\tilde{G}_{xj}}{\sum_{j=1}^m \tilde{G}_{xj}} \quad (4)$$

Здесь же необходимо проверить выполнимость условия (5):

$$\sum_{j=1}^m \omega_j = 1 \quad (5)$$

3. Расчет «взвешенного» Евклидова расстояния по формуле (6):

$$d_{ik}^2 = \sum_{j=1}^m (x_i^{(j)} - x_k^{(j)})^2 \cdot \omega_j, \quad (6)$$

где  $d_{ik}$  – расстояние (суммарное) между объектами  $i$  и  $k$ ;

$x_i^{(j)}$  –  $j$ -я характеристика  $i$ -го объекта;

$x_k^{(j)}$  –  $j$ -я характеристика  $k$ -го объекта.

4. Пошаговое выделение кластеров (классов).

На каждой итерации определяется  $D_{min}$ , которое равно какому-то из  $d_{pq}$ . Затем выполняется объединение классов  $p$  и  $q$  в один (новый) кластер, которому присваивается имя  $s$ . Для этого используются следующие зависимости (7) и (8):

$$d_{rs}^2 = d_p d_{ps}^2 + d_q d_{qs}^2, \quad (7)$$

$$d_p = \frac{m_p}{m_p + m_q}, d_q = \frac{m_q}{m_p + m_q}, \quad (8)$$

где  $d_p, d_q$  – средневзвешенные меры близости;

$m_p$  – количество элементов в кластере  $p$ ;

$m_q$  – количество элементов в кластере  $q$ .

5. Графическое представление результатов многомерного сравнения вариантов целесообразно выполнять в виде графа иерархии (дендрограммы). Дендрограмма строится следующим образом: на основе матрицы сходств выделяются два наиболее близких объекта, т.е. имеющие максимальный коэффициент сходства. Они объединяются в один класс. Затем в матрице заново пересчитываются сходства между всеми оставшимися объектами и этим, новым, классом. Опять выделяют два объекта и объединяют их, и так до тех пор, пока все они не будут объединены в один класс.

Результатом решения является кортеж предпочтений в порядке убывания приоритета (взвешенной меры близости к эталону) для всех возможных вариантов оборудования.

Таким образом, использование предлагаемого математического аппарата кластерного анализа к сравнению систем (объектов, проектов) и выбору оптимального для конкретных условий обстановки позволяет лицу, принимающему решение, быть более объективным в оценке и выборе при решении прикладных исследовательских задач.

Традиционно в процессе принятия и обоснования оптимальных решений выделяется три этапа: постановка задачи, построение множеств

ва альтернатив и сравнение, выбор лучшей из них.

С целью сравнения сложных технических систем применяется математический аппарат методов сравнения по совокупности качественных и количественных показателей. Данные методы включают как правило следующие основные этапы: определение номенклатуры единичных показателей; нормировка единичных показателей; определение значимости каждого единичного показателя; расчет коэффициентов близости сравниваемых вариантов к эталону.

Так в методах сравнения систем на основе количественных показателей используют подходы на основе математических моделей нормирования минимизируемых и максимизируемых показателей качества.

Алгоритм применения метода сравнения на основе количественных показателей включает следующие основные этапы:

1. Определение перечня сравниваемых вариантов.
2. Определение номенклатуры единичных показателей.
3. Нормировка единичных показателей.
4. Определение значимости каждого единичного показателя.
5. Расчет коэффициентов близости сравниваемых вариантов к эталону с помощью выражения (9):

$$\rho_j = \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \tilde{q}_{ij})^2 \right]^{1/2}, \quad (9)$$

где  $\alpha_i$  – вес показателя, определяемый экспертами.

На основе рассчитанных значений коэффициентов близости формируется кортеж предпочтения рассматриваемых вариантов.

С целью нормирования показателей качества сложных технических систем используются различные методы (подходы), представляющие собой совокупность математических моделей нормирования минимизируемых и максимизируемых показателей качества.

Многообразие методов нормирования показателей качества обуславливает практический интерес в проведении их анализа с целью оценки адекватности и выявления достоинств и недостатков.

Для удобства восприятия и проведения анализа, существующие методы представим в таблице 1.

В результате проведенных вычислений получен итоговый кортеж предпочтения сравниваемых образцов.

Сегодня существует определенная совокупность методов для сравнения альтернативных образцов сложных систем или проектов и оценки уровня качества. Тем не менее, встречаются затруднения в их применении, которые вынуждают продумывать другие подходы, которые смогли бы учитывать своеобразность задачи сравнения.

Таблица 1

**Методы нормировки показателей**

| Метод | Математическая модель       |                                                    |
|-------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| I     | максимизируемого показателя | $\tilde{x} = x / \max x$                           |
|       | минимизируемого показателя  | $\tilde{x} = \min x / x$                           |
| II    | максимизируемого показателя | $\tilde{x} = 1 - (\max x - x) / (\max x - \min x)$ |
|       | минимизируемого показателя  | $\tilde{x} = 1 - (x - \min x) / (\max x - \min x)$ |
| III   | максимизируемого показателя | $\tilde{x} = x / \max x$                           |
|       | минимизируемого показателя  | $\tilde{x} = 1 - x / \max x$                       |
| IV    | максимизируемого показателя | $\tilde{x} = (x - \min x) / (\max x - \min x)$     |
|       | минимизируемого показателя  | $\tilde{x} = 1 - (x - \min x) / (\max x - \min x)$ |

**Список литературы**

1. Колесниченко С.В. Математические методы исследования экономических и социальных систем/ С.В. Колесниченко, О.В. Афанасьева// СПб.: Издательство «ЮПИ», 2017. – 121 с.
2. Колесниченко, С.В. Обоснование подходов по оценке качества сложных технических систем на различных стадиях разработки / С.В. Колесниченко // Труды Международной научной конференции “Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании “. – Саратов: ООО «Издательство Научная книга”, 2002. – С. 369–373.
3. Колесниченко, С.В. Обоснование алгоритмов многомерного параметрического прогнозирования облика сложных технических систем на основе методов классификации / С.В. Колесниченко // Доклады АВН, выпуск № 9, 2003. – Саратов: СГТУ, 2003. – С. 64–69
4. Сафронов, В.В. Основы системного анализа: методы многовекторной оптимизации и многовекторного ранжирования: монография / В.В. Сафронов. – Саратов: Научная книга, 2009. – 329с.
5. Тренина Е.В. Методы оценки сопоставимости сложных технических систем и их характеристик/ Е.В. Тренина, С.В. Колесниченко // Сб. науч. тр. XX Междунар. науч.-практ. конф. «Системный анализ в проектировании и управлении», 29 июня-1 июля 2016. Ч.2.- СПб.: Изд-во СПбГУ им. Петра Великого, 2016. - С.379-384.

*Портнов Николай Михайлович,*  
аспирант,  
*Карпов Валерий Иванович,*  
д-р техн.наук, профессор

## **ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ МЕНЮ В СИСТЕМЕ ПЕРСОНИФИЦИРОВАННОГО ПИТАНИЯ**

Россия, Москва, Московский государственный университет технологий  
и управления имени К.Г. Разумовского, аспирант,  
detsoft@mail.ru, vikarp@mail.ru

**Аннотация.** В системе рационального управления персонализированным питанием центральной практической задачей является составление оптимального меню, обеспечивающего наилучшее значение многокритериального набора оценок: нутриентный состав, стоимость, качество белка. Для устойчивого (сходящегося) решения и достижения приемлемых характеристик результативности алгоритма применяются комбинированный способ оптимизации, включающий предварительное упорядочение вариантов и управляемый перебор. Оценка эффективности автомата оптимизации выполняется внешними экспертами. При регулярном использовании компьютерная система представляет собой модель для практического управления питанием.

**Ключевые слова:** персонализированное питание, оптимизация меню, управление питанием, практическая нутрициология.

*Nikolay M. Portnov,*  
Graduate,  
*Valery I. Karpov,*  
Dr.Sci.Tech., professor

## **PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE MENU IN THE PERSONIFIED POWER SUPPLY SYSTEM**

Russia, Moscow, Moscow State University of Technologies and Management  
of K. G. Razumovsky,  
detsoft@mail.ru, vikarp@mail.ru

**Abstract.** Central practical task of personalized nutrition system is to draw up an optimal feeding menu that provides the best value of a multi-criteria set of estimates: nutrient composition, cost, protein quality, etc. For a stable (convergent) solution and to achieve acceptable performance characteristics of the algorithm, a combined optimization method including pre-ordering options and controlled search will be used. Evaluation of the efficiency of the optimization algorithm is performed by external experts. With regular use, the computer system is a model for practical power management.

**Keywords:** personalized nutrition, menu optimization, feeding system management, practical nutritiology.

Управление питанием индивида или целого коллектива, несмотря на кажущуюся простоту, относится к сложным системам междисциплинарного характера, где используются знания медицинской диетологии, технологий кулинарных и пищевых производств, органической химии, психологии и других наук [1, 2, 3, 8].

В комплексе задач, решаемых в системе рационального управления питанием, ключевым звеном является разработка меню, соответствующего задаче лечебной или поддержания функциональных способностей организма, обеспечивающего потребности в энергии, пищевых веществах, микронутриентах, а также реализующих индивидуальные особенности восприятия пищи. В персонифицированном питании [9] такой ключевой задачей является составление набора суточных меню на период (неделю), с использованием конкретных рецептов и выходов блюд, по заданному составу приемов пищи и разделов меню, общему весу пищи, так, чтобы результат был оптимален по многокритериальному набору показателей.

Численное представление параметров оценки питания и его компонент, являясь основой для практической реализации рационального подхода, обеспечивает объективное упорядочение вариантов, создает возможность исчисления меры близости оценок, в том числе основной оценки соответствия фактического показателя норме. В качестве основных измерителей при оценке качества питания, в смысле его полезности для организма, используют энергетическую ценность (калорийность) и содержание пищевых веществ основных (белки, жиры, углеводы) и минорных (витамины и микроэлементы). Множество таких показателей будем называть нутриентами. Для оценки предпочтений потребителя (например, вкусовых) и экспертных оценок используются балльные шкалы. Для других показателей используются обычные измерители, так как цена, вес, изначально имеющие числовую форму.

Значения нутриентного состава рецептов определяются по составу ингредиентов [16, 18]. Расчет нутриентного состава рецептуры ведется по формуле:

$$\{N_n\} = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{\text{Число ингредиентов}} \text{НП}_{100_{i,n}} \times \text{Вес}_i \right) \times (1 - \text{ППО}_n/100) \right\},$$

где:  $\{N_n\}$  – набор (множество, вектор) нутриентов, описывающих блюдо

$n$  – номер нутриента,

$i$  – номер ингредиента,

$НП100_{in}$  – содержание нутриента  $n$  в ингредиенте  $i$  (на 100 г),  
 $Вес_i$  – количество  $i$ -го ингредиента в граммах,  
 $ППО_n$  – процент потерь при технологической обработке по нутриенту  $n$ .

К критериям оптимизации меню относятся: соответствие нутриентного состава индивидуальному нормативу потребления, нормам по натуральным показателям, стоимости (экономической приемлемости), структура калорийности по приемам пищи, пищевые непереносимости, индивидуальные предпочтения, разнообразие, сочетаемость блюд.

Дополнительные оценки (индикаторы): сбалансированность белков/жиров/углеводов по весу и доле в калорийности; качество белка (аминокислотный скор [13] а также коэффициент утилитарности, коэффициент сбалансированности, индекс незаменимых аминокислот [3, 5, 6, 7, 4]); качество жирнокислотного состава (соотношение жирных кислот [17, 12]); достижение целевых назначений по минорным нутриентам [1]; вариативность значений по дням (допустимая неравномерность). В некоторых случаях отдельные индикаторы могут переходить в состав критериев оптимизации, например, для кетогенной диеты [14] требуется увеличенная доля жира и уменьшение доли углеводов.

Принятые аксиомы: пища, рацион – набор комплексов блюд (не набор продуктов; конкретность норм (указание средних целевых значений); определение параметров меню по набору дней (не за день или отдельный прием пищи); понятие «соответствует норме» (мера близости к нормативу, необязательное совпадение); ограничение модели питания только потреблением (без учета усваиваемости организмом, фактических свойств сырья и кулинарной обработки); игнорирование сочетанного влияния пищевых компонент; использование научно обоснованных оценок.

Для определения оптимального значения на множестве вариантов меню используется интегральная оценка (свертка), линейная функция с весовыми коэффициентами, отражающими значимость каждого отдельного компонента оценки:

$$\left( \sum_{i=1}^{\text{Число критериев}} (\text{БаллКритерия}_i \times \text{Значимость}_i) \right),$$

где:

БаллКпмикрия<sub>*i*</sub> – нормированное по общей шкале (0-10) значение оценки по  $i$ -му критерию

Значимость<sub>*i*</sub> – вес  $i$ -го критерия, определяющий его важность.

Применение упрощенной линейной целевой функции объясняется

недостаточным объемом научных знаний для построения более гибких моделей и является первичным приближением. Для обоснования весовых коэффициентов интегральной функции используется эвристический экспертный подход, более обоснованная оценка может быть получена методом анализа иерархий [15].

В связи с большим набором разнородных исходных требований к алгоритму оптимизации меню предъявляется требование устойчивости модели (сходимости алгоритма) для получения оптимального решения даже при возможной исходной формальной несовместности условий, когда найденное решение обеспечивает наибольшее приближение к заданному набору условий.

Для обеспечения устойчивости применяется комбинированный способ оптимизации. Предварительная оптимизация включает: кластеризацию исходного множества блюд для снижения размерности задачи; подбор блюд-кандидатов; упорядочение списков блюд в направлении локальной оптимизации по отдельным нутриентам, главным компонентам оптимизации. Окончательная оптимизация выполняется комбинаторным перебором по предварительно упорядоченным перечням блюд, в сочетании с локальной оптимизацией для максимального соответствия нормам (частное изменение норм закладки в допустимых пределах, выходов по кластеру допустимых значений). Данный способ, помимо устойчивости, также обеспечивает получение практических результатов при ограниченности времени. С увеличением времени перебора в общем случае обеспечивается улучшение значения интегральной функции оценки (практическая сходимость).

До оптимизации выполняется проверка на полноту исходных данных и совместность условий с возможностью переформулирования взаимоисключающих требований. Примером такой «оптимизации исходных данных» является отказ от использования натуральных норм, несовместных с нормами по нутриентам и перенос их из разряда критериев оптимизации в индикативные показатели. Причинами подобных несовместностей могут быть несогласованность в официальных нормативах, ошибки в определении индивидуальных нормативов потребления.

Для практической реализации в виде компьютерной программы используется средство быстрой разработки «Платформа 1С:Предприятие» (версии 8.3). Для редактирования рецептов используется модуль «Технологическая карта», для редактирования меню и связанных с ним расчетов – модуль «Разработка рациона» из состава программы «1С:Медицина. Диетическое питание» [10], в качестве поставщика исходных данных по блюдам – электронные сборники рецептов в формате «Рецептурник-3». Модуль «Разработка рациона» используется



также для описания исходных данных для последующей оптимизации: шаблона меню (приемы пищи и разделы), состав блюд-компонентов, распределение калорийности по приемам пищи. Нутриентные нормы потребления заполняются в справочнике «Категории питающихся», обоснование индивидуальных нормативов потребления выполняется в компьютерной системе «Мониторинг физического развития и нутритивного статуса» [11].

| Общие сведения    Шаблон меню    Меню    Итоги    Предупреждения    Ручные проверки    Данные расчетов |            |               |                                 |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|---------------------------------|-------|-------------------------|-------|------------------------------|-------|------------------------------|-------|-----------------------|-------|------------------------|-------|----------------------|-------|
| Н.                                                                                                     | Прием пищи | Раздел меню   | Понедельник                     |       | Вторник                 |       | Среда                        |       | Четверг                      |       | Пятница               |       | Суббота                |       | Воскресенье          |       |
|                                                                                                        |            |               | блюдо                           | выход | блюдо                   | выход | блюдо                        | выход | блюдо                        | выход | блюдо                 | выход | блюдо                  | выход | блюдо                | выход |
| 1                                                                                                      | Завтрак    | бутерброд     | Бутерброд с сыром               | 45    | Бутерброд с джемом...   | 55    | Бутерброд с колбасой вареной | 45    | Бутерброд с паштетом         | 55    | Бутерброд с сыром     | 45    | Бутерброд с джемом...  | 55    | Бутерброд с колбасой | 45    |
| 1                                                                                                      | Завтрак    | гор.блюдо     | Каша из тыквы                   | 250   | Каша вязкая молочная... | 250   | Каша вязкая на молоке (и...  | 250   | Каша жидкая на молоке ...    | 250   | Омлет натуральн... бк | 110   | Яичница глазунья с ... | 105   | Запека... из творога | 175   |
| 1                                                                                                      | Завтрак    | гор.напиток   | Кофе на молоке                  | 140   | Какао с молоком         | 200   | Чай с лимоном                | 200   | Чай с молоком                | 200   | Кофе на молоке        | 140   | Какао с молоком        | 200   | Чай с лимоном        | 200   |
| 1                                                                                                      | Обед       | закуска       | Салат "Летний"                  | 150   | Салат                   | 150   | Салат из ...                 | 150   | Салат                        | 150   | Икра                  | 120   | Винегрет               | 150   | Салат из ...         | 150   |
| 1                                                                                                      | Обед       | 1 блюдо       | Щи из свежей капусты с...       |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 250   |
| 1                                                                                                      | Обед       | 2 блюдо       | Котлеты натуральн... рубленые   |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 315   |
| 1                                                                                                      | Обед       | гарнир        | Картофель жареный               |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      |       |
| 1                                                                                                      | Обед       | сладкое       | Компот из смеси сухофрукт...    |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 200   |
| 1                                                                                                      | Обед       | хлеб          | Хлеб белый                      |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 40    |
| 1                                                                                                      | Обед       | хлеб          | Хлеб черный                     |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 60    |
| 1                                                                                                      | Полдник    | блюдо         | Баранина отварная овощами       |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 250   |
| 1                                                                                                      | Полдник    | напиток       | Кофе на молоке                  |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 140   |
| 1                                                                                                      | Полдник    | выпечка       | Картофель ватрушки фаршем       |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 200   |
| 1                                                                                                      | Полдник    | фрукты        | Яблоки печеные                  |       |                         |       |                              |       |                              |       |                       |       |                        |       |                      | 180   |
| 1                                                                                                      | Ужин       | горячее блюдо | Говядина тушеная с чернослив... | 325   | Пудинг из говядины      | 259   | Котлеты рубленые из ...      | 300   | Зразы из кур с омлетом и ... | 275   | Суфле из кур          | 265   | Эскалоп с помидо...    | 280   | Оладьи из печени     | 276   |

Рис. 1. Вид редактора меню в модуле «Разработка рациона»

Для решения задач оптимизации в типовую систему 1С (поставляемую с исходными кодами), внесены изменения:

- Особенности рациона для персонифицированного питания реализуются в виде справочников персональных предпочтений и непереносимостей.

- Для ведения наборов индивидуальных рецептов модифицирован справочник «Блюда».
- Для визуализации набора оценок отдельного варианта меню используется отчет «Оценка варианта меню», содержащий также средства расшифровки (экспликации) рассчитанных значений.
- Оптимизация меню выполняется подпрограммой («обработкой» в терминах платформы 1С) «Оптимизация меню», включающей этапы предварительной оптимизации (упорядочения исходных списков блюд), перебор вариантов меню, расчет частных оценок и значения интегральной функции (окончательную оптимизацию). Для контроля сходимости и возможности возобновления перебора используется свернутая идентификация вариантов и журнал регистрации оценок вариантов.
- Для визуализации хода оценки ряда вариантов разработан отчет «Отчет по вариантам меню».
- Для управления составом параметров оптимизации и составом индикаторов используется форма настройки параметров, в которой также вводятся весовые коэффициенты интегральной целевой функции оптимизации.

Оптимизация меню

Выполнить Журнал оценки вариантов Еще ▾

Ссылка на документ: Разработка рациона №5 30.08.18, Рацион2, Рацион2 (смесь) ▾

| V                                   | Показатель                        | Критерий                            | Вес | Параметр |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----|----------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | Норма по калорийности             | <input checked="" type="checkbox"/> | 4   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Нормы по белкам, жирам, углеводам | <input checked="" type="checkbox"/> | 2   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Натуральные нормы потребления     | <input type="checkbox"/>            |     |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Стоимость                         | <input checked="" type="checkbox"/> | 1   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Баланс БЖУ по весу                | <input checked="" type="checkbox"/> | 1   | 1:4:1    |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Баланс БЖУ по доле калорийности   | <input checked="" type="checkbox"/> | 1   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Пищевые непереносимости           | <input checked="" type="checkbox"/> | 3   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Предпочтения блюд                 | <input checked="" type="checkbox"/> | 1   |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Качество белка (АКС)              | <input type="checkbox"/>            |     |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Соотношение жирных кислот         | <input type="checkbox"/>            |     |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Обогащение витаминами             | <input type="checkbox"/>            |     |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Обогащение микроэлементами        | <input type="checkbox"/>            |     |          |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Вариативность по дням             | <input checked="" type="checkbox"/> | 1   | 8%       |

Начать с позиции: ▾

Рис. 2. Параметры модуля оптимизации

Для оценки эффективности автомата оптимизации используется

внешняя экспертная оценка качества комплексов блюд в одном приеме пищи, сочетаемости и разнообразия, соответствия фактических показателей меню и норм (меры близости). В качестве дополнительной информации (помимо состава комплексов блюд, т.е. собственно меню) эксперты также используют рассчитанные индикаторы, не участвующие в оптимизации, так как равномерность значений по дням, сбалансированность. Для удобного и информативного восприятия такой информации дополнительно к числовым массивам используются средства инфографики и расшифровки итоговых значения. Накопленные экспертные оценки используются для обучения средств оптимизации (применяются на этапе предварительной оптимизации) при последующих сеансах работы. К оценке эффективности привлекаются эксперты по областям: медицина (оценка влияния на здоровье и лечение), технология приготовления пищи (практическая реализуемость, риски), а также сам потребитель.

Система обеспечивает возможность многократного решения задачи оптимизации персонализированного меню при изменении входящих данных по причинам смены диетологических задач, введении новых продуктов, изменения пищевых предпочтений и т.п. При таком подходе система проектирования меню представляет собой модель персонализированного питания, регулярно используемую для рационального планирования.

Дополнительным способом использования подобной модели является целевое конструирование рецептур функциональных продуктов, включая случай целевой разработки для персонализированного питания. При этом свойства продукта оцениваются не изолированно, а в составе конкретного рациона.

Направления развития модели: усовершенствование первичной информации о блюдах и рецептурах; учет вариативности (статистической природы) показателей оценки; сопоставление фактического потребления с плановым меню; использование сведений нутрибиомики и нутригеномики; психология потребления пищи; семейная модель питания (оптимизация на микрогруппе); анализ структуры многокритериального набора показателей оценки для выявления главных компонент.

#### **Список литературы**

1. МР 2.3.1.2432-08 Нормы физиологических потребностей в энергии и пищевых веществах для различных групп населения Российской Федерации.
2. Барановский А.Ю., Диетология, СПб.: Питер, 2017.
3. Лисин П.А., Компьютерное моделирование производственных процессов в пищевой промышленности, СПб: Лань, 2016.
4. Лисицын А.Б., Никитина М.А., Сусь Е.Б., «Оценка качества белка с использованием компьютерных технологий», Пищевая промышленность, № 1, с/29-29,

2016.

5. Муратова Е.И и др., Автоматизированное проектирование сложных много-компонентных продуктов питания, Тамбов: ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011.

6. Мусина О.Н., Компьютерное проектирование рецептур, М.: Директ-медиа, 2015.

7. Надточий Л.А., Орлова О.Ю. Инновации в биотехнологии. Ч.2. Пищевая комбинаторика: Учеб.-метод. пособие, СПб: Университет ИТМО, 2015.

8. Никитина М.А., Чернуха И.М. «Многокритериальная оптимизация рецептурного состава продукта,» Теория и практика переработки мяса; 3(3): 89–98.DOI 10.21323/2414–438X 2018–3–3–89–98, 2018.

9. Сидоренко М.Ю. Персонализированное питание, М.: ДеЛи плюс, 2016.

10. Компьютерная программа «1С:Медицина. Диетическое питание», В Интернете: <http://http://diet.1cp.ru/> Дата обращения 15.04.2019

11. Компьютерная программа «Мониторинг физического развития и нутритивного статуса», В Интернете: <http://www.1cp.ru/solutions/NutriMon/> Дата обращения 15.04.2019

12. FAO Food and nutrition paper 91, Fats and fatty acids in human nutrition. Report of an expert consultation, Geneva: FAO, 2011.

13. FAO food and nutrition paper 92. Dietary protein quality evaluation in human nutrition/ Report of an FAO Expert Consultation, Geneva: FAO, 2013.

14. Kossoff EH at al, «Optimal clinical management of children receiving dietary therapies for epilepsy: Updated recommendations of the International Ketogenic Diet Study Group,» Epilepsia Open, 3(2): 175-192, 2018.

15. Nikitina M at al, «Application of the Hierarchy Analysis Method at the Food-stuff Quality Evaluation,» International Journal of Advanced Computer Science and Applications, т. 9, № 5, pp. 51-59, 2018.

16. Reinivuo H, Laitinen K. Proposal for the harmonisation of recipe calculation procedures, EuroFIR, 2007.

17. Simonopolus A.P., Visioli F. More on Mediterranean Diets, Basel: KARGER, 2007.

18. Vasquez-Caicedo et al, Report on collection of rules on use of recipe calculation procedures including the use of yield and retention factors for imputing nutrient values for composite foods, EuroFIR, 2008.

УДК 303

*Благовещенская Екатерина Анатольевна,*  
доктор физико-математических наук, профессор,  
зав. кафедрой «Высшая математика»

## **АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ТЕОРИИ МУЗЫКИ**

Россия, Санкт-Петербург.  
Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I

**Аннотация.** Формализуются некоторые аспекты теории музыки на языке алгебраических структур. Осмысление взаимосвязи структурных элементов в музыке может быть использовано при создании систем искусственного интеллекта в части

распознавания акустических образов.

**Ключевые слова:** алгебраические структуры, циклическая группа, кольцо, тональность.

***Ekaterina A. Blagoveshchenskaya,***  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Head department Higher Mathematics

## **ALGEBRAIC STRUCTURES in MUSIC THEORY**

Russia. St. Petersburg,  
Emperor Alexander I St. Petersburg state Transport University

**Abstract.** Some aspects of music theory are formalized in terms of algebraic structures. Understanding the relationship of structural elements in music can be used to create systems of artificial intelligence in the recognition of acoustic images.

**Keywords:** algebraic structures, cyclic group, ring, tonality.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ  
(грант 17-01-00849)*

Структурная формализация музыкальных построений во многих аспектах опирается на понятия алгебры. Однако, при обнаружении достаточно жестких структур в музыке следует воздержаться от полного её сведения к математике, чем грешат некоторые исследователи.

За основу возьмем традиции западно-европейской и русской музыки, возникшие из произведений Баха, Моцарта, Бетховена, Чайковского, Мусоргского и других знаменитых композиторов, заложивших основы классической музыкальной школы.

В качестве основного музыкального инструмента берется рояль (пианино), и делается теоретическое предположение об идеальной ситуации, в которой акустический интервал октава равномерном делится на 12 полутонов. Известно, что абсолютно точно это сделать нельзя, но такое допущение необходимо для признания, следуя Баху, всех тональностей равноправными. Далее, теоретически полагаем, что клавиатура рояля бесконечно продолжается в обе стороны с тем, чтобы множество клавиш (нот) было счетно.

1) Музыкальный фрагмент (произведение) может рассматриваться как элемент множества с двумя алгебраическими операциями: сложение (одновременное звучание нот, то есть аккорд) и

умножение (последовательное звучание отдельно взятых нот или аккордов). Образующими данной структуры являются сами ноты. Коммутативность первой операции и ассоциативность обеих позволяют рассматривать данную структуру как квазикольцевую структуру. Напомним, что простейшим примером кольца является  $\mathbf{Z}(+,*)$ , множество целых чисел (эталонное счетное множество) с двумя бинарными операциями сложения и умножения, рассмотрение которого согласуется с предположением о бесконечности множества всех нот.

Добавление временной характеристики (длительности звучания), превращает данную структуру в квази-алгебу, в которой определено умножение на элементы некоторого числового множества. Поясним, что слово “квази-структура” означает структуру с ослабленной системой аксиом, скажем, множество временных интервалов допускает коммутативную операцию сложения и наличие нейтрального нулевого элемента, но отсутствуют противоположные элементы, что не позволяет называть это абелевой группой, но данная квазигруппа традиционно называется моноидом.

2) Введем ещё одну структуру, а именно, абелеву группу всех интервалов с операцией сложения интервалов. С алгебраической точки зрения полутон (наименьший из всех интервалов) может рассматриваться как образующий элемент этой группы со следующим правилом сложения:

Факторизация по модулю 12 группы всех нот, операций в которой является сложение интервалов (в теоретическом предположении бесконечности этой группы, изоморфной  $\mathbf{Z}(+)$ ) приводит к циклической группе порядка 12, то есть к  $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ , что ассоциируется с отождествлением в унисон звучащих нот из разных октав. Сложение двух интервалов выполняется по следующему правилу: высокий звук предшествующего интервала (первого слагаемого) считаем совпадающим с низким звуком последующего интервала (второго слагаемого), и в качестве суммы берем интервал, создаваемый низким звуком первого и высоким звуком второго слагаемого. Сумма не зависит от порядка следования слагаемых, то есть операция сложения интервалов является коммутативной. Образующим элементом этой циклической группы, изоморфной  $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ , очевидно, является полутон, обозначим его “e”.

3) Строение квинтового круга тональностей связано с наличием различных образующих этой циклической группы, а именно, полутона “e” и его кратных “5e” и “7e”. Заметим, что при сложении интервалов

октава представляет собой сумму, произведенную в любом порядке, кварты “5e” и квинты “7e”, которые, по известной теореме теории групп, являются образующими для циклической группы порядка 12, так как числа 5 и 7 не имеют общих делителей с числом 12.

4) Музыкальная линия основана на ряде аккордов, задающих гармонию на определенном временном промежутке. Вообще говоря, музыкальный ряд состоит из многочисленных аккордов и их модификаций (обращений), иногда они являются характерными для особых жанров, например, для джаза.

Определенный аккорд доминирует на каждом отдельно взятом музыкальном отрывке. Являясь аккомпанементом, подчиненным мелодии, этот аккорд, тем не менее, определяет ее гармонический строй. отождествляя любую ноту с концом интервала, начало которого находится на первой ступени (тонике) исполняемого произведения, и факторизуя все ноты по модулю 12, получаем, как и прежде, циклическую группу  $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$  с операцией сложения интервалов. Пусть  $\mathbf{L}$  – аддитивная полугруппа всех возможных аккордов, которые можно построить из этих 12 элементов

**C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B.**

Сумма её элементов означает одновременное звучание аккордов, то есть тоже аккорд. Доминирующий аккорд определяет некоторую полугруппу в  $\mathbf{L}$ , скажем  $\mathbf{K}$ , состоящую из аккордов (в том числе отдельно звучащих нот), в составлении которых используются ноты доминирующего аккорда. Тогда ноты мелодии можно рассмотреть как элементы фактор-полугруппы  $\mathbf{L}/\mathbf{K}$  в том смысле, что они звучат вместе с элементами из  $\mathbf{K}$  в гармоническом союзе. Мы предлагаем алгебраическую модель музыкальных построений, в которой гармоническая последовательность доминирующих аккордов рассматривается как последовательность различных факторизаций аддитивной полугруппы  $\mathbf{L}$ , а мелодия строится на элементах фактор-полугруппы  $\mathbf{L}/\mathbf{K}$  внутри временного интервала доминирования соответствующего аккорда из  $\mathbf{K}$ .

5) Возможность исполнения произведения в разных тональностях оказывается близкой понятию изоморфизма в алгебре, дающего возможность идентифицировать объекты (структуры) в случае совпадения их алгебраических свойств в независимости от природы элементов. При различных аранжировках (не слишком радикально

меняющих первоначальный материал) произведение остается узнаваемым, и это согласуется с использованием в алгебре различных ослабленных версий изоморфизма, адаптированного для конкретных ситуаций (то есть квази-изоморфизма).

### **Заключение**

Осмысление взаимосвязи структурных элементов в музыке может быть использовано для усовершенствования систем искусственного интеллекта в части распознавания акустических образов.

### **Список литературы**

1. Благовещенская Е.А. Алгебра и музыка. – Математика. Исторические очерки, научные обзоры развития математики от возникновения до наших дней. Изд-во СПбГПУ, 2012, 328-343.
2. E. Blagoveshchenskaya. Some Links between Music and Mathematics. Algebraic Aspects. – Meuser, Michael (Ed.):Papers of the Essen Collegium of Gender Studies. Vol.2, 2004.
3. Е.А. Благовещенская. Алгебраические структуры и теория музыки.- В сборнике: Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство. Труды международной научной конференции. 2015, С. 491-493.



## СОДЕРЖАНИЕ

### Секция 2.

#### **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ ..... 5**

*Козлов В.Н., Ефремов А.А.*

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИКИ  
УПРАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ  
ПРОСТРАНСТВАХ ..... 5

*Будник С.В., Шашихин В.Н.*

УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ..... 12

*Ефремов А.А., Козлов В.Н.*

СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕДИНЕНИЙ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ  
ГЕНЕРАТОРОВ В ФАЗНЫХ ОСЯХ ..... 19

*Саитова Г.А., Елизарова А.В.*

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПЗАДЫВАНИЕМ ... 26

*Сорокина Н.В.*

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ВЯЗКОЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО СИСТЕМЕ  
ТРУБОПРОВОДОВ ..... 35

*Лэ Ван Хань, Фирсов А.Н.*

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ ЕЁ  
ЭЛЕМЕНТОВ ..... 43

*Фирсов А.Н.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ТОЧНЫЕ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ДВУХ ЧАСТНЫХ  
СЛУЧАЯХ ..... 46

|                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Сорокина Н.В.</b><br>АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ<br>ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ<br>ЖИДКОЙ СМЕСИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ<br>ТРУБЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ .....                                          | 53  |
| <b>Богданов С.С., Козлов В.Н., Пономарев А.Г., Халиуллин Ю.М.</b><br>КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ ЛОГИЧЕСКИЕ<br>МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ АВАРИЙНЫХ СОСТОЯНИЙ<br>ОБЪЕКТОВ .....                                                      | 60  |
| <b>Фирсов А.Н.</b><br>АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО<br>УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛМОГОРОВА-ФЕЛЛЕРА<br>С НЕЛИНЕЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА .....                                                                                       | 69  |
| <b>Горелова Г.В.</b><br>МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ<br>В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ<br>ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ .....                                                                                    | 74  |
| <b>Сергеев А.С.</b><br>РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ<br>МОДЕЛЕЙ КОМБИНИРОВАННЫХ БИОИНСПИРИРОВАННЫХ<br>АЛГОРИТМОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ<br>КРИПТОАНАЛИЗА АСИММЕТРИЧНЫХ И БЛОЧНЫХ<br>СИСТЕМ ШИФРОВАНИЯ ..... | 85  |
| <b>Тренина Е.В.</b><br>ОЦЕНКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ<br>ИХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ И КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ                                                                                                               | 96  |
| <b>Портнов Н.М., Карпов В.И.</b><br>ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ МЕНЮ В СИСТЕМЕ<br>ПЕРСОНИФИЦИРОВАННОГО ПИТАНИЯ .....                                                                                                                       | 102 |
| <b>Благовещенская Е.А.</b><br>АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ТЕОРИИ МУЗЫКИ .....                                                                                                                                                      | 109 |

# **СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОЕКТИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ**

Сборник научных трудов  
XXIII Международной научно-практической конференции  
10–11 июня 2019 года

Часть 2  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ**

Сборник подготовили: В.Н. Козлов, А.Н. Фирсов, Н.В. Сорокина

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная Библиографический список:

---

Подписано в печать 25.05.2019. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 7,25. Тираж 100. Заказ 17897b.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета,  
предоставленного организационным комитетом конференции,  
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.

