Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

На правах рукописи

Горлов Антон Игоревич

СИГНАЛЬНО-КОДОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ МЕЖСИМВОЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ

Специальность 05.12.04 – Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель – Гельгор Александр Леонидович
кандидат технических наук, доцент

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – 2016

Оглавление

Список сокращений

АКФ – автокорреляционная функция;

АПВ – апостериорная вероятность;

АФМ – амплитудно-фазовая манипуляция;

ИХ – импульсная характеристика;

КАМ – квадратурная амплитудная манипуляция;

КИХ – конечная импульсная характеристика;

МСИ – межсимвольная интерференция;

РКМ – решётчатая кодированная модуляция;

ТРКМ – параллельная (турбо) решётчатая кодированная модуляция;

ФМ – фазовая манипуляция;

BER – вероятность битовой ошибки (Bit Error Rate);

FTN – быстрее чем Найквист (Faster than Nyquist)

RC – «приподнятый» косинус (raised cosine);

RRC – корень квадратный из «приподнятого» косинуса (root-raised cosine);

Список обозначений

$a(t)$ – импульс, используемый при формировании сигнала;

a_k – дискретные отсчёты импульса;

b_{ps} – количество информационных бит, отображаемых на один модуляционный символ (передаваемых за один тактовый интервал);

b_k – информационные биты;

B_k – информационные символы (наборы из b_{ps} бит);

$BEC(W)$ – доля энергии, сконцентрированная в полосе W (концентрация энергии в полосе W);

C_k – модуляционный символ, передаваемый на k-м тактовом интервале; значение выбирается из какого-либо сигнального созвездия;

$\hat{C}_k$ – жёсткое решение символе, передаваемом на k-м тактовом интервале;

$\mathbf{C}_{(i)}$ – последовательность модуляционных символов с номером i;

$\mathbf{C}_{(i,j)}$ – ошибочная последовательность модуляционных символов с номером i, расходящаяся с правильной на тактовом интервале с номером j;

d^2 – квадрат нормированного евклидова расстояние между сигналами;

$e(t)$ –сигнал ошибки;

E_{b} – средняя энергия, затрачиваемая на передачу одного информационного бита;

E_{s} – средняя по созвездию энергия модуляционного символа;

$F_a(f)$ – преобразование Фурье (спектр) импульса $a(t)$;

$g_x(t)$ – автокорреляционная функция сигнала $x(t)$;

$g_x[k]$ – дискретные отсчёты автокорреляционной функции сигнала $x(t)$, взятые в моменты времени kT;

$G(f)$ – энергетический спектр;

$h^{(k)}$ – k-й образующий полином рекурсивного систематического свёрточного кода ($k \neq 0$);

$h^{(0)}$ – образующий полином для ветви обратной связи рекурсивного систематического свёрточного кода;

L – количество отсчётов импульса, используемого для формирования сигнала с частичным откликом, или количество компонент в многокомпонентном сигнале;

L_{IR} – длина ИХ вида «корень квадратный из приподнятого косинуса» КИХ-фильтра, используемого для формирования традиционных сигналов без МСИ;

$L\left(b_k^{(p)}\right)$ – логарифмы отношения правдоподобия для передаваемых бит, вычисляемые при приёме (мягкие решения);

M – размерность (порядок) используемого сигнального созвездия;

MGC – максимальный коэффициент групповой корреляции;

$n(t)$ – случайная реализация белого гауссовского шума;

n_k – отсчёты белого гауссовского шума;

N – количество модуляционных символов в передаваемой последовательности;

N_0 – односторонняя спектральная плотность средней мощности белого гауссовского шума;

N_{FFT} – количество точек в алгоритмах БПФ/ОБПФ;

N_{OVR} – параметр перекрытия в алгоритме «БПФ с перекрытием», используемого для формирования традиционных сигналов без МСИ;

P – вероятности событий;

$PAPR$ – пик-фактор сигнала;

r_k – принятые символы;

R – скорость передачи информации (бит/с);

$R_{\mathrm{СК}}$, $R_{\mathrm{РСК}}$ – кодовые скорости свёрточного, рекурсивного свёрточного кодов;

T – длительность тактового интервала (период следования модуляционных символов);

$W_{99\%}$ – ширина полосы частот, вычисленная по критерию 99%-й концентрации энергии;

$y(t)$ – комплексная огибающая сигнала с АФМ;

α – коэффициент сглаживания для RC- и RRC-импульсов;

α_k – метрики состояний, вычисляемые при прямом проходе, в алгоритме BCJR;

β_k – метрики состояний, вычисляемые при обратном проходе, в алгоритме BCJR;

γ_k – метрики ветвей (переходов) между состояниями в решётке кода в алгоритме BCJR;

β_F – удельные спектральные затраты;

β_E – удельные энергетические затраты;

β_E^* – модифицированные удельные энергетические затраты (вычисленные с учетом пик-фактора сигнала);

ξ_k – нормированные значения ошибочных символов;

$\psi(t)$ – интерполирующий импульс.

Введение

Актуальность темы диссертации

Постоянное увеличение требований потребителей к скорости и объёмам передачи информации приводит к необходимости усовершенствования сетей передачи данных, включая разработку новых методов формирования и обработки сигналов. Традиционно, при разработке новых стандартов внедряются более сложные схемы помехоустойчивого кодирования, используемые совместно с многопозиционными сигнальными созвездиями и импульсами, обладающими свойством ортогональности при сдвиге по времени на целое количество тактовых интервалов. Так сделано и в семействе европейских стандартов цифрового телевизионного вещания DVB. Например, в используемом в настоящее время стандарте спутникового телевизионного вещания DVB-S2 [2] предусмотрены многопозиционные сигнальные созвездия из семейств фазовой манипуляции (ФМ) и амплитудно-фазовой манипуляции (АФМ) с количеством элементов от четырёх до 32, помехоустойчивые коды со скоростями от 1/4 до 9/10, и импульсные характеристики формирующего фильтра (импульсы), называемые импульсами Найквиста и имеющие в частотной области вид корня квадратного из «приподнятого косинуса» (root raised cosine, RRC) с минимальным коэффициентом сглаживания 0,2. Такие параметры означают возможность передачи данных с максимальной спектральной эффективностью около 3,75 бит/(с·Гц). Очевидно, спектральная эффективность сигналов DVB-S2 может быть улучшена при переходе к RRC-импульсу с нулевым коэффициентом сглаживания или sinc-импульсу, в этом случае будет осуществляться формирование сигнала на «пределе» или «барьере Найквиста» [35], т.е. символьная скорость будет равна максимальной символьной скорости, при которой возможно независимое различение сигналов. Однако, использование sinc-импульса на практике невозможно ввиду его бесконечной длительности и малой скорости затухания колебаний. Несмотря на это, поиск новых форм импульсов, занимающих в частотной области минимальную полосу, является актуальной задачей. Например, в [5], [8] предлагается модернизация широко используемых импульсов Найквиста с целью минимизации уровня внеполосных излучений, возникающих из-за усечения бесконечного импульса. Другим направлением исследований является формирование сигналов с символьной скоростью, превышающей «барьер Найквиста». Такие сигналы называют сигналами с управляемой межсимвольной интерференцией (МСИ) или сигналами с частичным откликом, так как импульсы соседних тактовых интервалов неортогональны [3], [16], [20].

Впервые способ повышения спектральной эффективности за счет перехода к неортогональным импульсам был предложен Мазо [16]. Им было показано, что при увеличении в $1/\tau$ раз скорости следования символов в сигналах с импульсами вида $\sin(x)/x$, величина свободного евклидова расстояния не изменяется, если значение коэффициента «сближения» τ находится в интервале [0,8…1]. Это означало теоретическую возможность повышения спектральной эффективности в 1,25 раза при сохранении помехоустойчивости. Позже аналогичные результаты были получены и для RRC-импульсов [15]. Такой подход, получивший название «быстрее, чем Найквист» (Faster than Nyquist, FTN), считается перспективным и в настоящее время: например, FTN-сигналы на основе созвездия КАМ-4 при значении коэффициента сближения $\tau = 0{,}25$ обеспечивают спектральную эффективность, эквивалентную случаю использования созвездия КАМ-256 с ортогональными импульсами; при этом, на уровне вероятности битовой ошибки 10^{-6} разность в энергетических затратах может достигать 4–5 дБ в пользу FTN-сигналов [3]. Таким образом, использование FTN-сигналов является более эффективным способом повышения спектральной эффективности по сравнению с использованием созвездий КАМ высоких порядков, а исследование характеристик сигналов с управляемой МСИ на основе оптимальных импульсов представляет актуальную задачу.

Несмотря на эффективность подхода «быстрее, чем Найквист», при формировании сигналов с частичным откликом RRC-импульсы не являются оптимальными по какому-либо критерию. В [20] была предложена методика нахождения оптимальных импульсов для сигналов с частичным откликом (Partial Response Signals, PRS). В данной методике предполагается решение линейной оптимизационной задачи для нахождения отсчётов оптимальной автокорреляционной функции (АКФ) и последующее восстановление отсчётов импульса из отсчётов его АКФ. Критерием оптимальности является максимальная величина свободного евклидова расстояния для выбранного сигнального созвездия, ширины полосы частот и глубины МСИ. В результате, из набора отсчётов оптимального импульса с помощью интерполяции восстанавливается непрерывный импульс, который является нефинитным. Однако, синтез оптимальных импульсов по данной методике оказывается вычислительно сложным в случае глубокой МСИ, распространяющейся более чем на восемь тактовых интервалов, и, одновременно, при использовании сигнальных созвездий размером больше двух. Еще одним существенным недостатком данной методики является невозможность ограничения пик-фактора синтезируемых импульсов.

Для многокомпонентных сигналов [30] представляется возможным сформулировать и решить задачу нахождения оптимальных импульсов при использовании критерия минимальной полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала. Существенным преимуществом является то, что вместе с уровнем МСИ в качестве дополнительного ограничения оптимизационной задачи может выступать величина пик-фактора сигнала. Для многокомпонентных сигналов представляется возможным сформулировать и решить задачу нахождения оптимальных импульсов при использовании критерия минимальной полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала. В таких сигналах используются финитные импульсы, что могло бы позволить избежать дополнительных потерь при практической реализации формирующих фильтров.

Использование сигнальных созвездий с большой размерностью в современных системах передачи данных неизбежно приводит к увеличению пик-фактора излучаемого сигнала. Переход от традиционных сигналов к сигналам с управляемой МСИ позволяет обеспечить требуемые малые значения удельных спектральных затрат за счёт использования импульсов с более узким спектром, при этом увеличение размера сигнального созвездия не требуется. При использовании комбинаций оптимальных импульсов, полученных с ограничением пик-фактора, с сигнальными созвездиями малой размерности можно рассчитывать на существенное снижение пик-фактора сигналов. Для компенсации энергетических потерь при приёме, вызванных введением МСИ, необходимо введение помехоустойчивого кода, т.е. переход к сигнально-кодовым конструкциям на основе сигналов с управляемой МСИ.

Объектом исследования в работе являются сигнально-кодовые конструкции, построенные на основе решётчатых кодов и спектрально-эффективных сигналов с управляемой МСИ.

Предметом исследования являются удельные спектральные и энергетические затраты сигнально-кодовых конструкций на основе комбинации сигналов с управляемой МСИ и свёрточных кодов.

Целью работы является снижение энергетических потерь при высоких удельных скоростях передачи сообщений, которое достигается путём использования сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и оптимальных сигналов с управляемой межсимвольной интерференцией и регулируемым значением пик-фактора.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Разработка методики синтеза финитных импульсов, входящих в состав сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и обеспечивающих минимальную ширину полосы частот, содержащую заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на величину пик-фактора сигнала и уровень МСИ, определяемый максимальным значением коэффициента групповой корреляции либо значением свободного евклидова расстояния.

2. Оптимизация формы импульса для формирования сигнала в условиях ограниченной полосы частот с дополнительным ограничением уровня МСИ или пик-фактора сигнала, что должно позволить уменьшить энергетические потери.

3. Разработка структурной схемы модема для сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и сигналов с управляемой МСИ.

4. Разработка имитационной модели для оценки помехоустойчивости рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций.

5. Проведение имитационного эксперимента приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ с целью оценки характеристик помехоустойчивости сигнально-кодовых конструкций в канале с аддитивным белым гауссовским шумом.

Структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и одного приложения.

Во **введении** обоснована актуальность и новизна темы исследования, сформулирована цель и основные задачи исследования, описана структура диссертационной работы.

В **первой главе** приведён аналитический обзор работ, описывающих подходы к формированию сигналов с управляемой МСИ: подход «быстрее, чем Найквист» и формирование сигналов с частичным откликом. Оба случая соответствуют значениям символьной скорости, превышающим «барьер Найквиста». В конце главы описаны алгоритмы приёма сигналов с частичным откликом: алгоритм Витерби, реализующий оптимальный приём по критерию максимального правдоподобия для последовательности символов, алгоритм BCJR, реализующий оптимальный приём по критерию максимальной апостериорной вероятности для каждого символа. В результате аналитического обзора литературы обоснована актуальность выбранной темы, сформулирована цель и основные задачи исследования.

Во **второй главе** рассмотрены схемы решётчатой кодированной модуляции – способа помехоустойчивого кодирования для систем, эффективно использующих полосу частот. Также рассмотрены параллельные схемы РКМ (турбо РКМ, ТРКМ), объединяющие в себе принципы традиционной РКМ и параллельных систематических свёрточных кодов, называемых турбо кодами. Приведены оценки кривых помехоустойчивости для схем РКМ и ТРКМ на основе сигнальных созвездий ФМ-8, КАМ-16, КАМ-32 и КАМ-64, обеспечивающих передачу данных со значениями спектральной эффективности от 2 до 5 бит/(с·Гц).

В **третьей главе** описаны принципы формирования и свойства многокомпонентных сигналов, отличительной особенностью которых является использование финитных импульсов с длительностью в L тактовых интервалов, где L – количество компонент. Приведены аналитические выражения для энергетического спектра, коэффициентов парциальной и групповой корреляции, пик-фактора и свободного евклидова расстояния для многокомпонентных сигналов. Сформулирована задача поиска оптимальных импульсов для многокомпонентных сигналов по критерию минимальной полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на максимальный коэффициент групповой корреляции, свободное евклидово расстояние или величину пик-фактора сигнала. Приведены численные решения оптимизационной задачи, их характеристики и область возможных решений. Для оптимальных многокомпонентных сигналов на основе сигнального созвездия КАМ-4 представлены характеристики в плоскости удельных спектральных и энергетических затрат.

В **четвёртой главе** рассмотрены сигнально-кодовые конструкции на основе оптимальных сигналов с частичным откликом, оптимальных многокомпонентных сигналов и рекурсивных систематических свёрточных кодов. Предложена структурная схема модема для передачи и приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ. Описана итеративная схема приёма (турбо эквалайзер) для демодуляции и декодирования таких сигналов. Описана имитационная модель, разработанная для оценки характеристик помехоустойчивости сигнально-кодовых конструкций. В плоскости удельных спектральных и удельных энергетических затрат приводится сравнение кодированных сигналов с управляемой МСИ со схемами РКМ и ТРКМ.

В **заключении** сформулированы основные результаты исследования, представляющие теоретический и практический интерес, приведены научная новизна и положения, выносимые на защиту.

Глава 1. Традиционные одночастотные сигналы с амплитудно-фазовой манипуляцией

В данной главе рассмотрены традиционные одночастотные сигналы с АФМ без МСИ, а также сигналы с частичным откликом, построенные на основе импульсов вида «корень квадратный из приподнятого косинуса». Описаны способы формирования таких сигналов во временной и частотной областях. Приведён обзор работ, описывающих подходы к формированию сигналов с управляемой МСИ: подход «быстрее, чем Найквист» и формирование сигналов с частичным откликом. Для сигналов с частичным откликом представлена методика получения оптимальных импульсов по критерию максимального свободного евклидова расстояния при фиксированной полосе частот. В конце главы описаны два алгоритма приёма для сигналов с МСИ: алгоритм Витерби, реализующий критерий максимального правдоподобия для всей последовательности и алгоритм BCJR, реализующий критерий максимальной апостериорной вероятности для каждого символа.

1.1. Использование импульсов Найквиста для формирования АФМ-сигналов без МСИ

Комплексная огибающая одночастотного сигнала, осуществляющего передачу N модуляционных символов, может быть представлена следующим образом:

$$y_N\left(t\right)=\sum_{k=0}^{N-1}C_k^{(r)}a\left(t-kT\right), \tag{1.1}$$

где $C_k^{(r)}$ – модуляционный (комплексный) символ, передаваемый на k-м тактовом интервале, T – длительность тактового интервала, $a(t)$ – используемый импульс. Будем считать, что символы выбираются с равными вероятностями из какого-либо сигнального созвездия размерности M, а индекс r – случайный номер символа внутри данного сигнального созвездия ($r = 1, \ldots, M$). Далее в работе будем опускать верхний индекс символов $C_k^{(r)}$, если в нём не будет необходимости.

Если функция $a(t)$ удовлетворяет условию

$$a(kT)=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases} \tag{1.2}$$

то говорят, что импульс $a(t)$ удовлетворяет критерию Найквиста [4]. Полагая, что функция $a(t)$ четная, а преобразование Фурье от импульса

$$F_a(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\exp(-j2\pi ft)dt \tag{1.3}$$

имеет максимальное значение равное единице, Найквист сформулировал необходимое условие, при котором импульс удовлетворяет данному критерию. А именно, если $a(t)$ принимает нулевое значение в моменты времени $t = kT$ ($k \neq 0$), то правая и левая половины спектра $F_a(f)$ симметричны относительно точек $(1/(2T), 1/2)$ и $(-1/(2T), 1/2)$ соответственно. Таким образом, из всех импульсов, удовлетворяющих критерию Найквиста, минимальную полосу частот имеет импульс с прямоугольным спектром, лежащим в интервале $[-1/(2T), +1/(2T)]$. Во временной области такой импульс имеет вид:

$$a_{\mathrm{sinc}}(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}. \tag{1.4}$$

Позже было доказано, что выполнение критерия Найквиста для импульса $a(t)$ эквивалентно следующему условию в частотной области:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_a(f-k/T)=K_0, \tag{1.5}$$

где K_0 – вещественная константа. Таким образом, все копии спектра импульса, сдвинутые друг относительно друга на величину $1/T$, должны в сумме давать константу [17].

Критерию Найквиста удовлетворяют импульсы вида «приподнятый косинус» (Raised Cosine, RC), описываемые в частотной области следующим образом:

$$F_{\text{RC}}(f)=\begin{cases} T, & |f|\le\dfrac{1-\alpha}{2T}; \\ T\cos^2\left[\dfrac{\pi T}{2\alpha}\left(|f|-\dfrac{1-\alpha}{2T}\right)\right], & \dfrac{1-\alpha}{2T}<|f|<\dfrac{1+\alpha}{2T}; \\ 0, & |f|>\dfrac{1+\alpha}{2T}; \end{cases} \tag{1.6}$$

и во временной области:

$$a_{\text{RC}}(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-4\alpha^2t^2/T^2}, \tag{1.7}$$

где α – коэффициент сглаживания (roll-off factor), который выбирается из интервала $0\le\alpha\le1$ и определяет ширину полосы частот, занимаемой спектром импульса. Отметим, что в (1.6) определён импульс с единичной энергией, а (1.7) связано с (1.6) обратным преобразованием Фурье с точностью до амплитудного множителя и записано таким образом, чтобы в нулевой момент времени значение было равно единице и импульс удовлетворял критерию Найквиста (1.2).

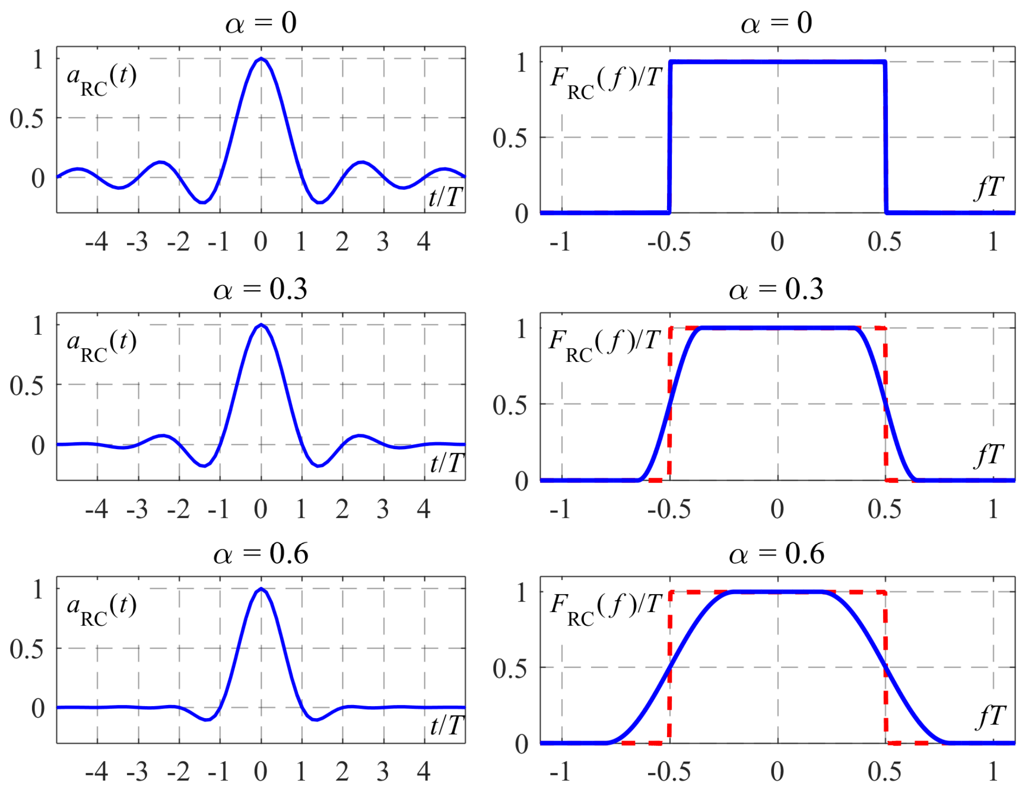

Рис. 1.1. Импульсы вида «приподнятый косинус» во временной и частотной областях

На рис. 1.1 представлены примеры импульсов вида «приподнятый косинус» и их спектров. Как можно видеть, чем выше значение коэффициента скругления, тем быстрее затухают колебания сигнала во временной области, а занимаемая полоса частот оказывается в (1 + α) раз шире минимально возможной.

Как известно, при поэлементном приёме последовательности сигналов наилучшая помехоустойчивость достигается в случае, если импульсы соседних тактовых интервалов ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\,a(t-kT)\,dt = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2\ldots \tag{1.8}$$

Тогда поэлементный приём сводится к вычислению корреляционного интеграла:

$$r_k = \int \big(y(t)+n(t)\big)a(t-kT)\,dt = \int \left[\sum_m C_m a(t-mT)\right] a(t-kT)\,dt +$$

$$+\int n(t)\,a(t-kT)\,dt = C_k \int a^2(t-kT)\,dt + n_k\,, \tag{1.9}$$

где r_k – принятый символ, $n(t)$ – реализация аддитивного белого гауссовского шума, добавляемого при прохождении через канал, а n_k – значение интеграла:

$$n_k = \int n(t)\,a(t-kT)\,dt\,.$$

Если импульс имеет единичную энергию, то в результате вычисления корреляционного интеграла получается переданный символ C_k с шумовой добавкой n_k.

Значения интеграла (1.9) могут быть получены на выходе фильтра с передаточной функцией $F_a^*(f)$ в отсчетные моменты времени kT, где символ «*» обозначает операцию комплексного сопряжения для общего случая, в котором спектр импульса содержит мнимую составляющую. Кроме того, сформированный сигнал (1.1) может быть рассмотрен как результат линейной фильтрации последовательности дельта-импульсов с весовыми коэффициентами $C_k^{(r)}$ фильтром с передаточной функцией $F_a(f)$. Упрощённая структурная схема такой системы передачи данных (для нулевой несущей частоты) представлена на рис. 1.2.

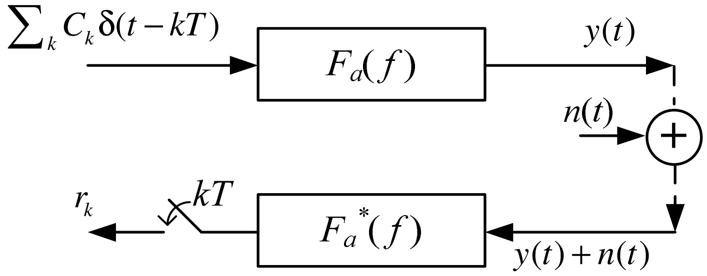

Рис. 1.2. Упрощённая структурная схема системы передачи данных, использующей поэлементный приёмник

Очевидно, что копии импульса $a(t)$, сдвинутые на целое количество тактовых интервалов, будут ортогональны, если критерию Найквиста удовлетворяет не сам импульс, а его АКФ:

$$g_a(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)a(\tau-t)\,d\tau. \tag{1.10}$$

Тогда, необходимое и достаточное условие для ортогональности импульсов соседних тактовых интервалов может быть записано в виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|F_a(f-k/T)\right|^2=K_0\,. \tag{1.11}$$

Таким образом, свойство ортогональности любых двух копий $a(t)$, отличающихся сдвигом на целое количество тактовых интервалов[1] в частотной области равносильно тому, что все копии энергетического спектра, сдвинутые друг относительно друга на величину $1/T$, в сумме дают константу.

Широкое применение в практике получили импульсы вида «корень квадратный из приподнятого косинуса» (Root Raised Cosine, RRC), спектр которых равен квадратному корню из (1.6):

[1] Выполнение или невыполнение данного свойства является ключевым моментом в определении типа импульсов, используемых при формировании одночастотного сигнала. Далее в работе для сигналов, построенных на импульсах, удовлетворяющих данному условию, будем использовать понятие «ортогональных сигналов», а для самих импульсов – «свойства ортогональности при сдвиге на kT».

$$F_{\mathrm{RRC}}(f)=\begin{cases}\sqrt{T}, & |f|\le\dfrac{1-\alpha}{2T};\\ \sqrt{T}\cos\left[\dfrac{\pi T}{2\alpha}\left(|f|-\dfrac{1-\alpha}{2T}\right)\right], & \dfrac{1-\alpha}{2T}<|f|<\dfrac{1+\alpha}{2T};\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}\qquad(1.12)$$

В данной формуле, по-прежнему, α – коэффициент сглаживания, определяющий ширину полосы частот, занимаемую спектром импульса, а T – длительность тактового интервала. Во временной области, при условии единичной энергии, такие импульсы описываются следующим выражением:

$$a_{\mathrm{RRC}}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\pi(1-\alpha)t/T\right]+(4\alpha t/T)\cos\left[\pi(1+\alpha)t/T\right]}{\sqrt{T}\,(\pi t/T)\left[1-(4\alpha t/T)^2\right]}, & t\ne 0,\ t\ne\pm\dfrac{T}{4\alpha};\\ \dfrac{1}{\sqrt{T}}\left[1-\alpha+4\alpha/\pi\right], & t=0;\\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2T}}\left[(1+2/\pi)\sin(\pi/4\alpha)+(1-2/\pi)\cos(\pi/4\alpha)\right], & t=\pm\dfrac{T}{4\alpha}.\end{cases}$$

(1.13)

Такие импульсы удовлетворяют условию ортогональности (1.8), но критерий Найквиста для них не выполняется. Однако, при реализации поэлементного приёма последовательности сигналов согласованным фильтром, на его выходе отсутствует МСИ в отсчетные моменты времени $t = kT$.

Далее в работе будем использовать понятие «традиционных одночастотных сигналов без МСИ», имея в виду одночастотные сигналы, построенные на основе импульсов вида «корень квадратный из приподнятого косинуса». Также, несмотря на то, что RRC-импульсы (1.13) сами по себе не удовлетворяют критерию Найквиста, иногда будем использовать для них понятие «найквистовских импульсов», с учётом того, что их приём осуществляется при использовании согласованного фильтра, и критерию Найквиста удовлетворяет общий отклик «связки» формирующего и согласованного фильтров.

1.2. Методы формирования сигналов с RRC-импульсами во временной и частотной областях

Импульсы вида (1.13) являются нефинитными, и практическая реализация формирующего фильтра, импульсная характеристика которого точно соответствовала бы RRC-импульсу, невозможна. Для формирования АФМ-сигнала во временной области может быть использован КИХ-фильтр, импульсный отклик которого представляет собой усеченный RRC-импульс. Понятно, что в результате любого усечения импульса его спектр становится нефинитным, и в нём появляются внеполосные излучения за пределами теоретической полосы $[-(1+\alpha)/(2T), (1+\alpha)/(2T)]$. Кроме того, при усечении нарушается ортогональность импульсов соседних тактовых интервалов, и на приёмной стороне на выходе согласованного фильтра в отсчётные моменты времени получаются точки сигнального созвездия, искаженные МСИ. Негативные эффекты, вызванные усечением RRC-импульса, проявляются в меньшей степени для импульсов с б*о*льшим коэффициентом скругления. Однако, в реальных системах используют импульсы с небольшими значениями коэффициента скругления: $\alpha = 0{,}22$ используется в системах сотовой связи стандарта UMTS [1], значения $\alpha = 0{,}2$, 0,25 или 0,35 предусмотрены стандартом цифрового телевизионного спутникового вещания DVB-S2 [2].

Известны несколько методов формирования одночастотных сигналов с найквистовскими импульсами. На рис. 1.3 представлена структурная схема алгоритма фильтрации в частотной области «БПФ с перекрытием» [13]. Фильтрация осуществляется блоками, каждый из которых имеет размер N_{FFT} отсчетов, причём соседние блоки перекрываются на фрагментах входного сигнала размерностью $2N_{\mathrm{OVR}}$, где N_{OVR} – параметр перекрытия. Далее каждый блок пересчитывается в частотную область по алгоритму БПФ, и осуществляется фильтрация сигнала в частотной области, а именно, полученные коэффициенты ДПФ сигнала поэлементно умножаются на значения частотной характеристики, заданной в соответствии с (1.12). После фильтрации отсчеты сигнала пересчитываются во временную область по алгоритму ОБПФ. Отсчеты сигнала, находящиеся в середине блока, сохраняются в результирующем массиве друг за другом, без перекрытия. Размер средней части блока, сохраняемой в результирующем массиве, равен ($N_{\text{FFT}} - 2N_{\text{OVR}}$) отсчетов. Таким образом, после пересчета результата фильтрации во временную область для каждого блока отбрасываются крайние фрагменты, каждый из которых имеет размер N_{OVR} отсчетов. Чем больше размер средней части блока, тем быстрее и вычислительно менее сложно осуществляется фильтрация. Однако, чем больше размер перекрывающихся фрагментов, тем ближе результат фильтрации к теоретическому, который получился бы на выходе фильтра, если бы тот имел бесконечную импульсную характеристику, соответствующую RRC-импульсу.

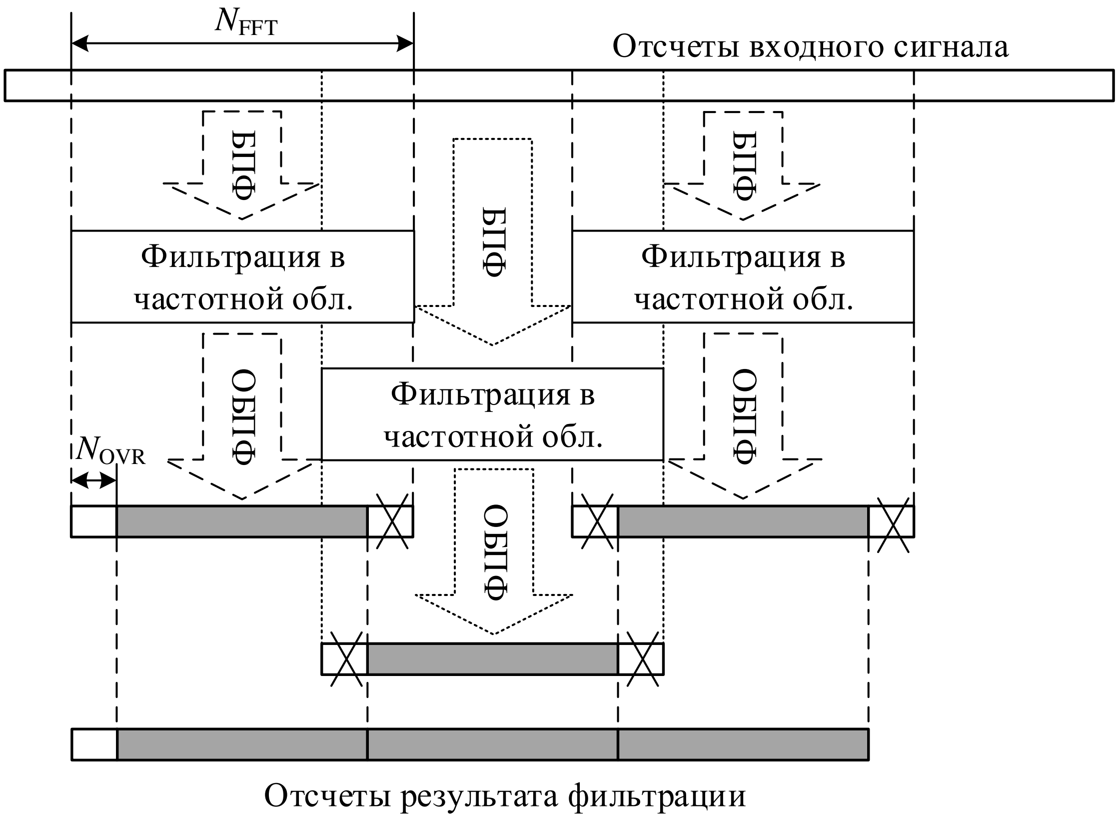

Рис. 1.3. Структурная схема алгоритма фильтрации «БПФ с перекрытием», используемая для формирования АФМ-сигналов с нефинитными импульсами

Для примера, на рис. 1.4 представлены оценки энергетических спектров сигналов, сформированных разными способами при использовании RRC-импульса с коэффициентом скругления α = 0,2. Сигналы модулировались случайными последовательностями символов из созвездия ФМ-2 {+1; –1}. Оценки энергетических спектров осуществлялись методом усредненных модифицированных периодограмм [34]. Для случая фильтрации во временной области КИХ-фильтром указан параметр L_{IR} – длина ИХ фильтра; для алгоритма «БПФ с перекрытием» указан параметр перекрытия N_{OVR}. Оба параметра представлены относительно длительности тактового интервала T; при этом на каждом тактовом интервале формировалось по 4 отсчета сигнала, т.е. частота дискретизации имела значение $F_s = 4/T$ Гц. При формировании сигнала в частотной области алгоритмом «БПФ с перекрытием» размерность блока (и процедур БПФ/ОБПФ) была равной 256.

Например, если $L_{\mathrm{IR}} = 6TF_s + 1$, то это означает, что ИХ формирующего фильтра представляет собой RRC-импульс (1.13), усеченный на интервале $t = [-3T, 3T]$, и, с учётом передискретизации в 4 раза, имеет размер 6·4 + 1 = 25 отсчетов.

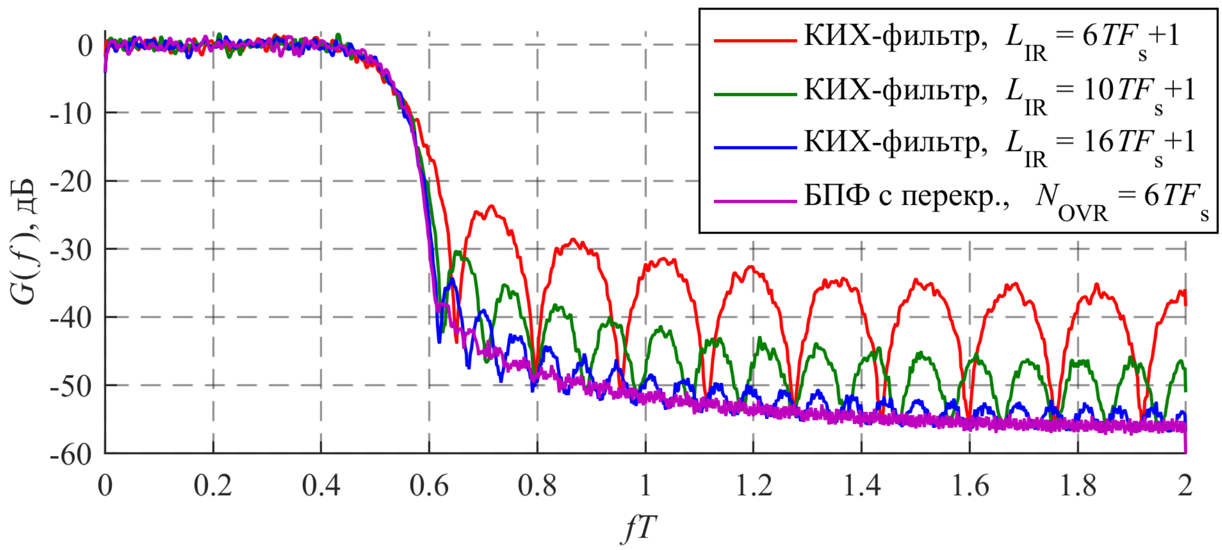

Рис. 1.4. Оценки энергетических спектров последовательностей сигналов, использующих RRC-импульс α = 0,2; для алгоритма «БПФ с перекрытием» $N_{\mathrm{FFT}} = 256$

Как можно видеть, для алгоритма фильтрации в частотной области уже при небольшом значении параметра перекрытия N_{OVR} внеполосные излучения заметно меньше. Для более детального сравнения двух алгоритмов фильтрации введём величину концентрации энергии как отношение энергии сигнала, сконцентрированной в нужной полосе W, к полной энергии сигнала:

$$BEC(W) = \frac{\int\limits_{-W/2}^{W/2} G(f)\,df}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,df}, \tag{1.14}$$

где $G(f)$ – энергетический спектр сигнала. Тогда для спектров, представленных на рис. 1.4, значение теоретической полосы частот $W_{\mathrm{RRC}} = (1 + \alpha)/T$, а уровень внеполосных излучений:

$$BEC_{\mathrm{out}} = 1 - BEC(W_{\mathrm{RRC}}). \tag{1.15}$$

На рис. 1.5 представлены зависимости уровня внеполосных излучений в спектрах сигналов, сформированных при использовании RRC-импульса во временной и частотной областях, от параметров L_{IR} (для КИХ-фильтра) и N_{OVR} (для алгоритма «БПФ с перекрытием»). Как можно видеть, уже при небольших значениях параметра N_{OVR} уровень внеполосных излучений оказывается ниже –40 дБ. А для уровня внеполосных излучений –45 дБ соотношение между значениями N_{OVR} и L_{IR} можно оценить как 1 к 4: данный уровень внеполосных излучений достигается при $L_{\mathrm{IR}} = 24T$ и при $N_{\mathrm{OVR}} = 6T$.

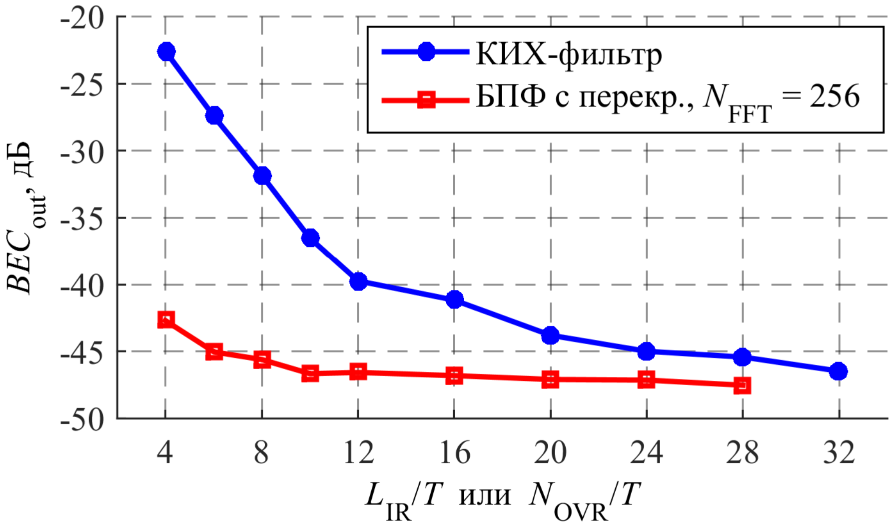

Рис. 1.5. Уровень внеполосных излучений при формировании сигнала с RRC-импульсом α = 0,2 в зависимости от длины ИХ фильтра L_{IR} или от параметра перекрытия N_{OVR}

1.3. Сигналы с частичным откликом

С импульсом Найквиста (1.4), имеющим минимально возможную полосу частот, связывают понятие «предела» или «барьера Найквиста» [35]. Согласно этому «барьеру», при использовании канала с (условной) полосой частот ΔF, скорость модуляции не может быть сделана больше значения $2\Delta F$ Бод без существенного возрастания межсимвольной интерференции и, как следствие, снижения помехоустойчивости. Ограничение на скорость модуляции не означает автоматического ограничения на скорость передачи информации, поскольку, используя M-позиционное ($M > 2$) сигнальное созвездие можно получить скорость передачи информации, равную $2\Delta F \log_2 M$ бит/с. Однако, бесконечное увеличение размерности созвездия невозможно, так как ухудшение его дистанционных характеристик (минимального расстояния между символами) в условиях ограниченного энергетического ресурса (например, пиковой мощности) неизбежно приведёт к возрастанию количества битовых ошибок.

Отметим, что в данной формулировке «барьера Найквиста» предполагается канал с прямоугольной частотной характеристикой, а значение полосы частот ΔF – вычисленным по правой половине этой характеристики, соответствующей положительным значениям частоты. Действительно, в случае спектра вещественного сигнала, его правая и левая половины оказываются комплексно сопряженными, и восстановление сигнала возможно по одной из половин спектра. При передаче сигнала на несущей частоте может быть использована однополосная модуляция, при которой осуществляется перенос спектра первичного сигнала из области низких частот в область высоких частот и сохраняется ширина спектра [35]. Однако, в цифровой связи первичный низкочастотный сигнал рассматривается в виде комплексной огибающей, спектр которой, в общем случае, не обладает свойством симметрии относительно нулевой частоты. Более того, известно, что спектр $F_s(f)$ сигнала на несущей частоте связан со спектром $F_y(f)$ комплексной огибающей следующим образом [26]:

$$F_s(f) = \frac{1}{2} F_y(f - f_0) + \frac{1}{2} F_y^*(-f - f_0), \quad (1.16)$$

где f_0 – несущая частота, а «*» – комплексное сопряжение. Таким образом, спектр сигнала на несущей частоте имеет «удвоенную» полосу $2\Delta F$. В связи с отмеченными особенностями, далее в работе будем использовать понятие удвоенной полосы частот, вычисленной по симметричному спектру. В этом случае, согласно «барьеру Найквиста», максимальная символьная скорость числено равна ширине выделенной полосы частот.

Преодоление «барьера Найквиста» возможно при использовании неортогональных сигналов, также называемых сигналами с управляемой МСИ или сигналами с частичным откликом. Вводимая при формировании сигнала МСИ, в принципе, не препятствует извлечению информации из принятого сигнала, а лишь снижает помехоустойчивость приёма. Наиболее простой способ перехода к сигналам с МСИ – это формирование сигнала с увеличенной скоростью следования символов:

$$y(t) = \sum_k C_k^{(r)} a_{\text{sinc}}(t - k\tau T), \ 0 < \tau < 1, \quad (1.17)$$

в котором, как и прежде, $C_k^{(r)}$ – последовательность модуляционных символов, а период следования импульсов уменьшен относительно стандартного значения T, обеспечивающего ортогональность импульсов на соседних интервалах; τ – коэффициент «сближения» импульсов. Данный метод формирования сигналов, получивший в литературе название «быстрее чем Найквист» (Faster than Nyquist, FTN), обеспечивает увеличение скорости передачи символов в $1/\tau$ раз. Возможно показать, что независимо от значения τ, энергетический спектр такого сигнала пропорционален квадрату модуля спектра импульса $a(t)$ и, как и прежде, не зависит от вида созвездия при условии его симметричности и при независимом равновероятном выборе символов.

Зачастую формирование сигналов с управляемой МСИ рассматривают как способ «кодирования» в пространстве сигналов. Учитывая, что при приёме FTN-сигналов отсчёты с выхода согласованного фильтра, взятые в моменты времени

$k\tau T$, будут зависеть друг от друга, формирователь таких сигналов может быть рассмотрен как источник с памятью. Для такого источника может быть построена решётка, описываемая набором состояний источника и переходами между состояниями, а для формируемых последовательностей сигналов вычислена величина свободного расстояния в евклидовом пространстве.

Допустим, одночастотные сигналы $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ соответствуют разным последовательностям символов $\mathbf{C}_{(1)}$ и $\mathbf{C}_{(2)}$, отличающимся хотя бы в одной позиции. Тогда минимальное значение квадрата евклидова расстояния

$$d^2 = \frac{\log_2 M}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \left| y_{(1)}(t) - y_{(2)}(t) \right|^2 dt, \tag{1.18}$$

вычисленное по всем возможным последовательностям разности символов, соответствует квадрату свободного евклидова расстояния $d_{\text{св}}^2$. В (1.18) сделана нормировка квадрата евклидова расстояния для сравнения сигнальных созвездий разных типов и порядков, M – размер (порядок) используемого сигнального созвездия, E_s – средняя по созвездию энергия символа:

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left| C^{(r)} \right|^2. \tag{1.19}$$

Например, для обычных сигналов на основе созвездия ФМ-2, при формировании которых используются ортогональные при сдвиге на kT импульсы, квадрат свободного евклидова расстояния равен 2.

Впервые идея преодоления «барьера Найквиста» при использовании неортогональных сигналов вида (1.17) была высказана Мазо [16]. Им было показано, что при нарушении ортогональности импульсов ($\tau < 1$) для противоположных сигналов квадрат свободного евклидова не изменяется, а именно, остается равным 2, если значения коэффициента сближения τ выбираются из интервала [0,802, 1]. Такие результаты казались противоречащими «барьеру Найквиста» и говорили о возможности повышения скорости передачи символов в

1/0,802 ≈ 1,25 раза без потерь в помехоустойчивости. Позже аналогичные результаты были получены и для RRC-импульсов [15], широко используемых на практике.

На сегодняшний день различают понятия «предела Найквиста» и «предела Мазо». При фиксированной длительности тактового интервала T, «предел Найквиста» равен $1/T$ (или $1/(2T)$ для половины спектра) и имеет смысл минимальной полосы частот, при которой возможна ортогональность импульсов соседних тактовых интервалов; «предел Мазо» равен $0{,}802/T$ (или $0{,}401/T$) и имеет смысл минимальной полосы частот, при которой квадрат свободного евклидова расстояния равен значению, имеющему место при использовании ортогональных импульсов [3].

В общем случае, когда сигналы с управляемой МСИ получаются с помощью линейной фильтрации, импульсный отклик формирующего фильтра $a(t)$ может быть представлен в виде:

$$a(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \psi(t - pT), \tag{1.20}$$

где a_p – дискретные отсчёты импульса; $\psi(t)$ – интерполирующий импульс, для которого условие ортогональности при сдвиге на kT выполняется (рис. 1.6). Такое представление позволяет рассматривать форму импульса в общем виде, не ограничиваясь частными случаями $a_{\mathrm{sinc}}(t)$ или $a_{\mathrm{RRC}}(t)$, на основе которых, как правило, формируются FTN-сигналы.

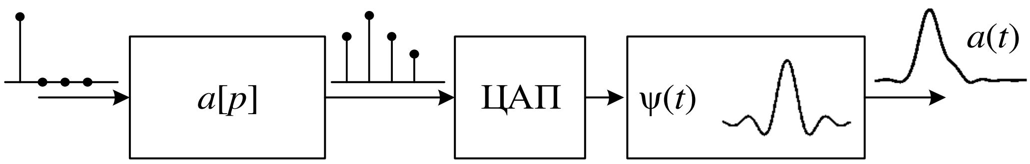

Рис. 1.6. Модель импульса для формирования сигналов с частичным откликом

Формирование сигнала с характеристиками на «пределе Найквиста» подразумевает использование нефинитного импульса $a_{\mathrm{sinc}}(t)$. Однако, практическая реализация такого идеального формирующего фильтра невозможна. В связи с этим, были предложены некоторые виды импульсов, реализуемые с достаточной степенью приближения, спектр которых занимает полосу частот, соответствующую «пределу». Рассмотрим примеры таких импульсов, которые могут быть использованы для формирования сигнала с управляемой МСИ, полагая что в качестве интерполирующего импульса используется $a_{\mathrm{sinc}}(t)$.

Например, если вводимая интерференция распространяется только на один соседний тактовый интервал, а импульс задается дискретными отсчётами:

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0,\ 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

то такой импульс называют дуобинарным. Спектр дуобинарного импульса имеет вид:

$$F_a(f) = \begin{cases} 2T\exp(-j\pi fT)\cos\pi fT, & |f| < \dfrac{1}{2T}; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Модифицированный дуобинарный импульс задается дискретными отсчетами:

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = -1, \\ -1, & k = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

спектр такого импульса равен:

$$F_a(f) = \begin{cases} 2jT\sin 2\pi fT, & |f| < \dfrac{1}{2T}; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Амплитудные спектры данных импульсов спадают к границам полосы частот, а в случае модифицированного дуобинарного импульса спектр не содержит постоянной составляющей (рис. 1.7). Другие примеры импульсов для формирования сигналов с частичным откликом приведены в [14].

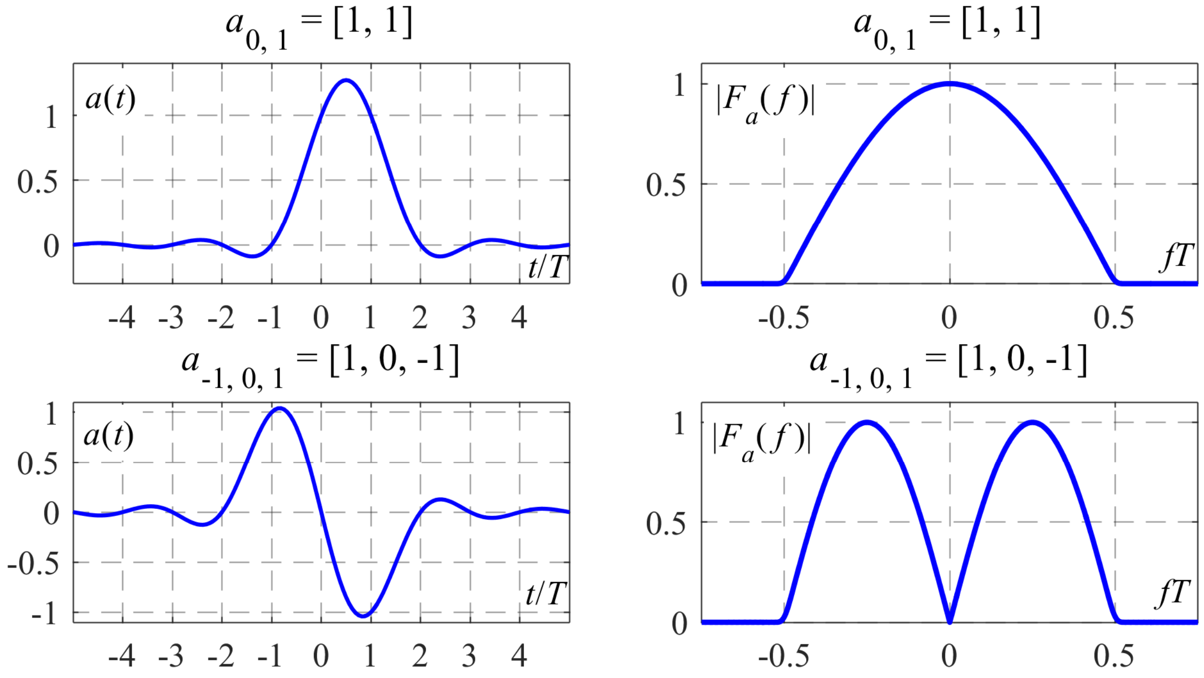

Рис. 1.7.Дубинарный и модифицированный дуобинарный импульсы, спектры импульсов

1.4. Синтез оптимальных сигналов с частичным откликом

Наиболее интересные результаты для сигналов с частичным откликом удается получить при использовании оптимальных импульсов. В данном разделе рассмотрим методику синтеза оптимальных импульсов, предложенную Саидом и Андерсоном [20]. Использование оптимальных импульсов при формировании сигналов с управляемой МСИ рассматривается авторами как способ помехоустойчивого кодирования, но в области сигналов. Для выбираемого за «барьером Найквиста» значения полосы частот, предлагается синтез оптимального импульса при использовании критерия максимального свободного евклидова расстояния для нужного типа сигнального созвездия и при выбранной «глубине» МСИ – количестве дискретных отсчётов импульса. В результате, сигнал с управляемой МСИ занимает выбранную полосу частот, вычисленную по критерию 99%-й концентрации энергии, и обеспечивает хорошую помехоустойчивость в канале с АБГШ. Такой способ «кодирования» актуален для спектрально-эффективных сигналов и может быть рассмотрен как аналог решётчатой кодированной модуляции, рассматриваемой в главе 2.

Пусть искомый импульс $a(t)$ представлен набором из L дискретных отсчётов:

$$a(t)=\sum_{p=0}^{L-1} a_p \psi(t-pT), \tag{1.21}$$

а интерполирующий импульс совпадает с $a_{\mathrm{sinc}}(t)$, т.е. имеет спектр в виде идеального прямоугольника, обладает свойством ортогональности при сдвиге на kT и имеет единичную энергию. Тогда значения АКФ импульса в отсчётные моменты времени kT определяются набором отсчётов импульса:

$$g_a[k]=\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)a(\tau-kT)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{p_1=0}^{L-1} a_{p_1}\psi(\tau-p_1T)\right)\left(\sum_{p_2=0}^{L-1} a_{p2}\psi(\tau-p_2T-kT)\right)d\tau=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{L-1}\sum_{p_2=0}^{L-1} a_{p_1}a_{p2}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\tau-p_1T)\psi(\tau-p_2T-kT)d\tau=\begin{cases}\sum\limits_{p=0}^{L-k-1} a_{p+k}a_p, & k\ge 0,\\ \sum\limits_{p=0}^{L+k-1} a_{p-k}a_p, & k<0.\end{cases} \tag{1.22}$$

Полагая, что модуляционные символы выбираются независимо друг от друга из симметричного сигнального созвездия с равными вероятностями, можно показать, что энергетический спектр сигнала с импульсом $a(t)$, модулированного случайной последовательностью символов, равен[2]:

$$G(f)=\frac{E_{\mathrm{s}}}{T}\left|F_a(f)\right|^2, \tag{1.23}$$

где E_{s} – средняя по созвездию энергия символа, $F_a(f)$ – преобразование Фурье от импульса $a(t)$. Тогда, при условии, что импульс имеет единичную энергию:

$$E_a=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F_a(f)\right|^2 df=g_a[0]=1, \tag{1.24}$$

величина концентрации энергии в полосе W может быть записана в виде:

$$BEC(W)=\int_{-W/2}^{W/2}\left|F_a(f)\right|^2 df\,. \tag{1.25}$$

[2] Подробные выкладки по вычислению энергетического спектра будут приведены в разд. 3.2

В рассматриваемом подходе производится оценка полосы частот, занимаемой спектром импульса, по критерию 99%-й концентрации энергии, т.е. считается, что импульс занимает полосу $W_{99\%}$, если для такой полосы $BEC(W_{99\%}) = 0{,}99$.

Для сигналов $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$, соответствующих последовательностям символов $\mathbf{C}_{(1)}$, $\mathbf{C}_{(2)}$, введём понятие сигнала ошибки:

$$e(t) = \sqrt{\frac{\log_2 M}{2E_s}}\left(y_{(1)}(t) - y_{(2)}(t)\right) = \sqrt{\frac{\log_2 M}{2E_s}}\sum_{k=0}^{L-1}\left(C_{(1),k} - C_{(2),k}\right)a(t-kT) =$$

$$= \sum_{k=0}^{L-1}\xi_k a(t-kT),$$

где ξ_k – нормированные ошибки (табл. 1.1):

$$\xi_k = \sqrt{\frac{\log_2 M}{2E_s}}\left(C_{(1),k} - C_{(2),k}\right), \quad k = 0,\ldots,L-1.$$

Преобразуем выражение для сигнала ошибки с учетом того, что импульс описывается своими дискретными отсчётами:

$$e(t) = \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{p=0}^{L-1}\xi_k a_p \psi\left(t-(k+p)T\right).$$

С учётом замены

$$m = k + p, \quad p = m - k,$$

получим

$$e(t) = \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{m=k}^{L+k-1}\xi_k a_{m-k}\psi(t-mT).$$

Считая, что для индексов за пределами интервала $[0, \ldots, L-1]$ дискретные отсчёты импульса равны нулю, сигнал ошибки может быть записан в виде:

$$e(t) = \sum_{m=0}^{2L-2}\sum_{k=0}^{L-1}\xi_k a_{m-k}\psi(t-mT) = \sum_{m=0}^{2L-2} e_m \psi(t-mT),$$

где e_m – отсчёты сигнала ошибки, получаемые в результате дискретной свёртки:

$$e_m = \sum_{k=0}^{L-1}\xi_k a_{m-k}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2L-2. \tag{1.26}$$

Для сигналов $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ может быть вычислен квадрат евклидова расстояния (1.18) как энергия сигнала ошибки:

$$d^2(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e(t) \right|^2 dt ,$$

и с учетом разложения $e(t)$ в ортонормированном базисе $\{\psi(t - mT)\}$:

$$d^2(e) = \sum_{k=0}^{2L-2} \left| e_k \right|^2 .$$

Таблица 1.1. Возможные значения нормированных ошибок для ФМ-2, ФАМ-4

Созвездие	Символы $\left\{C^{(r)}\right\}_{r=1}^{M}$	$d^2_{\text{св}}$	Нормированные ошибки $\{\xi\}$
ФМ-2	$\{-1, +1\}$	2	$\left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$
ФАМ-4	$\{-3, -1, +1, +3\}$	0,8	$\left\{0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right\}$

С другой стороны, известно, что АКФ любого сигнала при нулевом аргументе численно равна энергии этого сигнала, значит для квадрата евклидова расстояния также справедливо:

$$d^2(e) = g_e[0].$$

Учитывая, что последовательность отсчётов сигнала ошибки – это результат дискретной свёртки (1.26), значения АКФ сигнала ошибки в отсчётные моменты времени – это свёртка АКФ последовательности нормированных ошибок g_ξ и АКФ отсчётов импульса g_a:

$$g_e = g_\xi * g_a ,$$

а при нулевом сдвиге значение $g_e[0]$ записывается в виде скалярного произведения:

$$d^2(e) = g_e[0] = \sum_{k=-L+1}^{L-1} g_\xi^*[k] g_a[k] = g_\xi[0] g_a[0] + 2\sum_{k=1}^{L-1} \text{Re}\left\{ g_\xi^*[k] g_a[k] \right\}, \quad (1.27)$$

где «Re» – взятие вещественной части, а «*» – комплексное сопряжение.

Величина концентрации энергии (1.25) в полосе W может быть рассмотрена как энергия сигнала на выходе фильтра с прямоугольной характеристикой шириной W, при условии, что на вход фильтра поступает импульс $a(t)$. Учитывая, что процедура линейной фильтрации во временной области сводится к свёртке сигнала с ИХ фильтра, для энергии сигнала на выходе фильтра могут быть повторены изложенные выше рассуждения, а концентрация энергии в полосе W может быть представлена в виде скалярного произведения:

$$BEC(W) = \sum_{k=-L+1}^{L-1} h_W[k] g_a[k], \tag{1.28}$$

где $h_W[k]$ – обратное дискретно-временное преобразование Фурье от идеальной прямоугольной характеристики шириной W:

$$h_W[k] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi k W T)}{\pi k}, & k \neq 0; \\ WT, & k = 0. \end{cases}$$

Таким образом, возможна постановка и решение линейной оптимизационной задачи для нахождения оптимальной АКФ импульса $g_a[k]$, обеспечивающей максимально возможное свободное евклидово расстояние для выбранного типа сигнального созвездия, фиксированной полосы частот $W_{99\%}$ и количества дискретных отсчётов импульса L. Приведём формулировку такой оптимизационной задачи в виде основной задачи линейного программирования [33]:

$$d_{\text{св}}^2(W) = \max_{x,\, g_a} x, \tag{1.29}$$

ограничения:

$$\sum_{k=-L+1}^{L-1} g_\xi^*[k] g_a[k] \geq x \text{ для всех возможных } g_\xi, \tag{а}$$

$$g_a[0] = 1, \tag{б}$$

$$\sum_{k=-L+1}^{L-1} h_W[k] g_a[k] = 0{,}99, \tag{в}$$

$$\sum_{k=-L+1}^{L-1} g_a[k] \exp(-j2\pi k f T) \geq 0 \text{ для всех } f \in [0,1), \tag{г}$$

где в наборе условий (*а*) должны быть учтены все возможные комбинации L-элементных наборов нормированных ошибок $\left(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{L-1}\right)$. В данной формулировке набор условий (*а*) гарантирует, что x соответствует квадрату именно свободного евклидова расстояния, учитывая все возможные комбинации ошибочных символов на L позициях; условие (*б*) обеспечивает единичную энергию импульса, как это было сделано в (1.24); условие (*в*) требует концентрации 99% энергии импульса в выбранной полосе; а набор условий (*г*) обеспечивает возможность существования такого импульса. Как можно видеть, набор условий (*г*) представляет собой преобразование Фурье от АКФ импульса, которое, как известно, является энергетическим спектром импульса и не должно принимать отрицательные значения.

Отметим, что при численном решении такой оптимизационной задачи проверка условий (*г*) невозможна для всех точек на непрерывном интервале $f \in [0, 1)$ и выполняется для конечного набора точек, выбранных из этого интервала с равномерным шагом. Кроме того, уже при небольших значениях L количество условий (*а*) становится большим (табл. 1.2).

Таблица 1.2. Количество условий (*а*) в оптимизационной задаче нахождения АКФ импульса

Кол-во отсчётов импульса / Размер созвездия	$L = 5$	$L = 7$	$L = 9$
$M = 2$	162	1458	13122
$M = 4$	14406	~700 тыс.	~35 млн.

При большом количестве ограничений нахождение оптимальной АКФ возможно в результате многократного решения упрощенной оптимизационной задачи, содержащей уменьшенное количество ограничений (*а*). А именно, следует использовать следующий алгоритм решения:

1) выбрать приемлемое количество ограничений (*а*), получить оптимальную АКФ и максимальное свободное евклидово расстояние для выбранного подмножества последовательностей ошибок (обозначим подмножество как ε');

2) для полученной АКФ рассчитать свободное евклидово расстояние на всём множестве последовательностей ошибок;
3) сравнить полученное значение с результатом оптимизации в шаге 1);
4) если эти значения совпали, то считать полученную АКФ оптимальной для полного набора ограничений; в противном случае последовательность нормированных ошибок, для которой евклидово расстояние оказалось меньше, включить в подмножество ε', заново провести оптимизацию с шага 1).

На рис. 1.8 представлены характеристики полученных оптимальных импульсов для созвездий ФМ-2 и ФАМ-4. Потери в свободном евклидовом расстоянии (Free Distance Losses, FDL) рассчитаны относительно значений, которые имеют место при использовании ортогональных импульсов (табл. 1.1). Были выбраны значения $L = 9$ для созвездия ФМ-2 и $L = 5$ для ФАМ-4 так как в этом случае алгоритмы приёма будут осуществлять обработку решёток, содержащих одинаковое количество состояний, равное 256, и, следовательно, будут иметь примерно одинаковую сложность. Как можно видеть из представленного рисунка, при использовании сигналов с частичным откликом есть возможность уменьшения нормированной полосы частот до значения 0,75 без потерь в свободном евклидовом расстоянии для созвездия ФМ-2. При уменьшении количества дискретных отсчётов импульса L можно получить то же значение нормированной полосы частот, но при б*о*льших потерях в свободном евклидовом расстоянии. Также при переходе к созвездию с б*о*льшей размерностью потери в свободном евклидовом расстоянии увеличиваются.

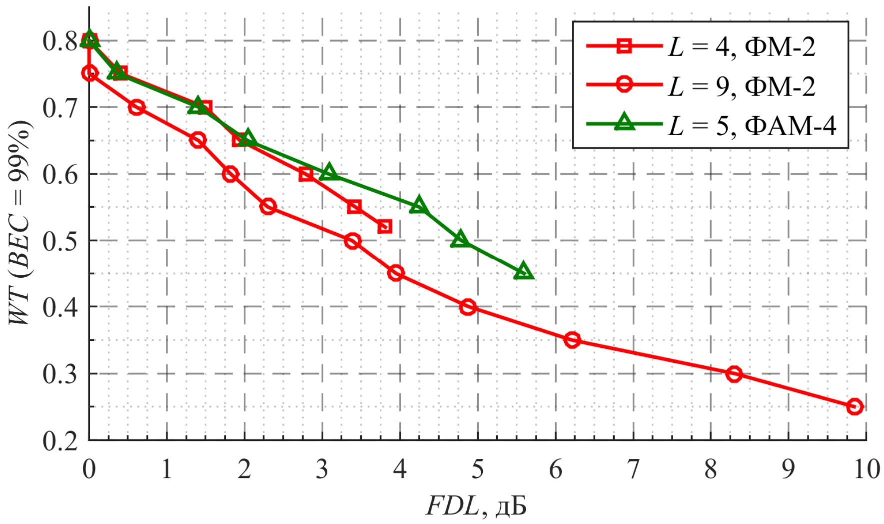

Рис. 1.8. Параметры оптимальных импульсов

Преимуществом описываемого подхода к поиску оптимальных импульсов для сигналов с частичным откликом, безусловно, является то, что оптимизационная задача линейная, что упрощает алгоритм поиска решения и, в случае сходимости, гарантирует, что полученное решение действительно является оптимальным. Однако, одной и той же АКФ могут соответствовать несколько импульсов, и особое внимание нужно уделить процедуре восстановления отсчётов импульса из его АКФ.

Восстановление отсчётов импульса производится при анализе корней полинома, соответствующего z-преобразованию полученной АКФ:

$$G_Z(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_a[k] z^{-k} . \tag{1.30}$$

С учётом свойства симметрии АКФ любого сигнала:

$$g_a[k] = g_a^*[-k],$$

для полинома, который является z-преобразованием от АКФ, справедливо:

$$G_Z(z) = G_Z(1/z^*).$$

Значит, если какое-либо комплексное число z_0 является корнем полинома $G_Z(z)$, то также корнем полинома является и число $1/z_0^*$, а для самого полинома возможна факторизация:

$$G_Z(z) = A_Z(z) A_Z(1/z^*), \tag{1.31}$$

где $A_Z(z)$ – полином, соответствующий z-преобразованию от последовательности дискретных отсчётов импульса. В описываемом подходе для определенности производится восстановление импульса, которому соответствует так называемый полином с минимальной фазой. Данный полином получается при выборе корней полинома $G_Z(z)$, лежащих внутри окружности единичного радиуса на комплексной плоскости. Примеры импульсов, восстановленных из оптимальных АКФ для созвездия ФМ-2, и соответствующих энергетических спектров представлены на рис. 1.9.

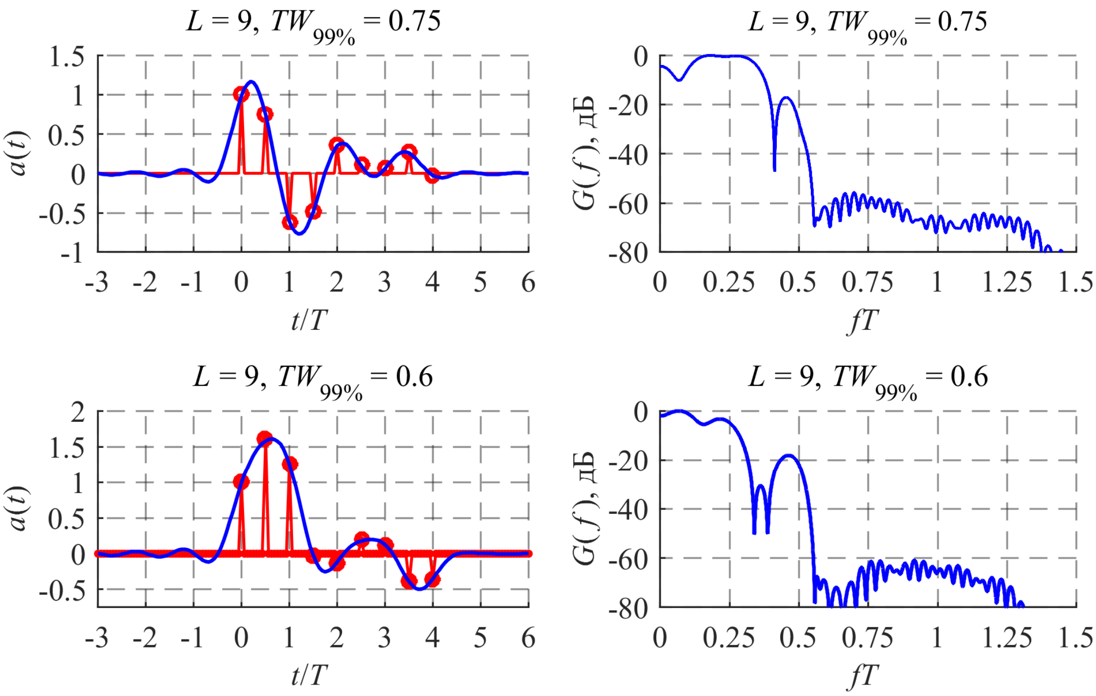

Рис. 1.9. Примеры оптимальных импульсов для созвездия ФМ-2

На рис. 1.10 представлены характеристики оптимальных для созвездия ФМ-2 импульсов с 8-ю и 16-ю отсчётами импульсной характеристики и RRC-импульсов со значениями коэффициента сглаживания α = 0 и α = 0,2, используемых для формирования FTN-сигналов также с созвездием ФМ-2. Сигналы с частичным откликом и FTN-сигналы могут быть эквивалентными с точки зрения спектральной эффективности: в первом случае ограничивается полоса частот за счёт формы импульса, а во втором случае увеличивается скорость следования импульсов в $1/\tau$ раз относительно стандартной величины $1/T$, при которой обеспечивается ортогональность импульсов на соседних тактовых интервалах. Как можно видеть, при фиксированной величине нормированной полосы частот потери в свободном евклидовом расстоянии оказываются меньше в случае оптимальных сигналов с частичным откликом, их энергетический выигрыш относительно FTN-сигналов составляет до 0,6 дБ в случае $L = 8$ и до 1,4 дБ для $L = 16$. При этом в случае сигналов с частичным откликом МСИ распространяется только на L тактовых интервалов, а в случае «сближенных» RRC-импульсов глубина МСИ бесконечна.

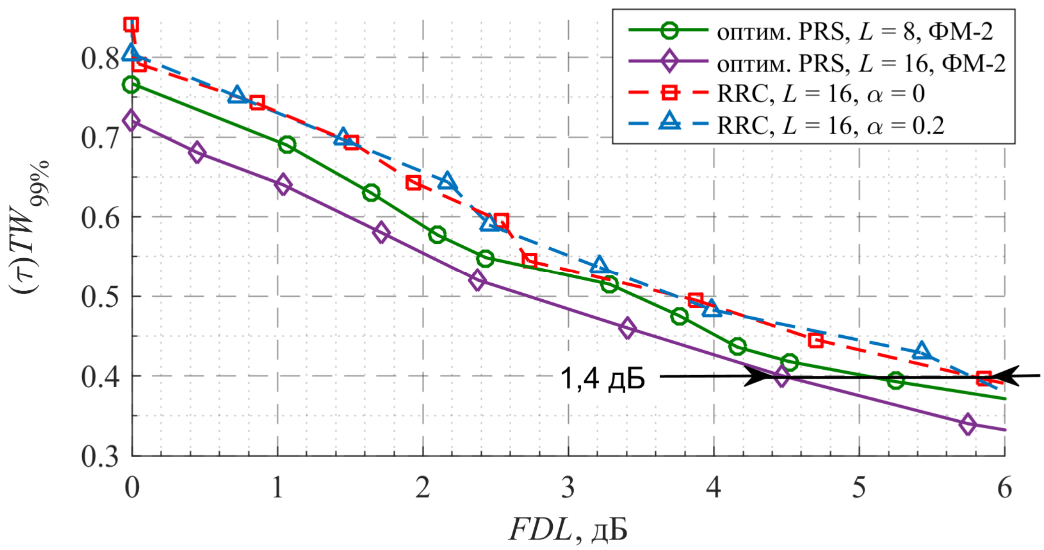

Рис. 1.10. Характеристики оптимальных импульсов для созвездия ФМ-2 и RRC-импульсов, используемых для формирования FTN-сигналов

1.5. Алгоритмы приёма сигналов с частичным откликом

Рассмотрим алгоритмы приёма сигналов с управляемой МСИ. Если используемый импульс $a(t)$ не обладает свойством ортогональности при сдвиге на kT и представлен в соответствии с выражением (1.21), то результирующий сигнал, осуществляющий перенос N последовательных символов

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k a(t - kT)$$

может быть записан в виде

$$y(t)=\sum_{k=0}^{N+L-2} y_k \psi(t-kT), \tag{1.32}$$

где последовательность отсчётов y_k – результат дискретной свёртки последовательности передаваемых символов и дискретных отсчётов импульса:

$$y_k=\sum_{p=0}^{N-1} C_p a_{k-p},\ k=0,1,...,L+N-2, \tag{1.33}$$

где отсчёты импульса с номерами вне диапазона [0, L – 1] считаются нулевыми.

Будем считать, что на приёмной стороне осуществляется дискретизация принятого сигнала с периодом T на выходе фильтра, согласованного с интерполирующим импульсом. Такой подход позволяет получить последовательность значений r_k:

$$r_k = y_k + n_k, \tag{1.34}$$

где шумовая добавка n_k – результат скалярного произведения реализации белого гауссовского шума $n(t)$ и ИХ согласованного фильтра:

$$n_k=\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)\psi(-t+kT)dt. \tag{1.35}$$

Учитывая свойство ортогональности при сдвиге на kT, присущее интерполирующему импульсу $\psi(t)$, а также его единичную энергию, возможно показать, что отсчёты шума n_k имеют гауссовское распределение с дисперсией $N_0/2$ и независимы [28].

Алгоритм Витерби

При наличии в сигнале МСИ посимвольный приём не является оптимальным и уступает так называемому «приёму в целом». Поскольку сложность соответствующего алгоритма приёма экспоненциально растет с глубиной МСИ, его практическая реализация может оказаться невозможной. Алгоритм Витерби, впервые предложенный для декодирования свёрточных кодов [25], во многих случаях заметно упрощает процедуру «приёма в целом» и потому часто применяется для борьбы с МСИ [32].

При использовании импульса, заданного L дискретными отсчётами, каждый отсчёт r_k сигнала представляет собой линейную комбинацию переданного символа, соответствующего текущему тактовому интервалу, и L–1 предыдущих символов:

$$y_k = C_k a_0 + \sum_{p=1}^{L-1} C_{k-p} a_p \,. \tag{1.36}$$

Другими словами, в каждый момент времени kT отсчёт сигнала определяется передаваемым символом C_k, и вектором состояния, однозначно определяемого последовательностью предыдущих переданных символов (C_{k-1}, C_{k-2}, …, C_{k-L+1}). Таким образом, можно представить, что отсчёты сигнала y_k формируются на выходе устройства (кодера) с конечным числом состояний, а значение на выходе определяется решёткой кода. В общем случае, такая решётка содержит $N_{\mathrm{s}} = M^{L-1}$ состояний, и из каждого состояния выходят M рёбер в соседние, каждое из которых соответствует определённому значению символа C_k. Кроме того, каждому ребру в решётке, в зависимости от того, из какого состояния оно выходит и в какое ведёт, может быть поставлено в соответствие значение отсчёта сигнала y_k и набор бит, соответствующих передаваемому символу C_k.

Известно, что в случае канала с АБГШ, оценкой последовательности переданных символов по максимуму правдоподобия является последовательность, соответствующая минимуму евклидова расстояния:

$$\min_{\mathbf{y}\in Y} \sum_{k=0}^{N+L-2} \left| r_k - y_k \right|^2 ,$$

где Y – множество всех возможных последовательностей отсчётов сигнала, которые могли быть сформированы при передаче.

В общем случае необходимо было бы вычислять расстояния для всех возможных M^N последовательностей, однако использование алгоритма Витерби позволяет уменьшить число анализируемых последовательностей. Алгоритм Витерби является рекуррентным алгоритмом последовательного поиска пути на решётке, обеспечивающим декодирование сигнала по максимуму правдоподобия.

В процессе работы алгоритма Витерби, при приёме сигнала очередного тактового интервала для каждого пути, содержащегося в памяти приёмника, обновляеттся значение метрики – евклидова расстояния между последовательностью принятых отсчётов и последовательностью неискаженных отсчётов сигнала, соответствующей определённому пути. В общем случае, для каждого состояния существует M входящих путей. Один из таких путей, имеющий минимальную метрику, считается «выжившим» и сохраняется в памяти для последующего анализа, остальные пути удаляются. Таким образом, в памяти приёмника всегда содержится количество путей, равное количеству состояний. Пример работы алгоритма для случая двоичных сигналов ($M = 2$) и четырёх состояний решётки показан на рис. 1.11. В этом примере рёбра подписаны не символами двоичного сигнального созвездия, а битами, соответствующими этим символам.

Допустим, известно, что в начале процедуры формирования сигнала в решётке возможно только нулевое состояние. При анализе сигнала на первом тактовом интервале ($k = 0$) алгоритм предполагает два возможных пути, соответствующих передаче на этом интервале нуля или единицы, которые вызывают переходы в нулевое или второе состояния соответственно. На втором тактовом интервале ($k = 1$) рассматриваются уже четыре возможных пути, каждый из который приводит в одно из четырёх состояний. Начиная с третьего шага ($k = 2$) количество путей превышает количество состояний, и для каждого состояния будет формироваться только один выживший путь. В приведённом примере на третьем шаге выживший путь для нулевого состояния – путь, соответствующий передаче последовательности бит (0, 0, 0), для первого состояния выжившим считается путь (0, 1, 0), для второго состояния – путь (0, 0, 1), для третьего – путь (0, 1, 1).

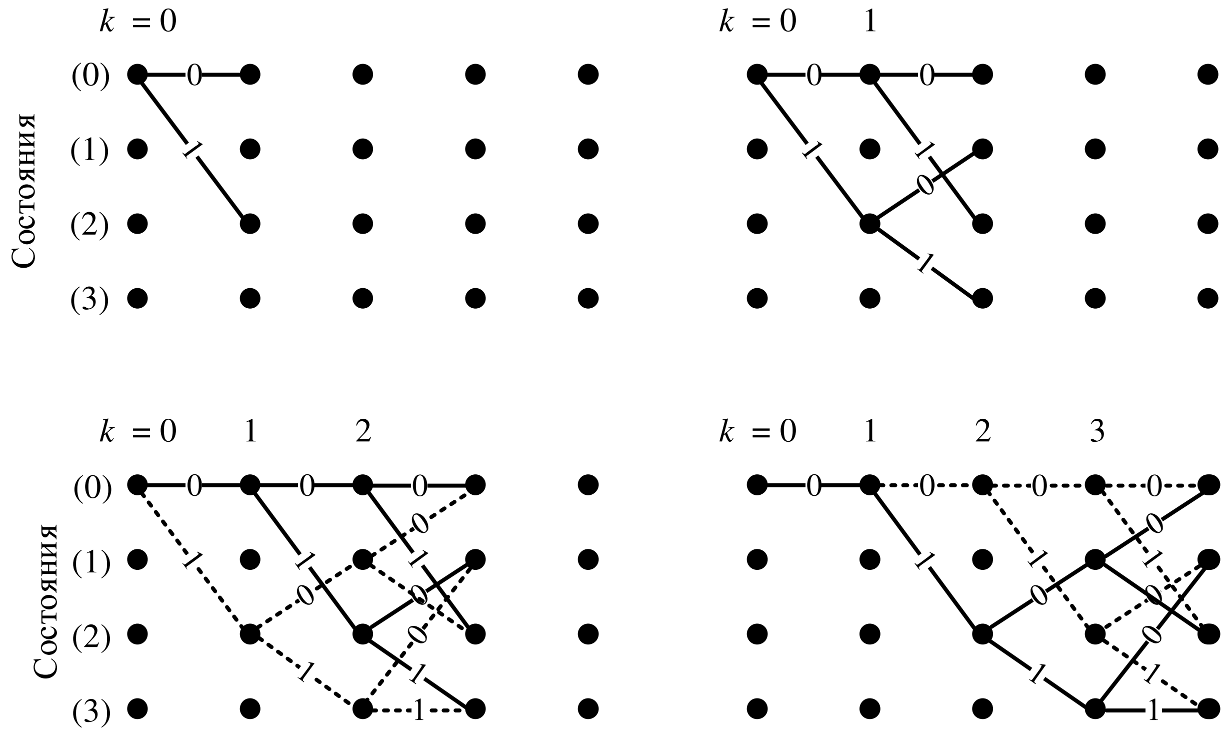

Рис. 1.11. Пример диаграммы переходов в решётке и «выживших» путей

После некоторого этапа декодирования, с большой вероятностью выжившие пути в памяти декодера будут начинаться из одного состояния или иметь одинаковые начальные фрагменты, проходящие через несколько состояний. Такие символы, описывающие общее начало выживших путей, могут быть отправлены на выход в качестве оценок символов, переданных на соответствующих предыдущих тактовых интервалах. Далее, с каждым новым тактовым интервалом, на выходе алгоритма будут формироваться новые оценки переданных символов, однако для всей последовательности оценок всегда будет присутствовать задержка.

Вычислительная сложность алгоритма Витерби растёт экспоненциально с глубиной МСИ в сигнале (с ростом количества отсчётов импульса L). В общем случае, на каждом тактовом интервале требуется вычисление MN_s метрик. Таким образом, уже при небольших значениях L для недвоичных созвездий ($M > 2$) практическая реализация алгоритма Витерби может привести к большим вычислительным затратам.

Алгоритм BCJR

Данный алгоритм, получивший своё название по первым буквам фамилий авторов, впервые был предложен в [6] для декодирования последовательностей, кодированных свёрточным кодом, по критерию максимума символьной (битовой) апостериорной вероятности.

Используя данный алгоритм, на каждом тактовом интервале возможно вычисление M апостериорных вероятностей:

$$P^{\text{APP}}\left(C_k^{(v)}\right) = P\left(C_k^{(v)} / r_k\right),\ v = 1,\ldots, M,\ k = 0,\ \ldots,\ N - 1. \tag{1.37}$$

Каждая апостериорная вероятность соответствует одному из M возможных передаваемых символов; каждый из M символов при передаче может вызвать только определённые переходы между состояниями в решётке. В соответствии с описываемым алгоритмом, каждая апостериорная вероятность вычисляется как сумма условных вероятностей соответствующих переходов, а каждая условная вероятность перехода вычисляется в соответствии с формулой:

$$P\left(s_k = i, s_{k+1} = j / r_k\right) = \frac{1}{P\left(r_k\right)} \alpha_{k-1}(i)\,\gamma_k(j,i)\,\beta_k(j), \tag{1.38}$$

где s_k, s_{k+1} – состояния кодера на тактовых интервалах с номерами k и $k + 1$, $\alpha_{k-1}(i)$ – метрика состояния i на интервале $k - 1$, вычисленная при прямом проходе по решётке, $\beta_k(j)$ – метрика состояния j на интервале k, вычисленная при обратном проходе по решётке, $\gamma_k(j, i)$ – метрика ветви, соответствующей переходу на k-м интервале из состояния i в состояние j, $P(r_k)$ – безусловная вероятность получения символа r_k на k-м тактовом интервале.

Метрики α и γ вычисляются при прямом проходе по решётке. А именно, для каждого состояния j метрики ветвей вычисляются следующим образом

$$\gamma_k(j,i) = P\left(s_{k+1} = j, r_k / s_k = i\right) = P\left(s_{k+1} = j / s_k = i\right) P\left(r_k / y_k\right), \quad i, j = 0 \ldots N_s - 1, \tag{1.39}$$

где N_s – количество состояний в решётке, вероятность $P(s_{k+1} = j / s_k = i)$ является априорной вероятностью передачи символа C_k, соответствующего переходу из состояния i в состояние j; $P(r_k / y_k)$ – условная вероятность приёма символа r_k при условии передачи символа y_k, который формирует кодер на интервале k при поступлении на вход модуляционного символа C_k. Другими словами, для каждого тактового интервала k должна быть заполнена квадратная матрица значений γ, количество строк в которой равно количеству столбцов и равно количеству возможных состояний в решётке. Элемент такой матрицы с индексом (i, j) будет отличен от нуля в том случае, если в рассматриваемой решётке из состояния i возможен переход в состояние j. Значения $P(r_k / y_k)$, также называемые вероятностями переходов в канале, в действительности заменяются значениями плотности вероятностей для гауссовского распределения:

$$r_k = y_k + n_k,\ n_k = r_k - y_k,$$

$$P\left(r_k / y_k\right) = P\left(n_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left|n_k\right|^2}{2\sigma^2}\right), \tag{1.40}$$

где n_k – отсчёт, а σ^2 – дисперсия дискретного белого гауссовского шума, добавляемого в канале.

Метрики состояний α вычисляются для каждого состояния j следующим образом:

$$\alpha_k\left(j\right) = \sum_m \alpha_{k-1}\left(m\right)\gamma_k\left(j,m\right),\ j = 0,\ \ldots,\ N_\text{s} - 1,\ k = 0,\ 1,\ \ldots.,\ N - 1, \tag{1.41}$$

где суммирование производится по всем таким состояниям m, из которых возможен переход в состояние j. Если в начале процедуры формирования сигнала возможно только нулевое состояние, то при инициализации прямого прохода задаются начальные значения метрик α:

$$\alpha_0\left(0\right) = 1,\ \alpha_0\left(1\right) = 0,\ \alpha_0\left(2\right) = 0,\ \ldots,\ \alpha_0\left(N_s - 1\right) = 0,$$

где N_s – количество состояний в решётке.

После вычисления метрик α для каждого тактового интервала, производится обратный проход, в результате которого вычисляются метрики β для каждого состояния j:

$$\beta_k(j)=\sum_m \beta_{k+1}(m)\gamma_{k+1}(m,j),\ j=0,\ \ldots,\ N_\mathrm{s}-1,\ k=N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 1, \quad (1.42)$$

где суммирование проводится по всем состояниям m, в которые возможен переход из состояния j.

При обратном проходе алгоритма, после вычисления метрик β для каждого состояния, могут быть вычислены условные вероятности переходов (1.38) и апостериорные вероятности символов (1.37). Отметим, что вычисление условных вероятностей переходов в соответствии с (1.38) производится с точностью до множителя $1/P(r_k)$, который остаётся неизвестным. Однако, после вычисления всех апостериорных вероятностей производится их нормировка, так чтобы для каждого тактового интервала k сумма вероятностей $P^{\mathrm{APP}}(C_k)$ по всем возможным значениям C_k была равна единице. Таким образом, знание вероятности $P(r_k)$ не требуется для правильной работы алгоритма.

По окончании этапа обратного прохода возможно формирование жёстких решений о переданных символах:

$$\hat{C}_k=\arg\max_{C_k} P^{\mathrm{APP}}(C_k),\ k=0,1,\ldots N-1. \quad (1.43)$$

Для примера, на рис. 1.12 представлены кривые помехоустойчивости сигналов с управляемой МСИ с оптимальными импульсами, полученными по методике, описанной в разд. 1.5. Для всех рассмотренных сигналов использовалось сигнальное созвездие КАМ-4 $\{1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$ с отображением бит на точки созвездия в соответствии с кодом Грэя. По оси X отложены значения отношения сигнал/шум в виде отношения энергии E_b, затрачиваемой на передачу одного бита, к спектральной плотности средней мощности белого гауссовского шума N_0. По оси Y отложены значения вероятности ошибочного приёма одного бита (Bit Error Rate, BER). Для кривых приведены доверительные интервалы[3],

[3] Здесь и далее на кривых помехоустойчивости будем указывать доверительные интервалы для экспериментальных точек, соответствующих минимальным значениям вероятности ошибки, так как для качественной оценки таких значений вероятности требуется выборка наибольшего размера. Для всех точек на экспериментальных кривых размер выборки считался достаточным, если ширина приближенного доверительного интервала оказывалась меньше 0,25 полученной оценки вероятности. Таким образом, с учётом логарифмического масштаба,

соответствующие доверительной вероятности 0,95. Как можно видеть, алгоритм Витерби и алгоритм BCJR обеспечивают примерно одинаковое качество приёма. Однако алгоритм BCJR оказывается вычислительно более сложным, так как осуществляет двойной проход по решётке.

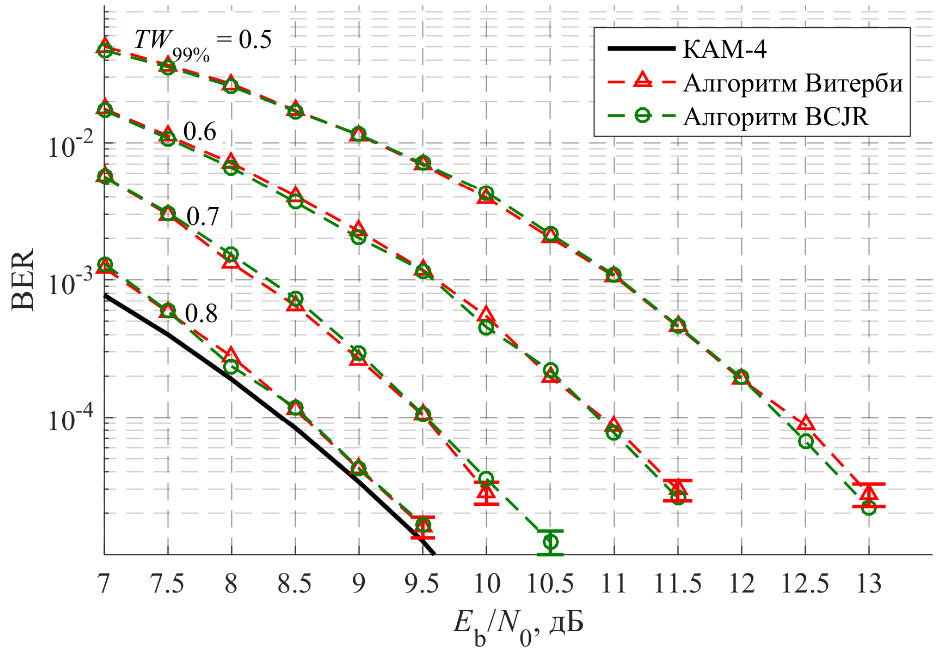

Рис. 1.12. Помехоустойчивость приёма сигналов с управляемой МСИ ($L = 9$)

Цель и задачи работы

Как было показано, введение МСИ позволяет существенно сократить ширину полосы частот, требуемую для передачи сигнала, однако при этом возрастают удельные энергетические затраты, при которых обеспечивается нужная вероятность битовой ошибки. Для компенсации энергетических потерь при приёме, вызванных введением управляемой МСИ, необходимо использование помехоустойчивых кодов в комбинации с такими сигналами. В [15] описан подход, позволяющий повысить значение свободного евклидова расстояния за счёт введения перед модулятором такого кодера, который исключит возможность появ-

указанная ширина доверительного интервала оказывается справедливой и для других экспериментальных точек.

ления малых значений евклидова расстояния. Таким образом, свободное евклидово расстояние увеличится и помехоустойчивость приёма улучшится. Однако у такого подхода есть существенные недостатки. Во-первых, для каждого отдельного варианта введения МСИ, т.е. для каждого импульса, необходимо синтезировать новый кодер. Во-вторых, ошибки с выхода демодулятора сигналов с МСИ имеют свойство группироваться, и с точки зрения декодера в канале появляется память, что существенно ухудшает качество декодирования.

На практике широкое распространение получил другой подход, который состоит во введении блока перемежителя между кодером и модулятором в передатчике, и деперемежителя между демодулятором и декодером в приёмнике. Такой подход позволяет скомпенсировать взаимное влияние между ансамблем кодовых слов и ансамблем сигналов. В этом случае один и тот же код может быть использован для разных импульсов, и во всех случаях сохраняется энергетический выигрыш от кодирования. Кроме того, при наличии перемежителя возможно реализовать итеративную схему приёма (турбо эквалайзер) [10], позволяющую улучшить качество приёма.

Целью работы является снижение энергетических потерь при высоких удельных скоростях передачи сообщений, которое достигается путём использования сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и оптимальных сигналов с управляемой межсимвольной интерференцией и регулируемым значением пик-фактора.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Разработка методики синтеза финитных импульсов, входящих в состав сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и обеспечивающих минимальную ширину полосы частот, содержащую заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на величину пик-фактора сигнала и уровень МСИ, определяемый максимальным значением коэффициента групповой корреляции либо значением свободного евклидова расстояния.

2. Оптимизация формы импульса для формирования сигнала в условиях ограниченной полосы частот с дополнительным ограничением уровня МСИ или пик-фактора сигнала, что должно позволить уменьшить энергетические потери.

3. Разработка структурной схемы модема для сигнально-кодовых конструкций на основе решётчатых кодов и сигналов с управляемой МСИ.

4. Разработка имитационной модели для оценки помехоустойчивости рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций.

5. Проведение имитационного эксперимента приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ с целью оценки характеристик помехоустойчивости сигнально-кодовых конструкций в канале с аддитивным белым гауссовским шумом.

Глава 2. Методы кодирования для спектрально-эффективных систем передачи данных

Как известно, одним из способов повышения спектральной эффективности является увеличение размерности используемого сигнального созвездия. Однако, при этом быстро увеличиваются удельные энергетические затраты, необходимые для обеспечения заданного уровня вероятности битовой ошибки. Традиционно, для нивелирования этого эффекта используются различные помехоустойчивые коды, которые, в свою очередь, за счёт вводимой избыточности приводят к увеличению удельных спектральных затрат. Однако, для систем, эффективно использующих полосу частот, такое снижение спектральной эффективности нежелательно. Для таких случаев предложены схемы помехоустойчивого кодирования, которые способны обеспечить энергетический выигрыш без потерь в спектральной эффективности; при этом потери в скорости передачи данных, связанные с введением избыточности, компенсируются переходом к созвездию с большей размерностью. В данной главе рассмотрены два вида таких схем: решётчатая кодированная модуляция (РКМ) и параллельная (турбо) решётчатая кодированная модуляция (ТРКМ), приведены новые результаты по расчёту кривых помехоустойчивости для схем РКМ и ТРКМ, обеспечивающих значения спектральной эффективности от 3 до 5 бит/(с·Гц).

2.1. Решётчатая кодированная модуляция

В случае РКМ вводимая избыточность всегда компенсируется переходом к созвездию с б*о*льшей размерностью. В примере схемы РКМ, представленном на рис. 2.1, осуществляется передача двух информационных бит за тактовый интервал при использовании созвездия ФМ-8 [21].

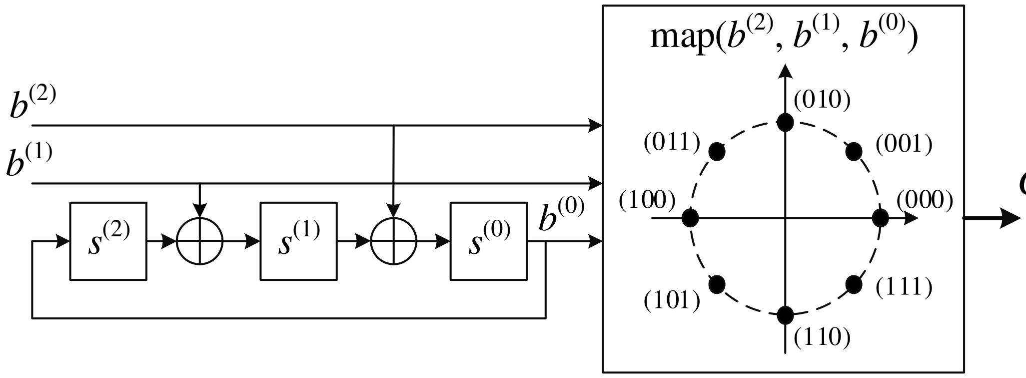

Рис. 2.1. Пример РКМ для созвездия ФМ-8

Основными элементами данной схемы являются регистр сдвига с обратной связью (конечный автомат с восемью состояниями), а также функция отображения бит на точки сигнального созвездия map( ). Такой кодер может быть описан решёткой с восемью состояниями, номер состояния определяется битами $s^{(2)}$, $s^{(1)}$, $s^{(0)}$, записанными в регистр сдвига; для каждого состояния возможны 4 исходящих и 4 входящих ветви, каждая из которых соответствует определённой комбинации информационных бит $B = (b^{(2)}, b^{(1)})$, поступающих на вход кодера. Кроме того, каждая ветвь в решётке может быть сопоставлена с определённой комбинацией выходных бит $b^{(2)}$, $b^{(1)}$, $b^{(0)}$, или с комплексным символом C из созвездия ФМ-8. В связи с этим и используется термин «кодированная модуляция», так как на выходе кодера сразу формируется последовательность модуляционных символов.

С одной стороны, величина минимального евклидова расстояния между символами созвездия ФМ-8 меньше, чем для созвездия ФМ-4, и возможность получения какого-либо энергетического выигрыша при использовании такой схемы кодированной модуляции кажется странной. Однако, «хороший» алгоритм приёма должен учитывать структуру кода (зависимость соседних модуляционных символов друг от друга) и осуществлять приём «в целом» всей последовательности. Такой алгоритм приёма принимает решение в пользу того или иного пути в диаграмме переходов в решётке, и при этом вероятность ошибочного приёма определяется минимальным евклидовым расстоянием между последовательностями символов, соответствующими возможным путям, т.е. свободным евклидовым расстоянием.

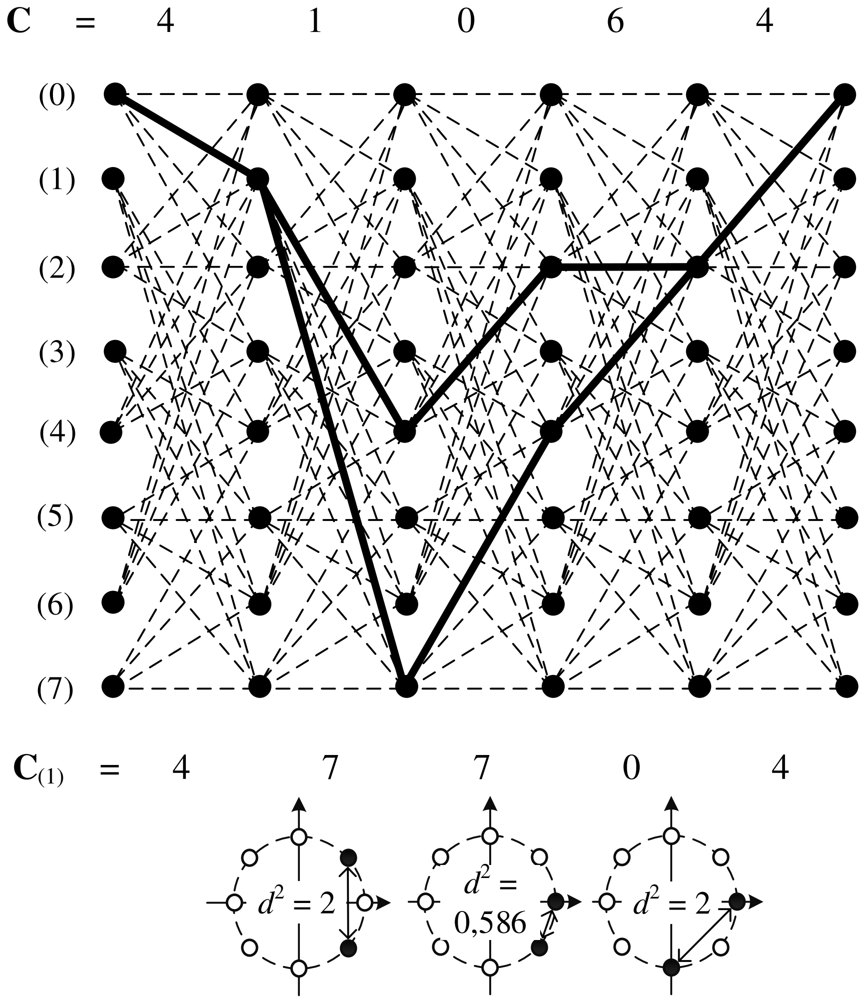

Рис. 2.2. К вычислению свободного евклидова расстояния для схемы кодированной модуляции

На рис. 2.2 представлен пример вычисления свободного евклидова расстояния для схемы РКМ из рис. 2.1. Состояния и модуляционные символы обозначены десятичными числами, соответствующими наборам бит $s^{(2)}$, $s^{(1)}$, $s^{(0)}$ и $b^{(2)}$, $b^{(1)}$, $b^{(0)}$. В этом примере рассматриваются два пути, отличающиеся в трёх символах. Тогда квадрат евклидова расстояния между соответствующими сигналами равен сумме трёх значений – квадратов расстояний для отдельных символов:

$$D_{(1)}^2 = \left(2 + 0{,}586 + 2\right) E_\mathrm{s} = 4{,}586 E_\mathrm{s}\,,\ d_{(1)}^2 = D_{(1)}^2 / E_\mathrm{s} = 4{,}586\,,$$

где E_s – средняя по созвездию энергия символа[4]. В действительности, для рассматриваемой схемы РКМ, такие пути соответствуют паре сигналов с минимальным евклидовым расстоянием. Таким образом, при использовании этой схемы кодирования возможен энергетический выигрыш до 3,6 дБ по сравнению с передачей данных без кодирования с использованием созвездия ФМ-4, для которого квадрат минимального евклидова расстояния равен 2. Такую оценку энергетического выигрыша принято называть асимптотическим выигрышем от кодирования [27], который может быть достигнут при вероятности битовой ошибки, стремящейся к нулю.

При оценке возможных энергетических выигрышей схем кодированной модуляции рассматривают ошибочные пути, отличающиеся в нескольких символах от правильного; при этом считают, что любой ошибочный путь в какой-то момент времени расходится, а позже сливается с правильным. Тогда, возможно увеличить свободное евклидово расстояние для рассматриваемой схемы, если особым образом организовать отображение кодированных бит на символы сигнального созвездия. Пусть множество символов из используемого сигнального созвездия разбито на подмножества таким образом, что каждое подмножество имеет увеличенное минимальное евклидово расстояние между символами. Например, рассмотренное множество (созвездие) символов ФМ-8 может быть разбито на два подмножества вида ФМ-4 (рис. 2.3). При отображении бит на точки сигнального созвездия проверочный бит $b^{(0)}$ определяет, какое из подмножеств $\mathbf{B}_1$ или $\mathbf{B}_2$ будет использовано, а информационные биты $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ определяют один из четырех символов внутри подмножества. Тогда, в решётке кода ветвям, выходящим из одного и того же состояния, будут назначаться символы из одного подмножества вида ФМ-4; это свойство также будет выполнено и для ветвей, ведущих в одно и то же состояние. Евклидово расстояние между после-

[4] Далее, в пределах данной главы, будем использовать нормированные значения квадрата евклидова расстояния $d^2 = D^2/E_s$. Понятия «евклидово расстояние» и «квадрат евклидова расстояния» будем использовать с учётом такой нормировки. Отметим, что данная нормировка отличается от той, которая имела место в (1.18), в главе 1, где рассматривалась передача данных без кодирования.

довательностями символов, соответствующих разным путям в диаграмме переходов, всегда будет больше суммы значений минимальных евклидовых расстояний для подмножеств $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$. Этот принцип отображения бит на точки сигнального созвездия впервые был предложен Унгербоеком в работах, посвященных решётчатой кодированной модуляции [23, 24].

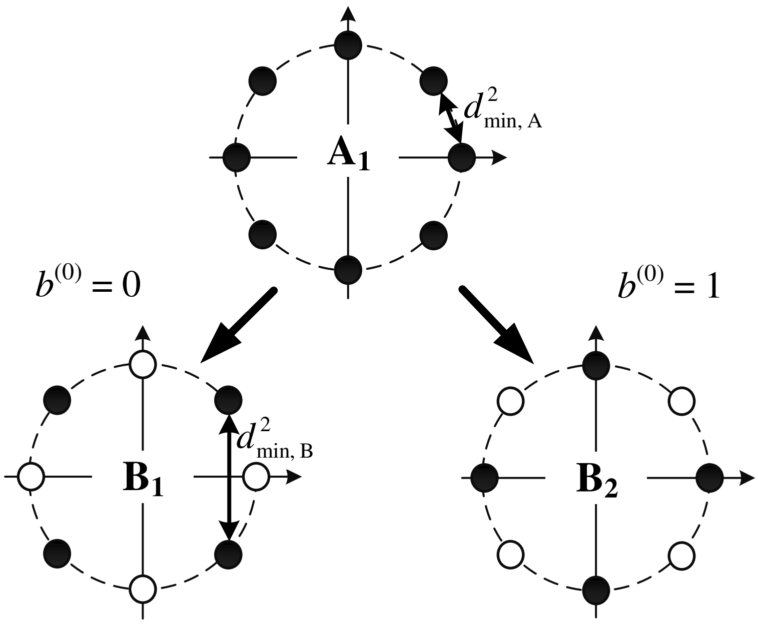

Рис. 2.3. Пример разбиения символов созвездия ФМ-8 на два подмножества ФМ-4

Кодер, представленный на рис. 2.1, может быть также отнесен к классу рекурсивных систематических свёрточных кодов (РСК), общая структурная схема таких кодов для скорости кодирования $R = 2/3$ представлена на рис. 2.4. Как правило, для схем РКМ используются свёрточные коды с небольшой избыточностью, вводящие лишь один проверочный бит; скорость кодирования в этих случаях равна $b_{\text{ps}}/(b_{\text{ps}} + 1)$, где b_{ps} – количество информационных бит, передаваемых за один тактовый интервал.

Образующие полиномы, описывающие отводы систематических бит к регистру сдвига, а также отводы в ветви обратной связи, выбираются таким образом, чтобы было возможно использование описанного выше принципа Унгербоека. Для описанного примера РКМ на основе созвездия ФМ-8, требуется, чтобы пара систематических бит соответствовала одному из сигналов в подмножестве

ФМ-4, а проверочный бит определял используемое подмножество. Таким образом, биты, поступающие на вход кодера, не должны влиять на проверочный бит, т.е. проверочный бит должен определяться только текущим состоянием кодера. Для этого требуется «удалить» крайние правые отводы от систематических бит к регистру сдвига: $h_0^{(2)} = 0$, $h_0^{(1)} = 0$. Для того чтобы в решётке кода ветвям, приходящим в одно и то же состояние, назначались символы из одного подмножества ФМ-4, для таких ветвей проверочный бит должен быть одинаковым, это возможно при $h_v^{(1)} = 0$, $h_v^{(2)} = 0$. Остальные коэффициенты образующих полиномов, как правило, отыскиваются различными алгоритмами перебора.

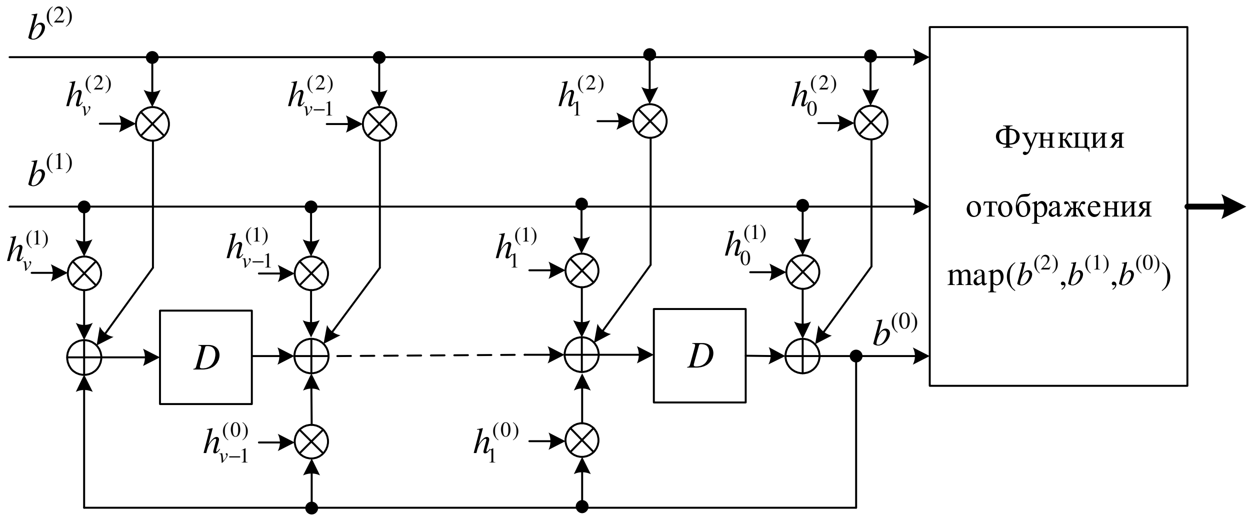

Рис. 2.4. Общая структурная схема рекурсивного систематического свёрточного кода со скоростью кодирования R = 2/3

Для схем, обеспечивающих высокую спектральную эффективность (b_{ps} = 3, 4, 5 и более), требуется использование созвездий высоких порядков. Если при этом кодер содержит регистр сдвига небольшой длины, возможно появление параллельных переходов между состояниями в решётке кода. Также параллельные переходы между состояниями характерны для схем РКМ, в которых на вход свёрточного кодера (СК) поступает только часть информационных бит (рис. 2.5). В таких схемах закон отображения кодированных бит на символы сигнального созвездия выбирают таким образом, чтобы символы из одного подмножества соответствовали параллельным переходам между состояниями. Тогда свободное евклидово расстояние для схемы кодированной модуляции соответствует минимальному евклидову расстоянию для подмножества.

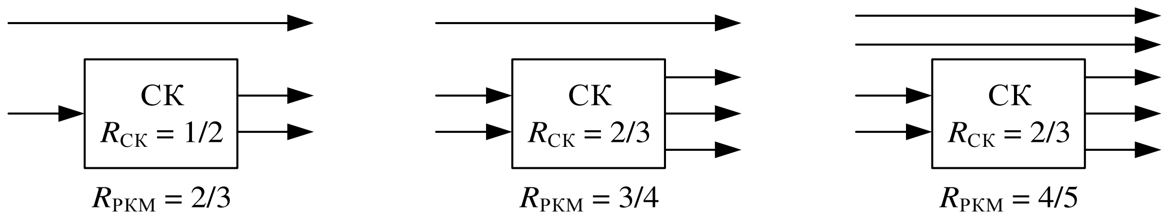

Рис. 2.5. Примеры схем РКМ, построенных на свёрточных кодах

2.2. Оценка помехоустойчивости схем решётчатой кодированной модуляции

Аналитический расчёт кривой помехоустойчивости для схемы кодированной модуляции, в основе которой лежит свёрточный код, оказывается сложным. Однако возможно вычисление теоретической верхней границы для вероятности битовой ошибки. В данном разделе рассмотрим методику вычисления такой верхней границы, описанную в [21].

Пусть формирование сигнала осуществляется на основе случайной последовательности модуляционных символов **C**; такую последовательность будем считать «правильной», соответствующей правильному пути в диаграмме состояний (рис. 2.2). Событие, заключающееся в том, что алгоритм приёма примет ошибочное решение, складывается из всех возможных ошибочных решений:

$$P_{\text{ош}} = P\left(\bigcup_j \bigcup_i \mathbf{C}_{(i,j)} / \mathbf{C}\right), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{C}_{(i,j)}$ – это событие, состоящее в принятии решения в пользу i-го ошибочного пути, расходящегося с правильным на шаге j. Средняя вероятность ошибки должна учитывать все возможные правильные пути, и может быть записана следующим образом:

$$\overline{P}_{\text{ош}} = \sum_{\mathbf{C}} P(\mathbf{C}) P\left(\bigcup_j \bigcup_i \mathbf{C}_{(i,j)} / \mathbf{C}\right), \tag{2.2}$$

где $P(\mathbf{C})$ – априорная вероятность выбора последовательности **C** при формировании сигнала. Для средней вероятности ошибки (2.2) может быть записана верхняя граница:

$$\overline{P}_{\text{ош}} \le \sum_{\mathbf{C}} P(\mathbf{C}) \sum_{j} P\left(\bigcup_{i} \mathbf{C}_{(i,j)} / \mathbf{C} \right). \tag{2.3}$$

Для последовательностей большой длины $(N \to \infty)$ верхняя граница (2.3) оказывается сильно завышенной (вероятность ошибки стремится к единице). В связи с этим, рассматривают нормированную среднюю вероятность ошибки:

$$\overline{P}_{\text{ош}}^{\text{н}} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{N} \overline{P}_{\text{ош}} \right). \tag{2.4}$$

Далее возможно упрощение (2.4), так как при больших N структура решётки не зависит от номера шага j, и суммирование по этому индексу может быть взаимно исключено с множителем $1/N$:

$$\overline{P}_{\text{ош}}^{\text{н}} \le \sum_{\mathbf{C}} P(\mathbf{C}) P\left(\bigcup_{i} \mathbf{C}_{(i)} / \mathbf{C} \right), \tag{2.5}$$

где $\mathbf{C}_{(i)}$ – событие, состоящее в принятии решения в пользу ошибочного пути, расходящегося с правильным на произвольном шаге j, но для фиксированного количества символов в ошибочном фрагменте пути и для определённой (i-й) комбинации ошибочных символов. Для вероятности суммы событий в (2.5) снова может быть записана верхняя граница:

$$\overline{P}_{\text{ош}}^{\text{н}} \le \sum_{\mathbf{C}} P(\mathbf{C}) \sum_{\mathbf{C}_{(i)}} P\left(\mathbf{C}_{(i)} / \mathbf{C} \right). \tag{2.6}$$

В выражении (2.6) вероятность ошибочного решения в пользу пути $\mathbf{C}_{(i)}$ может быть вычислена следующим образом:

$$P\left(\mathbf{C}_{(i)} / \mathbf{C} \right) = Q\left(\sqrt{d_{(i)}^2 \frac{b_{\text{ps}} E_{\text{b}}}{2N_0}} \right), \tag{2.7}$$

где $d_{(i)}^2$ – квадрат нормированного евклидова расстояния между последовательностью модуляционных символов, соответствующей ошибочному i-му пути, и правильной последовательностью символов, N_0 – односторонняя спектральная плотность средней мощности белого гауссовского шума в канале, E_b – энергия, приходящаяся на передачу одного информационного бита, b_{ps} – количество информационных бит, передаваемых за один тактовый интервал, а Q-функция табулирована:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция распределения для стандартного нормального распределения. Теперь, нормированная средняя вероятность ошибки может быть записана в виде:

$$\overline{P}^{\text{н}}_{\text{ош}} \leq \sum_{\mathbf{C}} P(\mathbf{C}) \sum_{\mathbf{C}_{(i)}} Q\left(\sqrt{d^2_{(i)} \frac{b_{ps} E_b}{2N_0}}\right),$$

или в терминах спектра евклидовых расстояний:

$$\overline{P}^{\text{н}}_{\text{ош}} \leq \sum_{d^2_{(i)} \in D} A_i \, Q\left(\sqrt{d^2_{(i)} \frac{b_{ps} E_b}{2N_0}}\right), \qquad (2.8)$$

где A_i – среднее количество ошибочных путей в решётке, которым соответствуют сигналы, отличающиеся с квадратом евклидова расстояния $d^2_{(i)}$ от правильного, D – множество всех возможных значений квадрата евклидова расстояния для ошибочных путей. Для каждой схемы кодированной модуляции возможно произвести оценку спектра евклидовых расстояний при использовании модифицированных алгоритмов приёма, которые анализируют все возможные пути и осуществляют накопление и оценку закона распределения значений $d^2_{(i)}$ для ошибочных путей [19]. Вместе с величиной A_i также оценивают среднее суммарное количество битовых ошибок B_i во всех последовательностях информационных бит, соответствующих ошибочным путям с евклидовым расстоянием $d^2_{(i)}$. Тогда, правая часть (2.8) может быть преобразована в верхнюю границу для средней вероятности битовой ошибки:

$$\overline{P}_{\text{b}} \le \frac{1}{b_{\text{ps}}} \sum_{d_{(i)}^2 \in D} B_i Q\left(\sqrt{d_{(i)}^2 \frac{b_{\text{ps}} E_{\text{b}}}{2N_0}} \right). \quad (2.9)$$

В табл. 2.1 представлены образующие полиномы и спектры расстояний для двух схем РКМ, осуществляющих передачу двух информационных бит за тактовый интервал и использующих двоичный закон отображения бит на созвездие ФМ-8, как это было сделано в примере на рис 2.1. Эти полиномы, описывающие структуру кодера, были приведены Унгербоеком в [24] и для данного типа созвездия и закона отображения бит на символы обеспечивают максимально возможное свободное евклидово расстояние.

Таблица 2.1. Спектры евклидовых расстояний двух схем РКМ на основе ФМ-8

Кол-во состояний в решётке	Полиномы (восьмиричный формат)	Спектр евклидовых расстояний					
		$d_{(i)}^2$	A_i	B_i	$d_{(i)}^2$	A_i	B_i
$N_s = 8$	$h^{(1)} = 2$ $h^{(2)} = 4$ $h^{(0)} = 11$	4,59	2,00	6,00	8,10	127,49	1203,33
		5,17	4,00	15,00	8,34	79,81	550,75
		5,76	7,99	43,96	8,59	28,97	154,85
		6,00	1,00	3,00	8,69	254,80	2659,71
		6,34	15,97	102,83	8,93	191,40	1532,30
		6,59	4,00	13,00	9,17	87,86	552,12
		6,93	31,92	237,43	9,27	509,22	5824,78
		7,17	11,99	54,96	9,41	4,00	15,00
		7,41	2,00	6,00	9,52	446,24	4052,34
		7,52	63,79	538,31	9,76	245,44	1783,94
		7,76	31,95	182,73	9,86	1017,70	12658,78
		8,00	9,00	38,99	10,00	24,99	127,92
		$d_{(i)}^2$	A_i	B_i	$d_{(i)}^2$	A_i	B_i
$N_s = 64$	$h^{(1)} = 30$ $h^{(2)} = 66$ $h^{(0)} = 103$	6,34	6,98	63,78	12,34	1034,93	13103,10
		7,17	10,98	109,72	12,69	1187,43	18154,62
		8,00	3,00	27,96	13,172	103,97	1419,76
		8,34	35,85	370,39	13,52	1112,41	17552,63
		9,17	29,92	307,97	14,00	28,32	380,02
		10,00	10,99	111,71	14,34	447,33	5577,66
		10,34	353,05	3968,82	15,17	10,22	119,66
		10,83	1,00	8,98	15,52	12,76	183,96
		11,17	235,08	2587,30	16,00	3,13	32,90
		11,52	2275,83	29729,82	17,17	7,63	88,50
		12,00	76,81	821,42	18,00	4,02	42,43

Отметим, что в спектре евклидовых расстояний величины A_i и B_i могут иметь дробные значения. Это связано с тем, что разным «правильным» путям в диаграмме переходов могут соответствовать разные наборы ошибочных путей и, следовательно, значения квадратов евклидова расстояния между соответствующими сигналами. В результате, при усреднении по всем возможным «правильным» путям, мощность A_i множества ошибочных путей с одинаковым значением квадрата евклидова расстояния $d_{(i)}^2$ становится дробной. Также, при усреднении по всем правильным путям, для какого-либо значения $d_{(i)}^2$ может стать дробной и величина B_i.

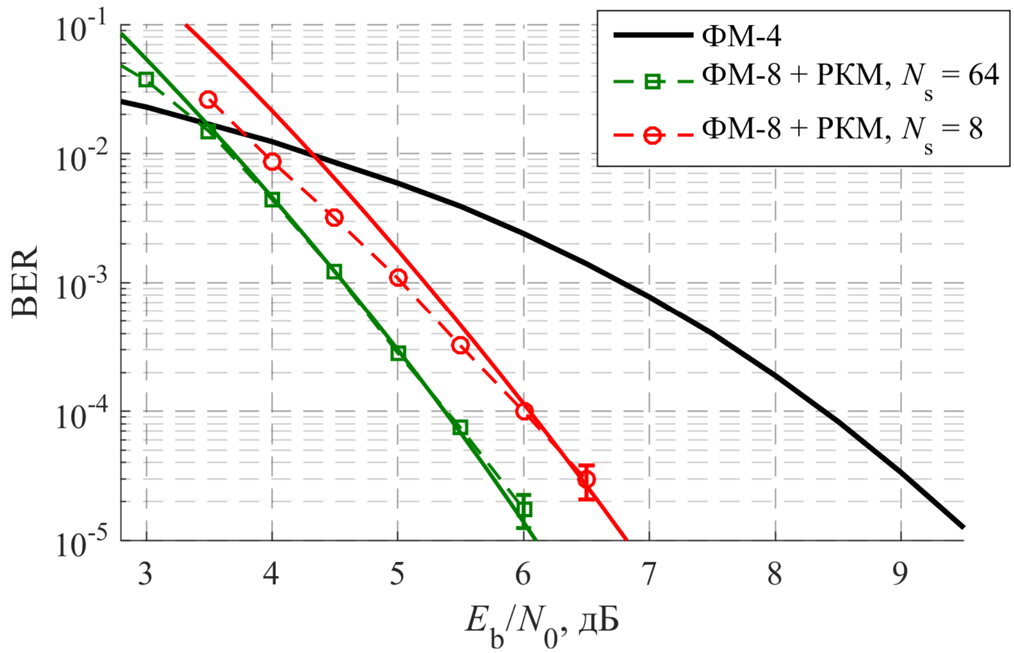

Рис. 2.6. Помехоустойчивость схем РКМ, использующих созвездие ФМ-8

Кривые помехоустойчивости для схем РКМ с образующими полиномами из табл. 2.1 приведены на рис. 2.6. Экспериментальные кривые были получены при моделировании передачи сигнала с РКМ через канал с АБГШ и его приёма алгоритмом Витерби. В процессе моделирования передача осуществлялась блоками по 2000 символов (4000 бит). Для экспериментальных кривых указан доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности 0,95. Также на рис. 2.6 приведены верхние границы помехоустойчивости для схем РКМ, вычисленные в соответствии с (2.9) и со спектрами евклидовых расстояний из табл. 2.1.

Как можно видеть из представленных результатов, уже при восьми возможных состояниях кодера для вероятности битовой ошибки 10^{-4} схема РКМ, использующая созвездие ФМ-8, обеспечивает энергетический выигрыш около 2,5 дБ относительно передачи данных без кодирования при использовании созвездия ФМ-4. Увеличение количества состояний до 64 приводит к небольшому дополнительному энергетическому выигрышу около 0,5 дБ. В случае схемы РКМ с 64 состояниями в решётке кода теоретическая верхняя граница помехоустойчивости достаточно хорошо совпадает с результатами имитационного моделирования для вероятностей битовой ошибки меньше 10^{-2}, а для схемы РКМ с восемью состояниями в решётке оказалась завышенной вплоть до значения вероятности битовой ошибки 10^{-4}.

Как было показано, увеличение энергетического выигрыша, обеспечиваемого схемой РКМ, возможно при использовании кодера, решётка которого содержит б*о*льшее количество состояний. Однако, такой способ улучшения энергетических характеристик сигналов с РКМ оказывается неэффективным: вычислительная сложность алгоритма приёма, анализирующего возможные пути в решётке, растёт экспоненциально с размером регистра сдвига в кодере, также растут требования к объему памяти, в которой будут храниться выжившие пути, а получаемый при этом дополнительный энергетический выигрыш оказывается незначительным. Получение заметно б*о*льшего, по сравнению с традиционными схемами РКМ, энергетического выигрыша возможно при переходе к параллельным схемам РКМ, которые также называют турбо РКМ.

2.3. Параллельные схемы решётчатой кодированной модуляции

В основе параллельных схем РКМ, впервые описанных в [18], лежит идея объединения принципов построения РКМ и параллельных свёрточных систематических кодов [7]. Структура схемы параллельной РКМ, осуществляющей передачу двух информационных бит за тактовый интервал, представлена на рис. 2.7. Кодирование данных в такой схеме осуществляется блоками, причём каждый блок информационных бит проходит процедуру кодирования дважды:

без перемежения и с перемежением. На выходе каждого компонентного кодера (схемы РКМ) формируется последовательность символов из сигнального созвездия, а в случае второго компонентного кодера сформированная последовательность проходит процедуру деперемежения. Для сохранения скорости передачи данных и ширины полосы частот обе последовательности символов прореживаются с коэффициентом 2, и в результирующую последовательность помещаются чётные символы с выхода первого компонентного кодера и нечётные символы с выхода второго. Таким образом, формируемая последовательность содержит результаты двух независимых процедур кодирования, и её размер соответствует количеству информационных символов в одном блоке.

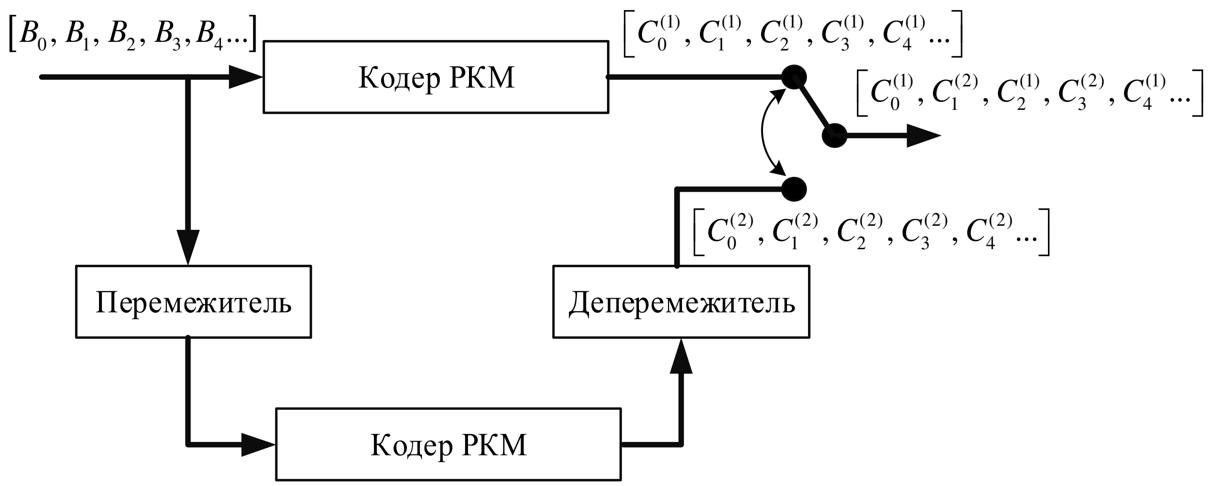

Рис. 2.7. Общая структурная схема параллельной РКМ, осуществляющей передачу 2 бит за тактовый интервал

Особенностью схем ТРКМ является то, что перемежение осуществляется между символами (в приведённом примере каждый символ содержит два информационных бита). Наличие деперемежителя является обязательным в схемах ТРКМ: в этом случае в результирующей последовательности модуляционных символов, полученной после прореживания и объединения двух результатов кодирования, будут «представлены» все систематические биты. Это особенно важно для схем, содержащих «свободные» биты, не участвующие в формировании проверочных (рис. 2.5).

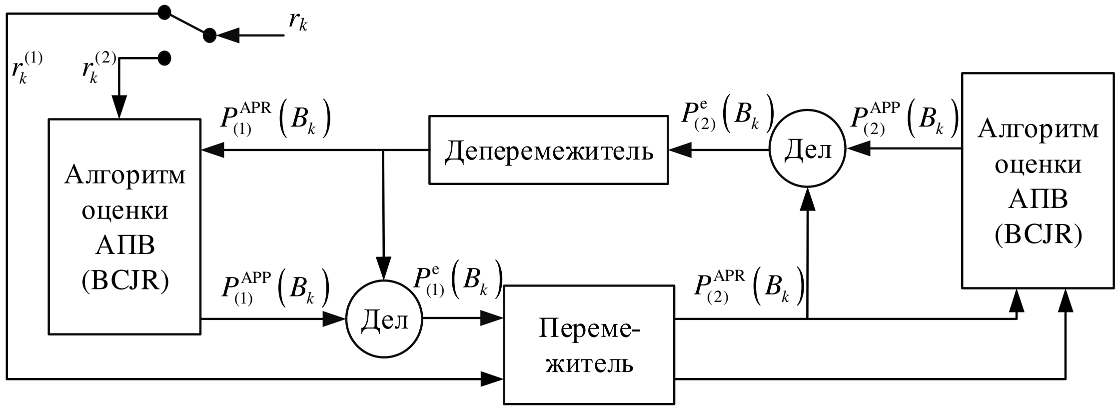

Рис. 2.8. Итеративная схема приёма сигналов с ТРКМ

Для демодуляции и декодирования сигналов, сформированных схемами ТРКМ, может быть использована итеративная процедура, аналогичная той, которая используется при декодировании двоичных турбо-кодов. Сначала производится разделение принятых символов r_k на две группы, в каждую из которых помещаются символы, сформированные одним компонентным кодером. Затем производится процедура декодирования для первой группы символов, результат этой процедуры используется в качестве априорной информации при декодировании второй группы символов и т.д. Производится несколько итераций алгоритма, после чего выносятся жёсткие решения о переданных символах (рис. 2.8).

В основе итеративной процедуры декодирования лежит алгоритм оценки апостериорных вероятностей (АПВ) передачи информационных символов $B_k = \left(b_k^{(2)}, b_k^{(1)}\right)$. Апостериорная вероятность передачи символа B_k – это условная вероятность передачи этого символа на k-м тактовом интервале, при условии, что на вход приёмника поступил символ r_k: $P^{\mathrm{APP}}\left(B_k\right) = P\left(B_k / r_k\right)$. В качестве алгоритма оценки АПВ может быть использован алгоритм BCJR, рассмотренный в разд. 1.5. При использовании данного алгоритма вычисление метрик ветвей следует производить следующим образом:

$$\gamma_k\left(j,i\right) = P\left(s_{k+1} = j / s_k = i\right) \times \begin{cases} P\left(r_k / y_k\right), & \text{символ } r_k \text{ есть,} \\ 1, & \text{символ } r_k \text{ неизвестен,} \end{cases} \tag{2.10}$$

где $\gamma_k(j,i)$ – метрика ветви, соответствующей переходу из состояния i в состояние j на шаге k, условная вероятность $P(s_{k+1} = j / s_k = i)$ равна априорной вероятности передачи символа B_k, соответствующего переходу из состояния i в состояние j, а условная вероятность $P(r_k / y_k)$, также называемая вероятностью перехода в канале, может быть вычислена, если символ r_k представлен в результирующей последовательности:

$$r_k = y_k + n_k,$$

$$P(r_k / y_k) = P(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|n_k|^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.11}$$

где n_k – отсчёт, а σ^2 – дисперсия дискретного белого гауссовского шума, добавляемого в канале. Если в процессе кодирования символ y_k был исключён из результирующей последовательности, то символ r_k неизвестен, и вероятность перехода в канале считается равной единице.

После вычисления АПВ символов первым алгоритмом, производится процедура деления, в результате которой вычисляются «внешние» вероятности (extrinsic information):

$$P_{(1)}^{\mathrm{e}}(B_k) = \frac{1}{\alpha} \frac{P_{(1)}^{\mathrm{APP}}(B_k)}{P_{(1)}^{\mathrm{APR}}(B_k)},\ \alpha = \sum_{B_k} \frac{P_{(1)}^{\mathrm{APP}}(B_k)}{P_{(1)}^{\mathrm{APR}}(B_k)}. \tag{2.12}$$

В результате процедуры деления производится нормировка, и все вычисленные апостериорные вероятности для позиции k в сумме будут давать единицу. Также, при выполнении данной процедуры устраняется эффект «накопления ошибок». Далее производится перемежение вычисленных вероятностей, после чего они поступают на вход второго алгоритма оценки АПВ и используются им в качестве априорных вероятностей передачи символов.

На рис. 2.9 представлены кривые помехоустойчивости для параллельной схемы РКМ, в которой в качестве компонентных кодов используется схема РКМ с созвездием ФМ-8 и восемью состояниями в решётке, рассмотренная в разд. 2.2.

Для экспериментальных кривых приведены доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 0,95. Как можно видеть из результатов моделирования, при использовании схемы ТРКМ и итеративного алгоритма приёма с шестью итерациями, на уровне вероятности битовой ошибки 10^{-4} удается получить энергетический выигрыш около 4 дБ по сравнению с некодированной передачей данных. Таким образом, параллельная схема РКМ обеспечивает дополнительный энергетический выигрыш около 1,8 дБ по сравнению с классической РКМ.

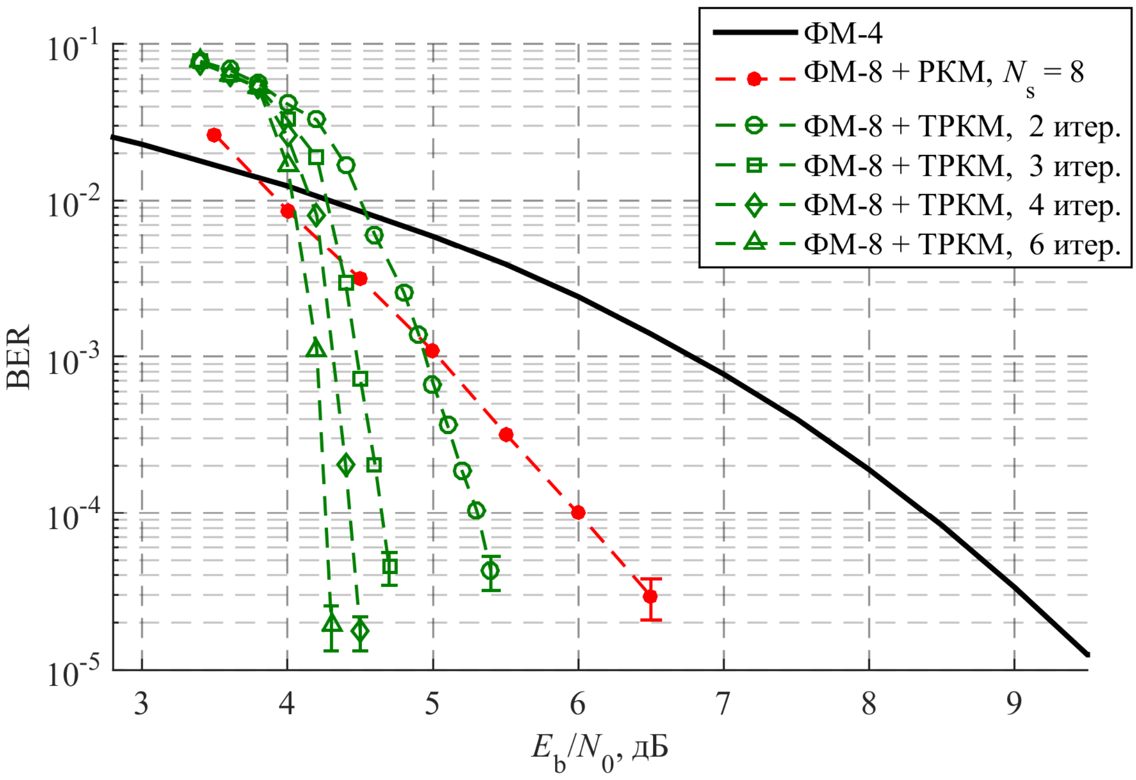

Рис. 2.9. Помехоустойчивость схем РКМ и ТРКМ на основе ФМ-8 (2 бита/симв.)

2.4. Результаты имитационного моделирования для схем РКМ и ТРКМ на основе созвездий КАМ-16, КАМ-32, КАМ-64

Рассмотренные схемы РКМ и ТРКМ на основе созвездия ФМ-8 осуществляют передачу двух информационных бит за тактовый интервал; также для таких схем предполагается использование ортогональных импульсов на соседних тактовых интервалах, например, RRC-импульсов. Таким образом, для рассмотренных схем величина удельных спектральных затрат, представляющая собой отношение используемой полосы частот W к скорости передачи данных R:

$$\beta_F = W / R, \tag{2.13}$$

оказывается в интервале [0,5 … 1] Гц/(бит/с), в зависимости от коэффициента сглаживания найквистовского импульса. Возможно построение схем РКМ и ТРКМ на основе созвездий более высоких порядков. Такие схемы могут быть использованы в высокоскоростных системах передачи данных, для которых характерны значения удельных спектральных затрат меньше 0,5 Гц/(бит/с).

Таблица 2.2. Образующие полиномы для схем РКМ на основе КАМ-созвездий

Скорость кода, $R_{\text{РСК}}$	Кол-во состояний в решётке, N_s	Образующие полиномы (восьмиричный формат)
3/4	8	$h^{(1)} = 15$ $h^{(2)} = 17$ $h^{(3)} = 11$ $h^{(0)} = 13$
4/5	8	$h^{(1)} = 7$ $h^{(2)} = 11$ $h^{(3)} = 15$ $h^{(4)} = 17$ $h^{(0)} = 13$
5/6	8	$h^{(1)} = 5$ $h^{(2)} = 7$ $h^{(3)} = 11$ $h^{(4)} = 15$ $h^{(5)} = 17$ $h^{(0)} = 13$

В [9, 22] представлены образующие полиномы для рекурсивных систематических свёрточных кодов со скоростями кодирования вида $b_{ps}/(b_{ps} + 1)$, которые могут быть использованы в схемах РКМ на основе созвездий КАМ высоких порядков, а сами схемы РКМ могут быть использованы в качестве компонентных кодов в схемах ТРКМ. Для оценки помехоустойчивости схем РКМ и ТРКМ на основе созвездий КАМ высоких порядков были выбраны коды с $N_s = 8$ возможными состояниями в решётке (табл. 2.2). Комбинации этих кодов со скоростями кодирования 3/4, 4/5, 5/6 с созвездиями КАМ-16, КАМ-32, КАМ-64 соответственно позволяют осуществлять передачу трёх, четырёх или пяти бит за один тактовый интервал. Данные созвездия рассматривались с законом отображения бит на модуляционные символы, соответствующим коду Грэя. Виды созвездий КАМ-16, КАМ-32, КАМ-64 представлены на рис. 2.12–2.14; отображаемые битовые комбинации представлены в десятичном виде.

Для всех кодов, приведённых в табл. 2.2, характерны параллельные переходы между состояниями. Однако, при комбинации этих кодов с созвездиями КАМ и при отображении кодированных бит на точки созвездия в соответствии с кодом Грэя, будет выполнен основной принцип РКМ разбиения созвездия на подмножества: каждое подмножество будет иметь увеличенное (по сравнению с базовым созвездием) свободное евклидово расстояние, а параллельным переходам между состояниями в решётке будут соответствовать точки из одного подмножества. Так, для кода со скоростью кодирования $R_{\text{РСК}} = 3/4$ характерны «двойные» переходы между состояниями, и при использовании такого кода с сигнальным созвездием КАМ-16 получается разбиение созвездия на 8 подмножеств, каждое из которых содержит по 2 точки (рис. 2.10). Любой паре параллельных переходов между состояниями соответствует пара символов одного из подмножеств $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_8$. Также, ветвям в решётке, выходящим из одного состояния или ведущим в одно состояние, всегда назначаются модуляционные символы из одного из подмножеств $\mathbf{B}_1$ или $\mathbf{B}_2$. Аналогичные разбиения получаются и для созвездий КАМ-32 и КАМ-64, используемых с рекурсивными систематическими свёрточными кодами со скоростями 4/5 и 5/6 соответственно.

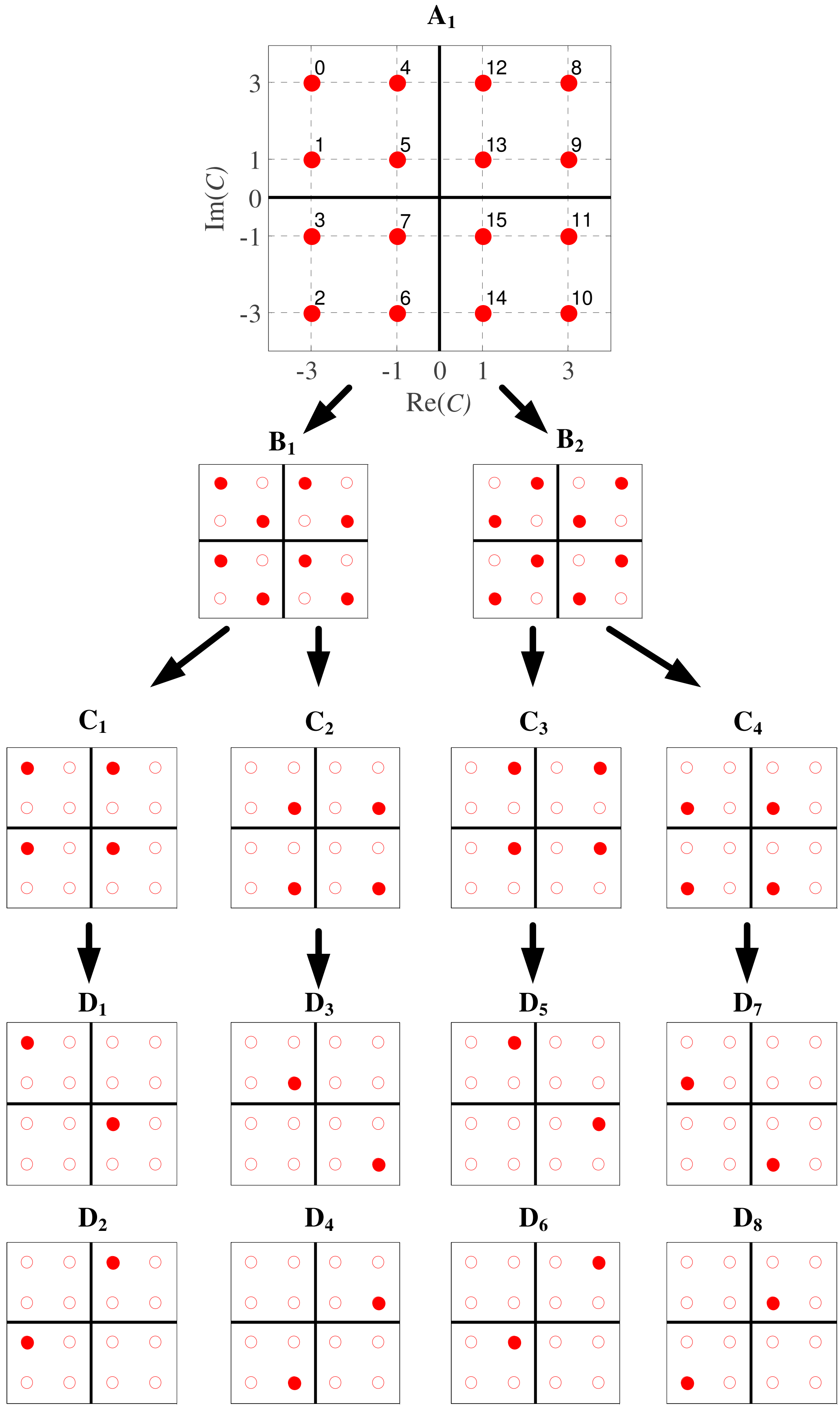

Рис. 2.10. Разбиение КАМ-16 на подмножества ($R_{\text{РСК}} = 3/4$ и $N_s = 8$)

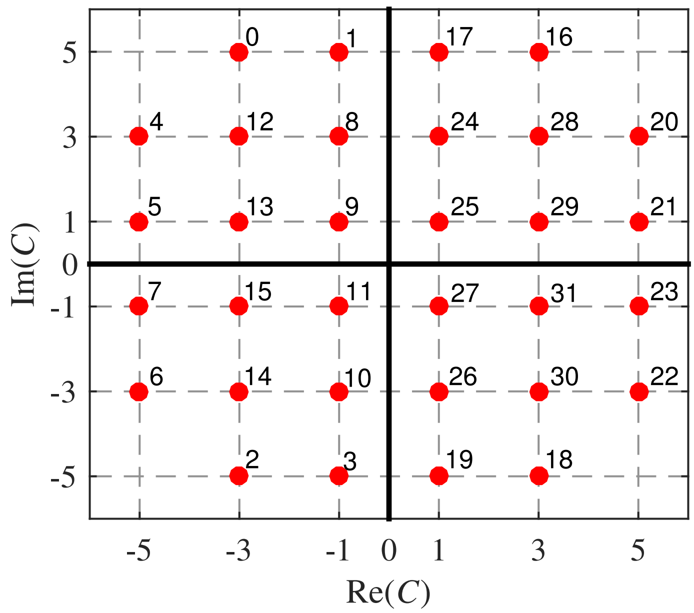

Рис. 2.11. Созвездие КАМ-32 с отображением по коду Грэя

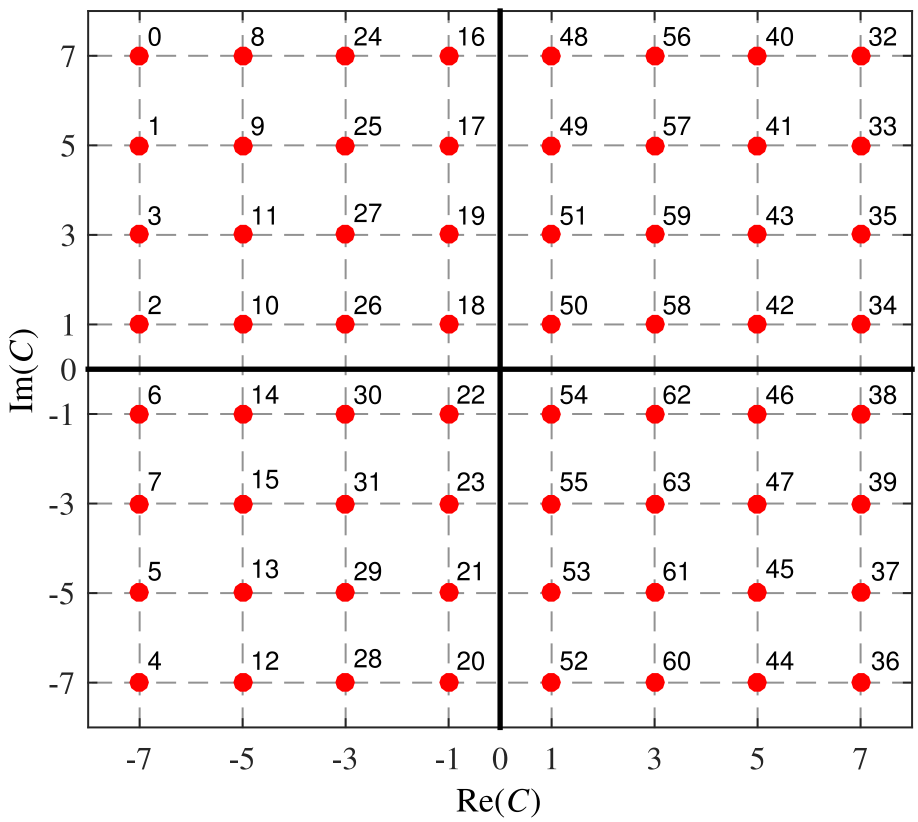

Рис. 2.12. Созвездие КАМ-64 с отображением по коду Грэя

Для реализации алгоритма приёма сигналов, сформированных схемами ТРКМ на основе выбранных кодов и созвездий, алгоритм оценки АПВ символов, лежащий в основе итеративной схемы приёма, должен учитывать возможные параллельные переходы между состояниями. Это может быть реализовано путём разбиения множества возможных значений информационных символов B_k на подмножества так, чтобы символы B_k внутри одного подмножества не вызывали параллельных переходов между состояниями. При реализации алгоритма оценки АПВ символов метрики ветвей γ должны быть вычислены отдельно для каждого такого подмножества. Вычисление метрик состояний α при прямом проходе по решётке следует производить следующим образом:

$$\alpha_k(j) = \sum_m \sum_p \alpha_{k-1}(m)\gamma_k^{(p)}(j,m),\ j = 0,\ \ldots,\ N_s-1,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (2.14)$$

где, как и прежде, суммирование производится по всем состояниям m, из которых возможен переход в состояние j, и по всем подмножествам входных символов (по всем значениям индекса p), а верхний индекс метрик ветвей $\gamma^{(p)}$ указывает на их принадлежность к подмножеству входных символов. При обратном проходе по решётке вычисляются метрики состояний β:

$$\beta_k(j) = \sum_m \sum_p \beta_{k+1}(m)\gamma_{k+1}^{(p)}(m,j),\ j = 0,\ \ldots,\ N_s-1,\ k = N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 1, \qquad (2.15)$$

где суммирование производится по всем состояниям m, в которые возможен переход из состояния j, и также по всем подмножествам входных символов. При обратном проходе по решётке вычисляются вероятности переходов и АПВ передачи символов B_k:

$$P^{(p)}(s_k = i, s_{k+1} = j, r_k) = \alpha_{k-1}(i)\gamma_k^{(p)}(j,i)\beta_k(j), \qquad (2.16)$$

$$P^{APP}(B_k) = P(B_k / r_k) = \sum_m P^{(p)}(s_k = i, s_{k+1} = j, r_k), \qquad (2.17)$$

где входной символ B_k принадлежит подмножеству p, а суммирование в (2.17) производится по всем возможным переходам m между состояниями, которые мог вызвать символ B_k.

На рис. 2.13 представлены кривые помехоустойчивости для схем РКМ и ТРКМ, осуществляющих передачу трёх информационных бит за тактовый интервал. Как можно видеть из результатов моделирования, на уровне вероятности битовой ошибки 10^{-4} схема РКМ обеспечивает энергетический выигрыш больше 3 дБ относительно передачи данных без кодирования при использовании созвездия ФМ-8. Схема ТРКМ и алгоритм приёма с шестью итерациями позволяют получить дополнительный энергетический выигрыш около 2 дБ по сравнению с традиционной РКМ и больше 5 дБ по сравнению с некодированной передачей.

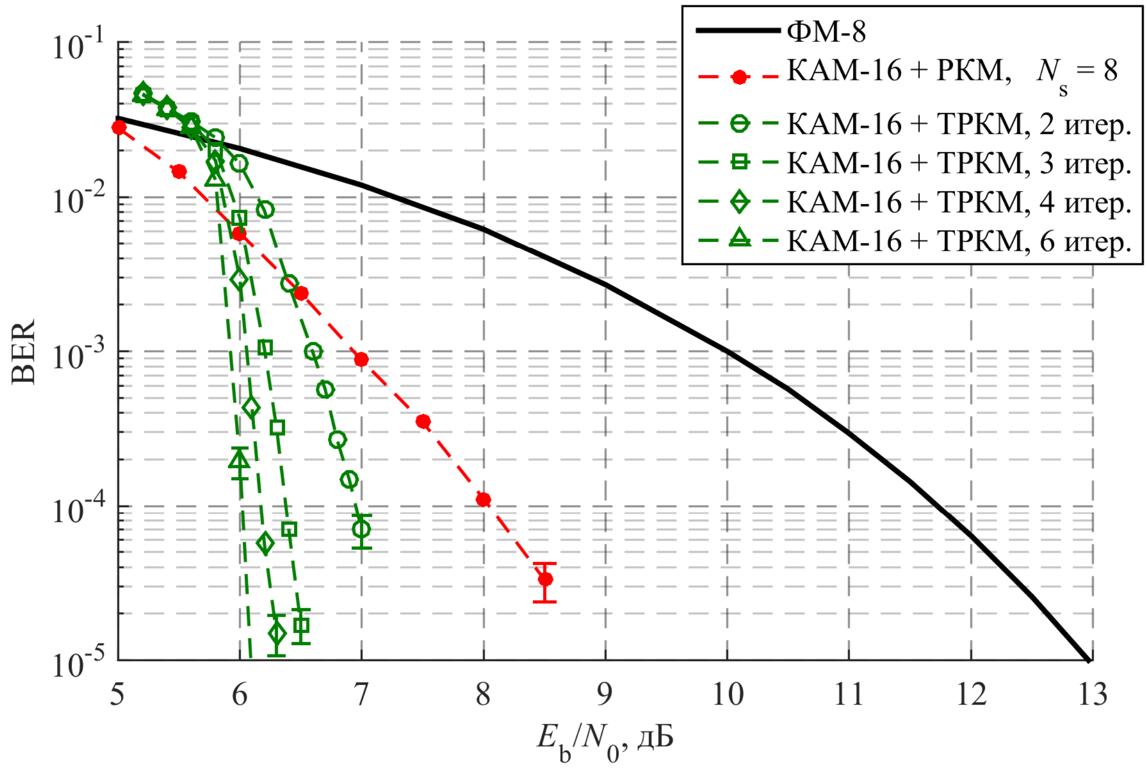

Рис. 2.13. Помехоустойчивость схем РКМ и ТРКМ на основе КАМ-16 (3 бита/симв.)

На рис. 2.14 и 2.15 приведены результаты имитационного моделирования для схем РКМ и ТРКМ, обеспечивающих передачу четырёх и пяти информационных бит за тактовый интервал. Как можно видеть, для вероятности битовой ошибки 10^{-4} схемы РКМ с 8 состояниями регистра обеспечивают выигрыш около 2 – 2,5 дБ, а при использовании ТРКМ возможно увеличение энергетического выигрыша еще на 2,5 – 3 дБ.

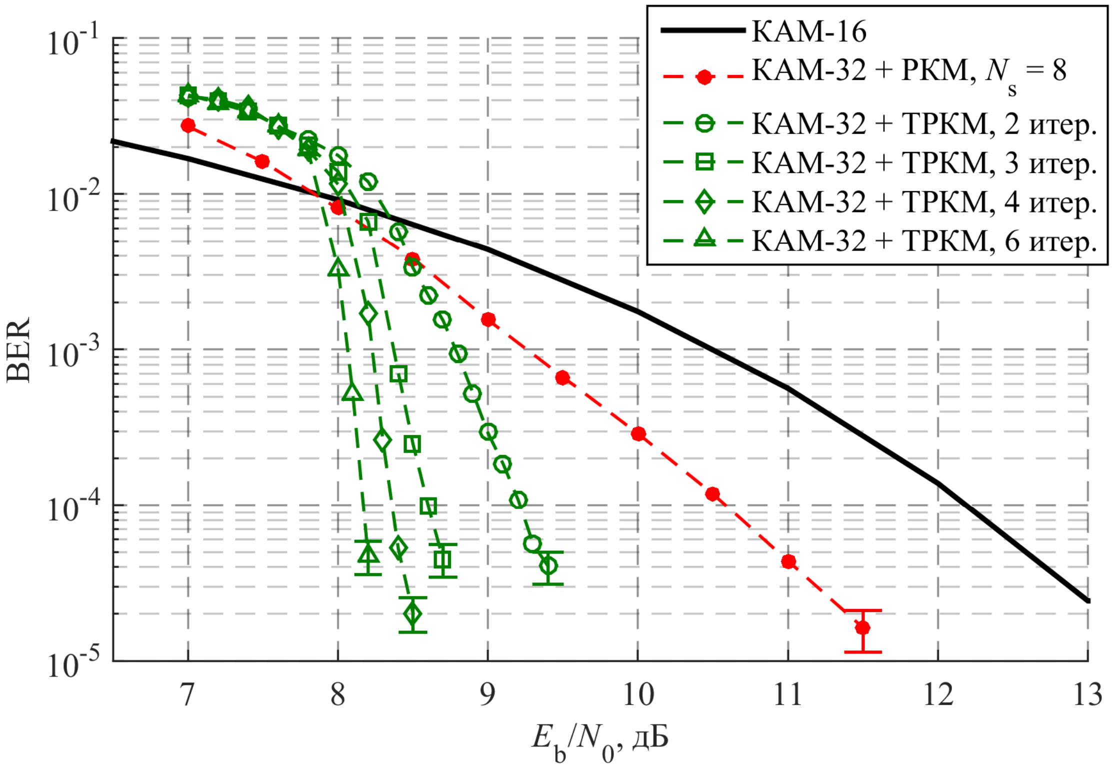

Рис. 2.14. Помехоустойчивость схем РКМ и ТРКМ на основе КАМ-32 (4 бита/симв.)

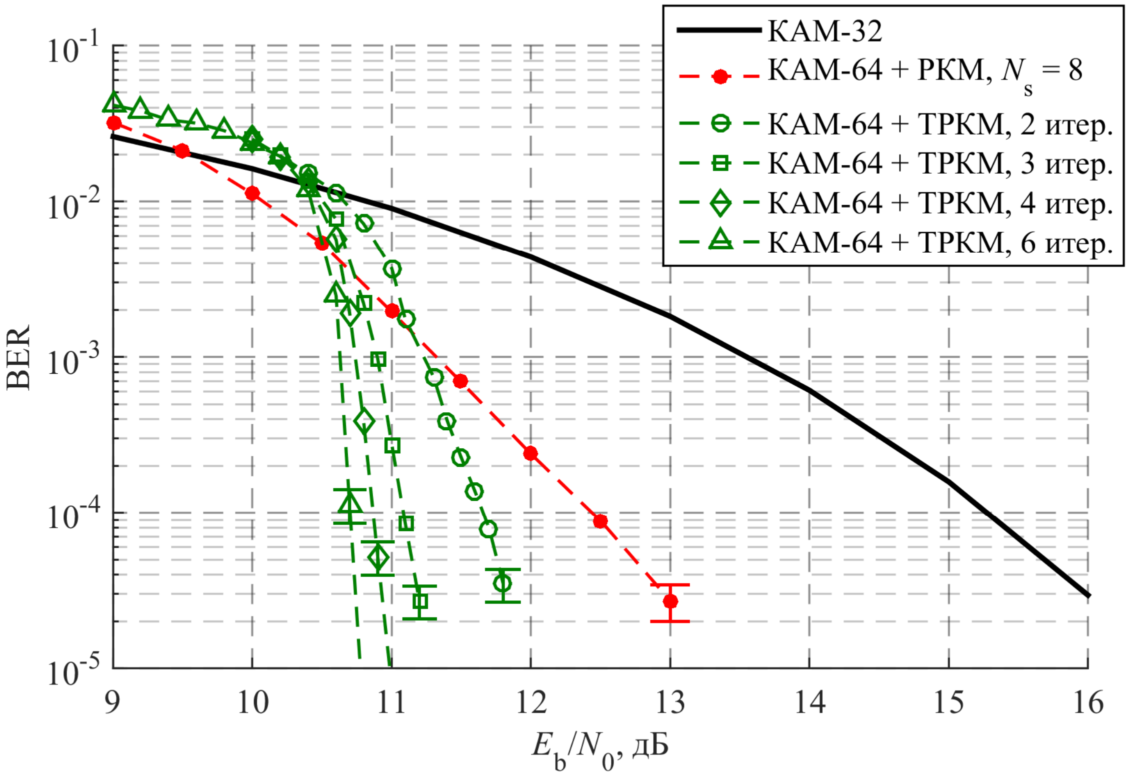

Рис. 2.15. Помехоустойчивость схем РКМ и ТРКМ на основе КАМ-64 (5 бит/симв.)

Выводы по главе 2

В данной главе рассмотрены схемы решётчатой кодированной модуляции, обеспечивающие энергетический выигрыш без потерь в спектральной эффективности. Также рассмотрены параллельные схемы РКМ, объединяющие в себе принципы построения схем РКМ и параллельных систематических свёрточных кодов, также называемых параллельными турбо кодами. При формировании сигнала с РКМ или ТРКМ предполагается использование ортогональных импульсов, например, имеющих в частотной области вид корня квадратного из приподнятого косинуса.

Для демодуляции и декодирования сигналов с РКМ был реализован алгоритм BCJR, учитывающий возможные параллельные переходы между состояниями в решётке кода. Для демодуляции и декодирования сигналов с ТРКМ была реализована итеративная схема, содержащая два компонентных декодера, имеющих структуру алгоритма BCJR.

В результате имитационного моделирования получены кривые помехоустойчивости для схем РКМ и ТРКМ, обеспечивающих передачу двух, трёх, четырёх и пяти бит за один тактовый интервал. В основе этих схем лежат сигнальные созвездия ФМ-8, КАМ-16, КАМ-32 и КАМ-64 и рекурсивные систематические свёрточные коды, описываемые решётками с восемью состояниями. Показано, что такие схемы РКМ могут обеспечить энергетический выигрыш около 2 дБ относительно передачи данных без кодирования на уровне вероятности битовой ошибки 10^{-4}. При переходе к ТРКМ энергетический выигрыш увеличивается и составляет в среднем 4 дБ относительно передачи данных без кодирования при четырёх итерациях алгоритма приёма.

Описание модифицированного алгоритма BCJR, учитывающего параллельные переходы между состояниями в решётке кода, описание итеративной схемы для демодуляции и декодирования сигналов с ТРКМ и полученные характеристики энергетической эффективности для схем РКМ и ТРКМ были опубликованы в следующих работах.

1. Гельгор, А.Л. Программная реализация алгоритма приёма сигналов с параллельной решётчатой кодированной модуляцией / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов // 16-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2014», доклады. – 2014. – том 1. – С. 84–88.

2. Gorlov, A. Improving energy efficiency of partial response signals by using coded modulation / A. Gorlov, A. Gelgor, E. Popov // 2015 IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom). – 2015. – pp. 58–62.

Глава 3. Многокомпонентные сигналы

Как известно, существует два способа повышения спектральной эффективности систем передачи данных: увеличение порядка используемого сигнального созвездия и использование сигналов с управляемой МСИ. В данной главе описаны принципы формирования т.н. многокомпонентных сигналов [11, 12, 29], которые являются частным случаем сигналов с управляемой МСИ. Рассматривается разложение одночастотного сигнала на компоненты, каждая из которых содержит последовательность непересекающихся финитных импульсов, имеющих увеличенную длительность. Для предлагаемых многокомпонентных сигналов возможна постановка и решение оптимизационной задачи нахождения оптимальной формы импульса, соответствующей минимально возможной полосе частот, содержащей заданную долю энергии сигнала, при дополнительных ограничениях на пик-фактор сигнала, величину свободного евклидова расстояния или уровень МСИ, выраженный в виде максимального коэффициента групповой корреляции. В данной главе приводится сравнение оптимальных многокомпонентных сигналов с традиционными сигналами, использующими найквистовские импульсы, на плоскости удельных спектральных и энергетических затрат. Для многокомпонентных сигналов на основе сигнального созвездия КАМ-4, за счёт введения МСИ показана возможность снижения удельных спектральных затрат вплоть до значений, характерных для традиционных ортогональных сигналов и созвездий КАМ-4, КАМ-16, КАМ-64; при этом удельные энергетические затраты остаются сравнимыми для случаев многокомпонентных сигналов и традиционных ортогональных сигналов.

3.1. Многокомпонентные сигналы

Запишем общую формулу для многокомпонентного сигнала, состоящего из L компонент:

$$y_{L,N}(t) = \sum_{p=1}^{L} y_{L,N}^{(p)}(t) = \sum_{p=1}^{L} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} C_k^{(r_p)} a\left(\frac{t - \Delta t_p - kLT}{L}\right), \tag{3.1}$$

$$-LT/2 \le t \le -LT/2 + NLT + \max\{\Delta t_p\},$$

где $y_{L,N}^{(p)}(t)$ – p-я компонента L-компонентного сигнала $y_{L,N}(t)$, N – число символов канального алфавита, передаваемых в каждой компоненте, $a(t)$ – ограниченный на интервале $[-T/2, T/2]$ импульс, Δt_p – величина задержки начала первого по порядку следования тактового интервала p-й компоненты относительно момента времени $t = -LT/2$, T – интервал следования символов канального алфавита в суммарном сигнале, $C_k^{(r_p)} = A_k^{(r_p)} \exp(j\varphi_k^{(r_p)})$ – символ сигнального созвездия ($A_k^{(r_p)}$ и $\varphi_k^{(r_p)}$ – амплитуда и фаза), соответствующий k-му по порядку следования символу канального алфавита p-й компоненты и определяемый M_p-элементным сигнальным созвездием, причём верхний индекс $r_p = 1, 2, \ldots, M_p$ соответствует номеру символа канального алфавита p-й компоненты в её алфавите, а нижний индекс $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ отражает принадлежность к соответствующему тактовому интервалу p-й компоненты. Константа $1/\sqrt{L}$ обеспечивает независимость энергии импульса от количества компонент – это будет необходимо при решении оптимизационной задачи. Далее будем выбирать величины сдвига начал тактовых интервалов разных компонент с равномерным шагом: $\Delta t_p = (p - 1)T$. Тогда момент времени, соответствующий началу передачи символа канального алфавита для любой компоненты, будет отстоять на $((p - 1)T + kLT)$ с от момента времени, соответствующего началу передачи любого символа канального алфавита любой другой компоненты, где p – целое от 1 до L, а k – целое. Также введём понятие симметричного сигнального созвездия как созвездия, для которого комплексная сумма всех его точек равна нулю. Будем считать, что во всех компонентах используются созвездия, обладающие таким свойством. Для удобства последующих записей введём обозначение импульса p-й компоненты, соответствующего k-му тактовому интервалу:

$$a_k^{(p)}(t, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} a\left(\frac{t - \Delta t_p - kLT}{L}\right). \tag{3.2}$$

На рис. 3.1*а* представлены синфазные составляющие двух компонент $s_{2,5}^{(1)}(t)$ и $s_{2,5}^{(2)}(t)$ для случая сигнального созвездия ФМ-4 в каждой компоненте и импульса $a(t) = \cos^2(\pi t/2T)$, определённого на интервале $[-T, T]$. Каждая компонента переносит 5 символов канального алфавита. На рис. 3.1*б* представлена синфазная составляющая суммарного двухкомпонентного сигнала $s_{2,5}(t) = s_{2,5}^{(1)}(t) + s_{2,5}^{(2)}(t)$. Все сигналы нормированы относительно своих максимальных значений.

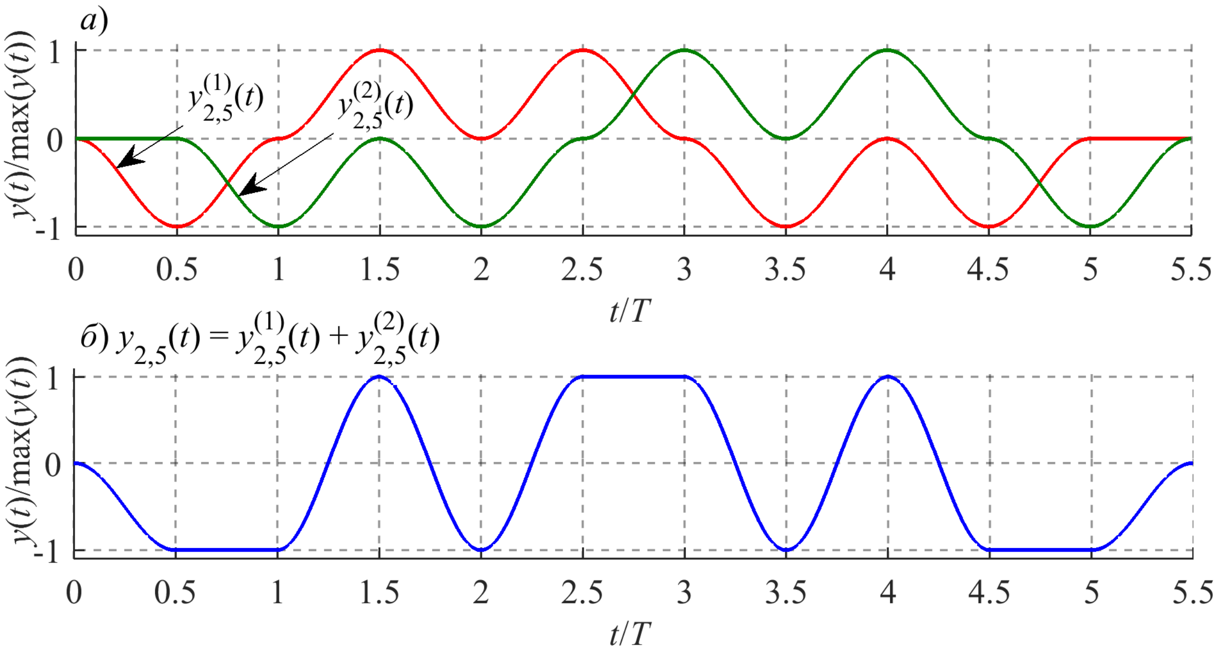

Рис. 3.1. Пример синфазных составляющих двух компонент (*а*) и двухкомпонентного сигнала (*б*) для импульсов $a(t) = \cos^2(\pi t/2T)$

3.2. Энергетический спектр многокомпонентных сигналов

Рассмотрим энергетический спектр многокомпонентных сигналов:

$$G(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{NLT + (L-1)T} \mathbf{E}\left\{ \left| S_{L,N}(f) \right|^2 \right\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{NLT + (L-1)T} \mathbf{E}\left\{ \left| \sum_{p=1}^{L} S_{L,N}^{(p)}(f) \right|^2 \right\} \tag{3.3}$$

где $S_{L,N}^{(p)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{L,N}^{(p)}(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$ – спектр усечённой N-элементной реализации p-й компоненты L-компонентного сигнала.

Проведём ряд преобразований $S_{L,N}^{(p)}(f)$:

$$S_{L,N}^{(p)}(f)=\int\limits_{-LT/2+\Delta t_p}^{-LT/2+\Delta t_p+NLT}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{L}}C_k^{(r_p)}a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right)\exp\left(-j2\pi ft\right)dt\,.$$

Поменяем местами знак суммы и интеграл, и заменим переменную $x = (t - \Delta t_p - kLT)/L$:

$$S_{L,N}^{(p)}(f)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_k^{(r_p)}}{\sqrt{L}}\exp\Big(-j2\pi f\left(\Delta t_p+kLT\right)\Big)L\int_{-T/2}^{T/2}a(x)\exp\left(-j2\pi fLx\right)dx=$$

$$=\sqrt{L}F_a(Lf)\sum_{k=0}^{N-1}C_k^{(r_p)}\exp\Big(-j2\pi f\left(\Delta t_p+kLT\right)\Big)=$$

$$=\sqrt{L}F_a(Lf)\exp\left(-j2\pi f\Delta t_p\right)\sum_{k=0}^{N-1}C_k^{(r_p)}\exp\left(-j2\pi fkLT\right),$$

где

$$F_a(f)=\int_{-T/2}^{T/2}a(t)\exp\left(-j2\pi ft\right)dt \tag{3.4}$$

есть спектр импульса $a(t)$.

Вернёмся к рассмотрению энергетического спектра:

$$G(f)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NLT+(L-1)T}\mathbf{E}\left\{\left|\sum_{p=1}^{L}S_{L,N}^{(p)}(f)\right|^2\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NLT+(L-1)T}\mathbf{E}\left\{\sum_{p=1}^{L}\left|S_{L,N}^{(p)}(f)\right|^2+2\sum_{p=1}^{L-1}\sum_{d=p+1}^{L}\mathrm{Re}\left(S_{L,N}^{(p)}(f)\,S_{L,N}^{(d)*}(f)\right)\right\}.$$

Запишем подробно первую часть слагаемых под знаком математического ожидания:

$$\mathbf{E}\left\{\left|S_{L,N}^{(p)}(f)\right|^2\right\}=L\left|F_a(Lf)\right|^2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\Big(-j2\pi f\left(k-l\right)LT\Big)\mathbf{E}\left\{C_k^{(r_p)}C_l^{(q_p)*}\right\}, \tag{3.5}$$

и вторую часть слагаемых

$$\mathbf{E}\left\{\mathrm{Re}\left(S_{L,N}^{(p)}(f)\,S_{L,N}^{(d)*}(f)\right)\right\}=\mathrm{Re}\Big\{L\left|F_a(Lf)\right|^2\exp\Big(-j2\pi f\left(\Delta t_p-\Delta t_d\right)\Big)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\Big(-j2\pi f\left(k-l\right)LT\Big)\mathbf{E}\left\{C_k^{(r_p)}C_l^{(q_d)*}\right\}\Big\}. \tag{3.6}$$

Таким образом, в обоих случаях необходимо определять значение

$$Z = \mathbf{E}\left\{ C_k^{(r_p)} C_l^{(q_d)*} \right\},$$

где p, $d = 1, 2, \ldots, L$ – номера компонент, k, $l = 0, 1, \ldots, N-1$ – номера тактовых интервалов соответственно p-й и d-й компонент, $r = 1, 2, ..., M_p$, $q = 1, 2, \ldots, M_d$ – номера символов канального алфавита соответственно p-й и d-й компонент и усреднение проводится по всем значениям p, d, k, l, r_p, q_d. Для разных компонент ($p \neq d$) значение Z при использовании симметричных созвездий оказывается равным нулю независимо от соотношения k и l:

$$Z(p \neq d) = \frac{1}{L(L-1)} \sum_{p=1}^{L} \sum_{\substack{d=1 \\ d \neq p}}^{L} \left(\frac{1}{M_p M_d} \overbrace{\left\{ \sum_{r_p=1}^{M_p} C_k^{(r_p)} \right\}}^{0} \overbrace{\left\{ \sum_{q_d=1}^{M_d} C_l^{(q_d)*} \right\}}^{0} \right) = 0 .$$

В случае совпадения значений p и d значение Z зависит от соотношения k и l:

$$Z = \mathbf{E}\left\{ C_{r_p}^{(k)} C_{q_p}^{(l)*} \right\} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^{L} \left(\frac{1}{M_p^2} \overbrace{\left\{ \sum_{r_p=1}^{M_p} C_k^{(r_p)} \right\}}^{0} \overbrace{\left\{ \sum_{q_p=1}^{M_p} C_l^{(q_p)*} \right\}}^{0} \right) = 0, \ k \neq l,$$

и

$$Z = \mathbf{E}\left\{ C_k^{(r_p)} C_k^{(r_p)*} \right\} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^{L} \frac{1}{M_p} \sum_{r_p=1}^{M_p} \left(A^{(r_p)} \right)^2, \ k = l. \qquad (3.7)$$

В дальнейшем при употреблении символа Z будем понимать именно выражение (3.7), полученное для $p = d$ и $k = l$.

На основе полученных результатов выражения (3.5) и (3.6) преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{E}\left\{ \left| S_{L,N}^{(p)}(f) \right|^2 \right\} = LNZ \left| F_a(Lf) \right|^2,$$

$$\mathbf{E}\left\{ \mathrm{Re}\left(S_{L,N}^{(p)}(f) S_{L,N}^{(d)*}(f) \right) \right\} = 0$$

и, следовательно,

$$G(f) = \frac{LZ}{T} \left| F_a(Lf) \right|^2 . \qquad (3.8)$$

Отметим, что полученный результат согласуется с выражением для энергетического спектра (1.23) сигналов с частичным откликом. При использовании одинаковых сигнальных созвездий в компонентах величина Z имеет смысл средней энергии символа по созвездию:

$$Z = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left(A^{(r)} \right)^2 = E_s.$$

Вернёмся к вопросу вычисления значения Z. При определении точек сигнального созвездия $C^{(r)}$ обычно устанавливают среднюю энергию созвездия, равной 1:

$$\frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left| C^{(r)} \right|^2 = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left(A^{(r)} \right)^2 = 1.$$

При таком подходе значение Z всегда будет равно 1. Однако существует и другой подход, при котором фиксируется максимальная амплитуда точек сигнального созвездия:

$$\max_r \left\{ \left| C^{(r)} \right| \right\} = \max_r \left\{ A^{(r)} \right\} = 1. \tag{3.9}$$

Вычислим значение Z для второго варианта определения точек сигнального созвездия при использовании в каждой компоненте M-позиционной КАМ либо M-позиционной ФАМ (созвездия разных компонент могут быть повернуты друг относительно друга).

Множество комплексных точек M-позиционной ФАМ при условии (3.9) может быть представлено так:

$$C^{(r)} = 1 - (r-1)\frac{2}{M-1},\ r = 1, 2, \ldots, M.$$

Вычислим значение Z:

$$Z = \mathbf{E}\left\{ \left| C^{(r)} \right|^2 \right\} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left(1 - (r-1)\frac{2}{M-1} \right)^2 = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^{M} \left(\frac{(M+1) - 2r}{M-1} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{M(M-1)^2} \sum_{r=1}^{M} \left((M+1)^2 - 4(M+1)r + 4r^2 \right) =$$

$$=\frac{1}{M\left(M-1\right)^2}\left(M\left(M+1\right)^2-4\left(M+1\right)\sum_{r=1}^{M}r+4\sum_{r=1}^{M}r^2\right).$$

Учитывая [31], что суммы равны соответственно

$$1+2+3+...+n=\frac{n}{2}\left(n+1\right)$$

и

$$1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n}{6}\left(n+1\right)\left(2n+1\right),$$

получим

$$Z=\frac{1}{M\left(M-1\right)^2}\left(M\left(M+1\right)^2-4\left(M+1\right)\frac{M}{2}\left(M+1\right)+4\frac{M}{6}\left(M+1\right)\left(2M+1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(M-1\right)^2}\left(M+1\right)\frac{M-1}{3}=\frac{M+1}{3\left(M-1\right)}.$$

M-позиционная КАМ для условия (3.9) может быть получена путём объединения двух «перпендикулярных» созвездий ФАМ, определённых на интервале $\left[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right]$, и имеющих размерность $\sqrt{M}$. Следовательно, точки M-позиционной КАМ могут быть представлены в следующем виде:

$$C^{(r)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\left(r_c-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right)+j\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\left(r_s-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right),$$

$$r_c,r_s=1,\ 2,\ ...,\ \sqrt{M},\ r=\left(r_c-1\right)\sqrt{M}+r_s.$$

Вычислим значение Z:

$$Z=\mathbf{E}\left\{\left|Z^{(r)}\right|^2\right\}=\frac{1}{2M}\sum_{r_c=1}^{\sqrt{M}}\sum_{r_s=1}^{\sqrt{M}}\left[\left(1-\left(r_c-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right)^2+\left(1-\left(r_s-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{M}}\sum_{r_c=1}^{\sqrt{M}}\left(1-\left(r_c-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{M}}\sum_{r_s=1}^{\sqrt{M}}\left(1-\left(r_s-1\right)\frac{2}{\sqrt{M}-1}\right)^2=\frac{\sqrt{M}+1}{3\left(\sqrt{M}-1\right)}.$$

Вернёмся к анализу энергетического спектра многокомпонентных сигналов. На основе (3.4), (3.5), (3.6), (3.8) и равенства Парсеваля определим среднюю мощность сигналов (3.1):

$$P_{\text{ср}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{LZ}{T} \left| F_a(Lf) \right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z}{T} a^2(t)\,dt = \frac{ZE_a}{T}, \tag{3.10}$$

где

$$E_a = \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t)\,dt = \int_{-LT/2}^{LT/2} \left(a(t/L)/\sqrt{L} \right)^2 dt$$

есть энергия импульса. При определении энергии импульса дополнительно указано, что добавка константы $1/\sqrt{L}$ в (3.1) обеспечивает независимость энергии импульса от количества компонент. Из анализа (3.10) видно, что спектр L-компонентных сигналов по отношению к однокомпонентным сигналам при сохранении вида импульса $a(t)$ оказывается в L раз компактнее.

3.3. Пик-фактор многокомпонентных сигналов

Пик-фактор определяется отношением пиковой мощности к средней:

$$PAPR = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ср}}} = \lim_{N \to \infty} \frac{\max\left\{ \left| y_{L,N}(t) \right|^2 \right\}}{\mathbf{E}\left\{ \frac{1}{NLT + (L-1)T} \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} \left| y_{L,N}(t) \right|^2 dt \right\}}. \tag{3.11}$$

Обратим внимание, что в силу периодичности выражения для многокомпонентных сигналов (рис. 3.2) определять наибольшее значение числителя (3.11) достаточно на произвольном интервале времени длительностью T. В качестве такого интервала выберем окончание k-го интервала первой компоненты:

$$LT/2 - T + kLT \le t \le LT/2 + kLT. \tag{3.12}$$

Такой выбор обусловлен тем, что на этом промежутке времени во всех остальных компонентах также передаются сигналы их k-х тактовых интервалов, и это позволяет упростить запись (например, в L-й компоненте в этот момент времени передаётся начало её k-го тактового интервала). При рассмотрении чётного импульса $a(t)$ возможно ещё сократить интервал анализа, рассматривая только первую либо только вторую половину определённого выше интервала. Например, при выборе второй половины получим:

$$LT/2 - T/2 + kLT \le t \le LT/2 + kLT. \tag{3.13}$$

В дальнейших преобразованиях будем использовать интервал (3.12), определённый для произвольного импульса $a(t)$, понимая, что в случае чётности $a(t)$ необходимо заменить (3.12) на (3.13).

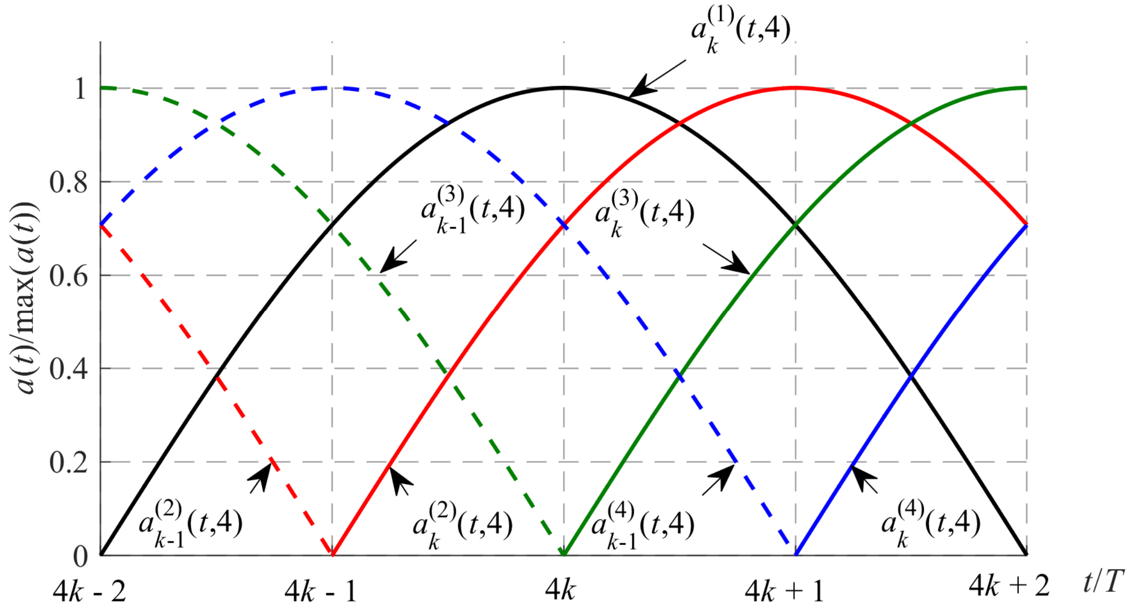

Рис. 3.2. Последовательность импульсов для 4-компонентного сигнала с импульсом вида $\cos(\pi t/T)$

Проведём ряд преобразований для пиковой мощности:

$$P_{\text{п}} = \max\left\{\left|y_{L,N}(t)\right|^2\right\} = \max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T+kLT;\frac{LT}{2}+kLT\right]}\left\{\left|\sum_{p=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{L}}C_k^{(r_p)}a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right)\right|^2\right\}=$$

$$=\max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T+kLT;\frac{LT}{2}+kLT\right]}\left\{\sum_{p=1}^{L}\sum_{d=1}^{L}C_k^{(r_p)}C_k^{(q_d)*}a_k^{(p)}(t,L)a_k^{(d)}(t,L)\right\}=$$

$$=\max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T+kLT;\frac{LT}{2}+kLT\right]}\left\{\sum_{p=1}^{L}\left(A_k^{(r_p)}a_k^{(p)}(t,L)\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\sum_{p=1}^{L-1}\sum_{d=p+1}^{L}A_k^{(r_p)}A_k^{(q_d)}a_k^{(p)}(t,L)a_k^{(d)}(t,L)\cos\left(\varphi_k^{(r_p)}-\varphi_k^{(q_d)}\right)\right\}=$$

$$=\max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T+kLT;\frac{LT}{2}+kLT\right]}\left\{\sum_{p=1}^{L}\sum_{d=1}^{L}A_k^{(r_p)}A_k^{(q_d)}a_k^{(p)}(t,L)a_k^{(d)}(t,L)\cos\left(\varphi_k^{(r_p)}-\varphi_k^{(q_d)}\right)\right\}. \quad (3.14)$$

Предположим, для начала, что все $a_k^{(p)}(t,L)$ на рассматриваемом промежутке времени положительные, тогда, очевидно, максимальное значение (3.14) достигается при выборе максимальных значений коэффициентов $A_k^{(r_p)}$, $A_k^{(q_d)}$ и $\cos(\varphi_k^{(r_p)} - \varphi_k^{(q_d)})$. Для определённости, будем считать, что в сигнальных созвездиях всех компонент фиксирована максимальная амплитуда точек, как это было сделано в разд. 3.2. Тогда

$$\max\left\{A_k^{(r_p)}\right\} = \max\left\{A_k^{(q_d)}\right\} = \max\left\{\cos\left(\varphi_k^{(r_p)} - \varphi_k^{(q_d)}\right)\right\} = 1,$$

причём такие максимальные значения достигаются, если точки сигнальных созвездий на k-х тактовых интервалах всех L компонент совпадают и находятся на окружности единичного радиуса. Иными словами, созвездия разных компонент могут отличаться и даже быть произвольной размерности, но у всех созвездий должна быть одна общая точка на окружности единичного радиуса. В такой ситуации максимизируемое в (3.14) выражение преобразуется в квадрат суммы импульсов. Дополнительно учитывая, что импульсы $a_k^{(p)}(t, L)$ не обязательно положительные, получим

$$P_{\text{п}} = \max_{t \in \left[\frac{LT}{2} - T + kLT; \frac{LT}{2} + kLT\right]} \left\{ \left(\sum_{p=1}^{L} \left| a_k^{(p)}(t, L) \right| \right)^2 \right\}. \tag{3.15}$$

Переходя к рассмотрению первого ($k = 0$) тактового интервала для сокращения записи и делая обратную замену, преобразуем (3.15) для многокомпонентных сигналов с произвольными сигнальными созвездиями в компонентах считая, что символы созвездий на комплексной плоскости располагаются внутри окружности единичного радиуса:

$$P_{\text{п}} = \frac{1}{L} \max_{t \in \left[\frac{LT}{2} - T; \frac{LT}{2}\right]} \left\{ \left(\sum_{p=1}^{L} \left| a\left(\frac{t - \Delta t_p}{L}\right) \right| \right)^2 \right\}. \tag{3.16}$$

Учитывая, что $P_{\text{ср}} = ZE_a/T$, запишем выражение для пик-фактора многокомпонентных сигналов с произвольными сигнальными созвездиями в компонентах:

$$PAPR = \frac{T}{ZE_a} \frac{1}{L} \max_{t \in \left[\frac{LT}{2} - T; \frac{LT}{2}\right]} \left\{ \sum_{p=1}^{L} \sum_{d=1}^{L} A^{(r_p)} A^{(q_d)} a\left(\frac{t - \Delta t_p}{L}\right) a\left(\frac{t - \Delta t_d}{L}\right) \cos\left(\varphi^{(r_p)} - \varphi^{(q_d)}\right) \right\}, \tag{3.17}$$

где поиск максимума производится при варьировании не только значения $t \in [LT/2 - T,\ LT/2]$, но и значений $A^{(r_p)}$, $A^{(q_d)}$, $\varphi^{(r_p)}$, $\varphi^{(q_d)}$. Вычисление пик-фактора по (3.17) можно проводить как для созвездий компонент с фиксированной амплитудой точек, так и для созвездий с фиксированной средней энергией.

Для многокомпонентных сигналов с произвольными сигнальными созвездиями в компонентах, имеющими одну общую точку на окружности единичного радиуса, пик-фактор определяется следующим образом:

$$PAPR = \frac{1}{Z}\frac{1}{E_a/T}\frac{1}{L}\max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T;\frac{LT}{2}\right]}\left\{\left(\sum_{p=1}^{L}\left|a\left(\frac{t-\Delta t_p}{L}\right)\right|\right)^2\right\}, \tag{3.18}$$

где Z вычисляется для созвездий с фиксированной максимальной амплитудой точек. В частности, для сигналов, у которых в каждой компоненте используются одинаковые M-элементные созвездия КАМ, пик-фактор определяется следующим образом:

$$PAPR = \frac{3(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}+1}\frac{1}{E_a/T}\frac{1}{L}\max_{t\in\left[\frac{LT}{2}-T;\frac{LT}{2}\right]}\left\{\left(\sum_{p=1}^{L}\left|a\left(\frac{t-\Delta t_p}{L}\right)\right|\right)^2\right\}, \tag{3.19}$$

3.4. Корреляционные свойства многокомпонентных сигналов

Как было указано ранее, в сигнале одной компоненты, благодаря отсутствию перекрытия импульсов во времени, межсимвольная интерференция отсутствует. Однако сигналы разных компонент интерферируют в результирующем многокомпонентном сигнале. Как можно видеть из рис. 3.2, сигнал одного тактового интервала любой компоненты пересекается во времени с сигналами $2(L-1)$ тактовых интервалов других компонент – по два тактовых интервала для каждой компоненты (здесь не учитываются краевые тактовые интервалы, однако это не ограничивает общности). Очевидно, меру интерференции необходимо вводить на основе суммарного воздействия всех $2(L-1)$ мешающих сигналов.

Однако, для удобства, определим сначала влияние каждого из них – коэффициенты парциальной корреляции – а затем суммарное влияние – коэффициент групповой корреляции.

Введём понятие коэффициента парциальной корреляции сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты и сигнала l-го тактового интервала d-й компоненты:

$$PC_{k,l}^{(1,d)} = C_k^{(r_1)} C_l^{(q_d)*} \int\limits_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L) a_l^{(d)}(t,L) dt.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от выбора вида модуляционных созвездий компонент. Рассмотрим случай многокомпонентных сигналов с произвольными сигнальными созвездиями в компонентах; пусть модуль символов из сигнального созвездия ограничен единицей. Учитывая, что

$$\max\left\{A_k^{(r_1)}\right\} = \max\left\{A_l^{(q_d)}\right\} = \max\left\{\cos\left(\varphi_k^{(r_1)} - \varphi_l^{(q_d)}\right)\right\} = 1$$

и, следовательно,

$$\max\left\{\left|C_k^{(r_1)} C_l^{(q_d)*}\right|\right\} = 1,$$

получим максимальное значение модуля коэффициента парциальной корреляции сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты и сигнала l-го тактового интервала d-й компоненты:

$$\max_{C,d,l}\left\{\left|PC_{k,l}^{(1,d)}\right|\right\} = \max_{d,l}\left\{\left|\int\limits_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L) a_l^{(d)}(t,L) dt\right|\right\}. \qquad (3.20)$$

Учитывая, что для первой компоненты ненулевыми могут быть только $PC_{k,k-1}^{(1,d)}$ и $PC_{k,k}^{(1,d)}$, в правой части (3.20) необходимо рассмотреть 2 варианта значений номера тактового интервала d-й компоненты: $l = k - 1$ и $l = k$. Значит, максимум в правой части (3.20) ищется по $l = k - 1$, $l = k$ и $d = 2, 3, \ldots, L$. Перебор всех возможных пар (d, l) в правой части (3.20) предполагает рассмотрение $2(L - 1)$ комбинаций, хотя различных значений интеграла будет только $(L - 1)$. Это вызвано тем, что значение интеграла в (3.20) будет одинаковым для следующих комбинаций:

$$(d = 2 + i,\ l = k - 1) \text{ и } (d = L - i,\ l = k),$$

где $i = 0, 1, \ldots, L - 2$. Покажем это (пояснение представлено на рис. 3.3):

$$\int\limits_{kLT-LT/2}^{kLT-LT/2+(i+1)T} a_k^{(1)}(t)\, a_{k-1}^{(2+i)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_{kLT-LT/2}^{kLT-LT/2+(i+1)T} a\left(\frac{t-kLT}{L}\right) a\left(\frac{t-(i+1)T-(k-1)LT}{L}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_{kLT-LT/2}^{kLT-LT/2+(i+1)T} a\left(\frac{t-kLT}{L}\right) a\left(\frac{t-(i+1-L)T-kLT}{L}\right) dt \overset{x=t-(i+1-L)T}{=}$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_{kLT-LT/2-(i+1-L)T}^{kLT-LT/2+(i+1)T-(i+1-L)T} a\left(\frac{x+(i+1-L)T-kLT}{L}\right) a\left(\frac{x-kLT}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_{kLT+LT/2-(i+1)T}^{kLT+LT/2} a\left(\frac{x-(L-i-1)T-kLT}{L}\right) a\left(\frac{x-kLT}{L}\right) dx \overset{t=x}{=}$$

$$= \int\limits_{kLT+LT/2-(i+1)T}^{kLT+LT/2} a_k^{(L-i)}(t)\, a_k^{(1)}(t)\, dt.$$

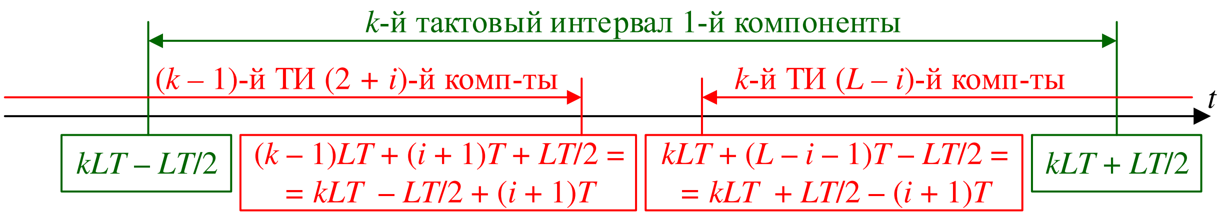

Рис. 3.3. Пояснение для определения границ интегрирования

С учётом изложенного, преобразуем (3.20):

$$\max_{C,d,l}\left\{\left|PC_{k,l}^{(1,d)}\right|\right\} = \max_{d>1}\left\{\left|\int\limits_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L)\, a_k^{(d)}(t,L)\, dt\right|\right\} =$$

$$= \max_{d>1}\left\{\frac{1}{L}\left|\int\limits_{-LT/2+kLT+\Delta t_d}^{-LT/2+kLT+LT} a\left(\frac{t-kLT}{L}\right) a\left(\frac{t-\Delta t_d-kLT}{L}\right) dt\right|\right\} =$$

$$= \max_{d>1}\left\{\left|\int\limits_{-T/2+kT+\Delta t_d/L}^{-T/2+kT+T} a(t-kT)\, a\left(t-\frac{\Delta t_d}{L}-kT\right) dt\right|\right\}.$$

Учитывая, что максимальный модуль коэффициента парциальной корреляции сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты совпадает с максимальным модулем коэффициента парциальной корреляции многокомпонентных сигналов, а также переходя для удобства к $k = 0$, получим:

$$\max_{C,p,d,k,l}\left\{\left|PC_{k,l}^{(p,d)}\right|\right\} = \max_{d>1}\left\{\left|\int\limits_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)\,a(t-\Delta t_d / L)\,dt\right|\right\} \le E_a\,, \tag{3.21}$$

где максимум ищется по $d = 2, 3, \ldots, L$. Для получения нормированного коэффициента парциальной корреляции, необходимо рассматривать отношение $PC_{k,l}^{(p,d)} / E_a$, т.е.

$$\left|PC_{k,l}^{(p,d)}\right| / E_a \le 1. \tag{3.22}$$

Рассмотрим коэффициент групповой корреляции для сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты:

$$GC_k^{(1)} = \sum_{d=2}^{L}\sum_{l=0}^{N-1} PC_{k,l}^{(p,d)} = \sum_{d=2}^{L}\left(PC_{k,k-1}^{(1,d)} + PC_{k,k}^{(1,d)}\right) =$$

$$= \sum_{d=2}^{L}\sum_{l=k-1}^{l=k} C_k^{(r_1)} C_l^{(q_d)*} \int\limits_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L)\,a_l^{(d)}(t,L)\,dt\,. \tag{3.23}$$

Определение значения максимального модуля коэффициента групповой корреляции зависит от возможных значений и комбинаций значений множителей $C_k^{(r_1)} C_l^{(q_d)*}$ в каждом слагаемом (3.23). Рассмотрим случай использования одинакового сигнального созвездия в каждой компоненте. При этом будем считать, что для каждой точки сигнального созвездия, находящейся на окружности единичного радиуса, имеется противоположная точка. В силу независимости выбора информационных символов и, соответственно, точек сигнального созвездия в каждом тактовом интервале каждой компоненты, всегда возможно осуществление следующего равенства

$$C_k^{(r_1)} C_l^{(q_d)*} = \operatorname{sign}\left(\int\limits_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L)\,a_l^{(d)}(t,L)\,dt\right), \tag{3.24}$$

где $l = k - 1$, $l = k$ и $d = 2, 3, \ldots, L$. Выполнение условия (3.24) обеспечит максимальное значение модуля коэффициента групповой корреляции для сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты:

$$MGC = \max_{C}\left\{\left|GC_k^{(1)}\right|\right\} = \sum_{d=2}^{L}\sum_{l=k-1}^{l=k}\left|\int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_k^{(1)}(t,L)\,a_l^{(d)}(t,L)\,dt\right|. \qquad (3.25)$$

Как и при рассмотрении (3.20), в (3.25) имеется только $(L-1)$ различных слагаемых из $2(L-1)$. Учитывая изложенное, а также осуществляя преобразования, аналогичные преобразованиям (3.20), получим:

$$MGC = 2\sum_{d=2}^{L}\left|\int_{-T/2+kT+\Delta t_d/L}^{-T/2+kT+T} a(t-kT)\,a\left(t-\frac{\Delta t_d}{L}-kT\right)dt\right|. \qquad (3.26)$$

Наконец, учитывая, что максимальный модуль коэффициента групповой корреляции сигнала k-го тактового интервала 1-й компоненты совпадает с максимальным модулем коэффициента групповой корреляции (МКГК) многокомпонентных сигналов в целом, и, переходя к первому тактовому интервалу, получим:

$$MGC = \max_{C,p,k}\left\{\left|GC_k^{(p)}\right|\right\} = 2\sum_{d=2}^{L}\left|\int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)\,a(t-\Delta t_d)\,/\,L\,dt\right| \le 2(L-1)E_a. \quad (3.27)$$

Для получения нормированного коэффициента групповой корреляции, необходимо рассматривать отношение $GC_k^{(p)}/(2(L-1)E_a)$, однако далее будет показано, что удобнее осуществлять нормировку делением на E_a, так как в этом случае сохраняется возможность выявления общих тенденций в решениях оптимизационной задачи. Таким образом, предлагается вычислять максимальное значение коэффициента групповой корреляции подставляя нормированные коэффициенты парциальной корреляции согласно (3.22). Производя деление (3.27) на E_a, получаем ограничение значения МКГК величиной $\kappa \in [0,\ 2(L-1)]$:

$$MGC^{\text{норм}} = 2\sum_{d=2}^{L}\left|\int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)\,a(t-\Delta t_d/L)\,dt\right| / E_a \le \kappa. \qquad (3.28)$$

В общем случае, при наличии МСИ, множество возможных значений сигнала, получаемых на выходе согласованного фильтра в отсчётные моменты времени $t = kT$, формирует «зашумлённое» сигнальное созвездие (рис. 3.4), причём радиус одного облака оказывается равным величине $MGC^{\text{норм}}$. Таким образом, величина $MGC^{\text{норм}}$ является адекватной мерой уровня МСИ в многокомпонентных сигналах.

Отметим, что при наличии рассчитанных коэффициентов парциальной корреляции для любой последовательности ошибочных символов $(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{L-1})$ аналогично тому, как это было сделано в разд. 1.3, возможен расчёт квадрата евклидова расстояния:

$$d^2(\xi) = g_\xi[0] + 2\sum_{m=1}^{L-1} \mathrm{Re}\left\{g_\xi^*[m] PC_{1,1}^{(1,\,m+1)} / E_a\right\}, \tag{3.29}$$

где квадрат евклидова расстояния соответствует последовательности нормированных ошибочных символов $(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{L-1})$, $g_\xi[m]$ – автокорреляционная функция последовательности ошибочных символов.

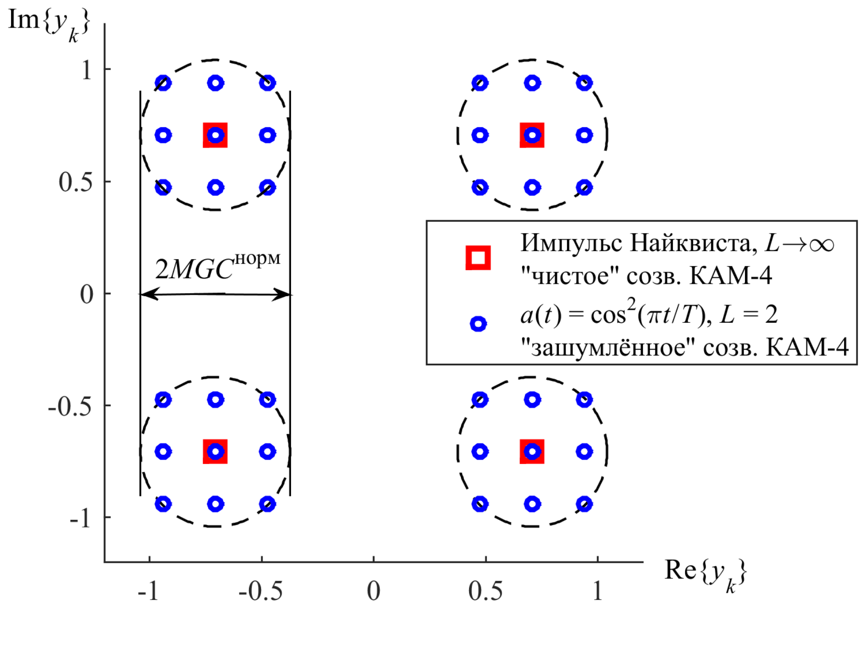

Рис. 3.4. Отсчёты сигнала на выходе согласованного фильтра

3.5. Формулировка оптимизационной задачи

В представленных выше многокомпонентных сигналах параметрами являются количество компонент L, форма импульса $a(t)$ и типы сигнальных созвездий компонент. Из-за наличия параметра-функции $a(t)$, любая оптимизационная задача будет сводиться к поиску экстремума функционала, что нежелательно при численном решении. В таких случаях обычно используют то или иное разложение искомой функции. В данной работе предлагается использование усечённого разложения импульса $a(t)$ в ряд Фурье с допущением, что отбрасывание старших членов разложения не сильно влияет на результат решения задачи:

$$a(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{K-1}\left(c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + s_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right), \qquad (3.30)$$

где $2K - 1$ – число искомых параметров разложения импульса $a(t)$. Теперь любая оптимизационная задача будет сводиться к поиску экстремума функции $2K$ переменных (включая значение L), для чего могут быть использованы многие известные алгоритмы. Для нахождения оптимальных решений в данной работе был использован алгоритм «active-set» функции «fmincon» в среде Matlab.

Аналогично подходу, изложенному в разд. 1.4, в качестве величины удельных спектральных затрат используется значение полосы частот $W_{99\%}$, содержащей 99% энергии сигнала. Тогда оптимизационная задача сводится к поиску формы импульса $a_{\text{opt}}(t)$, обеспечивающей при заданном количестве компонент L минимальное значение $W_{99\%}$.

Однако, в такой постановке задачи поиск решения оказывается вычислительно сложным и неудобным с точки зрения программирования, поэтому предлагается итеративный алгоритм поиска оптимальных импульсов. На первом шаге для эмпирически выбранных значений полосы частот W отыскиваются импульсы, обеспечивающие максимальную концентрацию энергии (BEC):

$$BEC\left(W, L, a(t)\right) = \frac{1}{P_{\text{ср}}} \int_{-W/2}^{W/2} G\left(f, L, a(t)\right) df\,. \qquad (3.31)$$

Далее выбирается та пара значений W, для которых значение BEC оказывается ближе всего к значению 0,99 слева и справа. На втором шаге новые значения полосы частот выбираются из диапазона, полученного на первом шаге, и все действия повторяются. Также возможно применение метода дихотомии, в соответствии с которым на каждом шаге, начиная со второго, выбирается одно значение полосы – среднее между значениями, полученными на предыдущем шаге. В качестве критерия остановки используется условие достижения отклонения BEC от значения 0,99 не более чем на $5{\cdot}10^{-6}$. Такая высокая точность требуется для получения не менее трёх достоверных значащих цифр в значении $W_{99\%}$. Таким образом, оптимизационная задача может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}\left(a_{\text{opt}}(t), W_{99\%}\right)=\underset{W}{\operatorname{argmin}}\left\{\left|\max_{a(t)}\left\{BEC\left(W, a(t)\right)\right\}-0{,}99\right|\right\}, \\ \left|BEC\left(W_{99\%}, a_{\text{opt}}(t)\right)-0{,}99\right| \leq 5 \cdot 10^{-6}.\end{gathered} \tag{3.32}$$

Для получения единственного оптимального решения, на искомые импульсы накладывается ограничение энергии:

$$E_a = 1. \tag{3.33}$$

В качестве первого дополнительного ограничения, налагаемого на искомые импульсы, может быть использовано ограничение максимального значения нормированного коэффициента групповой корреляции величиной $\kappa \in [0,\ 2(L-1)]$:

$$MGC^{\text{норм}}=\frac{2}{E_a}\sum_{d=2}^{L}\left|\int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)\, a\left(t-\Delta t_d / L\right) dt\right| \leq \kappa. \tag{3.34}$$

Также в качестве первого дополнительного ограничения может выступать квадрат свободного евклидова расстояния ρ:

$$d^2(e)=g_\xi[0]+2\sum_{m=1}^{L-1}\operatorname{Re}\left\{g_\xi^*[k] PC_{k,k}^{(1,\,m+1)} / E_a\right\} \geq \rho \quad \forall\, g_\xi, \tag{3.35}$$

однако, следует учитывать, что для выполнения данного ограничения в оптимизационную задачу должно быть включено большое количество неравенств (табл 1.2).

Для многокомпонентных сигналов, использующих M-элементные созвездия КАМ, возможен поиск оптимальных импульсов с дополнительным ограничением пик-фактора результирующего многокомпонентного сигнала:

$$\frac{3(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}+1}\frac{1}{E_a/T}\frac{1}{L}\left(\sum_{p=1}^{L}\left|a\left(\frac{t_n-\Delta t_p}{L}\right)\right|\right)^2 \le \Pi, \tag{3.36}$$

где $t_n = LT/2 - T + (n-1)\Delta t$, $n = 1, 2, \ldots, N_{\text{PAPR}}$, $\Delta t = T/(N_{\text{PAPR}}-1)$, $\Pi \ge 1$ и N_{PAPR} – количество точек, выбранных с равномерным шагом на интервале импульса, в которых осуществляется проверка значений пик-фактора. С одной стороны, переход от непрерывного интервала к конечному набору значений из интервала будет приводить к погрешности ограничения пик-фактора. С другой стороны, при увеличении количества точек, в которых осуществляется проверка, точность выполнения данного ограничения возрастает.

Таким образом, поставленная оптимизационная задача может быть решена путём многократного поиска экстремума функции многих переменных с использованием дополнительных нелинейных ограничений (3.34), набора ограничений (3.35) и набора из N_{PAPR} ограничений (3.36).

При численном решении поставленной оптимизационной задачи необходимо определить достаточное количество коэффициентов разложения импульса в ряд Фурье. Будем считать достаточным количество коэффициентов $(2K'-1)$, при котором выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
\sigma^2 = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2}\left(a_{(K')}(t) - a_{(K'+i)}(t)\right)^2 dt \le 0{,}001,\\
2\left|MGC_{K'} - MGC_{K'+i}\right| / \left(MGC_{K'} + MGC_{K'+i}\right) \le 0{,}01,\\
2\left|PAPR_{K'} - PAPR_{K'+i}\right| / \left(PAPR_{K'} + PAPR_{K'+i}\right) \le 0{,}01,\\
i = 1,\ 2,\ 3,
\end{gathered} \tag{3.37}$$

где $a_{(K)}(t)$ – импульс, определенный $2K-1$ коэффициентами ряда Фурье, MGC_K, $PAPR_K$ – соответствующие значения максимального коэффициента групповой корреляции и пик-фактора многокомпонентного сигнала. Конечно, такой подход не имеет строгого математического обоснования, однако он был успешно применён в процессе численного решения поставленной оптимизационной задачи.

Наконец, принимая во внимание погрешности численного решения, ограничим минимальные значения MGC и $PAPR$ следующим образом:

$$\min\{MGC\} = 0{,}01, \min\{PAPR\} = 1{,}01. \tag{3.38}$$

3.6. Характеристики оптимальных решений

В отличие от методики, описанной в разд. 1.4, предлагаемая методика синтеза оптимальных импульсов для многокомпонентных сигналов предполагает решение нелинейной оптимизационной задачи. В этом случае поверхность в многомерном пространстве, описывающая зависимость функционала от $2K$ аргументов, может содержать несколько локальных экстремумов, и алгоритм оптимизации может остановиться в одном из них, не достигнув глобального экстремума. Преимуществом предлагаемого подхода является то, что в качестве решения выступает набор коэффициентов разложения импульса в ряд Фурье, т.е. фактически сам импульс, в то время как в первой методике решением является набор отсчётов АКФ импульса. Однако, учитывая, что сформулированный критерий минимальной полосы, содержащей 99% энергии сигнала, предполагает многократную оптимизацию на интервале значений полосы W, для этого интервала есть возможность построить зависимость отклонения концентрации энергии от требуемого значения:

$$\Delta_{BEC}(W) = \left| \max_{a(t)} \left\{ BEC\left(W, a(t)\right) \right\} - 0{,}99 \right|. \tag{3.39}$$

На рис. 3.5 представлена зависимость отклонения $\Delta_{BEC}(W)$ от значения нормированной полосы W на разных итерациях алгоритма. В этом примере производилась оптимизация импульса с единственным ограничением пик-фактора 8-компонентного сигнала (П = 3,05) на интервале значений нормированной полосы $TW_{99\%}$ = [0,61 … 0,63] при использовании метода дихотомии. Как можно видеть, полученное после 10 итераций решение обеспечивает минимальное отклонение концентрации энергии от заданного значения 0,99. Этот факт косвенно подтверждает оптимальность найденного решения на рассматриваемом интервале.

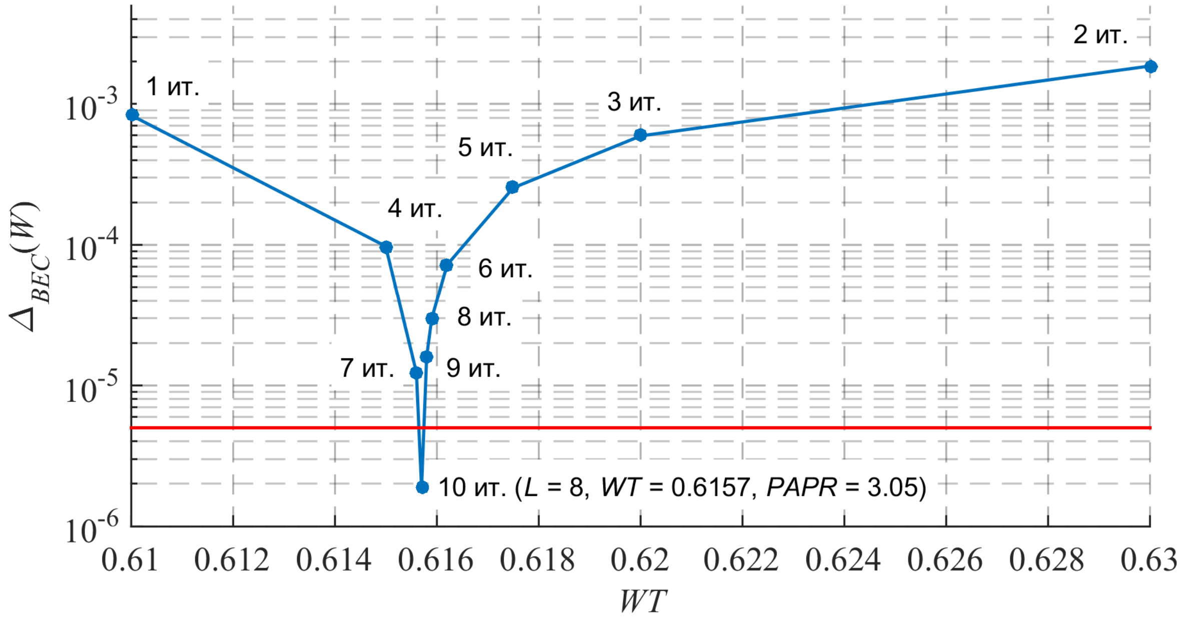

Рис. 3.5. Отклонение концентрации энергии от требуемого значения на разных итерациях алгоритма

В данном разделе представлены характеристики оптимальных импульсов, полученных при численном решении сформулированной оптимизационной задачи. Были получены следующие группы решений: при наличии единственного ограничения на пик-фактор результирующего многокомпонентного сигнала, единственного ограничения на максимальный коэффициент групповой корреляции, единственного ограничения на величину свободного евклидова расстояния для созвездий ФМ-2, ФАМ-4, совместного ограничения на пик-фактор сигнала и величину свободного евклидова расстояния, совместного ограничения на пик-фактор сигнала и МКГК. В случае ограничения пик-фактора сигнала рассматривались симметричные (чётные) импульсы[5], в остальных случаях – симметричные и несимметричные импульсы. Примеры оптимальных импульсов представлены на рис. 3.6.

---

[5] При поиске оптимального решения в виде чётной функции $a(t)$ все коэффициенты s_k в разложении (3.30) считаются равными нулю, т.е. производится только поиск коэффициентов c_k, $k = 0, 1, \ldots, K - 1$.

Отметим некоторые особенности полученных импульсов. При ограничении только пик-фактора колебаний импульсы всегда получаются положительными ($a(t) \geq 0$), при этом с усилением ограничения, т.е. с уменьшением значения П, всё большая часть импульса на его краях становится равной нулю (в действительности на краях получаются очень слабые колебания около нуля). В такой ситуации, у сигнала фактически уменьшается число компонент. Например, из рис. 3.6*а* следует, что при значении П < 3 больше половины импульса равно нулю

$$a(t) = 0, |t| > T/4,$$

а значит, по-прежнему удовлетворяя условию ортогональности импульсов одной компоненты, можно объединить компоненты 1 и 5, 2 и 6 и т.д. и вместо восьми компонент ($L = 8$) рассматривать четыре ($L = 4$). Также отметим, что для случаев, в которых часть импульса на краях равна нулю, при решении оптимизационной задачи без дополнительного предположения о чётности импульса получается несколько формально разных решений. Однако, фактически такие решения являются одинаковыми и отличаются только сдвигом по оси времени на величину, не превышающую интервала нулевого значения импульса. Значения МКГК таких разных решений одинаковы, поэтому, для определённости, в случае единственного ограничения на пик-фактор сигнала, рассматриваются только чётные импульсы.

При единственном ограничении МКГК особенностью результатов является то, что, как и в случае ограничения только пик-фактора сигнала, без дополнительного предположения о чётности импульса, получается несколько решений. Однако, на этот раз импульсы получаются действительно разными и обеспечивают разные значения пик-фактора сигнала. В каждом случае, для определённости, из набора решений выбирается один импульс с минимальным значением пик-фактора. Симметричные импульсы всегда оказываются не лучше несимметричных импульсов (т.е. обеспечивают заданное значение МКГК при б*о*льшей ширине полосы частот).

Коэффициенты разложения для оптимальных импульсов представлены в приложении 1.

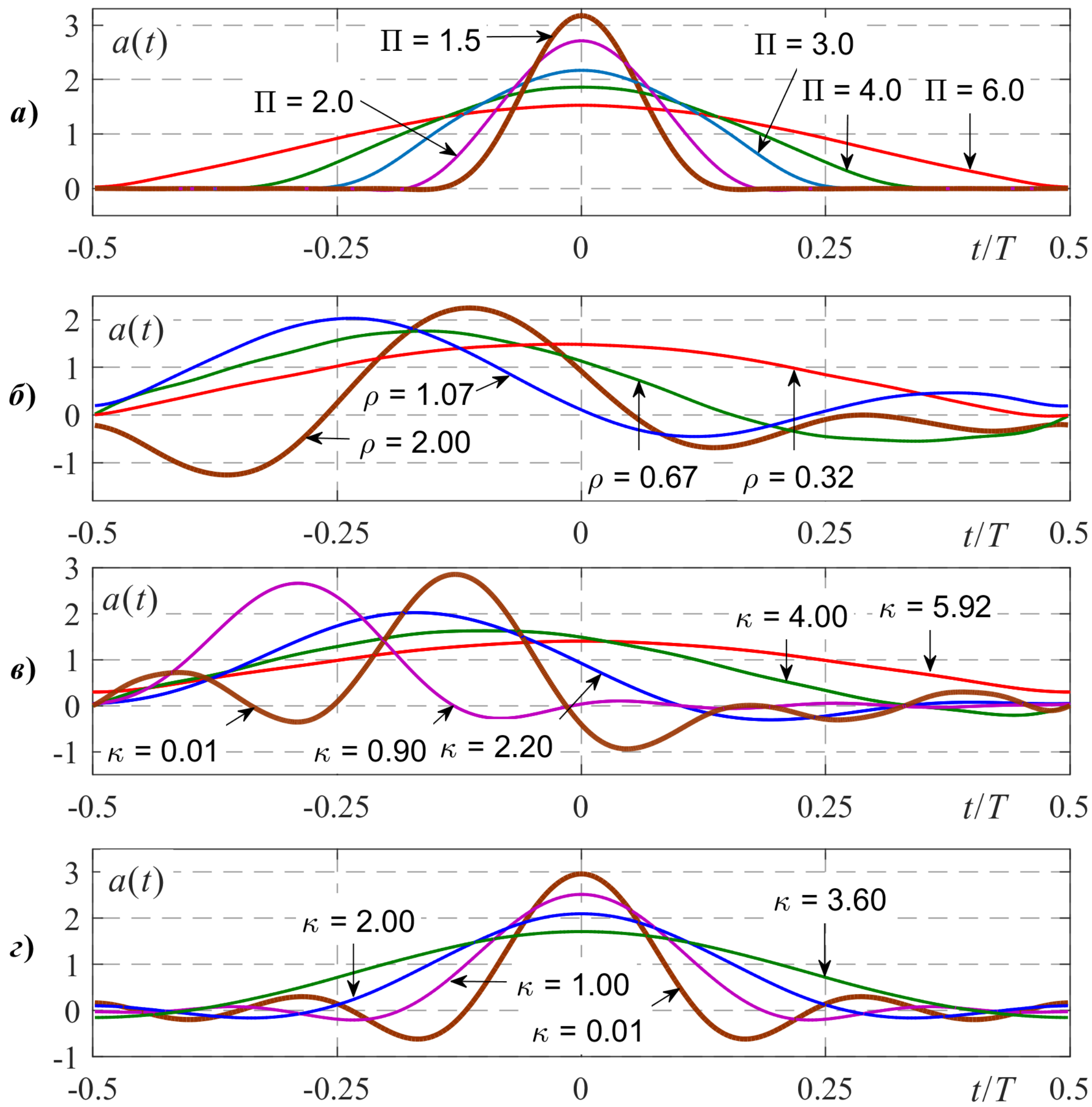

Рис. 3.6. Примеры оптимальных импульсов *а*) симметричные, с единственным ограничением пик-фактора сигнала *б*) несимметричные, с единственным ограничением свободного евклидова расстояния *в*) несимметричные, с единственным ограничением МКГК *г*) симметричные, с единственным ограничением МКГК

На рис. 3.7 представлены характеристики оптимальных импульсов – нормированная полоса частот в зависимости от потерь в величине свободного евклидова расстояния – для созвездий ФМ-2 (*а*) и ФАМ-4 (*б*). Рассмотрим сначала характеристики оптимальных решений, полученных при единственном ограничении свободного евклидова расстояния. Из рис. 3.7*а* следует, что для случая 8-компонентных сигналов на основе созвездия ФМ-2 полученные оптимальные несимметричные импульсы обеспечивают характеристики, практически совпадающие с характеристиками оптимальных сигналов с частичным откликом

(Partial Response Signals, PRS, методика оптимизации была рассмотрена в разд. 1.4). При использовании симметричных импульсов потери в свободном евклидовом расстоянии немного увеличиваются – это можно видеть в диапазоне значений полосы $TW_{99\%} = [0{,}4,\ 0{,}5]$. В случае 4-компонентных сигналов на основе созвездия ФАМ-4 (рис. 3.7*б*) даже при использовании оптимальных несимметричных импульсов, полученных при единственном ограничении свободного евклидова расстояния, наблюдается проигрыш в свободном евклидовом расстоянии до 0,9 дБ по сравнению с оптимальными сигналами с частичным откликом. Однако, при увеличении количества компонент до восьми максимальный проигрыш сокращается до 0,3 дБ.

Как уже было отмечено, использование ограничения свободного евклидова расстояния при поиске численного решения оптимизационной задачи может оказаться затруднительным, особенно в случае большого количества компонент ($L > 4$) и одновременно при использовании сигнального созвездия высокого порядка ($M > 2$). В этом случае «регулировка» уровня МСИ может осуществляться с помощью более простого ограничения максимального коэффициента групповой корреляции, который не учитывает вид используемого сигнального созвездия. Однако, как можно видеть из представленных результатов, использование единственного ограничения МКГК приводит к увеличению потерь в величине свободного евклидова расстояния и, в итоге, сказывается на ухудшении помехоустойчивости многокомпонентных сигналов. Несмотря на отмеченную особенность оптимизации с ограничением МКГК, эта величина оказывается пропорциональной величине потерь в свободном евклидовом расстоянии, а значит, является адекватной мерой уровня МСИ.

Наконец, оптимальные импульсы, полученные при единственном ограничении пик-фактора сигнала, оказываются худшими с точки зрения потерь в величине свободного евклидова расстояния при фиксированной полосе частот. Однако, для обоих рассмотренных случаев сигнальных созвездий, с увеличением уровня МСИ характеристики сигналов приближаются к характеристикам, полученным при оптимизации с единственным ограничением МКГК.

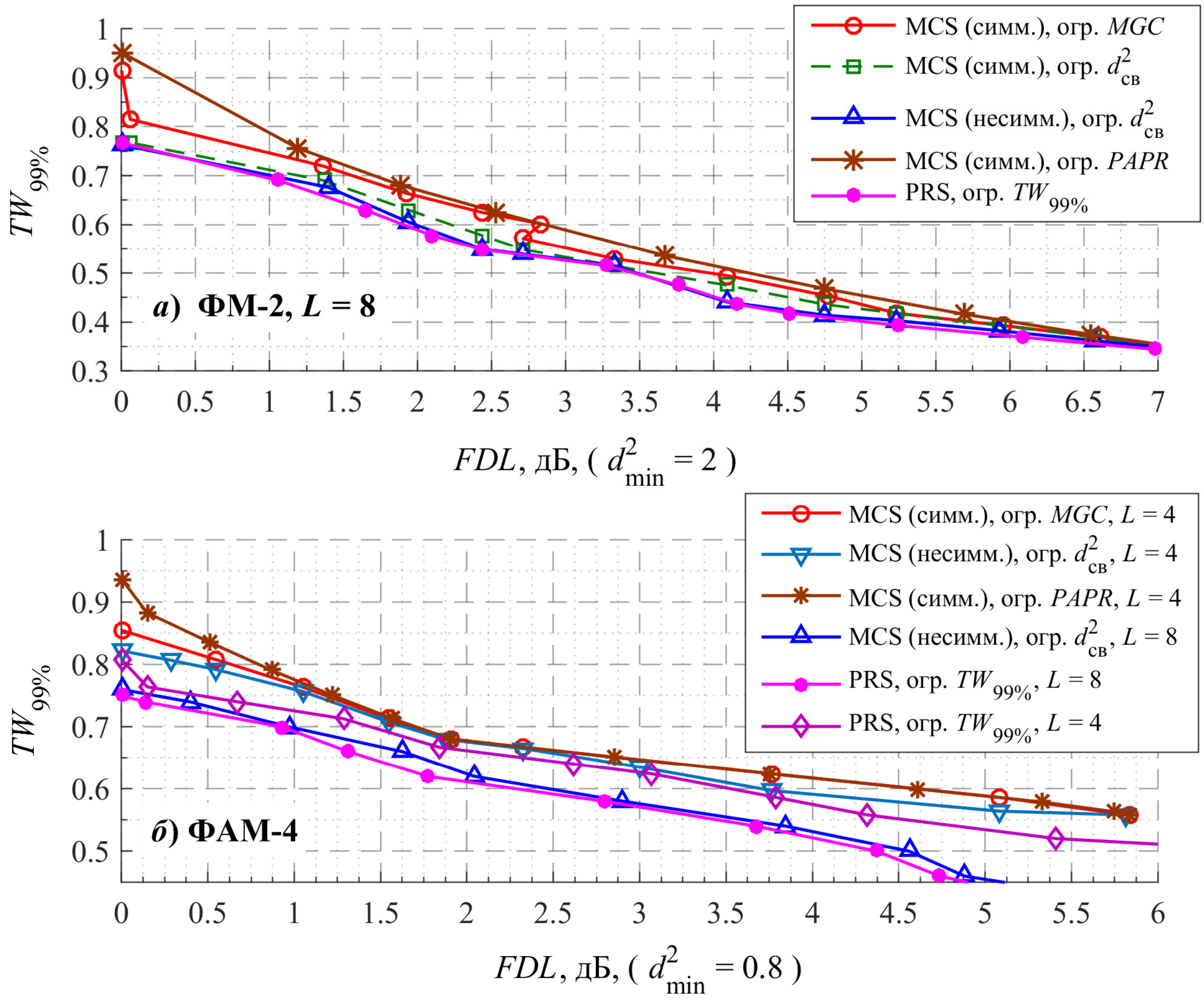

Рис. 3.7. Зависимость нормированной полосы частот от потерь в свободном евклидовом расстоянии для оптимальных импульсов для созвездий ФМ-2 (*а*), ФАМ-4 (*б*)

На рис. 3.8 представлены характеристики оптимальных решений в плоскости значений пик-фактора сигнала и МКГК для случаев оптимизации с единственным ограничением пик-фактора сигнала и с единственным ограничением МКГК. Интересной особенностью решений, полученных при ограничении только пик-фактора сигнала, оказывается то, что соответствующие значения пик-фактора и МКГК хорошо аппроксимируются линейной зависимостью для всех рассмотренных значений L:

$$PAPR = MGC^{норм} + 1,$$

поэтому на рис. 3.8 линии (1–6) являются отрезками одной прямой. Тот факт, что линии начинаются не из точки (0, 1) объясняется тем, что при П → 0 форма импульса стремится к прямоугольной, а точное разложение прямоугольного импульса в ряд Фурье оказывается проблемным (приводит к эффекту Гиббса).

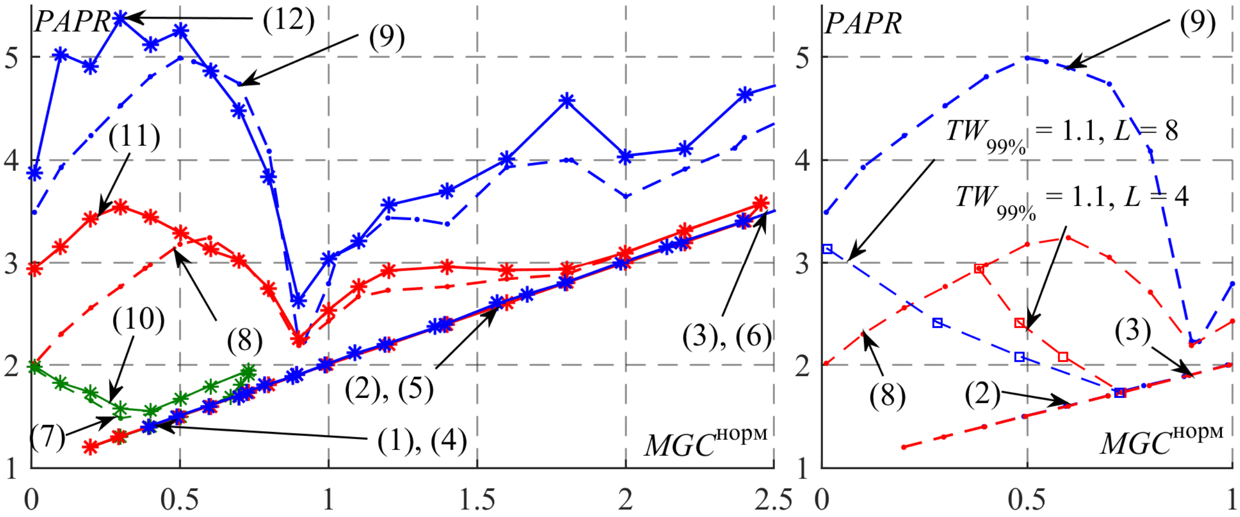

Рис. 3.8. Характеристики оптимальных импульсов: (1)–(6) для единственного ограничения пик-фактора сигнала; (7)–(12) для единственного ограничения МКГК; (1), (4), (7), (10) для $L = 2$; (2), (5), (8), (11) для $L = 4$; (3), (6), (9), (12) для $L = 8$; (1)–(3), (7)–(9) и (13), (14) для чётных импульсов

Заметной особенностью решений, полученных при единственном ограничении МКГК, является локальный минимум соответствующей кривой на рис. 3.8. При анализе помехоустойчивости многокомпонентных сигналов было обнаружено, что для импульсов с κ ≤ 0,9 (т.е. находящихся левее минимума) при приёме по алгоритму Витерби помехоустойчивость совпадает с помехоустойчивостью сигналов без МСИ. В противном случае всегда получается проигрыш.

Из анализа результатов, полученных для фиксированных значений полосы частот, следует, что увеличение числа компонент позволяет немного улучшить характеристики решений, т.е. получить заданное значение полосы при меньших значениях пик-фактора и/или МКГК (правая часть рис. 3.8).

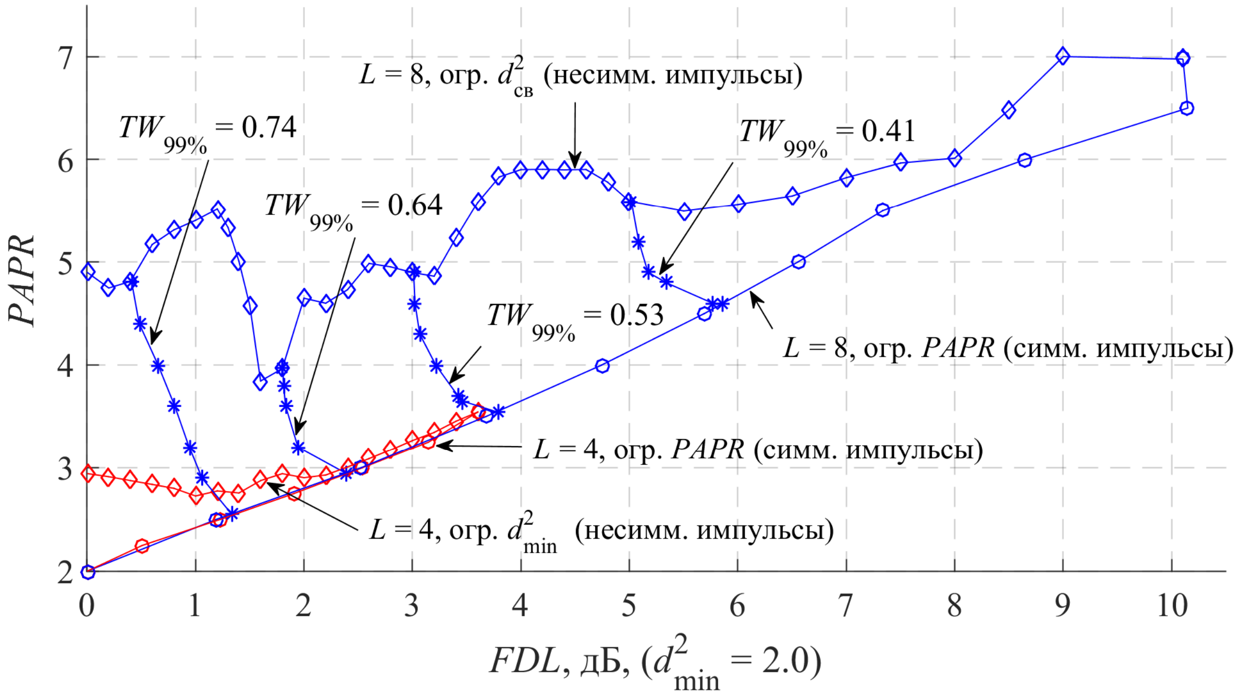

Рис. 3.9. Характеристики оптимальных импульсов, полученных при ограничении пик-фактора сигнала и величины свободного евклидова расстояния

На рис. 3.9 представлены характеристики оптимальных решений в плоскости значений пик-фактора сигнала и потерь в величине свободного евклидова расстояния для случаев оптимизации с единственным ограничением пик-фактора сигнала и с единственным ограничением свободного евклидова расстояния. Как и в случае анализа характеристик оптимальных решений в плоскости значений МКГК и пик-фактора, на данном рисунке характеристики импульсов, полученных при единственном ограничении пик-фактора сигнала, с хорошей точностью описываются линейной зависимостью:

$$PAPR = 0{,}46\ FDL_{(\text{дБ})} + 1{,}91.$$

В целом, кривые, соответствующие ограничению МКГК на рис 3.8 и ограничению свободного евклидова расстояния на рис. 3.9, имеют схожую форму с учетом того, что в случае ограничения МКГК нулевое значение *FDL* достигается при $MGC^{\text{норм}} = 0{,}9$. Таким образом, ограничение МКГК позволяет получить более широкий диапазон решений, включая квазиортогональные сигналы ($MGC^{\text{норм}} = 0{,}01$). В случае единственного ограничения величины свободного евклидова расстояния, на кривой характеристик наблюдается локальный минимум, соответствующий полосе частот $TW_{99\%} = 0{,}658$, пик-фактору $PAPR = 3{,}85$, величине потерь в свободном евклидовом расстоянии $FDL = 1{,}6$ дБ и нормированному значению максимального коэффициента групповой корреляции $MGC^{\text{норм}} = 2{,}04$. Соответствующий локальный минимум можно видеть и на кривой (12) на рис. 3.8.

3.7. Оценка эффективности многокомпонентных сигналов

Наибольший интерес представляет исследование эффективности предлагаемых многокомпонентных сигналов с оптимальными импульсами. Для этой цели было проведено имитационное моделирование формирования, передачи через канал с АБГШ и приёма многокомпонентных сигналов. В качестве алгоритма обработки в работе использовался алгоритм Витерби. Сигналы передавались кадрами по 2000 бит, т.е. по 1000 модуляционных символов из созвездия КАМ-4. Обработка производилась независимо для каждой квадратуры сигнала. Для исследования предельных характеристик, к каждому кадру добавлялось по L–1 нулевых символов в конец, и глубина принятия решения в алгоритме Витерби устанавливалась равной ($1000 + L - 1$), т.е. фактически рассматривался оптимальный приём.

На рис. 3.10 представлены кривые помехоустойчивости для восьми-компонентных сигналов (Multicomponent Signals, MCS) на основе созвездия КАМ-4 и оптимальных импульсов, полученных при единственном ограничении свободного евклидова расстояния. Обратим внимание, что кривая, соответствующая максимальному евклидову расстоянию (и нулевому значению *FDL*), идёт правее кривой потенциальной помехоустойчивости, однако эти кривые сближаются в области малых значений вероятности битовой ошибки. Связано это с тем, что В пределе, для меньших вероятностей битовой ошибки, многокомпонентные сигналы должны обеспечить такую же эффективность, как и ортогональные сигналы.

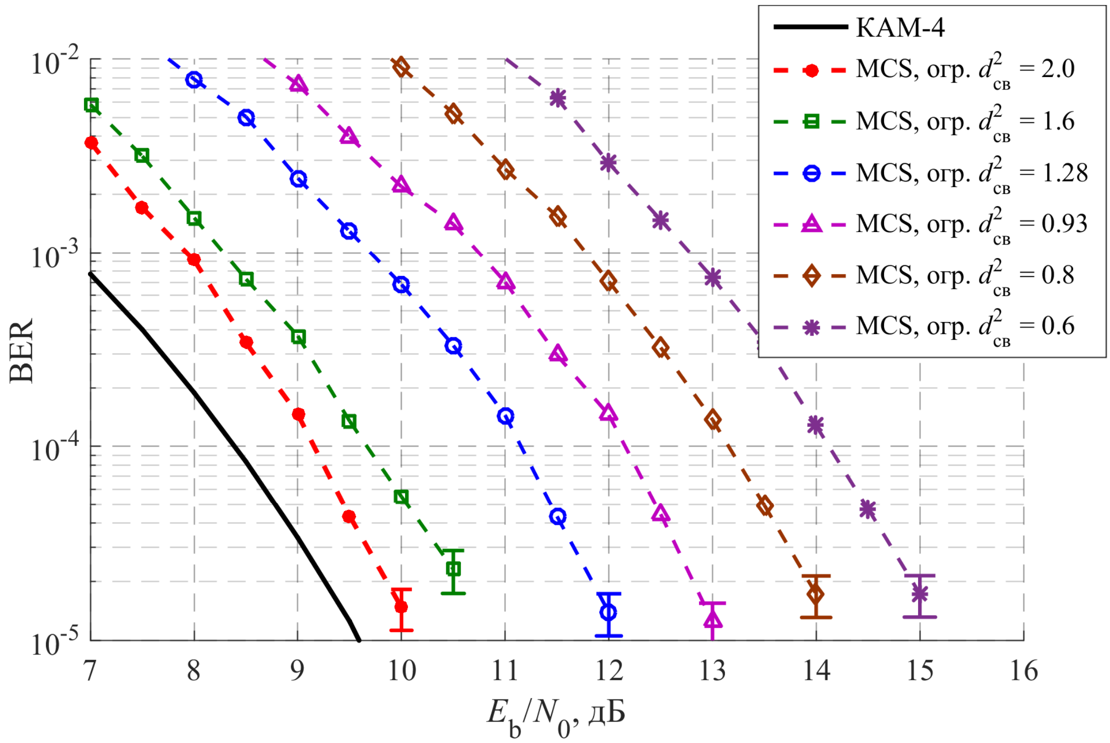

Рис. 3.10. Кривые помехоустойчивости для восьми-компонентных сигналов ($L = 8$) с оптимальными импульсами, полученными при единственном ограничении свободного евклидова расстояния

В качестве параметров эффективности рассматривались удельные энергетические затраты

$$\beta_E = E_b/N_0 = P_{ср} / (RN_0) \tag{3.40}$$

где R – скорость передачи информационных бит (бит/с), и удельные спектральные затраты

$$\beta_F = W_{99\%} / R. \tag{3.41}$$

На рис. 3.11 представлены результаты сравнения эффективности многокомпонентных сигналов с оптимальными импульсами для $L = 8$ с традиционными сигналами на основе усечённых RRC-импульсов. Все точки на рис. 3.11 соответствуют вероятности битовой ошибки 10^{-4}. Также на рисунке представлена кривая, соответствующая границе Шеннона:

$$\beta_E = \left(2^{1/\beta_F} - 1\right)\beta_F, \tag{3.42}$$

которая определяет предельные возможности передачи информации в канале с АБГШ; эта кривая представлена с целью обозначения «разрешённого» диапазона значений (β_F, β_E).

В качестве критерия выбора значения L для RRC-импульсов использовалось условие содержания в усечённом импульсе не менее 99,99% энергии соответствующего нефинитного импульса. Такой подход был выбран эмпирически и обеспечивает примерно одинаковую скорость спада спектра в области внеполосных излучений для RRC-импульсов и рассматриваемых оптимальных импульсов. Значения нормированной полосы частот $TW_{99\%}$ для RRC-импульсов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Характеристики RRC-импульсов

Коэфф. сглаживания, α	Кол-во учитываемых интервалов, L	Нормированная полоса, $TW_{99\%}$	Пик-фактор, $PAPR$, дБ
0	2028	0,990	15,05
0,1	26	1,018	7,41
0,2	18	1,071	5,71
0,3	14	1,132	4,47
0,4	12	1,196	3,49
0,5	10	1,264	3,29
0,6	8	1,333	3,33
0,7	8	1,406	3,27
0,8	8	1,479	3,32
0,9	8	1,553	3,51
1,0	6	1,628	3,48

Проведём анализ результатов на рис. 3.11. Во-первых, сигналы, полученные при единственном ограничении МКГК и при единственном ограничении свободного евклидова расстояния, обеспечивают примерно одинаковую эффективность. Однако, в случае оптимизации несимметричных импульсов с ограничением свободного евклидова расстояния всегда наблюдается лучшая эффективность; многокомпонентные сигналы с несимметричными импульсами, полученными при ограничении МКГК, оказываются на втором месте по эффективности; сигналы с симметричными импульсами с ограничением МКГК – на третьем; многокомпонентные сигналы с ограничением пик-фактора показывают худшую эффективность. Максимальная разность в энергетической эффективности для случаев использования оптимальных импульсов из групп решений с единственным ограничением пик-фактора и единственным ограничением свободного евклидова расстояния составляет около 1 дБ (отмечена на рис. 3.11 для $\beta_F = 0{,}37$). Во-вторых, вариант ограничения МКГК обеспечивает более широкий диапазон значений эффективности и включает квазиортогональные сигналы. В-третьих, хотя абсолютного выигрыша относительно сигналов с RRC-импульсами нет, тем не менее, с учётом значений коэффициента сглаживания $\alpha = 0{,}15–0{,}35$, используемых в реальных системах (DVB-S2, UMTS и т.д.), оптимальные многокомпонентные сигналы оказываются эффективнее традиционных сигналов с RRC-импульсами.

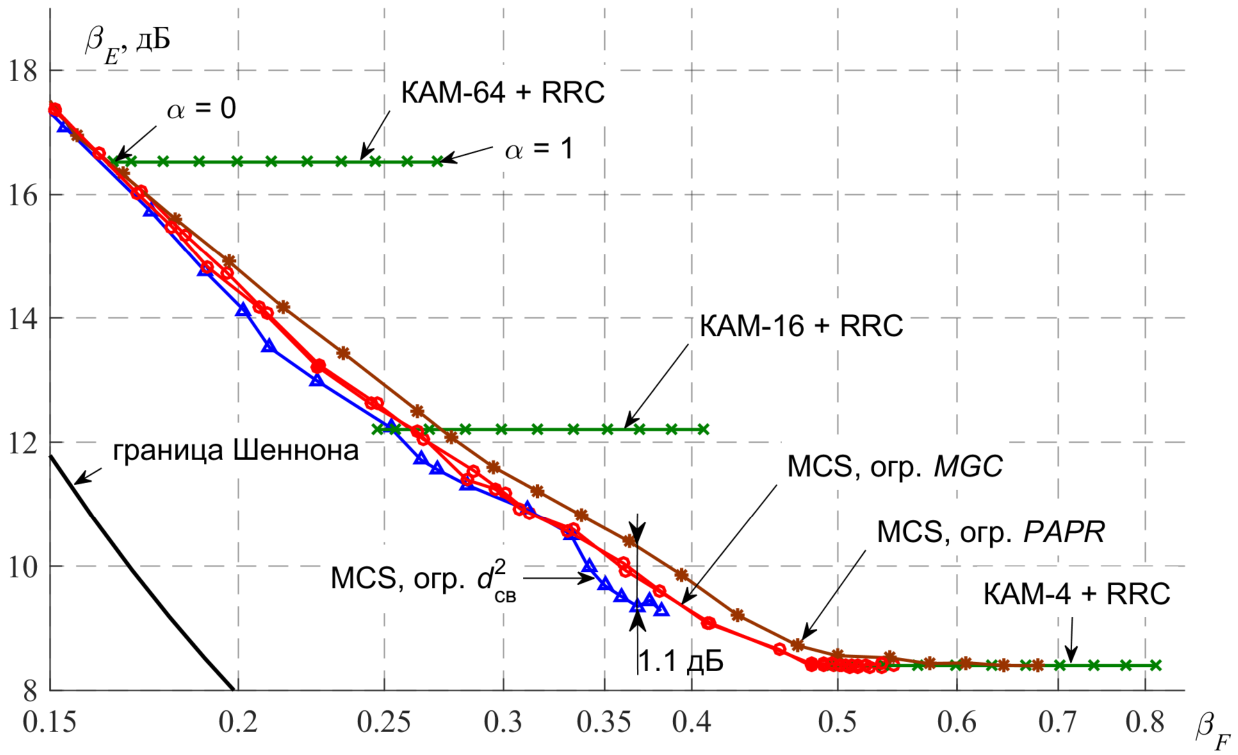

Рис. 3.11. Сравнение удельных затрат оптимальных многокомпонентных сигналов ($L = 8$) с удельными затратами традиционных сигналов с RRC-импульсами

Из анализа результатов на рис. 3.11, следует, что при использовании RRC-импульсов был бы разумным выбор нулевого значение коэффициента сглаживания ($\alpha = 0$), однако практическая реализация такого формирующего фильтра невозможна. Кроме того, пик-фактор сигнала оказывается самым высоким именно для значения $\alpha = 0$. Следовательно, сравнение эффективности модуляционных конструкций в традиционной плоскости (β_F, β_E) не всегда удобно. В связи с этим предлагается рассмотрение модифицированных удельных энергетических затрат, учитывающих значение пик-фактора формируемого сигнала:

$$\beta_E^* = P_{\max} / \left(R N_0 \right) = PAPR\ \beta_E. \tag{3.43}$$

На рис. 3.12 представлены кривые эффективности[6] в плоскости (β_F, β^*_E). В данном случае, во-первых, сигналы, полученные при ограничении только пик-фактора, всегда показывают лучшую эффективность; на втором месте по эффективности стоит вариант с симметричными импульсами с ограничением МКГК; далее следуют сигналы с несимметричными импульсами с ограничением МКГК, а вариант с несимметричными импульсами, полученными при единственном ограничении свободного евклидова расстояния, показывает худшую эффективность. Максимальная разность в величине модифицированных удельных энергетических затрат для многокомпонентных сигналов на основе импульсов, полученных при единственном ограничении пик фактора и единственном ограничении свободного евклидова расстояния, составляет около 2 дБ. При этом традиционные сигналы с RRC-импульсами всегда проигрывают по эффективности многокомпонентным сигналам. Во-вторых, видно, что использование значений $\alpha = 0{,}15$–$0{,}35$ является компромиссом между удельными энергетическими и спектральными затратами при дополнительном учёте пик-фактора колебаний. Пересчёт удельных энергетических затрат для сигналов с RRC-импульсами осуществлялся с учётом значений пик-фактора из табл. 3.1.

Для численной оценки выигрыша многокомпонентных сигналов рассмотрим сигналы на основе созвездия КАМ-4 с RRC-импульсами с коэффициентом сглаживания $\alpha = 0{,}2$, в этом случае традиционным сигналам соответствует точка (0,54, 14,1) на плоскости (β_F, β^*_E). При использовании 8-компонентных сигналов с оптимальными импульсами, полученными при единственном ограничении

---

[6] Несмотря на то, что граница Шеннона определена в традиционной плоскости (β_E, β_F), на данном рисунке она представлена с целью обозначения разрешенной области значений удельных спектральных и энергетических затрат, в которой могут работать реальные системы.

пик-фактора сигнала, возможно получение энергетического выигрыша 3,1 дБ при фиксированном значении удельных спектральных затрат, или, с другой стороны, возможно сокращение удельных спектральных затрат на 30% при фиксированных удельных энергетических затратах. При повышении удельных энергетических затрат на 1,2 дБ возможно обеспечение выигрыша в спектральной области около 37 %.

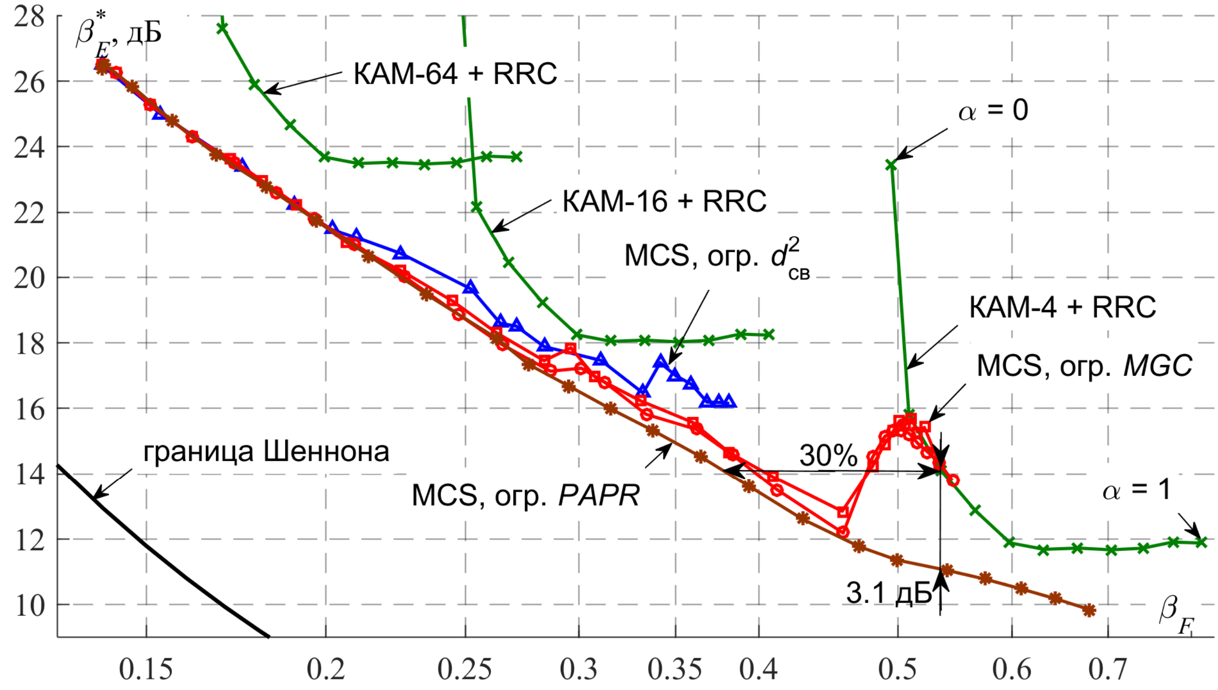

Рис. 3.12. Сравнение удельных затрат оптимальных многокомпонентных сигналов (L = 8) с удельными затратами традиционных сигналов с RRC-импульсами с учётом значений пик-фактора

3.8. Практический выигрыш от использования многокомпонентных сигналов

Для проверки спектральных свойств многокомпонентные сигналы с синтезированными оптимальными импульсами и случайными последовательностями символов из созвездия КАМ-4 воспроизводились на векторном генераторе Agilent с параметрами модуляции: несущая частота 1 ГГц, скорость манипуляции 1 Мсимв/с (T = 1 мкс). Полученные оценки энергетических спектров представлены на рис. 3.13: (*а*) – для случая использования оптимального импульса с нормированной полосой $TW_{99\%} = 0{,}763$, полученного с единственным ограничением свободного евклидова расстояния $d^2_{св} = 2{,}0$, (*б*) – для случая использования оптимального импульса с нормированной полосой $TW_{99\%} = 0{,}416$, полученного с единственным ограничением пик-фактора сигнала PAPR = 4,5. Как можно видеть, измеренные по критерию 99%-й концентрации энергии полосы частот хорошо соответствуют теоретическим значениям: погрешность составляет менее 1 %.

а) *б*)

Рис. 3.13. Примеры энергетических спектров многокомпонентных сигналов со случайными последовательностями символов и с оптимальными импульсами, полученными с единственным ограничением свободного евклидова расстояния $d^2_{св} = 2{,}0$ (*а*) и с единственным ограничением пик-фактора сигнала PAPR = 4,5 (*б*)

В табл. 3.2 представлены значения скоростей передачи данных в системе DVB-S2, использующей полосу частот 36 МГц, для предположения о замене традиционных сигналов без МСИ на основе RRC-импульсов на многокомпонентные сигналы с оптимальными финитными импульсами. С учётом более узкой нормированной полосы частот, в случае многокомпонентных сигналов возможно значительное увеличение символьной скорости и, следовательно, скорости передачи данных.

Таблица 3.2

Система	DVB-S2	MCS	MCS
Полоса частот системы	36 МГц	36 МГц	36 МГц
Вид импульса	RRC, $\alpha = 0{,}25$	Оптимальный $d^2_{\text{св}} = 2{,}0$	Оптимальный $d^2_{\text{св}} = 1{,}07$
Нормированная полоса $TW_{99\%}$	1,103	0,763	0,539
Максимальная символьная скорость	32,64 Мсимв/с	47,18 Мсимв/с	66,79 Мсимв/с
Битовая скорость при использовании КАМ-4	65,28 Мбит/с	94,36 Мбит/с	133,58 Мбит/с
Битовая скорость при использовании ФМ-8	97,91 Мбит/с	141,55 Мбит/с	200,37 Мбит/с

Выводы по главе 3

Предложенные многокомпонентные сигналы являются удобным способом описания модуляционных конструкций с амплитудно-фазовой модуляцией как в случае наличия, так и отсутствия МСИ. Для таких сигналов сформулирована задача поиска оптимальных импульсов по критерию минимальной полосы частот, содержащей заданную долю энергии, при наличии дополнительных ограничений значений пик-фактора и уровня МСИ; для поставленной оптимизационной задачи получены численные решения.

Анализ характеристик оптимальных решений показал, что величина МКГК пропорциональна величине потерь в свободном евклидовом расстоянии, выраженной в дБ. При использовании сигнальных созвездий порядка больше двух ($M > 2$) и при распространении МСИ на большое количество тактовых интервалов ($L > 4$) в процедуре оптимизации возможно использование ограничения МКГК вместо ограничения свободного евклидова расстояния, которое требует включения в процедуру оптимизации большого количества неравенств.

С помощью имитационного моделирования показано, что в плоскости удельных спектральных и энергетических затрат лучшую эффективность многокомпонентных сигналов обеспечивают несимметричные импульсы, полученные при единственном ограничении свободного евклидова расстояния, а импульсы, полученные при единственном ограничении пик-фактора сигнала, приводят к худшей эффективности. При небольшом уровне МСИ разность в энергетической эффективности многокомпонентных сигналов с импульсами из этих двух групп решений составляет около 1 дБ. При увеличении уровня МСИ эта разность значительно сокращается. В плоскости удельных спектральных и модифицированных удельных энергетических затрат, учитывающих величину пик-фактора сигнала, наилучшая эффективность многокомпонентных сигналов обеспечивается при использовании оптимальных импульсов, полученных при единственном ограничении пик-фактора сигнала, наихудшая – при единственном ограничении свободного евклидова расстояния. Разность в величине модифицированных удельных энергетических затрат для этих двух групп решений составляет до 2 дБ при небольшом уровне МСИ; при увеличении уровня МСИ данная разность значительно сокращается. При использовании дополнительных ограничений одного типа несимметричные импульсы всегда позволяют получить характеристики не хуже по сравнению с симметричными импульсами. Для традиционных сигналов на основе созвездия КАМ-4 и RRC-импульсов отмечена возможность повышения энергетической эффективности до 3,1 дБ (с учетом пик-фактора) при переходе к оптимальным многокомпонентным сигналам.

Описание методики синтеза оптимальных финитных импульсов и полученные спектральные и энергетические характеристики соответствующих многокомпонентных сигналов были опубликованы в следующих работах.

1. Гельгор, А.Л. Повышение эффективности одночастотных сигналов с амплитудно-фазовой модуляцией за счёт введения управляемой межсимвольной интерференции / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов // 16-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2014», доклады. – 2014. – том 1. – С. 75–79.

2. Гельгор, А.Л. Преодоление «барьера» Найквиста при использовании одночастотных неортогональных многокомпонентных сигналов / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов // Радиотехника. – 2015. – № 1, – С. 32–49.

3. Gelgor, A. Multicomponent signals for bandwidth-efficient single-carrier modulation / A. Gelgor, A. Gorlov, E. Popov // 2015 IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom). – 2015. – pp. 19–23.

4. Gelgor, A. On the Synthesis of Optimal Finite Pulses for Bandwidth and Energy Efficient Single-Carrier Modulation / A. Gelgor, A. Gorlov, E. Popov // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. – 2015. Springer International Publishing. – pp. 655-668.

Глава. 4. Оценка эффективности сигнально-кодовых конструкций на основе сигналов с управляемой МСИ и свёрточных кодов

В 1995 г. группа исследователей во главе с Катериной Дуиллард (Catherine Douillard) предложила использовать итеративный алгоритм обработки кодированных сигналов, объединив в итеративной процедуре эквалайзер и декодер помехоустойчивого кода [10]. Такой итеративный алгоритм приёма также называют турбо эквалайзером, учитывая аналогию с итеративной процедурой декодирования турбо кодов. Например, если передаваемые данные кодированы свёрточным кодом и подвержены перемежению, то с точки зрения приёмника получается конструкция, аналогичная последовательному каскадному соединению кодов, где в качестве внутреннего кодера выступает канал с МСИ. Однако, канал с МСИ не является кодом и сам по себе не может обеспечить энергетический выигрыш, следовательно, итеративная процедура эквалайзинга-декодирования в лучшем случае приведёт к полной компенсации МСИ, и помехоустойчивость такой конструкции будет эквивалента характеристикам одиночного свёрточного кода в канале с АБГШ [31]. Тем не менее, учитывая возможность компенсации МСИ итеративной схемой приёма, её использование для приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ может оказаться эффективным.

Необходимость использования схем помехоустойчивого кодирования в совокупности с сигналами с МСИ упоминается в [15], где приведён анализ зависимости величины свободного евклидова расстояния для ансамбля FTN-сигналов на основе RRC-импульсов. Для всех рассмотренных вариантов RRC-импульса показано, что при сближении импульсов во временной области (при постепенном уменьшении параметра τ) первое уменьшение величины свободного евклидова расстояния наблюдается для последовательности ошибочных символов, содержащей элементы с чередующимися знаками. В связи с этим авторами рассматриваются специальные решётчатые коды, способные исключить появление таких ошибочных последовательностей и тем самым увеличить свободное евклидово расстояние для FTN-сигналов с выбранным значением параметра τ. Также в [3] Андерсоном рассмотрены кодированные FTN-сигналы, формируемые с помощью последовательности блоков свёрточного кодера, перемежителя и формирователя двоичных FTN-сигналов с RRC-импульсами. Для демодуляции и декодирования таких сигналов использовалась итеративная схема приёма. Показано, что кодированные FTN-сигналы с параметром сближения $\tau = 1/3$ могут обеспечить выигрыш в энергетической эффективности около 2 дБ относительно схемы РКМ на основе созвездия КАМ-16, обеспечивающей передачу трёх информационных бит за тактовый интервал. Таким образом, комбинация свёрточного кода с перемежителем оказывается способной значительно повысить энергетическую эффективность сигналов с управляемой МСИ, даже если код не учитывает свойства используемых импульсов.

В данной главе приведён анализ эффективности сигнально-кодовых конструкций, представляющих собой последовательное соединение рекурсивного систематического свёрточного кода, перемежителя, формирователя информационных символов из созвездия КАМ и линейного фильтра, формирующего оптимальные сигналы с частичным откликом или оптимальные многокомпонентные сигналы. Рассматривались комбинации сигнальных созвездий КАМ-4 и КАМ-16 с рекурсивными систематическими свёрточными кодами со скоростями кодирования 1/2 и 3/4 соответственно, т.е. схемы обеспечивали передачу одного и трёх информационных бит за тактовый интервал. Последовательность символов из используемого сигнального созвездия подавалась на блок формирования многокомпонентных сигналов или сигналов с частичным откликом, обеспечивающих в спектральной области компактный спектр с занимаемой полосой частот меньше «предела» Найквиста $1/T$. Для демодуляции и декодирования таких сигнально-кодовых конструкций была использована итеративная схема приёма. В данной главе приводится сравнение удельных спектральных и энергетических затрат для сигнально-кодовых конструкций на основе сигналов с управляемой МСИ и свёрточных кодов, схем РКМ и ТРКМ.

4.1. Структурная схема модема

В данном разделе предлагается структурная схема модема для передачи и приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ.

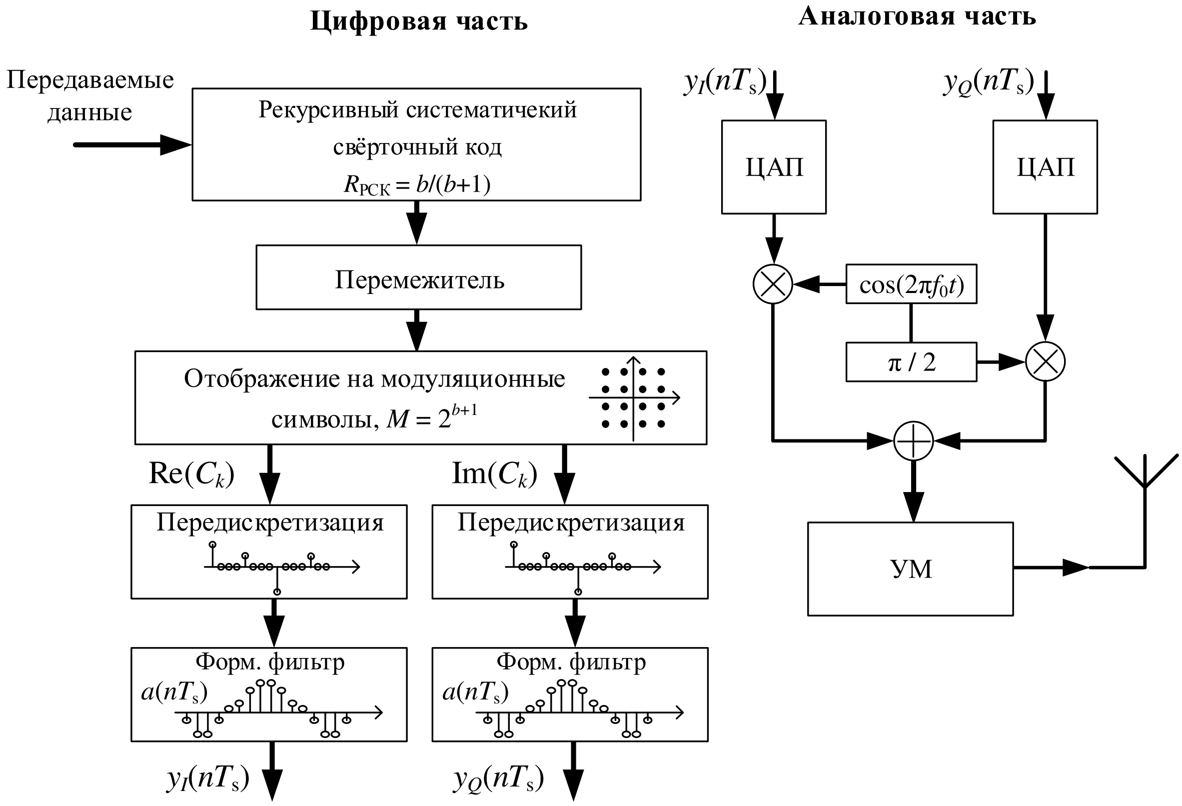

Рис. 4.1. Структурная схема передатчика

На рис. 4.1 представлена структурная схема передатчика. В начале процедуры формирования сигнала блоки передаваемых бит проходят этап кодирования рекурсивным систематическим свёрточным кодом. Далее кодированные биты проходят этап перемежения и отображаются на символы используемого сигнального созвездия. Вещественная и мнимая составляющие последовательности получаемых символов поступают на блоки передискретизации, в которых осуществляется формирование последовательностей модулированных цифровых дельта-импульсов. Далее сформированные последовательности дельта-импульсов поступают на формирующие фильтры, импульсные характеристики которых эквивалентны последовательности отсчётов используемого импульса $a(t)$.

На выходах согласованных фильтров получаются отсчёты синфазной $y_I(t)$ и квадратурной $y_Q(t)$ низкочастотных составляющих сигнала. После цифро-аналогового преобразования низкочастотных квадратурных составляющих осуществляется формирование сигнала на несущей частоте.

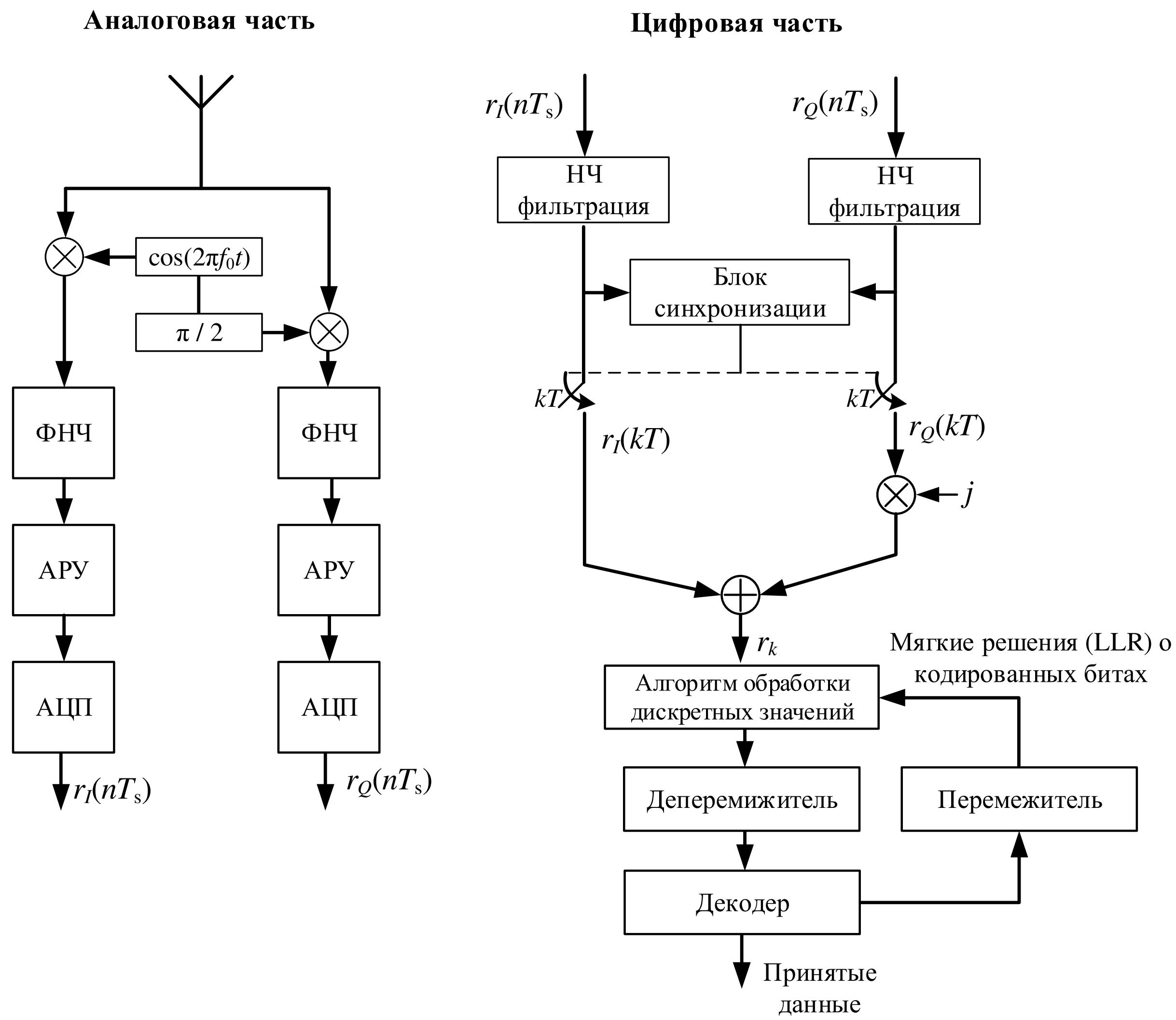

Рис. 4.2. Структурная схема приёмника

Структурная схема приёмника представлена на рис 4.2. В основе схемы лежит принцип прямого преобразования частоты, т.е. в приёмнике присутствует только один опорный генератор, частота которого совпадает с несущей частотой сигнала. В аналоговой части устройства осуществляется перенос сигнала на нулевую частоту и выделение его низкочастотных квадратурных составляющих. После оцифровки сигналов двух квадратур с увеличенной частотой дискретизации $1/T_s$ полученные последовательности отсчётов поступают на входы фильтров низких частот с частотами среза равными $1/(2T)$, где T – длительность тактового интервала. В результате процедуры синхронизации определяются начала тактовых интервалов, и, с учётом подстройки по времени, сохраняются отсчёты сигналов с выходов фильтров с периодом T. Для демодуляции сигналов с управляемой МСИ и декодирования кода предлагается использование итеративной схемы приёма (турбо эквалайзера).

4.2. Описание модели и итеративной схемы приёма

Параметры рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций представлены в табл. 4.1. Отметим некоторые особенности данных схем. В обеих схемах используются рекурсивные систематические свёрточные коды со скоростью кодирования $b_{ps}/(b_{ps} + 1)$, т.е. к группе из b_{ps} информационных бит добавляется один проверочный. Учитывая особенности построения схем РКМ, рассматриваются свёрточные коды, описываемые решётками с восемью состояниями, и вводимая избыточность компенсируется использованием сигнального созвездия с увеличенным в 2 раза порядком. Таким образом, для случая передачи одного бита за тактовый интервал используется созвездие КАМ-4, а для передачи трёх бит за тактовый интервал – созвездие КАМ-16. Во всех схемах производится отображение бит на точки сигнального созвездия в соответствии с кодом Грэя (рис. 4.1). Выбор созвездий КАМ объясняется тем, что при приёме многокомпонентного сигнала необходимо осуществлять оценку передаваемых символов в условиях МСИ, а в случае созвездий КАМ такую оценку удобно осуществлять отдельно по синфазной и квадратурной составляющим сигнала, что в итоге позволяет уменьшить вычислительную сложность алгоритма приёма.

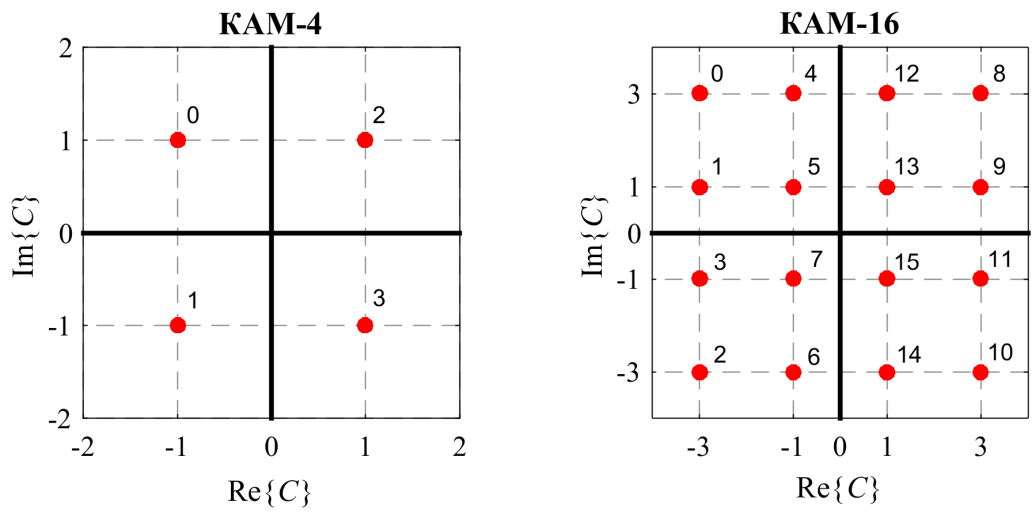

Рис. 4.3. Сигнальные созвездия КАМ с отображением по коду Грэя

Таблица 4.1. Параметры рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций на основе сигналов с МСИ

Номер схемы	1	2
Скорость передачи	1 бит / T	3 бит / T
Сигнальное созвездие	КАМ-4 (с кодом Грэя)	КАМ-16 (с кодом Грэя)
Параметры рекурсивных систематических свёрточных кодов	$R_{\text{РСК}} = 1/2$, $N_s = 8$, $h^{(1)} = 15$ $h^{(0)} = 13$	$R_{\text{РСК}} = 3/4$, $N_s = 8$, $h^{(1)} = 15$ $h^{(2)} = 17$ $h^{(3)} = 11$ $h^{(0)} = 13$
Диапазон значений $TW_{99\%}$, обеспечиваемых импульсом $a(t)$	0,34…0,6 ($L = 8$)	0,6…0,92 ($L = 4$)
Диапазон значений β_F	0,34…0,6	0,2…0,31

Учитывая, что схемы РКМ и ТРКМ, рассмотренные в главе 2, используют сигнальные созвездия высоких порядков и разработаны для режимов передачи данных с высокой спектральной эффективностью, оценку характеристик сигнально-кодовых конструкций на основе сигналов с управляемой МСИ следует производить с точки зрения возможности конкурирования с рассмотренными схемами РКМ и ТРКМ. Например, в случае первой схемы осуществляется передача одного бита за тактовый интервал, однако диапазон значений нормированной полосы частот $TW_{99\%}$ выбирается таким образом, чтобы в нём содержалось значение $TW_{99\%} = 0,5$, что соответствует удельным спектральным затратам $\beta_F = 0,5$ Гц/(бит/с). Такое значение удельных спектральных затрат для традиционных сигналов с найквистовскими импульсами с нулевым коэффициентом сглаживания соответствует передаче двух бит за тактовый интервал, например, при использовании созвездия КАМ-4 без кодирования или схемы РКМ на основе ФМ-8. Минимальное значение нормированной полосы частот для первой схемы соответствует удельным спектральным затратам $\beta_F = 0,34$ Гц/(бит/с). Такое значение β_F может быть обеспечено при использовании традиционных сигналов на основе созвездия ФМ-8 без кодирования, или схемой РКМ на основе КАМ-16. При использовании второй схемы осуществляется передача трёх информационных бит за тактовый интервал, однако в рассматриваемом диапазоне значений $TW_{99\%}$ присутствуют значения 0,6 и 0,75, соответствующие удельным спектральным затратам 0,2 и 0,25 Гц/(бит/с). Такие значения β_F при использовании традиционных ортогональных импульсов могут быть обеспечены созвездиями КАМ-16 без кодирования (или схемой РКМ на основе КАМ-32) и КАМ-32 без кодирования (или схемой РКМ на основе КАМ-64).

На рис. 4.2 представлена схема формирования сигнально-кодовых конструкций на основе сигналов с МСИ и итеративная схема приёма. Информационные биты поступают на вход РСК; биты, полученные на выходе кодера, проходят процедуру перемежения, после чего отображаются на созвездие КАМ. Последовательность символов сигнального созвездия поступает на формирующий фильтр, импульсная характеристика которого соответствует нужной форме импульса $a(t)$ и обеспечивает требуемое значение полосы частот $TW_{99\%}$.

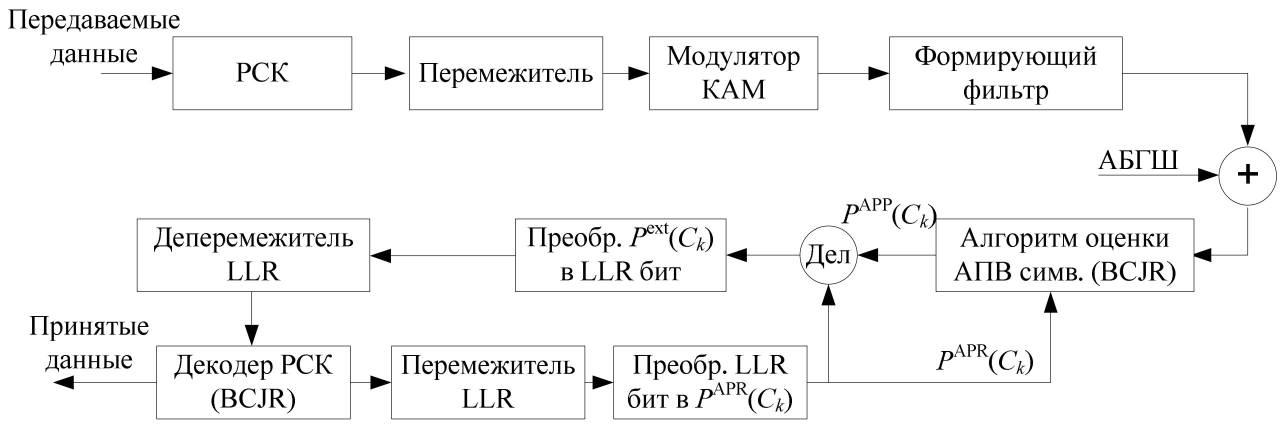

Рис. 4.4. Схема формирования кодированных сигналов с управляемой МСИ и итеративная схема приёма

Основу итеративной схемы приёма составляют два блока декодирования, которые имеют структуру алгоритма BCJR. Первый блок осуществляет оценку АПВ $P^{\text{APP}}(C_k)$ символов в условиях МСИ, причём оценка символов осуществляется отдельно в синфазной и квадратурной составляющих сигнала. Для каждой квадратуры оценивается АПВ передачи вещественных символов из соответствующего созвездия ФАМ, а АПВ передачи комплексных символов получаются как произведение:

$$P^{\text{APP}}\left(C_k\right) = P^{\text{APP}}\left(C_k^{(I)}\right) P^{\text{APP}}\left(C_k^{(Q)}\right), \qquad (4.1)$$

где k – номер тактового интервала, C_k – символ из сигнального созвездия КАМ, представленный вещественной и мнимой составляющими:

$$C_k = C_k^{(I)} + jC_k^{(Q)}.$$

После оценки АПВ передачи комплексных символов осуществляется процедура деления, в результате которой вычисляются «внешние» вероятности:

$$P^{\text{ext}}\left(C_k^{(r)}\right) = \frac{1}{P} \frac{P^{\text{APP}}\left(C_k^{(r)}\right)}{P^{\text{APR}}\left(C_k^{(r)}\right)}, \; r = 1, \ldots, M, \; k = 0, \ldots, N-1, \qquad (4.2)$$

где r – номер символа внутри сигнального созвездия КАМ, а значения внешних вероятностей нормированы делением на P, чтобы в сумме получалась единица:

$$P = \sum_r \frac{P^{\text{APP}}\left(C_k^{(r)}\right)}{P^{\text{APR}}\left(C_k^{(r)}\right)}, \sum_r P^{\text{ext}}\left(C_k^{(r)}\right) = 1, \forall\, k.$$

Процедура деления необходима для устранения эффекта «накопления ошибок».

Далее, значения «внешних» вероятностей пересчитываются в мягкие решения для передаваемых бит – логарифмы отношения правдоподобия (log-likelihood ratio, LLR):

$$L\left(b_k^{(p)}\right) = \ln \frac{\sum\limits_{r:\, m_r^{(p)}=0} P^{\text{ext}}\left(C_k^{(r)}\right)}{\sum\limits_{r:\, m_r^{(p)}=1} P^{\text{ext}}\left(C_k^{(r)}\right)}, \tag{4.3}$$

$$p = 0,\ \ldots,\ b_{\text{ps}},\ k = 0,\ \ldots,\ N-1,$$

где каждой точке из сигнального созвездия $C^{(r)}$ соответствует определённая комбинация бит $\left(m_r^{(0)}, m_r^{(1)}, ..., m_r^{(b_{\text{ps}})}\right)$; в числителе осуществляется суммирование вероятностей символов, соответствующих передаче нулевого бита в позиции p, в знаменателе – передаче единицы в позиции p. Далее осуществляется процедура деперемежения, и мягкие решения (LLR) поступают на вход второго алгоритма BCJR, который осуществляет декодирование свёрточного кода. После декодирования на выходе второго блока формируются новые мягкие решения $L'\left(b_k^{(p)}\right)$ о кодированных битах, которые затем поступают на перемежитель, пересчитываются в вероятности символов и используются первым блоком декодирования в качестве априорной информации. Расчёт априорных вероятностей на основе мягких решений осуществляется следующим образом:

$$P^{\text{APR}}\left(C_k^{(r)}\right) = \prod_{p=0}^{b_{ps}} P\left(b_k^{(p)} = m_r^{(p)}\right), \tag{4.4}$$

$$r = 1,\ \ldots,\ M,\ k = 0,\ \ldots,\ N-1,$$

где, как и прежде, каждой точке сигнального $C^{(r)}$ созвездия соответствует определённая комбинация бит $\left(m_r^{(0)}, m_r^{(1)}, ..., m_r^{(b_{\text{ps}})}\right)$, а вероятности того, что биты принимают определённые значения, получаются из системы уравнений:

$$\begin{cases} L'\left(b_k^{(p)}\right) = \ln \dfrac{P\left(b_k^{(p)} = 0\right)}{P\left(b_k^{(p)} = 1\right)} \\ P\left(b_k^{(p)} = 0\right) + P\left(b_k^{(p)} = 1\right) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} P\left(b_k^{(p)} = 0\right) = \exp\left[L'\left(b_k^{(p)}\right)\right] P\left(b_k^{(p)} = 1\right) \\ \exp\left[L'\left(b_k^{(p)}\right)\right] P\left(b_k^{(p)} = 1\right) + P\left(b_k^{(p)} = 1\right) = 1 \end{cases};$$

$$
\begin{cases}
P\left(b_k^{(p)}=1\right)=\dfrac{1}{1+\exp\left[L'\left(b_k^{(p)}\right)\right]} \\
P\left(b_k^{(p)}=0\right)=\dfrac{\exp\left[L'\left(b_k^{(p)}\right)\right]}{1+\exp\left[L'\left(b_k^{(p)}\right)\right]}
\end{cases}. \tag{4.5}
$$

Таким образом, в процессе работы итеративной схемы приёма на каждой итерации осуществляется пересчёт вероятностей символов в логарифмы отношения правдоподобия бит в соответствии с (4.3).

4.3. Результаты имитационного моделирования

На рис. 4.5 (*а*) представлены кривые помехоустойчивости, полученные для первой схемы из табл. 4.1 для случая $TW_{99\%}$ = 0,44. Как можно видеть из представленных результатов, на уровне вероятности битовой ошибки 10^{-4} удельные энергетические затраты составляют 7,7 дБ при условии, что в турбо эквалайзере выполняются две итерации. При этом, удельные энергетические затраты могут быть снижены до значения 6,3 дБ при выполнении трёх итераций в турбо эквалайзере, до значения 5,6 дБ – при четырёх итерациях, до значения 5,1 дБ – при шести итерациях или до 4,9 дБ при восьми итерациях алгоритма приёма. Таким образом, в данном случае каждая из первых шести итераций алгоритма приводит к заметному улучшению качества приёма, а выполнение б*о*льшего количества итераций оказывается неэффективным: выигрыш от выполнения восьми итераций вместо шести оказывается около 0,2 дБ. При использовании импульса $a(t)$, обеспечивающего $TW_{99\%}$ = 0,6, вероятность битовой ошибки 10^{-4} обеспечивается при E_b/N_0 = 5,5 дБ при двух итерациях турбо эквалайзера. Возможно снижение удельных энергетических затрат до значения 4,9 дБ при выполнении трёх итераций алгоритма приёма, но все последующие итерации практически не приводят к дополнительному снижению удельных энергетических затрат и оказываются неэффективными (рис. 4.5 (*б*)).

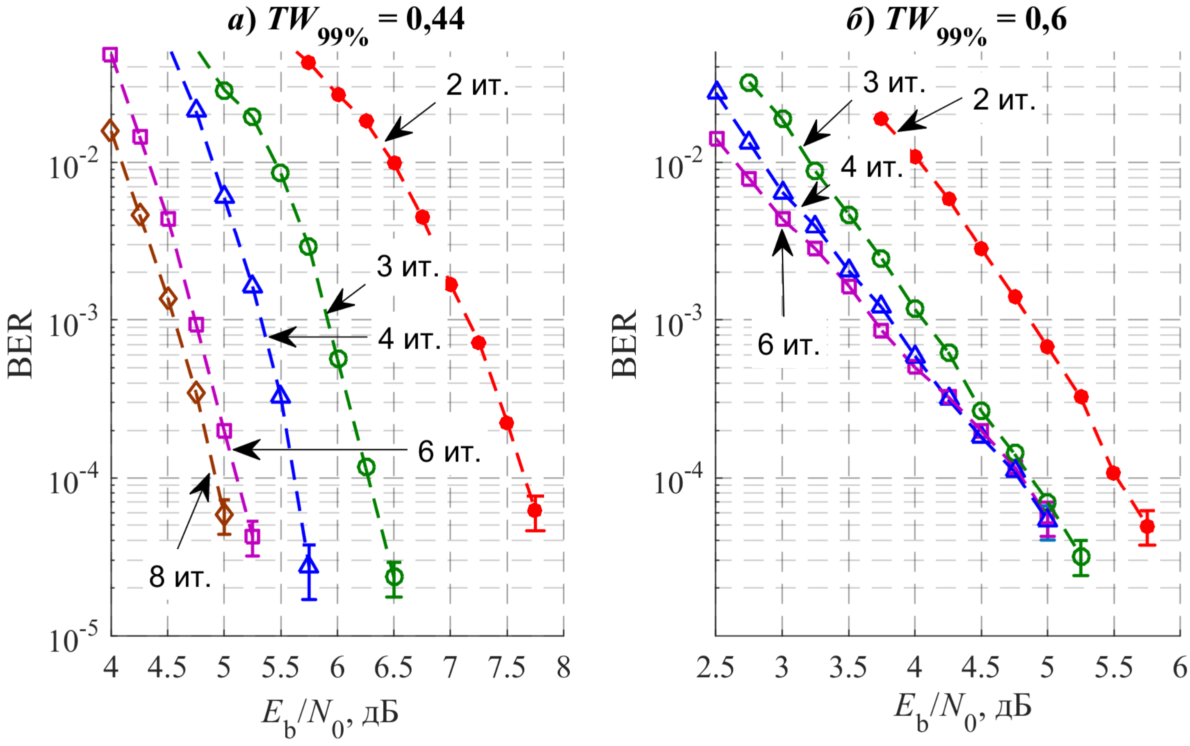

Рис. 4.5. Кривые помехоустойчивости для кодированных сигналов с частичным откликом
а) КАМ-4 + РСК, $R_{\text{РСК}}$ = 1/2, 1 бит / T, $TW_{99\%}$ = 0,44
б) КАМ-4 + РСК, $R_{\text{РСК}}$ = 1/2, 1 бит / T, $TW_{99\%}$ = 0,6

Из представленных результатов следует, что необходимое количество итераций зависит от уровня МСИ в сигнале, а именно, для приёма сигналов с более сильной МСИ необходимо б*о*льшее количество итераций турбо эквалайзера. Также, для рассмотренного на рис. 4.5 (*б*) примера, с меньшим уровнем МСИ, кривые помехоустойчивости, соответствующие разным количествам итераций в приёмнике, сливаются в области малых значений BER. Для вероятности битовой ошибки 10^{-4} «насыщение» наблюдается уже после третьей итерации, однако для BER = 10^{-3} выполнение четвёртой итерации позволяет получить дополнительный энергетический выигрыш около 0,25 дБ.

На рис. 4.6 представлены кривые помехоустойчивости для первой схемы из табл. 4.1 для случая $TW_{99\%}$ = 0,44, однако в этом случае в качестве импульса $a(t)$ используется финитный импульс, полученный при минимизации полосы, содержащей 99% энергии сигнала, и дополнительном ограничении пик-фактора результирующего сигнала. Данный случай соответствует формированию кодированного 8-компонентного сигнала (L = 8) с ограниченным пик-фактором, и, как это было показано на рис. 3.6*а*, сигнал содержит более сильную МСИ по сравнению с рассмотренным на рис. 4.5 (*а*) примером, в котором оптимальный импульс, обеспечивающий такую же полосу, соответствует максимальному значению свободного евклидова расстояния. На уровне вероятности битовой ошибки 10^{-4} при выполнении шести итераций алгоритма приёма наблюдается энергетический проигрыш около 0,3 дБ по отношению к кодированным сигналам с частичным откликом.

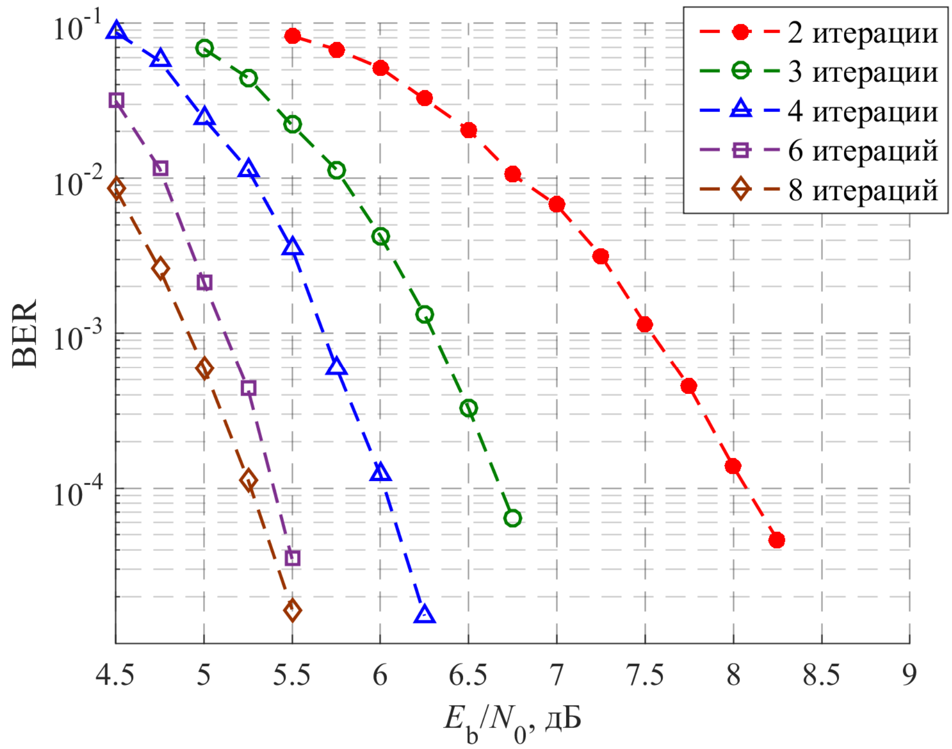

Рис. 4.6. Кривые помехоустойчивости для кодированных многокомпонентных сигналов (КАМ-4 + РСК, $R_{РСК}$ = 1/2, 1 бит / T, $TW_{99\%}$ = 0,44)

На рис. 4.7 приводится сравнение удельных спектральных и энергетических затрат кодированных сигналов с частичным откликом, кодированных многокомпонентных сигналов, схем РКМ и ТРКМ. Учитывая выбор для второй схемы таких импульсов $a(t)$, которые обеспечивают значения нормированной полосы частот из диапазона 0,6…0,92 и, следовательно, приводят к относительно небольшой МСИ, для сравнения характеристик сигнально-кодовых конструкций из табл. 4.1 на плоскости (β_E, β_F) было решено для всех случаев выполнять оценку помехоустойчивости при четырёх итерациях алгоритма приёма. Такое количество итераций является компромиссом между качеством приёма и временем моделирования. Значения удельных энергетических затрат β_E представлены для вероятности битовой ошибки 10^{-4}.

Для режимов передачи данных без кодирования и для схем РКМ, ТРКМ на рис. 4.7 отмечены точки, соответствующие лучшей эффективности, т.е. передаче данных на «барьере Найквиста» при использовании RRC-импульсов с нулевым коэффициентом сглаживания. Характеристики кодированных многокомпонентных сигналов представлены для случаев использования оптимальных импульсов, полученных при единственном ограничении пик-фактора сигнала. Из представленных результатов можно видеть, что кодированные многокомпонентные сигналы и кодированные сигналы с частичным откликом превосходят схемы РКМ, а вторые даже приближаются к ТРКМ по энергетической эффективности. Наибольший энергетический выигрыш относительно РКМ (1,8 дБ) наблюдается для кодированных сигналов с частичным откликом при удельных спектральных затратах $\beta_F = 0{,}25$, превышение «барьера Найквиста» в этом случае составляет 32%. Для значения удельных спектральных затрат $\beta_F = 0{,}2$ выигрыш кодированных сигналов с частичным откликом составляет 0,9 дБ относительно РКМ, в этом случае превышение «барьера Найквиста» составляет 65%. В этой же области ($\beta_F = 0{,}2\ldots0{,}25$) наиболее заметным становится проигрыш в энергетической эффективности (до 0,7 дБ) кодированных многокомпонентных сигналов относительно кодированных сигналов с частичным откликом. Этот проигрыш в энергетической эффективности уменьшается до 0,2–0,3 дБ в области б*о*льших значений спектральной эффективности.

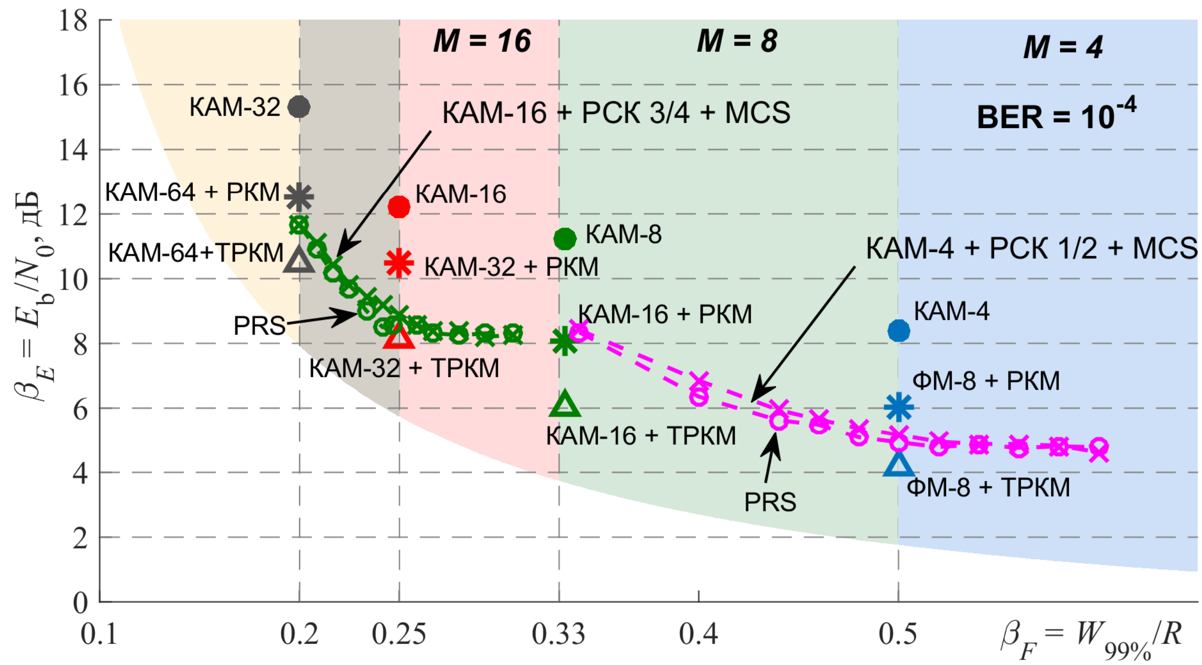

Рис. 4.7. Удельные затраты кодированных сигналов с частичным откликом, кодированных многокомпонентных сигналов, BER = 10^{-4}

На рис. 4.8 представлены спектральные и модифицированные удельные энергетические затраты рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций. Точки, соответствующие передаче данных без кодирования, а также схемам РКМ и ТРКМ приведены с учётом характеристик RRC-импульса с коэффициентом сглаживания $\alpha = 0{,}2$ (табл. 3.1). Как следовало из результатов, представленных на рис. 3.12, использование RRC-импульсов с таким значением коэффициента скругления является компромиссом между занимаемой полосой частот и величиной пик-фактора сигнала. Все отмеченные точки также соответствуют вероятности битовой ошибки 10^{-4}. Из представленных результатов можно видеть, что кодированные многокомпонентные сигналы приближаются и даже превосходят схемы ТРКМ по энергетической эффективности и всегда превосходят схемы РКМ. Как и прежде, наибольший энергетический выигрыш наблюдается в области малых значений β_F и для кодированных многокомпонентных сигналов достигает 2 дБ относительно схем ТРКМ и 3,9 дБ относительно схем РКМ. В области бо́льших значений β_F кодированные многокомпонентные сигналы сравнимы со схемами ТРКМ по модифицированной удельной энергетической эффективности и превосходят кодированные сигналы с частичным откликом с выигрышем от 1 до 3 дБ.

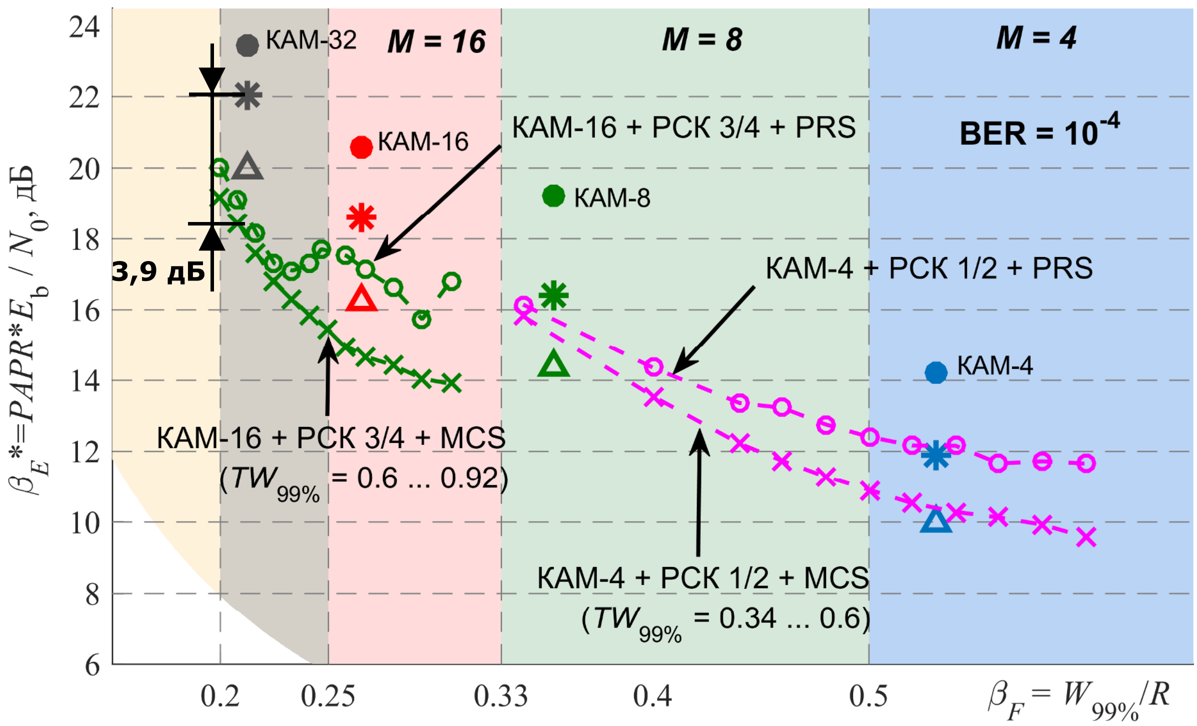

Рис. 4.8. Удельные затраты кодированных сигналов с частичным откликом, кодированных многокомпонентных сигналов в модифицированной плоскости, BER = 10^{-4}

Выводы по главе 4

Предложены сигнально-кодовые конструкции на основе оптимальных сигналов с частичным откликом или оптимальных многокомпонентных сигналов и рекурсивных систематических свёрточных кодов. Предложена структурная схема модема для рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций. Разработана имитационная модель для оценки помехоустойчивости рассматриваемых сигнально-кодовых конструкций в канале с АБГШ.

В результате имитационного моделирования показано, что требуемое количество итераций турбо эквалайзера зависит от уровня МСИ в сигнале: при более сильной МСИ большее число итераций турбо эквалайзера оказываются эффективными, т.е. обеспечивают ощутимое снижение вероятности битовой ошибки.

Показано, что в плоскости удельных спектральных и энергетических затрат кодированные сигналы с частичным откликом и кодированные многокомпонентные сигналы превосходят по характеристикам известные схемы решётчатой кодированной модуляции и могут конкурировать с параллельными схемами решётчатой кодированной модуляции. В рассмотренных комбинациях свёрточных кодов с сигналами с управляемой МСИ использование оптимальных импульсов, полученных при единственном ограничении пик-фактора, вместо импульсов, обеспечивающих максимально возможное свободное евклидово расстояние, приводит к энергетическому проигрышу от 0,2 до 0,8 дБ. При анализе характеристик сигнально-кодовых конструкций в плоскости удельных спектральных и модифицированных удельных энергетических затрат, учитывающих пик-фактор сигнала, показано, что кодированные многокомпонентные сигналы с оптимальными импульсами, полученными при единственном ограничении пик-фактора, превосходят кодированные сигналы с частичным откликом и схемы параллельной решётчатой кодированной модуляции.

Характеристики спектральной и энергетической эффективности кодированных сигналов с частичным откликом, полученные при использовании итеративной схемы приёма (турбо эквалайзера), были опубликованы в следующих работах.

1. Гельгор, А.Л. Повышение энергетической эффективности сигналов с частичным откликом при использовании схем кодированной модуляции / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов // 17-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2015», доклады. – 2015. – том 1. – С. 91–95.

2. Gorlov, A. Improving energy efficiency of partial response signals by using coded modulation / A. Gorlov, A. Gelgor, E. Popov // 2015 IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom). – 2015. – pp. 58–62.

Заключение

• Для сигнального созвездия ФМ-2 и нормированной полосы частот 0,4 оптимальные сигналы с частичным откликом обеспечивают выигрыш 1,4 дБ в величине свободного евклидова расстояния по сравнению с сигналами «быстрее, чем Найквист» на основе RRC-импульсов с коэффициентом сглаживания 0,2.

• Получены оптимальные 8-компонентные сигналы на основе сигнального созвездия КАМ-4, обеспечивающие значения удельных спектральных затрат в диапазоне от 0,14 до 0,68 Гц/(бит/с); при удельных спектральных затратах 0,50, 0,25 и 0,17 Гц/(бит/с), соответствующих использованию сигнальных созвездий КАМ-4, КАМ-16 и КАМ-64 в комбинации с sinc-импульсами, и при вероятности битовой ошибки 10^{-4} удельные энергетические затраты оптимальных 8-компонентных сигналов и сигналов с ортогональными импульсами совпадают с погрешностью менее 2 %.

• При удельных спектральных затратах 0,54 Гц/(бит/с), соответствующих использованию сигнального созвездия КАМ-4 в комбинации с RRC-импульсами с коэффициентом сглаживания 0,2, и при вероятности битовой ошибки 10^{-4} удельные энергетические затраты оптимальных 8-компонентных сигналов, рассчитанные с учётом пик-фактора, оказываются меньше на 3,1 дБ по сравнению с удельными энергетическими затратами традиционных сигналов с ортогональными импульсами, рассчитанными также с учётом пик-фактора.

• При удельных спектральных затратах 0,25 Гц/(бит/с) и вероятности битовой ошибки 10^{-4} удельные энергетические затраты кодированных сигналов с частичным откликом на основе сигнального созвездия КАМ-16 оказываются меньше на 1,8 дБ по сравнению с удельными энергетическими затратами сигналов с решётчатой кодированной модуляцией на основе сигнального созвездия КАМ-32 и ортогональных импульсов; при удельных спектральных затратах 0,2 Гц/(бит/с) энергетический выигрыш кодированных сигналов с частичным откликом на основе сигнального созвездия КАМ-16 составляет 0,9 дБ по сравнению со схемой решётчатой кодированной модуляции на основе сигнального созвездия КАМ-64.

• При удельных спектральных затратах 0,21 Гц/(бит/с) и вероятности битовой ошибки 10^{-4} энергетический выигрыш кодированных 8-компонентных сигналов на основе сигнального созвездия КАМ-16, вычисленный с учётом пик-фактора сигнала, составляет 2 дБ относительно сигналов с турбо решётчатой кодированной модуляцией на основе сигнального созвездия КАМ-64 и 3,9 дБ относительно сигналов с классической решётчатой кодированной модуляцией; при удельных спектральных затратах 0,27 Гц/(бит/с) энергетический выигрыш кодированных 8-компонентных сигналов уменьшается до 1,4 дБ по сравнению с сигналами с турбо решётчатой кодированной модуляцией на основе сигнального созвездия КАМ-32 и до 3,8 дБ по сравнению с сигналами с классической решётчатой кодированной модуляцией.

Научная новизна результатов диссертационной работы

• Предложена методика синтеза оптимальных финитных импульсов для одночастотных многокомпонентных сигналов по критерию минимальной ширины полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на величину пик-фактора сигнала и уровень МСИ, определяемый максимальным значением коэффициента групповой корреляции либо значением свободного евклидова расстояния.

• Определён выигрыш в спектральной и энергетической эффективности сигнально-кодовых конструкций на основе свёрточных кодов и сигналов с управляемой МСИ, символьная скорость которых превышает «барьер Найквиста», по отношению к известным схемам традиционной и параллельной решётчатой кодированной модуляции.

• Для оптимальных импульсов, полученных при ограничении свободного евклидова расстояния, определён выигрыш в энергетической эффективности от использования несимметричных импульсов вместо симметричных.

• Определён выигрыш в величине свободного евклидова расстояния для оптимальных сигналов с частичным откликом по отношению к сигналам «быстрее, чем Найквист» на основе RRC-импульсов.

• Определена степень улучшения энергетической эффективности сигнально-кодовых конструкций на основе свёрточных кодов и неортогональных сигналов, символьная скорость которых превышает «барьер Найквиста», при выполнении нескольких итераций алгоритма приёма (турбо эквалайзера).

Положения, выносимые на защиту

• Спектральная и энергетическая эффективность оптимальных 8-компонентных сигналов с сигнальным созвездием КАМ-4 совпадает с эффективностью теоретических ортогональных сигналов с прямоугольным спектром и сигнальными созвездиями КАМ-4, КАМ-16, КАМ-64.

• При малой глубине МСИ сигналы с частичным откликом, т.е. нефинитными импульсами, обеспечивают выигрыш в величине свободного евклидова расстояния по отношению к многокомпонентным сигналам с финитными импульсами, однако, при увеличении глубины МСИ характеристики выравниваются. Так для сигнального созвездия ФАМ-4 и $L = 4$ максимальный выигрыш составляет 0,9 дБ, а для $L = 8$ – 0,3 дБ.

• Выигрыш полученных в работе оптимальных 8-компонентных сигналов по отношению к традиционным сигналам с RRC-импульсами составляет 3,1 дБ в энергетической эффективности, рассчитанной с учетом пик-фактора сигнала, при фиксированных спектральных затратах или 30% в спектральной эффективности при фиксированных энергетических затратах, что соответствует 35% превышению «барьера Найквиста».

• Энергетический выигрыш оптимальных сигналов с частичным откликом на основе созвездия КАМ-16 в комбинации с рекурсивным систематическим свёрточным кодом со скоростью 3/4 и длиной регистра 3 составляет 1,8 дБ относительно схемы решётчатой кодированной модуляции на основе созвездия

КАМ-32 или 0,9 дБ относительно РКМ на основе созвездия КАМ-64 и ортогональных импульсов с идеальным прямоугольным спектром; превышение «барьера Найквиста» составляет 32% и 65% соответственно.

• Энергетический выигрыш многокомпонентных сигналов на основе созвездия КАМ-16 в комбинации с рекурсивным систематическим свёрточным кодом со скоростью 3/4 достигает 3,9 дБ с учётом пик-фактора сигнала относительно схем решётчатой кодированной модуляции или 2 дБ относительно схем параллельной РКМ на основе созвездий КАМ-32 или КАМ-64 и RRC-импульсов с коэффициентом сглаживания 0,2.

Теоретическая значимость результатов

Впервые сформулирована и решена задача синтеза оптимальных финитных импульсов по критерию минимальной ширины полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на пик-фактор сигнала, корреляционные свойства, величину свободного евклидова расстояния для ансамбля сигналов.

Практическая значимость

Впервые показана возможность снижения удельных энергетических затрат при приёме сигналов с решётчатой кодированной модуляцией за счёт использования сигнально-кодовых конструкций на основе оптимальных сигналов с управляемой МСИ и свёрточных кодов. Предложена структурная схема модема для передачи и приёма кодированных сигналов с управляемой МСИ. Предложен итеративный алгоритм приёма, осуществляющий демодуляцию сигнала в условиях МСИ и декодирование помехоустойчивого кода в цикле.

Личный вклад автора в разработку проблемы

Автором разработана методика синтеза оптимальных финитных импульсов по критерию минимальной полосы частот, содержащей заданную долю энергии сигнала, при наличии дополнительных ограничений на пик-фактор сигнала и уровень МСИ, определяемый максимальным коэффициентом групповой корреляции либо свободным евклидовым расстоянием. Автором предложены сигнально-кодовые конструкции на основе оптимальных сигналов с управляемой

МСИ и рекурсивных систематических свёрточных кодов с отображением кодированных бит на созвездия КАМ.

Апробация результатов

Материалы диссертационного исследования апробированы на конференциях:

1. Цифровая обработка сигналов и её применение, DSPA (г. Москва) в 2014, 2015 г.;
2. 3-я международная Черноморская конференция по связи и сетевым технологиям «IEEE BlackSeaCom» (г. Констанца, Румыния) в 2015 г.;
3. 15-я международная конференция по проводным и беспроводным сетям и системам нового поколения «New2An» (г. Санкт-Петербург) в 2015 г.

Методы исследования. В ходе диссертационных исследований использовались методы теории вероятностей, математической статистики, статистической теории радиотехнических систем, теории случайных процессов, вариационного исчисления, математического программирования. Имитационное моделирование проводилось с использованием среды Matlab.

Обоснованность полученных результатов обеспечивается применением апробированного метода численного решения оптимизационных задач, корректностью формулировок и выводов и подтверждается совпадением полученных результатов с известными для частных случаев.

Достоверность полученных результатов определяется хорошим совпадением частных результатов имитационного моделирования с аналитическими результатами.

Список литературы

1. 3GPP TS 25.104 Base Station (BS) radio transmission and reception (FDD). 2011, 3GPP Organizational Partners (ARIB, ATIS, CCSA, ETSI, TTA, TTC).
2. Digital Video Broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2). 2009, ETSI, EBU.
3. Anderson, J.B. Faster-Than-Nyquist Signaling / J.B. Anderson, F. Rusek, V. Owall // Proceedings of the IEEE. – 2013. – Vol. 101, Issue: 8. – pp. 1817-1830.
4. Anderson, J.B. Coded Modulation Systems / J.B. Anderson, A. Svensson. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.
5. Assalini, A. Improved Nyquist pulses / A. Assalini, A.M. Tonello // Communications Letters, IEEE. – 2004. – Vol. 8, Issue: 2. – pp. 87-89.
6. Bahl, L. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (Corresp.) / L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, J. Raviv // Information Theory, IEEE Transactions on. – 1974. – Vol. 20, Issue: 2. – pp. 284-287.
7. Berrou, C. Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes / C. Berrou, A. Glavieux // Communications, IEEE Transactions on. – 1996. – Vol. 44, Issue: 10. – pp. 1261-1271.
8. Chatelain, B. Peak-to-average power ratio and intersymbol interference reduction by Nyquist pulse optimization / B. Chatelain, F. Gagnon // Vehicular Technology Conference, 2004. VTC2004-Fall. 2004 IEEE 60th. – 2004. – pp. 954-958 Vol. 2.
9. Divsalar, D., On the Design of Turbo Codes. 1995.
10. Douillard, C. Iterative Correction of Intersymbol Interference: Turbo-Equalization / C. Douillard, M. Jezequel, C. Berrou // European Transactions on Telecommunications. – 1995. – Vol. 6, Issue: 5. – pp. 507-511.
11. Gelgor, A. Multicomponent signals for bandwidth-efficient single-carrier modulation / A. Gelgor, A. Gorlov, E. Popov // Communications and

Networking (BlackSeaCom), 2015 IEEE International Black Sea Conference on. – 2015. – pp. 19-23.

12. Gelgor, A. On the Synthesis of Optimal Finite Pulses for Bandwidth and Energy Efficient Single-Carrier Modulation / A. Gelgor, A. Gorlov, E. Popov // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. – 2015. Springer International Publishing. – pp. 655-668.
13. Junyi, W. Generation of Spectrally Efficient Nyquist-WDM QPSK Signals Using Digital FIR or FDE Filters at Transmitters / W. Junyi, X. Chongjin, P. Zhongqi // Lightwave Technology, Journal of. – 2012. – Vol. 30, Issue: 23. – pp. 3679-3686.
14. Kabal, P. Partial-Response Signaling / P. Kabal, S. Pasupathy // Communications, IEEE Transactions on. – 1975. – Vol. 23, Issue: 9. – pp. 921-934.
15. Liveris, A.D. Exploiting faster-than-Nyquist signaling / A.D. Liveris, C.N. Georghiades // Communications, IEEE Transactions on. – 2003. – Vol. 51, Issue: 9. – pp. 1502-1511.
16. Mazo, J.E. Faster-than-nyquist signaling / J.E. Mazo // Bell System Technical Journal, The. – 1975. – Vol. 54, Issue: 8. – pp. 1451-1462.
17. Proakis, J.G. Digital communications; 5th. McGraw-Hill, 2008.
18. Robertson, P. Bandwidth-efficient turbo trellis-coded modulation using punctured component codes / P. Robertson, T. Worz // Selected Areas in Communications, IEEE Journal on. – 1998. – Vol. 16, Issue: 2. – pp. 206-218.
19. Rouanne, M. An algorithm for computing the distance spectrum of trellis codes / M. Rouanne, D.J. Costello, Jr. // Selected Areas in Communications, IEEE Journal on. – 1989. – Vol. 7, Issue: 6. – pp. 929-940.
20. Said, A. Bandwidth-efficient coded modulation with optimized linear partial-response signals / A. Said, J.B. Anderson // Information Theory, IEEE Transactions on. – 1998. – Vol. 44, Issue: 2. – pp. 701-713.
21. Schlegel, C. Trellis and Turbo coding / C.B. Schlegel, L.C. Perez. IEEE, 2004.

22. Tomlinson, M. Search for good b/(b + 1) high rate recursive systematic convolutional component codes / M. Tomlinson, M. Ferrari, A. Ambroze // Electronics Letters. – 2002. – Vol. 38, Issue: 25. – pp. 1691-1693.
23. Ungerboeck, G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets Part I: Introduction / G. Ungerboeck // Communications Magazine, IEEE. – 1987. – Vol. 25, Issue: 2. – pp. 5-11.
24. Ungerboeck, G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets Part II: State of the art / G. Ungerboeck // Communications Magazine, IEEE. – 1987. – Vol. 25, Issue: 2. – pp. 12-21.
25. Viterbi, A.J. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm / A.J. Viterbi // Information Theory, IEEE Transactions on. – 1967. – Vol. 13, Issue: 2. – pp. 260-269.
26. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков; 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000.
27. Варгаузин, В.А. Методы повышения энергетической и спектральной эффективности цифровой радиосвязи: учеб. пособие / В.А. Варгаузин, И.А. Цикин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2013. – 352 с.
28. Галлагер, Р. Теория информации и надежная связь / Р. Галлагер. – М.: Советское радио, 1974. – 720.
29. Гельгор, А.Л. Повышение помехоустойчивости приёма сигналов Uplink LTE при использовании турбоэквалайзера / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, П.В. Иванов, Е.А. Попов, А.В. Архипкин, Т.Е. Гельгор // Радиотехника. – 2015. – № 9. – С. 39-50.
30. Гельгор, А.Л. Оптимизация формы огибающей многокомпонентных сигналов при наличии ограничений на пик-фактор и коэффициент корреляции / А.Л. Гельгор, Е.А. Попов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 5. – С. 25-30.
31. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973.

32. Ипатов, В.П. Системы мобильной связи: Учебное пособие для вузов / В.П. Ипатов, В.К. Орлов, И.М. Самойлов, В.Н. Смирнов; под. ред. В.П. Ипатова. – М.: Горячая линия–Телеком, 2003. – 272 с.
33. Карманов, В.Г. Математическое програмирование: Учеб. пособие. / В.Г. Карманов; 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
34. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
35. Финк, Л.М. Сигналы, помехи, ошибки... Заметки о некоторых неожидонностях, парадоксах и заблуждениях в теории связи. / Л.М. Финк; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1984. – 256 с.

Приложение 1

Табл. 1. Коэффициенты разложения для оптимальных импульсов, $L = 8$, ФМ-2

Нормированная полоса, ограничение	Характеристики решения	Коэффициенты $c_0 \ldots c_K$	Коэффициенты $s_1 \ldots s_K$
$TW_{99\%} = 0{,}764$	$MGC = 2{,}15$	0,22462845	
$d^2_{св} = 2{,}0$	$PAPR = 4{,}82$	0,83492808	–0,42561529
		0,12189802	–0,97293639
		–0,22799577	–0,26238354
		0,09772292	0,05914259
		–0,02599150	–0,01105608
		0,01527350	0,00507850
		–0,01063954	–0,00292286
$TW_{99\%} = 0{,}708$	$MGC = 2{,}46$	0,00022378	
$d^2_{св} = 1{,}6$	$PAPR = 5{,}40$	–0,71175089	–0,69335818
		–0,78507325	0,61649030
		–0,05091036	0,09901384
		0,01908914	–0,05677120
		–0,00403099	0,01584103
		0,00038406	–0,00197045
		0,00028135	–0,00149477
		–0,00044552	0,00284306
$TW_{99\%} = 0{,}610$	$MGC = 2{,}52$	1,32719872	
$d^2_{св} = 1{,}28$	$PAPR = 4{,}52$	–0,06725500	–0,85356648
		–0,51637750	–0,31173928
		0,04978968	0,01452148
		–0,13478516	–0,03858472
$TW_{99\%} = 0{,}541$	$MGC = 2{,}36$	1,25191878	
$d^2_{св} = 1{,}07$	$PAPR = 4{,}79$	–0,09361761	–0,97102408
		–0,40892496	–0,30235726
		0,07162308	0,03046765
$TW_{99\%} = 0{,}451$	$MGC = 3{,}52$	0,98715669	
$d^2_{св} = 0{,}8$	$PAPR = 5{,}94$	0,50315256	–1,12116153
		0,00216635	–0,00964500
		–0,00738365	0,04942605
$TW_{99\%} = 0{,}406$	$MGC = 3{,}34$	1,31949804	
$d^2_{св} = 0{,}6$	$PAPR = 5{,}31$	0,66362907	–0,82958267
		0,00852337	–0,02130952
		0,00464322	–0,01741307
$TW_{99\%} = 0{,}351$	$MGC = 4{,}29$	1,62308526	
$d^2_{св} = 0{,}4$	$PAPR = 5{,}65$	0,74224570	–0,35525873
		–0,04270034	0,04087430
		0,02659469	–0,03818871
$TW_{99\%} = 0{,}285$	$MGC = 5{,}90$	1,85685674	0,00000000
$d^2_{св} = 0{,}23$	$PAPR = 6{,}90$	0,51597850	0,00000000
		–0,09903387	

Табл. 2. Коэффициенты разложения для оптимальных импульсов, L = 4, АФМ-4

Нормированная полоса, ограничение	Характеристики решения	Коэффициенты $c_0 \dots c_K$	Коэффициенты $s_1 \dots s_K$
$TW_{99\%} = 0{,}826$ $d^2_{св} = 0{,}8$	$MGC = 1{,}19$ $PAPR = 2{,}85$	1,27694549 0,65536457 0,01689154	 –0,86770754 –0,04472920
$TW_{99\%} = 0{,}796$ $d^2_{св} = 0{,}706$	$MGC = 1{,}12$ PAPR = 2,82	1,41765548 0,72228972 0,01346171	 –0,68744901 –0,02562544
$TW_{99\%} = 0{,}759$ $d^2_{св} = 0{,}629$	$MGC = 1{,}39$ $PAPR = 2{,}76$	1,53021889 0,77425958 0,00914991	 –0,47908792 –0,01132362
$TW_{99\%} = 0{,}712$ $d^2_{св} = 0{,}561$	$MGC = 1{,}6$ $PAPR = 2{,}81$	1,61211865 0,77926367 –0,02679564	 –0,30353109 0,02087431
$TW_{99\%} = 0{,}666$ $d^2_{св} = 0{,}468$	$MGC = 1{,}82$ $PAPR = 2{,}82$	1,67861300 0,76631056 –0,06235071 0,00311714	 –0,00000392 0,00000081 0,00000011
$TW_{99\%} = 0{,}602$ $d^2_{св} = 0{,}336$	$MGC = 2{,}31$ $PAPR = 3{,}31$	1,81991616 0,56847888 –0,14416780	 –0,00000524 0,00000221
$TW_{99\%} = 0{,}564$ $d^2_{св} = 0{,}210$	$MGC = 2{,}45$ $PAPR = 3{,}45$	1,85752513 0,51983144 –0,06764218	 –0,00000158 0,00000036

Табл. 3. Коэффициенты разложения для оптимальных импульсов, L = 8

Нормированная полоса, ограничение	Характеристики решения	Коэффициенты $c_0 \dots c_K$
$TW_{99\%} = 1{,}297$ $PAPR = 1{,}5$	$MGC = 0{,}46$	0,85143638 0,81302612 0,70221808 0,54273858 0,36711589 0,20960272 0,09564005 0,03141315
$TW_{99\%} = 0{,}959$ $PAPR = 2{,}0$	$MGC = 0{,}89$	0,97191540 0,90046649 0,70192831 0,43262389 0,18769090 0,04122159 –0,00549119 –0,00512650

$TW_{99\%} = 0{,}759$ $PAPR = 2{,}5$	$MGC = 1{,}48$	1,11414704 0,96298777 0,61977641 0,25486353 0,03276265 –0,03336329 –0,02698201
$TW_{99\%} = 0{,}631$ $PAPR = 3{,}0$	$MGC = 1{,}99$	1,22223768 0,99296610 0,50403375 0,10416890 –0,03602151 –0,02978435
$TW_{99\%} = 0{,}537$ $PAPR = 3{,}5$	$MGC = 2{,}49$	1,32188582 0,99497643 0,36687972 –0,00527452 –0,03589653 0,01483613 0,01391494
$TW_{99\%} = 0{,}473$ $PAPR = 4{,}0$	$MGC = 2{,}95$	1,40470553 0,97474609 0,24949692 –0,03197710
$TW_{99\%} = 0{,}378$ $PAPR = 5{,}0$	$MGC = 4{,}00$	1,58113883 0,86444572 0,03847734 –0,03539897
$TW_{99\%} = 0{,}312$ $PAPR = 6{,}0$	$MGC = 5{,}00$	1,73205081 0,70334595 –0,06453170 0,02816654 –0,01570442 0,01000733
$TW_{99\%} = 0{,}280$ $PAPR = 6{,}92$	$MGC = 5{,}92$	1,85953087 0,51538311 –0,06645692 0,02816216 –0,01559148