На правах рукописи

Березин Сергей Васильевич

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУГАЧЁВА–СВЕШНИКОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ТРАЕКТОРИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Специальность 05.13.18 —
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Научный руководитель:	**ЗАЯЦ Олег Иванович,** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**СМОРОДИНА Наталия Васильевна,** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории статистических методов ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического Института им. В.А. Стеклова» Российской академии наук
	ПРОУРЗИН Владимир Афанасьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории методов анализа надёжности ФГБУН «Институт проблем машиноведения» Российской академии наук
Ведущая организация:	Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

Защита состоится 17 мая 2017 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 на базе ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, I корпус, аудитория ___.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу www.spbstu.ru.

Автореферат разослан «___» _______ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13
доктор технических наук, профессор — Григорьев Борис Семёнович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Стохастические математические модели, основанные на стохастических дифференциальных уравнениях (или уравнениях Ланжевена), возникают во многих областях знаний, таких как механика сейсмических явлений, теория виброзащиты, физика наноструктур, теория управления, финансовая математика и многих других. При этом на практике интерес представляет не только исследование поведения самих этих систем, но и исследование некоторых их числовых характеристик, определяемых в виде *интегральных функционалов.* Линейная теория, соответствующая указанному типу задач, хорошо разработана, однако, системы, встречающиеся на практике, часто содержат те или иные нелинейности, причём конкретный вид этих нелинейностей определяется как структурой исходной стохастической системы, так и свойствами рассматриваемых функционалов. В настоящее время точные решения нелинейных задач известны лишь в достаточно редких случаях.

Особую сложность в математическом отношении и, одновременно, большую практическую значимость представляют *существенно нелинейные* системы. Такие системы описываются с помощью нелинейностей, которые могут иметь скачки, разрывы производных, многозначности и, вообще, плохо поддаются аппроксимации гладкими функциями во всей области их определения. К сожалению, весь класс существенно нелинейных систем является слишком обширным и его детальное изучение затруднительно, поэтому часто ограничиваются рассмотрением более узкого класса систем. Одним из важнейших типовых примеров последнего является класс *кусочно-линейных систем.* На практике они возникают при аппроксимации сложных реальных систем, и позволяют уловить ряд тонких нелинейных эффектов, которые не удаётся выявить в рамках линейной теории. Кусочно-линейные системы являются предметом множества прикладных и теоретических исследований, что, однако, не умаляет актуальности их дальнейшего изучения.

Целью данной работы является разработка новых методов исследования существенно нелинейных стохастических систем, прежде всего, кусочно-линейных, с помощью эффективного, но недостаточно изученного в этом классе задач уравнения Пугачёва–Свешникова (ПС) для характеристической функции.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи:**

1. Осуществлён библиографический поиск и изучение имеющейся по теме работы литературы, результатом чего стал обзор работ, посвящённых анализу существенно нелинейных стохастических систем;

2. Выделены новые классы существенно нелинейных систем и функционалов, для которых уравнение ПС допускает точное решение;

3. Выведено уравнения ПС для всех вновь введённых классов систем;

4. Исследованы качественные свойства решения уравнения ПС;

5. Разработан точный метод решения уравнения ПС для выделенных классов существенно нелинейных стохастических задач;

6. Разработан комплекс программ на языке среды Wolfram Mathematica®, позволяющий провести численный эксперимент по исследованию решений, полученных в работе;

7. Проведено численное сравнение точных решений с приближёнными решениями, полученными методом статистической линеаризации;

Научная новизна. Автором выделены три новых класса аналитической разрешимости для кусочно-линейных стохастических задач. Для каждого из этих классов кусочно-линейных систем (кусочно-линейные системы, линейные в четвертях пространства, линейные в полислоях и включающие локальное время) впервые получен общий вид уравнения ПС для характеристической функции, а также разработан оригинальный метод его решения. В общем случае доказана теорема об аналитичности решения уравнения Пугачёва.

С помощью разработанного метода решения уравнения ПС впервые вычислено изображение по Лапласу для характеристической функции пройденного пути в классической *задаче КрENDелла* о перемещениях незакреплённого тела, а также найден ряд ранее неизвестных практически значимых вероятностных характеристик классического *процесса Кохи–Динза*. Решена задача о фрикционном торможении незакреплённого тела при наличии управляемого демпфера сухого трения. Также впервые полностью решена *задача Бакстера* для скошенного броуновского движения с постоянным сносом.

Практическая и теоретическая значимость диссертационной работы состоит в том, что её результаты позволяют аналитически решить новый класс важных существенно нелинейных задач. Представленные в работе методы могут быть успешно использованы для исследования широкого класса математических моделей, описывающих разнообразные физические, механические, биологические, экономические и другие подобные им системы, допускающие адекватную кусочно-линейную аппроксимацию.

Методы исследования. Решение поставленных задач основывается на использовании методов теории случайных процессов, математической физики, теории функций комплексного переменного, а также специальных методов теории функциональных уравнений.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается применением строгих математических методов, проверкой аналитических вычислений с помощью соответствующих математических пакетов программ, а также сопоставлением результатов диссертации с результатами, полученными иными методами и другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: LUH–SPbSPU Workshop on Computational Methods and Modeling in Engeneering (Ганновер, Университет им. В. Лейбница, апрель 2013); Семинар кафедры теоретической электротехники, а также семинар кафедры строительной механики университета им. В. Лейбница (Ганновер, Университет им. В. Лейбница, октябрь 2013); XVII International Workshop on New Approaches to High-Tech: Nano-Design, Technology, Computer Simulations. NDTCS-2015 (Гродно, ГрГУ им. Я. Купалы, сентябрь 2015); Научный семинар кафедры «Теоретическая механика» (Санкт-Петербург, СПбПУ, ноябрь 2015); Семинар исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышёва СПбГУ «Теория вероятностей» (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, ноябрь, апрель 2015); Семинар кафедры «Прикладная математика» СПбПУ (Санкт-Петербург, СПбПУ, январь 2017); Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, февраль 2017).

По тематике диссертации автор дважды проходил стажировку на кафедре теоретической электротехники университета им. В. Лейбница (Ганновер, октябрь 2013, август-ноябрь 2014) под руководством профессора В. Матиса (Wolfgang Mathis).

Личный вклад. Автор принимал личное активное и непосредственное участие в постановке задач, внёс существенный вклад в их решение и анализ результатов. Совместные статьи и доклады, на которых основывается содержание диссертации, писались при существенном личном участии автора. Доказательства и обоснование приведенных в диссертации положений, а также математические выкладки целиком выполнены автором. Автором собственноручно написан комплекс программ на языке среды Wolfram Mathematica®, позволяющий провести численный эксперимент по исследованию решений, полученных в работе, а также проведено численное сравнение точных решений с приближёнными решениями, полученными методом статистической линеаризации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическая разрешимость уравнения ПС для трёх новых классов кусочно-линейных систем(кусочно-линейные системы, линейные в четвертях пространства, линейные в полислоях и включающие локальное время);

2. Новая общая теорема, устанавливающая аналитичность решения уравнения Пугачёва относительно всей совокупности аргументов искомой характеристической функции;

3. Общий метод точного решения уравнения ПС для трёх введённых классов систем;

4. Аналитические выражения для ранее неизвестных вероятностных характеристик типовых существенно нелинейных стохастических систем;

5. Численные результаты сравнения найденных точных решений с приближёнными, полученными методом статистической линеаризации.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в **5** печатных и электронных изданиях, **2** из которых [1,2] изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и трёх приложений. Полный объем диссертации составляет **206** страниц текста с **19** рисунками. Список литературы содержит **388** наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Содержание работы

Во **введении** приводится обоснование актуальности и практической значимости темы диссертации. Даётся краткое описание поставленных целей и решаемых для их достижения задач, а также даётся библиографическое описание диссертации.

В **первой главе** рассматриваются *диффузионные процессы*, задаваемые векторным *стохастическим дифференциальным уравнением* (СДУ) в форме Ланжевена для случайного векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, $(t > 0)$,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{a}(t, \boldsymbol{X}(t)) + \mathbf{H}(t, \boldsymbol{X}(t))\, \boldsymbol{\xi}(t), \quad \boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

или (более строго) СДУ в форме Ито

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{X}(t))dt + \mathbf{H}(t,\boldsymbol{X}(t))d\boldsymbol{W}(t) \tag{2}$$

с начальным условием $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$. Здесь $\boldsymbol{X}_0$ — некоторая векторная случайная величина, через $\boldsymbol{W}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ обозначены, соответственно, стандартный винеровский процесс и процесс гауссовского белого шума в $\mathbb{R}^n$, а вектор сноса $\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})$ и матрица интенсивности шумов $\mathbf{H}(t,\boldsymbol{x})$ являются неслучайными.

Под интегральным функционалом подразумевается выражение вида

$$\mathcal{I}(t) = \int\limits_0^t g(s, \boldsymbol{X}(s))\, ds, \tag{3}$$

где ядро $g(s,\boldsymbol{x})$ представляет собой некоторую неслучайную функцию.

Изучение функционала (3) сведено к изучению расширенной системы

$$\begin{cases} d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{a}(t, \boldsymbol{X}(t))dt + \mathbf{H}(t, \boldsymbol{X}(t))d\boldsymbol{W}(t), \\ d\mathcal{I}(t) = g(t, \boldsymbol{X}(t))\; dt. \end{cases} \tag{4}$$

Для простоты изучаются однородные диффузионные процессы, с вектором сноса и матрицей интенсивности шумов не зависящими явно от времени t.

Рассматривается ряд классов кусочно-линейных задач, допускающих аналитическое решение:

1. Класс кусочно-линейных систем, линейных в *полупространствах.* Этот класс был введён и изучен ранее в работах О.И. Зайца[1]. Ему отвечают СДУ, вектор сноса и матрица интенсивности шумов которых, соответственно, линеен и постоянна в каждой из областей $\Omega^{\pm}=\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\, x_1 \gtrless 0\}$;

2. Новый класс кусочно-линейных систем, линейных в *четвертях пространства*, введённый автором совместно с О.И. Зайцем [3]. Данный класс СДУ в каждой из областей $\Omega^{\pm\pm} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\, x_1 \gtrless 0, x_2 \gtrless 0\}$ характеризуется линейным вектором сноса вида $(\mathbf{C}^{\pm\pm}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^{\pm\pm})$ и постоянной матрицей интенсивности шумов вида $\sqrt{2}\mathbf{H}^{\pm\pm}$. Выше $\mathbf{C}^{\pm\pm}$ обозначают $n \times n$-матрицы, а $\boldsymbol{d}^{\pm\pm}$ — n-вектора, вообще говоря, различные для каждой из областей $\Omega^{\pm\pm}$;

3. Новый класс кусочно-линейных систем, линейных в *полислоях*, который в каждой из областей вида $\Omega_j = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\, \beta_{j-1} < x_1 < \beta_j\}$ характеризуется линейным вектором сноса $(\mathbf{C}^{(j)}\; \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^{(j)})$ и постоянной матрицей интенсивности шумов $\sqrt{2}\mathbf{H}^{(j)}$, причём $\mathbf{C}^{(j)}$ — $n \times n$-матрицы, $\boldsymbol{d}^{(j)}$ — n-вектора, $j = -l, \ldots, l$, последовательность вещественных чисел β_j строго возрастает, а по определению считается, что $\beta_{-(l+1)} = -\infty$ и $\beta_l = +\infty$;

4. Новый класс кусочно-линейных систем *с локальным временем.* Для них в уравнения движения (4) добавляется локальное время одной из фазовых координат вектора $\boldsymbol{X}(t)$ на некотором фиксированном уровне.

[1] *Заяц О.И.* Применение уравнения Пугачева–Свешникова к исследованию кусочно-линейных стохастических систем, линейных в полупространствах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. — 2013. — № 4(182)-1. — С. 128–142.

Во **второй главе** приводится обзор наиболее употребительных и эффективных современных методов анализа стохастических систем. Вначале разбирается подход, основанный на уравнениях Колмогорова (прямом и обратном), а затем — основанный на уравнении Фейнмана–Каца. Приводится обзор основных приближённых методов анализа стохастических систем, а также некоторые известные немногочисленные примеры точных решений.

Третья глава посвящена основному для диссертации подходу, основанному на использовании уравнения Пугачёва в его канонической форме

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{z},t)}{\partial t} = \mathbb{E}\left[\Phi(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{X}(t),t)e^{i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)}\right]. \tag{5}$$

Оно определяет характеристическую функцию $E(\boldsymbol{z},t) = \mathbb{E}\left[e^{i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)}\right]$ процесса $\boldsymbol{X}(t)$, где, как обычно, $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание. Функция Пугачёва $\Phi(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y},t)$ для случая диффузионного процесса (1) такова:

$$\Phi(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y},t) = i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(t,\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}, \tag{6}$$

где матрица диффузии $\mathbf{B}(t,\boldsymbol{y})$ определяется формулой $\mathbf{B}(t,\boldsymbol{y}) = \mathbf{H}(t,\boldsymbol{y})\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y})$.

Обобщению уравнения (5) на случай СДУ с локальным временем посвящена **теорема 3.1**, согласно которой, для скалярного уравнения

$$dX(t) = a(t,X(t))dt + \alpha h^2 dL_X^r(t) + h\,dW(t), \tag{7}$$

содержащего локальное время $L_X^r(t)$ процесса $X(t)$ на уровне r, уравнение Пугачёва преобразуется к виду

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \mathbb{E}\left[\Phi(z|X(t),t)e^{izX(t)}\right] + iz\alpha h^2 e^{irz}\Psi(t), \tag{8}$$

где вспомогательная функция $\Psi(t)$ задаётся сингулярным интегралом

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(z,t)e^{-irz}dz. \tag{9}$$

При решении уравнения Пугачёва важную роль играют свойства аналитичности характеристической функции $E(\boldsymbol{z},t)$. Этому важному вопросу посвящена специальная общая **теорема 3.2**, доказанная автором в [1]. Она гласит, что при весьма общих ограничениях на вектор сноса и матрицу интенсивности шумов, если последняя не зависит от фазового вектора, то характеристическая функция $E(\boldsymbol{z},t)$ является целой функцией относительно всей совокупности компонент $\boldsymbol{z}$.

Подробный обзор существующих приближённых методов решения уравнения Пугачёва приводится в **разделе 3.2**.

Для рассматриваемых в диссертации классов кусочно-линейных систем, уравнение Пугачёва (5) приобретает особый вид, впервые найденный А.А. Свешниковым применительно к системам релейного типа. Ранее в литературе уравнение Пугачёва–Свешникова (ПС) фигурировало лишь для систем, линейных в *полупространствах*. В **разделе 3.4** приводится вывод этого уравнения для ещё двух классов систем. Вначале доказана **теорема 3.3**, которая устанавливает вид уравнения ПС для полислоевых систем:

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{z},t)}{\partial t} + \sum_{j=-l}^{l} (\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{(j)}\boldsymbol{z} - i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{(j)} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{(j)}\nabla_{\boldsymbol{z}})\Phi_j(\boldsymbol{z},t) = 0, \tag{10}$$

причём Φ_j обозначает здесь следующий сингулярный интеграл типа свёртки:

$$\Phi_j(\boldsymbol{z},t) = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{-i\beta_{j-1}(s-z_1)} - e^{-i\beta_j(s-z_1)})E|_{z_1=s}}{s-z_1}\,ds, \quad j=-l,\ldots,l. \tag{11}$$

Затем доказана **теорема 3.4**, которая задаёт общий вид уравнения ПС для случая кусочно-линейных систем, линейных в четвертях пространства:

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{z},t)}{\partial \tau} + \mathcal{A}_0 E(\boldsymbol{z},t) - i\mathcal{A}_1\hat{E}_1(\boldsymbol{z},t) - i\mathcal{A}_2\hat{E}_2(\boldsymbol{z},t) - \mathcal{A}_{12}\hat{E}_{12}(\boldsymbol{z},t) = 0. \tag{12}$$

Здесь для краткости использованы операторные обозначения $\mathcal{A}_j = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_j\boldsymbol{z} - i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_j - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_j\nabla_{\boldsymbol{z}}$, $j \in \{0,1,2,12\}$, а также обозначения следующих сингулярных интегралов типа свёртки:

$$\begin{gathered}\hat{E}_1(\boldsymbol{z},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E|_{z_j=s}}{s-z_1}ds, \quad \hat{E}_2(\boldsymbol{z},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E|_{z_2=s}}{s-z_2}ds,\\ \hat{E}_{12}(\boldsymbol{z},t) = \frac{1}{\pi^2}\mathrm{v.p.}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E|_{z_1=s_1,z_2=s_2}}{(s_1-z_1)(s_2-z_2)}ds_1ds_2.\end{gathered} \tag{13}$$

Коэффициенты $\mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ и $\boldsymbol{d}_j$ выражаются через коэффициенты исходного уравнения $\mathbf{C}^{\pm\pm}, \mathbf{H}^{\pm\pm}$ и $\boldsymbol{d}^{\pm\pm}$ по явным формулам, приведённым в тексте диссертации.

В **четвёртой главе** вначале излагаются основные сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые при решении *краевой задачи Римана*. Разбирается классическая задача Римана для полуплоскостей и биполуплоскостей. На этой основе развивается метод сведения уравнения ПС для различных классов кусочно-линейных систем, рассматриваемых в диссертации, к *модифицированной параметрической краевой задаче Римана*, а также метод перехода от этой задачи к *основному уравнению* для краевых значений интеграла типа Коши, в котором в роли плотности выступает искомая характеристическая функция.

В случае полислоевых систем, в **разделе 4.4** доказано, что решение уравнения ПС (10) может быть сведено к некоторой *специальной параметрической краевой задаче Римана* поиска функций $\Phi_l(\boldsymbol{z},t)$ и $\Phi_{-l}(\boldsymbol{z},t)$, аналитических по z_1, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях и удовлетворяющих краевому условию

$$\sum_{j=-l}^{l}\left(\frac{\partial\Phi_j(\boldsymbol{z},t)}{\partial t}+(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{(j)}\boldsymbol{z}-i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{(j)}-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{(j)}\nabla_{\boldsymbol{z}})\Phi_j(\boldsymbol{z},t)\right)=0, \qquad (14)$$

причём в это краевое условие входит ряд дополнительных функций $\Phi_j(\boldsymbol{z},t)$, $j=-l+1,\dots,l-1$, целых по z_1, которые также подлежат определению. Для разрешимости задачи на функции $\Phi_j(\boldsymbol{z},t)$ накладываются специальные дополнительные ограничения в бесконечно удалённой точке $z_1=\infty$.

Указанная краевая задача сведена к обратной задаче поиска функций $G_0^{(j)}(\boldsymbol{z}',t)$ и $G_1^{(j)}(\boldsymbol{z}',t)$, обеспечивающих аналитичность функций $\Phi_j(\boldsymbol{z},t)$, определяемых совокупностью равенств

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi_j(\boldsymbol{z},t)}{\partial t}+(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{(j)}\boldsymbol{z}-i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{(j)}-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{(j)}\nabla_{\boldsymbol{z}})\Phi_j(\boldsymbol{z},t)=\\ =e^{iz_1\beta_{j-1}}(G_0^{(j-1)}(\boldsymbol{z}',t)+G_1^{(j-1)}(\boldsymbol{z}',t)\,z_1)-e^{iz_1\beta_j}(G_0^{(j)}(\boldsymbol{z}',t)+G_1^{(j)}(\boldsymbol{z}',t)\,z_1),\end{gathered} \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{z}'$ — обозначение для урезанного вектора $(z_2,\dots,z_n)^T$.

В случае четвертей пространства в **разделе 4.5** уравнение ПС сведено к *параметрической краевой задаче Римана для биполуплоскостей*, которая заключается в нахождении четырёх функций $\Phi^{\pm\pm}(\boldsymbol{z},t)$, аналитических, соответственно, в биполуплоскостях $\Omega^{\pm\pm}$ и удовлетворяющих краевому условию

$$\mathcal{A}^{++}\Phi^{++}(\boldsymbol{z},t)-\mathcal{A}^{+-}\Phi^{+-}(\boldsymbol{z},t)-\mathcal{A}^{-+}\Phi^{-+}(\boldsymbol{z},t)+\mathcal{A}^{--}\Phi^{--}(\boldsymbol{z},t)=0, \qquad (16)$$

где для краткости введены операторные обозначения $\mathcal{A}^{\pm\pm}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\pm\pm}\boldsymbol{z}-i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{\pm\pm}-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\pm\pm}\nabla_{\boldsymbol{z}}$, причём $\mathbf{B}^{\pm\pm}=\mathbf{H}^{\pm\pm}(\mathbf{H}^{\pm\pm})^T$, а на функции $\Phi^{\pm\pm}(\boldsymbol{z},t)$ накладывается соответствующее условие убывания при $z_1\to\infty, z_2\to\infty$.

Решение краевой задачи (16) сведено к решению обратной задачи для основного уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi^{\pm\pm}(\boldsymbol{z},t)}{\partial t}+(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\pm\pm}\boldsymbol{z}-i\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{\pm\pm}-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\pm\pm}\nabla_{\boldsymbol{z}})\Phi^{\pm\pm}(\boldsymbol{z},t)=\\ =G_0^{\pm}(z_2,\boldsymbol{z}'',t)+G_1^{\pm}(z_2,\boldsymbol{z}'',t)z_1+H_0^{\pm}(z_1,\boldsymbol{z}',t)+H_1^{\pm}(z_1,\boldsymbol{z}',t)z_2,\end{gathered} \qquad (17)$$

где полагается, что $\boldsymbol{z}'' = (z_1,z_3,\ldots,z_n)^T$. Эта задача состоит в подборе таких вспомогательных функций $G_0^{\pm}(z_2,\boldsymbol{z}'',t), G_1^{\pm}(z_2,\boldsymbol{z}'',t), H_0^{\pm}(z_1,\boldsymbol{z}',t)$ и $H_1^{\pm}(z_1,\boldsymbol{z}',t)$, которые обеспечивают аналитичность функций $\Phi^{\pm\pm}(\boldsymbol{z},t)$, задаваемых равенством (17), в соответствующих биполуплоскостях $\Omega^{\pm\pm}$.

Пятая глава содержит решение ряда конкретных прикладных задач для кусочно-линейных систем, которые разбираются последовательно для всех указанных ранее классов аналитической разрешимости. Основное уравнение решается методом аналитического продолжения. Подобные модели находят широкое применение в различных прикладных областях и являются предметом многочисленных публикаций, например, в теории виброизоляции, прежде всего, применительно к задачам сейсмозащиты[2].

В **разделе 5.1** для пояснения основной идеи вначале рассматривается уже известный класс кусочно-линейных систем, линейных в полупространствах. Детально разбирается классическая *задача Кренделла* о перемещениях незакреплённого тела на подвижном основании, которая дополнена ограничением на длительность случайного воздействия. В качестве модели для силы сопротивления используется кулоновское трение $F_{res} = -\mu mg\,\mathrm{sign}(V(t))$, где $V(t)$ является относительной скоростью тела, g обозначает ускорение свободного падения, а μ — коэффициент сухого трения между телом и основанием. Решение указанной задачи было начато в работах О.И. Зайца и завершено в его совместных статьях с автором [4, 5]. Если подвижное основание совершает продольные колебания по закону белого шума $\xi(t)$ интенсивности h (см. рис. 1), то относительная скорость тела представляет собой *процесс Кохи–Динза*

$$\dot{V}(t) = -\mu g\ \mathrm{sign}(V(t)) + h\xi(t), \quad V(0) = v_0. \tag{18}$$

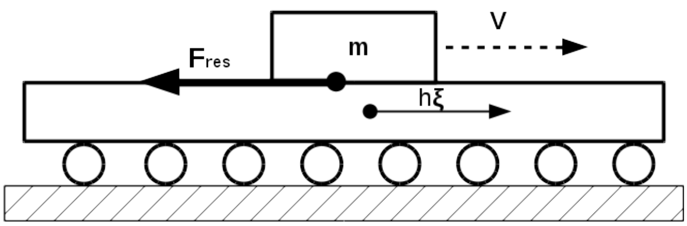

Рис. 1: Скольжение тела по основанию с учётом сухого трения

[2] *Crandall S.H., Lee S.S., Williams J.H.* Accumulated slip of a friction-controlled mass excited by earthquake motions // Journal of Applied Mechanics. — 1974. — Vol. 41, no. 4. — P. 1094–1098.

Получено явное выражение изображения по Лапласу характеристической функции такого важного функционала, как путь, пройденный телом,

$$S(t) = \int\limits_0^t |V(s)|\, ds, \tag{19}$$

через который выражается другая важная физическая характеристика — удельная энергия, рассеянная на трение, $R(t) = \mu g S(t)$.

Раздел 5.2 посвящён системам, относящимся к классу кусочно-линейных систем, линейных в четвертях пространства. Вначале решается задача о фрикционном торможении незакреплённого тела массы m, положенного на основание, совершающее продольные колебания по закону белого шума интенсивности h, при наличии управляемого демпфера сухого трения. Относительная скорость тела подчиняется уравнению, подобному (18), а именно

$$m\dot{V}(t) = -P\,\varphi(V(t)) + mh\,\xi(t), \quad V(0) = v_0, \tag{20}$$

где v_0 обозначает начальную скорость тела, а $\varphi(v) = (1 - \mathbb{1}_{[-v_{max}, v_{max}]}(v)) sign(v)$ — релейная нелинейность с зоной нечувствительности. Здесь $\mathbb{1}_{[-v_{max}, v_{max}]}$ — индикатор отрезка $[-v_{max}, v_{max}]$, а v_{max} — критическая скорость, при которой включается демпфер сухого трения, создающий тормозящее усилие P.

Время, в течение которого система находилась в штатном режиме, даётся интегральным функционалом следующего вида:

$$\mathcal{I}(t) = \int\limits_0^t \mathbb{1}_{[-v_{max}, v_{max}]}(V(s))\, ds. \tag{21}$$

Вводя безразмерные переменные

$$a = \frac{P}{mh^2} v_{max}, U_1 = a + \frac{P}{mh^2} V,\ U_2 = -a + \frac{P}{mh^2} V,\ \tau = \frac{P^2}{2m^2h^2} t,\ \Theta = \frac{P^2}{2m^2h^2} \mathcal{I} \tag{22}$$

и новый белый шум $\tilde{\xi}(\tau)$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(\tau) &= -\operatorname{sign}(U_1(\tau)) - \operatorname{sign}(U_2(\tau)) + \sqrt{2}\tilde{\xi}(\tau), \\ \dot{U}_2(\tau) &= -\operatorname{sign}(U_1(\tau)) - \operatorname{sign}(U_2(\tau)) + \sqrt{2}\tilde{\xi}(\tau), \\ \dot{\Theta}(\tau) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(U_1(\tau)) - \operatorname{sign}(U_2(\tau))) \end{aligned} \tag{23}$$

с начальными условиями $U_1(0) = a, U_2(0) = -a$ и $\Theta(0) = 0$.

Соответствующее этой системе уравнение ПС имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + (z_1 + z_2)^2 E + \frac{z_1 + z_2}{\pi} \left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E|_{z_1 = s}}{s - z_1} ds + \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E|_{z_2 = s}}{s - z_2} ds \right) = 0 \tag{24}$$

и эквивалентно краевой задаче Римана для биполуплоскостей

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi^{++}}{\partial\tau}+((z_1+z_2)^2+2i(z_1+z_2))\Phi^{++}-\left[\frac{\partial\Phi^{+-}}{\partial\tau}+(z_1+z_2)^2\Phi^{+-}\right]-\\-\left[\frac{\partial\Phi^{-+}}{\partial\tau}+(z_1+z_2)^2\Phi^{-+}\right]+\frac{\partial\Phi^{--}}{\partial\tau}+((z_1+z_2)^2-2i(z_1+z_2))\Phi^{--}=0\end{gathered}\tag{25}$$

с начальными условиями $\Phi^{++}|_{\tau=0}=\Phi^{-+}|_{\tau=0}=\Phi^{--}|_{\tau=0}=0$ и $\Phi^{+-}|_{\tau=0}=e^{ia(z_1-z_2)}$.

В данном случае основные уравнения в изображениях по Лапласу, помечаемых волной сверху, имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde\Phi^{++}&=\frac{\tilde G_0^{+}(z_2,p)+z_1\tilde G_1^{+}(z_2,p)+\tilde H_0^{+}(z_1,p)+z_2\tilde H_1^{+}(z_1,p)}{(z_1+z_2)^2+2i(z_1+z_2)+p},\\\tilde\Phi^{+-}&=\frac{\tilde G_0^{-}(z_2,p)+z_1\tilde G_1^{-}(z_2,p)+\tilde H_0^{+}(z_1,p)+z_2\tilde H_1^{+}(z_1,p)-e^{ia(z_1-z_2)}}{(z_1+z_2)^2+p},\\\tilde\Phi^{-+}&=\frac{\tilde G_0^{+}(z_2,p)+z_1\tilde G_1^{+}(z_2,p)+\tilde H_0^{-}(z_1,p)+z_2\tilde H_1^{-}(z_1,p)}{(z_1+z_2)^2+p},\\\tilde\Phi^{--}&=\frac{\tilde G_0^{-}(z_2,p)+z_1\tilde G_1^{-}(z_2,p)+\tilde H_0^{-}(z_1,p)+z_2\tilde H_1^{-}(z_1,p)}{(z_1+z_2)^2-2i(z_1+z_2)+p}.\end{aligned}\tag{26}$$

Вспомогательные функции $\tilde G_0^{\pm}(z_2,p),\tilde G_1^{\pm}(z_2,p),\tilde H_0^{\pm}(z_1,p),\tilde H_1^{\pm}(z_1,p)$ находятся из условия аналитичности правых частей равенств (26), что приводит к системе функциональных уравнений. Построено решение этой системы, из которого найдено выражение для изображения характеристической функции

$$\tilde E_{(U,\Theta)}(z,z_3;p)=\frac{1}{z^2+p-iz_3}-\frac{iB(p,z_3)}{z^2+p-iz_3}\left(\frac{2z+z_3}{z+\nu^+}e^{iaz}+\frac{2z-z_3}{z-\nu^+}e^{-iaz}\right),\tag{27}$$

где $U=\frac{P}{mh^2}V$, $\nu^+=i(\sqrt{1+p}+1)$, а функция $B(p,z_3)$ с использованием обозначения $w^+=i(\sqrt{1+p}-1)$ выражается в виде

$$B(p,z_3)=\frac{1}{(i\sqrt{p-iz_3}-w^+)e^{-a\sqrt{p-iz_3}}-(i\sqrt{p-iz_3}+w^+)e^{a\sqrt{p-iz_3}}}.\tag{28}$$

На основании выражения (27) найдено изображение характеристической функции времени пребывания $\Theta(t)$, а также асимптотика его моментных характеристик (математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации).

В **разделе 5.2.3** решена задача об управляемом фрикционном торможении при условии, что управляющее воздействие $|P|\leqslant\mu mg$ постоянно по модулю и направлено так, чтобы уменьшить модуль разности времени, в течение которого тело двигалось в положительном направлении и времени, в течение которого тело двигалось в отрицательном направлении. Эта задача описывается системой СДУ

$$\begin{cases} m\dot{V}(t) = -\mu m g \,\mathrm{sign}(V(t)) - P\,\mathrm{sign}(\mathcal{I}(t)) + mh\xi(t), \\ \dot{\mathcal{I}}(t) = \,\mathrm{sign}(V(t))\,. \end{cases} \tag{29}$$

Уравнение ПС здесь сведено к одномерному полному сингулярному интегральному уравнению типа свёртки с ядром Коши.

В **разделе 5.3** рассматриваются системы из класса кусочно-линейных полислоевых систем. Вначале вновь решается задача о фрикционном торможении, но альтернативным методом. Точное решение сравнивается с решением, полученным методом статистической линеаризации.

Далее рассматривается важная задача о времени пребывания процесса Кохи–Динза

$$dX(t) = -2\mu\,\mathrm{sign}(X(t))\;dt + \sqrt{2}\,dW(t), \quad X(0) = x > 0, \tag{30}$$

на отрезке общего вида $[-a,b]$. Указанное время выражено функционалом

$$\mathcal{I}(t) = \int\limits_0^t \mathbb{1}_{[-a,b]}(X(s))\,ds, \quad a,b > 0. \tag{31}$$

Уравнение ПС приводит к краевой задаче для полуплоскостей, которая эквивалентна основным уравнениям в изображениях по Лапласу

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0^+ &= \frac{e^{ibz_1}(\tilde{G}_0^{(1)} + z_1\tilde{G}_1^{(1)}) + \tilde{G}_0^{(0)} + z_1\tilde{G}_1^{(0)} - \chi^- e^{ixz_1}}{z_1^2 + 2i\mu z_1 + p - iz_2}, \\ \tilde{\Phi}_1^+ &= -\frac{e^{ibz_1}(\tilde{G}_0^{(1)} + z_1\tilde{G}_1^{(1)}) - \chi^+ e^{ixz_1}}{z_1^2 + 2i\mu z_1 + p}, \\ \tilde{\Phi}_0^- &= \frac{e^{-iaz_1}(\tilde{G}_0^{(-1)} + z_1 G_1^{(-1)}) - (\tilde{G}_0^{(0)} + z_1\tilde{G}_1^{(0)})}{z_1^2 - 2i\mu z_1 + p - iz_2}, \\ \tilde{\Phi}_1^- &= -\frac{e^{-iaz_1}(\tilde{G}_0^{(-1)} + z_1\tilde{G}_1^{(-1)})}{z_1^2 - 2i\mu z_1 + p}, \end{aligned} \tag{32}$$

где функции $\tilde{G}_j^{(l)}(z_2,p)$ определяются условием аналитичности, а коэффициенты задаются явными выражениями $\chi^{\pm} = (\,\mathrm{sign}(x-b) \pm 1)/2$.

Из условий аналитичности для правых частей (32) следует линейная система уравнений

$$\begin{aligned} &e^{-b\varkappa^{\pm}}(\tilde{G}_0^{(1)} + i\varkappa^{\pm}\tilde{G}_1^{(1)}) + \tilde{G}_0^{(0)} + i\varkappa^{\pm}\tilde{G}_1^{(0)} - \chi^- e^{-x\varkappa^{\pm}} = 0, \\ &e^{-a\varkappa^{\pm}}(\tilde{G}_0^{(-1)} - i\varkappa^{\pm}\tilde{G}_1^{(-1)}) - (\tilde{G}_0^{(0)} - i\varkappa^{\pm}\tilde{G}_1^{(0)}) = 0, \\ &e^{-b\nu}(\tilde{G}_0^{(1)} + i\nu\tilde{G}_1^{(1)}) - \chi^+ e^{-x\nu} = 0, \quad \tilde{G}_0^{(-1)} - i\nu\tilde{G}_1^{(-1)} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\varkappa^{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + p - iz_2}$, а $\nu = \sqrt{\mu^2 + p} - \mu$.

Характеристическая функция даётся выражением

$$\tilde{E}_{\mathcal{I}}(z_2, p) = \frac{A(z_2, p) - \chi^-}{p - iz_2} - \frac{A(z_2, p) - \chi^+}{p}, \tag{34}$$

где $A(z_2, p) = \tilde{G}_0^{(1)}(z_2, p) + \tilde{G}_0^{(-1)}(z_2,p)$.

Отсюда найден закон распределения максимума *процесса Кохи–Динза* за промежуток времени, длина которого определяется случайной величиной τ_λ, распределённой по показательному закону с параметром λ:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{s\in[0,\tau_\lambda]} |X(s)| \leqslant h\right\} = 1 - \frac{\nu^+ e^{\nu^+ x} - \nu^- e^{\nu^- x}}{\nu^+ e^{\nu^+ h} - \nu^- e^{\nu^- h}} e^{-2\mu(h-x)}, \quad h > x, \tag{35}$$

причём здесь $\nu^{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \lambda}$.

Раздел 5.4 посвящён системам, в уравнениях движения которых содержится локальное время. Введение локального времени позволяет перейти к так называемым «скошенным» процессам, а коэффициент α при локальном времени в уравнениях типа (7) представляет дополнительный параметр формы, который можно использовать для более точной подгонки модельных законов распределения под данные натурных наблюдений. Вначале вычисляется локальное время *процесса Кохи–Динза*, изображение по Лапласу характеристической функции которого даётся выражением

$$\tilde{E}_{L_X^r}(z, p) = (1 + iz\tilde{\Psi}(z,p))/p, \tag{36}$$

где вспомогательная функция $\tilde{\Psi}(z,p)$ определяется равенством

$$\tilde{\Psi}(z, p) = \frac{e^{-\varkappa r - \nu|x|}\sqrt{\mu^2 + p} + \nu \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \left(1 - e^{-2x\sqrt{\mu^2+p}}\right) e^{-\varkappa|x-r|}, & 0 < x \leqslant r, \\ \left(1 - e^{-2r\sqrt{\mu^2+p}}\right) e^{-\nu|x-r|}, & x > r \end{cases}}{2\nu\sqrt{\mu^2 + p} - iz\left(\nu + \mu e^{-2r\sqrt{\mu^2+p}}\right)}. \tag{37}$$

Для случая, когда локальное время берётся в нуле ($r = 0$), найдено явное выражение его плотности вероятности:

$$f_{L_X^0}(y, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(|x|+2y-2\mu t)^2}{4t}} - 2\mu e^{2\mu(|x|+2y)} \operatorname{Erfc}\left(\frac{|x| + 2y + 2\mu t}{2\sqrt{t}}\right), y > 0, \tag{38}$$

а также ряд других вероятностных характеристик.

В качестве следующего примера решается важная для приложений (например, для океанологии[3]) *задача Бакстера для процесса скошенного броуновского движения*. Последний возникает в задачах моделирования полупроницаемых частично отражающих экранов. Наличие локального времени $L_U^r(t)$ в точке r отвечает поставленному в эту точку экрану, который пропускает частицы, движущиеся в положительном направлении, с некоторой вероятностью β, а с вероятностью $1-\beta$ их отражает. Для частиц, движущихся в другом направлении, вероятности β и $1-\beta$ меняются местами. Исследуется *функционал Бакстера*, а именно время пребывания частицы за равномерно движущимся со скоростью $b > 0$ и стартующим из точки a экраном:

$$\mathcal{I}(t) = \operatorname{mes}(\{s \in [0,t] |\, U(s) > a + bs\}) = \int\limits_0^t \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(U(s) - a - bs)\, ds. \quad (39)$$

Переход к безразмерным переменным по формулам

$$V = \frac{\sqrt{2}}{h}(U - a - bt), \mu = \frac{(b-c)}{\sqrt{2}h}, \eta = 2\beta - 1, v_0 = -\frac{a\sqrt{2}}{h} \leqslant 0 \quad (40)$$

приводит к двумерному процессу

$$\begin{cases} dV(t) & = & -2\mu\; dt + 2\eta\; dL_V^0(t) + \sqrt{2}\; dW(t), \\ d\mathcal{I}(t) & = & \dfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(V(t)))\; dt \end{cases} \quad (41)$$

при начальных условиях $V(0) = v_0$ и $\mathcal{I}(0) = 0$.

Соответствующее уравнение ПС

$$\begin{gathered} \frac{\partial E(z_1,z_2;t)}{\partial t} = -\left(z_1^2 + 2i\mu z_1 - \frac{iz_2}{2}\right) E(z_1,z_2;t) + \\ + \frac{z_2}{2\pi}\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(s,z_2;t)}{s - z_1}\; ds + 2i\eta z_1\; \Psi(z_2,t) \end{gathered} \quad (42)$$

решается при начальном условии $E(z_1,z_2;0) = e^{iv_0 z_1}$, причём функция $\Psi(z_2,t)$, как и ранее, задаётся сингулярным интегралом вида (9).

Получено выражение для изображения по Лапласу совместной характеристической функции самого процесса и времени его пребывания. При подстановке в него $z_1 = 0$ находим изображение характеристической функции времени пребывания

$$\tilde{E}_{\mathcal{I}}(z_2,p) = \frac{(1-\eta)\varkappa^- - (1+\eta)\nu^+}{(1-\eta)\nu^- - (1+\eta)\varkappa^+} \cdot \frac{e^{iv_0\nu^-}}{\varkappa^-\nu^+} + \frac{1 - e^{iv_0\nu^-}}{p}. \quad (43)$$

[3] *Appuhamillage T., Sheldon D.* First passage time of skew Brownian motion // Journal of Applied Probability. — 2012. — Vol. 49, — P. 685–696.

Соответствующий оригинал плотности вероятности найден в квадратурах

$$f_{\mathcal{I}}(y,t) = \frac{4e^{-\mu^2 t + v_0\mu}}{\pi\sqrt{y(t-y)}} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\frac{v_0}{2\sqrt{t-y}}}^{+\infty} \delta(s_1, s_2; t, y, v_0, \mu, \eta)\, ds_1 ds_2, \tag{44}$$

где для краткости введено обозначение $\delta = \frac{1-\eta}{1+\eta}\delta^+ + \frac{1+\eta}{1-\eta}\delta^-$, причём

$$\begin{gathered} \delta^+ = \chi^+\, e^{\mu(2\sqrt{t-y}s_1+v_0)+\frac{2\mu(3\eta-1)}{1+\eta}\sqrt{y}s_2},\ \delta^- = \chi^-\, e^{\frac{\mu(3\eta+1)}{1-\eta}(2\sqrt{t-y}s_1+v_0)-2\mu\sqrt{y}s_2}, \\ \chi^{\pm} = \frac{1 \pm \operatorname{sign}\big((1+\eta)(2\sqrt{t-y}s_1+v_0) - 2(1-\eta)\sqrt{y}s_2\big)}{2} s_1 s_2\, e^{-s_1^2-s_2^2}. \end{gathered} \tag{45}$$

Далее производится численный анализ решений, а также их сравнение с приближёнными, полученными методом статистической линеаризации. Численный метод реализован в среде Wolfram Mathematica®. Кроме того, получен ряд дополнительных характеристик, связанных с временем первого выхода на экран, а также с вероятностью нахождения по обе его стороны.

В **заключении** приводится краткий обзор результатов диссертации.

В **приложениях** даётся информация, носящая вспомогательный характер и призванная обеспечить замкнутое изложение в пределах диссертации. В частности, подробно разобраны примеры задач, решаемые методом статистической линеаризации.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию существенно нелинейных динамических систем, подверженных воздействию случайных возмущений. Метод исследования основан на теории диффузионных процессов.

Уравнение Пугачёва–Свешникова (ПС) для характеристической функции решается путём сведения к некоторой модифицированной параметрической краевой задаче Римана. Показано, что для трёх выделенных автором классов существенно нелинейных систем, а именно, для кусочно-линейных систем, линейных в четвертях пространства, линейных в полислоях, а также включающих локальное время, возникающая краевая задача Римана допускает точное решение. Искомое решение исходного уравнения ПС может тогда выражаться в квадратурах, в виде ряда, а также в замкнутом виде в элементарных функциях. Достаточно сложный вид этого решения привёл к необходимости использования численных методов, а также написания комплекса программ на языке среды Wolfram Mathematica®.

Главной целью работы является разработка единообразного универсального метода решения уравнения ПС. Его суть сводится к решению некоторой обратной задачи подбора правой части основного уравнения для краевых значений интеграла типа Коши, исходя из соответствующих условий аналитичности этих краевых значений. Эта общая технология получения решения по-разному реализуется для каждого из трёх выделенных в работе классов существенно нелинейных систем.

Применение уравнений Пугачёва и Пугачёва–Свешникова не ограничивается рассмотренными в диссертации случаями, оно может быть обобщено на случай более сложных практически значимых моделей. В частности, интерес представляет разработка соответствующей теории уравнения ПС для процессов, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями, в которых в качестве процесса с независимыми приращениями выступает пуассоновский процесс. Такие модели представляют интерес для финансовой математики, теории массового обслуживания и ряда других областей прикладной математики.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Березин С.В.* Об аналитических свойствах характеристической функции процесса, заданного системой стохастических дифференциальных уравнений // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* — 2016. — Т. 2(242). — С. 108–115.

2. *Березин С.В., Заяц О.И.* Применение уравнения Пугачёва–Свешникова к решению задачи Бакстера о длительности выбросов // *Информатика и её применения.* — 2015. — № 9(2). — С. 39–49.

3. *Заяц О.И., Березин С.В.* Применение уравнения Пугачёва–Свешникова к исследованию кусочно-линейных стохастических систем, линейных в четвертях пространства // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление.* — 2013. — № 6(186). — С. 87–101.

4. *Berezin S.V., Zayats O.I.* On energy dissipation in a friction-controlled slide of a body excited by random motions of a foundation // Proceedings of Sixteenth International Workshop on New Approaches to High-Tech: Nano-Design, Technology, Computer Simulations, NDTCS-2015. — Grodno: Yanka Kupala State University, 2015. — P. 117–119.

5. *Berezin S., Zayats O.* On energy dissipation in a friction-controlled slide of a body excited by random motions of a foundation // *arXiv:1509.08063.* — 2015. — P. 1–6.