На правах рукописи

КУРЦ Валентина Валерьевна

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАФИКА В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ СИМУЛЯЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

**Работа выполнена** в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» на кафедре «Прикладная математика».

Научный руководитель: **АНУФРИЕВ Игорь Евгеньевич,**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **БУХАНОВСКИЙ Александр Валерьевич,**
доктор технических наук, профессор, директор мегафакультета трансляционных информационных технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

**ЧУРБАНОВА Наталья Геннадьевна,**
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 11 октября 2017 года в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 на базе ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, I корпус, аудитория 41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу www.spbstu.ru.

Автореферат разослан «______» ______________2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13
доктор технических наук, профессор Григорьев Борис Семёнович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Теория транспортных потоков начала развиваться в 50-х годах XX века. Тогда появились первые макроскопические модели, в которых транспортный поток уподобляется жидкости с мотивацией, и первые модели микроуровня, согласно которым уравнения движения выписываются для каждого автомобиля в отдельности. В последующие годы оба класса моделей были существенно расширены. В настоящее время в мире существуют десятки научных журналов, в которых публикуются материалы на транспортную тематику. Регулярно проводятся крупные конференции по математическому моделированию транспортных потоков. Несмотря на колоссальный объем накопленного научного материала, феномен образования заторных состояний до конца так и не изучен. Более того, не существует моделей, которые достоверно описывали бы все существующие фазы транспортного потока. При этом задача прогнозирования появления и развития заторных ситуаций на дорогах имеет высокую степень актуальности в настоящее время и требует разработки новых моделей автомобильного трафика.

Поскольку стили вождения, правила дорожного движения и марки автомобилей могут сильно отличаться в зависимости от страны, то необходимой составляющей для получения достоверного результата является калибровка параметрических моделей трафика. Существует множество работ, посвященных калибровке соответствующих моделей на основе реальных данных. Однако, разработанные на данный момент методики не учитывают условий устойчивости решений используемых моделей и не позволяют настраивать модели на основе данных о технических характеристиках транспортных средств.

Для прогнозирования поведения транспортных потоков, изучения схем оптимального управления и схем организации дорожного движения в настоящее время существуют и продолжают развиваться программные продукты моделирования автомобильного трафика (AIMSUM, MITSIM, VISSIM, Paramics). Кроме того, модели автомобильного трафика являются неотъемлемой составляющей обучающих транспортных тренажеров. В данном случае к реалистичности моделирования движения автомобилей предъявляются высокие требования, поскольку это оказывает непосредственное влияние на качество обучения. В некоторых случаях количество одновременно моделируемых транспортных средств может достигать десятков тысяч, при этом моделирование должно выполняться в режиме реального времени на персональном компьютере.

Диссертационная работа посвящена разработке и исследованию новых микроскопических моделей автомобильного трафика для использования в транспортных тренажерах и САПР интеллектуальных транспортных систем (ИТС), а также созданию быстрого вычислительного алгоритма для решения соответствующих систем дифференциальных уравнений большой размерности и исследованию его устойчивости.

**Степень разработанности темы исследования.** Макромодели не подходят для использования в транспортных тренажерах, а значит не могут быть рассмотрены для достижения цели диссертационного исследования. Среди микроскопических моделей одной из самых известных и хорошо себя зарекомендовавших моделей является модель «разумного водителя» (M. Treiber, 1999). Данная модель обладает набором параметров, которые имеют содержательную интерпретацию. Кроме того, она способна воспроизводить неустойчивости транспортного потока, которые наблюдаются на практике. Именно поэтому, модель «разумного водителя» была выбрана в качестве «отправной точки» в данном исследовании.

В теории транспортных потоков определено несколько типов устойчивости транспортного потока. Одним из направлений исследований является определение условий на параметры моделей, когда тот или иной тип устойчивости/неустойчивости имеет место.

Большое количество работ посвящено методикам калибровки моделей транспортных потоков с использованием реальных данных. Однако, на данный момент не известны методики, которые позволяют настраивать параметры модели на основе данных о технических характеристиках конкретного транспортного средства и при этом учитывать математические свойства модели (например, условия устойчивости).

Использование микроскопического подхода для моделирования динамики транспортных потоков приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом. Обычно, для решения таких систем используют классические схемы численного интегрирования. В некоторых ситуациях количество одновременно моделируемых агентов может достигать таких значений, при которых решение с помощью стандартных численных схем не может быть получено в режиме реального времени на персональном компьютере. Это обусловлено присутствием как быстро, так и медленно меняющихся компонент вектора неизвестных, в результате чего для достижения требуемой точности шаг интегрирования оказывается очень маленьким. В настоящее время существует такой класс численных методов, как солверы с кратными шагами – *multirate solvers,* в которых на каждом макрошаге для каждой из компонент на основе информации о скорости ее изменения и априорной оценки вычисляется свой шаг интегрирования, кратный макрошагу. Однако в литературе не найдено упоминаний о том, что такие методы используются для моделирования транспортных потоков. Не обнаружено работ, посвященных исследованию устойчивости такого класса методов в применении к задачам моделирования автомобильного трафика.

**Целью** работы является разработка комплексного подхода для моделирования транспортных потоков в применении к транспортным тренажерам и САПР ИТС, которое может быть выполнено в режиме реального времени на персональном компьютере. Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Разработаны новые микроуровневые модели автомобильного трафика, которые являются развитием существующих и хорошо зарекомендовавших себя на практике моделей и устраняют некоторые из их недостатков, тем самым повышая степень реалистичности моделирования транспортных потоков.

2. Проведено исследование устойчивости новых моделей и получены соответствующие условия на параметры моделей.

3. Для новых моделей реализована и применена методика калибровки на основе реальных данных о траекториях автомобилей.

4. Для новых моделей доработана, реализована и применена методика калибровки, которая учитывает технические характеристики транспортного средства, а также полученные условия устойчивости.

5. Разработан быстрый вычислительный метод решения получающихся систем дифференциальных уравнений большой размерности, который учитывает специфику решаемой задачи. Получены условия устойчивости для данного численного метода.

6. Создан комплекс программ для моделирования автомобильного трафика на C/C++ и MATLAB.

**Объектом исследования** являются транспортные потоки. В качестве **предмета исследований** выступают микроскопические модели автомобильного трафика, их устойчивость, методики калибровки, а также быстрые численные методы для решения соответствующих систем дифференциальных уравнений большой размерности.

**Методология и методы исследования.** Исследование устойчивости предложенных микроскопических моделей автомобильного трафика выполнено с использованием линейного анализа устойчивости равновесного состояния. Численные эксперименты, демонстрирующие корректность полученных условий устойчивости, проведены с использованием средств MATLAB. Методика калибровки предложенных параметрических моделей на основе информации о технических характеристиках транспортных средств основана на решении многомерной нелинейной задачи оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств. Ограничения в виде равенств порождены схемой численного интегрирования, а ограничения в виде неравенств – полученными в рамках данного диссертационного исследования условиями устойчивости. Методика калибровки на основе реальных данных о траекториях автомобилей также основана на решении многомерной нелинейной задачи оптимизации с ограничениями.

Однако, в отличие от первого подхода, она требует полного вычисления траектории и дальнейшего ее сравнения с реальной траекторией. Задачи оптимизации решены в среде MATLAB с привлечением пакета Optimization toolbox. Быстрый вычислительный алгоритм с кратными шагами разработан с использованием методов оценки локальной погрешности схем численного интегрирования и теоретических сведений об устойчивости таких схем.

**Научная новизна.** В работе предложены новые микроскопические модели автомобильного трафика, которые являются улучшением существующих моделей данного класса, повышая степень реалистичности моделирования транспортных потоков. Это достигается за счет учета в явном виде времени реакции водителя на изменения во внешней обстановке, а также путем обеспечения более реалистичной дистанции между автомобилями в равновесном потоке. Предложенные модели настроены с использованием методики калибровки, которая адаптирована и доработана с учетом полученных в данной работе условий устойчивости. Разработан быстрый вычислительный метод решения систем дифференциальных уравнений большой размерности, который учитывает специфику решаемой задачи. Проведено исследование предложенного вычислительного алгоритма и получены условия его устойчивости в аналитическом виде. Полученные результаты в комплексе позволяют выполнять моделирование динамики транспортных потоков в применении к транспортным тренажерам и САПР ИТС в масштабах крупных городов в режиме реального времени с использованием персонального компьютера.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Для предложенных в диссертации новых моделей автомобильного трафика и быстрого вычислительного метода получены условия устойчивости. Новые модели использованы в тренажере автомобиля КАМАЗ. Новые модели и быстрый вычислительный алгоритм реализованы в опытно-конструкторской работе «Разработка технологии моделирования сложных информационно-управляющих систем транспортной инфраструктуры» (ОКР «ИУС–ТИМ»). Полученные результаты могут быть использованы разработчиками транспортных тренажеров, предназначенных для обучения вождению, и САПР ИТС. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Предложены две новые математические модели типа следования за лидером. Первая модель описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, является развитием классической модели «разумного водителя» и устраняет ряд выявленных в рамках данного диссертационного исследования недостатков, присущих этой модели. Вторая модель в явном виде учитывает время реакции водителя на изменения в текущей дистанции, что значительно повышает степень ее реалистичности. Функция ускорения определяется дифференциальным уравнением с запаздывающим по времени аргументом.

2. Для предложенных моделей проведено исследование устойчивости – локальной в случае колонны автомобилей конечной длины и потоковой (*string*) устойчивости на кольце. Второй тип устойчивости общепринят в теории транспортных потоков и является неотъемлемой составляющей анализа моделей автомобильного трафика. Получены условия на значения параметров обеих моделей, которые определяют области устойчивого и неустойчивого поведения решения соответствующих дифференциальных уравнений.

3. Реализованы методики калибровки параметрических моделей автомобильного трафика на основе данных о технических характеристиках транспортных средств и на основе реальных данных о траекториях автомобилей. В первом случае в задачу оптимизации добавлены условия устойчивости калибруемой модели, полученные в рамках данного исследования. Во втором случае предложен новый подход – *platoon calibration*, который позволяет оценить соотношение между двумя факторами, являющимися причиной разброса в значениях одних и тех же параметров модели для разных реальных траекторий. Первый фактор – это различные стили вождения и разные технические характеристики транспортных средств, второй – изменение стиля вождения конкретного человека с течением времени.

4. Разработан быстрый вычислительный алгоритм с кратными временными шагами для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, описывающих динамику транспортных потоков. Данный алгоритм учитывает специфику решаемой задачи, а именно то, что компоненты вектора решения имеют разные скорости изменения. За счет этого удается значительно сократить вычислительное время при сохранении требуемой точности решения. Для полученного вычислительного алгоритма построено правило выбора шагов для каждой из компонент в отдельности на основе оценки локальной ошибки и точности, задаваемой пользователем. Кроме того, проведено исследование устойчивости вычислительного алгоритма и получены условия устойчивости в аналитическом виде.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Доказательства утверждений, которые представлены в третьей главе диссертации, основаны на методах исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом. Для доказательства утверждений пятой главы использовались классические методы оценки локальной погрешности схем численного интегрирования и теоремы об устойчивости методов численного интегрирования.

Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждались на следующих научных конференциях: Traffic and Granular Flow’13, Juelich, Germany, 2013; International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Greece, 2014; Traffic and Granular Flow’15, Delft, the Netherlands, 2015; Неделя Науки в СПбПУ в 2012 и 2014 годах.

**Публикации.** Результаты диссертации отражены в 8-ми научных статьях [1–8]. Из них: 3 статьи [1–3] опубликованы в журналах из перечня ВАК, 2 публикации [4, 5] входят в базу Web of Science и 3 публикации [4–6] индексируется в базе Scopus.

**Личный вклад автора.** Результаты, представленные в данном диссертационном исследовании, получены соискателем самостоятельно или при его непосредственном участии.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на разделы и параграфы, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 121 страницу. В тексте содержится 54 рисунка, 6 таблиц. Список литературы включает 101 наименование.

## Основное содержание работы

В **первой главе** проводится обзор современного состояния теории транспортных потоков. В первом разделе описаны наиболее известные и популярные математические модели автомобильного трафика – макроскопические и микроскопические модели. Указаны недостатки каждой из моделей, приводящие к нереалистичному поведению транспортного потока. Второй раздел посвящен современным программным продуктам моделирования автомобильного трафика. В третьем разделе приведено понятие устойчивости транспортного потока, рассмотрены типы устойчивости, а также причины возникновения неустойчивости и возможные последствия. Четвертый раздел посвящен вычислительным алгоритмам с кратными шагами, применяемым для решения получающихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В пятом разделе рассмотрены типы реальных данных о траекториях автомобилей, методы их получения и последующей обработки, а также проведен обзор методик калибровки моделей автомобильного трафика на основе такого рода данных.

Во **второй главе** представлены две новые модели автомобильного трафика, которые получены в рамках данного диссертационного исследования. Эти модели относятся к классу микроскопических и являются моделями типа следования за лидером. Первая модель – модель с весами – является развитием широко известной модели «разумного водителя», предложенной М. Трайбером в 1999 году. Скорость автомобиля $v$ согласно модели с весами является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{v} = w(v,h)\cdot a\left(1-\left(\frac{v}{V^0}\right)^{\delta}\right) + \left(1-w(v,h)\right)\cdot a\left(1-\left(\frac{s^*(v)}{h}\right)^2\right), \tag{1}$$

где $a, V^0, \delta$ – параметры модели, весовая функция $w(v,h)$ зависит от фактической дистанции до впереди идущего автомобиля $h$ и текущей скорости $v$

$$w(v,h) = \begin{cases} 0, h \in (-\infty, s^*) \\ -2t^3 - 3t^2 + 1, t = \frac{h-s^*}{D} - 1, h \in [s^*, s^* + D]. \\ 1, h \in (s^* + D, +\infty) \end{cases} \tag{2}$$

Параметр $D$ определяет ширину переходного процесса, т. е. фазы движения, когда в выражение для ускорения (1) вносят вклад оба слагаемых. Желаемая дистанция $s^*(v)$ представляет собой квадратичную зависимость от скорости автомобиля $v$

$$s^*(v) = s_0 + Tv + cv^2, \tag{3}$$

где $s_0$ – минимально допустимая дистанция между транспортными средствами, $T$ – аналог времени реакции водителя, коэффициент $c$ определяет качество дорожного покрытия.

Модель устраняет такой недостаток модели «разумного водителя» в применении к тренажерам обучения вождению, как нереалистичная дистанция в равновесном потоке.

**Утверждение 1**. Согласно модели (1)–(2) в равновесном потоке, движущемся со скоростью $v$, дистанция между автомобилями равна $s^*(v)$.

Вторая модель в явном виде учитывает время реакции водителя и устраняет второй недостаток модели «разумного водителя», который заключается в мгновенной реакции водителей на изменения в окружающей обстановке. Скорость $v$ определяется дифференциальным уравнением с запаздывающим по времени аргументом

$$\dot{v}(t) = w(v,h)\cdot a\left(1-\left(\frac{v(t)}{V^0}\right)^{\delta}\right) + \big(1-w(v,h)\big)\cdot a\left(1-\left(\frac{s^*\big(v(t)\big)}{h(t-\tau)}\right)^{2}\right). \tag{4}$$

**Утверждение 2.** Согласно модели (4) дистанция в равновесном потоке, в котором все автомобили движутся с постоянной скоростью $v$, совпадает с желаемой дистанцией $s^*(v)$.

В **третьей главе** рассмотрены вопросы устойчивости моделей автомобильного трафика (1) и (4). Для обеих моделей проведено исследование локальной устойчивости и потоковой устойчивости на кольце. Первый раздел посвящен исследованию локальной устойчивости модели с весами в окрестности стационарного состояния. Рассмотрим колонну из $N$ автомобилей, движущихся друг за другом. Пусть $\dot{v}_i = a^{(i)}(v_{i-1}, v_i, h_i)$ – функция ускорения $i$-го автомобиля. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих динамику колонны из $N$ автомобилей, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a^{(1)}(v_L, v_1, h_1) \\ \dot{h}_1 = v_L - v_1 \\ \dot{v}_2 = a^{(2)}(v_1, v_2, h_2) \\ \dot{h}_2 = v_1 - v_2 \\ \quad \dots \\ \dot{v}_N = a^{(N)}(v_{N-1}, v_N, h_N) \\ \dot{h}_N = v_{N-1} - v_N \end{cases}, \tag{5}$$

где $v_L$ – скорость самого первого транспортного средства в колонне.

Рассматривается характер поведения решения системы (5) при некотором небольшом отклонении системы от состояния равновесия

$$\big(v_i = v, h_i = s^*(v)\big), i = 1, \dots, N. \tag{6}$$

**Утверждение 3.** Система (5), линеаризованная в окрестности равновесного состояния (6), является локально устойчивой в окрестности решения (6) тогда и только тогда, когда $\left.\frac{\partial a^{(i)}}{\partial v_i}\right|_{v_i=v} < 0, i = \overline{1,N}$. Для отсутствия колебательного типа решения необходимо потребовать, чтобы $\left(\left.\frac{\partial a^{(i)}}{\partial v_i}\right|_{v_i=v}\right)^2 - 4\left.\frac{\partial a^{(i)}}{\partial h_i}\right|_{h_i=s^*(v)} > 0, i = \overline{1,N}$.

Если рассматриваемое равновесное состояние является нулевым $(v_i = 0, h_i = s_0), i = 1, \dots, N$, то колебательный характер решения должен быть исключен. В противном случае будут иметь место отрицательные скорости, что более того может привести к столкновению.

**Следствие.** Для случая нулевого стационарного состояния условие отсутствия колебания для модели с весами (1) имеет вид

$$\frac{aT^2}{s_0} \geq 2. \tag{7}$$

Во втором разделе проведено исследование потоковой устойчивости модели с весами на кольце. Пусть замкнутый участок дороги длины $L$ содержит $N$ ( $N \geq 2$ ) автомобилей, движущихся друг за другом. Для $i$-го транспортного средства лидером является ($i$+*1*)-й автомобиль, $i = 1,2, \dots, N-1$, лидер для $N$-го – 1-й автомобиль. Динамика транспортного потока на кольце описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\ddot{x}_i(t) = w\big(\Delta x_i(t), \dot{x}_i(t)\big) \cdot a\left(1 - \left(\frac{\dot{x}_i(t)}{V^0}\right)^\delta\right) + \\ + \Big(1 - w\big(\Delta x_i(t), \dot{x}_i(t)\big)\Big) \cdot a\left(1 - \left(\frac{s^*\big(\dot{x}_i(t)\big)}{\Delta x_i(t)}\right)^2\right), i = 1, \dots, N, \\ \Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \qquad i = 1, \dots, N-1, \\ \Delta x_N(t) = x_1(t) - x_N(t) + L,\end{gathered} \tag{8}$$

где $x_i(t)$ – локальная координата $i$–го автомобиля на кольце.

Равновесное состояние системы из $N$ транспортных средств на кольце определяется следующим образом

$$\begin{gathered}x_{i+1}^H(t) - x_i^H(t) = x_1^H(t) - x_N^H(t) + L = {}^1\!/_\rho, \\ x_i^H(t) = x_i^H(0) + v_\rho t,\end{gathered} \tag{9}$$

где $\rho = N/L$ и $1/\rho = s^*\big(v_\rho\big)$, а верхний индекс $H$ символизирует равновесное состояние.

**Утверждение 4.** Пусть имеется $N$ автомобилей, движущихся друг за другом на кольце. Пусть скорости и локальные координаты автомобилей определяются системой уравнений (8). Система (8), линеаризованная в окрестности равновесного состояния (9) ($v = v_\rho$), обладает свойством потоковой устойчивости в окрестности решения $x_i = v, \Delta x_i = {}^1\!/_\rho, i = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда для параметров модели выполнено условие

$$\frac{a(T+2cv)}{s_0+Tv+cv^2} > 1. \tag{10}$$

В третьем разделе проведено исследование локальной устойчивости модели с запаздывающим аргументом (4). Сформулировано и доказано следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Рассмотрим колонну из $N$ автомобилей, движущихся друг за другом. Пусть ускорение каждого транспортного средства описывается дифференциальным уравнением с запаздывающим по времени аргументом (4). Соответствующая система, линеаризованная в окрестности равновесного состояния (6), является локально устойчивой в окрестности решения (6) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\tau < \tau_{cr}, \tau_{cr} = \min_n\{\tau_{1,2}(n): \tau_{1,2}(n) > 0\}, \tag{11}$$

где $\tau_{1,2}(n) = \frac{\pm arccos\left(-B^2/2C+\sqrt{B^4/4C^2+1}\right)+2\pi n}{\beta}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \beta^2 = \frac{-B^2+\sqrt{B^4+4C^2}}{2}, B = -\frac{2a(T+2cv)}{s_0+Tv+cv^2},$ $C = \frac{2a}{s_0+Tv+cv^2}$.

Четвертый раздел посвящен исследованию потоковой устойчивости модели с запаздывающим аргументом на кольце. Динамика транспортного потока в данном случае описывается системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{gathered}\ddot{x}_i(t) = w\big(\Delta x_i(t), \dot{x}_i(t)\big) \cdot a\left(1 - \left(\frac{\dot{x}_i(t)}{V^0}\right)^\delta\right) + \\ + \Big(1 - w\big(\Delta x_i(t), \dot{x}_i(t)\big)\Big) \cdot a\left(1 - \left(\frac{s^*\big(\dot{x}_i(t)\big)}{\Delta x_i(t-\tau)}\right)^2\right), i = 1, \ldots, N, \\ \Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \qquad i = 1, \ldots, N-1, \\ \Delta x_N(t) = x_1(t) - x_N(t) + L,\end{gathered} \tag{12}$$

где $\tau$ – время реакции водителя.

**Утверждение 6.** Пусть динамика транспортного потока на кольце описывается системой дифференциальных уравнений (12) с запаздывающим по времени аргументом. Система (12), линеаризованная в окрестности равновесного состояния (9) ($v = v_\rho$), обладает свойством потоковой устойчивости в окрестности решения $x_i = v, \Delta x_i = {}^1/_\rho, i = 1, \ldots, N$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (10) и условие

$$\tau < \tau_{cr}, \tau_{cr} = \min_n\{\tau_{1,2}(n): \tau_{1,2}(n) > 0\}, \tag{13}$$

где $\tau_{1,2}(n) = \frac{\frac{\theta}{2} \pm arccos\left(-\frac{\beta C}{2Bsin\left({}^\theta/_2\right)}\right)+2\pi n}{\beta}, n = 0, \pm 1, \ldots, \beta = \pm\sqrt{\frac{-C^2+\sqrt{C^4+16B^2sin^2\left({}^\theta/_2\right)}}{2}}, B = -\frac{2a(t+2cv)}{s_0+Tv+cv^2},$ $C = \frac{2a}{s_0+Tv+cv^2}$.

**Четвертая глава** посвящена методикам калибровки моделей следования за лидером. В первом разделе описан метод настройки параметров новых моделей на основе данных о технических характеристиках транспортного средства. Этот метод позволяет определять области значений параметров, гарантирующих невыход динамики автомобиля за границы реалистичности. Метод основан на решении задачи параметрической идентификации и доработан путем учета полученных в результате исследования условий устойчивости новых моделей.

Динамика автомобиля согласно модели с весами описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{s} = P(s,v) \\ \dot{v} = Q(s,v) \end{cases}, \tag{14}$$

где $s$ и $v$ – координата и скорость соответственно, $P(s,v) = v$, $Q(s,v) = w \cdot a\left(1 - \left(\frac{v}{V^0}\right)^\delta\right) + (1-w) \cdot a\left(1 - \left(\frac{s^*(v)}{s_L - s}\right)^2\right)$, $s_L$ – координата лидера. Пусть имеются эмпирические данные $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^N$ и $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^N$ для координаты и скорости соответственно. Тогда начальные условия для координаты $s(t_1) = \tilde{s}_1$ и для скорости $v(t_1) = \tilde{v}_1$ . Вектор настраиваемых параметров – $\theta = (a, V^0, \delta, \mathrm{c}, T, s_0)^T$, вектор переменных состояния содержит скорости и координаты.

Предполагается, что экспериментальные данные заданы на равномерной сетке с шагом $\Delta t$. В противном случае можно воспользоваться методами интерполяции. В качестве схемы интегрирования используется явный метод Эйлера

$$\begin{cases} s_{i+1} - s_i = \Delta t \cdot P(s_i, v_i) \\ v_{i+1} - v_i = \Delta t \cdot Q(s_i, v_i) \\ i = 1,2, \dots, N-1, \end{cases}, \tag{15}$$

где $s_i, v_i$ – аппроксимация координаты и скорости в точке $t_i$.

Задача подбора параметров модели с весами выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \min_{\theta,\bar{s},\bar{v}} \{w_1 \|\tilde{s} - \bar{s}\|^2 + w_2 \|\tilde{v} - \bar{v}\|^2\} \\ c_i(s_i, s_{i+1}, \theta) = 0, i = 1, \dots, N-1 \\ d_i(v_i, v_{i+1}, \theta) = 0, i = 1, \dots, N-1 \\ s_1 - \tilde{s}_1 = 0, v_1 - \tilde{v}_1 = 0 \\ \theta \in [\theta_l, \theta_u] \\ \frac{aT^2}{s_0} \geq 2 \end{cases}, \tag{16}$$

где $w_1, w_2$ – весовые коэффициенты, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\theta_l, \theta_u$ – верхняя и нижняя граница интервала для значений параметров $\theta$ и

$$\begin{gathered} \bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^N, \bar{v} = \{v_i\}_{i=1}^N, \\ c_i(s_i, s_{i+1}, \theta) = s_{i+1} - s_i - \Delta t \cdot P(s_i, v_i), \\ d_i(d_i, d_{i+1}, \theta) = v_{i+1} - v_i - \Delta t \cdot Q(s_i, v_i). \end{gathered} \tag{17}$$

Настройка производится в два этапа. Сначала рассматривается разгон на свободной дороге, настраиваются параметры модели $a$ и $\delta$. Затем по кривой экстренного торможения настраиваются оставшиеся параметры модели $T$ и $c$ – внезапно на некотором расстоянии перед автомобилем появляется препятствие, автомобиль начинает тормозить с постоянным максимально возможным ускорением. Величина ускорения зависит от дорожного покрытия (нормальные условия, мокрый асфальт или обледенелая дорога).

В случае модели с запаздыванием ограничения в виде равенств, порожденные схемой численного интегрирования, имеют вид

$$\begin{cases} s_{i+1} - s_i = \Delta t \cdot v_i \\ v_{i+1} - v_i = \Delta t \cdot \left[ w \cdot a \left( 1 - \left( \frac{v_i}{V^0} \right)^{\delta} \right) + (1-w) \cdot a \left( 1 - \left( \frac{s^*(v_i)}{s_L - (s_i - \tau v_i)} \right)^2 \right) \right] \\ i = 1,2, \dots, N-1 \end{cases}. \quad (18)$$

Задача подбора параметров модели решена для нескольких марок автомобилей и для нескольких типов дорожного покрытия.

Во втором разделе описана методика калибровки моделей типа следования за лидером на основе реальных данных NGSIM I80, которые представляют собой информацию о 3366 траекториях транспортных средств. Она применена к новым моделям и модели «разумного водителя». Рассмотрены четыре целевых функции, определяющие меру отклонения между реальной траекторией и траекторией, вычисленной согласно модели:

- Абсолютная

$$S_s^{abs} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( s_i^{sim} - s_i^{data} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left( s_i^{data} \right)^2}, \quad (19)$$

где $s_i^{data}$ и $s_i^{sim}$ – дистанция между $i$-м автомобилем и его лидером в момент времени $t_i$ из реальных данных и вычисленная согласно модели соответственно, $n$ – количество точек реальной траектории.

- Относительная

$$S_s^{rel} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{s_i^{sim} - s_i^{data}}{s_i^{data}} \right)^2. \quad (20)$$

Абсолютная мера являются чувствительной к большим дистанциям, в то время как относительная – к малым дистанциям, поэтому рассмотрена третья мера:

- Смешанная

$$S_s^{mix} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( s_i^{sim} - s_i^{data} \right)^2 / \left| s_i^{data} \right|}{\sum_{i=1}^{n} \left| s_i^{data} \right|}. \quad (21)$$

Для сравнения результатов, полученных на основе разных динамических переменных, использована абсолютная мера ошибки на основе скоростей

$$S_v^{abs} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( v_i^{sim} - v_i^{data} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left( v_i^{data} \right)^2}. \quad (22)$$

где $v_i^{data}$ и $v_i^{sim}$ – скорость $i$-го автомобиля в момент времени $t_i$ из реальных данных и вычисленная согласно модели.

Сравнение распределений значений параметров моделей, полученных с использованием различных целевых функций, было выполнено посредством вычисления соответствующих эмпирических функций распределений и их сравнения между собой. Результаты показывают, что полученные распределения значений параметров слабо зависят от целевой функции.

**Пятая глава** посвящена новому вычислительному методу с кратными шагами для задачи моделирования транспортных потоков. Моделирование в городских условиях подразумевает одновременное присутствие различных режимов динамики транспортного потока, таких как движение с постоянной скоростью, разгон и торможение вплоть до полной остановки, перестроение и пр. Для получения решения с требуемой точностью стандартные методы численного интегрирования используют шаг, соответствующий самой «быстрой» компоненте, что существенно увеличивает расчетное время. В пятой главе предложен и описан новый вычислительный метод с кратными шагами и алгоритм автоматизированного выбора шага интегрирования применительно к новой микроскопической модели с весами. Система дифференциальных уравнений, описывающих динамику транспортного потока из $N$ автомобилей, движущихся друг за другом, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a^{(1)}(v_1, h_1) \\ \dot{h}_1 = v_L - v_1 \\ \langle \dots \rangle \\ \dot{v}_N = a^{(N)}(v_N, h_N) \\ \dot{h}_N = v_{N-1} - v_N \end{cases}, \qquad (23)$$

с начальными условиями $v_I(0) = v_{I0}, h_I(0) = h_{I0}, I = 1, \dots, N$ . Для краткости перепишем систему (23) и начальные условия в следующем виде

$$\dot{x}(t) = F\big(x(t)\big),\ x(0) = x^{(0)}, \qquad (24)$$

где $x = (v_1, h_1, \dots, v_N, h_N)^T$, $F_{2I-1} = a^{(I)}(v_I, h_I)$, $F_{2I} = v_{I-1} - v_I$.

В первом разделе приведен вывод оценки ошибки численного интегрирования, на основе которой получено правило выбора шага для каждой из компонент вектора решения. В рамках одного макрошага, который связывает решения на соседних макроуровнях $t_{m-1}$ и $t_m = t_{m-1} + \Delta T$, для каждой компоненты вектора решения $x_i, i = 1, \dots, 2N$ выполняется $k_i$ последовательных микрошагов $\Delta t_i = \Delta T / k_i$ согласно базовой численной схеме, в качестве которой в данной работе используется явный метод Эйлера. Показатели кратности $\{k_i\}_{i=1}^{2N}$ определяются на основе неравенства

$$I_m = \left\| x^{(m)} - \tilde{x}(t_m) \right\|_\infty < \varepsilon, \qquad (25)$$

где $x^{(m)}$ – численное решение в момент времени $t_m$, $\tilde{x}$ – точное решение следующей задачи

$$\dot{x}(t) = F\big(x(t)\big),\ \ x(t_{m-1}) = x^{(m-1)}. \tag{26}$$

Для перехода с временного слоя $t_m$ на следующий $t_m + \Delta T$, для $i$-й компоненты нужно выполнить $k_i$ последовательных шагов согласно базовой численной схеме

$$\begin{cases} x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \Delta t_i \cdot F_i\Big(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_i^{(m)}, \dots, x_{2N}^{(m)}\Big) \\ x_i^{(m+2)} = x_i^{(m+1)} + \Delta t_i \cdot F_i\Big(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_i^{(m+1)}, \dots, x_{2N}^{(m)}\Big) \\ \dots \\ x_i^{(m+k_i)} = x_i^{(m+k_i-1)} + \Delta t_i \cdot F_i\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_i^{(m+k_i-1)}, \dots, x_{2N}^{(m)}\right) \end{cases}. \tag{27}$$

Оценка ошибки численного интегрирования для $i$-ой компоненты вектора решения имеет вид

$$est_{i,k_i} = \frac{\Delta T^2}{2}\left|\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\big(x^{(m)}\big)F_j\big(x^{(m)}\big) + \frac{1}{k_i}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\big(x^{(m)}\big)F_i\big(x^{(m)}\big)\right)\right|. \tag{28}$$

Для дистанций оценка локальной ошибки получена с точностью на один порядок выше, чем в общем случае (формула (28)). Это сделано из тех соображений, что, во-первых, водители в первую очередь оценивают дистанцию (а не скорость), во-вторых, координата получается путем интегрирования скорости по времени. Для дистанции $I$-го автомобиля оценка локальной ошибки схемы численного интегрирования с кратными шагами имеет вид

$$est_{2I,k_{2I}} = \left|\frac{\Delta T^2}{2}\big(a^{(I-1)} - a^{(I)}\big) + \frac{\Delta T^3}{6}\big(jerk^{(I-1)} - jerk^{(I)}\big)\right|, \tag{29}$$

где $jerk^{(I)} = a_v^{(I)}a^{(I)} + a_h^{(I)}(v_{I-1} - v_I)$ – «рывок», $a_v^{(I)}$ и $a_h^{(I)}$ – частные производные функции ускорения $a^{(I)}$ по скорости и дистанции соответственно.

Оценка локальной ошибки для скорости $I$-го автомобиля имеет вид

$$est_{2I-1,k_{2I-1}} = \frac{\Delta T^2}{2}\left|\frac{1}{k_{2I-1}}a_v^{(I)}a^{(I)} + a_h^{(I)}(v_{I-1} - v_I)\right|, \tag{30}$$

Пусть для дистанции и для скорости заданы относительные точности $\varepsilon_h$ и $\varepsilon_v$ соответственно. Тогда величина макрошага $\Delta T$ и показатели кратности $k_{2I-1}$, $I = 1, \dots, N$ являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\Delta T^2}{2}\big(a^{(I-1)} - a^{(I)}\big) + \dfrac{\Delta T^3}{6}\big(jerk^{(I-1)} - jerk^{(I)}\big)\right| < h_I\varepsilon_h \\ \dfrac{\Delta T^2}{2}\left|\dfrac{1}{k_{2I-1}}a_v^{(I)}a^{(I)} + a_h^{(I)}(v_{I-1} - v_I)\right| < v_I\varepsilon_v, \\ I = 1, \dots, N \end{cases}, \tag{31}$$

где $a^{(0)}$ – ускорение лидера для первого автомобиля в колонне. Если $\Delta T$ оказывается больше 0.5 с, то полагаем $\Delta T = 0.5$ с, как среднему значению времени реакции водителя. Величина микрошага $\Delta t_{2I}$ полагается равной $\Delta T$, поскольку в (29) показатель кратности не входит.

Во втором разделе проведено исследование устойчивости предложенной схемы в применении к задаче моделирования транспортных потоков. Рассмотрим один макрошаг в соответствии с (27) для всей системы (24)

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = x_1^{(m)} + \Delta t_1 \cdot F_1\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots x_{2N}^{(m)}\right) \\ \dots \\ x_1^{(m+k_1)} = x_1^{(m+k_1-1)} + \Delta t_1 \cdot F_1\left(x_1^{(m+k_1-1)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{2N}^{(m)}\right) \\ x_2^{(m+1)} = x_2^{(m)} + \Delta t_2 \cdot F_2\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots x_{2N}^{(m)}\right) \\ \dots \\ x_2^{(m+k_2)} = x_2^{(m+k_2-1)} + \Delta t_2 \cdot F_2\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m+k_2-1)}, \dots, x_{2N}^{(m)}\right) \\ \dots \end{cases} . \quad (32)$$

Линеаризуем (23) в окрестности точки $x^{(m)}$

$$x^{(m+k)} = R(J, \Delta T, k_1, \dots, k_{2N})x^{(m)}, \quad (33)$$

где $R(J, \Delta T, k_1, \dots, k_{2N})$ – матрица перехода.

**Утверждение 7.** Схема (32) устойчива тогда и только тогда, когда выполнены $2N$ условий

$$\left| 1 + {r_{2I-1}}^{k_{2I-1}} \pm \sqrt{(1 + {r_{2I-1}}^{k_{2I-1}})^2 - 4 \frac{r_{2I-1}^{k_{2I-1}-1}}{r_{2I-1}-1} a_h^{(I)} \frac{\Delta T^2}{k_{2I-1}}} \right| < 2, I = 1, \dots, N, \quad (34)$$

где $r_{2I-1} = \left(1 + a_v^{(I)} \frac{\Delta T}{k_{2I-1}}\right)$.

В третьем разделе представлены результаты тестирования численной схемы с кратными шагами, которые иллюстрируют корректность правила выбора шагов (31). Было проведено сравнение солвера с кратными шагами с соответствующим одношаговым методом, алгоритм которого подразумевает выполнение следующих шагов для одного макрошага: вычисление шагов $\{\Delta t_i\}_{i=1}^{2N}$ на основе классической априорной оценки и точностей $\varepsilon_v$ и $\varepsilon_h$ для скорости и дистанции соответственно, определение общего шага для всей системы $\Delta t = \min_i \{\Delta t_i\}_{i=1}^{2N}$, выполнение одного шага для системы (23) согласно явному методу Эйлера.

Для разных значений относительной точности для скоростей и дистанций (на двумерной сетке от 2% до 20% с шагом 4%) был поставлен численный эксперимент на компьютере с процессором 2,4 GHz Intel Core 2 Duo. Ускорение солвера с кратными шагами по сравнению с его одношаговым аналогом лежит в интервале от 19% до 66%, максимальное значение достигается при точности 20% для скорости и дистанции. При точностях 10% для скорости и дистанции величина ускорения составляет 60%. Для большинства приложений моделирования автомобильного трафика значения точности до 20% являются допустимыми.

## Заключение

В итоге выполнения диссертационного исследования получены следующие результаты:

1. Предложены новые микроскопические модели транспортных потоков, устраняющие ряд недостатков существующих и широко используемых моделей данного класса. Это подтверждают сформулированные и доказанные утверждения, а также проведенные численные эксперименты. Данные модели позволят повысить степень реалистичности моделирования

транспортных потоков и тем самым получить результаты, в большей степени согласующиеся с поведением реальных потоков. Новые модели могут быть использованы разработчиками транспортных тренажеров, в которых степень реалистичности моделирования окружающего трафика оказывает большое влияние на качество обучения. Модель с весами реализована в тренажере автомобиля КАМАЗ и в программно-аппаратном комплексе, разработанном в рамках ОКР «ИУС–ТИМ».

2. Проведено исследование устойчивости новых моделей и получены условия на значения параметров моделей, которые определяют области устойчивого и неустойчивого поведения решения соответствующих систем дифференциальных уравнений. Корректность полученных условий подтверждают сформулированные и доказанные утверждения, а также проведенные численные эксперименты. Данные результаты должны учитываться при использовании соответствующих моделей и при реализации алгоритмов калибровки.

3. Разработана методика калибровки параметрических моделей микроуровня, учитывающая технические характеристики транспортного средства, текущую дорожную обстановку, а также полученные условия устойчивости. Для ряда моделей автомобилей проведена настройка и определены значения параметров новых математических моделей. Данный результат должен быть использован при моделировании автомобильного трафика, где присутствуют различные транспортные средства. Полученный результат дополняет существующие на данный момент методики калибровки параметрических моделей транспортных потоков.

4. Для новых моделей реализована методика калибровки на основе реальных данных о траекториях транспортных средств. Результаты подтверждают, что для этих данных новые модели дают в среднем такой же результат в смысле среднеквадратического отклонения реальной траектории от вычисленной согласно модели, что и существующие и хорошо зарекомендовавшие себя модели. Данный результат является одним из критериев реалистичности предложенных микроскопических моделей.

5. Разработан быстрый вычислительный метод для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, получающихся при использовании новых моделей. Устойчивость гарантируется при выполнении полученных условий устойчивости, а быстрота достигается за счет использования кратных шагов интегрирования. Достоверность полученных результатов подтверждается сформулированными и доказанными утверждениями, а также проведенными численными экспериментами. Согласно проведенным исследованиям классические схемы численного интегрирования при некоторых объективных значениях точности, предъявляемых к решению, и начиная с некоторых значений количества одновременно моделируемых агентов автомобильного трафика, не способны выдавать решение

в режиме реального времени на вычислительных устройствах современных автомобильных тренажёров. В таких случаях может быть использован вычислительный алгоритм, разработанный в рамках данного диссертационного исследования. Новый вычислительный алгоритм с кратными шагами реализован в программно-аппаратном комплексе, разработанном в рамках ОКР «ИУС–ТИМ».

6. Создан комплекс программ для моделирования автомобильного трафика на C/C++ и MATLAB. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Все поставленные задачи выполнены, за счет чего цель диссертационного исследования достигнута.

**Список работ, опубликованных автором по теме диссертации**

1. Курц, В.В. Новые микроскопические модели автомобильного трафика / В.В. Курц, И.Е. Ануфриев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского политехнического университета. Физико–математические науки. – 2012. – № 4 (158). – С. 50–57.

2. Kurtc, V. A Multirate Numerical Scheme for Large-Scale Vehicle Traffic Simulation / V. Kurtc, I. Anufriev // Humanities and Science University Journal. – 2014. – № 10. – P. 50–59.

3. Курц, В.В. Быстрый алгоритм с кратными шагами для задачи моделирования транспортных потоков / В.В. Курц, И.Е. Ануфриев // Математическое моделирование. – 2016. – № 5 (28). – С. 124–134.

4. Kurtc, V. Local stability conditions and calibrating procedure for new car-following models used in driving simulators / V. Kurtc, I. Anufriev // Traffic and Granular Flow’13 / Ed. by Mohcine Chraibi et al. – Springer Berlin Heidelberg, 2015. – P. 453–461.

5. Kurtc, V. Fast Multirate Numerical Integration Scheme for Large-scale Traffic Simulation / V. Kurtc, I. Anufriev // Proceedings of the international conference of the numerical analysis and applied mathematics 2014. – AIP Conference Proceedings, 2015. – 1648. – 530003.

6. Kurtc, V. Multirate numerical scheme for large-scale vehicle traffic simulation / V. Kurtc, I. Anufriev // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2016. – Vol. 8, No. 6. – P. 744–751.

7. Курц, В. Настройка микроскопических моделей автомобильного трафика с использованием NGSIM данных / В. Курц, М. Трайбер // Сборник докладов Недели науки СПбПУ. Пленарные заседания. ИПММ – 2014. – С. 86–91.

8. Kurtc, V. Calibrating the Local and Platoon Dynamics of Car-following Models on the Reconstructed NGSIM Data / V. Kurtc, M. Treiber // Traffic and Granular Flow’15 / Ed. by Victor L. Knoop and Winnie Daamen. – Springer Berlin Heidelberg, 2016. – P. 515–522.