

На правах рукописи



Мокаев Руслан Назирович

**АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ
ПОВЕДЕНИЕМ: АТТРАКТОРЫ И
ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор,
Кузнецов Николай Владимирович

Официальные оппоненты: **Буркин Игорь Михайлович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры вычислительной механики и
математики ФГБОУ ВО «Тульский государственный
университет»

Шумафов Магомед Мишаустович,
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математического анализа и
методики преподавания математики ФГБОУ ВО
«Адыгейский государственный университет»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт проблем машиноведения Российской
академии наук

Защита состоится 19 декабря 2018 года в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая д. 29, корп. 1, ауд. 41.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29 и на сайте <http://www.spbstu.ru/>.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13
доктор технических наук,
профессор



Б. С. Григорьев

Общая характеристика работы

Актуальность темы Начиная с 40-х годов прошлого века стали разрабатываться критерии отсутствия колебаний в системах автоматического регулирования. В 1944 году была опубликована знаменитая работа А.И. Лурье и В.Н. Постникова¹, в которой был предложен эффективный подход для получения достаточных условий отсутствия колебаний и глобальной устойчивости для математической модели системы регулирования с одной скалярной нелинейностью (такую систему в литературе часто называют системой Лурье). Далее для системы Лурье с единственным состоянием равновесия и нелинейностью из заданного линейного сектора возник вопрос совпадения условия глобальной устойчивости нелинейной системы с условием устойчивости линейного приближения. В рамках исследования этого вопроса Рудольфом Калманом в 1957 году была сформулирована известная гипотеза² о моноустойчивости такой системы управления. В общем случае эта гипотеза оказалась неверна. В работах Р.Э. Фиттса, Н.Е. Барабанова, Х. Берната, Ж. Либре, Н.В. Кузнецова и Г.А. Леонова исследовались контрпримеры к гипотезе Калмана, в которых устойчивые периодические решения сосуществовали с единственным состоянием равновесия. Трудность численного поиска таких скрытых колебаний связана с тем, что их область притяжения может быть мала и не связана с состоянием равновесия. В настоящей работе, на основе развития теории разрывных систем и применения метода точечных отображений Андронова, построен контрпример к гипотезе Калмана с хаотической динамикой.

Одним из актуальных направлений исследования является разработка эффективных аналитико-численных методов, использующих вычислительные мощности современных ЭВМ и продуктивные аналитические подходы. Значительными результатами, полученными на основе таких подходов, являются компьютерное доказательство (*computer-assisted proof*) существования хаотического аттрактора в классической системе Лоренца³, и обнаружение *скрытых аттракторов* в системах лоренцевского типа⁴. Одним из центральных направлений современных исследований сценариев перехода к хаотической динамике в многомерных системах является исследование гомоклини-

¹ А.И. Лурье, В.Н. Постников. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, 1944. № 8(3). С. 246-248.

² R.E. Kalman. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. Trans. Am. Soc. Mech Eng., 1957. № 79(3). P. 553-566.

³ W. Tucker. The Lorenz attractor exists. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 1999. № 328(12). P. 1197-1202.

⁴ D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A. Prasad. Hidden attractors in dynamical systems. Phys. Rep., 2016. № 637. P. 1-50.

ческих бифуркаций в работах нижегородской школы Л.П. Шильникова⁵. За последнее время в этом направлении представителями этой школы получен ряд новых результатов для систем лоренцевского типа. В настоящей работе изучается обобщенная система Лоренца, которая включает в себя математические модели, описывающие процесс конвекции жидкости⁶, динамику волн в лазерах⁷ и другие физические процессы⁸. Для этой системы проведены аналитико-численные исследования, связанные с развитием аналитических критериев рождения гомоклинической бифуркации и с численной проверкой возможности возникновения хаоса.

Цели работы

1. Разработка эффективного алгоритма для аналитико-численного построения контрпримеров к проблеме Калмана с хаотической динамикой. Анализ физических экспериментов Фиттса.
2. Построение аналитических критериев неустойчивости в системах лоренцевского типа со сжатием объемов. Разработка эффективного алгоритма для численного определения границ областей неустойчивости.
3. Получение аналитических критериев существования гомоклинических траекторий в системах лоренцевского типа и разработка эффективных численных алгоритмов для анализа гомоклинической бифуркации и соответствующих сценариев возникновения хаоса.
4. Реализация разработанных алгоритмов в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB.

Методы исследования

1. Для построения контрпримеров к проблеме Калмана применен метод точечных отображений и символьные вычисления для локализации периодических решений, а также подход, основанный на обратном сценарии разрывной аппроксимации, для перехода к системе с гладкой нелинейностью.
2. Аналитический метод построения области глобальной устойчивости и глобальной неустойчивости в системах лоренцевского типа.
3. Аналитический метод доказательства существования гомоклинических бифуркаций в системах лоренцевского типа.

⁵ V.S. Afraimovich, S.V. Gonchenko, L.M. Lerman, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev. Scientific heritage of L.P. Shilnikov. Regul. Chaotic Dyn., 2014. № 19(4). P. 435-460.

⁶ E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 1963. № 20(2), P. 130-141.

⁷ А.Н. Ораевский. Мазеры, лазеры и странные аттракторы. Квантовая электроника, 1981.№ 8(1). С.130-142.

⁸ S.H. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Perseus Books, 1994.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Алгоритм синтеза моделей со скрытыми колебаниями для класса моделей управления в форме Лурье. Алгоритм для построения контрпримеров к проблеме Калмана, основанный на обратном сценарии разрывной аппроксимации Айзермана-Пятницкого. Контрпример с гладкой нелинейностью к проблеме Калмана на основе системы Фиттса, демонстрирующий скрытый хаотический аттрактор.
2. Аналитический критерий неустойчивости для класса моделей лоренцевского типа со сжатием объемов. Алгоритм для численного определения границ областей неустойчивости.
3. Алгоритм синтеза моделей с гомоклинической траекторией для класса моделей лоренцевского типа. Аналитический критерий существования гомоклинических траекторий и алгоритм для численного исследования гомоклинических бифуркаций для класса моделей лоренцевского типа. Численное обнаружение гомоклинической бифуркации слияния странных аттракторов.

Научная новизна: пункты 1-3, перечисленные в положениях, выносимых на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость

В диссертации для обобщенной системы Лоренца в пространстве параметров аналитически построена граница областей глобальной устойчивости и неустойчивости решений для дальнейшего исследования турбулентности.

Разработан аналитико-численный метод, основанный на методе разрывной аппроксимации, для локализации и определения параметров скрытых колебаний в нелинейных системах, который применим для различных систем управления, используемых, например, в летательных аппаратах и буровых установках.

Достоверность изложенных в работе теоретических результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных научных конференциях: 2nd International Scientific Conference "Autumn Mathematical Readings in Adyghea" (Russia, Maykop - 2017), International Scientific Conference on Mechanics "The Eight Polyakhov's Reading" (Russia, Saint Petersburg - 2018).

Также результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и кафедры математических информационных технологий университета Ювяскюля (University of Jyväskylä), Финляндия.

По результатам работы над гипотезой Калмана было получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [7].

Работа поддержана грантом Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации на 2018-2019 годы (НШ-2858.2018.1).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях [1–6], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией [1–3].

В работах [1, 5] диссертанту принадлежит вывод критерия неустойчивости в системах лоренцевского типа и численное определение границ областей неустойчивости, соавторам — постановка задачи и экспериментов. В работах [2–4] диссертанту принадлежит реализация алгоритма для построения контрпримеров к проблеме Калмана, основанного на методе разрывной аппроксимации и построение гладкого контрпримера к проблеме Калмана; постановка задачи и остальные результаты принадлежат соавторам. В работах [5, 6] диссертанту принадлежат вывод аналитического критерия существования гомоклинических траекторий в системах лоренцевского типа, численные результаты, связанные с существованием гомоклинической бифуркации слияния странных аттракторов, и с отсутствием возникновения хаотической динамики, соавторам — постановка задачи.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и трех приложений. Полный объем диссертации составляет 150 страниц с 66 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 177 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приведён обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи работы, показана научная новизна и практическая значимость работы.

Первая глава посвящена исследованию решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и проблеме Калмана.

Рассмотрена система в форме Лурье

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^*x, \quad (1)$$

где A – постоянная $n \times n$ - матрица, b и c – постоянные n -мерные столбцы, все величины вещественные, $*$ - знак транспонирования, φ – кусочно-дифференцируемая, скалярная функция, $\varphi(0) = 0$, в точках дифференциру-

емости удовлетворяющая условию

$$k_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq k_2, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty), \quad (2)$$

где k_1 – некоторое число, либо $-\infty$, k_2 – некоторое число, либо $+\infty$.

В 1957 г. Р. Е. Калман сформулировал следующую гипотезу: *если глобально асимптотически устойчива линейная система $\dot{x} = Ax + kbc^*x$, $\forall k \in [k_1, k_2]$, то система (1) с единственным состоянием равновесия также глобально асимптотически устойчива.*

Известно, что эта гипотеза справедлива для случая $n = 2$ и $n = 3$. Известные контрпримеры к гипотезе Калмана, такие как контрпримеры Р.Э. Фиттса⁹, Н.Е. Барабанова¹⁰, Х. Берната и Ж. Либре¹¹, Н.В. Кузнецова и Г.А. Леонова¹² представляли собой периодические решения сосуществующие с локально устойчивым нулевым состоянием равновесия. В диссертации построен хаотический контрпример к гипотезе Калмана. Для этого применялся аппарат дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и метод точечных отображений с применением символьных компьютерных вычислений.

Для системы (1) с кусочно-гладкой функцией $\varphi(\sigma)$ в \mathbb{R} и разрывами первого рода, в диссертации использованы различные подходы к доопределению разрывных систем и определению их решений. В определении решения по Филиппову¹³ $\varphi(\sigma)$ заменяется на многозначную функцию $\phi(\sigma)$, которая в точках непрерывности совпадает с $\varphi(\sigma)$, а в точках разрыва представляет собой некоторое множество. В определении Айзермана-Пятницкого¹⁴ решение системы с разрывной нелинейностью $\varphi(\sigma)$ определяется как предел равномерно сходящейся последовательности решений систем с непрерывными, равномерно ограниченными нелинейностями, равномерно сходящимися к $\varphi(\sigma)$.

Рассмотрена система (1) при $n = 4$, заданная передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p^2}{((p+\beta)^2+0.9^2)((p+\beta)^2+1.1^2)} \quad (3)$$

с нелинейностью $\varphi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$. Восстановив систему по передаточной функции (3), получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + \text{sign}(-x_3), \end{aligned} \quad (4)$$

⁹ R.E. Fitts. Two counterexamples to Aizerman's conjecture Trans. IEEE., 1966. № AC-11(3). P. 553-556.

¹⁰ Н.Е. Барабанов. О проблеме Калмана. Сиб. мат. журн., 1988. № XXIX(3). С. 3-11.

¹¹ J. Bernat, J. Llibre. Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in larger than 3. DCDIS, 1996. № 2. P. 337-379.

¹² Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в проблемах Айзермана и Калмана. ДАН, 2011. № 439(2). С. 167-173.

¹³ А.Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960. № 51(93). С. 99-128.

¹⁴ М.А. Айзерман, Е.С. Пятницкий. Основы теории разрывных систем. I. Авт. и тел., 1974. № 7. С. 33-47.

где $a_0 = (1.1^2 + \beta^2)(0.9^2 + \beta^2)$, $a_1 = 2\beta(1.1^2 + 0.9^2 + 2\beta^2)$, $a_2 = 1.1^2 + 0.9^2 + 6\beta^2$, $a_3 = 4\beta$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Показано, что для любого $\beta > 0$ линейная система $\dot{x} = Ax + kbc^*x$, заданная матрицами (5), глобально асимптотически устойчива при $k \in \left(-\frac{4(\beta^4 + 1.01\beta^2 + 0.01)}{\beta^2 + 1.01}, +\infty\right)$.

Численно исследовано поведение траекторий с начальными данными из окрестности отрезка покоя. В результате локализовано периодическое решение, самовозбуждающиеся относительно отрезка покоя.

Далее, разрывная система (4) при $\beta = \beta^0 = 0.03$ рассматривается как совокупность линейных систем с переключением и на отрезках постоянства аналитически определялись решения соответствующих линейных систем. В рамках аналитико-численной процедуры, следуя методу точечных отображений Андронова¹⁵, полученные решения сшивались в момент переключения для поиска периодического решения. В результате были локализованы два симметричных друг другу периодических решения системы (4), скрытые относительно отрезка покоя. Найденные периодические решения представлены на рис. 1.

Для значения параметра $\beta = \beta^1 = 0.1$ локализованы непериодическое хаотическое решение системы (4), самовозбуждающееся относительно отрезка покоя. Также, используя аналитико-численную процедуру продолжения по параметру, локализовано периодическое решение, скрытое относительно отрезка покоя (рис. 2). При $\beta = \beta^0 + \varepsilon(\beta^1 - \beta^0)$, $\beta^1 = 0.1$, $\varepsilon \in [0, 1]$ для последовательности систем (4) с близкими правыми частями траектории численно интегрировались с помощью специальной библиотеки¹⁶ для построения решений по Филиппову. В качестве начальных данных для траектории следующей системы выбиралась конечная точка траектории предыдущей системы.

Три периодических решения при $\beta = 0.03$, а также хаотическое и периодическое при $\beta = 0.1$ сохраняются при замене в (4) нелинейности $\varphi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ на нелинейность типа "насыщение":

$$\varphi(\sigma) = \psi_N(\sigma) \equiv \begin{cases} -1, & \sigma \leq -N, \\ \frac{1}{N}\sigma, & -N \leq \sigma \leq N, \\ 1, & \sigma \geq N, \end{cases} \quad (6)$$

¹⁵ А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1959.

¹⁶ P.T. Piironen, Y.A. Kuznetsov. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 2008. № 34(3).

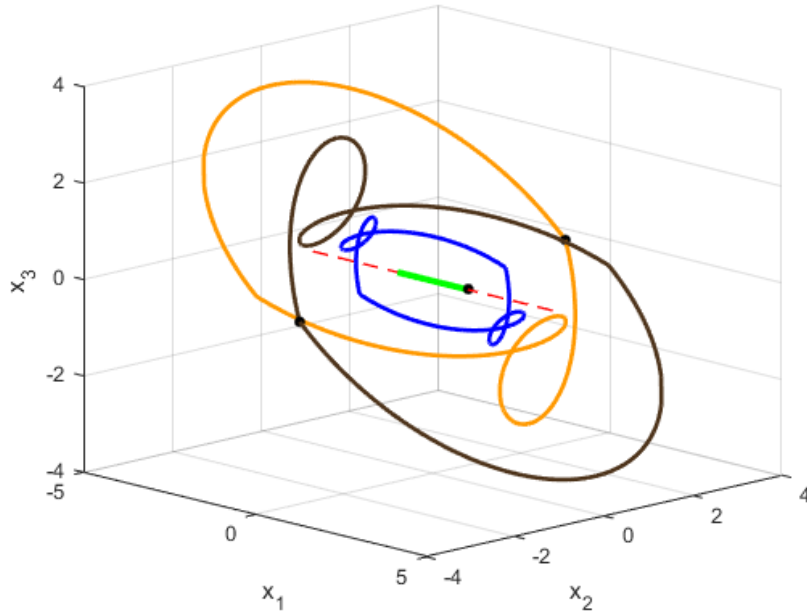


Рис. 1: Три сосуществующих периодических решения системы (4) при $\beta = 0.03$.

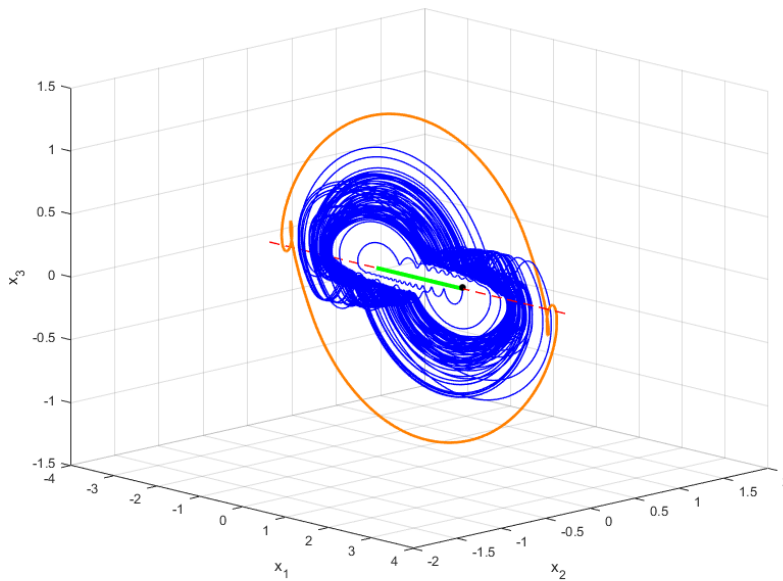


Рис. 2: Периодическое решение и хаотический аттрактор системы (4) при $\beta = 0.1$ в пространстве (x_1, x_2, x_3) .

где $N = 0.01$, и становятся скрытыми относительно устойчивого нулевого состояния равновесия. Такую замену можно осуществить опираясь на обратный сценарий разрывной аппроксимации Айзермана-Пятницкого, т.е. при переходе от решения системы с разрывной нелинейностью к близким решениям систем с аппроксимирующими непрерывными нелинейностями.

Далее, воспользовавшись методом продолжения по параметру и рассмотрев систему (4) с нелинейностью $\varphi(\sigma) = \chi_\varepsilon(\sigma) \equiv \psi_N(\sigma) + \varepsilon (\tanh(\sigma/N) - \psi_N(\sigma))$ и меняя параметр ε от 0 до 1, можно перейти от системы с кусочно-дифференцируемой нелинейностью $\varphi(\sigma) = \psi_N(\sigma)$ к системе с гладкой нелинейностью $\varphi(\sigma) = \tanh(\sigma/N)$ (рис. 3). Таким образом, в системе

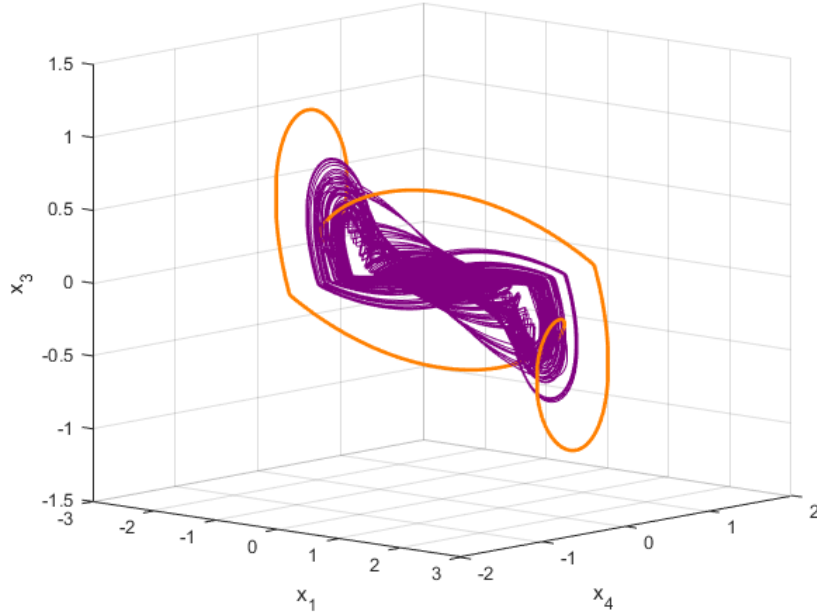


Рис. 3: Скрытые периодическое и хаотическое решения системы (4) с нелинейностью $\tanh(\sigma)$ при $\beta = 0.1$ в пространстве (x_1, x_3, x_4)

(4) с $\varphi(\sigma) = \tanh(\sigma/N)$ при достаточно малых N локализованы скрытые аттракторы и для $k_1 = -\frac{4(\beta^4+1.01\beta^2+0.01)}{\beta^2+1.01}$ и $k_2 = +\infty$ гипотеза Калмана неверна.

Отмечено, что исследуемая система (4) принимает вид модели Келдыша¹⁷ подавления флаттера (нежелательных колебаний органов управления летательного аппарата), что показывает трудность строгого получения критериев глобальной устойчивости его модели¹⁸.

Вторая глава посвящена изучению систем лоренцевского типа. Такие системы представляют собой математические модели, например, следующих физических процессов и объектов: конвекция в двумерном слое жидкости, подогреваемом снизу; модель одномодового лазера; диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением.

¹⁷ М.В. Келдыш. О демпферах с нелинейной характеристикой. Тр. ЦАГИ.,1944. № 557. С. 26–37.

¹⁸ Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов. О подавлении флаттера в модели Келдыша. ДАН, 2018. № 63(9). С. 366-370.

В первом разделе главы рассмотрена система лоренцевского типа

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - dy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{7}$$

где σ, b – положительные числа, d – некоторое число и $r > d$. В частных случаях для системы Лоренца $d = 1$, для системы Чена¹⁹ $r = -\sigma - d$, для системы Лу²⁰ $r = 0$ и для систем Тигана²¹ и Янга²² $d = 0$. Известно, что для системы Лоренца оператор сдвига по траекториям сжимает объемы (так как $\sigma + b + 1 > 0$). Система диссипативна по Левинсону: существует число $R = R(\sigma, b, r)$ такое, что для любого решения системы (7) выполнено неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) \leq R.\tag{8}$$

В диссертации доказана следующая теорема, аналитически описывающая в пространстве параметров асимптотическое поведение решений системы (7).

Теорема 1. *Если $2\sigma > b$, $\sigma + d < 0$, то почти все решения системы (7) стремятся к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Если $2\sigma < b$, $\sigma + d > 0$, то любое решение системы (7) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.*

Для области параметров $2\sigma > b$, $\sigma + d > 0$, не подпадающей под условия теоремы, проведено следующее численное исследование. Рассмотрены параметры системы (7), для которых $\varepsilon = \sigma + d > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $r = -\varepsilon$. Для этих параметров исследовано поведение траекторий в фазовом пространстве системы (7) при фиксированном ε и изменяемом b . В плоскости параметров (ε, b) численно построена граница, справа от которой для рассмотренных в эксперименте начальных точек траектории системы стремятся к некоторым аттракторам (стационарным точкам, предельным циклам, хаотическим аттракторам). Слева от границы для рассмотренных в эксперименте начальных точек все траектории уходят на бесконечность. При фиксированном значении параметров $\sigma = 36$ и $r = -\sigma - d = -\varepsilon$ граница имеет вид представленный на рис. 4.

¹⁹ G. Chen, T. Ueta. Yet another chaotic attractor. Int. J. Bif. Chaos, 1999. № 9. P. 1465–1466.

²⁰ J. Lu, G. Chen. A new chaotic attractor coined. Int. J. Bif. Chaos, 2002. № 12. P. 1789–1812.

²¹ G. Tigan. On a three-dimensional differential system. Matematicki Bilten, 2006, № 30. P. 9-16.

²² Q. Yang, G. Chen. A chaotic system with one saddle and two stable node-foci. Int. J. Bif. Chaos, 2008. № 18. P. 1393–1414.

В малой окрестности границы $2\sigma = b$, $\sigma + d = 0$ выявлены трудности численного моделирования системы (7), связанные с продолжительными по времени переходными процессами, не позволяющими на сравнительно небольшом интервале времени качественно описать поведение системы. Такие эффекты могут приводить к неверной интерпретации результатов моделирования.

Второй раздел второй главы посвящен исследованию гомоклинических бифуркаций в системах лоренцевского типа.

Определение 1. Траектория $x(t)$ автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, q), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}^m. \quad (9)$$

называется *гомоклинической*, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0.$$

В диссертации для доказательства существования гомоклинических траекторий в системе (9) используется аналитический метод – *принцип рыбка*, предложенный Г. А. Леоновым. Пусть $\gamma(s)$, $s \in [0, 1]$ это гладкий путь в пространстве параметров $\{q\} = \mathbb{R}^m$. Рассмотрим систему (9) с $q = \gamma(s)$, и введем следующие обозначения. Пусть $x(t, s)^+$ – сепаратриса, выходящая

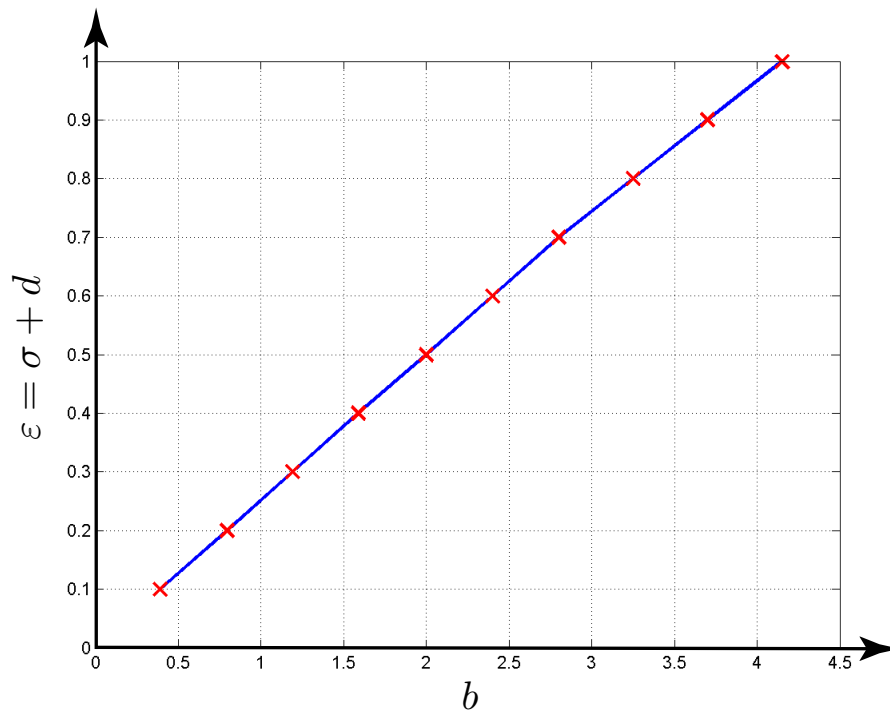


Рис. 4: Граница, разделяющая области с различным поведением траекторий системы (7), аппроксимируется уравнением $\epsilon = \sigma + d = \frac{1}{K}b$, $K \approx 4$.

из седла x_0 (т.е. $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t,s)^+ = x_0$) с одномерным неустойчивым многообразием, $x_\Omega(s)^+$ – точка первого пересечения сепаратрисы $x(t,s)^+$ с замкнутым множеством Ω :

$$\begin{aligned} x(t,s)^+ &\notin \Omega, \quad t \in (-\infty, T), \\ x(T,s)^+ &= x_\Omega(s)^+ \in \Omega. \end{aligned}$$

Если такого пересечения нет, мы предполагаем, что $x_\Omega(s)^+ = \emptyset$.

Теорема 2 (Принцип рыбака²³). *Предположим, что для пути $\gamma(s)$ существует ограниченное многообразие Ω размерности $(n-1)$ с кусочно-гладким краем $\partial\Omega$ и обладающее следующими свойствами:*

- 1) для любого $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$ и $s \in [0,1]$, вектор $f(x, \gamma(s))$ трансверсален к многообразию $\Omega \setminus \partial\Omega$;
- 2) для любого $s \in [0,1]$, $f(x_0, \gamma(s)) = 0$, и точка $x_0 \in \partial\Omega$ – седловая точка системы (9);
- 3) для $s = 0$ имеет место включение $x_\Omega(0)^+ \in \Omega \setminus \partial\Omega$;
- 4) для $s = 1$ выполнено соотношение $x_\Omega(1)^+ = \emptyset$;
- 5) для любого $s \in [0,1]$ и $y \in \partial\Omega \setminus x_0$ существует окрестность $U(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \delta\}$, такая что $x_\Omega(s)^+ \notin U(y, \delta)$.

Если условия 1)–5) выполнены, то существует число $s_0 \in [0,1]$, такое что $x(t, s_0)^+$ – гомоклиническая траектория седла x_0 .

С помощью замены координат можно привести систему (7) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\lambda\vartheta - x\vartheta + x - x^3, \\ \dot{i} &= -\alpha i - \beta x\vartheta, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\lambda = \frac{(\sigma+d)}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \beta = \frac{2\sigma-b}{\sigma}.$$

Состояния равновесия системы (10) имеют следующий вид

$$S_0 = (0, 0, 0), \quad S_\pm = (\pm 1, 0, 0). \tag{11}$$

В диссертации для системы (10) сформулирован и доказан следующий результат, опирающийся на теорему 2.

Теорема 3. *Рассмотрим гладкий путь $\lambda(s)$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $s \in [0, 1)$ в пространстве параметров системы (10). Пусть*

$$\lambda(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 1} \lambda(s) = +\infty,$$

²³ Г.А. Леонов. Задача Трикоми о существовании гомоклинических траекторий в диссипативных системах. ПММ, 2013. № 77(3). С. 410-421.

$$\limsup_{s \rightarrow 1} \alpha(s) < +\infty, \quad \limsup_{s \rightarrow 1} \beta(s) < +\infty$$

и выполнены следующие условия

$$\alpha(s) (\sqrt{\lambda(s)^2 + 4} + \lambda(s)) > 2(\beta(s) + 2), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Тогда существует $s_0 \in (0, 1)$, такое что система (10) с $\alpha(s_0), \beta(s_0), \lambda(s_0)$ обладает гомоклинической траекторией.

Особый интерес представляет следующий путь:

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \frac{s}{\sqrt{1-s}}, & \alpha(s) &= \delta \sqrt{1-s}, & \beta(s) &\equiv \beta \in (0, 2 + \delta), \\ s &\in [0, 1), & \delta &\in (0, 1]. \end{aligned} \quad (12)$$

Этот путь удовлетворяет всем условиям теоремы 3, поэтому существует число $s_0 \in (0, 1)$, такое что система (10) с параметрами (12) и $s = s_0$ имеет гомоклиническую траекторию. В этом случае, седловая величина будет нулевой при $\delta = 1$, положительной при $\delta < 1$, и отрицательной при $\delta > 1$.

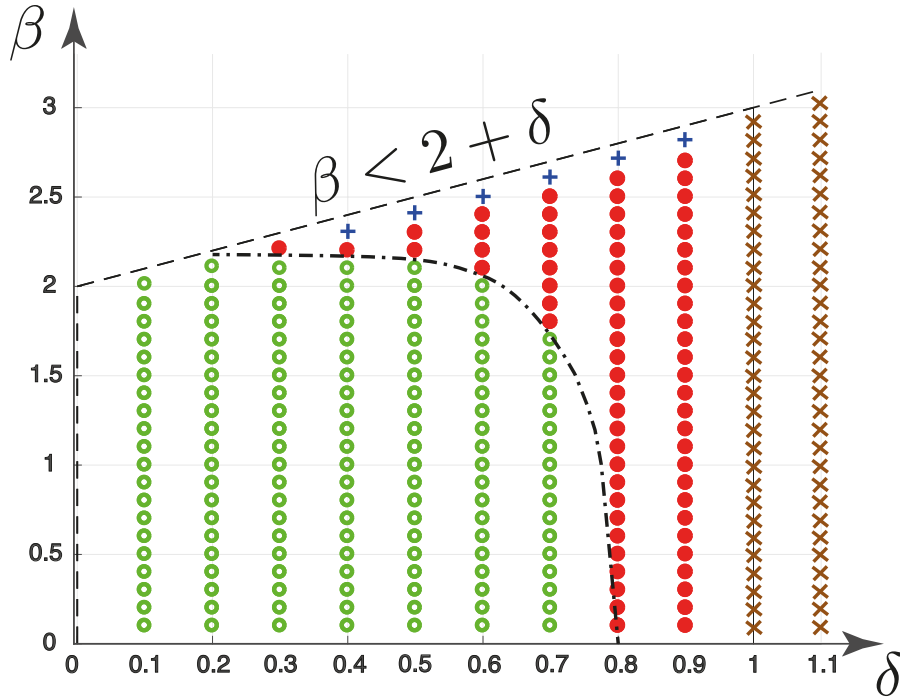


Рис. 5: Различные типы гомоклинических бифуркаций в системе (10).

Для анализа сценария гомоклинической бифуркации и возможности возникновения хаотического поведения в диссертации разработан следующий численный алгоритм, реализованный в MATLAB. На множестве $B_{\delta, \beta} = \{(\delta, \beta) \mid \delta \in (0, 1.1], \beta \in (0, 2 + \delta)\}$ в плоскости параметров (δ, β) была выбрана сетка точек с шагом 0.1 и для каждой точки сетки путем численного интегрирования сепаратрис Γ^\pm седла S_0 , определялся отрезок $[\underline{s}, \bar{s}] \subset (0, 1)$,

такой что поведение сепаратрис менялось при переходе от параметров $\lambda(\underline{s})$, $\alpha(\underline{s})$ к параметрам $\lambda(\bar{s})$, $\alpha(\bar{s})$, задавая гомоклиническую бифуркацию. Тип гомоклинической бифуркации уточнялся путем анализа поведения отображений Пуанкаре на соответствующих сечениях, выбранных в окрестности седла S_0 . Проведенные численные исследования показали, что в множестве $B_{\delta,\beta}$ с выбранной сеткой точек существуют 4 области с различными гомоклиническими бифуркациями (рис. 5). В области, помеченной значками (\circ) , до бифуркации (т.е. при $s = \underline{s}$) сепаратрисы Γ^\pm притягивались к противоположным устойчивым состояниям равновесия S_\mp , после бифуркации (т.е. при $s = \bar{s}$) – к ближайшим S_\pm . В области, помеченной значками (\times) , соответствующей $\delta \geq 1$, в процессе бифуркации один большой устойчивый предельный цикл типа ”восьмерка” разделялся на два устойчивых предельных цикла вокруг неустойчивых состояний равновесия S_\pm .

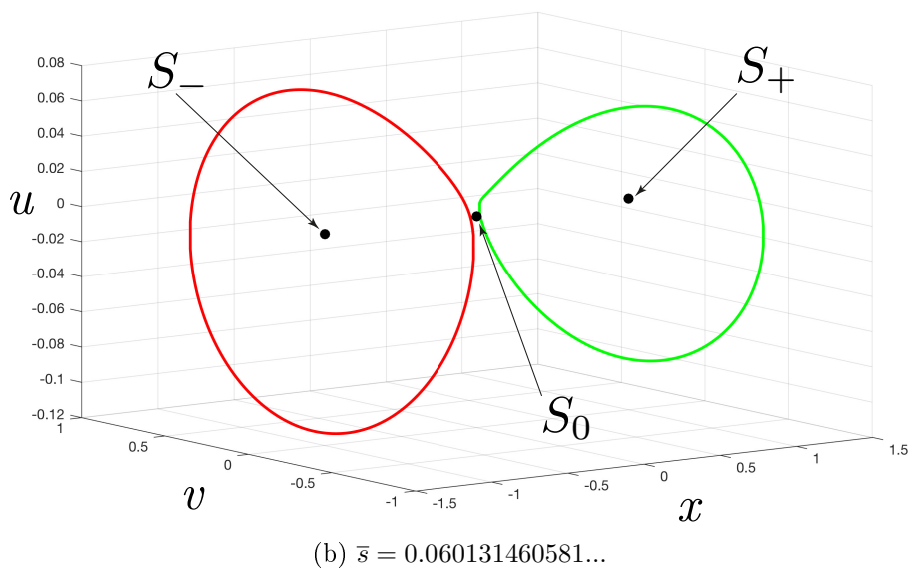
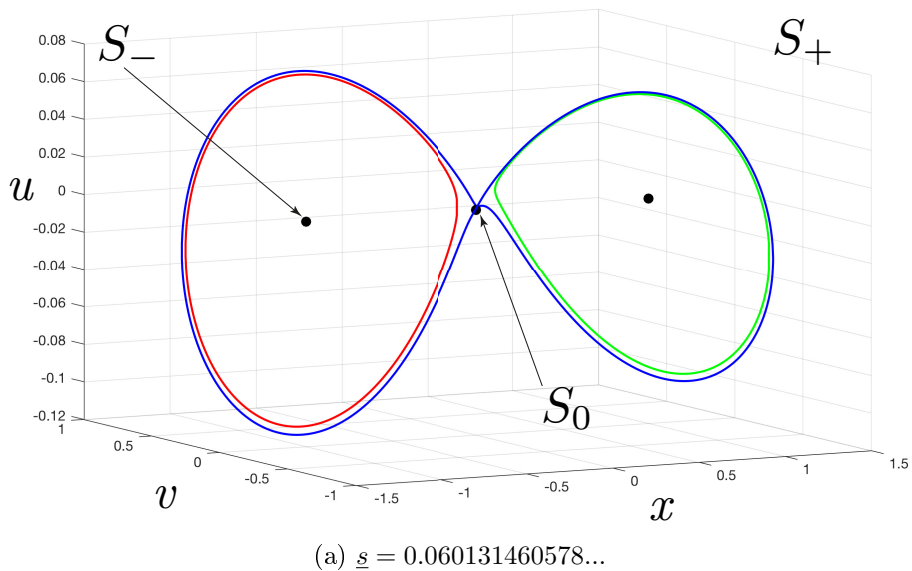
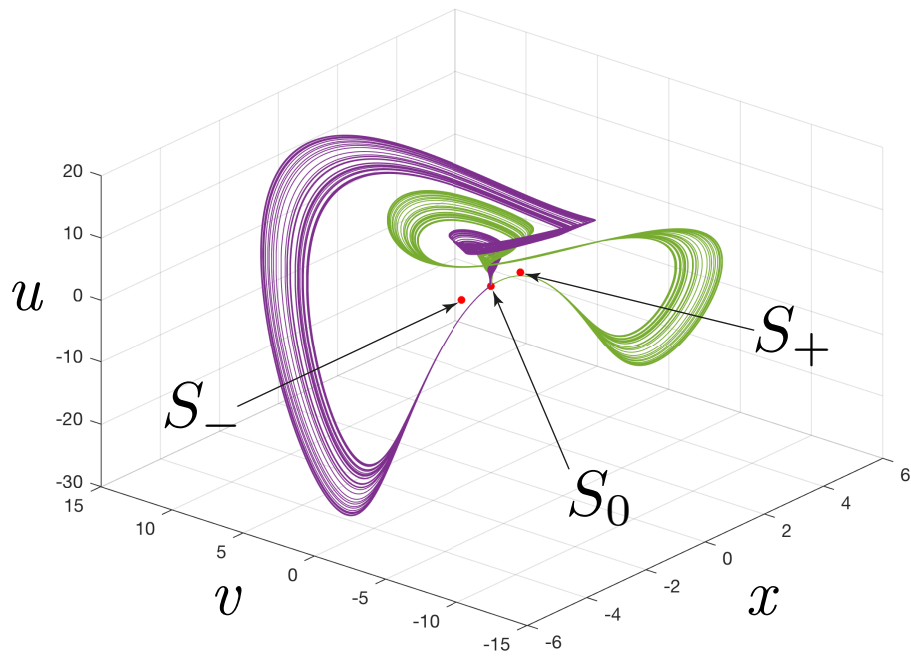
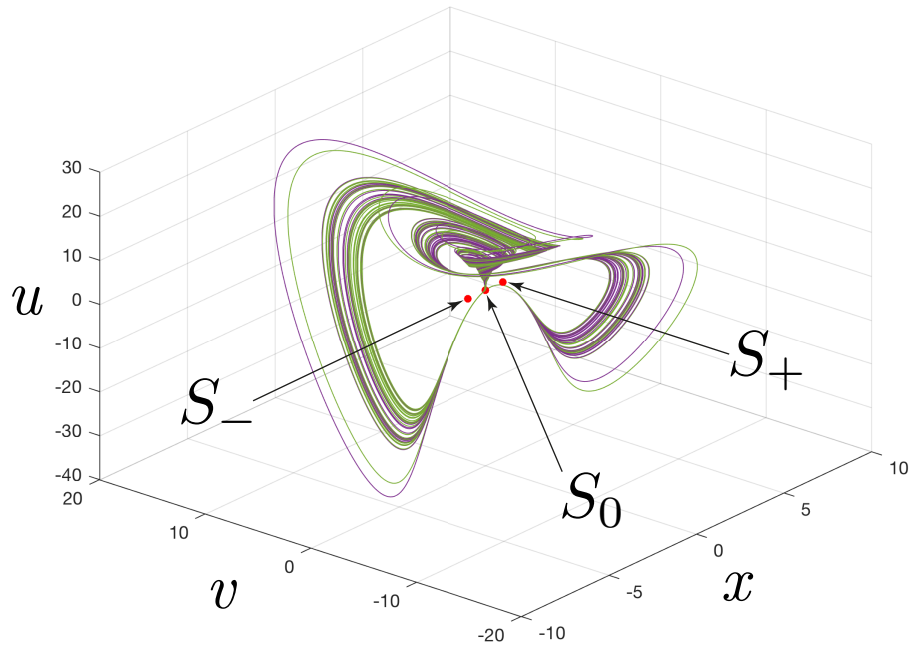


Рис. 6: Гомоклиническая бифуркация при $\delta = 0.9$, $\beta = 0.2$.



(a) $\bar{s} = 0.7957\dots$



(b) $\underline{s} = 0.7955\dots$

Рис. 7: Гомоклиническая бифуркация слияния двух аттракторов при $\delta = 0.9$, $\beta = 2.899$.

Были обнаружены два новых сценария гомоклинических бифуркаций. В области, помеченной значками (\bullet) , до бифуркации два симметричных предельных цикла Θ^\pm вокруг неустойчивых седло-фокусов S_\pm сосуществуют, в зависимости от параметров, с устойчивым предельным циклом типа ”восьмерка” (рис. 6) или со странным аттрактором, к которому притягиваются сепаратрисы Γ^\pm . Затем этот аттрактор теряет устойчивость и сепаратрисы Γ^\pm притягиваются к противоположным симметричным предельным циклам Θ^\mp . После бифуркации сепаратрисы Γ^\pm притягиваются к ближайшим сим-

метричным предельным циклам Θ^\pm . В области, помеченной значками (+), вблизи границы $\beta = 2 + \delta$, при возникновении неустойчивой гомоклинической траектории, один аттрактор разделяется на два (или, отслеживая изменение параметра s от 1 до 0, происходит слияние двух аттракторов в один аттрактор, см. рис. 7).

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Для класса моделей управления в форме Лурье разработан алгоритм синтеза моделей со скрытыми колебаниями. Для этого предложен алгоритм для построения контрпримеров к проблеме Калмана, основанный на обратном сценарии разрывной аппроксимации Айзермана-Пятницкого и построен контрпример с гладкой нелинейностью к проблеме Калмана на основе системы Фиттса, демонстрирующий скрытый хаотический аттрактор.
2. Для класса моделей лоренцевского типа со сжатием объема проведён синтез моделей с неограниченно возрастающими траекториями. Для этого получены аналитические условия неустойчивости и разработан алгоритм для численного уточнения границ области неустойчивости.
3. Для класса моделей лоренцевского типа разработан алгоритм синтеза моделей с гомоклинической траекторией. Для этого получен аналитический критерий существования гомоклинических траекторий и разработан алгоритм для численного исследования гомоклинических бифуркаций. Численно обнаружена гомоклиническая бифуркация слияния странных аттракторов.
4. Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Леонов Г.А., Андриевский Б.Р., Мокаев Р.Н. Асимптотическое поведение решений систем лоренцевского типа. Аналитические результаты и структуры компьютерных ошибок // Вестник СПбГУ. Математика, 2017. Т. 4. В. 1. doi:10.21638/11701/spbu01.2017.105. С. 25–37.
2. Леонов Г.А., Мокаев Р.Н. Отрицательное решение проблемы Калмана и доказательство существования скрытого странного аттрактора методом разрывной аппроксимации // Доклады Академии Наук, 2017. Т. 475. № 3. doi:10.7868/S0869565217210046. С. 257–261.
3. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kiseleva M.A., Mokaev R.N. Global Problems for Differential Inclusions. Kalman and Vyshnegradskii Problems and Chua Circuits // Differential Equations, 2017. Vol. 53. № 13. doi:10.1134/S0012266117130018. Pp. 1671–1702.

Другие публикации:

4. Mokaev R.N., Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Kalman conjecture in theory of differential equations. Counterexamples and hidden attractors // Abstracts of the 2nd International Scientific Conference «Autumn Mathematical Readings in Adyghea», 2017. Pp. 163–164.
5. Leonov G.A., Mokaev R.N. Numerical simulations of the Lorenz-like system: Asymptotic Behavior of Solutions, Chaos and Homoclinic Bifurcations // Abstracts of the International Scientific Conference on Mechanics «The Eight Polyakhov's Reading», 2018. Pp. 264.
6. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev R.N. Homoclinic Bifurcations of the Merging Strange Attractors in the Lorenz-like System, 2018. Pp. 1–19. <https://arxiv.org/abs/1802.07694v2>.

Патенты и свидетельства:

7. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Мокаев Р.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018610372 от 11.01.18. Программа для моделирования параметров стохастических колебаний в релейных системах // 2018.