

На правах рукописи



Акимов Алексей Иванович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
КАЧЕСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург
2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Научный

консультант: доктор технических наук, профессор
Козлов Владимир Николаевич

Официальные

оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Московского технологического университета
(Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова)
Карташов Эдуард Михайлович

доктор технических наук, профессор кафедры прикладной
математики и кибернетики института математики и
информационных технологий Петрозаводского государственного
университета (ПетрГУ)
Питухин Евгений Александрович

доктор технических наук, доцент, директор департамента
тренажерных систем АО «Кронштадт Технологии»
Казунин Дмитрий Владимирович

Ведущая

организация: ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. Туполева – КАИ»

Защита состоится «26» декабря 2019 года в 16.00 часов на заседании
диссертационного совета Д212.229.10 на базе Санкт-Петербургского
политехнического университета Петра Великого по адресу: 194021, Санкт-
Петербург, Политехническая ул., д. 21, 9 учебный корпус (Институт
компьютерных наук и технологий), ауд.121.

Отзыв на автореферат в 2-х экземплярах просим направить по адресу
194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 21, 9 учебный корпус
(Институт компьютерных наук и технологий), ауд. 307, ученому секретарю
диссертационного совета Д212 229.10 Н. В. Богач.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого» и на сайте [http: // www.spbstu.ru](http://www.spbstu.ru).

Автореферат разослан «__» _____ 2019 года

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212 229.10 к.т.н., доцент



Н.В. Богач

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В связи с расширением области применения композитов, повысился и спрос на них в связи с их прочностными характеристиками и долговечности к различным типам внешних воздействий (жаропрочностью, устойчивостью к низким температурным воздействиям, влажности и т.д.). Поэтому стало актуальным и совершенствование прочностных характеристик композитов, т.к. достигнутые успехи в качестве уже не полностью удовлетворяют требованиям современности, особенно на основе замещения импортного оборудования. Это соответствует требованиям Федерального закона от 28 июня 2014 г. N 172-ФЗ "О стратегическом планировании в Российской Федерации".

Многослойные композиционные конструкции изготавливают разными способами. Но на практике широкое распространение получили многослойные композиты на основе многослойных стеклотканей, пропитанных связующими материалами, т.е. основу составляют многослойные стеклоткани, а связующими являются различные типы клеев. Полученную конструкцию подвергают определенным температурным воздействиям, обеспечивающим формирование требуемой формы. Для температурного воздействия используют установки с электроподогревом. В таких установках формируются многослойные композиционные конструкции с требуемыми механическими свойствами и формами.

Рассмотрим некоторые отечественные и зарубежные источники, посвященные к проблеме композитов.

В первом разделе диссертационной работы приводится обзор литературы, посвященной к проблеме композитов. Работы [1,2,3] посвящены к волоконным композиционным материалам. В работах [4,5,6] описываются полимерные композиционные материалы. В работе [13] рассматриваются композиты на основе полимеров и углеродных волокон. Много работ посвящены к физико-механическим свойствам композитов [13,17,19]. Большое количество литературы посвящено математическому моделированию теплообмена, массообмена, термонапряжениям и деформациям [21, 22, 31, 33]. В работах [48, 54, 57] описываются о продвижении границы изменения агрегатного состояния при полимеризации. Но этот список направлений исследования можно продолжать довольно долго.

Поэтому рассмотрим только те вопросы, которые относятся к данной диссертационной работе.

К вопросам диссертационной работы, в первую очередь, относятся разработка математических моделей теплообмена, массообмена, термонапряжений, деформаций для каждого этапа полимеризации и их аналитические и численные методы решения. Т.к. композиты изготавливаются из многослойных композиционных материалов, то приводится обзор литературы математического моделирования для многослойных областей.

Аналитические исследования изменения теплофизических параметров многослойных конструкций, возможно, впервые проведены Н.С. Кошляковым [145], далее развиты в работах Э.М. Карташова [120] и Е.Н. Туголукова [137]. В работах Е.Н. Туголукова [137], для определения изменений теплофизических параметров использовано конечное интегральное преобразование Ханкеля. В работе А.В. Лыкова [138], для решения задачи о нестационарной теплопроводности, использовано интегральное преобразование Лапласа. В работах Н.М. Беляева, А.А. Рядно, В.М. Кошечева, М.Г. Когана [139, 140, 141], для решения нестационарной задачи теплопроводности, применен метод разделения переменных. В исследованиях В.В. Власовой [142], для решения задачи нестационарной теплопроводности, использован метод функций источников (Грина). В работах Г.Ф. Мучника, И.Б. Рубашова [143], для исследования теплообмена между двумя пластинами, использован комбинированный метод интегральных преобразований и функций Грина. А.В. Лыков и Ю.А. Михайлов [144] разработали температуру распределения для трех пластин. Большая работа по приближенным методам решения уравнений теплопроводности проделана А.А. Кудиновым и его учениками [146].

Синтез технологий гарантирующих высокое качество многослойных композиционных конструкции, достигается аналитическими методами исследования теплофизических процессов в многослойных композиционных конструкциях. Составлением математических моделей этих процессов, и решениями их аналитическими и численными методами для выполнения требований к процессу полимеризации. Проблема обеспечения заданных требований полимеризации требует обеспечения определенных режимов нагрева многослойных композиционных конструкций, режимов стабилизации температуры на заданных уровнях и режимов охлаждения многослойных композиционных конструкции в условиях недоступной информации о фазовых координатах.

Решение проблемы сопровождения полимеризации в условиях недоступной информации о состоянии создаваемого многослойного композита требует решения перечисленных выше задач синтеза многоэтапных процессов нагрева и охлаждения на основе адекватных математических моделей теплофизики полимеризации. Математическое моделирование (как метод исследования на основе математического подобия между моделью и объектом) позволяет получить конструктивное решение прикладных задач полимеризации для создания композитов. Поэтому на основе теплофизических процессов полимеризации в условиях недоступной информации должны быть разработаны:

– математические модели и аналитико-численные методы расчета по коррективке теплофизических процессов для обеспечения режимов нагрева, для обеспечения режимов стабилизации температуры на заданных уровнях, для обеспечения режимов охлаждения;

– соответствующее обеспечение теплофизических процессов полимеризации для создания многослойных композиционных конструкции.

Проблема обеспечения режимов нагрева, режимов стабилизации температуры на заданном уровне и режимов охлаждения, когда невозможно

непосредственно измерить температуру в любой точке многослойной композиционной конструкции, является актуальной.

Целью диссертационной работы является разработка аналитических и численных математических моделей этапов полимеризации и учетом связанных теплообменных, массообменных и деформационных процессов многослойных композиционных конструкции в условиях недоступной информации о фазовых координатах.

Основные задачи исследований:

1. Разработка комплекса математических моделей взаимосвязанных процессов теплообмена, массообмена, термонапряжений и деформаций в условиях недоступности точек для непосредственных измерений указанных процессов.

2. Разработка аналитических методов анализа теплообмена, массообмена, термонапряжений и деформаций на основе изотермических поверхностей (с постоянной температурой) и конечных интегральных преобразований Ханкеля на основе решений алгебраических уравнений.

3. Разработка конечно-разностных методов расчета для численного анализа теплообмена, массообмена, термонапряжений и деформаций и синтеза многослойных композиционных конструкции.

4. Определение влияния температурного режима полимеризации на механические свойства многослойных композиционных конструкций, а также выявление физических и химических факторов, которые влияют на процесс полимеризации.

5. Составление схем для аналитического исследования многослойных композиционных конструкции на всех трех этапах полимеризации.

6. Разработка методики по совершенствованию аналитического исследования многослойных композиционных конструкции в условиях недоступности точек для непосредственных измерений процессов полимеризации.

Научная новизна. Для этапов полимеризации, в условиях недоступной информации разработаны:

– математические модели для аналитического и численного анализа процессов теплообмена, массообмена и деформаций для всех этапов полимеризации многослойных композиционных конструкций;

– аналитические методы декомпозиции на основе изотермических поверхностей и конечных интегральных преобразований Ханкеля, позволяющее синтезировать температурные режимы полимеризации с учетом последовательного теплообмена, массообмена и деформаций;

– численные методы расчета на основе неявных разностных схем для анализа теплофизических процессов и обеспечения режимов стабилизации температуры на заданных уровнях режимов нагрева;

– сопровождение многослойных композиционных конструкций в пресс-формах методом полимеризации с помощью аналитических исследований.

Практическая ценность работы является в определении возможностей многослойных композиционных конструкции в зависимости от температурных режимов полимеризации.

Установлены разработки сопровождения композитов: скорость возрастания температуры при нагреве в композитах около 2°C в минуту; температуры полимеризации некоторых связующих 160°C , 165°C ; скорость остывания около 3°C в минуту. На основе исследований разработан многопозиционный регулятор температуры, который позволяет сопровождать процесс полимеризации и аналитически исследовать температурный режим композитов.

Достоверность полученных результатов определяется применением корректных математических и экспериментальных методов для решения каждой из поставленных задач. Используются фундаментальные законы теплофизики: теплообмен, массообмен, термонапряжения и деформации на основе проверенных законов сохранения, а также физической и математической непротиворечивостью используемых моделей многофазных сред.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели взаимосвязанных процессов теплообмена, массообмена, термонапряжений и поля деформаций композитов многослойной цилиндрической формы для всех этапов полимеризации многослойных композиционных конструкций. Для этого необходимо разработать адекватные аналитические и численные математические методы анализа тепловых процессов.

2. Аналитические методы декомпозиции задач теплообмена, массообмена и деформации на основе изотермических поверхностей и конечных интегральных преобразований Ханкеля для качественного и количественного анализа свойств многослойных композиционных конструкций.

3. Методы прогонки на основе неявных разностных схем для анализа количественных свойств теплофизических процессов.

4. Методика численных методов расчета температуры на основе неявных схем в интервалах ее повышения, стационарной стабилизации и охлаждения для получения характеристик теплообмена, массообмена и деформаций в многослойных цилиндрических конструкциях.

5. Разработка последовательной структуры обеспечения теплофизических процессов полимеризации для создания композитов и методика по совершенствованию композитов методом полимеризации.

6. Аналитические исследования многослойных композиционных конструкции на всех трех этапах полимеризации гарантирующие качество и прочность композитов на основе нагрева с помощью многопозиционного регулятора температуры полимеризации.

Апробация диссертационного исследования.

Результаты исследований докладывались и рассматривались на научных семинарах в Башкирском государственном университете, в Уфимском государственном авиационном техническом университете, в Оренбургском государственном педагогическом университете. На научно-практических

конференциях «Наследие И.М. Губкина: интеграция образования, науки и практики в нефтегазовой сфере» (г. Оренбург, 2018г.). «Перспективы развития науки» (г. Москва, 2014, 20 марта); «Образовательная среда сегодня и завтра» (г. Москва, 28-29 ноября 2016г.); «Прогрессивные технологии в транспортных системах» (г. Оренбург, 2001г.); «Современные проблемы физики и физико-математического образования» (г. Уфа, 2006г.) и в длинном ряде других конференций.

Публикации. По тематике работы опубликованы более 100 работ. В журналах, предложенных ВАК, более 28 работ, в базе Scopus — 5 работ.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа содержит введение, пять глав основного текста, заключение, библиографический список литературы и приложения. Основной состав работы представлен на 285 страницах, содержит 23 таблицы, 41 рисунок. Список литературы состоит из 189 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит актуальность темы диссертационной работы, сформированные цели и задачи исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту.

В первом разделе диссертационной работы приведен обзор отечественных и зарубежных источников, посвященных к проблеме композитов. Из обзора литературы следует, что механические свойства композитов в первую очередь связаны с теплофизическими процессами. Основную роль играет режим полимеризации связующих. Из источников следует, что пока не разработана система контроля процессом полимеризации в многослойных композиционных конструкциях.

В разделе 1.4 приведены результаты практических исследований автора диссертационной работы об особенностях пространственно-временных распределений температуры в композитах. Практические исследования показали нелинейную зависимость изменения температуры в многослойных конструкциях. В однослойных и двухслойных материалах они близки к линейной зависимости.

Неравномерное распределение температуры в многослойных композитах приводит к ухудшению их прочностных характеристик.

Неравномерное распределение температуры так же связано с неравномерным выделением теплоты полимеризации. Возникает необходимость регулировки температурного режима в пресс-формах, т.е. разработки системы контроля процессом полимеризации.

Для разработки системы контроля процессов полимеризации композитов необходимы математические модели теплообмена, массообмена, термонапряжений, деформаций и аналитические и численные методы их решения.

Во втором разделе показано как многослойные композиционные конструкции формируют в пресс-формах. На рис. 1 приведен поперечный разрез

пресс-формы. Она состоит из внешней металлической оболочки, из внутренней резиновой оболочки (технологический мешок), а между оболочками укладывают многослойную конструкцию требуемой формы (см. рис. 1).

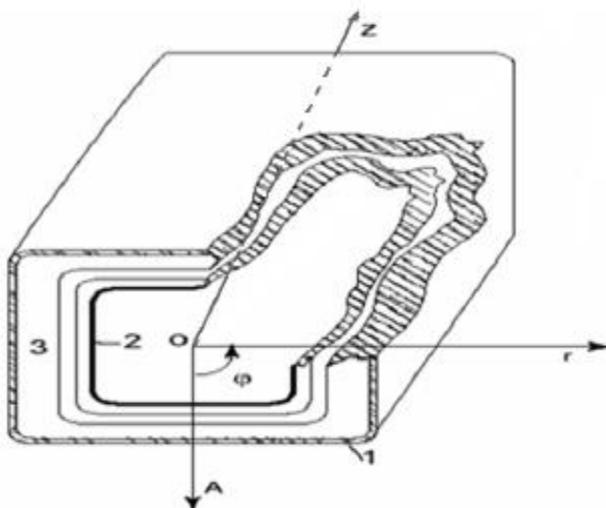


Рис.1. Пресс-форма в разрезе: 1 – внешняя оболочка; 2 – внутренняя оболочка в форме технологического мешка; 3 – многослойная композиционная конструкция между внешней и внутренней оболочками.

Нагревательные элементы расположены в определенном порядке на верхней и нижней половинах пресс-формы. Теплота передается кондуктивно во внутренние области. Для вытекания излишней влаги, между верхней и нижней половин плит пресс-формы оставлен зазор в 3 мм. шириной. Внутри пресс-формы с технологическим мешком внутри (для подачи давления). При помощи давления технологический мешок формирует внутреннюю поверхность будущего композита. В таком положении на заготовку композита воздействуют температурные режимы.

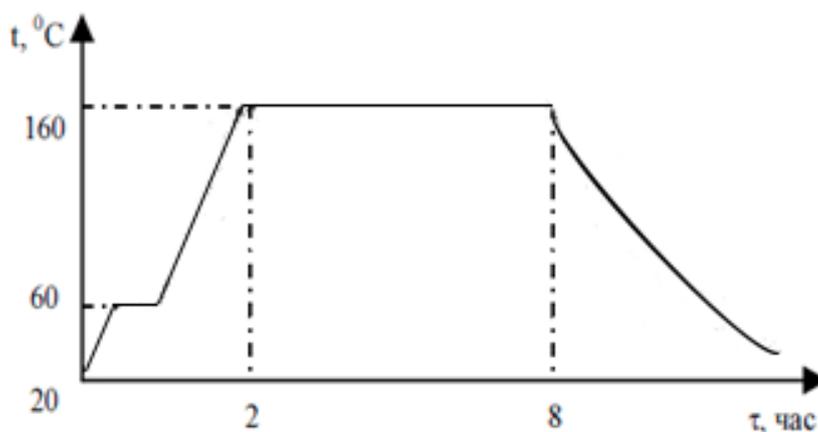


Рис.2. Этапы температурного воздействия: 1 - $(20-60)^{\circ}\text{C}$ – температура размягчения связующего (для вытекания излишней влаги); 2 - $(60-160 \text{ или } 165)^{\circ}\text{C}$ – выход на режим интенсивной полимеризации; 3 - $(160 \text{ или } 165)^{\circ}\text{C}$ – режим

интенсивной полимеризации; 4 – $(160 \text{ или } 165)^{\circ}\text{C}$ до 20°C – режим остывания композита до температуры среды; 5 – τ – время воздействия.

На интервале нагрева (1,5–2 часа) температура повышается от температуры среды до температуры полимеризации многослойного композита. На интервале стабилизации температуры (6 часов) осуществляется полимеризация многослойного композита. На интервале охлаждения (4-5 часов) происходит остывание пресс-формы с уложенными во внутрь многослойными композиционными материалами от температуры стабилизации (160°) до температуры среды.

В пресс-формах полимер образуется за счет фазового перехода связующего и полностью прекращается при полной полимеризации, т.е. на интервале охлаждения (3 интервал).

На интервале нагрева полимеризация отсутствует, то есть происходят невзаимосвязанные процессы теплообмена и массообмена, а на интервале стабилизации температуры присутствует уже слагаемое, связанное с выделением тепла за счет полимеризации. Если учесть температуру интенсивной полимеризации и превращения связующего в полимер только для твердой среды

$d = \frac{m_{\Pi}}{m_c + m_{\Pi}}$ (где m_{Π} – доля полимера, m_c – доля связующего), то при отсутствии полимера ($m_{\Pi} = 0$) $d = 0$, то есть полимер d – отсутствует.

Если связующее полностью превратится в полимер, то $d = 1$.

На интервале нагрева композитов при наличии идеального контакта между слоями постановка и решение задачи теплообмена следующая (см. рис.3).

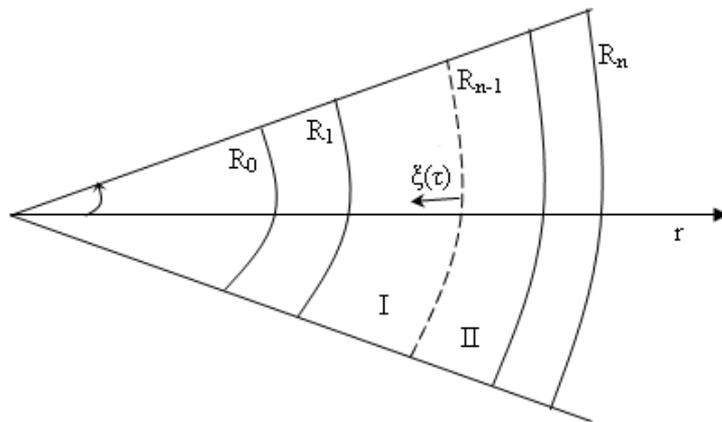


Рис. 3 - Схема распределения зон, где $\tau > 0$, $\xi(\tau) < r < R_{n+1}(r, \tau) - I, \tau > 0, R_0(r, \tau) < r < \xi(\tau) - II$

Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + W_k(r_k, \tau), \quad (1)$$

$$\tau > 0, R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, (k = 1, 2, \dots, N),$$

где $W_k(r_k, \tau) = \frac{q_v(r_k, \tau)}{c \cdot \rho}$, q_v – мощность источника, c – удельная теплоемкость, ρ –

плотность материала;

при начальных условиях

$$U_k(r_k, 0) = f_k(r_k) \quad (2)$$

и граничных условиях третьего рода при $r = R_0$

$$\lambda_1 \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 [U_1(R_0, \tau) - U_{c1}] = 0 \quad (3)$$

и $r = R_N$

$$\lambda_N \frac{\partial U_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N [U_N(R_N, \tau) - U_{cN}] = 0 \quad (4)$$

с условиями сопряжения

$$U_k(R_k, \tau) = U_{k+1}(R_k, \tau), \lambda_k \frac{\partial U_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{k+1} \frac{\partial U_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_{k+1}}, \quad (5)$$

где $U_k(r_k, \tau)$ – температура на глубине r_k в момент времени τ ;

U_{cN} – температура вне наружной поверхности композита;

U_{c1} – температура внутренней полости полого композита цилиндрической формы;

λ_1, λ_N – теплопроводность 1-го и N -го слоев композита;

a_k – температуропроводность слоев;

R_k – радиусы расположения слоев.

Решение задачи (1)-(5) с неоднородными граничными условиями целесообразно представить, как сумму решений стационарной и нестационарной задач:

$$U_k(r_k, \tau) = \psi_k(r_k) + T_k(r_k, \tau), \text{ где } T_k(r_k, \tau) = U_k(r_k, \tau) - \psi_k(r_k). \quad (6)$$

Пусть $\psi_k(r_k)$ – решение стационарной задачи с однородными граничными условиями

$$\frac{d^2 \psi_k(r_k)}{dr_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{d\psi_k(r_k)}{dr_k} = 0, \quad R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \psi_1(R_0)}{\partial r_1} - \alpha_1 [\psi_1(R_0) - U_{c1}] = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_N \frac{\partial \psi_N(R_N)}{\partial r_N} + \alpha_N [\psi_N(R_N) - U_{cN}] = 0. \quad (9)$$

и с условиями сопряжения

$$\psi_k(R_k) = \psi_{k+1}(R_k), \quad (10)$$

$$\lambda_k \frac{\partial \psi_k(R_k)}{\partial r_k} = \lambda_{k+1} \frac{\partial \psi_{k+1}(R_k)}{\partial r_{k+1}}. \quad (11)$$

Обозначения аналогичны как к задаче (1)-(5)

Решение стационарной задачи имеет вид:

$$\psi_k(r_k) = C_k + D_k \ln(r_k), k=1,2,\dots,n. \quad (12)$$

где

$$D_1 = \frac{U_{c1} - U_{cN}}{\ln(R_0) - \frac{\lambda_1}{R_0 \alpha_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_N} \left(\ln(R_0) + \frac{\lambda_N}{R_N \alpha_N} \right) + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n-1} \ln(R_k) \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{\lambda_k} \right)}, \quad (13)$$

$$C_1 = U_{c1} - D_1 \left(\ln(R_0) - \frac{\lambda_1}{R_0 \alpha_1} \right), \quad (14)$$

$$D_{k+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} = D_1, C_{k+1} = C_k + D_1 \ln(R_k) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right).$$

Тогда для $T_k(r_k, \tau)$ имеем нестационарную задачу с нулевыми граничными условиями

$$\frac{\partial T_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \left(\frac{\partial^2 T_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial T_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + W_k(r_k, \tau), \quad (15)$$

$$R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, t > 0, k=1,2,\dots,N,$$

$$\text{с начальным условием: } T_k(r_k, 0) = f_k(r_k) - \psi_k(r_k); \quad (16)$$

$$\text{и граничными условиями: } \lambda_1 \frac{\partial T_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 T_1(R_0, \tau) = 0; \quad (17)$$

$$\lambda_N \frac{\partial T_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N T_N(R_N, \tau) = 0; \quad (18)$$

$$T_k(R_k, \tau) = T_{k+1}(R_k, \tau); \quad (19)$$

$$\lambda_k \frac{\partial T_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_{k+1}} \quad (20)$$

Поставленная задача решена методом конечного интегрального преобразования Ханкеля.

К данной задаче прямое преобразование Ханкеля имеет вид:

$$\overline{T_k}(\mu_k, \tau) = \int_{R_k}^{R_{k-1}} r_k T_k(r_k, \tau) M_k(\mu_n, t) dr_k - \text{прямое преобразование Ханкеля};$$

$$T_k(r_k, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(\mu_n, r_k)}{\|M_k\|^2} \overline{T_k}(\mu_n, \tau) - \text{обратное преобразование Ханкеля, где } \rho(r_k) = r_k -$$

весовая функция интегрального преобразования (ИП) Ханкеля;

$$M_k(\mu_n, r_k) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R_k} r_k\right) Y_0(\mu_k) - J_0(\mu_n) Y_0\left(\frac{\mu_n}{R_k} r_k\right) - \text{ядро интегрального}$$

преобразования (ИП)

Ханкеля; $\|M_k\|^2 = \frac{2R_k^2 \left[J_0^2(\mu_n) - J_0^2\left(\mu_n \frac{R_{k+1}}{R_k}\right) \right]}{\pi^2 \mu_n^2 J_0^2\left(\mu_n \frac{R_{k+1}}{R_k}\right)}$ – квадрат нормы ядра;

$\mu_n > 0$ – корни характеристического уравнения

$$J_0(\mu)Y_0\left(\mu \frac{R_{k+1}}{R_k}\right) - Y_0(\mu)J_0\left(\mu \frac{R_{k+1}}{R_k}\right) = 0.$$

Решение получено в виде

$$T_k(r_k, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)\|^2} \cdot \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k (f_k(r_k) - \psi_k(r_k)) M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) dr_k - P \right] e^{-\mu_n^2 \tau} + P \right\} \quad (22)$$

где $\psi_k(r_k) = C_k + D_k \ln(r_k)$,

$$P = \frac{1}{\mu_n^2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} W_k(r_k, \tau) \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) dr_k.$$

Решение исходной задачи имеет вид:

$$U_k(r_k, \tau) = C_k + D_k \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)\|^2} \times \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k (f_k(r_k) - C_k - D_k \ln(r_k)) M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) dr_k - P \right] e^{-\mu_n^2 \tau} + P \right\} \quad (23)$$

$k=1, 2, \dots, N.$

Далее рассмотрим решение задачи массообмена

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{mk}^2 \frac{\partial^2 m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k}, \quad R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad \tau > 0, \quad (24)$$

$k=1, 2, \dots, N,$

$$\text{с НУ: } m_k(r_k, 0) = g_k(r_k) \quad (25)$$

$$\text{ГУ: } \lambda_{mN} \frac{\partial m_{mN}}{\partial r_{mN}} + \alpha_{mN} m_{mN}(R_{mN}, \tau) = 0; \quad (26)$$

$$\lambda_{m1} \frac{\partial m_{m1}}{\partial r_{m1}} - \alpha_{m1} m_{m1}(R_{m1}, \tau) = 0; \quad (27)$$

с условием равенства температур межслоевых поверхностях и их соответствующих потоков

$$m_k(R_k, \tau) = m_{k+1}(R_k, \tau); \quad (28)$$

$$\lambda_{mk} \frac{\partial m_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{m(k+1)} \frac{\partial m_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_{k+1}}, \quad (29)$$

где m указывает, что действия относятся к массообмену, $m_k(r_k, \tau)$ – величина массы в слое радиуса r_k в момент времени τ ; λ_{mk} – коэффициент массообмена k -го слоя; α_{mk} – коэффициент массоотдачи k -го слоя; $g(r_k)$ – наличие массы в начальный момент времени в k -ом слое радиуса r_k ; R_{mN} – внешний радиус k -ого слоя массы; R_{m1} – внутренний радиус k -ого массы.

Так как в уравнении массообмена отсутствует только слагаемое $W_k(r_k, \tau)$ по сравнению с теплообменом, то в решении массообмена слагаемое

$$P = \frac{1}{\mu_n^2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_{k-1}}^{R_k} r_k W_k M_0 \left(\frac{\mu_n}{a_k} r_k \right) dr_k = 0,$$

так как $W_k = 0$ и приходим к решению вида

$$m_k(r_k, \tau) = C_{mk} + D_{mk} \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M \left(\frac{\mu_{nn}}{a_{mk}} r_k \right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\|^2} e^{-\mu_{nn}^2 \tau} \times \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{mk}}{a_{mk}^2} \int_{R_k}^{R_{k-1}} r_k [f_k(r_k) - \psi_{mk}(r_k)] M \left(\frac{\mu_{mn}}{a_{mk}} r_k \right) dr_k. \quad (30)$$

На интервале стабилизации температуры на заданном уровне (стадии полимеризации) присутствует уже слагаемое связанное с выделением тепла за счет полимеризации, т.е. связующее переходит в полимер и теплообмен и массообмен описываются соответственно следующими уравнениями

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{gk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + \sigma \frac{c_{mk}}{c_{gk}} \frac{d_k}{1-d_k} * \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} + W_k(r_k, \tau), \quad (31)$$

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{mk}^2 \frac{1-d_k}{r_k} * \frac{\partial}{\partial r_k} \left(r_k \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right), \quad (32)$$

$$R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где a_{gk} – коэффициент теплопроводности k -ого слоя; a_{mk} – коэффициент массопроводности; σ – теплота (удельная) фазового перехода; d_k – в k -ом слое доля полимера; c_{mk} – удельная массоемкость k -ого слоя; c_{gk} – удельная теплоемкость k -го слоя; $W_k(r_k, \tau)$ – теплота электрообеспечения; U_k – температура k -ого слоя; m_k – масса k -ого слоя.

Сначала рассмотрим задачу массообмена

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r} = a_{mk}^2 (1-d_k) \left(\frac{\partial^2 m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) \quad (33)$$

$$R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$\text{с НУ: } m_k(r_k, 0) = g_k(r_k); \quad (34)$$

$$\text{с ГУ: } \lambda_{mN} \frac{\partial^2 m_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + a_{mN} [m_N(R_N, \tau) - m_{cN}] = 0; \quad (35)$$

$$\lambda_{m1} \frac{\partial^2 m_N(R_1, \tau)}{\partial r_1} + a_{m1} [m_1(R_0, \tau) - m_{c1}] = 0; \quad (36)$$

и граничными условиями сопряжения

$$m_k(R_k, \tau) = m_{k+1}(R_k, \tau); \quad (37)$$

$$\lambda_{mk} \frac{\partial m_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{m(k+1)} \frac{\partial m_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_k}; \quad (38)$$

и условиями полимеризации

$$m_I[\xi(\tau), \tau] = m_{II}[\xi(\tau), \tau] = m_{kp}; \quad (39)$$

$$m_{II}[\xi(\tau), r] = m_0; \quad (40)$$

$$\lambda_I \frac{\partial m_I[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} - \lambda_{II} \frac{\partial m_{II}[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} = g. \quad (41)$$

Применяя метод изотермических поверхностей, получено решение в виде

$$m_k(r_k, \tau) = C_{mk} + D_{mk} \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M \left(\frac{\mu_{mn} r_k}{C_{mk}} \right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\|^2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{mk}}{C_{mk}^2} \int_{R_{k+1}}^{R_k} r_k [g_k(r_k) - \psi_{mk}(r_k)] \times \\ \times M \left(\frac{\mu_{mn} r_k}{C_{mk}} \right) dr_k e^{-(\mu_{mn}^2 \tau)}, \quad (42)$$

где $C_{mk} = a_{mk}^2 (1 - d_k)$. Индекс m указывает, что действия относятся к массообмену.

Зная решение задачи массообмена можно привести решение задачи теплообмена. Найти решение уравнения [11]

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{gk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial U(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + \sigma \frac{c_{mk}}{c_{dk}} \frac{d_k}{1 - d_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} + W_k(r_k, \tau), \quad (43)$$

$$R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

с начальными условиями

$$U_k(r_k, 0) = f_k(r_k), \quad (44)$$

с граничными условиями на внешних поверхностях

$$\lambda_{gN} \frac{\partial U_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + a_{gN} [U_N(R_N, \tau) - U_{cN}] = 0; \quad (45)$$

$$\lambda_{g1} \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} + a_{g1} [U_1(R_0, \tau) - U_{c1}] = 0; \quad (46)$$

и с условиями сопряжения

$$U_k(R_k, \tau) = U_{k+1}(R_k, \tau); \quad (47)$$

$$\lambda_{gk} \frac{\partial U_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{g(k+1)} \frac{\partial U_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_{k+1}}, \quad (48)$$

при $R_k(r_k, \tau) \neq \xi(\tau)$.

и с условиями полимеризации

$$U_I[\xi(\tau), \tau] = U_{II}[\xi(\tau), \tau] = U_{kp}; \quad (49)$$

$$U_{II}[a\xi(\tau), r] = U_0; \quad (50)$$

$$\lambda_I \frac{\partial U_I[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} - \lambda \frac{\partial U_{II}[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} = \sigma \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial r}, \quad (51)$$

где σ – удельная теплота фазового перехода.

К решению данной задачи использовали метод изотермических поверхностей [124] на интервале стабилизации температуры на заданном уровне (полимеризации).

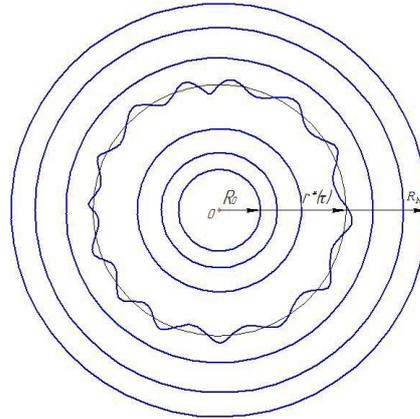


Рис.3.1 Передвижение границы зоны полимеризации

$$(r^*(\tau_j^*) = \xi(\tau_j^*) = R_N - V\tau_j^*)$$

Для каждого связующего экспериментально определено приближенно скорость V передвижения границы полимеризации. Зная скорость V , можно для каждого момента времени τ_j приближенно определить положение границы полимеризации по формуле $r(\tau_j) = \xi(\tau_j) = R_n - V\tau_j$, так как температура на этапах полимеризации остается постоянной, равной 165°C . Сущность метода изотермических поверхностей состоит в том, что непрерывный спектр перемещения границы полимеризации $R_0 \leq r(\tau_j) \leq R_n$ заменяем дискретным множеством $\{r^*(\tau_j^*)\} = \{\xi(\tau_j^*)\}$ (положения границы полимеризации в фиксированные моменты времени τ_j^* . Время, например, можно фиксировать через 10 минут с начала полимеризации и т.д.) Эти фиксированные линии на (рис.3.1) отмечены концентрическими окружностями. Фиксированные положения окружностей определяем по формуле $(r^*(\tau_j^*) = \xi(\tau_j^*) = R_n - V\tau_j^*)$, в фиксированные моменты времени τ_j^* .

Таблица 1

τ_j^*	0	10 мин	...	τ_j^* мин.	τ_{j+1}^* мин	...	350 мин	6ч = 360 мин
$r^*(\tau_j^*)$	R_n	$R_n - V \cdot 10 \text{ мин}$...	$R_n - V \tau_j^*$	$R_n - V \tau_{j+1}^*$...	$R_n - V \cdot 350 \text{ мин}$	R_0
$U_{\text{кр}}(r^*, \tau^*)$				

За критическую температуру $U_{\text{кр}}(r^*, \tau^*) \approx 160^\circ \text{C}$ можно брать приближенно 160°C , так как интенсивная полимеризация начинается около 155°C и зоны полимеризации то опережают фиксированную критическую линию $r^*(\tau_j^*)$, то запаздывают. В сплошной полимеризованной зоне температура постоянна и равна около 165°C . Поэтому приближенно температуру принимаем равной 160°C , так как граница полимеризации фактически не ровная линия в связи с неравномерностью нагрева пресс-формы по всей поверхности.

Таким образом, метод ИП позволяет свести нелинейную задачу теплопроводности к двум линейным задачам в интервалах $r^* < r < R_n, R_0 < r < r^*$, которые можно решать методом конечных интегральных преобразований Ханкеля.

Рассмотрим три положения произвольного времени τ_j и критического времени τ_j^* : 1) $\tau_j < \tau_j^*$; 2) $\tau_j = \tau_j^*$; 3) $\tau_j > \tau_j^*$.

При $\tau_j < \tau_j^*$ рассматриваемая точка оказывается в зоне полной полимеризации $r^*(\tau_j^*) < r < R_n$ (см. рис. 3.1). Следовательно, задача в этой зоне решается методом конечных интегральных преобразований Ханкеля как для сплошного полого цилиндра (полимеризованная зона) в интервале $r^*(\tau_j^*) < r < R_n$.

При $\tau_j = \tau_j^*$ значение температуры $U(r^*, \tau_j^*)$ определяется по формуле (52).

При $\tau_j > \tau_j^*$ точка оказывается в неполимеризованной зоне (см. рис. 3.1), т.е. в область многослойной конструкции с условиями сопряжения. Эта задача рассмотрена на первом этапе нагрева композитов при наличии идеального контакта между слоями и решена методом конечных интегральных преобразований Ханкеля. Задача рассматривается в интервале $R_0 < r < r^*(\tau_j^*)$.

Таким образом, значение температуры в любой момент времени на любой глубине полого цилиндра определяем по формуле (52).

$$U_k(r_k, \tau) = C_{gk} + D_{gk} \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_{gn}}{a_{gk}} r_k\right)}{\|M_k\|^2} + \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{gk}}{2 a_{gk}} \int_{R_{k-1}}^{R_k} r_k [f_k(r_k) - C_{gk} - D_{gk} \ln(r_k)] M\left(\frac{\mu_{gn}}{a_{gk}} r_k\right) dr_k + \int_{R_{k-1}}^{R_k} A(\mu_{gn}, \tau) \cdot e^{\mu_{gn}^2 \tau} d\tau \right\} e^{-\mu_{gn}^2 \tau}, \quad (52)$$

$$\text{где } A_k(r_k, \tau) = \sigma \frac{C_{mk}}{C_{gk}} \frac{d_k}{1-d_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau}.$$

Ее конечное интегральное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\overline{A_k(\mu_{gn}, \tau)} = \sigma \frac{C_{mk}}{C_{dk}} \cdot \frac{d_k}{1-d_k} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{gk}}{a_{gk}^2} \cdot \int_{R_k}^{R_{k-1}} r_k A_k(r_k, \tau) M\left(\frac{\mu_{gn}}{a_{dk}} r_k\right) dr_k; \quad (53)$$

Тогда используя (42) получим

$$A_k(r_k, \tau) = -\sigma \cdot \frac{c_{mk}}{c_{gk}} \cdot \frac{d_k}{1-d_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{mn}^2}{c_{mn}} \cdot M\left(\frac{\mu_{mn}}{c_{mk}} r_k\right) \times \\ \times \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{mk}}{c_{mk}^2} \int_{R_k}^{R_{k-1}} r_k [q_k(r_k) - \psi_{mk}(r_k)] \cdot M\left(\frac{\mu_{mn}}{c_{mk}} r_k\right) dr_k \cdot e^{-\mu_{mn}^2 \tau}. \quad (54)$$

Так как уравнения теплопроводности на интервале **стабилизации температуры** и на интервале **остывания** решены аналитическими и численными методами, то эти результаты использованы для расчетов термоупругих напряжений и деформаций по формулам (55), (56), (59), (60).

Термоупругие напряжения, обусловленные неравномерностью распределенной температуры внутри полого цилиндра (теплоты полимеризации и теплоты энергообеспечения) определяются по следующим формулам радиальном и окружном направлениях

$$\sigma_r = \frac{E\beta}{2(1-\nu)} \cdot [\overline{U(1, F_0)} - \overline{U(\xi, F_0)}]; \quad (55)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E\beta}{2(1-\nu)} \cdot [\overline{U(1, F_0)} - \overline{U(\xi, F_0)} - 2U(\xi, F_0)], \quad (56)$$

где $\overline{U(\xi, F_0)} = \frac{2}{\xi^2} \int_0^1 U(\xi, F_0) \cdot \xi d\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, E - модуль упругости; β - коэффициент

термического расширения; ν - коэффициент Пуассона; σ_r - напряжение в радиальном направлении; σ_φ - окружное напряжение.

Используя расчеты термоупругих напряжений определяют и деформации в радиальном и окружном направлениях по формулам

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - (1+\nu)\nu\sigma_\varphi] + (1+\nu)\beta \cdot U(\xi, F_0); \quad (59)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_\varphi - (1+\nu)\nu\sigma_r] + (1+\nu)\beta \cdot U(\xi, F_0), \quad (60)$$

где вместо $U(\xi, F_0)$ вставляем значения через $\xi = \frac{r}{R}$, $F_0 = \frac{a\tau}{r^2}$.

На интервале остывания композитов, когда полимеризация уже завершена, происходит остывание готового композита от температуры стабилизации температуры до температуры окружающей среды.

Остывание начинается с поверхности пресс-формы и кондуктивно передается во внутренние слои многослойных конструкции, т. е. (просто

отключается электрообогрев и изделие самостоятельно остывает до температуры окружающей среды).

При таких предположениях постановка и решение задачи теплообмена следующая: найти решение уравнения [17]

$$\frac{\partial U(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \tau)}{\partial r} \right), R_0 \leq r \leq R, \tau > 0 \quad (61)$$

с данным начальным условием

$$U(r, 0) = f(r) \quad (62)$$

и граничными условиями

$$U(R_0, \tau) = U_1 = const; \quad (63)$$

$$U(R, \tau) = U_2 = const; \quad (64)$$

где R_0 , R являются соответственно радиусами внутренней и внешней поверхностей композита; $U(r, \tau)$ – соответствует температуре точек композита; a – температуропроводность готового композита; r – соответствует поверхностям в радиальном направлении; τ – время.

Будем искать решение в виде суммы двух функций

$$U(r, \tau) = v(r, \tau) + \psi(r) \text{ или } v(r, \tau) = U(r, \tau) - \psi(r) \quad (65)$$

$\psi(r)$ определяют из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = 0$$

с граничными условиям $\psi(R_0) = U_1$, $\psi(R) = U_2$.

Функцию $v(r, \tau)$ определяют из уравнения (66) с краевым условием

$$\frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right), R_0 \leq r \leq R, \tau > 0 \quad (66)$$

с НУ: $v(r, 0) = f(r) - \psi(r)$ (67)

и ГУ: $v(R_0, \tau) = U_1 - U_1 = 0$, $v(R, \tau) = U_2 - U_2 = 0$ (68)

Решение уравнения

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = 0$$

имеет вид

$$\psi(r) = A \ln r + B$$

Из граничных условий следует

$$A = \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R}{R_0}}, B = \frac{U_1 \ln R - U_2 \ln R_0}{\ln \frac{R}{R_0}}, \psi(r) = \frac{U_1 \ln \frac{R}{r} + U_2 \ln \frac{r}{R_0}}{\ln \frac{R}{R_0}}$$

Функция $\psi(r)$ рассматривается как распределение температуры в полом цилиндре в стационарном состоянии.

Решение задачи относительно $v(r, \tau)$ проведено методом конечного интегрального преобразования Ханкеля

$$v(r, \tau) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0(\mu_n, R) V_0(\eta_n, r)}{J_0^2(\mu_n, R_0) - J_0^2(\mu_n, R)} \times \\ \times e^{-a\mu_n^2 \tau} \left\{ \int_{R_0}^R r f(r) V_0(\eta_n, r) dr - \int_{R_0}^R r \psi(r) V_0(\mu_n, R) \right\} dr \quad (69)$$

Тогда решение исходной задачи $U(r, \tau) = v(r, \tau) + \psi(r)$ имеет вид

$$U(r, \tau) = \frac{1}{\ln \frac{R}{R_0}} \left[U_1 \ln \frac{R}{r} + U_2 \ln \frac{r}{R_0} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0(k_n, r) e^{ak_n \tau}}{I_0^2(\mu_n R_0) - I_0^2(\eta_n R)} \times \\ \times \left\{ \frac{\pi^2}{2} \mu_n^2 I_0^2(\mu_n R) \int_{R_0}^R r f(r) V_0(\mu_n r) dr - \pi I_0(\mu_n r) \cdot [U_2 I_0(\mu_n R_0) - U_1 I_0(\mu_n R)] \right\} \quad (70)$$

Собственные числа μ_n определяется из характеристического уравнения

$$I_0(\mu R) Y_0(\mu R_0) - I_0(\mu R_0) Y_0(\mu R) = 0. \quad (71)$$

$$V_0(\mu_n r) = I_0(\mu_n r) Y_0(\mu_n R_0) - I_0(\mu_n R_0) Y_0(\mu_n r) - \quad (72)$$

– ядро интегрального преобразования.

На интервале остывания композитов, до отключения системы электрообеспечения, температура тела равномерная и равна U_0 , а затем внезапно на поверхности устанавливается постоянная температура $U_c < U_0$. При таких предположениях окружные и радиальные термонапряжения определяются по формулам [135]

$$\overline{\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_\varphi (1-\nu)}{\beta E (U_0 - U_c)} \quad \text{и} \quad \overline{\sigma_r} = \frac{U(\xi, F_0) \cdot U_c}{U_0 - U_c},$$

а деформации по формулам

$$\overline{\varepsilon_r} = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \overline{\sigma_r} - (1+\nu) \nu \overline{\sigma_\varphi} \right] + (1+\nu) \beta \cdot U(\xi, F_0); \\ \overline{\varepsilon_\varphi} = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \overline{\sigma_\varphi} - (1+\nu) \nu \overline{\sigma_r} \right] + (1+\nu) \beta \cdot U(\xi, F_0),$$

где $U(\xi, F_0)$ (для $\xi = \frac{r}{R}, F_0 = \frac{a\tau}{r^2}$) определяется из формулы (52).

В третьем разделе диссертационной работы рассматриваются численные методы решения задач теплообмена, массообмена и поля деформаций методом полимеризации в пресс-формах.

Очевидно, что аналитические методы решения задач дают больше возможности оценить влияние конкретных теплофизических параметров, но применимы только для ограниченного числа задач. В то же время численные

методы позволяют решать более широкий круг задач, в том числе нелинейные, многослойные и с функциями источника.

Так как рассматриваемое тело имеет форму полого цилиндра, то для исследования построен, конечно — разностный аналог в цилиндрической системе (рис. 4).

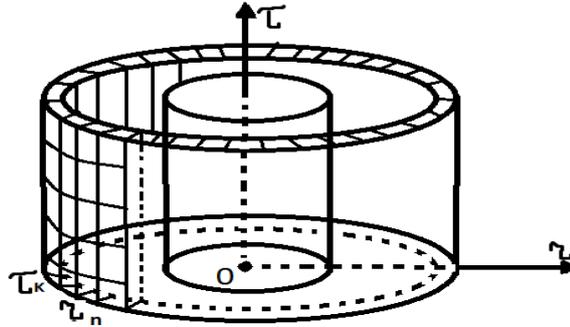


Рис. 4

$$R_0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} < r_n = R_n, \quad 0 \leq j \leq n;$$

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k = T, \quad 0 \leq i \leq k$$

Вводится сетка на промежутке $[0, T]$ с шагом $\Delta\tau = \frac{T}{k}$. На промежутке

$[R_n, R_0]$ будем использовать сетку с шагом $h = dr = \frac{R_n - R_0}{n}$.

В окрестности i -го узла производные заменяем следующими конечно-разностными аналогами:

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h) \text{ — правая аппроксимация;}$$

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + O(h) \text{ — левая аппроксимация;}$$

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + O(h^2) \text{ — центральная аппроксимация,}$$

где $O(h)$ ошибка замены производной отношением приращения (например

$$\frac{dU_i}{dr} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h}).$$

Для второй производной центральная аппроксимация имеет второй порядок точности

$$\frac{d^2U_i}{dr^2} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Для построения приближенного численного аналога уравнения

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r}$$

в цилиндрической системе координат (не теряя общности, будем считать $a^2 = 1$) сначала рассмотрим явную, а затем неявную разностную схему.

В последующем, неявную схему применим для численного решения задач, так как явная схема для устойчивости требует мелкие шаги по переменным, что удлиняет время получения решения.

Сначала воспользуемся явной разностной схемой (рис.5).

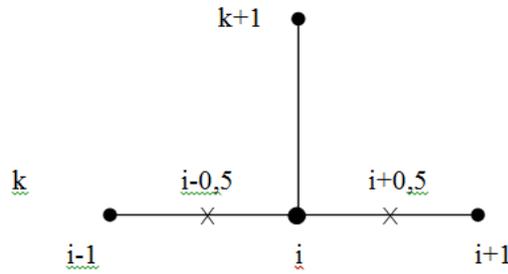


Рис.5. Явная схема

Явная форма разностной схемы для построения численного аналога рассматриваемого уравнения по всем временным слоям имеет вид

$$U_i^{k+1} - U_i^k = \frac{a^2 \Delta \tau}{r_i} \cdot \frac{r_{i+0,5} U_{i+1}^k - (r_{i+0,5} + r_{i-0,5}) U_i^k + r_{i-0,5} U_{i-1}^k}{h^2}.$$

Далее рассмотрим неявную разностную схему

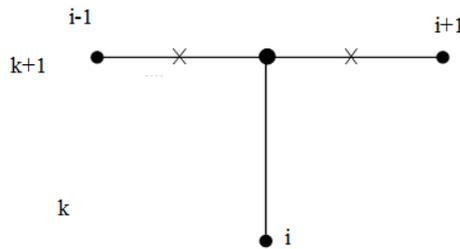


Рис.6. Неявная схема

Неявная форма разностной схемы для построения численного аналога рассматриваемого уравнения по всем временным слоям имеет вид

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta \tau} = \frac{a^2 (r_{i+1} + r_i)}{2h^2 r_i} U_{i+1}^{k+1} - \frac{a^2 (r_{i+1} + 2r_i + r_{i-1})}{2h^2 r_i} U_i^{k+1} + \frac{a^2 (r_i + r_{i-1})}{2h^2 r_i} U_{i-1}^{k+1}.$$

В последующем эти разностные неявные схемы используем для численного моделирования и решения задач, так как явная схема для устойчивости требует очень мелкие шаги.

Рассмотрим устойчивости явной и неявной схем при $r=0$. Рассмотрим исходное уравнение в форме

$$\frac{\partial U(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 U(r, \tau)}{\partial r^2} \right). \quad (73)$$

Так как по правилу Лопиталья $\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U(r, \tau)}{\partial r} \right] = U_{rr}$, то исходное уравнение

при $r=0$ имеет вид $U_\tau = 2a^2 U_{rr}$.

Получаем конечно-разностный аналог

$$\frac{U_0^{k+1} - U_0^k}{\Delta\tau} = 2a^2 \frac{U_1^k - 2U_0^k + U_{-1}^k}{h^2}.$$

Используя число Куранта $C = \frac{a^2 \Delta\tau}{h^2}$, условия симметрии $U_r|_{r=0} = 0$, которое

соответствует $\frac{U_1^{k+1} - U_{-1}^{k+1}}{2h} = 0$, т.е. $U_1^{k+1} = U_{-1}^{k+1}$, получим

$$U_0^{k+1} - U_0^k = 2C(2U_1^k - 2U_0^k) \text{ и } U_0^{k+1} = 4CU_1^k + (1-4C)U_0^k.$$

Таким образом, из полученной формулы можно вывести условие устойчивости явной схемы, так как должно быть $1-4C > 0$, то число Куранта не превышает $\frac{1}{4}$. Это позволяет подобрать наибольший допустимый шаг по времени

$\Delta\tau$ для явной схемы. Из $C_{\max} = \frac{a^2 \Delta\tau}{h^2} = \frac{1}{4}$ следует $\Delta\tau_{\max} = \frac{h^2}{4a^2}$. Тогда явная схема расчета определяется уравнениями:

$$U_0^{k+1} = 4CU_1^k + (1-4C)U_0^k, \quad (74)$$

$$U_i^{k+1} = C \frac{r_{i+0.5}}{r_i} U_{i+1}^k + (1 - C \frac{r_{i+0.5} + r_{i-0.5}}{r_i}) U_i^k + C \frac{r_{i-0.5}}{r_i} U_{i-1}^k + f_i^k \Delta\tau, \quad (75)$$

Правая часть уравнения (74) содержит две различные температуры, а (75) – три различные температуры. Число Куранта ограничивается так же физическими соображениями.

При решении задач по времени ограничение на шаг становится критичным, так как $\Delta\tau$ должна быть пропорциональна h^2 . Это может потребовать очень большое число шагов по времени.

Поэтому для решения рассматриваемой задачи целесообразнее использовать неявную схему, так как она исключает недостаток явной схемы.

Использование неявной разностной схемы к уравнению (73) дает численный приближенный аналог в виде

$$A_i U_{i-1}^{k+1} - C_i U_i^{k+1} + B_i U_{i+1}^{k+1} = U_i^k \text{ для } i=1, 2, \dots, n,$$

где

$$A_i = \frac{a^2 r_{i-0.5} \Delta\tau}{h^2 r_i}, B_i = \frac{a^2 r_{i+0.5} \Delta\tau}{h^2 r_i} \text{ и } C_i = \frac{a^2 (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \Delta\tau}{h^2 r_i} + 1 = A_i + B_i + 1.$$

Эта система может быть решена методом «прогонки».

Рассмотрим общую математическую модель численного метода решения взаимосвязанных задач тепломассообмена в многослойных цилиндрических областях. Затем, исходя из общей модели, составим частные модели и решим их численными методами.

Пусть требуется найти решение уравнений

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{gk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \cdot \frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + \sigma \frac{c_{mk}}{c_{gk}} \frac{d_k}{1-d_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} + W_k(r_k, \tau),$$

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{mk}^2 (1-d_k) \left(\frac{\partial^2 m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \cdot \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right), (k=1,2,\dots,N)$$

с начальными условиями $U_k(r_k, 0) = f(r_k), m_k(r_k, 0) = m_0, k=1,2,\dots,N$,

и граничными условиями на внешней и внутренней поверхностях соответственно

$$U_N(R_N, \tau) = g(\tau), m_N(R_N, \tau) = h(\tau) \text{ и } \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r} = 0, \frac{\partial m_1(R_0, \tau)}{\partial r} = 0. \quad (76)$$

Между слоями соблюдается идеальный контакт (условия сопряжения).

$$U_k(R_k, \tau) = U_{k+1}(R_k, \tau), \lambda_{gk} \frac{\partial U_k(R_k, \tau)}{\partial r} = \lambda_{g(k+1)} \frac{\partial U_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r}, \quad (77)$$

$$m_k(R_k, \tau) = m_{k+1}(R_k, \tau), \lambda_{mk} \frac{\partial m_k(R_k, \tau)}{\partial r} = \lambda_{m(k+1)} \frac{\partial m_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r}, \quad (78)$$

где U_k – температура слоя; m_k – масса слоя; $W_k(r_k, \tau)$ – функция источника на основе электронагрева; σ – удельная теплота фазового перехода; c_m – удельная массоемкость; λ_g – коэффициент теплопроводности; λ_m – коэффициент массопроводности; d_k – коэффициент полимеризации (указатель наличия полимеризованной зоны), a_{gk} – температуропроводность k -го слоя, a_{mk} – массопроводность k -го слоя.

Уравнения начинают учитывать теплоту фазовых переходов $\sigma \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{d_k}{1-d_k} m_k \right)$ начиная с температуры начала образования полимеризованной зоны (температура ликвидуса U_{liquid}) и продолжается до полной полимеризации связующего материала (температуры солидуса U_{solid}).

На первом интервале (до температуры U_{liquid}) система (31)-(32) решается без массообменного слагаемого ($d_k = 0$) – невзаимосвязанный тепло-массоперенос

На втором интервале появляется зона полимеризации и учет уже теплоты полимеризации связующих. Это продолжается до завершения второго интервала, и решаются задачи термоупругих напряжений и деформаций.

От U_{liquid} до U_{solid} – зоны полимеризации.

Для третьего интервала многослойная конструкция уже имеет твердую структуру. Полимеризация завершена. Поэтому решаем задачу теплообмена для однородного тела и задачи термоупругих напряжений и деформаций.

Именно к уравнениям такого вида применимы численные методы.

На первом интервале отсутствует полимеризация. Поэтому математическая модель состоит из систем уравнений теплопроводности и систем уравнений (j – обозначение номера пространственного слоя и i – обозначение узла по времени) массопроводности.

$$\frac{\partial U_j}{\partial \tau} = a_{gj}^2 \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial U_j}{\partial r_j} \right) + W_j, \quad (79)$$

$$\frac{\partial m_j}{\partial \tau} = a_{mj}^2 \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial m_j}{\partial r_j} \right) \quad (80)$$

с начальными условиями

$$U_j(r_j, 0) = f_j(r_j), j = 1, 2, \dots, N, \quad (81)$$

$$m_j(r_j, 0) = g_j(r_j), \quad (82)$$

и граничными условиями на внешних поверхностях

$$\frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} = 0, U_n(R_n, \tau) = g(r), \quad (83)$$

$$\frac{\partial m_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} = 0, m_n(R_n, \tau) = h(r), \quad (84)$$

и граничными условиями сопряжения

$$U_j(R_j, r) = U_{j+1}(R_j, r), \lambda_{gj} \frac{\partial U_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{g(j+1)} \frac{\partial U_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_j}, \quad (85)$$

$$m_j(R_j, r) = m_{j+1}(R_j, r), \lambda_{mj} \frac{\partial m_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{m(j+1)} \frac{\partial m_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_j}. \quad (86)$$

С математической точки зрения оба уравнения решаются одинаково. Рассмотрим решение только уравнения (79).

Рассмотрим шаги по переменной r , соответствующие каждому j -ому слою (n слоев). Задача сводится к трехточечному уравнению

$$A_i U_{i-1}^{k+1} - C_i U_i^{k+1} + B_i U_{i+1}^{k+1} = -F_i, \quad (87)$$

где

$$A_i = \frac{a^2 r_i - 0.5 \Delta \tau}{h^2 r_i}, B_i = \frac{a^2 r_i + 0.5 \Delta \tau}{h^2 r_i^2}, \quad (88)$$

$$C_i = A_i + B_i + 1, F_i = U_i^k + \Delta \tau \cdot W_i^k,$$

$U_i^0 = f(r_i)$. Здесь $f(r_i)$ кусочно-непрерывная функция, состоящая из $f_j(r_j)$.

Далее решение задачи проводится по формулам «прогонки».

Аналогично решается задача (80).

На втором интервале происходят взаимосвязанные процессы тепломассообмена, так как начинается процесс полимеризации. Математическая модель взаимосвязанных процессов тепломассообмена описывается следующими уравнениями.

$$\frac{\partial U_j}{\partial \tau} = a_{gj}^2 \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial U_j}{\partial r_j} \right) + \sigma \frac{c_{mi}}{c_{gi}} \frac{d_i}{1-d_i} \frac{\partial m_j}{\partial \tau} + W_j, \quad (89)$$

$$\frac{\partial m_j}{\partial \tau} = a_{mj}^2 \frac{1-d_i}{r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial m_j}{\partial r_j} \right) + W_j. \quad (90)$$

начальными и граничными условиями (81)-(86).

Уравнение массообмена решается так же как и решение для первого интервала, но изменения относятся только к коэффициентам трёхточечного уравнения

$$A_i m_{i-1}^{k+1} - C_i m_i^{k+1} + B_i m_{i+1}^{k+1} = -F_i, \quad (91)$$

где

$$A_i = \frac{a_{mj}^2 r_{i-0.5} (1-d_i) \Delta \tau}{h^2 r_i}, \quad B_i = \frac{a_{mj}^2 r_{i+0.5} (1-d_i) \Delta \tau}{h^2 r_i}, \quad C_i = A_i + B_i + 1, \quad F_i = U_i^k + \Delta \tau W_i^k.$$

Для уравнения (89) аналогичными рассуждениями приходим к разностному соотношению

$$U_i^{k+1} = U_i^k + a_{gi}^2 \Delta \tau \frac{r_{i-0.5} U_{i-1}^{k+1} - (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) U_i^{k+1} + r_{i+0.5} U_{i+1}^{k+1}}{h^2 r^2} +$$

$$+ \sigma \frac{c_{mi}}{c_{gi}} \frac{d_i}{1-d_i} (m_i^{k+1} - m_i^k) + \Delta \tau W_i^k,$$

или к трёхточечному выражению

$$A_i U_{i-1}^{k+1} - C_i U_i^{k+1} + B_i U_{i+1}^{k+1} = -F_i, \quad (92)$$

где

$$A_i = \frac{a_{gj}^2 r_{i-0.5} \Delta \tau}{h^2 r_i}, \quad B_i = \frac{a_{gj}^2 r_{i+0.5} \Delta \tau}{h^2 r_i}, \quad C_i = A_i + B_i + 1, \quad (93)$$

$$F_i = U_i^k + \sigma \frac{C_{mi}}{C_{gi}} \frac{d_i}{1-d_i} (m_i^{k+1} - m_i^k) + \Delta \tau W_i^k$$

Здесь $U_i^0 = f(r_i)$ – кусочная функция, состоящая из $f_j(r_j)$, (j – пространственный индекс, i – по времени).

Далее применяется метод «прогонки».

На втором интервале окружная и радиальная термоупругие напряжения, обусловленные неравномерностью распределения температуры внутри полого цилиндра за счет теплоты полимеризации и теплоты электрообеспечения, определяются по формулам [135].

$$\sigma_r(\xi) = \frac{E\beta}{2(1-\nu)} [\overline{U(1, F_0)} - \overline{U(\xi, F_0)}], \quad \sigma_\varphi(\xi) = \frac{E\beta}{2(1-\nu)} [\overline{U(1, F_0)} + \overline{U(\xi, F_0)} - 2U(\xi, F_0)],$$

где $\overline{U(\xi, F_0)} = \frac{2}{\xi^2} \int_0^1 U(\xi, F_0) \cdot \xi d\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, ν – коэффициент Пуассона, β – коэффициент термического расширения, E – модуль Юнга.

Так как численные значения $U(r_i, \tau_i)$ найдены, то используя их найдем значения термоупругих напряжений σ_r , σ_φ и радиальные и окружные деформации по формулам численными методами (при $\xi = \frac{r}{R_N}$, $F_0 = \frac{a\tau}{R_N^2}$).

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - (1+\nu)\nu\sigma_\varphi] + (1+\nu)\beta \cdot U(\xi, F_0);$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_\varphi - (1+\nu)\nu\sigma_r] + (1+\nu)\beta \cdot U(\xi, F_0).$$

На третьем интервале, когда все нагревательные элементы отключены, теплота полимеризации отсутствует, математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$\frac{\partial U(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \tau)}{\partial r} \right)$$

с краевыми условиями

$$U(r, 0) = f(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1,$$

$$\frac{\partial U(R_0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad U(R_1, \tau) = \psi_1(\tau).$$

Соответствующая конечно-разностная модель для произведенного разбиения $i=1, 2, \dots, k$ имеет вид:

$$A_i U_{i-1}^{k+1} - C_i U_i^{k+1} + B_i U_{i+1}^{k+1} = -F_i,$$

где

$$A_i = \frac{a^2 r_{i-0.5} \Delta \tau}{h^2 r_i}, \quad B_i = \frac{a^2 r_{i+0.5} \Delta \tau}{h^2 r_i},$$

$$C_i = A_i + B_i + 1, \quad F_i = U_i^k, \quad U_i^0 = f(r_i).$$

Решение получаем методом «прогонки».

На третьем интервале, когда процесс полимеризации завершен и отключается электрообеспечение, внезапно на поверхности изделия устанавливается постоянная температура среды $U_c \neq U_0$, ($U_0 = 165^\circ\text{C}$), радиальная и окружная напряжения определяются по формулам [135].

$$\bar{\sigma}_r = \frac{U(\xi, F_0) \cdot U_c}{U_0 - U_c} \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi(1-\nu)}{\beta E(U_0 - U_c)},$$

где U_0 – температура полимеризации (165°C), U_c – температура среды.

Так как значения $U(r_i, \tau_i)$ найдены, то аналогично находим термоупругие напряжения $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ и деформации по формулам численными методами

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \bar{\sigma}_r - (1+\nu) \nu \bar{\sigma}_\varphi \right] + (1+\nu) \beta \cdot U(\xi, F_0);$$

$$\bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \bar{\sigma}_\varphi - (1+\nu) \nu \bar{\sigma}_r \right] + (1+\nu) \beta \cdot U(\xi, F_0),$$

В четвертом разделе диссертационной работы приведены результаты механических показателей композитов, которые изготовлены при различных температурных режимах. Определены их механические показатели в зависимости от различных температурных условий, в частности, в зависимости от скорости нагрева и охлаждения. На рис. 8 приведены предел прочности композита на сдвиг при скорости изменения температуры нагрева и охлаждения 1 до 5 $^\circ\text{C}/\text{мин}$.

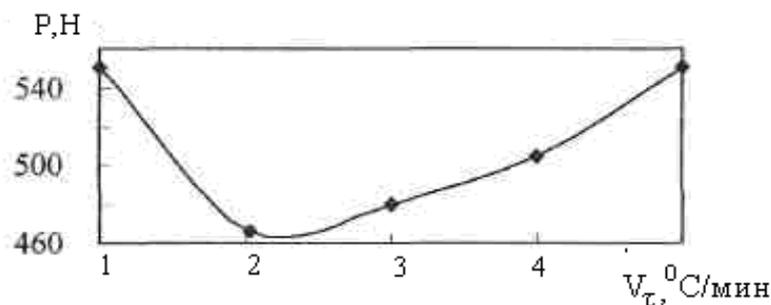


Рис.8.

Разделы 4.2.3 и 4.2.4 содержат исследования на модуль упругости, на предел прочности, на кручение в зависимости от содержания наполнителя.

Разделы 4.2.1-4.2.4 содержат результаты, механических испытаний более 40 образцов. В результате статистической обработки механических испытаний на сдвиг, на крутку вычислены интенсивности отказов λ , вероятность безотказной

работы (надежность): $P(\tau)=1-F(\tau)=\exp(-\lambda\tau)$ за период времени, где τ - время или суммарная наработка до отказа, $F(\tau)$ – интегральная функция наработки до отказа, λ -(интенсивность отказов) определяет условную плотность вероятности времени до отказа при условии, что конструкция не отказала до момента времени τ .

Рис. 9 изображает зависимость вероятности безотказной работы от скорости нагрева и охлаждения.

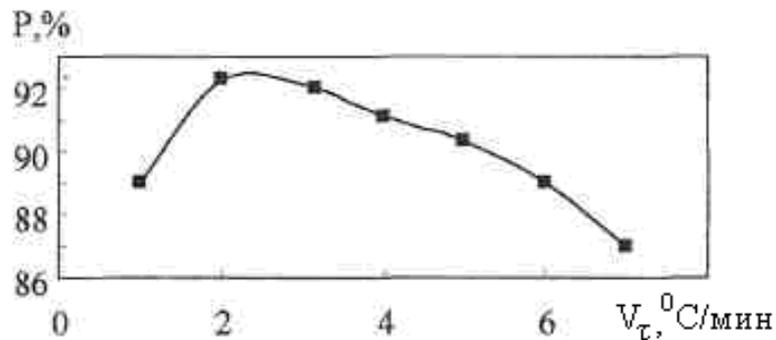


Рис.9.

Из рис 8,9 следует, что предел прочности и вероятность безотказной работы имеет наибольшее значение при скорости нагрева и охлаждения около $2^\circ\text{C}/\text{мин}$.

Таблица 2 указывает зависимость механических показателей от видов испытаний.

Таблица 2.

Вид испытания	Интенсивность отказов, 10^6-час^{-1}	Вероятность безотказной работы, %
Межслоевой сдвиг	33	90.4
Крутка	45.7	86.9

Из таблицы видно, что вероятность безотказной работы существенно меньше 100%. Поэтому следует существенно увеличивать вероятность безотказной работы.

Приведены результаты исследования влияния удельного давления на механические свойства стеклопластика, остаточных напряжений в композитах от скорости охлаждения, остаточных напряжений от применяемого типа связующей.

В пятом разделе приведено моделирование процесса полимеризации с использованием экспериментальных данных. Описана методика снятия температурных характеристик прессования. Приведены принципы работы экспериментальной установки для исследования процессов тепломассопереноса. Снятие характеристик прессования композитов проводится с целью выявления влияния на качество получаемых композитов, температурного режима и внешних воздействий.

Разработан регулятор температуры полимеризации для аналитических исследований в пресс-формах. Это устройство даст возможность осуществлять режим равномерного повышения температуры со скоростью около $2^\circ\text{C}/\text{мин}$ в

пресс-формах (до 165°C), удерживать эту температуру до полной полимеризации с последующим плавным охлаждением (со скоростью не выше $3^{\circ}\text{C}/\text{мин}$) до температуры среды. Это дает возможность значительно снизить напряженно-деформированное состояние композитов и улучшить надежность их в эксплуатации. Схема работы системы показана на рис. 10.

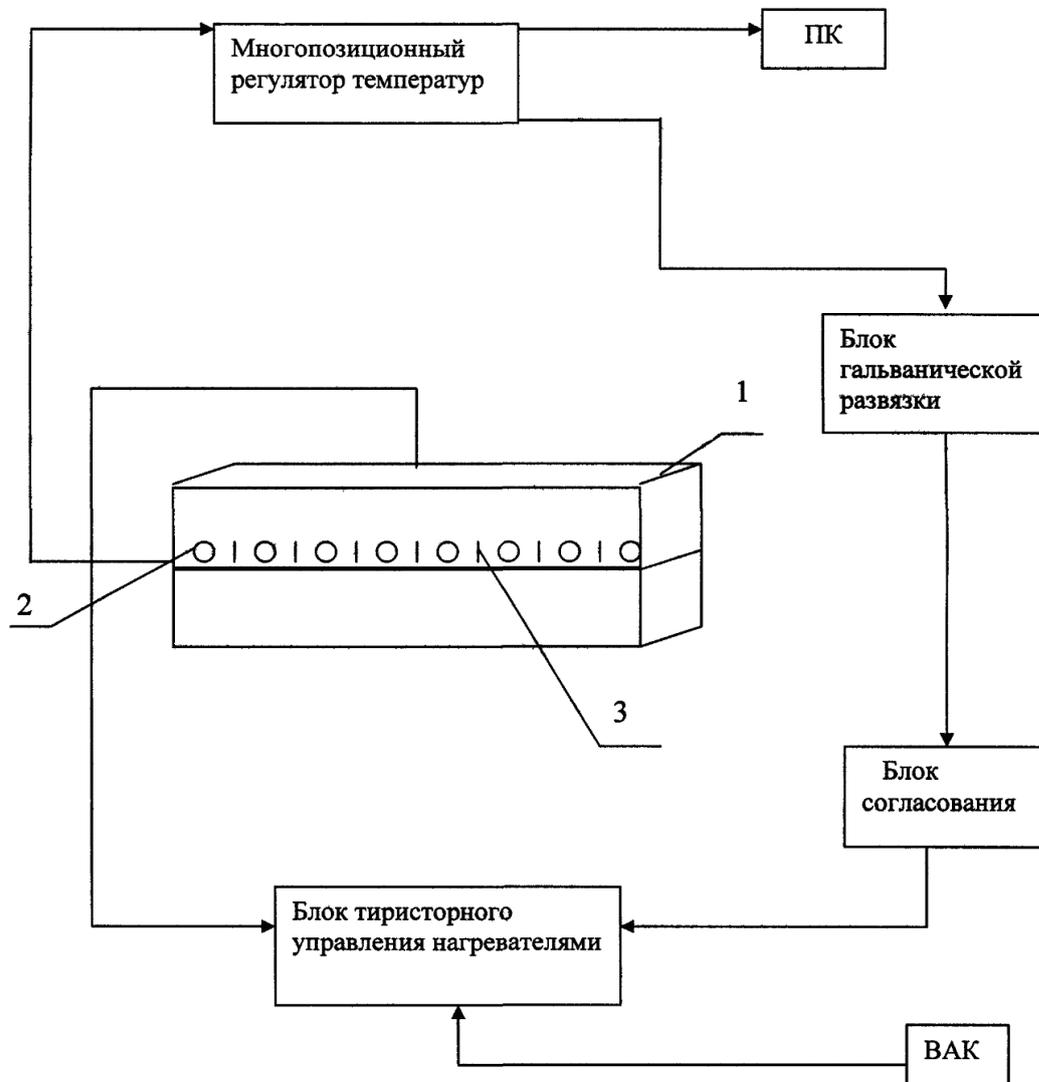


Рис.10. Схема работы системы контроля полимеризацией в пресс-формах:
1- пресс-форма, 2- термопары, 3 – нагревательные элементы

Рекомендации по совершенствованию изготовления композитов

1. В результате многочисленных экспериментальных исследований установлены, что скорости изменения температуры в определенных интервалах времени следующие:

- от начальной температуры до $93-96^{\circ}\text{C}$ со скоростью $0,8-1,2^{\circ}\text{C}/\text{мин}$;
- от температуры $93-96^{\circ}\text{C}$ до температуры $160\pm 2^{\circ}\text{C}$ со скоростью $1,8-2,2^{\circ}\text{C}/\text{мин}$;
- при температуре $160\pm 2^{\circ}\text{C}$ (период интенсивной полимеризации) следует выдерживать время 6 часов без изменения температуры;
- от температуры полимеризации $160\pm 2^{\circ}\text{C}$ до 60°C остывание со скоростью не более $2-3^{\circ}\text{C}/\text{мин}$;
- далее допускается понижение температуры обдувом со скоростью не более $1^{\circ}\text{C}/\text{мин}$.

Установлено, что при таком способе изготовления композитов, их механические свойства наилучшие.

2. Экспериментальными исследованиями установлено, что «интенсивность отказов», в первую очередь, связаны со следующими источниками процесса деградации (ИПД):

- удлинение изделия по длине;
- сдвиг слоев;
- нарушение саблевидности;

Снижение вероятностей появления этих ИПД существенно улучшит прочностные характеристики композита.

3. Исследования показали, что эксплуатационные характеристики композитов значительно улучшатся, если устранить следующие типы остаточных напряжений и деформаций:

- технологические остаточные напряжения и деформации в многослойных конструкциях из композитов;
- устранение остаточных термонапряжений при остывании композита;
- деформации, связанные с химической, физической и температурными усадками.

4. Установлен характер изменения во времени: интенсивность деформации – $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$, технологического напряжения – σ_r, σ_ϕ , среднего напряжения – $\sigma_{\text{ср}}$ и относительного изменения объема θ композиционного материала (если принять время $T=1$):

- до $T=0,17$ времени значения ε, σ – возрастают;
- $T \in (0,17-0,5)$ – незначительно увеличивается деформация ε, σ – сдвиговые напряжения релаксируются;
- $T \in (0,17-0,5)$ – пока разность между реализуемой температурой и равновесной уменьшается, то и ε, σ также уменьшаются;
- при дальнейшем охлаждении ε, σ – возрастают.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Аналитически и экспериментально проведены исследования на пространственно-временное распределение температуры в многослойных композиционных конструкциях. Установлено, что нелинейно распространяется температура в многослойных конструкциях по толщине с течением времени и прочностные характеристики композитов связаны с температурными процессами.

2. Составлены математические модели задач теплообмена, массообмена, термоупругих напряжений, деформаций и приведены их аналитические решения для всех трех интервалах полимеризации.

3. Приведены численные методы решения задач теплообмена, массообмена, термоупругих напряжений, деформаций методом конечных разностей.

4. Экспериментально проведены испытания на межслоевой сдвиг, на растяжение, на крутку композитов, изготавливаемых методом полимеризации. Установлены модуль упругости, пределы текучести и прочности в зависимости от температурных воздействий на пресс-форму. На основе результатов статистической обработки экспериментальных данных установлено, что на интервале возрастания температуры скорость не должна превышать $(1.5-2) \frac{^{\circ}C}{мин}$; аналогично определено, что на интервале остывания скорость не должна превышать $3 \frac{^{\circ}C}{мин}$; тогда вероятность безотказной работы композита наибольшая.

5. Для обеспечения требуемого температурного режима в пресс-формах следует контролировать выделяемую теплоту полимеризации, давление в технологическом мешке и время температурных воздействий.

6. Разработан многопозиционный регулятор температуры для аналитического исследования многослойных композиционных конструкций, обеспечивающий контроль температурного режима, что значительно снизит напряженно-деформированное состояние композитов.

7. Разработаны рекомендации по улучшению механических характеристик многослойных композиционных конструкций.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертационных исследований:

1. *Акимов А.И.* Асимптотика решения модельной задачи теплопроводности с простейшей подвижной границей и внешней нелинейностью типа Стефана-Больцмана / Козлов В.Н., Аносов А.А., Акимов А.И., Гузаиров Г.М. // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки, №2. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южный федеральный университет, 2009. С. 37-41.
2. *Акимов А.И.* Исследования на растяжения композиционных материалов в зависимости от температурного режима их изготовления / Фатыхов М.А., Акимов А.И. // Инженерная физика, №1.–Москва: Изд-во «Научтехлитиздат», 2009. С. 23-24.
3. *Акимов А.И.* Зависимость механических свойств композиционных материалов от температурного режима полимеризации / Козлов В.Н., Акимов А.И., Фатыхов М.А. // Известия вузов. Северокавказский регион. Технические науки, №1. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южный федеральный университет, 2009. С. 83-89.
4. *Акимов А.И.* Решение сопряженной задачи тепломассообмена методом интегральных преобразований / Акимов А.И., Саратов С.А., Аносов А.А., Трофимов П.А. // Инженерная физика, №4.–Москва: Изд-во «Научтехлитиздат», 2009. С. 7-8.
5. *Акимов А.И.* Аналитическое решение задачи тепломассопереноса в двухслойной среде для моделирования начального процесса нагрева композиционных материалов / Козлов В.Н., Фатыхов М.А., Акимов А.И. // Известия высших учебных заведений. Северокавказский регион. Естественные науки.-№4.- Ростов-на-Дону: Изд-во Южный федеральный университет, 2009. С. 48-50.
6. *Акимов А.И.* Обратное преобразование Ханкеля для смешанной краевой задачи на конечном интервале / Козлов В.Н., Трофимов П.А., Акимов А.И.// научно-технические ведомости СПбГПУ, №1(116) /2011. с. (71-77).
7. *Акимов А.И.* Моделирование процессов нагрева промышленной установки, применяемой при изготовлении лонжеронов / Козлов В.Н., Трофимов П.А., Акимов А.И. // научно – технические ведомости СПбГПУ, №3 (129) / 2011. с. 57-60.
8. *Акимов А.И.* Расчет температурного поля цилиндрического тела на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Бесселя // Трофимов П.А., Акимов А.И. // Вестник ОГУ. №17, 2011. с.366-368.
9. *Акимов А.И.* Уточнение уравнения граничных многообразий в общей задаче трех тел / Рахимов Ф.С., Акимов И.А., Акимов А.И. // Вестник УГАГУ, №2 (18)/ 2006. с.158-161.
10. *Акимов А.И.* Матричный метод решения комплексированных задач теплообмена, массообмена и термонапряжений в многослойных конструкциях с

фазовыми переходами // Научно-технический вестник Поволжья №3, 2013.- с.60-64.

11. *Акимов А.И.* Исследование теплопередачи на втором этапе производства композиционных материалов методом полимеризации в установках автоматического ведения технологического процесса / Акимов А.И., Акимов И.А., Каракулина Е.О. // Научно-технический вестник Поволжья №1, 2015.- с.31-39.

12. *Акимов А.И.* Исследование теплопередачи в многослойных цилиндрических изделиях на первом этапе производства композиционных материалов / Акимов А.И., Акимов И.А., Каракулина Е.О. // Научно-технический вестник Поволжья №2, 2015.- с.68-73.

13. *Акимов А.И.* Исследование массопереноса на втором этапе производства композиционных материалов методом полимеризации в установках автоматического ведения технологического процесса / Акимов А.И., Акимов И.А., Жумагазеев Т.И. // Научно-технический вестник Поволжья №2, 2015.- с.63-68.

14. *Акимов А.И.* Исследование и разработка математической модели на первом этапе производства некоторых типов композиционных материалов в установках Шольца / Акимов А.И., Акимов И.А., Каракулина Е.О. // Научно-технический вестник Поволжья №1, 2016.- с.63-68.

15. *Акимов А.И.* Исследование и разработка математической модели на втором этапе производства некоторых типов композиционных материалов в установках Шольца / Акимов А.И., Акимов И.А., Каракулина Е.О. // Научно-технический вестник Поволжья №2, 2016.- с.68-73.

16. *Акимов А.И.* Последовательность квадратурных формул на конкретных функциях. / Акимов А.И., Козлов В.Н., Медведева М.М. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – №6 -Ростов-на-дону: Изд-во Южный федеральный университет, 2007.С.11-12.

17. *Акимов А.И.* Задача об охлаждении полого многослойного цилиндрического тела из композиционных материалов от температуры полимеризации до температуры среды // Н-Т вестник Поволжья, №5, 2015.-с.108-111.

18. *Акимов А.И.* Задача об охлаждении сплошного многослойного цилиндра из композиционных материалов в установках автоматического ведения технологического процесса // Н-Т вестник Поволжья.-Казань.: Изд-во Н-Т вестник Поволжья, 2014.-№5-с.91-93.

19. *Акимов А.И.* Численная реализация алгоритма, основанного на методе тепловых потенциалов, применительно к сингулярно возмущенным задачам теплопроводности. / Акимов А. И, Аносов А.А., Гузаиров Г.М., Ракитянский А.С. // Инженерная физика. -Москва: Изд-во «Научтехлитиздат», №9 -2009г.-С.6-8.

20. *Акимов А.И.* Аналитическое решение задачи тепломассопереноса в двухслойной среде для моделирования начального нагрева композиционных материалов / Козлов В.Н., ФатыховМ.А., Акимов А.И. // Инженерная физика. Москва: Изд-во «Научтехлитиздат», №5-2009. – с.6-9.

21. *Акимов А.И.* Аналитическое решение одной задачи теплопроводности при объемном нагреве насыщенной пористой среды. / Акимов А.И., Козлов В.Н., Фатыхов М.А. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – №5 -Ростов-на-Дону: Изд-во Южный федеральный университет, -2009.- С.46-49.

22. Акимов А.И. Исследование и разработка математической модели на первом этапе производства некоторых типов композиционных материалов в установках Шольца / Акимов И.А., Акимов А.И., Каракулина Е.О. // Научно-технический вестник Поволжья, №1, 2016. – С. 54-57.

23. Акимов А.И. Исследования термонапряжений и деформаций при фронтальном отверждении осесимметричных полых изделий цилиндрической формы // Научно-технический вестник Поволжья, №2, 2017. – С. 59-62.

24. Акимов А.И. Моделирование термонапряжений при фронтальном отверждении полых осесимметричных цилиндрических изделий / Акимов А.И., Козлов В.Н. // Научно-технический вестник Поволжья, №2, 2017. – С. 68-70.

25. Акимов А.И. Исследование и разработка математических моделей и термоупругих напряжений и деформаций в производстве многослойных конструкций сферической формы методом полимеризации / Акимов А.И., Акимов И.А., Фазлутдинова Т.Е. // Научно-технический вестник Поволжья, №2, 2018. – С. 91-93.

26. Акимов А.И. Исследование и разработка математических моделей термоупругих напряжений и деформаций в производстве многослойных конструкций в форме бесконечной пластины методом полимеризации/ Акимов А.И., Акимов И.А., Сиделов Д.И. // Научно-технический вестник Поволжья, №4, 2018. – С. 54-57.

27. Акимов А.И. Исследование и разработка математических моделей, расчетных формул теплообмена на третьем этапе производства многослойных конструкций сферической формы методом полимеризации / Акимов А.И., Акимов И.А., Урбан В.А. // Научно-технический вестник Поволжья, №5, 2017. – С. 157-160.

28. Акимов А.И. Исследование и разработка математических моделей, расчетных формул теплообмена на втором этапе производства многослойных конструкций сферической формы методом полимеризации / Акимов А.И., Урбан В.А. // Научно-технический вестник Поволжья, №7, 2017. – С. 78-80.

Монографии:

29. Акимов А.И. Методология проектирования и автоматизации теплофизических процессов. / Тюков Н.И., Акимов И.А., Акимов А.И. // Монография. – Уфа: Изд-во РИЦБашгосуниверситета, 2001.С.1-144.

30. Акимов А.И. Теоретические и экспериментальные исследования теплофизических процессов изготовления изделий из композиционных материалов./ Тюков Н.И., Акимов И.А., Акимов А.И. // Монография. – Уфа: Изд-во РИЦБашгосуниверситета, 2003.С.1-216.

31. *Акимов А.И.* Моделирование влияние температурных режимов полимеризации на механические свойства композиционных материалов / Монография.- Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2012. 1-131с.

32. *Акимов А.И.* Математическое моделирование / Акимов А.И., Акимов И.А., Шадрин В.Ю., Суербаев А.Х.// Монография. – Уфа: Изд-во РИЦ Баш ГУ, 2010. 1– 331с.

33. *Акимов А.И.* Математические модели в учебном процессе./ Акимов А.И., Акимов И.А, Ракитянский А.С., Сиделов Д.И., Суербаев А.Х., Шадрин Ю.Ю.// Монография. – Уфа: Изд-во РИЦ БАШ ГУ, 2010.1-325с.

34. *Акимов А.И.* Граничные многообразия в задаче трех тел / Рахимов Ф.С., Акимов А.И, Акимов И.А., // Монография. – Уфа: Изд-во «Гилем», 2004.1-131с.

Работы, опубликованные автором в перечне ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в наукометрической базе Scopus

35. *Akimov A.I.* Experimental investigation of heat and mass exchange in an installation for the automated technological process of composite material polymerization / Akimov A.I., Akimov I.A., Fatykhov M.A. // Электронная обработка материалов, №5 , 2003. – С. 38-41.

36. *Akimov A.I.* An analysis of the polymerization process in multi-layer structures made of composite materials in an electric field using the technique of the similarity theory/ Akimov A.I., Akimov I.A., Fatykhov M.A. // Электронная обработка материалов, №4 , 2003. – С. 47-51.

37. *Akimov A.I.* Elongation test of composition materials produced by the method of polymerization at electroheating / Akimov A.I., Akimov I.A., Fatykhov M.A. // Электронная обработка материалов, №3 , 2003. – С. 87-92.

38. *Akimov A.I.* Mathematical models of thermalphysic processes in the production of multilayer composites by the polymerization method / Akimov A.I., Tugov B.B. // International review of automatic control. -2017. -Том № 10, №5. - С. 426-432.

39. *Akimov A.I.* Mathematical models of thermalphysic processes in the production of multilayer composites by the polymerization method / Akimov A.I., Tugov B.B., Akimov I.A., Karakulina E.O. // International review of automatic control. -2018. -Том № 11, №2. -С. 59-66.

Акимов Алексей Иванович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
КАЧЕСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**