ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

На правах рукописи

Куликов Егор Константинович

Некоторые модели аппроксимации минимальными сплайнами

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург
2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: **Макаров Антон Александрович,**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Бригаднов Игорь Альбертович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и вычислительной техники, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет»
Леонтьев Виктор Леонтьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор Высшей школы передовых цифровых технологий, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Ведущая организация: Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится «1» марта 2023 года в 16:00 на заседании диссертационного совета У.1.2.2.03 федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, 2 учебный корпус, аудитория 265).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте www.spbstu.ru федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Автореферат разослан «   » ______________ 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета У.1.2.2.03, кандидат технических наук — Н. И. Зайцева

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Сплайны широко применяются при решении задач, связанных с методами восстановления сигналов по дискретным данным; задач геометрического моделирования, связанных с компьютерной графикой или разработкой систем автоматизированного проектирования, требующих специального аппарата построения гладких кривых и поверхностей; задач изогеометрического анализа и др. Поэтому развитие теории сплайн-функций является актуальной задачей современной вычислительной математики, а также имеет существенное прикладное значение.

В классической теории сплайнов исходным моментом является решение какой–либо задачи интерполяции в классе функций с определенной гладкостью в узлах рассматриваемой сетки. В связи с появлением теории метода конечных элементов получило развитие и другое направление теории сплайн-функций, которое опирается на аппроксимационные свойства получаемых сплайнов, где определение базисных функций связано с решением *аппроксимационных соотношений*, введенных С. Г. Михлиным и Ю. К. Демьяновичем. Построенные таким образом функции называются *минимальными сплайнами*.

Задачи практического характера, как правило, предполагают использование сплайнов невысоких порядков, ввиду того, что при повышении порядка увеличивается длина носителя сплайн-функции и, как следствие, эффект локальности ослабевает. В данной работе рассматриваются квадратичные минимальные сплайны (максимальной гладкости). Несмотря на то, что такие сплайны уже довольно хорошо изучены, остается ряд весьма важных для дальнейшего развития общей теории вопросов. Например, почти не были исследованы свойства таких сплайнов на сетках с кратными узлами.

Задача сплайн-аппроксимации требует не только построить сами сплайн-функции и установить их свойства, но и определить коэффициенты при этих функциях. В последние десятилетия активное развитие получили *локальные методы*, в которых коэффициенты при базисных функциях определяются как значения некоторых аппроксимационных функционалов. Локальные схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, называют *квазиинтерполяцией*, при их построении используются квазиинтерполяционные функционалы.

В классической теории сплайнов для решения задачи интерполяции параболическими сплайнами распространены два подхода: по Субботину и по Марсдену. Ю. Н. Субботин предложил узлы сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции, а М. Марсден стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна. При квазиинтерполяции А. И. Гребенников аналогично Ю. Н. Субботину построил усредняющие локальные схемы, выбирая узлы сплайна посередине между заданными дискретными значениями функции, а позже П. Саблонир аналогично М. Марсдену стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки для квазиинтерполяции выбирал посередине между узлами сплайна. Отметим, что эти схемы являются частными случаями построенных в данной работе схем при выборе полиномиальной порождающей вектор-функции для построения минимальных сплайнов. Вообще говоря, можно рассматривать и смешанную конструкцию упомянутых выше подходов — n-точечную квазиинтерполяцию. Вопрос о явном виде аппроксимационных функционалов для квадратичных минимальных сплайнов в таких схемах ранее не рассматривался.

Методы, основанные на квазиинтерполяции, оказываются удобным механизмом решения многих прикладных задач. Они неоднократно применялись при построении алгоритмов приближения решений интегральных уравнений. В частности, было показано, что замена решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода линейной комбинацией B-сплайнов, коэффициенты при которых вычисляются с помощью квазиинтерполяции функций, входящих в уравнение, позволяет получать достаточно точные приближения к решению при использовании целого ряда подходов (например, метод Галеркина, метод Канторовича, метод итераций Слоана, метод Кулкарни, метод вейвлет-Галеркина и др.). Однако в упомянутых подходах в качестве базисных функций использовались полиномиальные B-сплайны, что оставляет открытым вопрос о возможности получения более точных и более устойчивых приближений на основе минимальных сплайнов, порожденных неполиномиальными вектор-функциями. Также не был исследован вопрос о возможности применения аналогичных подходов к аппроксимации (в том числе, в сочетании с другими методами) для построения приближенных решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода, представляющих из себя некорректно поставленную вычислительную задачу и требующих проводить регуляризацию Тихонова в процессе решения.

Кроме того, некоторые физические процессы моделируются на основе решений сингулярно возмущенных краевых задач, имеющих большие градиенты в области пограничного слоя, ввиду чего в некоторых ситуациях классические разностные схемы не обладают свойством сходимости. Поэтому активно исследуются методы, основанные на использовании сеток, сгущающихся в пограничном слое. Однако неисследованным остается вопрос о возможности построения качественных аппроксимаций в пограничном слое, основанных на минимальных сплайнах, которые допустимо строить, в том числе, и на неравномерных сетках Шишкина.

Известно, что с помощью полиномиальных B-сплайнов нередко затруднительно получить точные представления трансцендентных кривых. Поэтому в системах автоматизированного проектирования подобные B-сплайнам функции (например, $NURBS$-кривые) рассматриваются также над пространствами, линейная оболочка которых содержит неполиномиальные функции. Возникает вопрос о возможности применения минимальных сплайнов, порожденных тригонометрическими и гиперболическими функциями, для приближения трансцендентных кривых и их использования в задачах изогеометрического анализа.

Цели и задачи работы

Целью данной работы является построение новых моделей сплайн-аппроксимации, основанных на использовании квадратичных минимальных сплайнов в качестве базисных функций, коэффициенты при которых вычисляются как значения аппроксимационных функционалов в некоторых точках.

Для достижения целей исследования были сформулированы следующие **задачи**:

1. Получить явные формулы квадратичных минимальных сплайнов (максимальной гладкости), использующие только значения компонент порождающей вектор-функции в точках расчетной сетки (в том числе с кратными узлами), удобные для проведения вычислений в практических задачах. Установить важные с практической точки зрения свойства таких сплайнов (интервалы знакопостоянства, положительность, характер выпуклости) для некоторых порождающих вектор-функций.

2. Разработать методы построения аппроксимационных функционалов для упомянутых сплайнов, получив явные формулы их представления.

3. Разработать комплекс программ для проведения численных экспериментов по применению предложенных моделей аппроксимации в практических приложениях.

4. Провести численные эксперименты, демонстрирующие возможность применения указанных аппроксимационных схем в прикладных задачах: для уточнения методов решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода и интегрального уравнения Фредгольма второго рода, при аппроксимации решений сингулярно возмущенных краевых задач в пограничном слое, для приближения трансцендентных кривых.

Научная новизна

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер, а также представляет практический интерес. Полученные результаты могут быть применены для разработки высокоэффективных алгоритмов решения различных прикладных задач, основанных на интерполяции и аппроксимации функций, решении ряда задач математической физики и задач геометрического моделирования, а также при построении параллельных форм упомянутых алгоритмов.

Методология и методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры, теории функций вещественного переменного, элементы функционального анализа, методы вычислительной математики. Для построения минимальных сплайнов применен метод аппроксимационных соотношений. Построение численных методов решения сингулярно возмущенных краевых задач основано на методах адаптации расчетных сеток. При построении численных методов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода использован метод регуляризации Тихонова. При проектировании и разработке комплекса программ применялись принципы структурного и объектно-ориентированного программирования, а также техника символьных вычислений.

Положения, выносимые на защиту

1. Получены формулы построения квадратичных минимальных сплайнов (максимальной гладкости), явно зависящие только от компонент порождающей вектор-функции, на сетках с кратными узлами. Приведены примеры построения таких сплайнов и исследованы их свойства.

2. Построены явные представления аппроксимационных функционалов различных типов для упомянутых сплайнов. Показано, что при использовании полиномиальной порождающей вектор-функции построенные функционалы совпадают с известными квазиинтерполяционными функционалами для B-сплайнов.

3. Предложен уточненный метод сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, основанный на одном из рассматриваемых подходов к аппроксимации квадратичными минимальными сплайнами. Предложен численный метод решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, основанный на регуляризации этого уравнения и его приведении к уравнению второго рода, которое впоследствии решается уточненным методом сплайн-коллокаций.

4. Предложен численный метод аппроксимации функций с большими градиентами в пограничном слое, основанный на приближении квадратичными минимальными сплайнами на кусочно-равномерной сетке Шишкина.

5. Разработан комплекс программ, позволяющий строить приближения функций в соответствии с предложенными моделями аппроксимации, а также реализующий алгоритмы предложенных численных методов. Приведены результаты численных экспериментов, которые были проведены с помощью разработанного программного комплекса.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Теоретические результаты подтверждаются результатами проведенных численных экспериментов.

Основные результаты были доложены на конференциях: «International Conference in Approximation Theory», Georgia Southern University, USA (2017); «International workshop on Wavelets, Frames and Applications III», University of Delhi, India (2017); «12th International On-Line Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS)» (2020); «Analytical and Numerical Methods in Differential Equations: a virtual conference on occasion of the 100th birthday of Academician Nikolai N. Yanenko», Suranaree University of Technology, Thailand (2021); «Десятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям», Томский государственный университет, Россия (2021); «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations», Российский университет дружбы народов, Россия (2022).

Результаты работы также докладывались на семинаре кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета СПбГУ (рук. проф. Ю. К. Демьянович), а также на семинаре по вычислительной математике Санкт-Петербургского государственного политехнического университета им. Петра Великого (рук. доц. М. Е. Фролов).

Основные результаты работы изложены в восьми статьях [1–8] в журналах, которые входят в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК. Все перечисленные работы, кроме [8], были проиндексированы в базе данных Scopus.

В совместных работах А. А. Макарову принадлежит общая постановка задач, верификация полученных результатов и указание возможных приложений, а также участие в постановке некоторых численных экспериментов.

Также было получено два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [9, 10], реализующих разработанные в рамках диссертационного исследования численные методы и использовавшихся для проведения численных экспериментов.

Проводимые в рамках данной работы исследования были поддержаны грантом РФФИ «Аспиранты» («О сплайн-аппроксимации в задачах изогеометрического анализа», проект № 20-31-90095), а также грантом Президента РФ («Разработка методов фильтрации и обеспечения целостности цифровых потоков данных большого объема», проект № МД-2242.2019.9). Руководителем грантов в обоих случаях являлся А. А. Макаров, автор диссертационной работы участвовал в них в качестве соисполнителя.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, библиографии и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 85 страниц. Библиография содержит 82 наименования, в число которых включены 8 статей автора по теме диссертации. Также в приложениях к диссертации приводятся сведения о двух полученных свидетельствах о регистрации программ для ЭВМ, созданных в процессе проведения диссертационного исследования. Теоремы, определения и замечания в работе имеют сквозную нумерацию.

Содержание работы

Введение

Во введении диссертационной работы обосновывается актуальность исследования, формулируются цели и задачи, аргументируется научная новизна результатов исследования, обосновывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводятся сведения об апробации результатов. Кроме того, приводятся формулировки основных положений, выносимых на защиту.

Основные обозначения и некоторые утверждения

Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ (в указанном порядке) обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ обозначает ее определитель. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются целыми числами. Для любого $S \in \mathbb{Z}_+$ положим $C^S[a,b] := \{u \mid u^{(i)} \in C[a,b] \;\forall\, i = 0, 1, \ldots, S\}$; $C^0[a,b] := C[a,b]$. Пространство кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода на отрезке $[a,b]$ обозначим через $C^{-1}[a,b]$, при этом будем считать, что каждая функция этого пространства непрерывна слева.

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}$, $i, k \in \mathbb{Z}$, $i < k$, и на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X со свойством *локальной квазиравномерности*:

$$X:\; x_{-2} < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1} < x_{n+2}, \tag{1}$$

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0, \quad K_0 \geqslant 1,\; K_0 \in \mathbb{R}^1, j \in J_{-2,n+2}.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов.* Цепочка $\mathbf{A}$ *полная*, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0,n-1}$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве $M := \cup_{j \in J_{0,n-1}}(x_j, x_{j+1})$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a,b]$ и ненулевым вронскианом $W(t)$. Пусть $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов.

Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^{k} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv\ & \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\, \forall\, k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv\ & 0 \qquad\ \forall\, t \in M\backslash[x_j, x_{j+3}],\, \forall\, j \in J_{-2,n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$, $\forall\, k \in J_{0,n-1}$ соотношения (2) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки векторов $\mathbf{A}$, система (2) имеет единственное решение. Ее решение может быть получено, например, применением формул Крамера. При этом оказывается, что $\operatorname{supp}\omega_j \subset [x_j, x_{j+3}]$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$. Тождества (2) называются *аппроксимационными соотношениями*, а функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* (или *генерирующей*) сплайн вектор-функцией.

Для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^2[a,b]$ положим $\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j)$, $\boldsymbol{\varphi}'_j := \boldsymbol{\varphi}'(x_j)$, $\boldsymbol{\varphi}''_j := \boldsymbol{\varphi}''(x_j)$, $j \in J_{-2,n+2}$, и рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}'_j, \boldsymbol{\varphi}''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A} = \mathbf{A}^N := \{\mathbf{a}_j^N\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^N := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \frac{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}} \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}.$$

Известно, что если выполнено условие $|W(t)| \geqslant c = const > 0$ для всех $t \in [a,b]$, то при достаточно малом $h_X := \sup\limits_{j \in J_{0,n-1}} (x_{j+1} - x_j)$ цепочка векторов $\mathbf{A}^N$ является полной и функции $\omega_j \in C^1[a,b]$ для каждого $j \in J_{-2,n-1}$. Более того, если $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1$, где $[\boldsymbol{\varphi}_1(t)]_0 \equiv 1$, то справедливо свойство разбиения единицы: $\sum\limits_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) = 1$ для всех $t \in [a,b]$.

В этом случае функции $\omega_j(t)$ называются *квадратичными нормализованными минимальными координатными* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнами*, а соответствующее пространство координатных сплайнов обозначается через $\mathbb{S}(X) := \mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi}_1)$.

Замечание 1. *Для порождающей вектор-функции* $\boldsymbol{\varphi}^B(t) := (1, t, t^2)^T$ *сплайны* $\omega_j^B(t)$*, определяемые аппроксимационными соотношениями (2), совпадают с известными квадратичными полиномиальными* B*-сплайнами (третьего порядка).*

Первая глава

Первая глава посвящена элементам теории квадратичных минимальных сплайнов. Глава разбита на пять параграфов. В первом параграфе вводятся основные понятия, используемые в тексте диссертационной работы, и связанные обозначения. Они приведены в предыдущем разделе автореферата.

Второй параграф посвящен построению явных формул квадратичных минимальных сплайнов. Приводятся соотношения, позволяющие выразить сплайн-функции на каждом из интервалов области определения в виде одного терма лишь с помощью значений компонент порождающей вектор-функции в некоторых точках сетки.

Пусть далее $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^2[a, b]$. Используя обозначения

$$\Delta_j(\rho,\, \sigma) := \begin{vmatrix} \rho_j & \rho'_j \\ \sigma_j & \sigma'_j \end{vmatrix}, \qquad S_j(\rho,\, \sigma,\, \tau) := -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_j(\rho,\, \sigma) & \Delta_{j+1}(\rho,\, \sigma) \\ \tau_j & \tau_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j+1} \\ \sigma_j & \sigma_{j+1} \end{vmatrix}},$$

где $\rho_j := \rho(x_j)$, $\sigma_j := \sigma(x_j)$, $\tau_j := \tau(x_j)$, формулы для определения квадратичных минимальных сплайнов (максимальной гладкости) принимают следующий вид:

$$\omega_j(t) = \frac{\begin{vmatrix} \rho'_j & \rho(t) - \rho_j \\ \sigma'_j & \sigma(t) - \sigma_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_j \\ \sigma'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_j \end{vmatrix}}, \quad t \in [x_j,\, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\begin{vmatrix} \rho'_j & S_{j+2}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_j & \rho(t) - \rho_j & 0 \\ \sigma'_j & S_{j+2}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_j & \sigma(t) - \sigma_j & 0 \\ 0 & S_{j+2}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_{j+1} & \rho(t) - \rho_{j+1} & \rho'_{j+1} \\ 0 & S_{j+2}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_{j+1} & \sigma(t) - \sigma_{j+1} & \sigma'_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_j \\ \sigma'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho'_{j+1} & S_{j+2}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+1} & S_{j+2}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_{j+1} \end{vmatrix}}, \quad t \in [x_{j+1},\, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\begin{vmatrix} \rho'_{j+3} & \rho(t) - \rho_{j+3} \\ \sigma'_{j+3} & \sigma(t) - \sigma_{j+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_{j+3} & S_{j+1}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_{j+3} \\ \sigma'_{j+3} & S_{j+1}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_{j+3} \end{vmatrix}}, \quad t \in [x_{j+2},\, x_{j+3}).$$

В третьем параграфе получены асимптотические представления для квадратичных минимальных сплайнов. Основной результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы. Отметим, что главная часть асимптотики совпадает с представлением B-сплайна.

Теорема 1. *Для функции $\omega_j(t)$ справедливо асимптотическое представление*

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_j)^2}{h_j(h_j + h_{j+1})}\left(1 + o(1)\right), \qquad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{1}{h_j}\left(\frac{(t - x_j)^2}{h_j + h_{j+1}} - \frac{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(t - x_{j+1})^2}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_{j+2})}\right)\left(1 + o(1)\right),$$
$$t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_{j+3})^2}{h_{j+2}(h_{j+1} + h_{j+2})} \left(1 + o(1)\right), \qquad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

С помощью полученных асимптотических разложений в четвертом параграфе строятся сплайны на сетке с кратными узлами (т. е. сетке, содержащей узлы, значения которых совпадают). Для определения значений в кратных узлах были доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. *В узлах кратности два функция* $\omega_j \in C[a, b]$, *при этом*

1. *Если* $x_j = x_{j+1} < x_{j+2} < x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_j) = 0$.
2. *Если* $x_j < x_{j+1} < x_{j+2} = x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_{j+2}) = 0$.
3. *Если* $x_j = x_{j+1} < x_{j+2} = x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_j) = 0$ *и* $\omega_j(x_{j+2}) = 0$.
4. *Если* $x_j < x_{j+1} = x_{j+2} < x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_{j+1}) = 1$.

Теорема 3. *В узлах кратности три функция* $\omega_j \in C^{-1}[a, b]$, *при этом*

1. *Если* $x_j < x_{j+1} = x_{j+2} = x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_{j+1} - 0) = 1$.
2. *Если* $x_j = x_{j+1} = x_{j+2} < x_{j+3}$, *то* $\omega_j(x_j + 0) = 1$.

В пятом параграфе рассматриваются свойства тригонометрических и гиперболических квадратичных минимальных сплайнов. Полученные результаты представляют ценность с точки зрения возможности применения этих сплайн-функций в задачах геометрического моделирования и изогеометрического анализа. Свойства гиперболических минимальных сплайнов, полученные в работе, являются новыми. Они могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Теорема 4. *Гиперболический сплайн* $\omega_j^{hyp}(t)$, *порожденный вектор-функцией* $\boldsymbol{\varphi}^{hyp}(t) = (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$, *положителен на интервале* $t \in (x_j, x_{j+3})$ *для всякого* $j \in J_{-2,n-1}$. *Функция* $\omega_j^{hyp}(t)$ *является монотонно возрастающей и выпуклой вниз на интервале* (x_j, x_{j+1}), *выпуклой вверх на* (x_{j+1}, x_{j+2}), *монотонно убывающей и выпуклой вниз на интервале* (x_{j+2}, x_{j+3}).

Вторая глава

Во второй главе исследуются различные способы построения аппроксимационных функционалов для квадратичных минимальных сплайнов. Глава разбита на четыре параграфа. В первом параграфе приводится схема построения приближения в общем виде и обосновывается ее корректность. В последующих параграфах рассматриваются различные способы ее реализации.

Модель приближения заданной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ сплайн-функциями из пространства $\mathbb{S}(X)$, описывается следующим алгоритмом:

1. Рассмотрим отрезок $I = [x_\mu,\, x_\nu] \subset [a, b]$ такой, что $I \cap (x_j, x_{j+3}) \neq \emptyset$. Обозначим через f^I сужение функции f на отрезок I, т. е. $f^I := f|_{[x_\mu,\, x_\nu]}$.

2. С помощью некоторого метода локальной аппроксимации P^I построим приближение g^I функции f^I в виде $g^I = P^I f^I = \sum\limits_{i=\mu-2}^{\nu-1} b_i\, \omega_i,\ \ b_i \in \mathbb{R}^1$.

3. Аппроксимацию функции f на отрезке $[a, b]$ обозначим через $Pf = \sum\limits_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j,\ \ c_j \in \mathbb{R}^1$. В качестве коэффициента c_j этой аппроксимации выберем полученное на предыдущем шаге значение b_j, т. е. положим $c_j = b_j$.

Пусть $\mathbb{S}(X^I)$ — сужение пространства $\mathbb{S}(X)$ на I. Тогда справедливо следующее утверждение относительно точности предложенной аппроксимационной схемы.

Теорема 5. *Если метод локальной аппроксимации P^I обладает свойством точности на функциях пространства $\mathbb{S}(X^I)$ (т. е. воспроизводит любую функцию этого пространства), то аппроксимация Pf является точной на всем пространстве $\mathbb{S}(X)$.*

Данная теорема обосновывает корректность предложенной модели аппроксимации. В результате для определения значений коэффициента b_i построены следующие аппроксимационные функционалы: трехточечный функционал, два усредняющих, а также система двойственных функционалов типа де Бура-Фикса. Формулы для всех упомянутых в работе функционалов приводятся в явном виде, то есть значение функционала в точке выражается через значения компонент порождающей вектор-функции.

Опишем вид одного из усредняющих аппроксимационных функционалов. Объекты, рассматриваемые на сетке X, будем, по необходимости, снабжать верхним индексом X. Введя вспомогательную сетку Y, состоящую из узлов

$$y_j := \begin{cases} x_0, \quad j = -2, \\ x_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x_{j+1}), \quad \theta \in [0, 1],\, j = -1, \ldots, n-2, \\ x_n, \quad j = n-1, \end{cases}$$

построим аппроксимацию Pf исходной функции f в виде

$$Pf = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j(f)\, \omega_j^X,$$

где аппроксимационный функционал $\mu_j(f)$ определим следующим образом:

$$\mu_j(f) := \begin{cases} f(y_{-2}), \quad j = -2, \\ a_j f(y_{j-1}) + b_j f(y_j) + c_j f(y_{j+1}), \quad j = -1, \ldots, n-2, \\ f(y_{n-1}), \quad j = n-1. \end{cases} \tag{3}$$

Используя обозначения

$$N_j(y) := \begin{vmatrix} \rho(y) - \rho(y_{j-1}) & S^X_{j+1}(\rho, \sigma, \rho') - \rho(y_{j-1}) \\ \sigma(y) - \sigma(y_{j-1}) & S^X_{j+1}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma(y_{j-1}) \end{vmatrix},$$

$$D_j := \begin{vmatrix} \rho(y_{j+1}) - \rho(y_{j-1}) & \rho(y_j) - \rho(y_{j-1}) \\ \sigma(y_{j+1}) - \sigma(y_{j-1}) & \sigma(y_j) - \sigma(y_{j-1}) \end{vmatrix},$$

значения коэффициентов a_j, b_j, c_j выражаются следующим образом:

$$a_j = 1 - b_j - c_j,$$
$$b_j = \frac{N_j(y_{j+1})}{D_j}, \qquad c_j = -\frac{N_j(y_j)}{D_j}.$$

Замечание 2. *Для $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}^B(t)$ при $\theta = 1/2$ на равномерной сетке функционал (3) имеет вид*

$$\mu_j(f) = -\frac{1}{8}\left(f(y_{j-1}) - 10f(y_j) + f(y_{j+1})\right) \tag{4}$$

и совпадает с известным усредняющим квазиинтерполяционным функционалом для квадратичных B-сплайнов.

Отметим, что другой приведенный в диссертационной работе усредняющий функционал при тех же значениях порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и параметра θ совпадает с квазиинтерполяционным функционалом для B-сплайнов, построенным А. И. Гребенниковым; система двойственных функционалов при использовании полиномиальной порождающей вектор-функции совпадает с квазиинтерполяционными функционалами де Бура-Фикса.

Третья глава

В третьей главе исследуется возможность применения предложенной модели аппроксимации, основанной на использовании квадратичных минимальных сплайнов в качестве базисных функций и значений построенных во второй главе аппроксимационных функционалов в качестве коэффициентов при них, в практических приложениях. Глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе исследуются приложения предложенной модели аппроксимации к задачам численного решения интегральных уравнений Фредгольма. Приводится модифицированный метод сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, предложенный автором диссертационного исследования. Метод является усовершенствованием ранее предложенного метода сплайн-коллокаций, использующего представление аппроксимируемой функции в виде линейной комбинации B-сплайнов с неопределенными коэффициентами. В данном методе в качестве базисных функций используются квадратичные минимальные сплайны.

Пусть $t \in [a, b]$. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода запишем в виде

$$u(t) - \mathcal{K}u(t) = f(t). \tag{5}$$

Предположим, что $f \in C[a, b]$ и оператор $(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ обратим; здесь $\mathcal{I}$ — тождественный оператор. Задача решения уравнения Фредгольма второго рода является корректно поставленной. Уравнение (5) имеет единственное решение $u \in C[a, b]$ для любой заданной функции $f \in C[a, b]$.

Используя ядро $K \in C([a, b] \times [a, b])$, определим линейный компактный оператор $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}u(t) := \int_a^b K(t, x)\, u(x)\, dx, \quad t \in [a, b].$$

Построим аппроксимацию решения уравнения (5) на сетке (1) в виде

$$u^h(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j(t),$$

а вместо функций $\mathcal{K}$ и f будем брать их приближения $\mathfrak{Q}\mathcal{K}$ и $\mathfrak{Q}f$ соответственно, построенные с использованием усредняющих функционалов (3). Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$u^h = \mathfrak{Q}f + \mathfrak{Q}\mathcal{K}u^h$$

или, вводя обозначение $\widetilde{\omega}_j := \mathcal{K}\,\omega_j$,

$$\sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j^Y(f)\, \omega_j(t) + \mathfrak{Q} \sum_{i=-2}^{n-1} c_i\, \widetilde{\omega}_i(t),$$

откуда

$$c_j = \mu_j^Y(f) + \sum_{i=-2}^{n-1} c_i\, \mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i), \quad j \in J_{-2,n-1}.$$

Составив из коэффициентов c_j вектор $\mathbf{c} := (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{n-1})^T$, из функционалов $\mu_j^Y(f)$ вектор $\boldsymbol{\mu} := (\mu_{-2}^Y(f), \mu_{-1}^Y(f), \ldots, \mu_{n-1}^Y(f))^T$, а из функционалов $\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)$ матрицу $\boldsymbol{M} := (M_{j,i}) = \left(\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)\right)$, $j, i \in J_{-2,\ldots,n-1}$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\,\mathbf{c} = \boldsymbol{\mu},$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица. Решение системы определяет значения коэффициентов c_j.

Слоан показал, что полученное решение можно уточнить итерацией

$$\widetilde{u}^h := \mathcal{K}u^h + f,$$

поэтому итоговая аппроксимация решения уравнения может быть построена в виде

$$\widetilde{u}^h(t) = f(t) + \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \widetilde{\omega}_j(t).$$

Отметим, что вычисление интеграла

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \mathcal{K}\,\omega_j(t) = \int_a^b K(t,x)\,\omega_j(x)\,dx,$$

путем замены подынтегральной функции $K(t,x)$ ее аппроксимацией сводится к вычислению значения

$$W_{ij} := \int_a^b \omega_i(t)\,\omega_j(t)\,dt,$$

которое может быть вычислено явно или применением методик численного интегрирования.

Для проведения численного эксперимента рассматривается модельная задача

$$u(t) - \int_0^{\pi/2} \sin t\,\cos x\,u(x)\,dx = \sin t, \tag{6}$$

решение которой может быть получено явно: $u(t) = 2\sin t$.

Результаты эксперимента приведены в Таблице 1. Показано, что при различном количестве точек расчетной сетки использование тригонометрических квадратичных минимальных сплайнов $\omega_j^{\mathcal{T}}$, порожденных вектор-функцией $\boldsymbol{\varphi}^{\mathcal{T}}(t) := (1, \sin t, \cos t)^T$, и функционала вида (3) (такая модель обозначена в таблице как вариант 3) приводит к получению более точного приближения, чем использование B-сплайнов ω_j^B и известных функционалов: функционала со значениями, состоящими из абсцисс Гревилля (вариант 1 в таблице) и функционала, определяемого формулой (4) (вариант 2 в таблице).

Таблица 1 — Ошибка аппроксимации решения уравнения (6) в зависимости от количества узлов сетки n

вариант	$n = 15$	$n = 30$	$n = 45$
1	5.3×10^{-3}	1.3×10^{-3}	5.6×10^{-4}
2	3.5×10^{-3}	8.5×10^{-4}	3.7×10^{-5}
3	$\mathbf{1.4 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{6.8 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{3.3 \times 10^{-5}}$

Также модифицированный метод сплайн-коллокаций был применен для решения интегрального уравнения первого рода. Поскольку данное уравнение представляет из себя некорректно поставленную вычислительную задачу, то для него сначала проводится процедура регуляризации, заключающаяся в замене уравнения

$$\int_a^b K(t,x)\,u(x)\,dx = f(t)$$

вспомогательным уравнением

$$\alpha u_\alpha(t) + \int_a^b K(t,x)\,u_\alpha(x)\,dx = f(t).$$

Далее полученное интегральное уравнение Фредгольма второго рода решается модифицированным методом сплайн-коллокаций, изложенным выше.

Численные эксперименты на этот раз были проведены на уравнении

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{3t-4x}\, u(x)\, dx = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{3t}, \tag{7}$$

функция решения которого имеет экспоненциальный характер: $u(t) = \mathrm{e}^{3t+1}$.

Использование гиперболических минимальных сплайнов $\omega_j^{hyp}(t)$ и функционала вида (3) позволило существенно повысить точность приближения относительно аппроксимации, использующей B-сплайны ω_j^B и функционал (4). Результаты эксперимента приведены в Таблице 2, в которой упомянутые модели аппроксимации обозначаются как вариант 5 и вариант 4 соответственно.

Таблица 2 — Ошибка аппроксимации решения уравнения (7) в зависимости от количества узлов сетки n

вариант	$n = 32$	$n = 64$
4	0.00514	0.00110
5	**0.00067**	**0.00036**

Во втором параграфе рассматривается задача аппроксимации функций, имеющих большие градиенты в пограничном слое. Такие функции часто возникают при решении сингулярно возмущенных краевых задач. Для них предлагается строить аппроксимацию минимальными сплайнами, вычисляя значения коэффициентов при помощи двойственных функционалов типа де Бура-Фикса:

$$\xi_j^{\langle 1\rangle}(u) := u(x_{j+1}) + \frac{(\sigma_{j+2}-\sigma_{j+1})\rho'_{j+2} - (\rho_{j+2}-\rho_{j+1})\sigma'_{j+2}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}}\, u'(x_{j+1}), \tag{8}$$

$$\xi_j^{\langle 2\rangle}(u) := u(x_{j+2}) + \frac{(\sigma_{j+2}-\sigma_{j+1})\rho'_{j+1} - (\rho_{j+2}-\rho_{j+1})\sigma'_{j+1}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}}\, u'(x_{j+2}), \tag{9}$$

где $u \in C^1[a, b]$, а в качестве расчетных сеток использовать сетки Шишкина — кусочно-равномерные сетки, сгущенные специальным образом в пограничном слое.

В одном из экспериментов рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) + u'(x) = 1, \\ u(0) = u(1) = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $w(x) := e^{-x/\varepsilon}$. Тогда решение краевой задачи (10) представляется функцией

$$u(x) = x + \frac{w(x) - w(1)}{1 - w(1)}.$$

Построим аппроксимацию решения, в которой $\boldsymbol{\varphi}^H_{p,q}(t) := (1, e^{-p\,t}, e^{-q\,t})^T$ и значения двойственных функционалов используются в качестве коэффициентов. Здесь p и q рассматриваются как параметры контроля формы. Результаты численного эксперимента приведены в Таблице 3. В ячейках таблицы верхнее значение получено, используя функционал (8), а нижнее — функционал (9). Значения параметров были выбраны следующим образом: $p = 0.7\,\varepsilon^{-1}$, $q = 1$. Варьируя значения малого параметра ε, мы видим, что предложенная схема аппроксимации позволяет во всех случаях строить достаточно точные приближения решения рассматриваемой сингулярно возмущенной краевой задачи.

Таблица 3 — Ошибка приближения при различных значениях параметров ε и N

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2×10^{-1}	2.1×10^{-3} 1.2×10^{-3}	3.2×10^{-4} 2.4×10^{-4}	4.4×10^{-5} 3.9×10^{-5}	5.4×10^{-6} 5.5×10^{-6}	7.3×10^{-7} 7.3×10^{-7}
2×10^{-2}	3.2×10^{-3} 5.0×10^{-3}	9.1×10^{-4} 7.7×10^{-4}	2.3×10^{-4} 1.6×10^{-4}	4.2×10^{-5} 4.1×10^{-5}	8.3×10^{-6} 8.3×10^{-6}
2×10^{-3}	3.2×10^{-3} 7.8×10^{-3}	9.2×10^{-4} 1.8×10^{-3}	9.2×10^{-4} 4.5×10^{-4}	2.9×10^{-5} 9.1×10^{-5}	6.6×10^{-6} 1.6×10^{-5}

В третьем параграфе показано, что предложенные методы аппроксимации достаточно эффективно справляются с задачами приближения трансцендентных кривых, часто встречающихся в системах автоматизированного проектирования. Численные эксперименты показывают, что использование минимальных сплайнов позволяет получать более точные приближения, чем при использовании их полиномиальных аналогов.

Таким образом, предложенные в работе модели аппроксимации представляют практическую ценность и могут быть эффективно использованы для решения прикладных задач.

Заключение

В рамках диссертационного исследования получены новые результаты в теории аппроксимации минимальными сплайнами.

Решена задача построения новых моделей локальных схем аппроксимации, использующих аппроксимационные функционалы. Предложены новые численные методы: уточненный метод сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, численный метод решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, основанный на регуляризации этого уравнения и его приведении к уравнению второго рода, численный метод аппроксимации функций с большими градиентами в пограничном слое, основанный на приближении квадратичными минимальными сплайнами на кусочно-равномерной сетке Шишкина. Теоретические результаты работы подтверждены численными экспериментами, проведенными с помощью разработанного в рамках диссертационного исследования комплекса программ.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Kulikov E. K., Makarov A. A.*, On de Boor–Fix Type Functionals for Minimal Splines. — Topics in Classical and Modern Analysis (Applied and Numerical Harmonic Analysis) — 2019 — p. 211–225.
2. *Kulikov E. K., Makarov A. A.*, On Approximation by Hyperbolic Splines. — Journal of Mathematical Sciences, vol. 240(6) — 2019 — p. 822–832.
3. *Kulikov E. K., Makarov A. A.*, Quadratic Minimal Splines with Multiple Nodes. – Journal of Mathematical Sciences, vol. 249(2) — 2020 — p. 256–262.
4. *Куликов Е. К., Макаров А. А.*, О приближенном решении одной сингулярно возмущенной краевой задачи. — Дифференциальные уравнения и процессы управления, т. 2020(1) — 2020 — с. 91–102.
5. *Kulikov E. K., Makarov A. A.*, On Biorthogonal Approximation of Solutions of Some Boundary Value Problems on Shishkin Mesh. — AIP Conference Proceedings, vol. 2302 110005 — 2020.
6. *Куликов Е. К., Макаров А. А.*, О модифицированном методе сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма. — Дифференциальные уравнения и процессы управления, т. 2021(4) — 2021 — с. 211–222.
7. *Kulikov E. K., Makarov A. A.*, Construction of Approximation Functionals for Minimal Splines. — Journal of Mathematical Sciences, vol. 262(1) — 2022 — p. 84–98.
8. *Куликов Е. К., Макаров А. А.*, Об одном методе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. — Записки научных семинаров ПОМИ, т. 514 — 2022 — с. 113–125.
9. *Куликов Е. К., Макаров А. А.*, Программа для биортогональной аппроксимации данных с параметрами контроля формы (BiorShapeApprox). — Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ RU 2019661693 — 2019.
10. *Макаров А. А., Куликов Е. К.*, Программный комплекс для решения интегральных уравнений Фредгольма на основе модифицированного метода сплайн-коллокаций (CollocFredholmApprox). — Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ RU 2022681750 — 2022.