



**ПОЛИТЕХ**  
Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого

На правах рукописи

**Лэ Ван Хуен**

**Решение обратных задач восстановления параметров математической  
модели для синтеза управления с прогнозирующей моделью**

2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург  
2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

**Научный руководитель:** старший научный сотрудник, доктор технических наук Черненко Людмила Васильевна

**Официальные оппоненты:**

профессор, доктор физико-математических наук Добронев Борис Станиславович, профессор кафедры систем искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»,

доцент, кандидат технических наук Елисева Ольга Анатольевна, доцент кафедры «Инжиниринг и менеджмент качества» факультета Естественнонаучного ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова».

**Ведущая организация:** федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

Защита состоится « 23 » октября 2024 г. в 16.00

на заседании диссертационного совета У.2.3.1.29

федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, 3-й учебный корпус, каб. 506).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке

и на сайте <https://www.spbstu.ru/science/the-department-of-doctoral-studies/defences-calendar/the-degree-of-candidate-of-sciences/>

федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Автореферат разослан «    »                      2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат технических наук, доцент Сараджишвили Сергей Эрикович



## I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** В эпоху развития мощных электронно-вычислительных машин выполнять сложные расчеты с высокой точностью данных стало проще. Однако необходимо изучить, как погрешность исходных данных влияет на решение задачи. Погрешности возникают в результате процесса измерения и обработки данных, округления чисел в процессе вычислений, что неизбежно в практических задачах. Малые погрешности измерения и округления обычно игнорируются при расчетах. Однако во многих задачах небольшая погрешность исходных данных может привести к следующему: задачи не имеют решения, задачи имеют более одного решения, решение задачи существенно изменяется. Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью разработки метода решения обратных задач с учетом погрешностей исходных данных, а также дополнительных методов, позволяющих находить приемлемые приближенные регуляризованные решения. Это требует дальнейшего анализа и исследования теоретических проблем, в том числе проблем существования решения, единственности, устойчивости, сходимости решений и т. п.

Долгое время считалось, что решение некорректных обратных задач не имеет существенного практического значения, а теория решения некорректных обратных задач не может привести к содержательным математическим результатам. Однако в последние десятилетия было доказано, что решение некорректных обратных задач позволяет получить следующие результаты: восстановить недостающую информацию или воссоздать недоступные данные, провести анализ и прогнозирование будущего поведения системы на основе имеющихся данных и моделей, обеспечить настройку параметров моделей для достижения наилучшего соответствия экспериментальным данным или наблюдениям и др. Теория решения некорректных обратных задач становится междисциплинарной областью исследований, перспективной и многообещающей. Перечислим некоторые области возможного применения: геофизика и геология, медицина и биомедицина, физика и астрономия, обработка сигналов, экономика, нефтепереработка, химическая промышленность. Актуальность работы определяется также практической применимостью теории решения обратных задач для прогнозирования поведения сложных систем в разных областях.

**Степень разработанности темы исследования.** Восстановление значений параметров математической модели является одним из основных направлений исследований теории решения некорректных обратных задач и имеет практическое применение в различных областях.

Среди ученых, которые разрабатывают теорию и методы решения некорректных обратных задач и вносят наибольший вклад в их развитие, можно отметить А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, В.А. Морозова, М.И. Сумина, В.Б. Гласко, В.В. Денисова, А.И. Васина, В.Г. Романова, О.А. Лисковец, С.И. Кабанихина, В.В. Степанова, А.А. Самарского, В.Я. Арсенина, Nho-Hao Dinh, Ye Zhang и др.

Моделями прогнозирования временных рядов ранее занимались Дж. Бокс (G. Box), Г. Дженкинс (G. Jenkins), М. Кендалл (M. Kendall), А. Стьюарт (A. Stewart), Д. Бриллинджер (D. Brillinger), Г.С. Кильдишев, А.К. Керимов, Т.А. Дуброва и др.

**Целью работы** является восстановление значений параметров математической модели в виде системы линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для прогноза поведения объектов/процессов в динамических системах.

**Задачи исследования.** Для достижения цели работы решены следующие задачи:

1. Разработка метода восстановления параметров математической модели в виде системы линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений;
2. Разработка прогнозирующей модели поведения объектов/процессов;
3. Апробирование разработанного метода и прогнозирующей модели в процессах нефтепереработки, производства метанола и обучения иностранному языку.

**Объект исследования.** Математическая модель, описываемая системой линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Предмет исследования.** Обратная задача восстановления параметров математической модели.

**Методология и методы исследования** основаны на системном анализе, теории решения некорректных обратных задач, теории оптимизации и теории управления.

**Соответствие содержания диссертации заявленной специальности.** Работа выполнена по специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика и соответствует следующим пунктам паспорта: 2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; 3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; 5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

**Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

1. Метод восстановления параметров математической модели, позволяющий найти приближенные значения её параметров;

2. Прогнозирующая модель, позволяющая определить поведение объектов/процессов в заданные моменты времени.

**Научная новизна** характеризуется следующими результатами:

1. Разработан метод приближенного восстановления значений параметров математической модели путем многократного вычисления приближенных регуляризованных решений по критерию минимизации функционала Тихонова и выбора наилучшего решения из множества приближенных регуляризованных решений по критерию невязки.

Разработанный метод отличается возможностями:

– оценки отклонения регуляризованных решений от условно точного решения путем косвенной оценки совпадения между измеренными и расчетными данными, при этом измеренные данные характеризуют поведение объектов/процессов и определяются в ходе наблюдений и измерений, а расчетные данные характеризуют поведение объектов/процессов и определяются с помощью математической модели.

– нахождения и сужение множества приближенных регуляризованных решений с учетом важности критериев: нормы разности между левой и правой частями системы алгебраических уравнений и нормы приближенного регуляризованного решения.

2. Предложена прогнозирующая модель поведения объектов/процессов, построенная на основе математического моделирования, теории решения некорректных обратных задач, разработанного метода восстановления параметров математической модели и оценки отклонения между измеренными и расчетными данными в сравнении с измеренными данными.

Разработанная модель отличается возможностью калибровки для повышения точности прогноза (за счет выбора параметров прогнозирующей модели таким образом, чтобы отклонение между измеренными и расчетными данными в сравнении с измеренными данными было наименьшим).

**Теоретическая значимость** диссертационной работы состоит в расширении научных знаний в теории решения некорректных обратных задач и заключается в следующем:

1. Разработан метод восстановления параметров математической модели на основе метода регуляризации Тихонова в сочетании с методами конечных разностей, интерполяции кубическими сплайнами и выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации.

2. Оценено отклонение регуляризованных решений от условно точного решения на основе статистических параметров: коэффициента корреляции Пирсона, средней абсолютной ошибки, показателя эффективности Нэша–Сатклиффа.

3. Предложена прогнозирующая модель поведения объектов/процессов в динамических системах на основе математической модели со значениями параметров, найденными разработанным методом восстановления.

**Практическая значимость** диссертационной работы определяется возможностью

использования разработанных метода восстановления параметров математической модели и прогнозирующей модели поведения объектов/процессов для решения задач в разных областях.

1. Разработанный метод обеспечивает определение приближенных значений параметров математической модели, применение которой позволяет исследовать объекты/процессы, анализировать взаимодействие между объектами/процессами и факторы, влияющие на объекты/процессы и т. д.

2. Прогнозирующая модель позволяет определять поведение объектов/процессов в заданные моменты времени. Результаты прогноза могут быть использованы для решения других практических задач. В зависимости от исследуемых объектов/процессов разработанная прогнозирующая модель может быть использована для построения и своевременного изменения плана производства с целью минимизации времени и затрат на закупку сырья, производство и хранение продукции; а также для формирования плана обучения иностранному языку с целью достижения высокой эффективности обучения при наиболее приемлемой для студента интенсивности обучения и т. д.

3. Материалы диссертации полезны организациям и предприятиям, что подтверждается Актами внедрения:

- прогнозирующая модель используется в отделе планирования для разработки оптимального производственного плана с целью минимизации времени, затрат на закупку сырья, производство и хранение продукции (снижение времени производства на 20%, снижение общих затрат на 12% подтверждено Актом ООО «Фармасьютикал Хоанг Лиен»);

- результаты диссертации используются для проверки чистоты химических веществ в процессе производства и позволяют сократить время и затраты на анализ состава полученного раствора (сокращение времени на 33%, снижение затрат на 21% подтверждено Актом центра прикладных исследований и тестирования качества продукции НИ-ТЕСН);

- применение результатов диссертационного исследования позволяет моделировать процесс обучения русскому языку, формировать план обучения, прогнозировать уровень владения русским языком у студентов в конце курса и оперативно изменять интенсивность обучения (подтверждено актом Высшей школы международных образовательных программ Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (ВШ МОП СПбПУ)).

**Обоснованность и достоверность** научных результатов исследования подтверждается строгостью математического аппарата и корректным использованием теории системного анализа, теории решения некорректных обратных задач, теории оптимизации. Основные результаты обсуждены на международных конференциях, опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК, и в международных изданиях, индексируемых в наукометрической базе Scopus. Достоверность исследования также подтверждается результатами апробирования и внедрения результатов диссертационной работы.

**Личный вклад автора.** Личный вклад автора состоит в непосредственной разработке метода восстановления параметров математической модели, прогнозирующей модели поведения объектов/процессов, программного обеспечения, а также в апробировании и внедрении результатов диссертационного исследования.

**Внедрение результатов диссертационного исследования.** Результаты исследования использованы в ООО «Фармасьютикал Хоанг Лиен», Центре прикладных исследований и тестирования качества продукции НИ-ТЕСН, Высшей школе международных образовательных программ Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (ВШ МОП СПбПУ). Диссертационное исследование частично финансировалось Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках соглашения «О предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития НЦМУ «Передовые цифровые технологии» на базе ЦНТИ «Новые производственные технологии»» (№075-15-2020-311 от 20.04.2022).

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 12 международных и 2 всероссийских научных конференциях.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 28 работ, из них: 5 – без соавторов, в том

числе 15 статей в ведущих рецензируемых научных журналах (2 статьи К1, 12 статей К2, 1 статья К3), 5 статей в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (SCOPUS), 8 статей в других изданиях, 5 свидетельств о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. Содержание работы изложено на 151 страницах машинописного текста.

## II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, описаны методология и методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, приведены основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена исследованию теории системного анализа обратных задач, теории и методов решения некорректных обратных задач. Под прямыми задачами обычно понимают задачи, описываемые математическими моделями объекты/процессы. Одним из эффективных способов построения математических моделей является использование дифференциальных уравнений. В прямых задачах заданы уравнения, краевые и начальные условия и требуется найти функции, описывающие поведение объектов/процессов. Обратные задачи представляют собой задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений и/или функций, входящих в краевые и/или начальные условия, по дополнительной информации о решении прямых задач. Заранее определить значения параметров математической модели невозможно или достаточно сложно. Точное определение значений параметров во многом определяет возможность применения математических моделей для исследования объектов/процессов. Существует несколько методов решения некорректных обратных задач: метод подбора, метод квазирешения Иванова, метод Лаврентьева, метод регуляризации Тихонова. В рамках данной работы для решения некорректных обратных задач использован метод регуляризации Тихонова.

**Вторая глава** посвящена детальному анализу метода регуляризации Тихонова. В общем случае рассмотрена задача решения операторного уравнения:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (1)$$

относительно  $\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  – элементы нормированных пространствах  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ;  $\mathbf{A}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ . Предполагается, что существует обратный оператор  $\mathbf{A}^{-1}$ , но он не является непрерывным.

Пусть задача (1) имеет условно точное решение  $\mathbf{x}_0$  с условно точными исходными данными  $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{y}_0\}$ . Вместо  $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{y}_0\}$  известно их приближение  $\{\mathbf{A}_\eta, \mathbf{y}_\delta\}$  по отношениям  $\|\mathbf{A}_\eta - \mathbf{A}_0\| \leq \eta$ ,  $\|\mathbf{y}_\delta - \mathbf{y}_0\| \leq \delta$ , где  $\eta$ ,  $\delta$  – малые положительные числа. Предположим, что  $\mathbf{A}_\eta$ ,  $\mathbf{A}_0$  – линейные непрерывные операторы. При этом задача (1) становится задачей решения уравнения:

$$\mathbf{A}_\eta \mathbf{x} = \mathbf{y}_\delta. \quad (2)$$

Задача (2) либо не имеет решения, либо имеет единственное решение, либо имеет более одного решения. Если задача имеет единственное решение  $\mathbf{x}_{\eta\delta}$ , то это решение не устойчиво при малом изменении  $\{\mathbf{A}_\eta, \mathbf{y}_\delta\}$ . Необходимо найти другой элемент, который устойчив при малом изменении  $\{\mathbf{A}_\eta, \mathbf{y}_\delta\}$  и аппроксимирует условно точное решение  $\mathbf{x}_0$ .

Согласно методу регуляризации Тихонова решена задача минимизации функционала:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}_\eta \mathbf{x} - \mathbf{y}_\delta\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \min_{\alpha} \min_{\mathbf{x}}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации,  $\alpha > 0$ . Из выражения (3) вытекает уравнение Тихонова:  $(\mathbf{A}_\eta^* \mathbf{A}_\eta + \alpha \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{A}_\eta^* \mathbf{y}_\delta$ , где  $\mathbf{A}_\eta^*$  – оператор, сопряженный к  $\mathbf{A}_\eta$ ;  $\mathbf{E}$  – единичный оператор. Решение  $\mathbf{x}^\alpha = (\mathbf{A}_\eta^* \mathbf{A}_\eta + \alpha \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}_\eta^* \mathbf{y}_\delta$  задачи (3) называется регуляризованным для задачи (1) в точке  $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{y}_0\}$ . Доказано, что  $\mathbf{x}^\alpha$  является единственным и непрерывно зависит от  $\{\mathbf{A}_\eta, \mathbf{y}_\delta\}$  при каждом значении параметра регуляризации  $\alpha$ . Однако,  $\mathbf{x}^\alpha$  не аппроксимирует  $\mathbf{x}_0$  при всех значениях  $\alpha$ .

Для определения значений параметра регуляризации использован метод выбора



Задачу 2 будем называть обратной задачей по отношению к прямой задаче 1. Решение этой задачи называется условно точным решением и обозначается вектором  $\mathbf{K}^0 = (a_{11}^0, a_{12}^0, \dots, a_{1m}^0, \dots, a_{n1}^0, a_{n2}^0, \dots, a_{nm}^0)^T$ . Невозможно найти  $\mathbf{K}^0$ , потому что неизвестны точные значения  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ . Вместо условно точного решения найдено его приближение.

**Метод восстановления параметров математической модели** состоит из шагов:

**1.** Измерение и обработка экспериментальных данных.

Определено поведение объектов/процессов, т. е. значения функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в разные моменты времени  $t_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$  (чем больше  $N$ , тем точнее результаты расчетов, но измерение требует большего времени и усилий, а процесс расчета становится более сложным).

**2.** Переход системы уравнений (5) в **формальную** систему алгебраических уравнений  $\mathbf{XK} = \mathbf{B}$  относительно найденного вектора  $\mathbf{K}$ , где:

$$\bullet \mathbf{X} = \begin{pmatrix} s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_m(t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_m(t) \end{pmatrix}_{n \times (n+m)} \quad - \text{ матрица с элементами } s_j(t),$$

$j = 1, 2, \dots, m$ ;

$\bullet \mathbf{K} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})^T$  – вектор с неизвестными  $a_{ij}$ ;

$$\bullet \mathbf{B} = \left( \frac{x_1(t+h) - x_1(t-h)}{2h} + o(h^3), \frac{x_2(t+h) - x_2(t-h)}{2h} + o(h^3), \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t-h)}{2h} + o(h^3) \right)^T \quad -$$

вектор свободных членов;

$\bullet h$  – шаг, используемый в методе конечных разностей, равный малому положительному числу, такому, что погрешностью третьего порядка  $h$ , т. е.  $o(h^3)$ , можно пренебречь.

Здесь использован метод конечных разностей для устранения дифференциала функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  по формулам:  $\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{x_i(t+h) - x_i(t-h)}{2h} + o(h^3)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**3.** Формирование **условно точной** системы алгебраических уравнений  $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{B}_0$ , где:

$$\bullet \mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} s_1^0(t_1) & s_2^0(t_1) & \dots & s_m^0(t_1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_1^0(t_1) & s_2^0(t_1) & \dots & s_m^0(t_1) \\ \dots & \dots \\ s_1^0(t_m) & s_2^0(t_m) & \dots & s_m^0(t_m) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_1^0(t_m) & s_2^0(t_m) & \dots & s_m^0(t_m) \end{pmatrix}_{(m*n) \times (n+m)} \quad - \text{ матрица с}$$

элементами  $s_j^0(t_k) = (x_1^0(t_k), x_2^0(t_k), \dots, x_n^0(t_k))$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $x_1^0(t_k), x_2^0(t_k), \dots, x_n^0(t_k)$  – условно точные значения функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $t_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $m \leq N$ ;

$\bullet \mathbf{B}_0$  – вектор свободных членов с элементами  $x_1^0(t_k \pm h), x_2^0(t_k \pm h), \dots, x_n^0(t_k \pm h)$ , являющимися условно точными значениями функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $(t_k \pm h)$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ .

На данном шаге предположим, что значения функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $t_k, t_k \pm h$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ , являются «идеальными», т. е. не содержат погрешности. Решением условно точной системы является вектор  $\mathbf{K}^0$ .

**4.** Формирование *приближенной* системы уравнений  $\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} = \mathbf{B}_\delta$ , где  $\mathbf{X}_\eta$ ,  $\mathbf{B}_\delta$  – приближения к  $\mathbf{X}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  по отношениям  $\|\mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0\| \leq \eta$ ,  $\|\mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}_0\| \leq \delta$ ;  $\eta$ ,  $\delta$  – малые положительные числа.

Из-за погрешностей измерения и округления вместо точных значений  $x_1^0(t_k)$ ,  $x_2^0(t_k)$ , ...,  $x_n^0(t_k)$  известны только их приближения  $\tilde{x}_1(t_k)$ ,  $\tilde{x}_2(t_k)$ , ...,  $\tilde{x}_n(t_k)$ . Вместо точных значений  $s_1^0(t_k)$ ,  $s_2^0(t_k)$ , ...,  $s_m^0(t_k)$  известны их приближения  $\tilde{s}_1(t_k)$ ,  $\tilde{s}_2(t_k)$ , ...,  $\tilde{s}_m(t_k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Пренебрегаем значением  $o(h^3)$ . Значения функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  в моменты времени  $t_k \pm h$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ , определены методом интерполяции кубическими сплайнами, поэтому они содержат и погрешности интерполяции, и погрешности округления. Вместо  $x_1^0(t_k \pm h)$ ,  $x_2^0(t_k \pm h)$ , ...,  $x_n^0(t_k \pm h)$  известны их приближения  $\tilde{x}_1(t_k \pm h)$ ,  $\tilde{x}_2(t_k \pm h)$ , ...,  $\tilde{x}_n(t_k \pm h)$ .

**5.** Построение регуляризирующей системы уравнений Тихонова.

Для решения системы уравнений  $\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} = \mathbf{B}_\delta$  использован метод регуляризации Тихонова.

Сформулирована задача минимизации функционала:  $\mathbf{M}(\mathbf{K}) = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} - \mathbf{B}_\delta\|^2 + \alpha \|\mathbf{K}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{K}}$ .

Регуляризирующая система уравнений Тихонова имеет вид:  $\mathbf{X}_\eta^* \mathbf{X}_\eta \mathbf{K} + \alpha \mathbf{K} = \mathbf{X}_\eta^* \mathbf{B}_\delta$ , где  $\mathbf{X}_\eta^*$  – матрица, сопряженная к матрице  $\mathbf{X}_\eta$ . Регуляризованное решение обозначается вектором

$$\mathbf{K}^\alpha = (\mathbf{X}_\eta^* \mathbf{X}_\eta + \alpha \mathbf{E})^{-1} \mathbf{X}_\eta^* \mathbf{B}_\delta = (a_{11}^\alpha, a_{12}^\alpha, \dots, a_{1m}^\alpha, \dots, a_{n1}^\alpha, a_{n2}^\alpha, \dots, a_{nm}^\alpha)^T.$$

**6.** Определение множества возможных регуляризованных решений.

**6.1.** Построение последовательности  $\{\alpha_i\}$  с начальным значением  $\alpha_0 = 1$  и знаменателем прогрессии  $q = \text{const}$  ( $0 < q < 1$ ) по условию:  $\alpha_{i+1} = q\alpha_i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, L$  (чем больше  $L$ , тем выше возможность найти решение, наиболее близкое к условно точному решению, но процесс расчета сложнее);

**6.2.** Решение системы уравнений Тихонова при каждом значении параметра регуляризации  $\alpha_i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, L$ . В результате получена последовательность  $\{\mathbf{K}^{\alpha_i}\}$ ;

**6.3.** Вычисление нормы разности регуляризованных решений на двух соседних итерациях в последовательности  $\{\mathbf{K}^{\alpha_i}\}$ :  $\Delta_i = \left\| -\alpha_i \frac{d\mathbf{K}^{\alpha_i}}{d\alpha_i} \right\| \approx \left\| -\alpha_i \frac{\mathbf{K}^{\alpha_{i+1}} - \mathbf{K}^{\alpha_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \right\| = \frac{1}{1-q} \|\mathbf{K}^{\alpha_{i+1}} - \mathbf{K}^{\alpha_i}\|$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, L-1$ . В результате расчетов получена последовательность  $\{\Delta_i\}$ ;

**6.4.** Выбор значений параметра регуляризации. В качестве параметра регуляризации выбраны значения  $\alpha_i$ , для которых  $\Delta_i = \left\| -\alpha_i \frac{d\mathbf{K}^{\alpha_i}}{d\alpha_i} \right\| \approx 0$ .

**Результат, полученный на шестом этапе:** множество  $\mathbf{Q}$  возможных приближенных регуляризованных решений.

**7.** Оценка отклонения регуляризованных решений от условно точного решения.

**7.1.** Решение прямой задачи со значениями параметров  $a_{ij}^\alpha$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Найдены функции  $x_1^\alpha(t)$ ,  $x_2^\alpha(t)$ , ...,  $x_n^\alpha(t)$ , являющиеся решением прямой задачи;

**7.2.** Вычисление значений функций  $x_1^\alpha(t)$ ,  $x_2^\alpha(t)$ , ...,  $x_n^\alpha(t)$  в моменты времени  $t_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$ . Значения  $x_1^\alpha(t_k)$ ,  $x_2^\alpha(t_k)$ , ...,  $x_n^\alpha(t_k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$ , рассмотрены как расчетные данные функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ ;

**7.3.** Проверка совпадения между измеренными и расчетными данными. Для каждой функции  $x_i(t)$  определена средняя абсолютная ошибка (MAE) между измеренными и расчетными данными по формуле:  $MAE(x_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\tilde{x}_i(t_k) - x_i^\alpha(t_k)|$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $MAE(x_i(t)) \approx 0$ , то существует совпадение между измеренными и расчетными данными. MAE позволяет в целом оценить отклонение между измеренными и расчетными данными, но не обеспечивает возможность

проверить, мало ли отклонение каждой пары данных в наборе измеренных и расчетных данных. Выбросы приведут к тому, что измеренные и рассчитанные данные будут иметь небольшую среднюю абсолютную ошибку, сосредоточенную в основном в нескольких точках. Для исключения таких случаев используется показатель эффективности Нэша–Сатклиффа (NSE).

Для каждой функции  $x_i(t)$  определен показатель эффективности Нэша–Сатклиффа между измеренными и расчетными данными по формуле:  $NSE(x_i(t)) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (\tilde{x}_i(t_k) - x_i^\alpha(t_k))^2}{\sum_{k=1}^N (\tilde{x}_i(t_k) - \bar{\tilde{x}}_i)^2}$ , где

$i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\bar{\tilde{x}}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{x}_i(t_k)$  – среднее значение измеренных данных. Если  $MAE(x_i(t)) \approx 0$  и  $NSE(x_i(t)) \geq 0.75$ , то существует совпадение между измеренными и расчетными данными.

#### 7.4. Проверка линейной корреляции между измеренными и расчетными данными.

Для каждой функции  $x_i(t)$  определен коэффициент корреляции Пирсона (R) между измеренными и расчетными данными по формуле:  $R(x_i(t)) = \frac{\sum_{k=1}^N (\tilde{x}_i(t_k) - \bar{\tilde{x}}_i)(x_i^\alpha(t_k) - \bar{x}_i^\alpha)}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (\tilde{x}_i(t_k) - \bar{\tilde{x}}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_i^\alpha(t_k) - \bar{x}_i^\alpha)^2}}$ , где

$i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\bar{\tilde{x}}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{x}_i(t_k)$  – среднее значение измеренных данных,  $\bar{x}_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^\alpha(t_k)$  – среднее значение расчетных данных. Этот коэффициент показывает, существует ли линейная корреляция между измеренными и расчетными данными. Если  $0.8 < R(x_i(t)) \leq 1$ , то существует сильная линейная корреляция между измеренными и расчетными данными.

Если существуют совпадение и сильная линейная корреляция между измеренными и расчетными данными всех функций  $x_i(t)$ , то регуляризованное решение  $\mathbf{K}^\alpha$  является приближением к точному решению  $\mathbf{K}^0$ . Вместо условно точных значений параметров математической модели можно применить значения  $a_{11}^\alpha, a_{12}^\alpha, \dots, a_{lm}^\alpha, \dots, a_{n1}^\alpha, a_{n2}^\alpha, \dots, a_{nm}^\alpha$  для моделирования поведения объектов/процессов в динамических системах.

**Результат, полученный на седьмом этапе:** множество  $\mathbf{Q}_{np}$  приближенных регуляризованных решений, где  $\mathbf{Q}_{np} \subset \mathbf{Q}$ .

#### 8. Сужение множества $\mathbf{Q}_{np}$ приближенных регуляризованных решений.

**8.1.** Сужение множества приближенных регуляризованных решений на основе оценки отклонения между измеренным и расчетным данными.

**8.1.1.** Для каждого приближенного регуляризованного решения  $\mathbf{K}^\alpha \in \mathbf{Q}_{np}$  определено значение  $NSE^\alpha = \sum_{i=1}^n NSE(x_i(t))$ , где  $NSE(x_i(t))$  – показатели эффективности Нэша–Сатклиффа между измеренными и расчетными данными для функций  $x_i(t)$  (значения  $NSE(x_i(t))$  были вычислены на шаге 7);

#### 8.1.2. Построение диаграммы рассеяния значений $NSE^\alpha$ ;

**8.1.3.** Из диаграммы рассеяния значения  $NSE^\alpha$  определено значение  $s$  ( $0.75n \leq s \leq n$ ). Чем больше  $s$ , тем больше совпадение между измеренными и расчетными данными, но отклонение между приближенными и точными решениями может быть не наименьшим. Чем больше  $s$ , тем меньше количество элементов сужаемого множества приближенных регуляризованных решений – множества  $\mathbf{Q}^*$ , но вероятность того, что лучшее решение (т. е. более близкое к точному решению) находится за пределами множества  $\mathbf{Q}^*$ , увеличивается.

#### 8.1.4. Определение множества $\mathbf{Q}^*$ . Выбраны все элементы множества $\mathbf{Q}_{np}$ , для которых

имеется  $\sum_{i=1}^n NSE(x_i(t)) \geq s$ . В результате получено множество  $\mathbf{Q}^* \subset \mathbf{Q}_{np}$  приближенных регуляризованных решений.

**8.2.** Сужение множества  $\mathbf{Q}^*$  на основе важности критериев задачи двухкритериальной оптимизации.

Пусть множеств  $\mathbf{Q}^*$  состоит из  $M$  элементов  $\mathbf{K}^{\alpha_1}, \mathbf{K}^{\alpha_2}, \dots, \mathbf{K}^{\alpha_M}$ . Из этого множества можно определить два множества, содержащие значения  $\|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_i} - \mathbf{B}_\delta\|$  и  $\|\mathbf{K}^{\alpha_i}\|$ , где  $i=1, 2, \dots, M$ . Будем выбрать элемент  $\mathbf{K}^{\alpha_i}$ , при котором  $\|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_i} - \mathbf{B}_\delta\|$  и  $\|\mathbf{K}^{\alpha_i}\|$  достигают минимума. Рассмотрена задача двухкритериальной оптимизации:

$$\min_{\mathbf{K} \in \mathbf{Q}^*} f_1(\mathbf{K}) = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} - \mathbf{B}_\delta\|, \min_{\mathbf{K} \in \mathbf{Q}^*} f_2(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|, \quad (7)$$

где  $\mathbf{K} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})^T$ ,  $\mathbf{Q}^* = (\mathbf{K}^{\alpha_1}, \mathbf{K}^{\alpha_2}, \dots, \mathbf{K}^{\alpha_M})$ . Первый критерий – норма разности двух частей приближенной системы  $\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} = \mathbf{B}_\delta$ , второй – норма вектора приближенного регуляризованного решения  $\mathbf{K}$ . Для любого вектора  $\mathbf{K} \in \mathbf{Q}^*$  целевые функции  $f_1(\mathbf{K}) = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} - \mathbf{B}_\delta\|^2$  и  $f_2(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|^2$  не достигают минимума одновременно, т. е. задача (7) не имеет решения. В этом случае найдено и сужено множество Парето-оптимальных решений (множество Парето).

**8.2.1.** Определение множества Парето задачи двухкритериальной оптимизации (7). Для элемента  $\mathbf{K}^{\alpha_i} \in \mathbf{Q}^*$  проверены условия:  $f_1(\mathbf{K}^{\alpha_j}) \leq f_1(\mathbf{K}^{\alpha_i})$ ,  $f_2(\mathbf{K}^{\alpha_j}) \leq f_2(\mathbf{K}^{\alpha_i})$  и  $f_1(\mathbf{K}^{\alpha_j}) \neq f_1(\mathbf{K}^{\alpha_i})$  (или  $f_2(\mathbf{K}^{\alpha_j}) \neq f_2(\mathbf{K}^{\alpha_i})$ ), где  $i, j=1, 2, \dots, M$ ;  $i \neq j$ . Если не существует элемента  $\mathbf{K}^{\alpha_j}$ , удовлетворяющего этим условиям, то  $\mathbf{K}^{\alpha_i}$  является Парето-оптимальным решением. Получены множество фронтов Парето:  $\mathbf{P}(f(\mathbf{K})) = \{(f_1(\mathbf{K}^{\alpha_i}), f_2(\mathbf{K}^{\alpha_i}))\}$  и множество Парето-оптимальных решений:  $\mathbf{P}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{K}^{\alpha_i}\} \subset \mathbf{Q}^*$ , где  $i=1, 2, \dots, K$ ,  $K \leq M$ . Далее сужено множество  $\mathbf{P}(\mathbf{K})$  на основе дополнительной информации о важности критериев.

**8.2.2.** Определение наиболее важного критерия. Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), считает приоритетным первый критерий  $f_1(\mathbf{K})$  (потому, что значения функции  $f_1(\mathbf{K})$  уменьшаются сильнее, чем  $f_2(\mathbf{K})$ , или потому, что первый критерий важнее второго критерия). ЛПР готово увеличить значение функции  $f_2(\mathbf{K})$  на  $w_2$  единиц, чтобы уменьшить функцию  $f_1(\mathbf{K})$  на  $w_1$  единиц, где  $w_1, w_2$  – положительные параметры, выражающие приоритеты и важность критериев. По свойствам инвариантных бинарных отношений можно преобразовать целевые функции  $\hat{f}_1 = f_1 + w_1$ ,  $\hat{f}_2 = f_2 - w_2$  в виде  $\hat{f}_1 = f_1$ ,  $\hat{f}_2 = w_2 f_1 + w_1 f_2$ ;

**8.2.3.** Решение задача двухкритериальной оптимизации:

$$\min_{\mathbf{K} \in \mathbf{P}(\mathbf{K})} \hat{f}_1(\mathbf{K}) = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} - \mathbf{B}_\delta\|, \min_{\mathbf{K} \in \mathbf{P}(\mathbf{K})} \hat{f}_2(\mathbf{K}) = w_2 \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K} - \mathbf{B}_\delta\| + w_1 \|\mathbf{K}\|. \quad (8)$$

Получена оценка всех элементов множества  $\mathbf{P}(\mathbf{K})$  по новым критериям  $\hat{f}_1 = f_1$ ,  $\hat{f}_2 = w_2 f_1 + w_1 f_2$ . Определено множество целевых оценок  $\mathbf{P}(\hat{f}(\mathbf{K})) = \{(\hat{f}_1(\mathbf{K}^{\alpha_i}), \hat{f}_2(\mathbf{K}^{\alpha_i}))\}$ , где  $i=1, 2, \dots, K$ ,  $K \leq M$ .

**8.2.4.** Построение шкалы значений  $w_1$  (или  $w_2$ ). Для каждого элемента  $\mathbf{K}^{\alpha_i} \in \mathbf{P}(\mathbf{K})$  найдены значения  $w_1$  (или  $w_2$ ) так, чтобы они являлись Парето-оптимальными решениями задачи (8). Если  $\hat{f}_1(\mathbf{K}^{\alpha_i}) > \hat{f}_1(\mathbf{K}^{\alpha_j})$ , то решено неравенство  $\hat{f}_2(\mathbf{K}^{\alpha_i}) < \hat{f}_2(\mathbf{K}^{\alpha_j})$ , где  $i, j=1, 2, \dots, K$ ;  $i \neq j$ . Если  $\hat{f}_1(\mathbf{K}^{\alpha_i}) = \hat{f}_1(\mathbf{K}^{\alpha_j})$ , то решено неравенство  $\hat{f}_2(\mathbf{K}^{\alpha_i}) \leq \hat{f}_2(\mathbf{K}^{\alpha_j})$ .

**8.2.5.** Сужение множества Парето  $\mathbf{P}_\kappa(\mathbf{K}) \subset \mathbf{P}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{Q}^*$  по новым критериям. Из шкалы значений  $w_1$  (или  $w_2$ ) выбраны элементы множества  $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ , которые являются Парето-оптимальными решениями по новым критериям. Получено новое множество Парето задачи (7) с использованием дополнительной информации о важности критериев.

**Результат, полученный на восьмом этапе:** суженное множество приближенных регуляризованных решений  $Q^{**} \subset Q^* \subset Q_{np}$ , где  $Q^{**} = P_k(K)$ .

**Четвертая глава** посвящена разработке прогнозирующей модели поведения объектов/процессов с использованием разработанного метода восстановления параметров математической модели.

Рассмотрена задача: по заданным значениям функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в разные моменты времени  $t_k$ , т. е.  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ , где  $k=1, 2, \dots, N$ , прогнозировать поведение объектов/процессов в заданные моменты времени. Для решения этой задачи существует несколько моделей прогнозирования временных рядов, их недостатки представлены в таблице 1. Таблица 1 – Недостатки существующих моделей прогнозирования временных рядов

Модели прогнозирования временных рядов		Недостатки
Статистические модели	Регрессионные модели	– сложность определения функциональной зависимости; – трудоемкость нахождения коэффициентов зависимости.
	Модель авторегрессии скользящего среднего ARIMA (авторегрессионные модели)	– для построения модели требуется <i>большой объем исходных данных</i> ; – используется только для <i>стационарного ряда данных</i> , или для исходных рядов, которые можно преобразовать в стационарный ряд; – требуются большие затраты временных ресурсов для того, чтобы построить удовлетворительную модель
	Модель экспоненциального сглаживания	– прогнозирует на короткий период времени вперед; – результатом прогноза является диапазон данных, а не конкретное число.
Структурные модели	Нейросетевые модели	– <i>сложность построения архитектуры сети</i> для конкретной задачи; – значения параметров элементов сети почти всегда невозможно объяснить в терминах решаемой задачи; – процесс их обучения происходит достаточно медленно, а последующий анализ уже обученной нейронной сети является сложным.
	Модели на базе цепей Маркова	– узкая применимость моделей (применены в случае, когда объекты/процессы имеют <i>четкие состояния</i> и можно определить вероятность перехода из одного состояния в другое); – нельзя моделировать долгосрочные процессы.
	Модели на базе дерева принятия решений	– деревья могут быть нестабильными, поскольку небольшие изменения в данных могут привести к созданию совершенно другого дерева; – предсказания деревьев решений не являются ни гладкими, ни непрерывными, а являются кусочно-постоянными приближениями.

Разработка прогнозирующей модели поведения объектов/процессов состоит в нахождении на основе ряда измеренных данных функции, описывающей зависимость поведения объектов/процессов от времени. Процесс прогнозирования поведения объектов/процессов состоит из следующих шагов:

**1.** Построение математической модели, описывающей изменение поведения объектов/процессов в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5).

**2.** Определение значений  $\tilde{x}_1(t_k), \tilde{x}_2(t_k), \dots, \tilde{x}_n(t_k)$  – измеренных данных функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $t_k$ , где  $k=1, 2, \dots, 2N$ .

Половина измеренных данных использована для построения прогнозирующей модели, вторая половина – для оценки точности прогнозирующей модели.

**3.** Построение прогнозирующей модели.

Решена прямая задача с параметрами математической модели  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}$  и начальным условием  $\mathbf{X}(\mathbf{0})$ . Получены функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , которые зависят от параметров математической модели и начального условия, т. е.  $x_1(t) = g_1(K, \mathbf{X}(\mathbf{0}), t)$ ,  $x_2(t) = g_2(K, \mathbf{X}(\mathbf{0}), t)$ , ...,  $x_n(t) = g_n(K, \mathbf{X}(\mathbf{0}), t)$ , где  $K = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})^T$ ,  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))^T$ . Прогнозирующая модель имеет общий вид:  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}(K, \mathbf{X}(\mathbf{0}), t)$ , где  $K, \mathbf{X}(\mathbf{0})$  – параметры прогнозирующей модели;  $t$  – независимая переменная;

$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ ;  $\mathbf{G}(\mathbf{K}, \mathbf{X}(0), t) = (g_1(\mathbf{K}, \mathbf{X}(0), t), g_2(\mathbf{K}, \mathbf{X}(0), t), \dots, g_n(\mathbf{K}, \mathbf{X}(0), t))^T$ . Если система уравнений (5) является системой линейных дифференциальных уравнений:  $\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ , то прогнозирующая модель имеет вид:  $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0)$ , где  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  – матрица с элементами  $a_{ij}$ , являющимися параметрами математической модели, где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**4. Определение множества параметров  $\mathbf{K}$  прогнозирующей модели с помощью разработанного метода восстановления параметров математической модели.**

Использован разработанный метод восстановления параметров математической модели с измеренными данными  $\tilde{x}_1(t_k), \tilde{x}_2(t_k), \dots, \tilde{x}_n(t_k)$ , где  $k = 1, 3, \dots, 2N-1$ . В результате получено множество приближенных значений параметров математической модели – множество  $\mathbf{Q}^{**}$ .

**5. Выбор параметра  $\mathbf{K}$  прогнозирующей модели.**

Рассмотрен общий вид прогнозирующей модели:  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{K}, \mathbf{X}(0), t)$ , где  $\mathbf{K}$  определяется элементами  $\mathbf{K}^{\alpha_i}$  множества  $\mathbf{Q}^{**}$ . Определены значения  $x_1^{\alpha_j}(t_k), x_2^{\alpha_j}(t_k), \dots, x_n^{\alpha_j}(t_k)$  – прогнозные данные функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $t_k$ , где  $k = 1, 3, \dots, 2N-1$ .

Отметим, что измеренные и расчетные данные, используемые в методе восстановления параметров математической модели, также являются фактическими и прогнозными данными в прогнозирующей модели. Для каждого элемента множества  $\mathbf{Q}^{**}$  отклонение между измеренными данными и расчетными данными мало. Однако, **точность прогнозирующей модели определяется на основе отклонения фактических данных от прогнозных по отношению к фактическим данным.**

**Калибровка модели прогнозирования.** Под калибровкой понимается процесс регулировки параметров модели прогнозирования для приближения прогнозов модели к фактическим результатам. Имеем, что отклонение между измеренными и расчетными данными каждой функции  $x_i(t)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , мало, т. е.  $MAE(x_i(t)) \approx 0$ . Будем оценивать, насколько велико отклонение между измеренными и расчетными данными в сравнении с измеренными данными (насколько прогнозные значения отличаются от фактических значений). Вычислена средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) между измеренными и расчетными данными

для каждой функции  $x_i(t)$ :  $MAPE(x_i(t)) = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{\tilde{x}_i(t_k) - x_i^{\alpha}(t_k)}{\tilde{x}_i(t_k)} \right| * 100\%$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$k = 1, 3, \dots, 2N-1$ . Из множества  $\mathbf{Q}^{**}$  выбран элемент  $\mathbf{K}^{\alpha}$  так, чтобы значение  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MAPE(x_i^{\alpha}(t))$  достигало минимума.

**6. Оценка точности разработанной прогнозирующей модели.**

Использована вторая половина измеренных данных. С помощью построенной прогнозирующей модели:  $\mathbf{X}^{\alpha}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{K}^{\alpha}, \mathbf{X}(0), t)$  определены значения  $x_1^{\alpha}(t_k), x_2^{\alpha}(t_k), \dots, x_n^{\alpha}(t_k)$ , которые являются прогнозными данными функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в моменты времени  $t_k$ , где  $k = 2, 4, \dots, 2N$ . Для оценки точности прогнозирующей модели использованы: средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) и визуальный способ. Точность разработанной прогнозирующей модели определяется по формуле:  $\mathbf{T} = 100\% - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MAPE(x_i^{\alpha}(t))$ .

**7. Прогноз поведения объектов/процессов.** На основе разработанной прогнозирующей модели и графика функции  $x_1^{\alpha}(t), x_2^{\alpha}(t) \dots, x_n^{\alpha}(t)$  можно определить поведение объекта/процесса.

На основе разработанной прогнозирующей модели решена следующая задача.

**Задача 3.** Изменить параметры прогнозирующей модели  $\mathbf{X}(0)$  или  $\mathbf{K}^{\alpha}$  так, чтобы поведение объектов/процессов достигало желаемого значения  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  в момент  $t_1$ .

Решением этой задачи считаются вектор  $\mathbf{X}^{on}(0)$  и матрица  $\mathbf{K}^{on}$ , при которых

$J(\mathbf{X}^{on}(0)) = \|\mathbf{G}(\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{X}^{on}(0), t_1) - \bar{\mathbf{X}}\| = 0$  и  $J(\mathbf{K}^{on}) = \|\mathbf{G}(\mathbf{K}^{on}, \mathbf{X}(0), t_1) - \bar{\mathbf{X}}\| = 0$ . Однако,  $\mathbf{X}^{on}(0)$  и  $\mathbf{K}^{on}$  может не существовать. Будем искать субоптимальные решения  $\mathbf{X}^*(0)$  и  $\mathbf{A}^*$ , удовлетворяющие условиям:  $J(\mathbf{X}^*(0)) \leq \varepsilon$  или  $J(\mathbf{K}^*) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – максимальная ошибка,  $\frac{\varepsilon}{\|\bar{\mathbf{X}}\|} \approx 0$ .

Алгоритм решения задачи 3 с требованием изменения  $\mathbf{X}(0)$ :

1. Заданы отрезки значений функций  $x_i(t)$  в начальный момент времени  $t=0$ :  $a_i \leq x_i(0) \leq b_i$ , где  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $a_i \leq b_i$  и максимальная ошибка  $\varepsilon$ .

2. Определение последовательностей значений  $x_i(0)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Определение последовательности  $\mathbf{S}_i$ , где  $\mathbf{S}_i = \{s_k\}$ , с начальным значением  $s_0 = a_i$  по отношению:  $s_{k+1} = s_k + h_i$ ,  $s_{k+1} \leq b_i$ ,  $h_i$  – малые положительные числа.

3. Обновление разработанной прогнозирующей модели:  $\mathbf{X}^\alpha(t) = \mathbf{G}(\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{X}(0), t)$  с параметром  $\mathbf{X}(0) = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ , где  $s_1 \in \mathbf{S}_1$ ,  $s_2 \in \mathbf{S}_2$ ,  $\dots$ ,  $s_n \in \mathbf{S}_n$ .

4. Определение вариантов изменения вектора  $\mathbf{X}^*(0) = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ , при которых  $J(\mathbf{X}^*(0)) = \|\mathbf{G}(\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{X}^*(0), t_1) - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \varepsilon$ .

Алгоритм решения задачи 3 с требованием изменения  $\mathbf{A}^\alpha$ :

1. Заданы отрезки значений параметров математической модели  $c_{ij} \leq a_{ij} \leq d_{ij}$ , где  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ ,  $c_{ij} \leq d_{ij}$  и максимальная ошибка  $\varepsilon$ .

2. Определение последовательностей значений  $a_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ .

Определение последовательности  $\mathbf{S}_{ij}$ , где  $\mathbf{S}_{ij} = \{s_k\}$ , с начальным значением  $s_0 = c_{ij}$  по отношению:  $s_{k+1} = s_k + h_{ij}$ ,  $s_{k+1} \leq d_{ij}$ ,  $h_{ij}$  – малые положительные числа.

3. Обновление разработанной прогнозирующей модели:  $\mathbf{X}^\alpha(t) = \mathbf{G}(\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{X}(0), t)$  с параметром  $\mathbf{K}^\alpha = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{nm})^T$ , где  $s_{11} \in \mathbf{S}_{11}$ ,  $s_{12} \in \mathbf{S}_{12}$ ,  $\dots$ ,  $s_{nm} \in \mathbf{S}_{nm}$ .

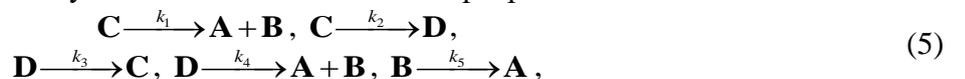
4. Определение вариантов изменения вектора  $\mathbf{K}^* = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{nm})^T$ , при которых  $J(\mathbf{K}^*) = \|\mathbf{G}(\mathbf{K}^*, \mathbf{X}(0), t_1) - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \varepsilon$ .

В результате найдены варианты изменения векторов  $\mathbf{X}(0)$  или  $\mathbf{K}^\alpha$  – параметров разработанной прогнозирующей модели так, чтобы поведение объектов/процессов приближалось к желаемому значению  $\bar{\mathbf{X}}$  в момент  $t_1$ .

Разработанная прогнозирующая модель лишена недостатков существующих моделей прогнозирования, перечисленных в таблице 1. Результаты прогнозирования на основе разработанной модели являются более точными по сравнению с результатами прогнозирования с помощью существующих моделей (результаты сравнения показаны в пятой главе). Разработанная модель формирует новый подход к прогнозированию поведения объектов/процессов в динамических системах с использованием теории решения некорректных обратных задач.

**Пятая глава** посвящена исследованию процессов нефтепереработки, производства метанола, обучения иностранному языку.

**1. Рассмотрим процесс нефтепереработки** с исходной смесью, состоящей из одного тяжелого углеводорода  $\mathbf{C}$  по следующей схеме химического превращения:



где  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  – константы скорости реакций (далее – константы),  $c^{-1}$ .

Математическая модель процесса нефтепереработки имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = k_5 y_2(t) + k_1 y_3(t) + k_4 y_4(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -k_5 y_2(t) + k_1 y_3(t) + k_4 y_4(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = -(k_1 + k_2) y_3(t) + k_3 y_4(t), \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = k_2 y_3(t) - (k_2 + k_4) y_4(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ ,  $y_4(t)$  – концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D** в момент времени  $t$ ,  $\frac{\text{моль}}{\text{л}}$ . В начальный момент времени  $t=0$  концентрации веществ равны  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$ ,  $y_3(0)$ ,  $y_4(0)$ .

**Обратная задача.** По измеренным концентрациям веществ в моменты времени  $t_k$ , т. е.  $\tilde{y}_1(t_k)$ ,  $\tilde{y}_2(t_k)$ ,  $\tilde{y}_3(t_k)$ ,  $\tilde{y}_4(t_k)$ , где  $k=1, 2, \dots, N$ , найти константы скорости реакций:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ .

**Восстановление параметров математической модели.** Пусть заданы концентрации веществ, измеренные в разные моменты времени:  $\tilde{y}_1(t_k)$ ,  $\tilde{y}_2(t_k)$ ,  $\tilde{y}_3(t_k)$ ,  $\tilde{y}_4(t_k)$  (см. таблицу 2).

С помощью метода восстановления параметров математической модели найдено и сужено множество приближенных значений констант скорости реакций. В качестве примера выбраны  $k_1^\alpha = 0,0196$ ,  $k_2^\alpha = 0,0014$ ,  $k_3^\alpha = 0,0013$ ,  $k_4^\alpha = 0,0218$ ,  $k_5^\alpha = 0,1035$ . Расчетные концентрации веществ, т. е.  $y_1^\alpha(t_k)$ ,  $y_2^\alpha(t_k)$ ,  $y_3^\alpha(t_k)$ ,  $y_4^\alpha(t_k)$ , показаны в таблице 2.

Таблица 2 – Измеренные и расчетные концентрации веществ для восстановления параметров математической модели

$t_k (c)$	$\tilde{y}_1(t_k)$	$y_1^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_2(t_k)$	$y_2^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_3(t_k)$	$y_3^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_4(t_k)$	$y_4^\alpha(t_k)$
0	0	0	0	0	90	90	10	10
30	77,76	77,66	12,48	12,02	48,11	48,24	6,77	6,89
60	132,29	132,04	7,47	7,17	25,75	25,89	4,37	4,46
90	162,81	162,55	4,13	3,98	13,79	13,91	2,74	2,77
120	179,59	179,37	2,27	2,19	7,39	7,48	1,68	1,68
150	188,50	188,63	1,24	1,20	3,96	4,03	1,01	1,00
180	193,85	193,71	0,68	0,66	2,13	2,17	0,60	0,58
210	196,63	196,49	0,38	0,36	1,14	1,17	0,36	0,34
240	198,15	198,02	0,21	0,20	0,62	0,63	0,21	0,19
270	198,98	198,86	0,11	0,11	0,33	0,34	0,12	0,11
MAE	0,1688		0,1179		0,0706		0,0359	
NSE	1		0,9977		1		0,9994	
R	1		1		1		1	

**Прогнозирование.** Компании требуется получить прогноз, какая концентрация продукта **A** будет получена в момент времени  $t = 400$  с. Построена прогнозирующая модель концентрации вещества **A** со значениями  $k_1^\alpha = 0,0197$ ,  $k_2^\alpha = 0,0013$ ,  $k_3^\alpha = 0,0012$ ,  $k_4^\alpha = 0,0213$ ,  $k_5^\alpha = 0,1035$ . В результате получена функция  $y_1^\alpha(t)$ , график которой показан на рисунке 1.

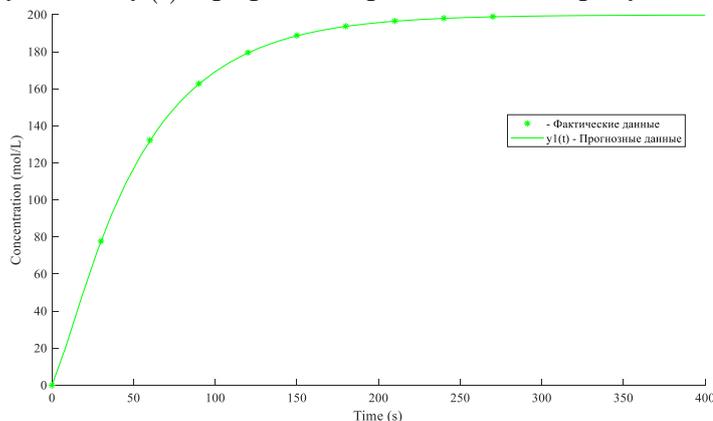


Рисунок 1 – График функции прогнозирования концентрации вещества **A** в процессе нефтепереработки

Проведено сравнение результатов прогнозирования концентрации вещества **A** с помощью разработанной модели с другими существующими моделями прогнозирования (см. рисунок 2).

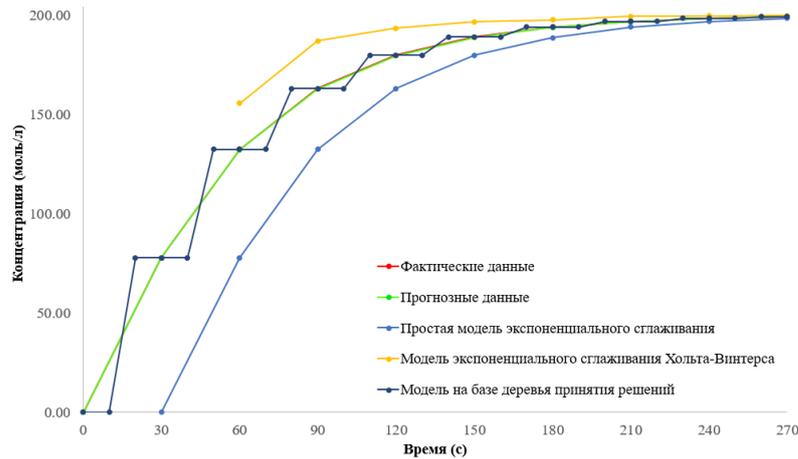


Рисунок 2 – Сравнение результатов прогнозирования концентрации вещества **A** с использованием разных моделей. Видно, что разработанная модель по сравнению с другими существующими моделями позволяет получить прогнозы, более близкие к измеренным значениям.

**Оценка точности разработанной прогнозирующей модели.** Фактические и прогнозные концентрации вещества **A** в разные моменты времени представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Фактические и прогнозные концентрации вещества **A** для оценки точности модели прогнозирования

$t_k (c)$	10	40	70	100	130	160	190	220	250	280	$MAPE = 0,10\%$
$\tilde{y}_1(t_k)$	24,98	99,36	144,54	169,55	183,29	190,83	194,97	197,24	198,48	199,17	
$y_1^\alpha(t_k)$	24,96	99,25	144,31	169,32	183,09	190,66	194,82	197,10	198,35	199,04	

Прогнозирующая модель имеет точность:  $T = 100\% - MAPE = 99,90\%$ . Прогноз: Концентрация вещества **A** в момент времени  $t = 400 c$  равна  $199,79 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$ . Компании требуется, чтобы в момент  $t = 400 c$  концентрация продукта **A** достигала  $300 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$  с максимальной ошибкой  $1 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$ . Изменены концентрации веществ в начальный момент времени с дополнительными условиями:  $80 \leq y_1(0) \leq 100$ ,  $y_2(0) = 20$ ,  $y_3(0) = 0$ ,  $90 \leq y_4(0) \leq 100$ . В результате расчетов найдены  $y_1^*(0) = 80$ ,  $y_2^*(0) = 20$ ,  $y_3^*(0) = 0$ ,  $y_4^*(0) = 100$ . При этом,  $y_1^\alpha(400) = 299,08$  и  $J(\mathbf{X}^*(0)) = 0,92$ .

**2. Рассмотрим процесс производства метанола**, математическая модель которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -k_1 y_1(t) y_2^2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -2k_1 y_1(t) y_2^2(t) - 3k_2 y_4(t) y_2^3(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = k_1 y_1(t) y_2^2(t) + k_2 y_4(t) y_2^3(t), \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = -k_2 y_4(t) y_2^3(t), \\ \frac{dy_5(t)}{dt} = k_2 y_4(t) y_2^3(t), \end{cases} \quad (7)$$

где  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ ,  $y_4(t)$ ,  $y_5(t)$  – функции, выражающие зависимость концентрации веществ  $CO$ ,  $H_2$ ,  $CH_3OH$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$  от времени  $t$ ,  $\frac{\text{моль}}{\text{л}}$ ;  $k_1$ ,  $k_2$  – константы скорости реакций,  $\frac{\text{л}^2}{\text{моль}^2 \cdot c}$ ,  $\frac{\text{л}^3}{\text{моль}^3 \cdot c}$ . В начальный момент времени  $t=0$  концентрации веществ равны  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$ ,  $y_3(0)$ ,  $y_4(0)$ ,  $y_5(0)$ .

**Обратная задача.** По измеренным концентрациям веществ в моменты времени  $t_k$ , т. е.

$\tilde{y}_1(t_k), \tilde{y}_2(t_k), \tilde{y}_3(t_k), \tilde{y}_4(t_k), \tilde{y}_5(t_k)$ , где  $k=1, 2, \dots, N$ , найти значения констант скорости:  $k_1, k_2$ .

**Восстановление параметров математической модели.** Заданы концентрации веществ, измеренные в разные моменты времени:  $\tilde{y}_1(t_k), \tilde{y}_2(t_k), \tilde{y}_3(t_k), \tilde{y}_4(t_k), \tilde{y}_5(t_k)$  (см. таблицу 4).

С помощью метода восстановления параметров математической модели найдено и сужено множество приближенных значений констант скорости реакций. В качестве примера выбраны  $k_1^\alpha = 0,0098, k_2^\alpha = 0,0200$ . Расчетные концентрации веществ, т. е.  $y_1^\alpha(t_k), y_2^\alpha(t_k), y_3^\alpha(t_k), y_4^\alpha(t_k)$ , показаны в таблице 4.

Таблица 4 – Измеренные и расчетные концентрации веществ для восстановления параметров математической модели

$t_k (c)$	$\tilde{y}_1(t_k)$	$y_1^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_2(t_k)$	$y_2^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_3(t_k)$	$y_3^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_4(t_k)$	$y_4^\alpha(t_k)$	$\tilde{y}_5(t_k)$	$y_5^\alpha(t_k)$
0	1	1	0,500	0,500	0	0	1	1	0	0
10	0,980	0,980	0,406	0,405	0,038	0,038	0,982	0,982	0,018	0,018
20	0,966	0,967	0,347	0,347	0,062	0,062	0,972	0,971	0,028	0,029
30	0,956	0,957	0,307	0,306	0,079	0,079	0,965	0,964	0,035	0,036
40	0,948	0,949	0,276	0,276	0,092	0,092	0,960	0,959	0,040	0,041
50	0,941	0,943	0,253	0,252	0,102	0,102	0,957	0,956	0,043	0,044
60	0,936	0,937	0,233	0,233	0,110	0,110	0,954	0,953	0,046	0,047
70	0,931	0,933	0,217	0,217	0,117	0,117	0,952	0,951	0,048	0,049
80	0,927	0,929	0,204	0,204	0,123	0,123	0,950	0,949	0,050	0,051
90	0,923	0,925	0,192	0,192	0,128	0,128	0,948	0,947	0,052	0,053
MAE	0,0013		0,0003		0,0003		0,0010		0,0010	
NSE	0,9939		1		0,9999		0,9910		0,9910	
R	1		1		1		0,9997		0,9997	

**Прогнозирование.** Компании требуется получить прогноз, какая концентрация метанола будет получена в момент времени  $t = 400 c$ . Построена прогнозирующая модель концентрации метанола со значениями  $k_1^\alpha = 0,0099, k_2^\alpha = 0,0203$ . В результате расчетов получена функция  $y_3^\alpha(t)$ , график которой показан на рисунке 3.

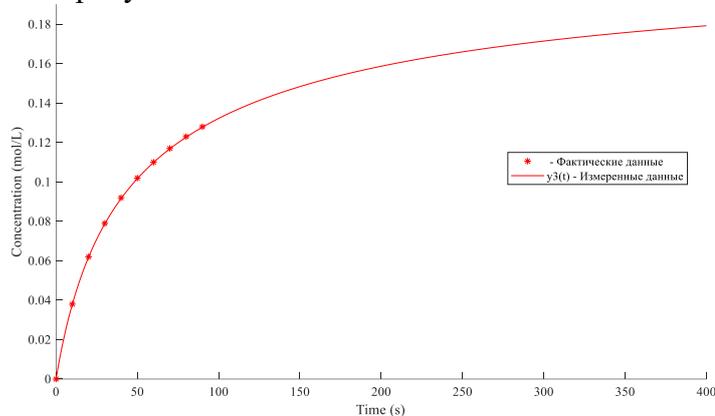


Рисунок 3 – График функции прогнозирования концентрации метанола

Проведено сравнение результатов прогнозирования концентрации метанола с помощью разработанной модели с результатами, полученными с помощью других существующих моделей прогнозирования (см. рисунок 4).

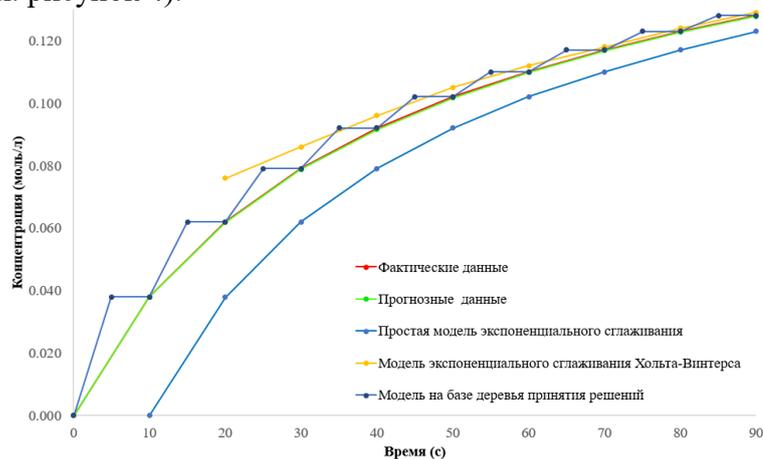


Рисунок 4 – Сравнение результатов прогнозирования концентрации метанола с использованием разных моделей

Видно, что разработанная модель по сравнению с другими существующими моделями позволяет получить прогнозы, более близкие к измеренным значениям.

**Оценка точности разработанной модели прогнозирования.** Фактические и прогнозные концентрации метанола в разные моменты времени представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Фактические и прогнозные концентрации метанола для оценки точности модели прогнозирования

$t_k (c)$	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	$MAPE = 0,24\%$
$\tilde{y}_3(t_k)$	0,022	0,051	0,071	0,086	0,097	0,106	0,114	0,120	0,126	0,130	
$y_3^\alpha(t_k)$	0,021	0,051	0,071	0,086	0,097	0,106	0,114	0,120	0,125	0,130	

Разработанная прогнозирующая модель имеет точность:  $T = 100\% - MAPE = 99,76\%$ . Прогноз:

Концентрация метанола в момент времени  $t = 400 c$  равна  $0,179 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$ . Компании требуется, чтобы

в момент  $t = 400 c$  концентрация метанола достигала  $1 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$  с максимальной ошибкой  $0,01 \frac{\text{моль}}{\text{л}}$ .

Изменены концентрации веществ в начальный момент времени с условиями:  $1 \leq y_1(0) \leq 3$ ,  $1 \leq y_2(0) \leq 5$ ,  $y_3(0) = 0$ ,  $y_4(0) = 1$ ,  $y_5(0) = 0$ . В результате выбраны  $y_1^*(0) = 2$ ,  $y_2^*(0) = 2,5$ ,  $y_3^*(0) = 0$ ,  $y_4^*(0) = 1$ ,  $y_5^*(0) = 0$ . При этом  $y_1^\alpha(400) = 0,992$  и  $J(X^*(0)) = 0,008$ .

**3. Рассмотрим процесс обучения иностранному языку**, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_0(t)}{dt} = -\lambda_0 y_0(t) + \mu_1 y_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} = \lambda_0 y_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) y_1(t) + \mu_2 y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = \lambda_1 y_1(t) - \mu_2 y_2(t), \end{cases} \quad (8)$$

где  $y_0(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  – функции вероятностей состояний «знание родного языка», «знание интерязыка», «знание неродного языка»;  $\lambda_0$  – интенсивность использования родного языка для изучения неродного языка;  $\lambda_1$  – интенсивность обращения к неродному языку в процессе его изучения;  $\mu_1$  – интенсивность обращения к родному языку при забывании значений слов, выражений, понятий неродного языка;  $\mu_2$  – интенсивность использования неродного языка в процессе его изучения. Под вероятностью состояния понимается количественная оценка степени понимания языка, лежащая в диапазоне от 0 до 1. В начальный момент времени  $t=0$ :  $y_0(t)_{t=0} = y_0(0)$ ,  $y_1(t)_{t=0} = y_1(0)$ ,  $y_2(t)_{t=0} = y_2(0)$ .

**Обратная задача.** По заданным вероятностям состояний в моменты времени  $t_k$ , т. е.  $\tilde{y}_0(t_k)$ ,  $\tilde{y}_1(t_k)$ ,  $\tilde{y}_2(t_k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$ , найти значения интенсивностей  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ .

**Восстановление значений параметров математической модели.** Рассмотрим курс английского языка длительностью 52 недели. Вероятности состояний определены по результатам тестирования. Пусть заданы вероятности состояний в разные моменты времени:  $\tilde{y}_0(t_k)$ ,  $\tilde{y}_1(t_k)$ ,  $\tilde{y}_2(t_k)$  (см. таблицу 6).

С помощью разработанного метода восстановления параметров математической модели найдено и сужено множество приближенных значений интенсивностей. В качестве примера выбраны  $\lambda_0^\alpha = 2,0218$ ,  $\lambda_1^\alpha = 3,0185$ ,  $\mu_1^\alpha = 2,0310$ ,  $\mu_2^\alpha = 1,0389$ . Расчетные вероятности состояний, т. е.  $y_0^\alpha(t_k)$ ,  $y_1^\alpha(t_k)$ ,  $y_2^\alpha(t_k)$ , показаны в таблице 6.

Таблица 6 – Измеренные и расчетные вероятности для восстановления параметров математической модели

Неделя	$t$ (10 Недель)	$\tilde{y}_0(t)$	$y_0^\alpha(t)$	$\tilde{y}_1(t)$	$y_1^\alpha(t)$	$\tilde{y}_2(t)$	$y_2^\alpha(t)$
0	0	0,400	0,400	0,600	0,600	0	0
1	0,1	0,419	0,420	0,436	0,435	0,145	0,145

2	0,2	0,413	0,414	0,346	0,345	0,241	0,241
3	0,3	0,396	0,396	0,295	0,295	0,309	0,309
4	0,4	0,375	0,375	0,266	0,267	0,359	0,358
5	0,5	0,353	0,354	0,249	0,250	0,398	0,397
6	0,6	0,333	0,334	0,237	0,239	0,430	0,427
7	0,7	0,315	0,316	0,230	0,232	0,455	0,453
8	0,8	0,299	0,300	0,224	0,226	0,477	0,474
9	0,9	0,285	0,286	0,220	0,222	0,495	0,491
MAE		0.0007		0.0014		0.0017	
NSE		0.9997		0.9995		0.9996	
R		1		1		1	

**Прогнозирование.** Преподаватель требуется получить прогноз, какова вероятность состояния «знание английского языка» у студента в конце курса, т. е. в момент времени  $t = 5,2$ . Построена прогнозирующая модель вероятности состояния «знание английского языка» со значениями параметров:  $\lambda_0^\alpha = 2,0366$ ,  $\lambda_1^\alpha = 3,0180$ ,  $\mu_1^\alpha = 2,0466$ ,  $\mu_2^\alpha = 1,0375$ . В результате расчетов получена функция  $y_2^\alpha(t)$ , график которой показан на рисунке 5.

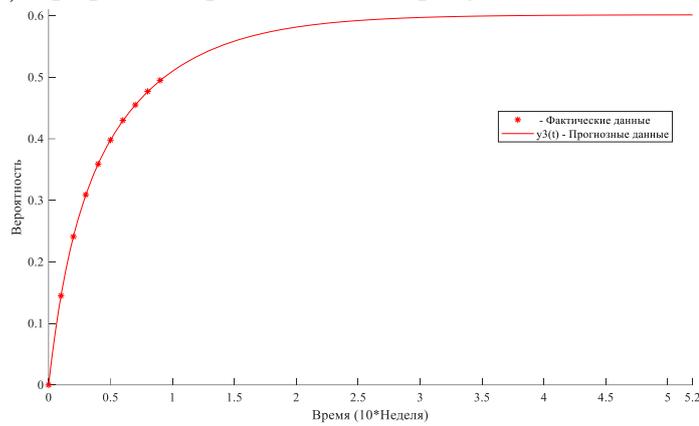


Рисунок 5 – График функции прогнозирования вероятности состояния «знание английского языка»

Прогнозы вероятности состояния «знание английского языка» с помощью разработанной модели сравнены с прогнозами, полученными с помощью других существующих моделей прогнозирования (см. рисунок 6).

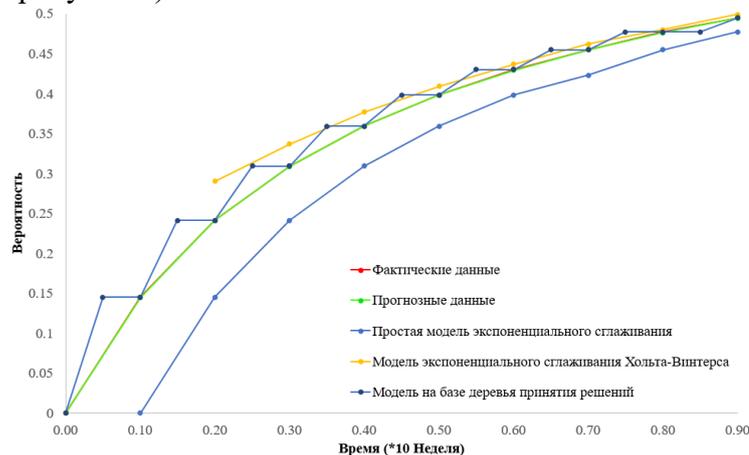


Рисунок 6 – Сравнение результатов прогнозирования вероятности состояний «знание английского языка»

Видно, что разработанная модель по сравнению с другими существующими моделями позволяет получить прогнозы, более близкие к измеренным значениям.

**Оценка точности разработанной прогнозирующей модели.** Фактические и прогнозные вероятности состояния «знание английского языка» в разные моменты времени представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Фактические и прогнозные вероятности состояния «знание английского языка» для оценки точности модели прогнозирования

$t_k$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	$MAPE = 0,94\%$
$\tilde{y}_2(t_k)$	0,5101	0,5231	0,5342	0,5437	0,5518	0,5587	0,5646	0,5697	0,5741	0,5778	

$y_2^\alpha(t_k)$	0,5063	0,5190	0,5297	0,5389	0,5466	0,5533	0,5590	0,5638	0,5679	0,5715	
-------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--

Разработанная прогнозирующая модель имеет точность:  $T = 100\% - MAPE = 99,06\%$ . Прогноз: Состояние «знание английского языка» у студента в конце курса равна 0,59. Преподаватель ожидает, что в конце курса вероятность состояния «знание английского языка» равна 0,8 с максимальной ошибкой 0,01. С момента времени  $t=2$  вероятность состояния «знание английского языка» изменяется мало (см. рисунок 5). Поэтому в этот момент времени изменены интенсивности с условиями:  $1 \leq \lambda_0 \leq 3$ ,  $2 \leq \lambda_1 \leq 5$ ,  $1 \leq \mu_1 \leq 3$ ,  $0 \leq \mu_2 \leq 2$ . Имеются  $y_0^\alpha(2) = 0,2188$ ,  $y_1^\alpha(2) = 0,2067$ ,  $y_2^\alpha(2) = 0,5745$ . В результате найдены  $\lambda_0^* = 1,5$ ,  $\lambda_1^* = 3,5$ ,  $\mu_1^* = 1$ ,  $\mu_2^* = 0,5$ . При этом  $y_2^*(5,2) = 0,804$  и  $J(A^*) = 0,004$ .

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа может быть использована как теоретическая база для проведения исследований в различных областях на основе теории решения некорректных обратных задач. Результаты диссертации демонстрируют необходимость изучения влияния ошибок исходных данных на решение задач. В рамках проведенного исследования получены следующие основные результаты:

1. Разработан метод приближенного восстановления значений параметров математической модели путем многократного вычисления приближенных регуляризованных решений по критерию минимизации функционала Тихонова и выбора наилучшего решения из множества приближенных регуляризованных решений по критерию невязки.

Разработанный метод в отличие от известных обладает преимуществами:

– позволяет найти приближенные значения параметров математической модели в виде системы линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений;

– обеспечивает возможность оценки отклонения регуляризованных решений к условно точному решению; нахождения и сужения множества приближенных регуляризованных решений с учетом условий, связанных с совпадением между измеренными и расчетными данными и важностью критериев: нормы разности между двумя частями системы алгебраических уравнений и нормы регуляризованного решения.

2. Предположена прогнозирующая модель поведения объектов/процессов, которая строится на основе математического моделирования, теории решения некорректных обратных задач, разработанного метода восстановления параметров математической модели и оценки отклонения между измеренными и расчетными данными в сравнении с измеренными данными.

Разработанная прогнозирующая модель в отличие от известных обладает преимуществами:

– обеспечивает возможность гибкой калибровки разработанной прогнозирующей модели для повышения точности прогноза;

– позволяет по результатам калибровки получить из разработанной прогнозирующей модели прогнозы, более близкие к фактическим данным.

3. Проведено успешное апробирование разработанного метода и прогнозирующей модели поведения объектов/процессов в процессах: нефтепереработки, производства метанола, обучения иностранному языку. Результаты апробирования подтверждают возможность применения разработанного метода и прогнозирующей модели в различных областях.

4. Разработано программное обеспечение для приближенного восстановления параметров математической модели и прогнозирования поведения объектов/процессов (нефтепереработки, производства метанола, обучения иностранному языку), позволяющее создать информационные системы прогнозирования количества полученного продукта (в нефтегазовой и химической промышленности), уровня владения иностранным языком у студента. Результаты, полученные с помощью разработанного программного обеспечения, подтверждают применимость разработанного метода и прогнозирующей модели в компаниях и организациях для построения информационных систем прогнозирования поведения объектов/процессов.

5. Материалы диссертации полезны компаниям и организациям, в том числе химическим компаниям, нефтегазовым компаниям, центрам иностранных языков и т. д.

Результаты диссертационной работы используются в следующих организациях:

– в отделе планирования ООО «Фармасьютикал Хоанг Лиен» для разработки оптимального производственного плана с целью минимизации времени, затрат на закупку сырья, производство и хранение продукции (снижение времени производства на 20%, снижение общих затрат на 12%);

– в центре прикладных исследований и тестирования качества продукции НИ-ТЕСН для проверки чистоты химических веществ в процессе производства, что позволяет сократить время и затраты на анализ состава полученного раствора (сокращение времени на 33%, снижение затрат на 21%);

– в Высшей школе международных образовательных программ СПбПУ для моделирования процесса обучения русскому языку, прогнозирования изменения уровня владения русским языком студентами. Разработанные метод и прогнозирующая модель позволяют построить план обучения, прогнозировать уровень русского языка студентов в конце курса и оперативно изменять интенсивность обучения.

#### **IV. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

##### **Публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях**

1. Лэ, В.Х. Метод регуляризации Тихонова для решения обратной задачи в математической модели кинетики процесса нефтепереработки / В.Х. Лэ, А.Н. Фирсов // Вестник кибернетики. – 2022. – Т. 48. – № 4. – С. 49-58. **(РИНЦ, ВАК, К3).**

2. Лэ, В.Х. Коэффициентная обратная задача в математической модели кинетики процесса нефтепереработки / В.Х. Лэ // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18. – № 5. – С. 64-72. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

3. Лэ, В.Х. Методика нахождения приближенного решения для коэффициентной обратной задачи / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 10. – С. 274-282. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

4. Лэ, В.Х. Устойчивость динамической системы с приближенными параметрами, найденными методом регуляризации Тихонова / В.Х. Лэ // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 12. – С. 429-435. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

5. Лэ, В.Х. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 1 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №1. – С. 8-14. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

6. Лэ, В.Х. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 2 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №1. – С. 239-247. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

7. Лэ, В.Х. Обратная задача восстановления параметров математической модели процесса обучения неродному языку. Часть 1 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №4. – С. 99-104. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

8. Лэ, В.Х. Обратная задача восстановления параметров математической модели процесса обучения неродному языку. Часть 2 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №4. – С. 113-120. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

9. Лэ, В.Х. Обратная задача восстановления параметров математической модели процесса обучения неродному языку. Часть 3 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №4. – С. 137-144. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

10. Лэ, В.Х. Разработка программы решения обратной задачи восстановления параметров в математической модели кинетики процесса нефтепереработки. Часть 1 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №4. – С. 144-149. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

11. Лэ, В.Х. Разработка программы решения обратной задачи восстановления параметров в математической модели кинетики процесса нефтепереработки. Часть 2 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №4. – С. 171-178. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

12. Лэ, В.Х. Обратная задача восстановления параметров математической модели с заданной погрешностью данных / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // INJOIT. – 2023. – Т. 11. – № 7. – С. 86-93. **(РИНЦ, ВАК, К1).**

13. Лэ, В.Х. К вопросу сужения множества Парето-оптимальных решений в задачах двухкритериальной оптимизации. Часть 1 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №5. – С. 71-77. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

14. Лэ, В.Х. К вопросу сужения множества Парето-оптимальных решений в задачах двухкритериальной оптимизации. Часть 2 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – №5. – С. 153-160. **(РИНЦ, ВАК, К2).**

15. Лэ, В.Х. Алгоритм оценки отклонения между регуляризованным и точным решениями в обратных задачах / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // INJOIT. – 2023. – Т. 11. – № 10. – С. 6-13. **(РИНЦ, ВАК, К1).**

##### **Публикации в изданиях, индексированных в международных базах цитирования**

1. Le V.H. Forecasting the Concentration of Initial Substances and Products in the Oil Refining Process / V. H. Le, Liudmila V. Chernenkaya, T. T. D. Nguyen // Congress on Smart Computing Technologies: Smart Innovation, Systems and Technologies. – Singapore: Springer Nature Singapore, 2023. – P. 257-266. **(SCOPUS).**

2. Le V.H. A Technique for Finding an Approximate Solution to an Ill-Posed Inverse Problem Using Tikhonov's Regularization Method / V. H. Le, Liudmila V. Chernenkaya // Communication and Intelligent Systems. – Singapore:

Springer Singapore, 2023. – P. 527-537. (SCOPUS).

3. **Le V.H.** Optimization of the Set of Regularized Solutions in the Coefficient Inverse Problem / V.H. Le, Liudmila V. Chernenkaya // Proceedings of the 2023 International Conference for Advancement in Technology (ICONAT), Goa, India, 24-26 January 2023. – Goa, India: IEEE, 2023. – P. 1-6. (SCOPUS).

4. **Le V.H.** Optimization in the Method of Choosing Quasi-Optimal Values of the Regularization Parameter / V.H. Le // Lecture Notes in Electrical Engineering. – Singapore: Springer, 2023. – P. 491-501. (SCOPUS).

5. **Le V.H.** Technique for Restoring the Parameters of the Mathematical Model of Oil Refining Processes / V.H. Le, Liudmila V. Chernenkaya, Andrei V. Chernenkii // Proceedings of the 2023 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia, 10-16 September 2023. – Sochi, Russia: IEEE, 2023. – P. 976-981. (SCOPUS).

#### Статьи и материалы конференций

1. **Лэ, В.Х.** Метод прогнозирования количества метанола, образующегося в колонне синтеза / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Энергосбережение и инновационные технологии в топливно-энергетическом комплексе: Материалы Национальной с международным участием научно-практической конференции студентов, аспирантов, учёных и специалистов, Тюмень, 20-22 декабря 2022 года. – Тюмень: ТИУ, 2022. – С. 266-270. (РИНЦ).

2. **Лэ, В.Х.** Выбор квазиоптимальных значений параметра регуляризации при решении обратной задачи / В.Х. Лэ, Т.Т.З. Нгуен, Л.В. Черненкокая // Системный анализ в проектировании и управлении: сборник научных трудов XXVI Международной научно-практической конференции. В 3 ч., Санкт-Петербург, 13-14 октября 2022 года. – СПб: СПбПУ, 2023. – С. 128-138. (РИНЦ).

3. **Лэ, В.Х.** К вопросу прогнозирования изменения уровня английского языка учащихся в процессе обучения / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине (IT UBIQUITOUS): материалы VII Международной научной конференции, Томск, 17-21 октября 2022 года; Иркутск, 24-25 октября 2022 года – Томск: Изд-во Томского гос. пед. ун-та, 2023. – С. 24-29. (РИНЦ).

4. **Лэ, В.Х.** Исследование тенденции развития научной области, связанной с обратными задачами / В.Х. Лэ // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: Сборник статей V Международного форума, Санкт-Петербург, 02 марта 2023 года. – СПб: СПбГУАП, 2023. – С. 84-86. (РИНЦ).

5. **Лэ, В.Х.** Постановка обратной задачи восстановления параметров в математической модели / В.Х. Лэ // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: Сборник статей V Международного форума, Санкт-Петербург, 02 марта 2023 года. – СПб: СПбГУАП, 2023. – С. 87-88. (РИНЦ).

6. **Лэ, В.Х.** Решение обратных задач с заданной информацией о погрешности данных. В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Приоритетные направления развития науки и технологий: доклады XXXII международной научно-практической конференции, Тула, 15 марта 2023 года. – Тула: Издательство «Инновационные технологии», 2023. – С. 135-138. (РИНЦ).

7. **Лэ, В.Х.** К вопросу сужения множества Парето-оптимальных решений с дополнительной информации о важности критериев / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Молодежь и современные информационные технологии: Сборник трудов XX Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Томск, 20-22 марта 2023 года. – Томск: ТПУ, 2023. – С. 345-349. (РИНЦ).

8. **Лэ, В.Х.** Способ прогнозирования и контроля концентрации продуктов в процессе нефтепереработки / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая // Молодежь и научно-технический прогресс: Сборник докладов XVI международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 2-х томах, Губкин, 06 апреля 2023 года. – Губкин-Старый Оскол: ООО «Ассистент плюс», 2023. – С. 297-300. (РИНЦ).

#### Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023616685 Российская Федерация. Программа решения обратной задачи восстановления параметров в математической модели кинетики процесса нефтепереработки: № 2023615802: заявл. 29.03.2023: опублик. 30.03.2023 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая, Т.Т.З. Нгуен; заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». (РИНЦ).

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023617166 Российская Федерация. Программа решения обратной задачи восстановления параметров в математической модели процесса обучения неродному языку: № 2023615774: заявл. 29.03.2023: опублик. 06.04.2023 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая, Т.Т.З. Нгуен; заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». (РИНЦ).

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023616802 Российская Федерация. Программа решения обратной задачи восстановления параметров в математической модели технологического процесса производства метанола: № 2023615773: заявл. 29.03.2023: опублик. 03.04.2023 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая, Т.Т.З. Нгуен; заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». (РИНЦ).

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023680969 Российская Федерация. Программа для оценки степени отклонения между регуляризованным и точным решениями в обратных задачах восстановления параметров: № 2023680176: заявл. 03.10.2023: опублик. 09.10.2023 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая; заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». (РИНЦ).

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023680873 Российская Федерация. Программа для прогнозирования и контролирования уровня владения неродным языком: № 2023680187: заявл. 03.10.2023: опублик. 06.10.2023 / В.Х. Лэ, Л.В. Черненкокая; заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». (РИНЦ).