



Семенов Даниил Аркадьевич

**ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В НАПРЯЖЕНИЯХ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург

2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор **Лалин Владимир Владимирович**

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, доцент **Тюкалов Юрий Яковлевич**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вятский государственный университет», профессор, кафедра строительных конструкций и машин, г. Киров

кандидат технических наук, доцент **Островская Надежда Владимировна**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», доцент, кафедра строительной механики, г. Санкт-Петербург

Ведущая организация:

Акционерное общество «Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники им. Б.Е. Веденеева», г. Санкт-Петербург

Защита состоится «» XXX 20XX г. в XX часов на заседании диссертационного совета У.2.1.9.54 федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29, корпус ГК-2, аудитория 411).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте www.spbstu.ru федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Автореферат разослан «__» ____ 20__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета У.2.1.9.54
кандидат технических наук



Тарасов В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена развитию и совершенствованию метода граничных элементов применительно к решению задач строительной механики и смежных областей в новых постановках, в которых неизвестными величинами выступают производные искомых функций – такие как механические напряжения, тепловые потоки и другие параметры, характеризующие поведение конструкций и материалов.

Актуальность темы исследования. Проектирование объектов (конструкций, сооружений, оснований) зачастую сопровождается выполнением расчетных обоснований. Значимое место занимает анализ напряженно-деформированного состояния.

Традиционно применяемый метод конечных элементов (МКЭ), основанный на постановках в перемещениях, обладает высокой универсальностью, однако требует дискретизации всего объема, что приводит к значительным вычислительным затратам, особенно при моделировании бесконечных областей. Это ограничивает его эффективность при решении задач, где важна детальная оценка локальных напряжений при больших размерах расчетной области.

Метод граничных элементов (МГЭ), основанный на интегральных представлениях решений дифференциальных уравнений, позволяет существенно сократить количество неизвестных, понижая размерность задачи на единицу. Это обеспечивает значительное уменьшение объема вычислений при сохранении высокой точности результатов.

Классические подходы в строительной механике и теории упругости для численных алгоритмов МГЭ основываются на формулировках, где в качестве основных неизвестных выбираются функции перемещений или температурные поля. Такой выбор, хотя и хорошо себя зарекомендовал, имеет ряд ограничений: он требует дополнительного вычислительного этапа для нахождения производных (напряжений) и в некоторых случаях приводит к интегральным уравнениям, решение которых относится к классу некорректных задач.

Использование постановок задач в производных (напряжениях) имеет особое значение, так как позволяет определять компоненты градиента функции (напряжений) напрямую, без промежуточного определения самой функции (перемещений), что повышает точность в зонах концентрации и сокращает накопление погрешностей.

Степень разработанности темы исследования

С развитием вычислительной математики в середине XX века широкое распространение получили универсальные численные методы, прежде всего метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Основы МГЭ были заложены в трудах К. Бребии, Ф. Риццо, Т. Крузе где разработана теория граничных интегральных уравнений, методы дискретизации и алгоритмы численной реализации. В отечественной научной школе значительный вклад внесли А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский, А.М. Линьков, С.Г. Михлин, Д.Н. Низомов, занимавшиеся вопросами построения граничных интегральных уравнений и применением МГЭ в механике деформируемого твердого тела.

Особое место в развитии МГЭ занимают задачи, сводящиеся к уравнениям Лапласа и Пуассона. Для стационарных задач теплопроводности, фильтрации в пористых средах, электростатики и задач кручения стержней (постановка Сен-Венана) разработаны строгие граничные формулировки. В последние десятилетия активно развиваются постановки для нестационарных задач.

Важным направлением развития являются постановки «в производных (напряжениях)», которые позволяют напрямую находить производную исходной функции. Вклад в развитие таких постановок внесла школа Б.Е. Победри, а также работы его последователей, где сформулированы теоретические основы постановки в напряжениях. Недостатком указанной постановки является невозможность решения задач, где на части границы заданы условия в перемещениях.

Несмотря на значительный прогресс, вопросы построения и реализации устойчивых и эффективных постановок в производных (напряжениях) остаются открытыми. Недостаточная разработанность этих методов, особенно применительно к МГЭ, определяют необходимость дальнейших исследований в данном направлении.

Объектом исследования являются распределения напряжений, тепловых полей в телах, описываемые уравнениями строительной механики, теории упругости и теплопроводности.

Предметом исследования являются постановки и численные методы решения задач в производных (напряжениях) с использованием метода граничных элементов, а также алгоритмы их применения при решении практических задач.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка постановок и методик решения краевых задач методом граничных элементов относительно производной исходной функции.

Задачи исследования:

1. Разработать постановки задач, описываемых уравнениями Лапласа и Пуассона, в которых в качестве неизвестных выступают производные от искомых функций (тепловые потоки и др.);

2. Получить интегральные представления и граничные интегральные уравнения для решения задач, описываемых уравнениями Лапласа и Пуассона, в производных;

3. Сформулировать дифференциальную и интегральную постановки плоской задачи теории упругости в напряжениях при произвольных граничных условиях;

4. Для плоской задачи теории упругости получить граничные интегральные уравнения относительно компонент тензора напряжений;

5. Разработать постановку и интегральные уравнения для нестационарной задачи теплопроводности с использованием компонент вектора теплового потока в качестве неизвестных;

6. Построить и реализовать вычислительные алгоритмы для решения задач в производных (напряжениях), обеспечивающие возможность анализа основных, внешних и смешанных краевых задач, а также задач в неодносвязных областях;

7. Провести серию вычислительных экспериментов для проверки сходимости, точности и устойчивости разработанных алгоритмов; сопоставить результаты с классическими постановками и показать области наиболее эффективного применения новых подходов.

Научная новизна работы заключается в разработке новых постановок стационарных и нестационарных задач строительной механики относительно производных (напряжений) и развитии численных схем МГЭ для разработанных постановок.

В ходе исследования получены следующие новые результаты:

1. Предложены новые постановки задач для уравнений Лапласа, Пуассона, нестационарной теплопроводности и плоской теории упругости, в которых неизвестными являются производные искомых функций;

2. Для постановок в производных (напряжениях) получены интегральные представления и граничные интегральные уравнения (ГИУ), что обеспечивает возможность прямого вычисления производных (напряжений) без промежуточного определения самой функции. Полученные ГИУ являются уравнениями второго рода для всех основных типов краевых задач и имеют ядра, аналогичные классическим постановкам МГЭ. Отличительной особенностью разработанных постановок является возможность решения II краевой задачи (незакрепленное от жестких смещений тело) без добавления фиктивных связей;

3. Разработаны алгоритмы численного решения задач в производных с использованием метода граничных элементов.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии математического аппарата для постановки и решения задач в производных (напряжениях) в строительной механике.

Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных моделей, алгоритмов МГЭ и программных средств для инженерных расчетов. Разработанная программа для ЭВМ по расчету напряжений при кручении стержней МГЭ зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент).

Методология и методы исследования.

Методологической основой работы является комплексный подход к постановке и решению задач строительной механики, основанный на использовании метода граничных элементов (МГЭ) как эффективного численного инструмента для анализа напряженно-деформированного состояния упругих тел.

В исследовании использованы положения классической теории упругости, теории потенциала и интегральных уравнений, теории теплопроводности, метода граничных интегральных уравнений, численных методов аппроксимации и дискретизации, алгоритмов линейной алгебры для решения систем уравнений.

В ходе исследования использованы следующие методы: аналитические методы – получение интегральных представлений решения, преобразование граничных интегральных уравнений, численные методы – решение интегральных уравнений методом граничных элементов, алгоритмические методы – разработка и программная реализация вычислительных алгоритмов решения задачи в производных (напряжениях) методом граничных элементов, методы

вычислительного эксперимента – моделирование НДС, тепловых полей для тел различной формы и сравнение с результатами альтернативных численных подходов.

Положения, выносимые на защиту:

1 Дифференциальная постановка в производных для стационарных и нестационарных уравнений второго порядка (уравнения Лапласа и Пуассона);

2 Вывод интегральных представлений и граничных интегральных уравнений для задач, описываемых уравнениями второго порядка (уравнения Лапласа и Пуассона);

3 Дифференциальная постановка плоской задачи теории упругости в напряжениях;

4 Вывод интегральных представлений и ГИУ для тензора напряжений в плоской задаче теории упругости;

5 Результаты вычислительных экспериментов по решению тестовых задач методом граничных элементов в производных (напряжениях);

6 Разработка и программная реализация вычислительных алгоритмов решения задач в производных (напряжениях) методом граничных элементов.

Степень достоверности и обоснованности результатов.

Достоверность и обоснованность полученных в работе результатов обеспечивается:

1 Строгой математической постановкой задачи в рамках классических теорий упругости и теплопроводности;

2 Использованием проверенных аналитических подходов для преобразований классических постановок задач и получения интегральных уравнений;

3 Применением устойчивых численных алгоритмов дискретизации и интегрирования, обеспечивающих сходимость и устойчивость решений при увеличении числа граничных элементов;

4 Сопоставлением результатов численных расчетов с известными решениями модельных задач; с результатами, полученными методом конечных элементов (МКЭ); с опубликованными в научной литературе данными по аналогичным задачам;

5 Множественным вычислительным экспериментом, включающим анализ влияния шага дискретизации на погрешность результатов.

Соответствие паспорту специальности.

Диссертационное исследование соответствует требованиями паспорта научной специальности 2.1.9. Строительная механика:

п. № 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;

п. № 4 «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях».

Апробация результатов работы.

Основные положения и результаты работы были доложены и обсуждены на 4 конференциях:

1. IX международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Пенза, 2025;
2. XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 2025;
3. XI Международная научно-практическая конференция «Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство, транспорт», Тамбов, 2025;
4. XIII Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), Москва, 2025.

Публикации.

Материалы исследования опубликованы в 9 печатных работах. Из них: 5 статей в журналах из актуального перечня рецензируемых научных изданий ВАК РФ, 1 статья в журналах SCOPUS и WoS.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего в себя 133 источников, в том числе 57 – на иностранном языке, и двух приложений. Объем диссертации составляет 156 страниц печатного текста без приложений. Работа содержит 57 рисунков и 5 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, приведены основные методы исследования, а также аргументирована теоретическая и практическая значимость работы. Представлены основные научные положения, выносимые на защиту.

В первой главе представлен обзор литературы по проблеме исследования. Рассмотрены основные этапы развития метода граничных элементов (МГЭ), начиная с классических постановок для задач теории потенциала и теории упругости. Изложены математические основы метода, приведены типовые постановки краевых задач и методы их численной реализации. Отдельное внимание уделено существующим ограничениям и недостаткам, в частности – трудностям при вычислении производной на границе. Отмечено, что классическая постановка МГЭ приводит к интегральному уравнению I рода при решении первой краевой задачи (на всей границе тела заданы перемещения).

Во второй главе на основе стационарных задач продемонстрирован метод формулирования постановок, в которых в качестве основных неизвестных выступают производные искомой функции. Для всех основных краевых задач приведены соответствующие граничные условия. Рассмотрены исключительно плоские постановки, для которых получены интегральные представления и соответствующие граничные интегральные уравнения.

В первую очередь рассмотрены задачи, описываемые уравнениями Лапласа или Пуассона. Их рассмотрение важно по ряду причин:

1. Существуют задачи механики, описываемые именно этими уравнениями (изгиб и кручение стержней, изгиб мембран);
2. Их решение является обязательным промежуточным шагом в других механических задачах (например, при вычислении дополнительных объемных сил

в стационарных задачах теплопроводности и фильтрации, предшествующих расчету напряженно-деформируемого состояния);

3. Они позволяют наглядно показать вывод и свойства рассматриваемых формулировок, во многом сходных с теми, что анализируются далее в теории упругости и нестационарной теплопроводности.

Изложим основные этапы (постановка в производных, интегральное представление, граничные интегральные уравнения) для уравнения Пуассона в плоской области S , ограниченной контуром Γ .

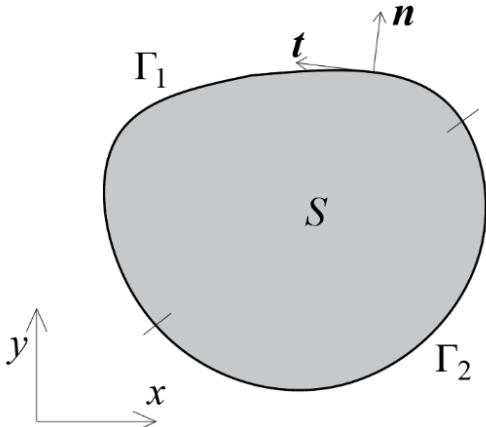


Рисунок 1 – Расчетная область

$$S: \Delta T = d, \quad (1)$$

$$\Gamma_1: T = T_1, \quad (2)$$

$$\Gamma_2: \partial_n T = p, \quad (3)$$

где $d = d(x, y)$ – заданная функция источников тепла; $T = T_1(\Gamma)$ – заданная на Γ_1 температура; $p = p(\Gamma)$ – заданный на Γ_2 тепловой поток; $\partial_n \equiv \partial / \partial n$ – производная по нормали к контуру Γ ; $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – оператор Лапласа на плоскости, здесь $\partial_x \equiv \partial / \partial x$, $\partial_y \equiv \partial / \partial y$.

Производные от искомой функции в задачах (1)-(3) $q_x = \partial_x T$, $q_y = \partial_y T$ удовлетворяют уравнениям:

$$\partial_x q_x + \partial_y q_y = d, \quad (4)$$

$$\partial_x q_y - \partial_y q_x = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (4)-(5) следует следующая система двух уравнений относительно новых неизвестных функций q_x, q_y :

$$\Delta q_x = \partial_x d, \quad \Delta q_y = \partial_y d. \quad (6)$$

Из граничных условий (2)-(3) следуют условия на функции q_x, q_y :

$$\Gamma_1: q_t = h, \quad \Gamma_2: q_n = p, \quad (7)$$

где h – известная на Γ_1 функция, $h = \partial_\Gamma T_1 = t_x \partial_x T_1 + t_y \partial_y T_1$, t_x, t_y – проекции единичного касательного вектора к контуру Γ (рисунок 1); $q_n = n_x q_x + n_y q_y$, n_x, n_y – проекции вектора единичной нормали на оси координат (рисунок 1).

Корректная постановка краевых задач для системы (6) требует задания в каждой точке граничного контура двух граничных условий, поэтому потребуем в дополнение к условиям (7): в точках границы Γ_1 – выполнения уравнения (4), в точках границы Γ_2 – выполнения уравнения (5).

Обозначим \mathbf{q} – вектор с компонентами q_x, q_y ; ∇ – оператор-градиент на плоскости; вектор $\tilde{\mathbf{q}}$ – повернутый на $\pi/2$ по часовой стрелке, если смотреть с оси z , вектор \mathbf{q} ; \mathbf{n} и \mathbf{t} – единичные нормальный и касательный к контуру Γ векторы; точкой обозначается скалярное произведение. Тогда новая постановка задачи относительно вектора \mathbf{q} в векторной форме примет следующий вид:

$$S: \Delta \mathbf{q} = \nabla d, \quad \Gamma_1: \begin{cases} \mathbf{t} \cdot \mathbf{q} = h \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = d' \end{cases} \quad \Gamma_2: \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = p \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Для получения интегральных постановок относительно производных выводится интегральное представление для вектора \mathbf{q} :

$$2\pi c(m)\mathbf{q}(m) = \int_{\Gamma} \left(q_n \frac{\mathbf{R}}{R^2} - q_t \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\Gamma(z) - \int_S \left(\frac{\mathbf{R}}{R^2} d \right) dS(z), \quad (9)$$

где $m, z \in S + \Gamma$, $\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_z$ – радиус-векторы (рисунок 2); $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z - \mathbf{R}_m$; $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}$; обозначение $d\Gamma(z)$ подчеркивает, что интегрирование ведется по координатам точки z ;

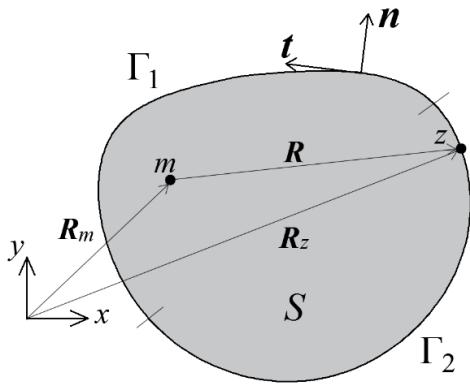


Рисунок 2 – Определение радиус-векторов

первый, так и для второй краевых задач и имеют следующий вид:

$$\pi q_n(m) - \int_{\Gamma} \left(q_n \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) d\Gamma = - \left[\int_{\Gamma} \left(h \frac{\mathbf{n}_m \cdot \tilde{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\Gamma + \int_S \left(d \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) dS \right], \quad (11)$$

$$\pi q_t(m) - \int_{\Gamma} \left(q_t \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) d\Gamma = \left[\int_{\Gamma} \left(p \frac{\mathbf{n}_m \cdot \tilde{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\Gamma + \int_S \left(d \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) dS \right]. \quad (12)$$

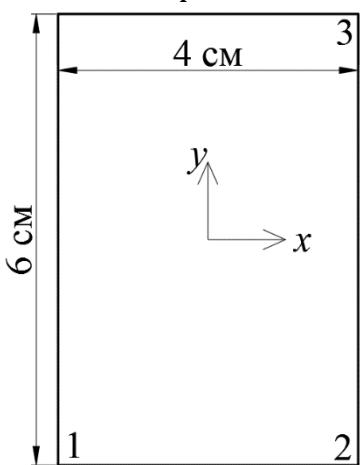


Рисунок 3 – Параметры расчетного сечения

$$c(m) = \begin{cases} 1 & m \in S, \\ 0,5 & m \in \Gamma, \\ 0 & m \notin S + \Gamma. \end{cases}, \quad (10)$$

Чтобы иметь возможность вычислить вектор \mathbf{q} в любой точке $m \in S$, необходимо в каждой точке границы Γ знать значения нормальной и касательной составляющих q_n и q_t . Границные интегральные уравнения прямого метода получаются умножением интегрального представления (9) на единичные векторы \mathbf{n}_m и \mathbf{t}_m при условии $m \in \Gamma$. Эти уравнения оказываются интегральными уравнениями второго рода как для

Ядра ГИУ относительно производных имеют такие же особенности, что и обычные ГИУ для задачи (1)-(3), что позволяет использовать хорошо разработанные, стандартные схемы метода граничных элементов (МГЭ) для прямого получения значений производных без предварительного определения функции и ее численного дифференцирования.

Любое из уравнений (11)-(12) может быть использовано при решении смешанной краевой задачи, где неизвестными являются и нормальная и касательная компонента вектора \mathbf{q} .

Численное решение уравнений (11)-(12) выполняется МГЭ. На рисунке 4 представлены результаты расчета касательных напряжений, возникающих при кручении стержня прямоугольного сечения (рисунок 3).

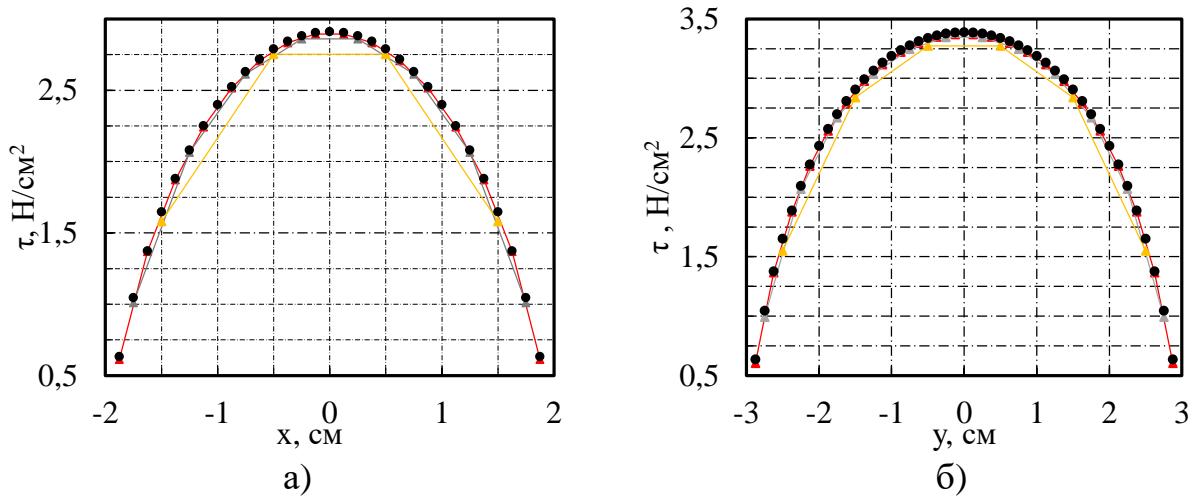


Рисунок 4 – Распределение касательных напряжений по границе прямоугольного сечения: а) – грань между точками 1 и 2; б) – грань между точками 2 и 3
• – аналитическое решение; – сетка 0,25 см; – сетка 0,5 см; – сетка 1 см

На основании сравнения результатов расчета с аналитическим решением показано, что удовлетворительная точность достигается на самой грубой сетке граничных элементов.

Используя специальные фундаментальные решения, могут быть получены интегральные представления и ГИУ для задач с регулярными граничными условиями. Интегральное представление вектора теплового потока \mathbf{q} для полубесконечной области с нулевой температурой на границе Γ_1 (рисунок 5) имеет следующий вид:

$$2\pi c(m)\mathbf{q}(m) = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{q_n}{R^2} (\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - \frac{h}{R^2} (\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}') \right) d\Gamma(z) - \int_S \left((\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \frac{d}{R^2} \right) dS(z). \quad (13)$$

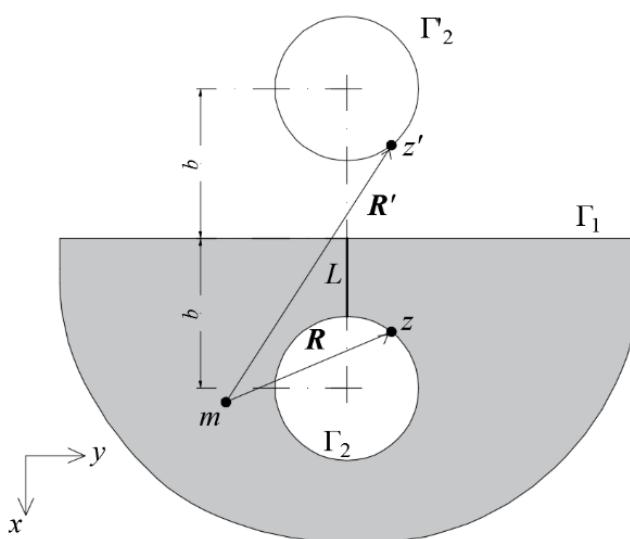


Рисунок 5 – Полубесконечная область с отверстием

Интегральное представление (13) получено для задачи с граничным условием $T = 0$ на границе Γ_1 . Изменяя регулярное граничное условие на Γ_1 , тем самым влияя на специальное фундаментальное решение, возможно аналогичным образом получить интегральные уравнения для иных расчетных случаев, например для граничного условия на Γ_1 при котором на границе отсутствует нормальная компонента теплового потока $q_n = 0$.

На рисунке 6 представлены результаты расчета теплового потока q_n

на контуре Γ_2 при заданной постоянной температуре в отверстии $T|_{\Gamma_2} = const$ и нулевой температуре на границе Γ_1 .

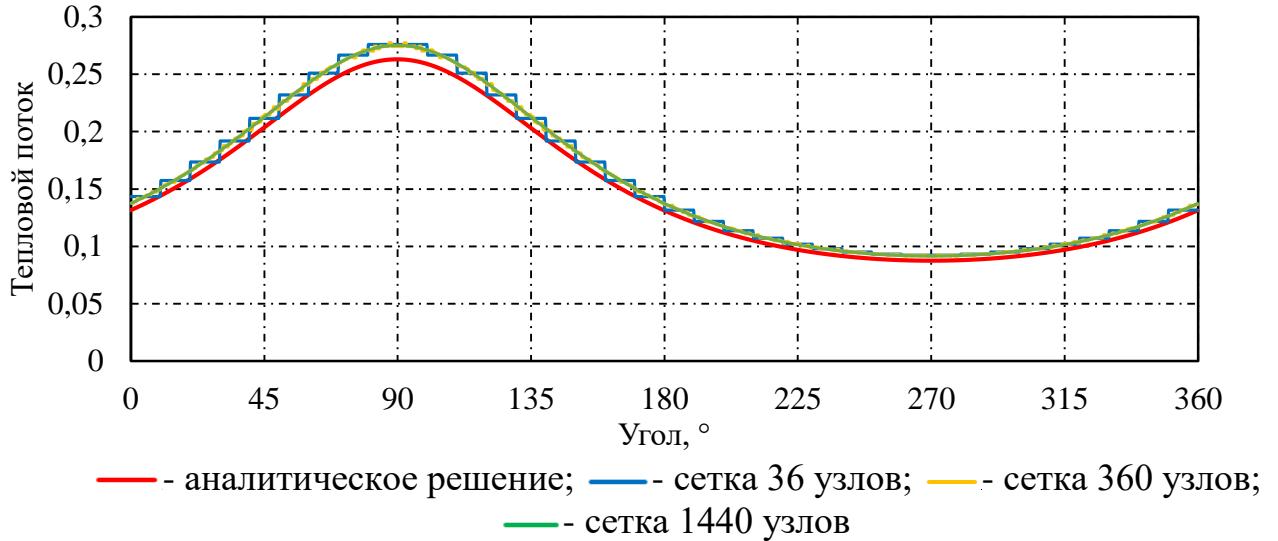


Рисунок 6 – Сравнение аналитического и численного решений. Разворотка отверстия

Для плоской задачи теории упругости получена постановка в напряжениях, обеспечивающая возможность решения задач с любыми граничными условиями. Для возможности учета произвольных граничных условий вводится дополнительное неизвестное – угол жесткого поворота ω . В результате, предлагаемая постановка содержит четыре дифференциальных уравнения и четыре неизвестных (три компоненты тензора напряжений и один угол жесткого поворота). Для области S , ограниченной контуром $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (рисунок 1), и исходных граничных условиях $\Gamma_1: \mathbf{u} = 0, \Gamma_2: \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}$ предлагаемая постановка имеет вид:

$$S: \begin{cases} \Delta \mathbf{T} - \mathbf{a} \nu \Delta \sigma + 2\mu \frac{1}{1-\nu} \operatorname{def} \mathbf{c} \cdot \nabla \omega = 0 \\ 2\mu \Delta \omega - \nabla \cdot \mathbf{c} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\Gamma_1: \begin{cases} (1-\nu) \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} + 2\mu t \omega = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p} \\ (1-\nu) \nabla \sigma - \nabla \cdot \mathbf{T} - 2\mu \mathbf{c} \cdot \nabla \omega = 0 \end{cases} \quad (16)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений; \mathbf{a} – единичный тензор на плоскости; ν – коэффициент Пуассона; $\sigma \equiv \operatorname{tr} \mathbf{T}$ – первый инвариант тензора напряжений; μ – модуль сдвига; \mathbf{c} – базисный кососимметричный тензора второго ранга; $\operatorname{def} \mathbf{b}$ – оператор выделения симметричной части градиента вектора \mathbf{b} ; \mathbf{p} – вектор поверхностной нагрузки;

или в декартовых координатах

$$S: \begin{cases} (1-\nu) \Delta \sigma_x - \nu \Delta \sigma_y + K \partial_x \partial_y \omega = 0 \\ (1-\nu) \Delta \sigma_y - \nu \Delta \sigma_x + K \partial_x \partial_y \omega = 0 \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{2} K (\partial_y^2 \omega - \partial_x^2 \omega) = 0 \\ 2\mu \Delta \omega + \partial_x \partial_y (\sigma_x - \sigma_y) + \partial_y^2 \tau_{xy} - \partial_x^2 \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

где $K = 2\mu/1 - \nu$.

На основе дифференциальной постановки в напряжениях получено интегральное представление тензора напряжений

$$c(m)\mathbf{T}(m) = \int_{\Gamma} [\mathbf{K}_1^3(m, z) \cdot \mathbf{p}(z) + \mathbf{K}_2^3(m, z) \cdot \mathbf{h}(z)] d\Gamma(z) + \int_S [\mathbf{K}_1^3(m, z) \cdot \boldsymbol{\rho}(z) + \mathbf{K}_2^3(m, z) \cdot \mathbf{H}(z)] dS(z), \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – вектор объемных сил; \mathbf{H} – вектор начальных деформаций; $\mathbf{K}_1^3, \mathbf{K}_2^3$ – тензоры третьего ранга:

$$\mathbf{K}_1^3(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\mathbf{R}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{R} + \mathbf{e}_k \mathbf{R}\mathbf{e}_k}{R^2} + 2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} \right], \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_2^3(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\mathbf{a}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{a} - \mathbf{e}_k \mathbf{R}\mathbf{e}_k}{R^2} + 2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} \right]. \quad (20)$$

Скалярно умножая интегральное представление на единичные векторы \mathbf{n}_m и \mathbf{t}_m при условии $m \in \Gamma$, получены граничные интегральные уравнения прямого метода в напряжениях для основных краевых задач теории упругости

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}(m) = \int_{\Gamma} [\mathbf{K}_1(m, z) \cdot \mathbf{p}(z) + \mathbf{K}_2(m, z) \cdot \mathbf{h}(z)] d\Gamma(z) + \int_S [\mathbf{K}_1(m, z) \cdot \boldsymbol{\rho}(z) + \mathbf{K}_2(m, z) \cdot \mathbf{H}(z)] dS(z), \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{h}(m) = \int_{\Gamma} [\mathbf{K}_4(m, z) \cdot \mathbf{p}(z) + \mathbf{K}_3(m, z) \cdot \mathbf{h}(z)] d\Gamma(z) + \int_S [\mathbf{K}_4(m, z) \cdot \boldsymbol{\rho}(z) + \mathbf{K}_3(m, z) \cdot \mathbf{H}(z)] dS(z), \quad (22)$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ – искомый вектор первой краевой задачи, $\mathbf{h} = (1-\nu)\mathbf{n}\sigma - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} + 2\mu t\omega$ – неизвестный вектор второй краевой задачи, ядра ГИУ представлены тензорами 2-го ранга:

$$\mathbf{K}_1(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{n}_m - \mathbf{n}_m \mathbf{R}}{R^2} + 2 \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right], \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_2(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{-\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{n}_m \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{n}_m}{R^2} + 2 \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right], \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_3(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(\mathbf{n}_m \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{n}_m) + (3-2\nu)\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{a}}{R^2} - 2 \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right], \quad (25)$$

$$K_4(m, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(3-4\nu)(\mathbf{n}_m \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{n}_m) + \mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R} \mathbf{a}}{R^2} - 2 \frac{\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R^2} \right]. \quad (26)$$

Интегральные уравнения (21)-(22) являются уравнениями II рода как для первой, так и для второй краевых задач. Ядра (23)-(26) содержат слагаемые со слабой особенностью и сингулярные слагаемые, понимаемые в смысле главного значения по Коши. Число неизвестных функций в полученных ГИУ для любых краевых задач не возрастает по сравнению с классическими ГИУ в перемещениях. После их решения в каждой точке контура Γ становятся известны оба вектора \mathbf{p} и \mathbf{h} . По определенным векторам \mathbf{p} и \mathbf{h} , можно найти все компоненты тензора напряжений на границе, используя исключительно алгебраические операции:

$$\sigma_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}, \quad \sigma_{nt} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{p}, \quad \sigma_{tt} = \frac{1}{1-\nu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} + \nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}). \quad (27)$$

По определенным векторам \mathbf{p} и \mathbf{h} , тензор напряжений \mathbf{T} в любой точке области S может быть определен по интегральному представлению (18).

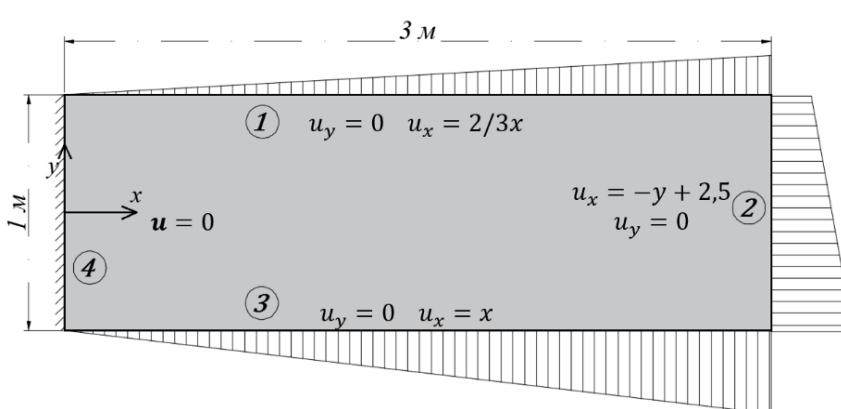


Рисунок 7 – Расчетная схема I краевой задачи

В заключительном разделе, используя описанные постановки, представлено решение методом граничных элементов в напряжениях некоторых задач. На рисунке 7 представлены условия первой краевой задачи.

В результате численного решения ГИУ

(21) и используя формулы (27) получены значения напряжений на границе. На рисунке 8 представлено распределение нормальных напряжений по одной из граней расчетной области (при $x = 0$).

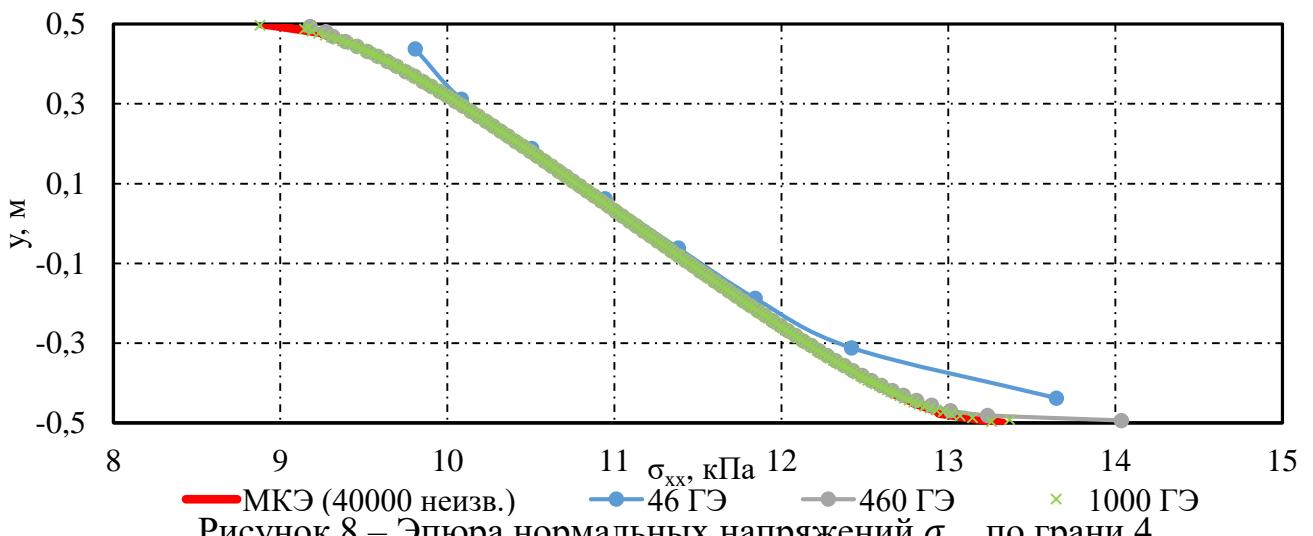


Рисунок 8 – Эпюра нормальных напряжений σ_{xx} по грани 4

Погрешность определения напряжений МКЭ в перемещениях сопоставима с решением задачи МГЭ в напряжениях при соотношении количества неизвестных 20:1.

Границные интегральные уравнения внешних краевых задач получаются из (21)-(22) умножением ядер (23)-(26) на «-1», что соответствует изменению направления нормали n_m на противоположное. На рисунке 9 представлена задача об одностороннем растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием (задача Кирша).

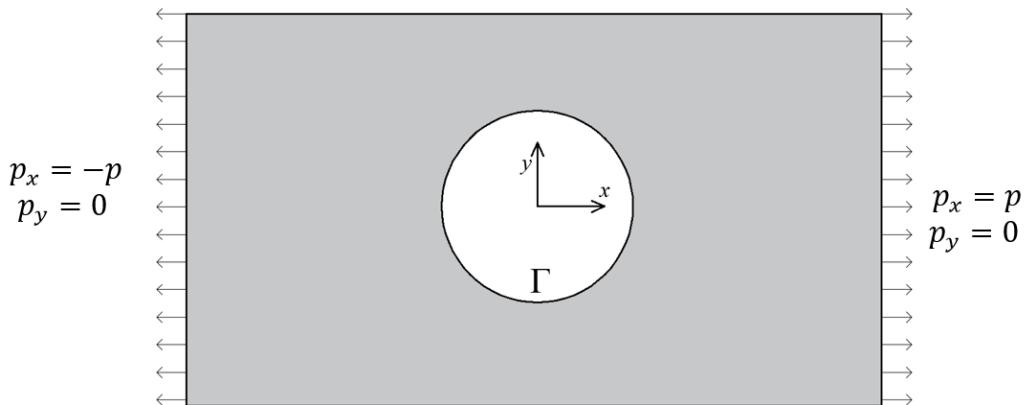


Рисунок 9 – Расчетная схема задачи Кирша

Решение данной задачи можно представить, выделив из решения постоянную часть напряженного состояния

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x p + \mathbf{T}' \quad (28)$$

где p – величина напряжений на бесконечности;

\mathbf{T} – тензор напряжений в исходной задаче;

\mathbf{T}' - тензор напряжений, подлежащий численному определению.

Границные условия для \mathbf{T}' формулируются следующим образом:

$$\Gamma: \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' = -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \quad (29)$$

Таким образом, вспомогательная задача относительно \mathbf{T}' является второй внешней краевой задачей. На рисунке 10 представлено распределение тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ по окружности, при величине растягивающих напряжений $p = 100$ кПа.

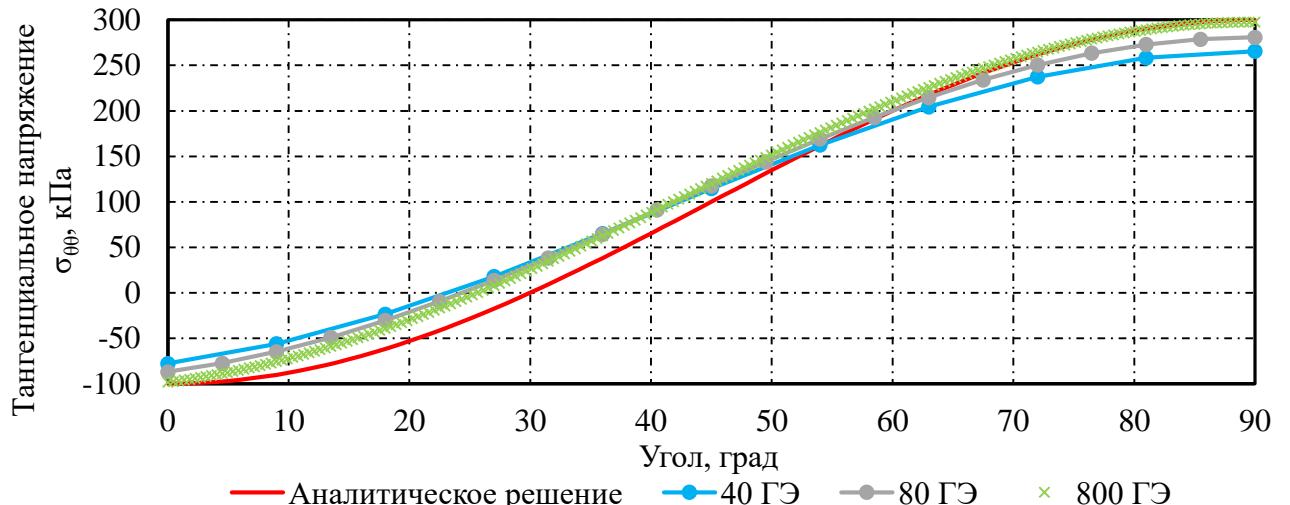


Рисунок 10 – Распределение тангенциальных напряжений по четверти отверстия

Вычисленные значения тангенциальных напряжений в точке с углом $\pi/2$, а также величины относительной погрешности представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Тангенциальные напряжения и погрешности решения задачи Кирша

Количество ГЭ	$\sigma_{\theta\theta}$, кПа	$\varepsilon, \%$
40	265,6	11,5
80	280,8	6,4
800	297,8	0,7
Примечание: относительная погрешность определена как $\varepsilon = \sigma_{\theta\theta} - 3p /3p \cdot 100\%$		

В третьей главе рассмотрены постановки в производных для нестационарных задач, в частности для задач теплопроводности. Используя описанные выше, векторные обозначения, постановка имеет следующий вид:

$$S: \begin{cases} \Delta \mathbf{q} + \nabla d = \nabla \dot{T} \rho c \\ \dot{\mathbf{q}} = k \nabla \dot{T} \end{cases}, \quad \Gamma_1: \begin{cases} \mathbf{t} \cdot \mathbf{q} = h \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = \dot{T} \rho c - d \end{cases} \quad (30)$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = p \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0 \end{cases}, \quad t = t_0: \nabla T_0 = \mathbf{q}_0$$

где k – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); ρ – плотность, кг/м³; c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); $\dot{T} = \partial T / \partial t$ – скорость изменения температуры во времени.

В сформулированной постановке неизвестными являются первые производные по координате от температуры $q_x = k \partial_x T$, $q_y = k \partial_y T$, а также производная от температуры по времени $\dot{T} = \partial T / \partial t$.

Для вектора теплового потока \mathbf{q} и скорости изменения температуры \dot{T} получены интегральные представления:

$$c(m) \mathbf{q}(m, t_F) = \int_S T^* \cdot \mathbf{q}_0 dS(z) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \mathbf{n}_z \cdot T^* \dot{T} d\Gamma(z) dt -$$

$$- \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \left[\frac{T^*}{2\alpha\tau} (q_t \tilde{\mathbf{R}} - q_n \mathbf{R}) \right] d\Gamma(z) dt, \quad (31)$$

$$c(m) \dot{T}(m, t_F) - \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \dot{T} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_z}{2\alpha\tau} T^* d\Gamma(z) dt =$$

$$= -\alpha \int_S \mathbf{q}_0 \cdot \frac{\mathbf{R}}{2\alpha\tau} T^* dS(z) - \frac{1}{\rho c} \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} T^* \left(\frac{R^2}{4\alpha\tau^2} - \frac{1}{\tau} \right) q_n d\Gamma(z) dt, \quad (32)$$

где T^* – фундаментальное решение нестационарной задачи теплопроводности на плоскости, $\tau = t_F - t$, $\alpha = k/\rho c$ – коэффициент температуропроводности, м²/с.

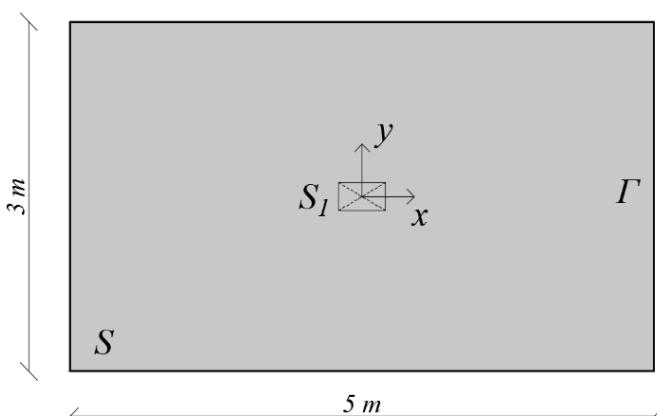


Рисунок 11 – Расчетная схема нестационарной задачи

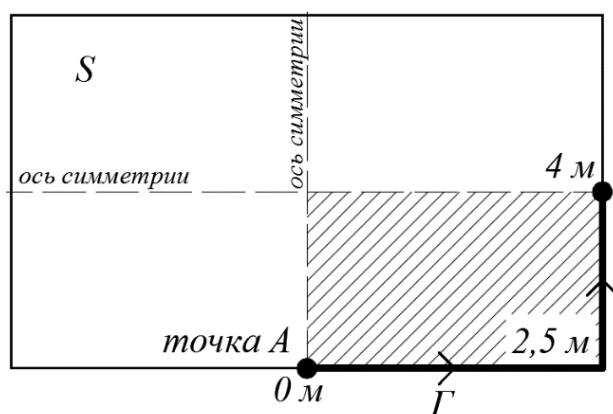


Рисунок 12 – Часть расчетной схемы для демонстрации результатов расчета

Используя интегральные представления (31)-(32) и соответствующие ГИУ, выполнено решение нескольких тестовых нестационарных задач о распространении тепла в ограниченной области S (рисунок 11). Условие первой задачи – изменение температуры на границе Γ во времени по заданному гармоническому закону $T|_{\Gamma} = 20 \sin(4\pi/3 t) ^\circ K$. Вторая задача – заданный в области S_1 начальный градиент температур \mathbf{q}_0 при постоянной нулевой температуре на границе Γ .

Так как задачи имеют две оси симметрии, результаты расчета представлены для одной четверти расчетной области согласно рисунку 12.

На рисунках 13-14 представлены зависимости теплового потока от времени в точке A для различных шагов интегрирования по времени Δt при постоянном размере граничного элемента $l = 0,05 \text{ м}$.

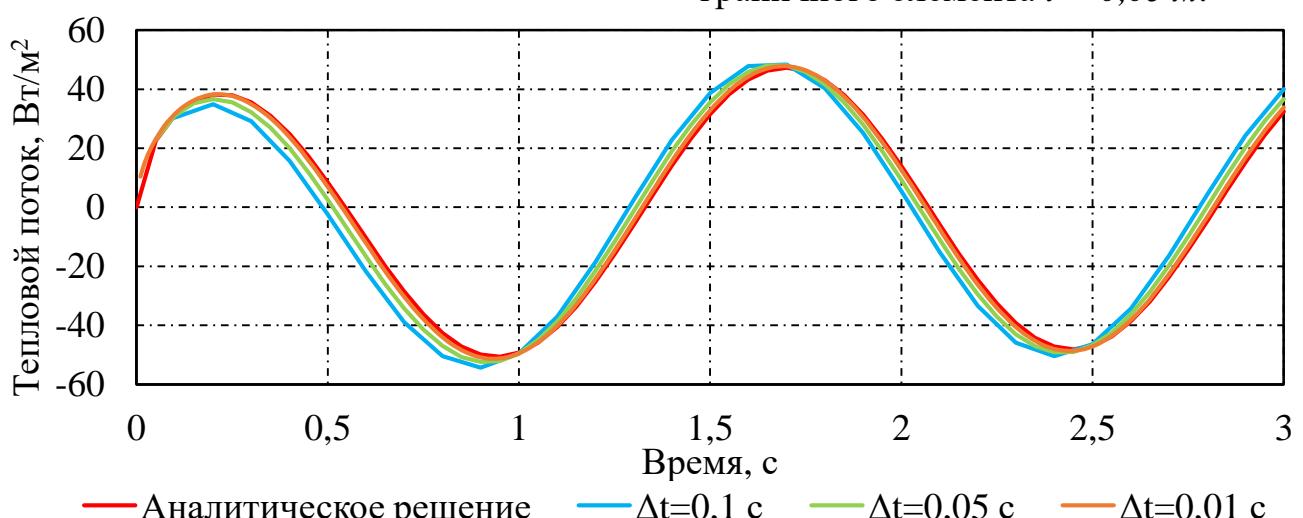


Рисунок 13 – Нестационарная задача 1. Зависимость теплового потока от времени в точке A при различных Δt

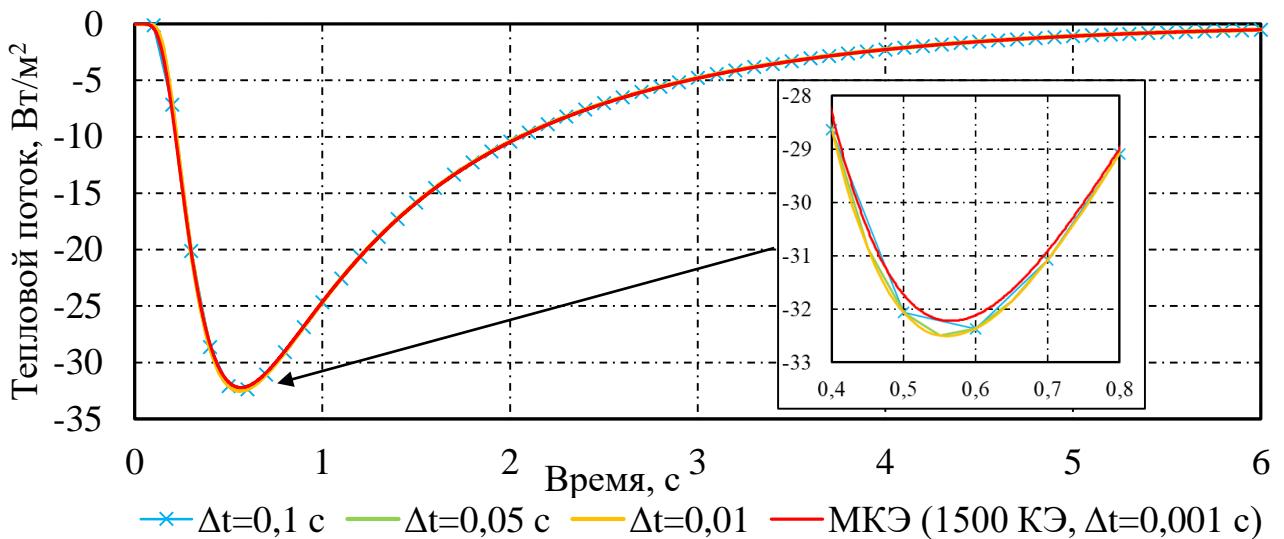


Рисунок 14 – Нестационарная задача 2. Зависимость теплового потока от времени в точке А при различных Δt

По рисункам 13-14 видно, что допустимая инженерная точность достигается даже при наиболее крупном шаге интегрирования по времени $\Delta t=0,1$ с. Также по рисунку 14 заметно, что минимизация вычислительной погрешности для классического МКЭ требует большего количества элементов, и меньший шаг интегрирования по времени в сравнение с МГЭ в производных.

В четвертой главе проведено описание разработанных вычислительных алгоритмов и программной реализации метода граничных элементов для решения задач в производных (напряжениях), рассмотренных во второй и третьей главах.

Каждая из программ позволяет:

- 1) для указанных выше задач в явном виде (не используя операцию численного дифференцирования) определять производные исходной функции: вектор теплового потока для задач теплопроводности, вектор напряжений для задач о кручении, тензор напряжений при решении задач теории упругости;
- 2) определять тензор напряжений, вектор теплового потока, в том числе на границе области, не используя операцию численного дифференцирования;
- 3) решать вторую краевую задачу без введения фиктивных связей в расчетную схему;
- 4) учитывать наличие плоскостей симметрии, при этом не требуется вводить граничные узлы на данных плоскостях;
- 5) учитывать без дополнительного ввода узлов границу, удаленную на бесконечно большое расстояние (Рисунки 5, 9);
- 6) рассматривать неодносвязные области.

Каждая программа МГЭ состоит из нескольких блоков. Наполнение блоков зависит от типа краевой задачи, степени неодносвязности и необходимости интегрирования по области и времени.

В первом (начальном) блоке приводится массив и данные по физико-механическим и геометрическим характеристикам. Массив заполняется координатами точек, по которым формируются граничные элементы. Также в первом блоке содержится информация о граничных условиях задачи.

Второй блок – формирование массива, содержащего координаты векторов внешней единичной нормали в каждом граничном элементе; формирование массива радиус-векторов от центра i -го граничного элемента к центру j -го граничного элемента.

В третьем блоке реализовано формирование элементов матриц влияния, сборка глобальной матрицы. Диагональные элементы матриц влияния определяются аналитически, недиагональные элементы по наиболее простым квадратурным формулам метода средних прямоугольников.

Четвертый блок – решение системы алгебраических уравнений, определение неизвестных значений функций на границе. При решении нестационарной задачи данный блок дополняется шаговой схемой интегрирования по времени.

Пятый блок – определение производной внутри области, алгебраические операции для определения градиента функции на границе области, постобработка результатов расчета. Описанная структура программы является общей для всех решенных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы по работе:

1. Для задач, описываемых уравнениями Лапласа и Пуассона, разработаны дифференциальные и интегральные постановки относительно производных от искомых функций, позволяющие находить эти производные напрямую. С точки зрения численной реализации методом граничных элементов такие постановки имеют ту же вычислительную сложность, что и классические формулировки: ядра соответствующих граничных интегральных уравнений содержат только слабые особенности, аналогичные традиционным.

Существенным положительным свойством постановок относительно производных является то, что для II-ой краевой задачи решение оказывается единственным, что позволяет эффективно решать её численно без введения дополнительных условий или модификации вычислительных алгоритмов. Это расширяет возможности применения МГЭ в задачах с неоднородными и сложными граничными условиями.

2. Для плоской задачи теории упругости с произвольными граничными условиями предложена постановка, в которой в качестве неизвестных выступают компоненты напряжений и угол жёсткого поворота. Полученные для таких задач граничные интегральные уравнения прямого метода относятся к уравнениям II рода для любых типов краевых задач и содержат особенности в ядрах, полностью аналогичные особенностям уравнений для постановок в перемещениях. Это обстоятельство делает возможным применение стандартных численных схем метода граничных элементов и позволяет определять все компоненты напряжений (включая тангенциальные) непосредственно на границе тела с использованием только алгебраических операций, что существенно снижает вычислительную погрешность.

Важным преимуществом предложенной постановки является непрерывная зависимость решения от нагрузки во II краевой задаче, что обеспечивает

устойчивость численного решения без необходимости введения закреплений от жёсткого смещения или применения специальных регуляризирующих процедур.

3. Для нестационарной задачи теплопроводности получены новые дифференциальная и интегральная формы постановок, в которых неизвестными являются вектор теплового потока и скорость изменения температуры во времени. Структура соответствующих граничных интегральных уравнений построена таким образом, что позволяет использовать стандартные шаговые схемы интегрирования по времени, применяемые в классическом МГЭ. Это обеспечивает возможность прямого вычисления компонент вектора теплового потока (как в области, так и на границе) без предварительного определения поля температур. Такой подход особенно удобен в случаях, когда требуется анализ локальных потоков тепла или оценка интенсивности теплового взаимодействия на границе раздела материалов.

4. На основе предложенных постановок разработаны алгоритмы численного решения методом граничных элементов относительно производных (напряжений), позволяющие решать широкий круг задач: основные краевые задачи (включая внешние), задачи в неодносвязных областях, а также смешанные краевые задачи. Особенности реализации МГЭ в постановках относительно производных проанализированы на серии тестовых задач различной сложности. Проведённые численные эксперименты с использованием простейших «постоянных» граничных элементов показали, что в ряде случаев новые постановки обеспечивают повышение точности вычисления производных (напряжений) по сравнению с традиционными постановками в перемещениях при сопоставимых вычислительных затратах. Наибольший эффект достигается при необходимости получения уточнённого распределения напряжений вблизи границы тела, а также при решении задач для тел, незакреплённых от жёсткого смещения. Это особенно важно при локальном анализе напряжённо-деформированного состояния выделенных фрагментов конструкций, используемых в строительной практике.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

Публикации в научных журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в базах SCOPUS и Web of Science:

1. Семенов, Д.А. Стационарная задача теплопроводности. Постановка в производных и решение методом граничных элементов // Современное строительство и архитектура. – 2025. – № 9 (64).

2. Лалин, В.В. Граничные интегральные уравнения для вектора теплового потока и их решение методом граничных элементов / В.В. Лалин, Д.А. Семенов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2024. – №4. – С. 2-10.

3. Лалин, В.В. Постановка плоской задачи теории упругости в напряжениях / В.В. Лалин, Д.А. Семенов // Вестник Евразийской науки – 2025. – Т. 17. - № 3. – С. 1-13.

4. Лалин, В.В. Задача о кручении: постановка в напряжениях и решение методом граничных элементов / В.В. Лалин, Д.А. Семенов // Строительная

механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. – Т. 19. – №4. – С. 339-348.

5. Лалин, В.В. Метод граничных элементов при решении плоской задачи теории упругости в напряжениях / В.В. Лалин, **Д.А. Семенов** // Вестник Евразийской науки. – 2025. – Т 17. – № 4. – С. 1-17.

6. Lalin, V. The problem of non-stationary thermal conductivity: formulation in derivatives and solution by the boundary element method / V. Lalin, **D. Semenov** // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2025. – vol. 20. – Pp. 48-57.

Публикации в других изданиях

1. Лалин В.В., **Семенов Д.А.** Постановка и решение методом граничных элементов задач в напряжениях // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений, Пенза 21.05-24.05.2025. С. 27-28.

2. Лалин В.В., **Семенов Д.А.** Постановка в напряжениях и решение методом граничных элементов плоской задачи теории упругости // XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь 24.02-28.02.2025. С. 172.

3. **Семенов Д.А.** Постановка в производных и решение методом граничных элементов задачи теплопроводности // Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство, транспорт, Тамбов 28.05-29.05.2025. С. 233-240.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

1. **Семенов Д.А.**, Лалин В.В., Тарасов В.А. Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа для расчета касательных напряжений при кручении стержней методом граничных элементов» №2024665634 от 03.07.2024, правообладатель: ФГАОУ ВО СПбПУ (НИУ).