



**ПОЛИТЕХ**  
Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого

На правах рукописи

*Борина*

**Борина Анастасия Петровна**

**Методика математического моделирования  
статически неустойчивых двуногих шагающих механизмов**

2.5.2. Машиноведение

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург  
2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Научный  
руководитель:

**Терешин Валерий Алексеевич,**  
кандидат технических наук, доцент

Официальные  
оппоненты:

**Пряничников Валентин Евгеньевич,**  
доктор технических наук, старший научный  
сотрудник, ведущий научный сотрудник отдела  
№ 5 федерального государственного учреждения  
«Федеральный исследовательский центр Институт  
прикладной математики имени М. В. Келдыша  
Российской академии наук», Москва

**Абрамчук Михаил Владимирович,**  
кандидат технических наук, доцент факультета  
систем управления и робототехники  
федерального государственного автономного  
образовательного учреждения высшего  
образования «Национальный исследовательский  
университет ИТМО»,  
Санкт-Петербург

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
образования «Волгоградский государственный  
технический университет», Волгоград

Защита состоится «25» июня 2025 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета У.2.5.2.42 федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, главный корпус, аудитория 118.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» <https://www.spbstu.ru/science/the-department-of-doctoral-studies/defences-calendar/>.

Автореферат разослан «15» мая 2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета У.2.5.2.42,  
кандидат технических наук, доцент



М. В. Жавнер

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Совершенствование электронной компонентной базы, создание новых конструкционных материалов и развитие технологий искусственного интеллекта значительно расширили возможности разработки шагающих робототехнических систем. Машины с шагающими движителями, по сравнению с колесными или гусеничными, имеют ряд преимуществ при передвижении в условиях бездорожья, завалов, пересеченной местности, а также внутри зданий, по лестницам или коридорам. Они могут эффективно использоваться для сбора данных и транспортировки грузов в различных отраслях.

Большинство современных разработок в области создания шагающих машин представляют собой статически устойчивые тяжеловесные системы с недостаточной маневренностью и низкой скоростью. Для повышения маневренности и быстродействия при сохранении плавности хода шагающих механизмов необходимо снижать степень их статической устойчивости, отказавшись от управляемых ступней и ограничившись одной парой ног.

Создание двуногих шагающих аппаратов, не обладающих статической устойчивостью, способных преодолевать препятствия без потери скорости движения, вызванной процессами постановки массивных стоп, требует разрешения следующего **технического противоречия**:

– с одной стороны, функционирование в сложной среде требует сохранения статической устойчивости, которая обычно достигается за счет увеличения площади управляемых ступней;

– с другой стороны, передвижение без потери скорости требует отказаться от развитых ступней, а неуравновешенная опора обуславливает отсутствие устойчивого положения.

Указанное техническое противоречие вызывает необходимость синтеза конструкторско-технологических решений и более совершенной системы управления, которая могла бы обеспечивать динамическую устойчивость двуногих шагающих механизмов.

В основу проведенного автором исследования положена **гипотеза** о том, что разрешение технического противоречия возможно за счет создания иерархической структуры системы динамического управления двуногим роботом.

На верхнем уровне управления анализируется информация о свойствах грунта и возможных препятствиях. Исходя из этого определяется траектория и режим движения аппарата. Решение задачи стабилизации движения около требуемой траектории осуществляется на следующем уровне, на котором определяется место и время постановки ног. В цепь обратной связи предложено включить идеальный механизм, описываемый уравнениями двух плоских перевернутых математических маятников, синхронизированных по моменту времени окончания шага. Нижний уровень управления организован по принципу следящих приводов и обеспечивает желаемое положение корпуса,

отсутствие наклонов и постоянство высоты. Разворот вокруг вертикальной оси может быть стабилизирован во время двухопорной фазы.

Необходимость подтверждения сформулированной гипотезы для разрешения проблемной ситуации определяет **актуальность** проведения научного исследования.

**Степень научной разработанности.** Научно-теоретической базой для проведения диссертационного исследования послужили работы отечественных и зарубежных авторов. Основателями направления управляемых шагающих механизмов в науке считаются И. И. Артоболевский, Ю. В. Болотин, В. В. Белецкий, Е. А. Девянин, Ю. Ф. Голубев, Д. Е. Охоцимский, А. К. Платонов, В. Е. Павловский, А. М. Формальский. Исследования в области создания управляемых шагающих механизмов связаны с именами А. П. Бессонова, Е. С. Брискина, А. С. Горобцова, В. В. Жоги, И. А. Каляева, А. Л. Кемурджиана, В. В. Лапшина, М. И. Маленкова, А. В. Малолетова, Н. В. Умнова, Ф. Л. Черноусько, В. В. Чернышева, Е. И. Юревича, А. С. Ющенко. Затронутой теме были посвящены работы зарубежных учёных, таких как М. Вукобратович, М. Канеко, И. Като, И. Шимояма, С. Хироси, К. Дж. Валдрон, Т. Зелинская. Вопросы биомеханики движений и особенностей кинематики конечностей человека, а также реабилитационные устройства рассматриваются в работах К. Бэгшоу, В. С. Гурфинкеля, В. М. Зациорского, В. М. Мусалимова, В. Л. Уткина и многих других.

Обзор литературы, анализ существующих конструкций шагающих машин и методов их расчетов показали, что отсутствуют работы, посвященные моделированию двуногих статически неустойчивых шагающих механизмов. При наличии достаточно большого числа публикаций по управлению движением шагающих роботов практически не рассматриваются задачи постановки стопы в определенную точку заданной траектории, допускаемой параметрами механизма, в заданное время.

**Научной задачей** является разработка методики математического моделирования статически неустойчивых двуногих шагающих механизмов при различных режимах ходьбы.

**Цель исследования** – обеспечение динамической устойчивости двуногих шагающих механизмов за счет разработки методики синтеза системы управления и математического моделирования динамических процессов при ходьбе.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

- исследование свойств «идеального механизма» как наиболее простой динамической модели движения исследуемого объекта;
- разработка математической модели динамики статически неустойчивого двуногого шагающего аппарата;
- теоретическое обоснование алгоритмов управления ходьбой в неустановившихся режимах;
- проведение динамического анализа системы управления при различных режимах движения шагающего аппарата.

**Научная новизна.** Основным научным результатом диссертации является создание методики математического моделирования для расчетно-теоретического обоснования технических решений при разработке шагающих аппаратов, обладающих более совершенной системой управления, обеспечивающей динамическую устойчивость. Научная новизна разработанной автором методики заключается в:

- разработке математической модели эталонного механизма «перевернутый маятник» в цепи обратной связи, позволяющей формировать программные значения координат и времени постановки ноги на каждом шаге;
- разработке алгоритмов программного управления ходьбой статически неустойчивого двуногого шагающего аппарата с учетом ограничений на длину и продолжительность шага и при наличии обратных связей в системе управления при следующих режимах движения: прямолинейная ходьба с постоянной скоростью, подъем и спуск по ступеням, ходьба по наклонной плоскости, поворот и динамическое стояние;
- разработке математической модели системы управления, позволяющей эффективно реализовать предлагаемую методику формирования программного движения.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Диссертационное исследование является вкладом в теорию разработки шагающих механизмов. Разработанная методика математического моделирования и программа для ЭВМ (свидетельство о государственной регистрации № 2023686589) могут быть использованы при создании управляемых двуногих статически неустойчивых шагающих аппаратов, характеризующихся высокой скоростью и маневренностью, отсутствием развитых стоп и синхронизированных с естественными неуправляемыми движениями.

Эффективность разработанной системы управления численно подтверждена для объекта, представляющего собой абсолютно твердое тело на невесомых ногах. Однако она может быть столь же эффективной для более сложных механизмов, динамические свойства которых при ходьбе в основных режимах близки к рассмотренным.

**Методы исследования.** Применены методы математического анализа, теории механизмов и машин, теории автоматического управления, теоретической и аналитической механики. При выполнении расчетов, реализованных на ЭВМ, численных и экспериментальных исследований, представлении графических материалов применены пакеты программ Mathcad, Maple и др.

**Положения, выносимые на защиту:**

- модель двуногого шагающего аппарата, позволяющая оценивать эффективность алгоритмов и параметров системы управления;
- математическая модель системы управления статически неустойчивого двуногого шагающего аппарата с перевернутым маятником в качестве идеального механизма в цепи обратной связи;
- алгоритмы программного управления статически неустойчивым двуногим шагающим аппаратом при ходьбе и динамическом стоянии.

**Достоверность.** Достоверность полученных результатов определяется корректным использованием методов математического анализа, теории механизмов и машин, теории автоматического управления и аналитической механики и подтверждена совпадением экспериментальных результатов с данными компьютерного моделирования.

**Апробация результатов работы.** Основные положения и результаты исследований докладывались и обсуждались на второй научно-технической конференции «СТАРТ В БУДУЩЕЕ» в 2011 году в Санкт-Петербурге, международных научно-практических конференциях «Неделя науки СПбГПУ», «Современное машиностроение. Наука и образование», проходивших в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете ежегодно с 2011 по 2016 год, международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам в 2015, 2017 и 2018 годах в Алуште, международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях в 2016 году в Алуште.

Ценность научных работ соискателя подтверждается:

- дипломом победителя конкурса грантов 2012 года для аспирантов вузов, отраслевых и академических институтов, расположенных на территории Санкт-Петербурга;

- дипломами первой степени за высокие достижения в научно-исследовательской работе по итогам XL международной научно-практической конференции «Неделя науки СПбГПУ» и XLI научно-практической конференции с международным участием «Неделя науки СПбГПУ»;

- дипломом третьей степени за лучший доклад «Управление плоской ходьбой статически неустойчивого шагающего аппарата» в секции «Инновационные проектно-конструкторские решения и разработки» на второй научно-технической конференции молодых специалистов «Старт в будущее».

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 22 печатные работы, в том числе две – в журналах, рекомендованных ВАК РФ по специальности 2.5.2. Машиноведение для публикации материалов диссертационных работ, три – в изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science, получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Соответствие паспорту научной специальности.** Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук Бориной Анастасии Петровны «Методика математического моделирования статически неустойчивых двуногих шагающих механизмов» соответствует паспорту научной специальности 2.5.2. Машиноведение в части следующих пунктов:

- п. 2. Теория и методы проектирования машин и механизмов, систем приводов, узлов и деталей машин;

- п. 3. Методы кинематического и динамического анализа, в том числе математического моделирования, анимационного и экспериментального исследования механизмов;

- п. 6. Системы автоматизированного проектирования объектов машиностроения, базирующиеся на наиболее совершенных моделях функционирования и технического состояния этих объектов.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения, полный объём составляет 139 страниц печатного текста. Работа содержит 63 рисунка, библиографический список из 78 наименований и три приложения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования и степень её разработанности. Сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Изложены положения, выносимые на защиту диссертационного исследования.

**Первая глава** посвящена ретроспективному анализу развития шагающих аппаратов. Выполнен обзор современных двуногих конструкций, рассмотрены их особенности, преимущества, области применения. Рассмотрена научная проблематика, связанная с разработкой статически неустойчивых шагающих аппаратов.

Исследованы возможности управления статически неустойчивым двуногим шагающим аппаратом на примере точечной модели перевернутого математического маятника. Проведено экспериментальное исследование процессов равномерной и прямолинейной ходьбы. Объектом испытаний был здоровый человек. В результате была получена раскадровка движений ног, представленная на рисунке 1.

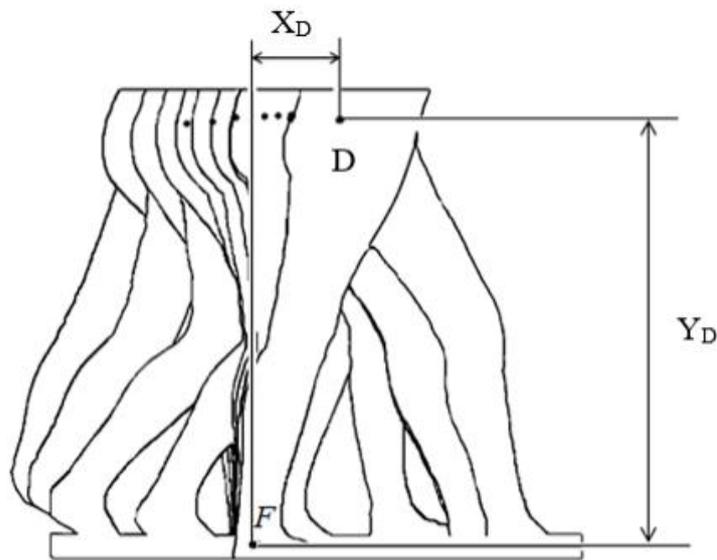
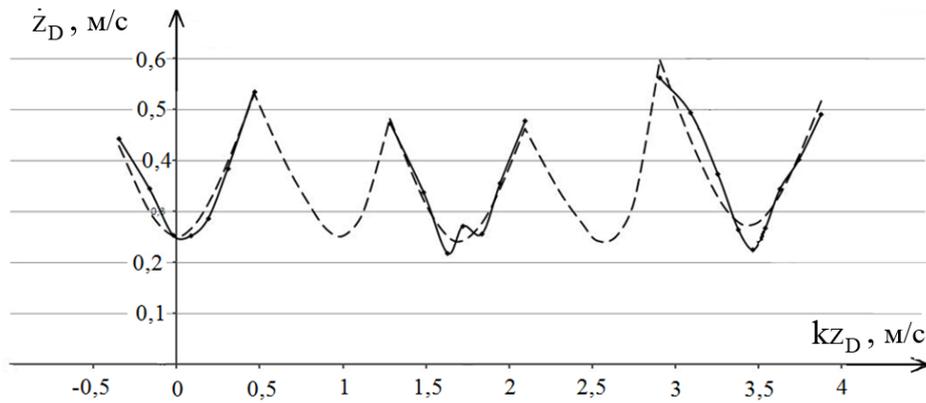


Рисунок 1 – Кинограмма шага с тактом 0,1 с

Полученные данные позволили определить закон движения тазобедренного сустава человека и построить фазовые траектории горизонтального перемещения, представленные на рисунке 2.



— экспериментальная кривая; --- теоретическая кривая

Рисунок 2 – Фазовые траектории пяти шагов

Подтверждена адекватность математической модели для дальнейшего формирования системы управления ходьбой.

Во второй главе составлена математическая модель шагающего аппарата для оценки применимости разработанной системы управления устойчивой ходьбой, определены аналитические зависимости между шестью координатами корпуса шагающего аппарата, принятого как абсолютно твердое тело, обобщенными координатами левой и правой ног и абсолютными координатами точек постановки ног на опоре. Решена обратная задача геометрического анализа, получены аналитические выражения для всех частных производных, с помощью которых вариации зависимых обобщенных координат связаны с вариациями независимых. Полученные аналитические выражения частных производных необходимы в дальнейшем для формирования уравнений движения с помощью принципа возможных перемещений.

Кинематическая схема двуногого шагающего аппарата представлена на рисунке 3.

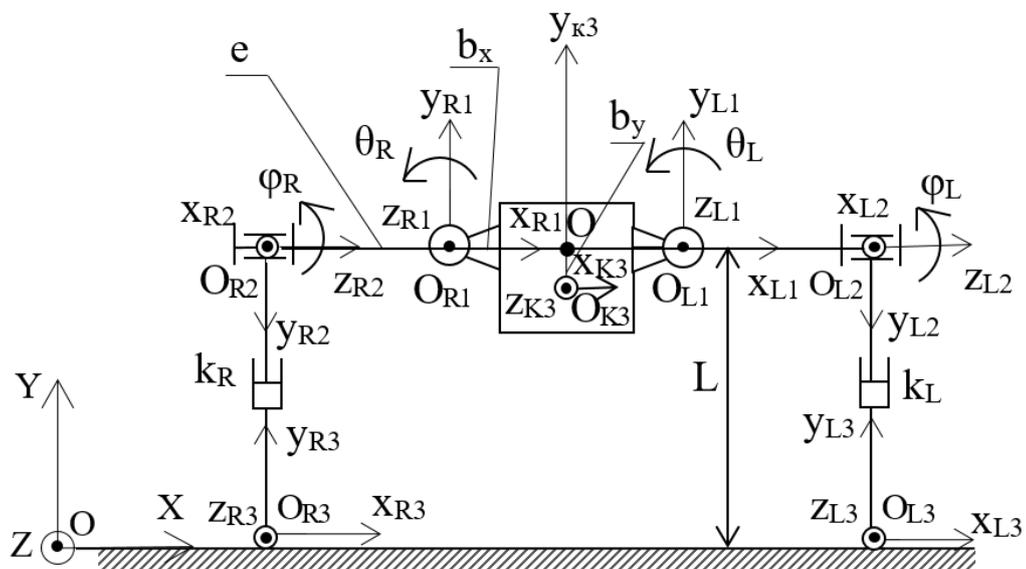


Рисунок 3 – Кинематическая схема двуногого шагающего аппарата

Системы координат  $O_{Li}x_{Li}y_{Li}z_{Li}$  и  $O_{Ri}x_{Ri}y_{Ri}z_{Ri}$  связаны с функциональными звеньями левой и правой ног, где  $i = 1, 2, 3$ . На рисунке 3 системы координат показаны в положении, когда углы поворота левого и правого тазобедренных шарниров  $\theta_L, \theta_R, \varphi_L, \varphi_R$  равны нулю, длины левой и правой ног  $k_L, k_R$  равны друг другу, координаты точек  $O_{L1}, O_{R1}$  в системе  $O_{K3}x_{K3}y_{K3}z_{K3}$  считаются заданными, длины звеньев  $O_{L1}O_{L2}$  и  $O_{R1}O_{R2}$  равны  $e$ ,  $(L-b_y)$  – выражение для определения высоты центра тяжести.

Положение точки  $O_{L3}$ , принадлежащей левой стопе, в глобальной системе определяется с помощью матриц перехода

$$R_{OL3}(x_L, y_L, z_L) = H_{OK3}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) \cdot H_{K3L3}(\theta_L, \varphi_L, k_L) \cdot R_{OL3}^{L3}, \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$  – углы конечных поворотов и координаты центра тяжести корпуса;

$x_L, y_L, z_L$  – координаты точки постановки левой стопы в глобальной системе.

В качестве независимых обобщенных координат выбраны  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, x_L, y_L, z_L$ , определяющие положение корпуса и точку постановки стопы. Выражения для частных производных от собственных координат ноги по независимым обобщенным координатам использованы при составлении динамической модели объекта управления.

**В третьей главе** составлены уравнения движения двуногого шагающего аппарата в одноопорной фазе с учетом его основных инерционных свойств и описана методика формирования алгоритмов управления ходьбой. Приведена блок-схема системы управления, определено понятие устойчивости двуногого статически неустойчивого шагающего аппарата.

Для составления уравнения движения двуногого шагающего аппарата, кинематическая схема которого представлена на рисунке 3, используется общее уравнение динамики. Для описания инерционных свойств аппарата достаточно учесть массу и матрицу инерции корпуса как абсолютно твердого тела.

$$\begin{aligned} \Phi_x \delta x + (\Phi_y - mg) \delta y + \Phi_z \delta z + M_{zK1}^\Phi \delta \alpha + M_{zK2}^\Phi \delta \beta + M_{zK3}^\Phi \delta \gamma + \\ + M_{\theta L} \delta \theta_L + M_{\varphi L} \delta \varphi_L + R_L \delta k_L + F_{xL} \delta x_L + F_{yL} \delta y_L + F_{zL} \delta z_L = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  и  $F_{xL}, F_{yL}, F_{zL}$  – проекции главного вектора сил инерции и вектора силы, действующего на стопу со стороны опоры, на оси неподвижной системы координат;

$M_{zK1}^\Phi, M_{zK2}^\Phi, M_{zK3}^\Phi$  – проекции вектора главного момента сил инерции  $M_0^\Phi = -A_{OK3} (J^{K3} \mathcal{E}^{K3} + \tilde{\Omega}^{K3} J^{K3} \Omega^{K3})$  на оси промежуточных систем координат;

$J^{K3}$  – матрица тензора инерции корпуса относительно его центра масс;

$\mathcal{E}^{K3}, \Omega^{K3}$  – столбцы проекций абсолютного углового ускорения и угловой скорости корпуса;

$\tilde{\Omega}^{K3}$  – кососимметричная матрица, составленная из компонент  $\Omega^{K3}$ ;

индекс «K3» определяет систему координат;

$R_L$  и  $M_{\theta L}$ ,  $M_{\varphi L}$  - движущая сила, действующая вдоль ноги, и движущие моменты в приводах.

Моменты и сила в приводах сформированы на основе идеальных силовых характеристик двигателей и сигналов обратных связей ПД-регуляторов на наклоны корпуса и отклонение высоты центра тяжести от требуемого значения.

$$M_{\theta L} = -k_{p\theta}\gamma - k_{d\theta}\dot{\gamma}, \quad (3)$$

$$M_{\varphi L} = -k_{p\varphi}\alpha - k_{d\varphi}\dot{\alpha}, \quad (4)$$

$$R_L = -k_{pR}(y - L - y_L + b_y) - k_{dR}\dot{y} + mg, \quad (5)$$

где  $k_{p\theta}$ ,  $k_{d\theta}$ ,  $k_{p\varphi}$ ,  $k_{d\varphi}$ ,  $k_{pR}$  и  $k_{dR}$  - коэффициенты обратных связей по координате и скорости.

После подстановки в (2) вариаций  $\delta\theta_L$ ,  $\delta\varphi_L$ ,  $\delta k_L$  через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x_L$ ,  $y_L$ ,  $z_L$  и приравнивания к нулю множителей при всех девяти вариациях, получена система девяти уравнений, распадающаяся на две независимые. Первые шесть называются уравнениями движения (6), а три последних (7) определяют воздействие основания на стопу.

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\ddot{x} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial x} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial x} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial x} = 0 \\ -m(\ddot{y} + g) + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial y} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial y} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial y} = 0 \\ -m\ddot{z} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial z} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial z} = 0 \\ M_{zK1}^{\Phi} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial \alpha} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial \alpha} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial \alpha} = 0 \\ M_{zK2}^{\Phi} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial \beta} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial \beta} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial \beta} = 0 \\ M_{zK3}^{\Phi} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial \gamma} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial \gamma} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial \gamma} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Полученная система шести дифференциальных уравнений (6) описывает движение управляемого шагающего аппарата с шестью степенями свободы в фазе опоры на одну ногу. Эта система шести нелинейных дифференциальных уравнений, дополненная законами управления, позволяет найти изменения шести обобщенных координат и трех движущих сил как функций времени. Полученные девять функций подставляются в оставшиеся три уравнения (7) для определения реакции опоры.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{xL} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial x_L} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_L} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial x_L} = 0 \\ F_{yL} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial y_L} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial y_L} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial y_L} = 0 \\ F_{zL} + M_{\theta L} \frac{\partial \theta_L}{\partial z_L} + M_{\varphi L} \frac{\partial \varphi_L}{\partial z_L} + R_L \frac{\partial k_L}{\partial z_L} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Уравнения движения (6) должны быть дополнены начальными условиями, определяемыми значениями обобщенных координат и их скоростей в конце предыдущего шага, и координатами места постановки ноги.

Значения координат мест постановки ноги определяются по известным условиям для центра тяжести аппарата в начале шага  $x_s, z_s, \dot{x}_s, \dot{z}_s$  и требуемым условиям в его конце  $x_{tf}, z_{tf}, \dot{x}_{tf}, \dot{z}_{tf}$  из любых двух приведенных ниже уравнений движения перевернутого маятника. Движения вдоль осей  $x$  и  $z$  синхронизируются между собой по моменту окончания шага  $t_f$ .

$$\begin{cases} x_{tf} - x_L = \frac{1}{2} \left( (x_s - x_L) + \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{k t_f} + \frac{1}{2} \left( (x_s - x_L) - \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{-k t_f} \\ z_{tf} - z_L = \frac{1}{2} \left( (z_s - z_L) + \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{k t_f} + \frac{k}{2} \left( (z_s - z_L) - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{-k t_f} \\ \dot{x}_{tf} = \frac{k}{2} \left( x_s - x_L + \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{k t_f} - \frac{k}{2} \left( x_s - x_L - \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{-k t_f} \\ \dot{z}_{tf} = \frac{k}{2} \left( z_s - z_L + \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{k t_f} - \frac{k}{2} \left( z_s - z_L - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{-k t_f} \end{cases} \quad (8)$$

где  $k = \sqrt{\frac{g}{L}}$  – частота малых свободных колебаний математического маятника;

$g$  – ускорение свободного падения.

На рисунке 4 показана структурная схема предложенной системы управления.

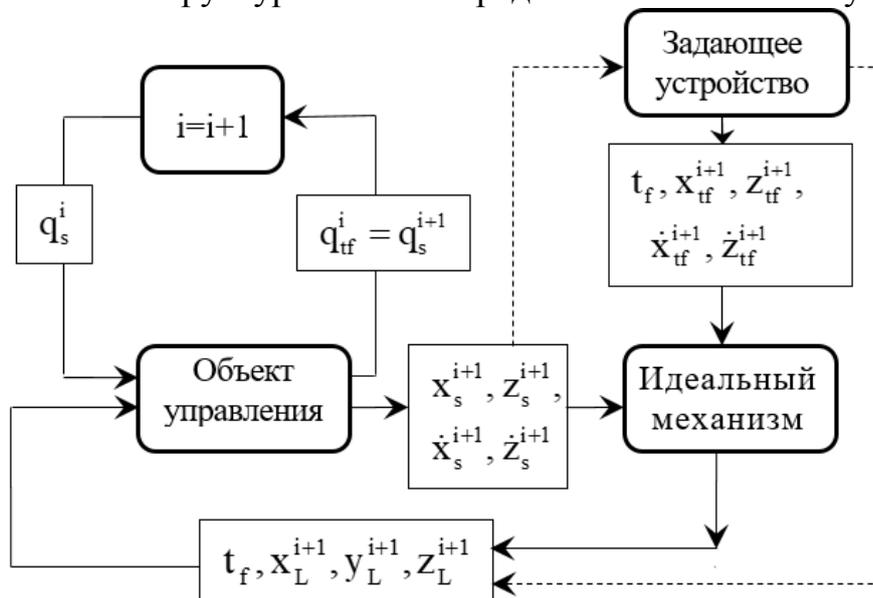


Рисунок 4 – Структурная схема системы управления

Блок задающего устройства на основе информации о требуемом движении обеспечивает блок идеального механизма алгоритмом управления и кинематическими условиями в конце шага  $i+1$ .

В заданное время  $t_f$  окончания  $i$ -го шага по измерениям объекта управления в начале шага и требуемым конечным условиям для шага  $i+1$  в блоке идеального механизма определяются координаты точки постановки ноги на шаге  $i+1$ .

Цепь обратной связи  $q^i$  по всем обобщенным координатам объекта указывает на присвоение начальным условиям шага  $i+1$  значений конечных условий шага  $i$ .

Рассмотрены некоторые частные случаи алгоритмов управления. Выражения для координаты центра тяжести аппарата и координаты места постановки ноги имеют вид:

– при постоянной скорости аппарата в конце каждого шага при движении в одном направлении

$$z_{tf} = z_s + 2 \frac{\dot{z}_s}{\lambda}, \quad (9)$$

$$\lambda = k \frac{e^{k\tau} + 1}{e^{k\tau} - 1} \geq 1,$$

$$z_L = z_s + \frac{\dot{z}_s}{\lambda}; \quad (10)$$

– при постоянной по модулю скорости аппарата в конце каждого шага со сменой направления

$$z_{tf} = z_s = \text{const}, \quad (11)$$

$$z_L = z_s + \frac{(-1)^{i-1} \cdot \dot{z}_s \cdot \lambda}{k^2}; \quad (12)$$

– при постоянной скорости в конце шагов с остановкой и со сменой направления

$$z_{tf} = z_s + \frac{\dot{z}_s}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{2}\right), \quad (13)$$

$$z_L = z_s - \sqrt{2} \frac{\dot{z}_s (e^{k\tau} + e^{-k\tau})}{k(e^{k\tau} - e^{-k\tau})} \cos\left(\frac{\pi}{4}(2 \cdot i + 1)\right). \quad (14)$$

Уравнения (9)–(14) для определения соответствующих параметров при движении вдоль координатной оси  $x$  имеют аналогичный вид.

Описанные алгоритмы реализованы в четвертой главе при различных режимах ходьбы для продольного и поперечного направлений в различных сочетаниях.

Поворот шагающего аппарата на угол  $\chi$  с одного прямолинейного равномерного движения на другое показан на рисунке 5.

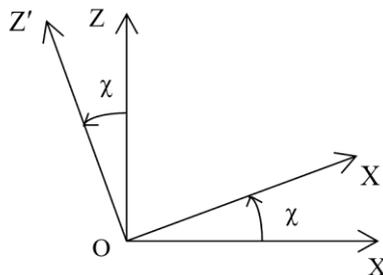


Рисунок 5 – Поворот системы координат на угол  $\chi$

Прямолинейное движение до и после поворота обеспечивается выполнением равенств (9) вдоль оси  $z$  и (11) вдоль оси  $x$ . Равномерность

движения в системе до поворота сохраняется в системе после поворота, поэтому правила определения места постановки ноги сохраняются, а начальные условия по скоростям определяются перепроецированием скоростей в конце предыдущего шага на оси повернутой системы. Таким образом, продольные координаты центра тяжести аппарата и места постановки ноги аппарата после поворота

$$z'_{tf} = z'_s + \frac{2 \cdot \dot{z}_{tf} \cdot \cos(\chi)}{\lambda}, \quad (15)$$

$$z'_L = z'_s - \frac{\sin(\chi) \cdot \dot{x}_s \cdot \lambda}{k^2} + \frac{\cos(\chi) \cdot \dot{z}_s}{\lambda}. \quad (16)$$

Координата центра тяжести и места постановки ноги в поперечном направлении

$$x'_{tf} = x'_s + \frac{2 \cdot \dot{z}_{tf} \cdot \sin(\chi)}{\lambda}, \quad (17)$$

$$x'_L = x'_s + \frac{\cos(\chi) \cdot \dot{x}_s \cdot \lambda}{k^2} + \frac{\sin(\chi) \cdot \dot{z}_s}{\lambda}. \quad (18)$$

При ходьбе аппарату необходимо реагировать на возникающие препятствия, а также менять скорость и направление движения или совершать остановку. Поэтому для определения места постановки ноги в конце следующего шага в системе (8) решено задавать определяющие ходьбу параметры: продольную и поперечную скорость в конце шага и его длительность. Неконтролируемое изменение именно этих параметров может привести к потере устойчивости.

Устойчивость будем понимать не в смысле Ляпунова на бесконечном интервале времени с определением области начальных условий, а как свойство обобщенных координат, их скоростей и длительности шага «значительно» не отклоняться от желаемого движения на конечном интервале времени при наличии конструктивных ограничений.

**Четвертая глава** посвящена проверке работоспособности алгоритмов управления, описанных в главе 3. На примере горизонтальной прямолинейной равномерной ходьбы исследовано движение шагающего аппарата. Геометрические и инерционные параметры приблизительно соответствуют возможному шагающему креслу с сидящим на нем человеком.

Для определения места постановки ноги  $x_L, x_R, z_L, z_R$  с помощью уравнений (10) и (12) на первом шаге выбраны нулевые начальные условия:  $\dot{x}_s = 0$  м/с,  $\dot{z}_s = 0$  м/с,  $x_s = 0$  м,  $z_s = 0$  м и заданы требуемые конечные условия:  $\dot{x}_{tf} = -0,4$  м/с и  $\dot{z}_{tf} = 1$  м/с. Для последующих шагов начальными условиями являются конечные значения координат и скоростей центра тяжести и углов конечных поворотов корпуса из предыдущего шага, определяемые из дифференциальных уравнений движения математической модели реального механизма (6). После определения координат мест постановки ноги рассчитывается движение аппарата по уравнениям (6).

Траектория движения центра тяжести при прямолинейной равномерной ходьбе имеет вид, показанный на рисунке 6. Кружками отмечены места

постановки ног. Ходьба начинается с левой ноги. Необходимо отметить, что места постановки ног модели аппарата приближенно находятся в точках пересечения асимптот траекторий.

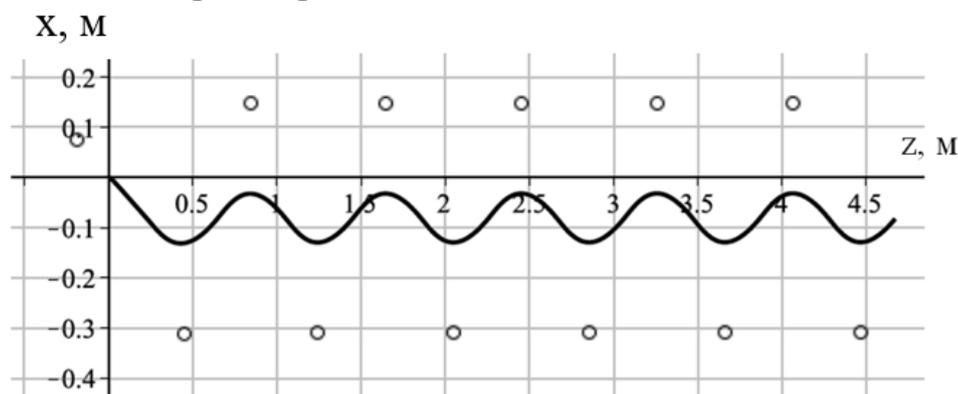


Рисунок 6 – Траектория движения центра тяжести аппарата при прямолинейной ходьбе с постоянной скоростью

Аналогичным образом промоделированы ходьба с поворотом и режим стояния. Траектории центра тяжести аппарата при этих режимах представлены на рисунке 7. В данных режимах движения важно контролировать полученную длину шага, учитывая конструктивные возможности аппарата.

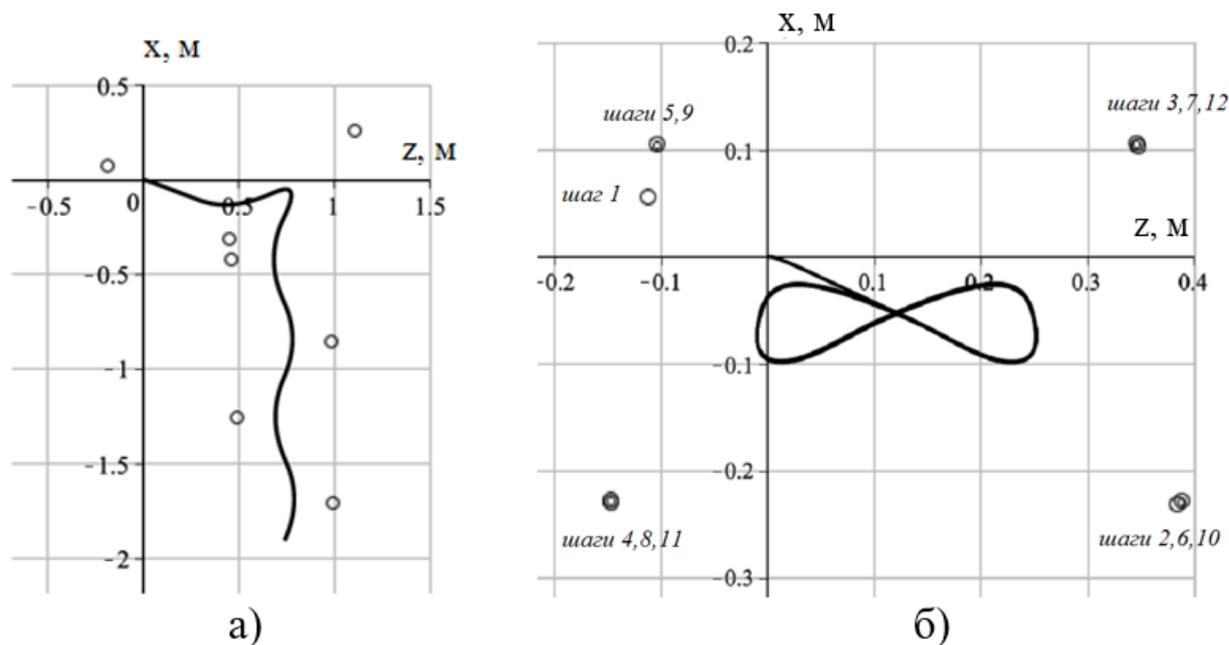


Рисунок 7 – Траектория центра тяжести корпуса аппарата при ходьбе с поворотом на угол  $90^\circ$  на третьем шаге (а) и динамическом стоянии (б)

Уравнения движения (2) позволяют определить обобщенные координаты корпуса, углы поворота  $\theta$  и  $\varphi$  тазобедренных шарниров, длины ног  $k$ , движущие моменты  $M_\theta$  и  $M_\varphi$  и силы  $R$ . Графики их изменения во времени при прямолинейной равномерной ходьбе представлены на рисунках 8-10. Ходьба начинается с левой ноги, сплошные линии соответствуют левой ноге, а штриховые – правой.

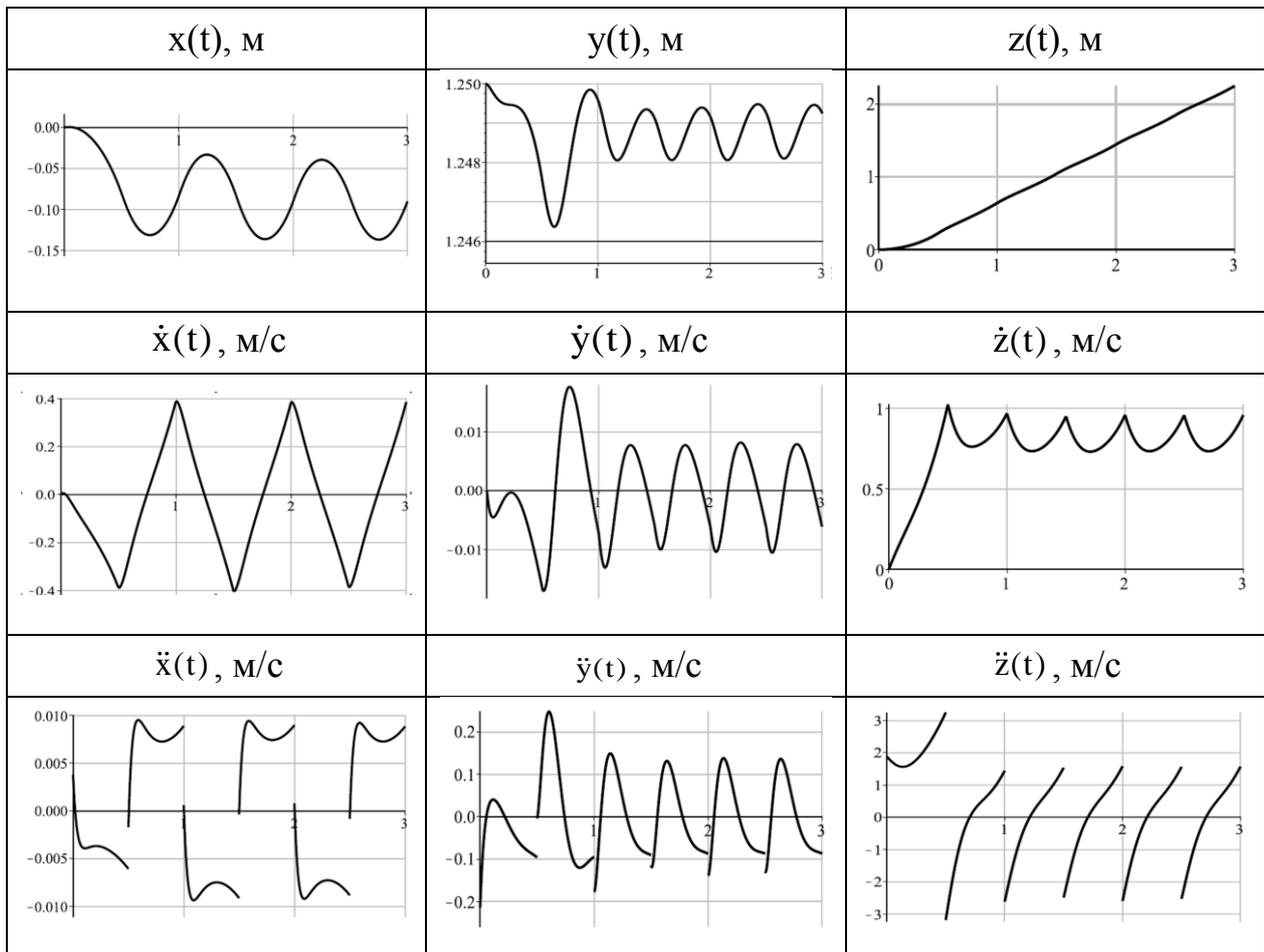


Рисунок 8 – Графики изменения координат, скоростей и ускорений корпуса аппарата при прямолинейном движении

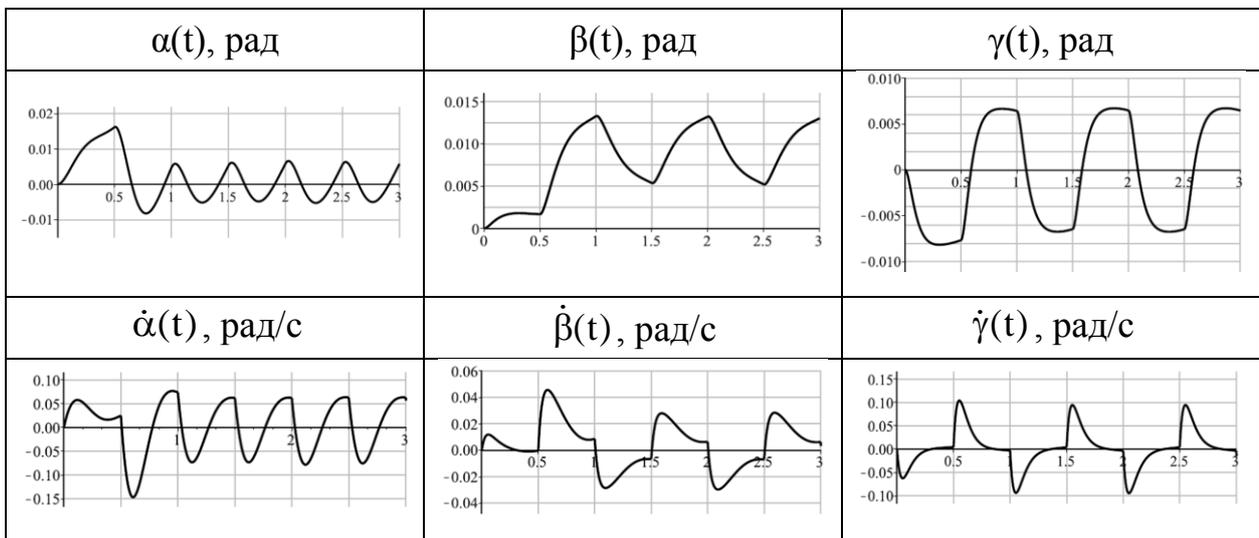


Рисунок 9 – Графики изменения углов конечных поворотов корпуса аппарата и их скоростей при прямолинейном равномерном движении

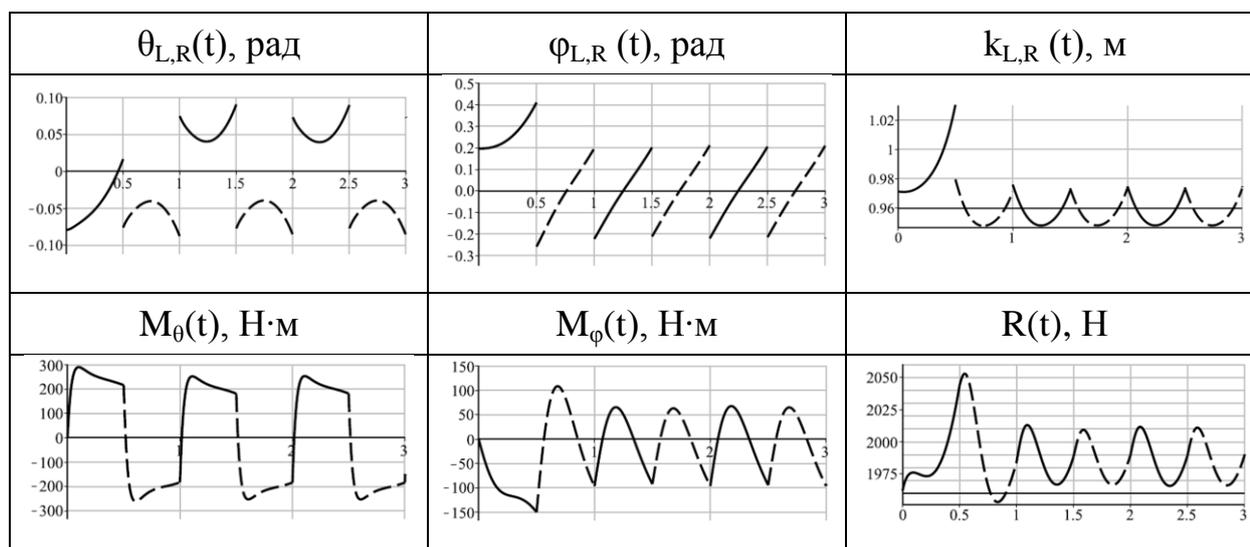


Рисунок 10 – Графики изменения движущих моментов, сил, углов поворота и длин ног

Также в работе исследованы изменения обобщенных координат корпуса, углов поворота и тазобедренных шарниров, длин ног, движущих моментов и сил для режимов ходьбы по наклонной плоскости, подъема и спуска по ступеням, поворота и динамического стояния. Исследованы мгновенные мощности в приводах и их максимальные значения. Определены ограничения на координаты мест постановки ног из условия отсутствия проскальзывания аппарата по опорной поверхности. Численные исследования подтверждают малость отклонений фактического движения аппарата от желаемого.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе дано описание «идеального механизма» как наиболее простой динамической модели движения исследуемого объекта. Выполнено экспериментальное моделирование равномерной прямолинейной ходьбы, построена фазовая траектория центра тяжести человека.

Разработана математическая модель динамики статически неустойчивого двуногого шагающего аппарата, задающая программное движение. Сформированы уравнения движения управляемого шагающего аппарата в одноопорной фазе.

Разработана математическая модель системы управления с перевернутым маятником в цепи обратной связи, формирующая программные значения координат и моментов времени постановки ног.

Разработаны алгоритмы программного управления статически неустойчивым двуногим шагающим аппаратом при ходьбе и динамическом стоянии.

Разработан программный комплекс системы управления движением статически неустойчивого шагающего аппарата. Проанализировано влияние изменения коэффициентов обратной связи по координатам и скоростям на движение аппарата в режиме прямолинейной равномерной ходьбы. Определены значения углов поворота сдвоенных шарниров, длин ног,

движущих моментов и сил в приводах в режимах прямолинейной горизонтальной ходьбы, ходьбы по наклонной плоскости, подъема на одну ступень, поворота на различные углы и динамического стояния. Исследованы изменения мгновенных мощностей в приводах и их максимальные значения на основных режимах движения.

Подтверждено обеспечение абсолютной устойчивости разработанной математической модели шагающего аппарата как дискретной системы, то есть нулевое отклонение от требуемого движения на следующем шаге.

## **СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК**

1. Борина, А. П. Система управления статически неустойчивым шагающим аппаратом / А. П. Борина // Вестник ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. – 2023. – Т. 26, № 4. – С. 4-12. – DOI: 10.22213/2413-1172-2023-4-4-12.

2. Борина, А. П. Управление статически неустойчивым шагающим аппаратом при ограниченном трении в опоре / А. П. Борина // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2023. № 4. – С. 294-303. – DOI: 10.22281/2413-9920-2023-09-04-294-303.

### **Публикации в изданиях, входящих в Web of Science/Scopus**

3. Borina, A. Stability of walking algorithms / A. Borina, V. Tereshin // Advances in Mechanical Engineering: Lecture Notes in Mechanical Engineering, Saint Petersburg, Russia, 01-02 июня 2016 года. – Cham: Springer. – 2017. – P. 19-25. – DOI 10.1007/978-3-319-53363-6\_3.

4. Borina, A. Mathematical modeling of interaction of the biped dynamic walking robot with the ground / A. Borina, V. Tereshin // Advances in Mechanical Engineering: Lecture Notes in Mechanical Engineering, Saint Petersburg, Russia, 01-02 июня 2014 года. – Cham: Springer. – 2016. – P. 127-133. – DOI 10.1007/978-3-319-29579-4\_13.

5. Borina, A. Control of biped walking robot using equations of the inverted pendulum / V. Tereshin, A. Borina // Advances in Mechanical Engineering: Part of the Lecture Notes in Mechanical Engineering book series, Saint Petersburg, Russia, 20-21 июня 2013 года. – Cham: Springer. – 2015. – P. 23-31. – DOI 10.1007/978-3-319-15684-2\_4.

### **Публикации в рецензируемых российских изданиях, включенных в базу РИНЦ**

6. Борина, А. П. Возмущенное движение статически неустойчивого шагающего аппарата / А. П. Борина, В. А. Терешин // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), Алушта, 24–31 мая 2018 года. – Алушта: МАИ. – 2018. – С. 550-551.

7. Борина, А. П. Алгоритмы управления двуногим шагающим аппаратом / А. П. Борина, В. А. Терешин // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным

прикладным системам (ВМСППС'2017), Алушта, 24-31 мая 2017 года. – Алушта: Издательство МАИ-Принт. – 2017. – С. 133-135.

8. Борина, А. П. Устойчивость алгоритмов ходьбы / А. П. Борина, В. А. Терешин // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2016. – № 5. – С. 181-190. – DOI 10.1872/MMF-2016-19.

9. Борина, А. П. Стабилизация ходьбы статически неустойчивого робота методом идеального механизма / А. П. Борина, В. А. Терешин // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Алушта, 25–31 мая 2016 года / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Алушта: Издательство МАИ. – 2016. – С. 305-307.

10. Борина, А. П. Реализация сложных траекторий антропоморфного робота / А. П. Борина, В. А. Терешин // Неделя науки СПбПУ: материалы научного форума с международным участием. Лучшие доклады, Санкт-Петербург, 30 ноября – 05 декабря 2015 года / Ответственные редакторы: В. Э. Гасумянц, Д. Д. Каров. – Санкт-Петербург: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». – 2016. – С. 108-112.

11. Борина, А. П. Математическое моделирование процесса взаимодействия двуногого статически неустойчивого шагающего аппарата с опорной поверхностью / А. П. Борина, В. А. Терешин // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), Алушта, 24–31 мая 2015 года. – Алушта: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – 2015. – С. 614-616.

12. Борина, А. П. Возможности управления двуногим шагающим аппаратом с помощью уравнений перевернутого маятника / А. П. Борина, В. А. Терешин // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2014. – № 4. – С. 131-140.

13. Борина, А. П. Решение задачи о пространственном движении статически неустойчивого шагающего аппарата / А. П. Борина, В. А. Терешин // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2013. – № 3. – С. 631-641.

14. Борина, А. П. Пространственное движение шагающего аппарата под действием управляющих воздействий со стороны ноги / А. П. Борина, В. А. Терешин // Современное машиностроение. Наука и образование. 2012. – № 2. – С. 177-188.

#### **Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ**

15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023686589 Российская Федерация. Система управления движением статически неустойчивого шагающего аппарата: № 2023686589: заявл. 28.11.2023; опубл. 07.12.2023 / А. П. Борина.