

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

---

*А.В. Гарбарук М.Х. Стрелец А.К. Травин М.Л. Шур*

## СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением  
в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и  
направлений подготовки 15.00.00. «Машиностроение»  
в качестве учебного пособия для обучающихся по основным  
профессиональным образовательным программам высшего образования  
направлений подготовки магистратуры  
15.04.03 «Прикладная механика»*



Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2016

УДК 532+533(075.8)

С56

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» СПбПУ *А. Ю. Снегирёв*

Кандидат физико-математических наук, начальник научно-исследовательской лаборатории ИТМФ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»

*А. С. Козелков*

*Гарбарук А. В.* **Современные подходы к моделированию турбулентности** : учеб. пособие / А. В. Гарбарук [и др.]. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.

Описываются современные подходы к моделированию турбулентности с оценкой областей их применимости и перспектив практического использования. Особое внимание уделяется гибриднему подходу, известному как метод моделирования отсоединенных вихрей и нашедшему в настоящее время широкое применение при решении прикладных задач гидроаэродинамики. В частности, подробно излагаются недавние модификации этого метода, разработанные авторами при поддержке Российского научного фонда (Грант № 14-11-00060) и существенно расширяющие круг его приложений. Изложение сопровождается многочисленными примерами расчетов, выполненных в рамках всех рассматриваемых подходов.

Предназначено для студентов и аспирантов, а также для инженеров и научных работников, профессиональная деятельность которых связана с расчетом турбулентных течений.

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета

Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-5434-8

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2016

## Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение .....</b>  | <b>6</b>  |
| <b>I. Общая характеристика существующих подходов к моделированию турбулентных течений .....</b>      | <b>10</b> |
| 1.1. Полуэмпирические модели для замыкания RANS .....  | 11        |
| 1.2. Классические вихреразрешающие подходы.....  | 18        |
| 1.2.1. Прямое численное моделирование (DNS) .....  | 18        |
| 1.2.2. Метод моделирования крупных вихрей (LES).....   | 21        |
| 1.3. Гибридные RANS-LES подходы.....   | 33        |
| 1.4. Оценка вычислительных ресурсов, необходимых для применения различных подходов .....             | 38        |
| <b>2. RANS модели турбулентности.....</b>  | <b>41</b> |
| 2.1. Линейные модели турбулентной вязкости .....   | 41        |
| 2.1.1. Оригинальная версия модели Спаларта-Аллмараса (модель SA-92).....                             | 43        |
| 2.1.2. Оригинальная версия модели Ментера (модель SST-93).....                                       | 48        |
| 2.1.3. Примеры применения оригинальных версий моделей SA-92 и SST-93 .....                           | 53        |
| 2.1.4. Модификации моделей SA-92 и SST-93 .....  | 69        |
| 2.2. Нелинейные модели турбулентности.....   | 79        |
| 2.2.1. Модели переноса рейнольдсовых напряжений.....   | 79        |
| 2.2.2. Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений и нелинейные модели турбулентной вязкости..... | 85        |
| 2.2.3. Примеры, иллюстрирующие возможности нелинейных моделей турбулентности .....                   | 92        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>3. Метод моделирования отсоединенных вихрей (DES) и его модификации .....</b>   | <b>108</b> |
| 3.1. Общий принцип построения DES .....  | 108        |
| 3.2. DES на базе SA RANS модели .....  | 110        |
| 3.2.1. Оригинальная версия.....  | 110        |
| 3.2.2. Поправка на низкие числа Рейнольдса.....  | 112        |
| 3.2.3. Калибровка эмпирической константы $C_{DES}$ .....   | 114        |
| 3.3. DES на базе SST RANS модели .....   | 115        |
| 3.4. Примеры применения DES .....  | 118        |
| 3.5. Недостатки оригинальной версии DES и модификации, предложенные для их устранения .....  | 126        |
| 3.5.1. Переключение DES в LES-режим внутри пограничного слоя, обусловленное измельчением шагов сетки .....   | 126        |
| 3.5.2. Формирование двух логарифмических участков на профиле скорости в присоединенных пограничных слоях при использовании DES в качестве LES с пристеночным моделированием..... | 129        |
| 3.5.3. Задержка перехода к турбулентности в слоях смешения.....  | 131        |
| 3.6. Пути устранения недостатков оригинальной версии DES..   | 132        |
| 3.6.1. Метод DDES .....  | 132        |
| 3.6.2. Метод IDDES.....  | 139        |
| 3.6.3. DDES и IDDES с линейным подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения .....  | 148        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>4. Зонные RANS-LES методы и способы создания турбулентного контента на входе в LES подобласть .....</b>           | <b>173</b> |
| 4.1. Основные способы создания турбулентного контента на входных границах LES в рамках зонных RANS-LES методов ..... | 175        |
| 4.1.1. Предварительный DNS или LES .....   | 180        |
| 4.1.2. “Рецикл” турбулентности .....   | 182        |
| 4.1.3. “Синтетическая” турбулентность .....  | 184        |
| 4.1.4. Искусственный форсинг .....   | 186        |
| 4.1.5. Устройства, генерирующие вихри .....  | 188        |
| 4.2. Метод генерации синтетической турбулентности NTS STG .....  | 190        |
| 4.2.1. Формулировка аэродинамической версии NTS STG.....   | 190        |
| 4.2.2. Акустически адаптированная версия NTS STG .....   | 197        |
| 4.2.3. Примеры, иллюстрирующие возможности NTS STG в рамках зонного RANS-IDDES подхода .....                         | 200        |
| <b>Список литературы .....</b>   | <b>218</b> |

## Введение

Поиск приемлемых для практики форм математического описания турбулентных течений или, как принято говорить, моделей турбулентности вот уже на протяжении более 100 лет (начиная с классических работ О. Рейнольдса) занимает умы многих выдающихся математиков и механиков. Тем не менее, расчет турбулентных течений вплоть до настоящего времени остается одной из наиболее сложных проблем, а надежное предсказание характеристик турбулентных потоков, представляющих практический интерес, по-прежнему является скорее исключением, чем правилом, что объясняется исключительной сложностью турбулентности как физического явления.

Специфическая особенность турбулентности состоит в том, что, в отличие от многих других сложных явлений, для описания которых строгие математические модели отсутствуют, турбулентные течения, согласно современным представлениям, подчиняются классическим уравнениям Навье-Стокса, и в этом смысле проблема моделирования турбулентности может считаться давно решенной. Однако, несмотря на огромный прогресс вычислительной техники, достигнутый в последние десятилетия, ее возможности все еще далеко не достаточны для решения этих уравнений при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса и даже по самым оптимистичным прогнозам будут оставаться таковыми по крайней мере вплоть до конца XXI века. В связи с этим, как и ранее, ключевым вопросом в рассматриваемой области является поиск приемлемого компромисса между физической адекватностью модели и уровнем ее вычислительной трудоемкости. Естественно, что определение “приемлемости” существенным образом зависит от возможностей вычислительной техники, с одной стороны, и от требований

промышленности, являющейся основным потребителем результатов расчетов турбулентных течений, с другой стороны. Поскольку и те, и другие достаточно быстро растут, представление о приемлемости компромисса быстро эволюционирует в сторону все более сложных моделей, что, в свою очередь, требует проведения новых исследований, направленных на определение границ их применимости. Таким образом, несмотря на свою более чем вековую историю, математическое моделирование турбулентных течений по-прежнему остается исключительно актуальной и быстро развивающейся областью теоретической и вычислительной гидро- и аэродинамики.

Данное учебное пособие представляет собой второе, существенно переработанное и расширенное издание аналогичного пособия, опубликованного в 2012 г. [1]. Как и первое издание, оно не претендует на замену многочисленных учебников и монографий, посвященных последовательному изложению рассматриваемой проблемы. Его цель гораздо скромнее и состоит в том, чтобы дать студентам, аспирантам и начинающим исследователям и инженерам соответствующих специальностей общее представление о физической сущности, возможностях и ограничениях современных подходов к моделированию турбулентности. По мнению авторов, это является не только необходимой предпосылкой, но и стимулом к осознанному более глубокому изучению различных аспектов этой сложной проблемы.

Пособие состоит из четырех глав.

В первой главе дана общая характеристика существующих подходов к моделированию турбулентности. При этом акцент сделан на лежащих в их основе предпосылках и вытекающих из них физических и вычислительных ограничениях.

Во второй главе проведен анализ широкого класса моделей, служащих для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений

Навье-Стокса, представлены математические формулировки наиболее популярных из них и приведены конкретные примеры расчетов, иллюстрирующих возможности различных моделей данного типа. В отличие от первого издания, эта глава содержит анализ не только линейных моделей турбулентной вязкости, базирующихся на гипотезе Буссинеска, но и более общих нелинейных моделей.

Третья глава посвящена описанию гибридных (базирующихся на совместном использовании статистических моделей турбулентности и метода моделирования крупных вихрей – Large Eddy Simulation или LES) подходов к описанию турбулентности. При этом более подробно рассмотрен метод моделирования отсоединенных вихрей, который является первым и наиболее продвинутым в этой относительно новой группе методов. По сравнению с первым изданием, данная глава также значительно расширена. В частности, в ней излагаются последние модификации метода моделирования отсоединенных вихрей, предложенные после выхода первого издания. Эти модификации разработаны авторами в рамках проекта “Развитие гибридных RANS-LES подходов к моделированию турбулентности и разработка эффективных вычислительных технологий решения задач внешней и внутренней аэродинамики и аэроакустики”, поддержанного Российским научным фондом (грант №14-11-00060). При этом, как и во второй главе, изложение сопровождается многочисленными примерами, иллюстрирующими возможности рассматриваемых методов.

Наконец, четвертая глава пособия представляет собой новый (отсутствующий в его первом издании) раздел, посвященный так называемым зонным гибридным подходам, и включает, в частности, описание методов создания искусственной

турбулентности на входе в LES подобласть, являющихся неотъемлемой частью зонных подходов.

Отметим также, что некоторые аспекты рассматриваемой проблемы, не отраженные в данном пособии, в частности, вопросы, связанные с проведением расчетов турбулентных течений на высокопроизводительных компьютерах с помощью коммерческих кодов Ansys Fluent и Ansys CFX, освещены в учебном пособии [2], опубликованном в СПбПУ в 2009 г.

Завершая данное краткое введение, авторы считают приятным долгом выразить искреннюю признательность своим учителям – профессорам кафедры гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института Льву Герасимовичу Лойцянскому, Юрию Викторовичу Лапину и Николаю Ивановичу Акатнову, заразившим их своим энтузиазмом и интересом к изучению турбулентности и тем самым в значительной степени определившим их дальнейшую научную деятельность. Следует также отметить, что многие результаты, вошедшие в данную книгу, получены авторами совместно с сотрудником компании Боинг доктором Филиппом Спалартом (Philippe Spalart), с которым они тесно сотрудничают уже более двадцати лет. Наконец, авторы выражают благодарность д.т.н., профессору СПбПУ А.Ю. Снегирёву и к.ф.-м.н., начальнику лаборатории РФЯЦ-ВНИИЭФ А.С. Козелкову, которые внимательно ознакомились с рукописью и сделали ряд полезных замечаний.

## **I. Общая характеристика существующих подходов к моделированию турбулентных течений**

Существующие подходы к моделированию турбулентности можно с определенной степенью условности разделить на три основные категории.

К первой категории относятся наиболее распространенные в настоящее время подходы, базирующиеся на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS), замкнутых с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности.

Ко второй категории относятся два классических вихреразрешающих подхода, а именно прямое численное моделирование турбулентности (Direct Numerical Simulation – DNS) и метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES). Метод DNS опирается на непосредственное численное интегрирование трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса с разрешением *всех* пространственно-временных масштабов турбулентности, то есть базируется на первых принципах аэродинамики и полностью свободен от эмпиризма. В рамках метода LES те же уравнения решаются после их предварительной пространственной фильтрации, что исключает из рассмотрения часть масштабов и, тем самым, позволяет значительно снизить требования к пространственно-временному разрешению, а следовательно, и к необходимым вычислительным ресурсам. При этом для учета влияния отфильтрованных (“подсеточных”) масштабов турбулентности привлекаются те или иные полуэмпирические модели. Для того, чтобы подчеркнуть кардинальное отличие этих моделей от моделей, используемых для замыкания RANS, их называют “подсеточными”.

Наконец, третья категория включает гибридные подходы, опирающиеся на совместное использование RANS и LES подходов в различных областях потока.

Остановимся кратко на общей характеристике трех перечисленных категорий.

### 1.1. Полуэмпирические модели для замыкания RANS

Начало полуэмпирической теории турбулентности положено классической статьей О. Рейнольдса [3], в которой были сформулированы получившие впоследствии его имя осредненные по времени уравнения Навье-Стокса.

В случае несжимаемой жидкости уравнения Рейнольдса получаются из уравнений Навье-Стокса с использованием следующей процедуры осреднения:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где  $f$  – осредняемая функция,  $t$  – время, а  $2T$  – период осреднения, который предполагается достаточно большим по сравнению с временными масштабами всех турбулентных неоднородностей, присутствующих в рассматриваемом течении, и достаточно малым по сравнению с характерным временным масштабом осредненного течения.

Как указывается в [3], процедура осреднения предполагает выполнение следующих естественных условий:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \bar{c} = c, \quad \overline{cf} = c\bar{f}, \quad \overline{\partial f / \partial s} = \partial \bar{f} / \partial s, \quad (1.2)$$

где  $f$  и  $g$  – произвольные функции, которые могут быть представлены как суммы средних и пульсационных переменных,  $f = \bar{f} + f'$  и  $g = \bar{g} + g'$ ,  $c$  – произвольная константа, а  $s$  – пространственная координата или время.

В случае сжимаемого газа предпочтительным является другой способ осреднения (осреднение по Фавру), при котором плотность  $\rho$  и давление  $p$  осредняются по Рейнольдсу, а для остальных переменных вводятся так называемые средневзвешенные значения

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \quad (1.3)$$

В результате, осредненные уравнения Навье-Стокса для сжимаемого совершенного газа (уравнения RANS) могут быть представлены в следующем виде (знаки осреднения по времени для простоты опущены и используется правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}), \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k H)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}) - (q_k + q_{t,k})], \\ \rho = pm/(RT). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Здесь  $x_i$  – декартовы координаты ( $i=1, 2, 3$ );  $u_i$  – компоненты вектора скорости осредненного течения;  $E = C_v T + u_k u_k / 2$  и  $H = E + p / \rho = C_p T + u_k u_k / 2$  – удельные полная энергия и полная энтальпия газа;  $T$  – температура;  $C_v$  и  $C_p = C_v + R/m$  – удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении;  $R=8314.34$  Дж/(кмоль·К) – универсальная газовая постоянная;  $m$  – молекулярная масса.

Компоненты тензора молекулярных вязких напряжений и вектора плотности теплового потока за счет молекулярной теплопроводности определяются соответственно с помощью реологического закона Ньютона и закона Фурье

$$\tau_{ij} = 2\mu(T)\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right), \quad q_k = -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

где  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  - тензор скоростей деформаций,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, а  $\mu(T)$  и  $\lambda(T)$  - коэффициенты молекулярной динамической вязкости и теплопроводности.

Компоненты тензора рейнольдсовых (турбулентных) напряжений  $\tau_{t,ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j}$  и вектора рейнольдсового (турбулентного) теплового потока  $q_{t,i} = -\rho C_p \overline{u'_i T'}$  появляются в уравнениях (1.4) при осреднении нелинейных конвективных членов исходных уравнений Навье-Стокса и переноса энергии, и их связь с параметрами осредненного движения неизвестна.

Преимуществом уравнений RANS перед исходными уравнениями Навье-Стокса является то, что они сформулированы непосредственно относительно осредненных по времени характеристик течения, представляющих основной интерес в задачах аэродинамики.<sup>1</sup> Тем самым исключается необходимость расчета локальных нестационарных (случайных) характеристик турбулентных потоков путем интегрирования трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса (DNS), что в конце девятнадцатого века представлялось абсолютно невозможным. Однако, как отмечено выше, уравнения RANS являются незамкнутыми, поскольку они содержат неизвестный тензор рейнольдсовых напряжений и вектор турбулентного теплового потока. Поэтому для их практического использования необходимы дополнительные соотношения, связывающие эти величины

---

<sup>1</sup> Для многих других приложений, например, для задач аэроакустики и аэроупругости, это далеко не так, поскольку в них, наряду со средними характеристиками, первостепенный интерес представляют амплитудные и спектральные характеристики пульсационного движения.

с характеристиками осредненного движения, которые могут быть получены только с использованием той или иной эмпирической информации. Эти соотношения принято называть моделями турбулентности для напряжений Рейнольдса или для вторых моментов.

Альтернативный подход к решению проблемы замыкания уравнений Рейнольдса состоит в использовании уравнений переноса рейнольдсовых напряжений, которые формально также могут быть получены из уравнений Навье-Стокса с помощью процедуры осреднения по времени аналогично тому, как это делается при выводе уравнений Рейнольдса. Однако эти уравнения содержат так называемые моменты третьего порядка, например,  $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ , связь которых с параметрами осредненного движения и компонентами тензора рейнольдсовых напряжений (моментами второго порядка) неизвестна, и для их определения необходимо использование уравнений переноса для моментов третьего порядка. Эти уравнения, в свою очередь, содержат корреляции четвертого порядка и т. д., так что получение строгой замкнутой системы уравнений относительно статистических характеристик турбулентности в принципе невозможно. В этой ситуации разумным компромиссом представляется ограничение моделирования уравнениями переноса вторых моментов (рейнольдсовых напряжений) – см. раздел 2.2.1. Однако при этом следует иметь в виду, что получение надежной эмпирической информации о корреляционных членах высоких порядков, необходимой для замыкания соответствующих моделей, является весьма проблематичным. Таким образом, как отмечается в [4], “обрыв” описанной выше бесконечной “цепочки” на уравнениях переноса вторых моментов неявно основан на не имеющем каких-либо теоретических подтверждений предположении о том, что с ростом порядка моделируемых корреляций их влияние

на основные статистические характеристики турбулентных потоков уменьшается (“принцип ослабления влияния” [5]).

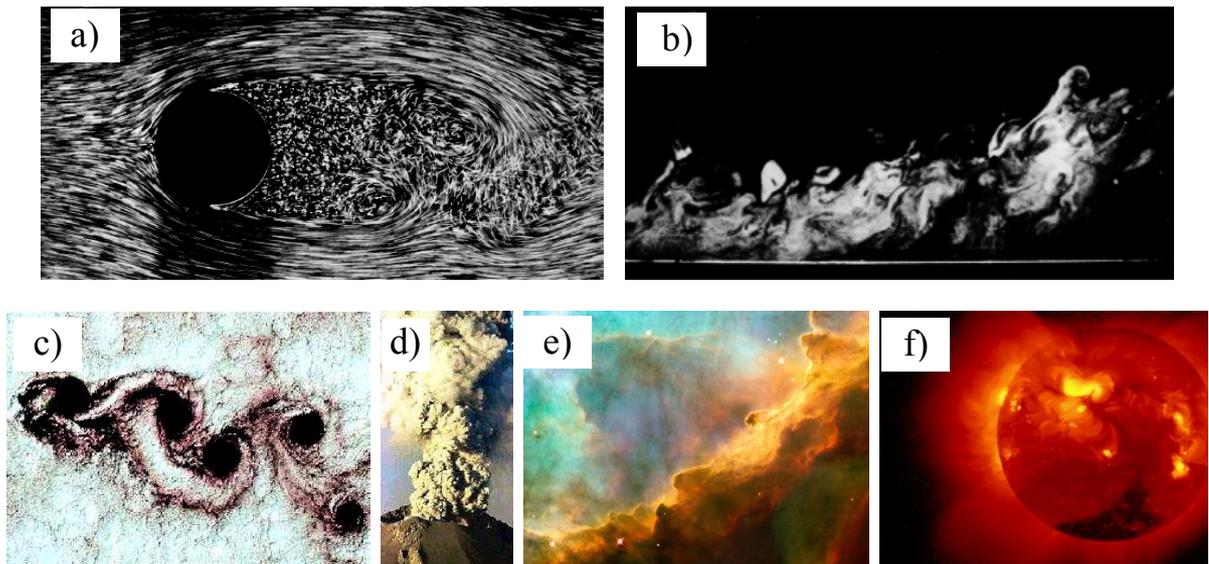
Значительные успехи в области построения различных полуэмпирических моделей турбулентности, достигнутые в 60-х – 70-х годах прошлого века, породили надежду на создание *универсальной* RANS модели, то есть, модели, пригодной для расчета любых или, по крайней мере, большинства турбулентных течений. Однако, многочисленные экспериментальные, а затем и расчетные исследования, выполненные на протяжении второй половины XX века, убедительно показали, что локальные осредненные характеристики турбулентных потоков подвержены существенному глобальному влиянию устойчивых, крупномасштабных (с размерами порядка макро-масштаба течения), принципиально трехмерных и нестационарных структур (“вихрей”)<sup>2</sup> (см. рис. 1.1). Характеристики этих структур зависят от конкретной геометрии рассматриваемого течения и граничных условий. Иными словами, “гипотеза локальности”, на которой в неявной форме базируются RANS модели турбулентности, не выполняется [4], что в принципе исключает возможность построения идеальной модели такого типа и делает упомянутые выше надежды на возможность построения универсальной RANS модели турбулентности, по существу, несбыточными. Это в равной степени относится как к простейшим моделям, базирующимся на гипотезе Буссинеска о линейной связи между тензорами рейнольдсовых напряжений и скоростей деформаций, так и к моделям переноса рейнольдсовых напряжений.

Наиболее ярким примером течений, для которых характерно формирование когерентных турбулентных структур с размерами

---

<sup>2</sup> Для того, чтобы подчеркнуть организованность этих структур, в литературе их часто называют “когерентными”.

порядка размеров обтекаемого тела, являются течения с обширными зонами отрыва (рис. 1.1 а, с), и именно по этой причине результаты расчетов таких течений с использованием RANS моделей оказываются, как правило, неудовлетворительными (см. главу 2).



**Рисунок 1.1.** Примеры когерентных вихревых структур: а – обтекание цилиндра; б – турбулентный пограничный слой при наличии положительного продольного градиента давления; с – “след” острова в океане; d – извержение вулкана, e – галактические облака; f – Солнце

Следует отметить, что определенные признаки кризиса полуэмпирической теории турбулентности появились уже в начале 70-х годов прошлого века, когда начался лавинообразный рост числа публикаций, посвященных усовершенствованию существовавших и разработке новых полуэмпирических моделей, что, само по себе, свидетельствует о неудовлетворенности многочисленными моделями, уже известными в то время. В результате было предложено огромное число RANS моделей, и весьма остро встал вопрос об обоснованном выборе той или иной из них при расчете конкретных течений. В связи с этим в США, а затем и в Западной Европе начались систематические

исследования, направленные на валидацию и определение границ применимости полуэмпирических моделей турбулентности. Эта работа проводилась и продолжает проводиться как отдельными исследовательскими группами, так и в рамках масштабных международных программ, координируемых NASA и Европейской комиссией по развитию научных исследований. В частности, NASA был создан специальный постоянно обновляемый интернет-портал [6], на котором приведены формулировки наиболее распространенных моделей турбулентности, “эталонные” результаты расчетов различных течений, полученные с их использованием, и экспериментальные данные, которые могут служить для валидации этих моделей. Аналогичный ресурс был создан и поддерживается Европейским Сообществом по Течениям, Турбулентности и Горению (ERCOfTAC) [7]. На решение той же проблемы (усовершенствование и валидация моделей турбулентности) направлено большое число крупных международных проектов, финансируемых ЕС (например, проекты ECARP [8], FLOMANIA [9] и ATAAC [10]). Наконец, важную роль в этой сфере играют специальные рабочие семинары, на которых результаты расчетов, полученные отдельными исследовательскими группами с применением различных моделей турбулентности, сравниваются со специально отобранными (достаточно надежными и информативными) экспериментальными данными и с результатами расчетов в рамках LES и DNS.

В результате всех этих целенаправленных усилий удалось накопить обширную и, что особенно важно, объективную (практически свободную от вычислительных неточностей) информацию о возможностях различных RANS моделей. Эта информация (см. главу 2) является исключительно важной, так как, несмотря на отмеченные серьезные недостатки этих моделей, именно они вплоть до настоящего времени являются и, по-

видимому, еще долго будут оставаться основным рабочим инструментом при проведении практических расчетов турбулентных течений, острую нужду в которых испытывают многие отрасли науки и техники.

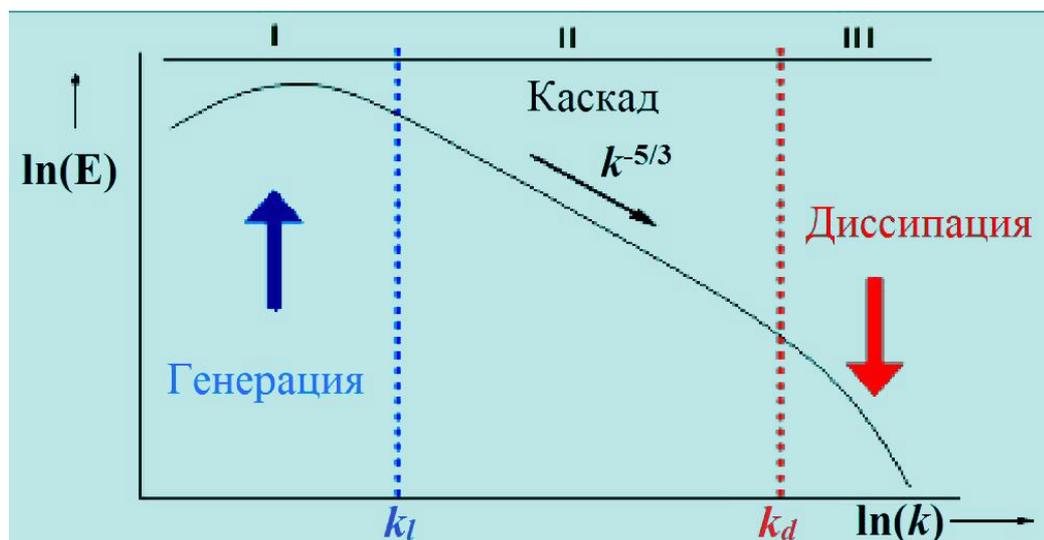
## **1.2. Классические вихререзающие подходы**

Как уже отмечалось, к таким подходам принято относить прямое численное моделирование турбулентности и метод моделирования крупных вихрей, с помощью которых могут быть рассчитаны не только статистические параметры турбулентных потоков, но и их нестационарная вихревая структура. Остановимся на этих подходах более подробно.

### **1.2.1. Прямое численное моделирование (DNS)**

В отличие от RANS моделей, при построении которых используются те или иные, иногда достаточно произвольные допущения и большой объем эмпирической информации, единственное (общепринятое в настоящее время) допущение, на котором базируется DNS, состоит в том, что уравнения Навье-Стокса адекватно описывают не только ламинарные, но и переходные и турбулентные течения. Соответственно, в рамках этого подхода расчет турбулентных течений производится путем непосредственного решения уравнений Навье-Стокса. При этом, независимо от характера осредненного течения (то есть, независимо от того, является ли оно двумерным или трехмерным, стационарным или нестационарным), должны использоваться *трехмерные нестационарные уравнения Навье-Стокса*, поскольку турбулентность является принципиально трехмерным и нестационарным явлением. Кроме того, DNS подразумевает необходимость достаточно точного разрешения всех пространственно-временных масштабов турбулентности.

Наглядное представление об этих масштабах дает рисунок 1.2, на котором изображен типичный энергетический спектр турбулентности (зависимость спектральной плотности кинетической энергии турбулентности  $E$  от волнового числа  $k$ ) при достаточно высоких числах Рейнольдса.



**Рисунок 1.2.** Различные области энергетического спектра турбулентности при высоких значениях числа Рейнольдса

Этот спектр имеет три области.

Область I соответствует крупномасштабным “энергонесущим” турбулентным вихрям с размерами порядка интегрального линейного масштаба рассматриваемого течения  $L$  (ему отвечает волновое число  $k_1 = 2\pi/L$ ), черпающим энергию из осредненного течения.

В области III спектра доминируют мелкие вихри с размерами меньше колмогоровского масштаба  $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$  ( $\nu = \mu/\rho$  - кинематическая вязкость,  $\varepsilon$  - скорость диссипации энергии турбулентности) и волновыми числами  $k > k_d = 2\pi / \eta$  ю Вязкая диссипация таких вихрей переводит кинетическую энергию турбулентности в тепло.

Наконец, область II (так называемый инерционный интервал спектра), лежащая между областями I и III, соответствует вихревым структурам с размерами в диапазоне  $\eta < l < L$ .

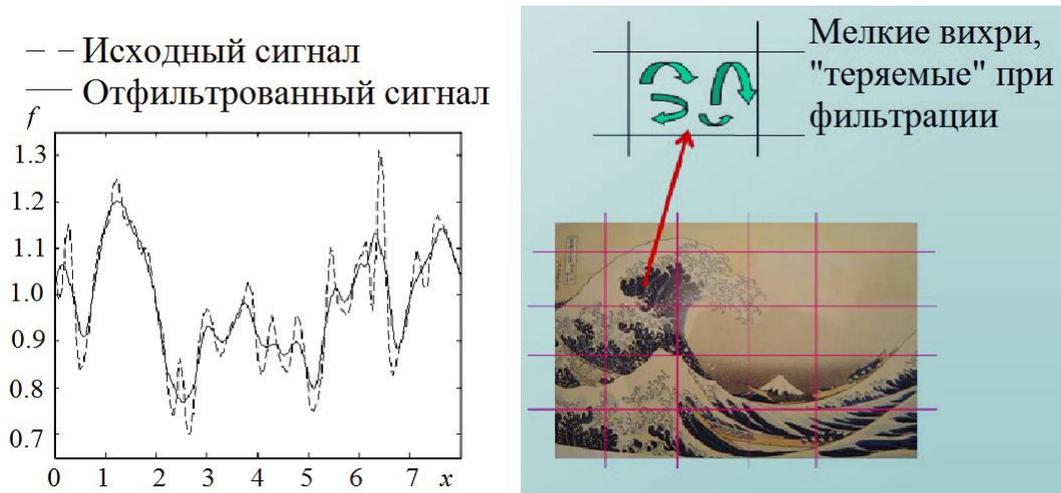
Влияние молекулярной вязкости в инерционном интервале спектра никак не проявляется, и энергия турбулентности не генерируется и не диссипирует, а лишь передается от более крупных вихрей к менее крупным вихрям (так называемый энергетический каскад турбулентности). В результате, энергетический спектр в области II оказывается универсальным и описывается законом Колмогорова  $E \sim k^{-5/3}$ .

Отношение максимального  $L$  и минимального  $\eta$  линейных масштабов турбулентности  $L/\eta$  пропорционально числу Рейнольдса в степени  $3/4$ ,  $L/\eta \sim Re^{3/4}$ , в результате чего размер пространственной сетки, необходимой для проведения расчетов с помощью DNS, растет с увеличением числа Рейнольдса как  $(L/\eta)^3$  или как  $Re^{9/4}$ . Наряду с этим, с ростом числа Рейнольдса увеличивается также и отношение интегрального временного масштаба  $\tau_I$  и минимального (соответствующего колмогоровским вихрям) временного масштаба  $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ , определяющее число шагов по времени, необходимое для проведения расчета:  $\tau_I/\tau_\eta \sim Re^{1/2}$ . В итоге, суммарные затраты на проведение DNS растут с ростом числа Рейнольдса как  $Re^{11/4}$  и оказываются огромными при представляющих практический интерес значениях этого параметра (порядка  $10^6$  и выше). Поэтому, несмотря на бурный (практически экспоненциальный) рост производительности компьютеров, имевший место в последние несколько десятилетий, использование DNS пока ограничено в основном фундаментальными исследованиями течений с относительно простой геометрией и низкими числами Рейнольдса, целью которых является получение детальной информации о структуре и основных закономерностях турбулентности. Это, однако,

нисколько не умаляет важности данного подхода, поскольку полученные с помощью DNS результаты, наряду с экспериментальными данными, составляют основу для разработки, калибровки и тестирования полуэмпирических моделей турбулентности. Более того, следует иметь в виду, что в будущем DNS станет, по-видимому, доминирующим подходом не только в аэродинамике, но и в смежных областях техники, например, в химической технологии, атомной энергетике и т. д.

### **1.2.2. Метод моделирования крупных вихрей (LES)**

Данный подход к моделированию турбулентности, сформировавшийся в начале 70-х годов прошлого века (см., например, обзорную работу [11]), базируется на промежуточном между RANS и DNS уровне описания турбулентных течений. Идея LES состоит в замене “глобального” осреднения характеристик реального турбулентного течения по времени, на котором основан вывод уравнений Рейнольдса (1.4), “фильтрацией” этих характеристик от коротковолновых неоднородностей или, иными словами, их пространственным осреднением по областям с размерами порядка размера фильтра. Данную процедуру иллюстрирует рисунок 1.3. В его левой части показан результат фильтрации одномерного сигнала с помощью фильтра единичной ширины, а в правой - некоторое реальное течение, сетка, используемая для его локального пространственного осреднения, и теряемая при этом информация о вихрях с размерами меньше размеров ячеек данной сетки.

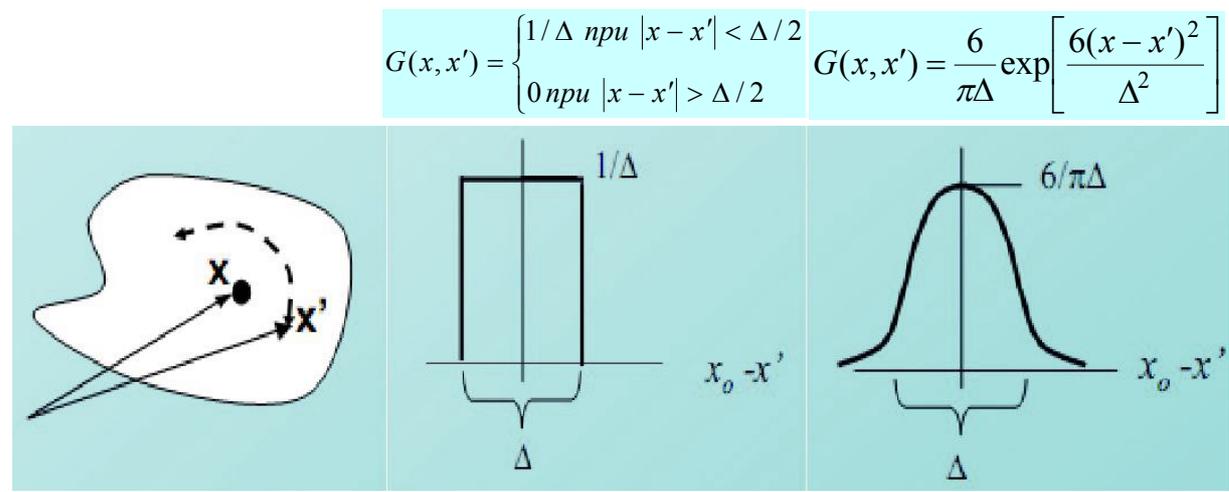


**Рисунок 1.3.** Сравнение исходного и отфильтрованного сигналов

Для вывода уравнений LES актуальные переменные  $f$  в уравнениях Навье-Стокса заменяются суммой соответствующих “отфильтрованных” и “подсеточных” переменных  $f = \tilde{f} + f'$ , а затем к полученным в результате уравнениям применяется операция фильтрации. При этом величина  $\tilde{f}$  определяется выражением

$$\tilde{f}(x, t) = \int_V G(x - x', \Delta) f(x', t) dx'^3, \quad (1.6)$$

где  $G(x - x', \Delta)$ - функция фильтра,  $x$  – координата рассматриваемой точки потока, а  $\Delta$  – ширина фильтра (два примера часто используемых фильтров представлены на рисунке 1.4).



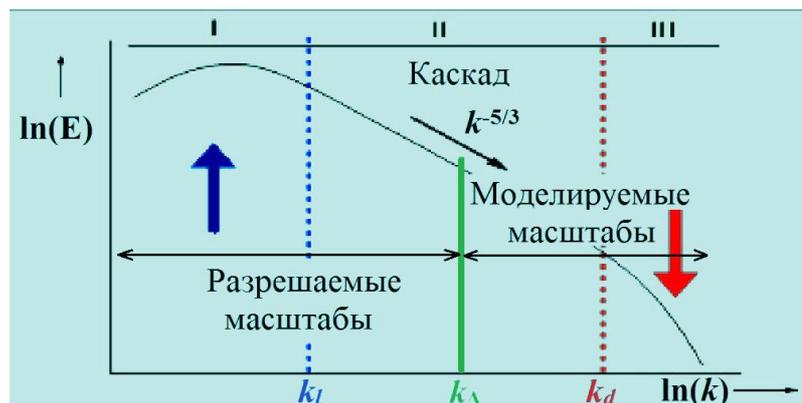
**Рисунок 1.4.** Примеры фильтров, используемых в LES

Опуская детали вывода, которые можно найти во многих монографиях и учебниках (см., например, [12], [13]), приведем лишь окончательную форму основных уравнений LES для сжимаемого газа (знаки фильтрации основных переменных для удобства записи опущены):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} + \tau_{SGS,ik}), \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k H)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i (\tau_{ik} + \tau_{SGS,ik}) - (q_k + q_{SGS,k})], \\ \rho = pm/(RT). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

С формальной точки зрения единственное различие между системой уравнений (1.7) и уравнениями Рейнольдса (1.4) состоит в различии дополнительных слагаемых, появляющихся в правых частях уравнений движения и энергии в результате пространственной фильтрации нелинейных конвективных членов уравнений Навье-Стокса (LES) и их временного осреднения (RANS): в уравнениях LES (1.7) эти члены имеют индекс “SGS” (Sub-Grid Scale), а в уравнениях RANS (1.4) – индекс “*t*” (turbulent). Однако за этим формальным различием скрывается принципиально разное физическое содержание LES и RANS подходов к описанию турбулентных течений. В частности, дополнительные члены RANS уравнений (напряжения Рейнольдса и турбулентный тепловой поток) описывают влияние, которое оказывают на осредненное по времени решение турбулентные структуры (вихри) *всех* масштабов. В противоположность этому, аналогичные (“подсеточные”) члены уравнений LES (1.7) описывают влияние, которое оказывают на отфильтрованные по пространству характеристики потока *только относительно мелкие* вихри с размерами меньшими размера фильтра  $\Delta$ . Иными словами,

в рамках LES вихревые структуры с размерами, превышающими размеры фильтра, разрешаются “точно”<sup>3</sup>, а моделируются лишь вихревые структуры меньших размеров. Как уже отмечалось, для того чтобы подчеркнуть это, модели турбулентности для LES, то есть соотношения, определяющие связь подсеточных напряжений и теплового потока с параметрами отфильтрованного течения, называют “подсеточными” моделями.



**Рисунок 1.5.** Масштабы турбулентных структур, разрешаемые и моделируемые в рамках LES

Из приведенного качественного описания становится ясным, что если размеру фильтра соответствует волновое число  $k_\Delta$ , лежащее в универсальной (“инерционной”) области энергетического спектра турбулентности, то есть, если  $k_l < k_\Delta < k_d$  (см. рисунок 1.5), то моделированию подлежат *только* относительно универсальные (не зависящие от конкретной геометрии и граничных условий) вихри. В результате, роль подсеточной модели в LES состоит, главным образом, в обеспечении правильной скорости каскадной передачи энергии турбулентности от крупных к мелким вихрям в пределах

<sup>3</sup> Под этим подразумевается только отсутствие ошибок, связанных с физическим моделированием (некоторая погрешность численного решения, разумеется, всегда имеет место).

инерционного интервала волновых чисел или, иными словами, к обеспечению правильной скорости диссипации наименьших из “разрешенных” вихрей.

Именно в этом состоит принципиальное преимущество LES перед RANS подходом, в рамках которого необходимо моделирование *всех*, в том числе крупных энергосодержащих вихрей, не подчиняющихся каким-либо универсальным законам. С практической точки зрения это преимущество означает, что построение адекватных подсеточных моделей для LES является несравнимо более легкой задачей, чем построение моделей турбулентности для замыкания уравнений RANS. В частности, опыт применения LES свидетельствует о том, что при выполнении условия  $k_l < k_\Delta < k_d$ , этот подход обеспечивает высокую точность расчета не только осредненных, но и пульсационных характеристик турбулентности даже при использовании простейших подсеточных моделей, например, классической алгебраической модели Смагоринского [14]. В основе этой модели лежит понятие подсеточной вязкости  $\nu_{SGS}$  и предположение (во многом сходное с соображениями Колмогорова) о том, что эта величина определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$ , приходящейся на единицу объема. В этом случае из соображений размерности следует, что

$$\nu_{SGS} \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}, \quad (1.8)$$

где  $\Delta$  – характерный размер фильтра.

При наличии в спектре турбулентности инерционного интервала (см. рис. 1.5) те же соображения размерности позволяют выразить  $\varepsilon$  через среднюю скорость деформации  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  и размер фильтра,  $\varepsilon \sim S^3 \Delta^2$ , что непосредственно приводит к формуле Смагоринского для подсеточной вязкости

$$\nu_{SGS} = (C_S \Delta)^2 S, \quad (1.9)$$

где  $C_S$  - эмпирическая константа Смагоринского.

При этом подсеточный тензор напряжений определяется с использованием гипотезы Буссинеска

$$\tau_{SGS,ij} = 2\rho\nu_{SGS} \left( S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k_{SGS} \delta_{ij}, \quad (1.10)$$

где  $k_{SGS} = (u'^2 + v'^2 + w'^2) / 2$  – подсеточная кинетическая энергия.

Отметим, что согласно модели Смагоринского, подсеточная вязкость зависит не только от параметров отфильтрованного течения (компонент тензора скоростей деформаций), но и от размера фильтра.

Следует отметить, что в большинстве практических приложений LES явная процедура фильтрации не применяется, а роль фильтра играет расчетная сетка, используемая для численного интегрирования уравнений (1.7). При этом в качестве  $\Delta$  используются различные комбинации локальных шагов сетки в трех пространственных направлениях. При использовании сеток, близких к изотропным (именно такие сетки являются оптимальными для LES), конкретный способ определения  $\Delta$  не играет роли, так как при этом все способы оказываются, по существу, эквивалентными. Однако на практике, в силу сложности геометрии рассматриваемых течений, часто приходится использовать существенно анизотропные сетки (в первую очередь, это относится к структурированным сеткам), и выбор того или иного определения  $\Delta$  становится весьма важным. Наиболее широкое распространение при этом получило определение  $\Delta$  как корня кубического из объема ячейки сетки [15]. Однако у этого определения нет какого-либо теоретического обоснования и его использование в случае сильно анизотропных сеток может приводить к значительному искажению результатов LES. Вопрос

об определении  $\Delta$  в таких ситуациях будет подробно рассмотрен в разделе 3.6.3.

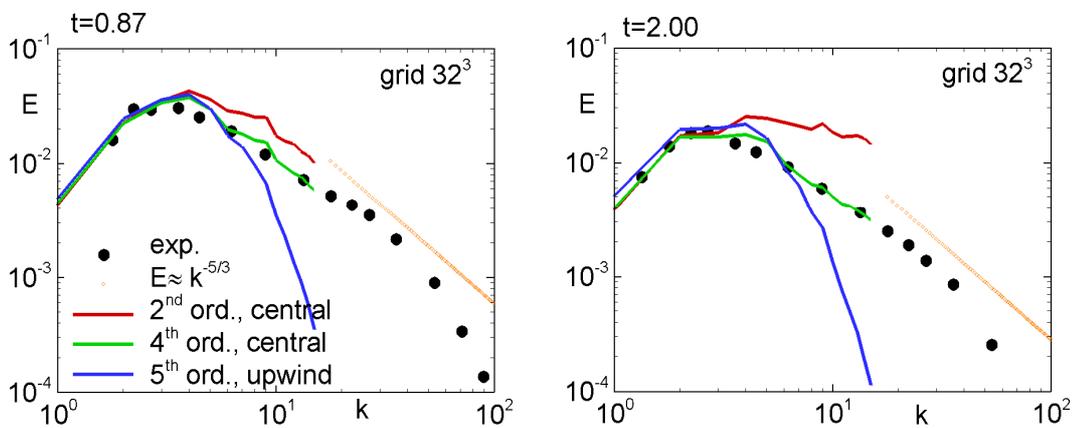
Следует однако подчеркнуть, что при измельчении расчетной сетки дополнительные по сравнению с уравнениями Навье-Стокса (моделируемые) слагаемые в уравнениях LES (1.7) уменьшаются, и решение LES асимптотически стремится к решению DNS, независимо от используемого определения подсеточного масштаба. В этом состоит еще одно принципиальное отличие метода LES от метода RANS, в котором измельчение сетки приводит лишь к получению “точных” (независящих от сетки) решений уравнений Рейнольдса и никак не сказывается на адекватности физического моделирования.

Важной особенностью подсеточных моделей для LES является то обстоятельство, что входящие в них эмпирические константы (например, константа Смагоринского) могут зависеть от используемого для решения задачи численного метода. Действительно, точность разрешения крупномасштабных вихревых структур при численном решении уравнений LES определяется не только вычислительной сеткой, но и свойствами используемого численного метода, в частности, присущей ему численной диссипацией, которая сама по себе играет роль своеобразной подсеточной модели. Таким образом, если эта диссипация велика, то константа подсеточной модели Смагоринского должна быть соответственным образом уменьшена, а если мала, то, наоборот, – увеличена.

В связи с этим, строго говоря, для каждого численного метода должна проводиться индивидуальная калибровка константы модели Смагоринского или аналогичных ей констант других подсеточных моделей. Такая калибровка осуществляется обычно путем решения задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности с использованием различных значений константы и подбора такого

ее значения, при котором расчетный спектр разрешенной кинетической энергии турбулентности наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными или с результатами DNS и подчиняется закону “ $-5/3$ ” в инерционном диапазоне волновых чисел.

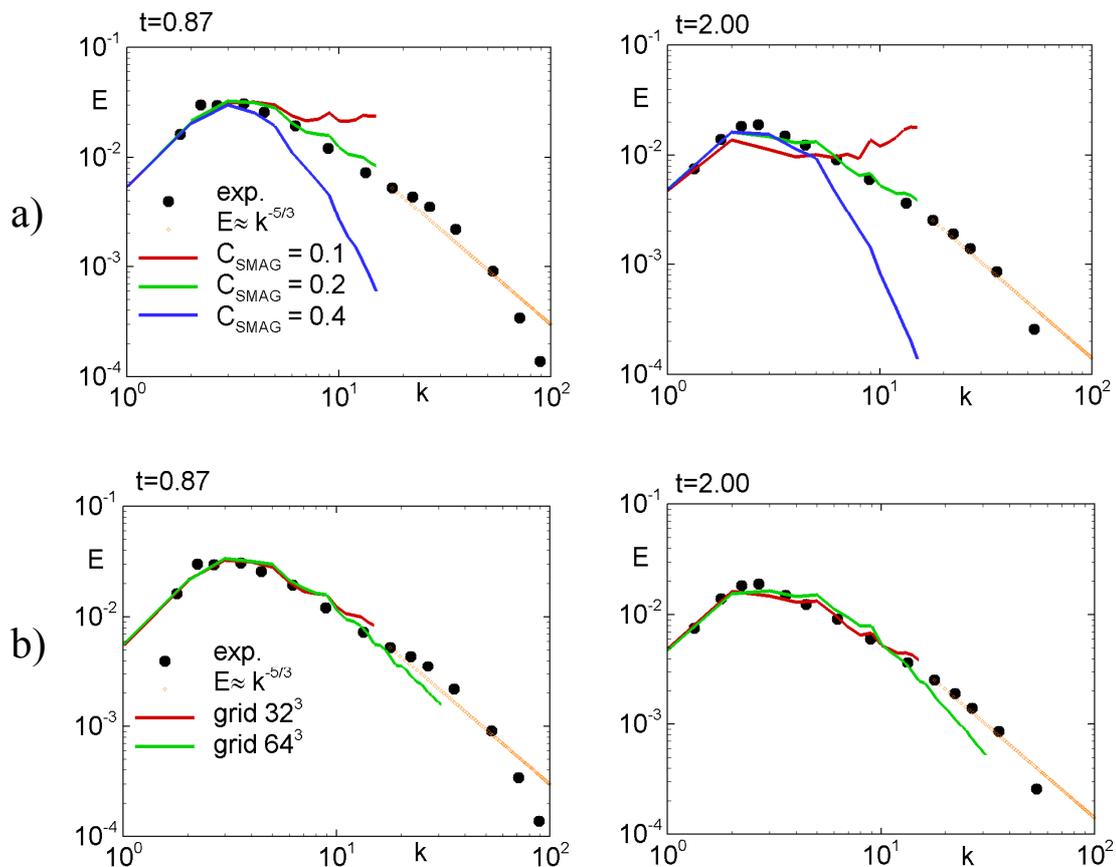
В качестве примера, на рисунке 1.6 показаны энергетические спектры, полученные при решении данной задачи с использованием схем с различным порядком аппроксимации невязки составляющих газодинамических потоков и фиксированном значении константы  $C_S = 0.2$ .



**Рисунок 1.6.** Спектры разрешенной энергии турбулентности в два момента времени из решения задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности, полученные на основе LES с моделью Смагоринского с использованием различных численных методов при  $C_S = 0.2$

Из рисунка видно, что численный метод оказывает сильное влияние на результаты LES, причем при данном значении константы  $C_S$  правильное поведение спектров обеспечивается при использовании только одной из трех рассматриваемых схем аппроксимации невязки потоков, а именно симметричной схемы четвертого порядка точности. В случае использования противопоточной схемы коротковолновые моды спектра практически не разрешаются из-за слишком высокой численной диссипации даже при повышенном (пятом) порядке точности

схемы. При расчете свободных турбулентных течений с использованием монотонных численных алгоритмов данное обстоятельство позволяет вообще отказаться от явного моделирования подсеточной турбулентности, так как в этом случае функции подсеточной модели с успехом выполняет присущая таким методам численная диссипация (см., например, [16], [17]). Это направление в LES получило название Monotonically Integrated LES (MILES) или Implicit LES (ILES).



**Рисунок 1.7.** Спектры разрешенной энергии турбулентности в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности, полученные из LES с моделью Смагоринского: а) – влияние выбора константы на результаты расчета на сетке  $32^3$ ; б) – влияние сетки на результаты расчетов при  $C_S = 0.2$

В противоположность этому, при использовании симметричной схемы второго порядка точности (для невязких течений эта схема является неустойчивой) с тем же значением константы  $C_S = 0.2$  даже суммарная диссипация модели и метода оказывается недостаточной

для правильного описания каскада турбулентности (энергия турбулентности “генерируется” и накапливается в коротковолновых модах спектра).

На рисунке 1.7 представлены энергетические спектры, полученные при различных значениях  $C_S$  с помощью кода NTS [18], в котором для LES используется симметричная аппроксимация невязких потоков с четвертым, а вязких – со вторым порядком точности. Из рисунка следует, что оптимальным значением константы Смагоринского для этого кода является  $C_S \approx 0.2$ .

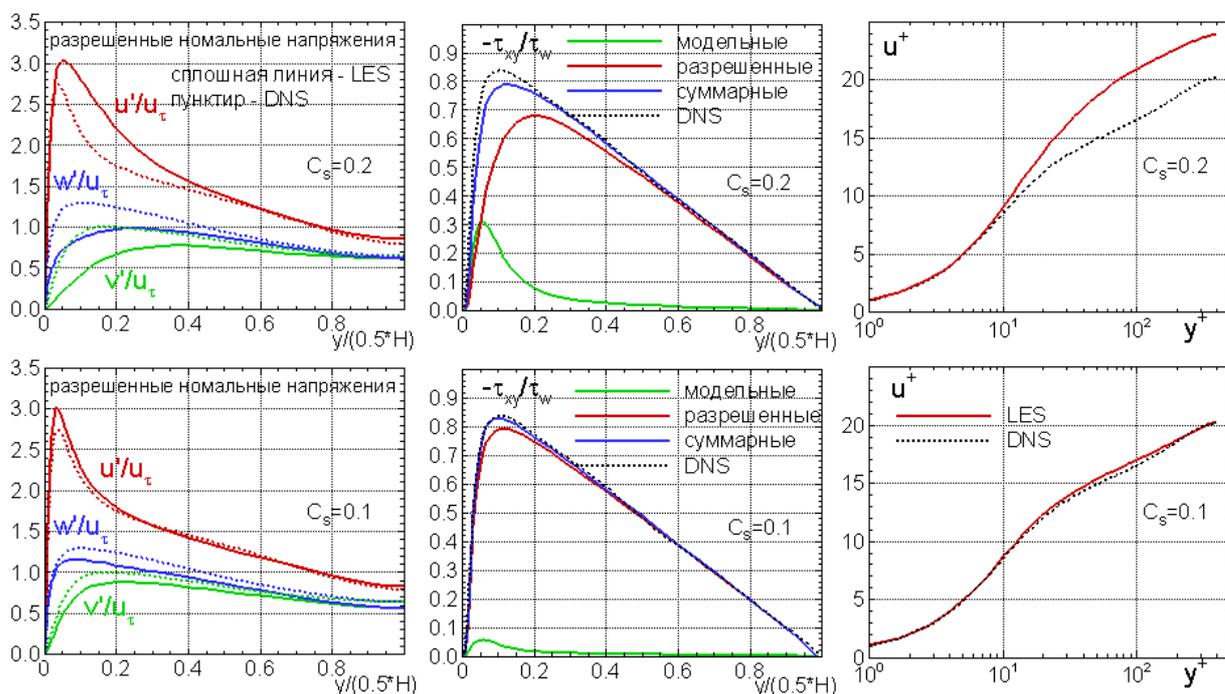
Отметим в заключение, что модель Смагоринского (1.9) не обеспечивает равенства нулю подсеточной вязкости на твердой поверхности и поэтому не может непосредственно применяться для расчета пристеночных течений. Для устранения этого недостатка в нее вводится демпфирующий множитель [19], являющийся аналогом множителя Ван Дрифта в модели Прандтля для RANS:

$$v_{SGS} = (C_S \Delta)^2 \{1.0 - \exp[-(d_w^+ / 25)^3]\} S, \quad (1.11)$$

где  $d_w^+ = d_w u_\tau / \nu$  - безразмерное расстояние до стенки,  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  - динамическая скорость, а  $\tau_w$  - касательное напряжение на стенке.

Кроме того, опыт показывает, что при расчете пристеночных течений необходимо использовать примерно в два раза меньшее значение константы Смагоринского, чем при расчете свободных турбулентных течений. Этот факт иллюстрирует рисунок 1.8, на котором сравниваются результаты расчета установившегося течения в плоском канале, полученные с помощью модифицированной модели Смагоринского (1.11) с использованием кода NTS при  $C_S = 0.2$  и  $0.1$ . Из него видно, что в первом случае, то есть при использовании значения  $C_S = 0.2$ , которое получено при калибровке этой константы на задаче о затухании свободной изотропной турбулентности, результаты расчета существенно

отличаются от соответствующих результатов DNS [20], а при  $C_S=0.1$  – практически совпадают с этими результатами.



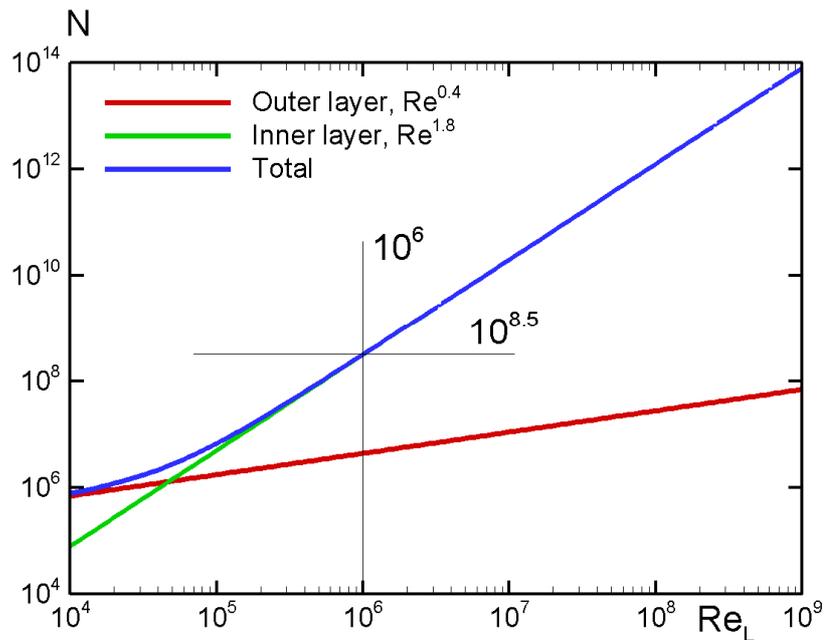
**Рисунок 1.8.** Сравнение результатов LES установившегося течения в плоском канале при числе Рейнольдса  $Re_\tau = u_\tau H/\nu = 400$ , полученных с использованием модели Смагоринского при различных значениях  $C_S$ , с результатами DNS [20]

Указанные трудности, связанные с применением модели Смагоринского и других подобных моделей для расчета пристеночных турбулентных течений, могут быть обойдены при использовании так называемых динамических подсеточных моделей. Их идея была предложена в ставшей уже классической работе Germano с соавторами [21], а детальный анализ современных версий динамических подсеточных моделей содержится в ряде обзорных работ и монографий (см., например, [22 - 24]).

Естественной платой за описанные преимущества LES является то, что этот подход требует несопоставимо больших вычислительных ресурсов, чем RANS. Это связано с необходимостью, как и в случае DNS, проведения трехмерных

нестационарных расчетов на достаточно мелких сетках даже в тех случаях, когда целью расчета является только определение параметров осредненного течения. С другой стороны, по понятным причинам (мелкомасштабная часть спектра *моделируется*, а не рассчитывается “точно”, как в DNS) ресурсы, необходимые для реализации LES, оказываются существенно меньшими, чем для DNS. В частности, для расчета турбулентности вдали от твердых стенок число ячеек сетки, необходимое для проведения LES, увеличивается с ростом числа Рейнольдса намного медленнее, чем в случае DNS: пропорционально  $Re^{0.4}$ , а не  $Re^{2.25}$  [25]. Однако вблизи стенок, где даже наиболее крупные (энергонесущие) вихри имеют очень маленькие размеры, требования к сеткам для LES существенно ужесточаются и приближаются к аналогичным требованиям для DNS: число ячеек, необходимых для LES таких течений пропорционально  $Re^{1.8}$  [25]. Это делает LES сложных пристеночных течений при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса лишь немного менее ресурсоемким, чем DNS, причем основные вычислительные затраты связаны при этом с разрешением турбулентности в тонкой пристеночной области. В качестве иллюстрации на рисунке 1.9 показаны зависимости от числа Рейнольдса числа ячеек сетки, которые должны находиться во внутренней и внешней областях турбулентного пограничного слоя на пластине при его расчете в рамках LES [26]. Из рисунка видно, в частности, что при  $Re = 10^6$  полное число ячеек составляет  $\sim 10^{8.5}$ , причем 99% из них находятся во внутренней части пограничного слоя.

Указанное обстоятельство стимулировало поиск альтернативных подходов, позволяющих без заметного снижения точности решить эту проблему. В конце прошлого века это привело к появлению так называемых гибридных RANS-LES подходов, рассматриваемых в следующем разделе.



**Рисунок 1.9.** Зависимость от числа Рейнольдса числа ячеек сетки во внутренней и внешней областях пограничного слоя на плоской пластине и общего числа ячеек, необходимых для LES данного течения

### 1.3. Гибридные RANS-LES подходы

Несмотря на относительно короткую историю RANS-LES моделей (с момента создания первой такой модели, получившей название метода моделирования отсоединенных вихрей – Detached Eddy Simulation или DES [27], прошло менее двадцати лет), в настоящее время существует, по крайней мере, несколько десятков таких моделей, а их дальнейшему усовершенствованию и развитию посвящено огромное число работ. Это свидетельствует о плодотворности идеи, лежащей в основе гибридных моделей, с одной стороны, и об отсутствии полной удовлетворенности уже существующими моделями такого типа, с другой.

Общая концепция, лежащая в основе гибридных моделей, отражается в их названии. Она состоит в попытке построения комбинированных моделей, которые функционировали бы как RANS в одних и как LES в других областях потока. Такая возможность открывается благодаря формальному сходству

уравнений Рейнольдса (1.4) и уравнений LES (1.7). Однако пути реализации этой возможности могут быть совершенно различными, что и объясняет многообразие форм гибридных моделей. Не останавливаясь на детальном анализе всех этих форм (он содержится, например, в монографии [28], в обзорах [29 – 31], а также в трудах проводимого начиная с 2005 г. специального международного симпозиума по гибридным RANS-LES методам [32 – 35]), рассмотрим кратко лишь основные особенности различных RANS-LES гибридов.

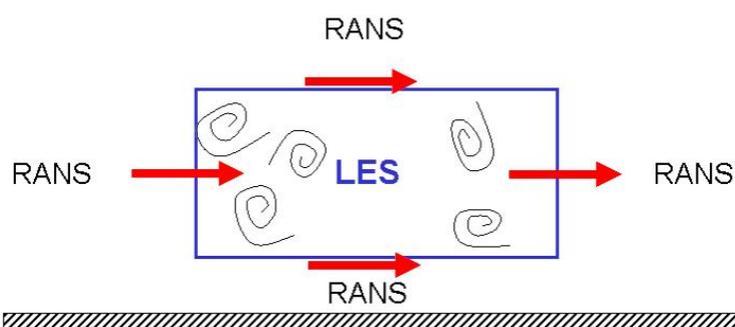
Прежде всего, к ним относится упомянутый выше исторически первый гибридный метод DES, который был предложен в качестве альтернативы RANS и LES методам при расчете течений с обширными отрывными зонами. Как уже отмечалось в разделе 1.1, RANS модели не способны обеспечить приемлемую для практики точность расчета таких течений, а LES требует чрезмерно больших вычислительных затрат, львиная доля которых связана с расчетом пристеночной части присоединенных пограничных слоев, населенных энергонесущими вихрями малых размеров. Это привело авторов [27] к мысли о создании такой модели, которая функционировала бы как RANS в области присоединенного пристеночного пограничного слоя, то есть в области, где RANS обеспечивает вполне приемлемую точность, и как LES в отрывных областях потока, где его использование не требует чрезмерно мелких сеток. Название метода (“моделирование отсоединенных вихрей”) подчеркивает принципиальное отличие DES от LES. Оно заключается в том, что в рамках DES “точно” разрешаются лишь “отсоединенные” вихри, которые населяют отрывные зоны, в то время как относительно мелкие энергонесущие вихри, населяющие присоединенный пограничный слой, описываются обычными полуэмпирическими RANS моделями. Еще одна важная особенность DES состоит в том, что в рамках этого подхода

в RANS и LES областях используется одна и та же “базовая” модель турбулентности, которая функционирует как RANS модель внутри пристеночного пограничного слоя и как ее подсеточный аналог вдали от твердых стенок. При этом граница между областями RANS и LES определяется в процессе расчета автоматически и зависит от шагов используемой вычислительной сетки, от расстояния от рассматриваемой точки потока до обтекаемой поверхности и, вообще говоря, от локальных параметров потока. В связи с этим DES и другие аналогичные (“DES-подобные”) методы (например, Extra-Large Eddy Simulation или X-LES [36] и Limited Numerical Scales или LNS [37]) часто не совсем точно называют “незонными” (“non-zonal”) гибридными методами, чтобы отличить их от зонных гибридов, в которых RANS и LES области предписываются по тем или иным соображениям априори (до начала расчета). К числу таких методов относится, например, зонный DES (Zonal DES или ZDES), развиваемый в работах Дека (S. Deck) с соавторами (последняя версия данного метода и соответствующие ссылки представлены в работе [38]), а также ряд других зонных подходов. Их достоинство по сравнению с DES состоит в большей гибкости, а недостаток – в необходимости априорных представлений о структуре течения, например, о положении точки (линии) отрыва потока.

Отдельную группу гибридных RANS-LES методов представляют так называемые модели LES с пристеночным моделированием (Wall Modeled LES - WMLES), которые могут использоваться для расчета не только отрывных, но и сложных присоединенных турбулентных течений. Идея этих методов состоит в использовании RANS не во всем пристеночном пограничном слое, как это делается в DES, а только в его внутренней области, то есть именно в той области, на расчет которой приходится основные вычислительные затраты LES.

Исторически первой WMLES моделью можно считать LES с пристеночными функциями [39], [40], однако в дальнейшем был предложен ряд более общих подходов, базирующихся на использовании во внутренней области пограничного слоя RANS моделей. Не останавливаясь на подробном описании существующих в настоящее время WMLES подходов (обзор и детальный анализ этих подходов можно найти в работах [31], [41], [42]), отметим только, что их спектр достаточно широк. В частности, он включает как зонные методы, в которых граница между областями RANS и LES задается “пользователем”, так и незонные методы (один из них, предложенный в работе [43], подробно представлен в Главе 3 данного пособия).

В последние годы получил развитие еще один подход к RANS-LES моделированию турбулентности, представляющий собой наиболее общую форму зонных методов и получивший название встроенного LES (Embedded LES), в рамках которого область LES может произвольным образом располагаться внутри области RANS (см. схему на рисунке 1.10).



**Рисунок 1.10.** Схема RANS и LES областей во встроенном LES

Это открывает возможность использования вычислительно трудоемкого метода LES только в тех областях потока, которые не поддаются описанию в рамках RANS, или в областях, для которых требуется получение информации не только

об осредненных, но и о пульсационных характеристиках потока (как уже отмечалось, такая ситуация имеет место, например, при решении многих задач аэроакустики и аэроупругости). Однако для практической реализации встроенного LES необходимо решение ряда сложных физических проблем, связанных со “сшивкой” RANS и LES решений.

В частности, при переходе от LES к RANS решению (верхняя и правая границы на рисунке 1.11) часто требуется обеспечивать плавное подавление турбулентных пульсаций [29]. В противоположность этому, для достижения быстрого перехода от полностью моделируемой турбулентности в RANS области к “разрешенной” турбулентности в LES области на соответствующих границах последней (левая и нижняя граница на рисунке 1.10) необходимо вводить искусственные возмущения. Этой проблеме посвящено большое число работ (их краткий обзор и анализ представлен в главе 4), однако, несмотря на достигнутые в результате успехи, ее вполне удовлетворительного решения до сих пор не найдено. Кроме того, программная реализация предложенных методов является достаточно сложной и существенным образом опирается на специфику используемых вычислительных сеток и структуры хранения данных в соответствующих вычислительных кодах. Это затрудняет, а иногда и исключает возможность переноса этих методов из одного кода в другой.

Отметим, что многие из описанных выше проблем теоретически отсутствуют в так называемых “бесшовных” (seamless) RANS - LES гибридах, в которых оба подхода тем или иным образом “взвешиваются” и одновременно функционируют во всей расчетной области (наиболее известным из них является метод, базирующийся на частично осредненных уравнениях Навье-Стокса – Partially Averaged Navier-Stokes или PANS [44]). Однако проблема

построения весовых функций, автоматически обеспечивающих адекватные (соответствующие локальным размерам сетки) веса RANS и LES моделей в рассматриваемой точке потока остается, по существу, нерешенной, что существенно ограничивает практическое использование бесшовных RANS-LES подходов.

Завершая краткий обзор гибридных методов, следует подчеркнуть их достаточно высокий потенциал. Поэтому с развитием вычислительной техники они, по-видимому, будут постепенно вытеснять методы расчета турбулентных течений, базирующиеся на RANS моделировании (см. Главу 2). В связи с этим в Главе 3 данного пособия более подробно представлен наиболее продвинутый из существующих в настоящее время гибридный метод DES [27] и его более поздние модификации.

#### **1.4. Оценка вычислительных ресурсов, необходимых для применения различных подходов**

Как уже отмечалось выше, существующие подходы к моделированию турбулентных течений значительно различаются между собой не только по своим возможностям, но и по вычислительным ресурсам, необходимым для их практического применения. Наиболее полная и достоверная количественная оценка этих ресурсов выполнена в работах [27, 45], основные выводы которых представлены в Таблице 1.1.

Во втором и третьем столбцах этой таблицы приведены типичные размеры сеток и число шагов интегрирования по времени (итераций при решении стационарных уравнений Рейнольдса), необходимых для расчета обтекания типичного гражданского самолета или автомобиля с использованием методов, базирующихся на RANS, DES, LES и DNS. Эти данные основаны на анализе пространственных и временных масштабов

турбулентности, разрешаемых в рамках перечисленных методов (см. предыдущие разделы данной главы).

**Таблица 1.1**

Вычислительные ресурсы и перспективы практического применения различных подходов к моделированию турбулентных течений [27, 45]

| Подход                       | Необходимое число узлов сетки | Необходимое число шагов по времени | Готовность |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|------------|
| Стационарный трехмерный RANS | $10^7$                        | $10^3$                             | 1985       |
| DES                          | $10^8$                        | $10^4$                             | 2000       |
| LES                          | $10^{11.5}$                   | $10^{6.7}$                         | 2045       |
| DNS                          | $10^{16}$                     | $10^{7.7}$                         | 2080       |

В последнем столбце таблицы приводится время “готовности” соответствующих методов к практическому использованию, причем под готовностью подразумевается возможность расчета одного варианта в течение суток на самых мощных из доступных компьютеров. Отметим, что для RANS эти оценки опирались на уже имевшийся реальный опыт их использования. В противоположность этому, прогнозы для методов DES, LES и DNS базировались на предположении о росте производительности компьютеров в два раза каждые пять лет (в настоящее время это предположение представляется слишком оптимистичным).

Отметим, что в полном соответствии с прогнозом, приведенным в Таблице 1.1., первый расчет обтекания самолета с помощью метода DES был выполнен в 2000 г. [46] (см. раздел 3.4., рис. 3.12), что подтверждает достоверность приведенных в ней оценок. Таким образом, по крайней мере в течение ближайших тридцати лет, основным рабочим инструментом для решения прикладных задач аэродинамики, связанных с расчетом пристеночных течений, будут

оставаться методы, базирующиеся на использовании RANS в сочетании с различными полуэмпирическими моделями турбулентности, и гибридные RANS-LES методы, которые также в значительной степени опираются на RANS модели, рассматриваемые в следующей главе.

## 2. RANS модели турбулентности

Как отмечалось в разделе 1.1, в настоящее время существует огромное число таких моделей. Однако их детальный анализ выходит за рамки настоящего пособия, в котором рассмотрение ограничивается лишь моделями, нашедшими наиболее широкое практическое применение.

В частности, в данной главе подробно представлены несколько таких моделей, относящихся к двум категориям. Первая из них (раздел 2.1) включает модели, использующие понятие *скалярной* турбулентной вязкости и гипотезу Буссинеска о линейной связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций осредненного движения. Ко второй категории (раздел 2.2) относятся модели, не использующие этих предположений.

### 2.1. Линейные модели турбулентной вязкости

Модели этой группы являются исторически первыми (именно к ней принадлежит классическая алгебраическая модель пути смешения Прандтля [47]) и вплоть до настоящего времени наиболее широко используемыми на практике. Название “линейные”<sup>4</sup> связано с тем, что для определения тензора рейнольдсовых напряжений  $\tau_{t,ij}$  в уравнениях (1.4) модели данного типа используют гипотезу Буссинеска, постулирующую *линейную* связь между этим тензором и тензором скоростей деформаций  $S_{ij}$ . В общем случае течения сжимаемого газа эта связь определяется следующим соотношением:

---

<sup>4</sup> В англоязычной литературе модели данной группы часто называются Linear Eddy Viscosity Models (Линейные Модели Вихревой Вязкости).

$$\tau_{t,ij} = 2\rho v_t \left( S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

где скалярная величина  $v_t$  по аналогии с молекулярным коэффициентом вязкости называется турбулентной вязкостью, а величина  $k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$  представляет собой кинетическую энергию турбулентности.

Таким образом, в данном случае роль модели турбулентности сводится к определению связи величин  $v_t$  и  $k$  с параметрами осредненного течения.

Следует подчеркнуть, что соотношение (2.1) не имеет какого-либо теоретического обоснования и, строго говоря, никогда не выполняется. Тем не менее, как показано в огромном числе исследований<sup>5</sup>, его применение в сочетании с лучшими из известных моделей турбулентной вязкости обеспечивает вполне приемлемую для инженерных приложений точность расчета достаточно широкого круга турбулентных течений. Это объясняется тем, что во многих течениях, прежде всего, в тонких сдвиговых слоях (пограничные слои, слои смешения, струи) основное влияние на параметры осредненного потока оказывает лишь один компонент тензора напряжений, а именно, касательное напряжение  $\overline{u'v'}$  (под  $u'$  и  $v'$  понимаются компоненты вектора турбулентных пульсаций скорости в направлениях вдоль и поперек сдвигового слоя соответственно), так что допущение о “скалярности” величины  $v_t$  перестает быть ограничительным.

Для определения компонент вектора турбулентного теплового потока  $q_{t,k}$  в рамках линейных моделей используется аналог

---

<sup>5</sup> Достаточно подробный анализ возможностей и ограничений линейных моделей турбулентности представлен в большом числе монографий и обзорных статей (см., например, [8, 9]).

гипотезы Буссинеска, иногда называемый “градиентной гипотезой” для турбулентного теплового потока:

$$q_{t,i} = -\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.2)$$

где через  $\lambda_t$  обозначена скалярная величина, называемая турбулентной теплопроводностью и обычно определяемая через динамический коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t = \rho \nu_t$  с помощью соотношения  $\lambda_t = C_P \mu_t / Pr_t$ , где  $Pr_t$  – турбулентный аналог числа Прандтля, как правило, полагаемый равным константе ( $Pr_t = 0.9$ ).

Обширный опыт использования линейных моделей свидетельствует о том, что к настоящему времени наиболее высокий “рейтинг” среди них получили две модели: модель переноса турбулентной вязкости [48] (модель Спаларта-Аллмараса или SA модель) и модель переноса кинетической энергии турбулентности и удельной скорости ее диссипации [49], [50] ( $k$ - $\omega$  Shear Stress Transport модель Ментера или SST модель). Ниже приводятся формулировки этих моделей и примеры расчетов, иллюстрирующие их возможности и ограничения.

### **2.1.1. Оригинальная версия модели Спаларта-Аллмараса (модель SA-92)**

Данная модель была опубликована в 1992 г. [48] и, благодаря своей простоте и достаточно высокой точности при расчете многих аэродинамических течений (см. раздел 2.1.3), быстро стала одной из наиболее популярных моделей турбулентности.

Модель содержит одно дифференциальное уравнение переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k \tilde{v})}{\partial x_k} = \rho P^v - \rho D^v + \\ + \frac{\rho}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \right] + c_{b2} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \right) \right] \right\} + \rho f_{t1} \Delta U^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Модифицированная кинематическая турбулентная вязкость  $\tilde{\nu}$ , относительно которой записано это уравнение, и “истинная” турбулентная вязкость, входящая в выражение для рейнгольдсовых напряжений (2.1), связаны соотношением:

$$v_t = f_{v1} \tilde{\nu}, \quad (2.4)$$

где

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (2.5)$$

а  $\nu$  - молекулярная вязкость газа.

Генерационный и деструктивный (диссипативный) члены в правой части (2.3),  $P^v$  и  $D^v$ , определяются следующими выражениями:

$$P^v = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad (2.6)$$

$$D^v = \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2, \quad (2.7)$$

в которых  $d_w$  – расстояние до ближайшей точки твердой стенки,  $\kappa$  - постоянная Кармана,

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d_w^2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (2.8)$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d_w^2}, \quad (2.9)$$

величина  $\Omega$  представляет собой модуль тензора завихренности

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i),$$

а функция  $f_{t2}$ , обеспечивающая подавление так называемого “спонтанного” или “численного” перехода от ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному, определяется выражением

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4}\chi^2). \quad (2.10)$$

Наконец, величины  $f_{t1}$  и  $\Delta U$ , входящие в последний член в правой части (2.3), предназначенный для инициирования ламинарно-турбулентного перехода в заданной точке (в случае двумерных течений) или на заданной линии (в случае трехмерных течений) обтекаемой поверхности (“trip-term” или триггер перехода), рассчитывается с помощью формул:

$$f_{t1} = C_{t1}g_t \exp\left(-C_{t2} \frac{\omega_{\Delta t}^2}{\Delta U^2} (d_w^2 + g_t^2 d_t^2)\right), \quad (2.11)$$

$$g_t = \min(0.1, \Delta U / (\omega_{\Delta t} \Delta l_t)), \quad \omega_{\Delta t} = \Omega_{W,trip}, \quad (2.12)$$

$$d_t^2 = (z - z_{trip})^2 + (y - y_{trip})^2 + (x - x_{trip})^2, \quad \Delta U = |\vec{v} - \vec{v}_{trip}|.$$

Здесь нижний индекс “trip” относится к величинам, определяемым в той точке на линии перехода на поверхности тела, которая находится на минимальном расстоянии от рассматриваемой точки потока,  $\Delta l_t = (\Delta x^2 + \Delta z^2)^{1/2}$  – диагональ ячейки сетки на обтекаемой поверхности в этой точке, а величина  $\Delta U$  равна модулю разности векторов скорости в рассматриваемой точке и в точке перехода (в случае неподвижной стенки  $\Delta U = |\vec{v}|$ ).

Отметим, что наличие триггера перехода заметно облегчает имитацию перехода к турбулентности в рамках полуэмпирических моделей турбулентности.

Эмпирические константы модели равны:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2/3, \quad \kappa = 0.41, \quad c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{v1} = 7.1, \\ C_{t1} &= 1, \quad C_{t2} = 2, \quad C_{t3} = 1.2, \quad C_{t4} = 0.5.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Граничные условия к уравнению (2.3) задаются следующим образом.

На твердых стенках модифицированная турбулентная вязкость  $\tilde{\nu}$ , как и истинная вязкость  $\nu_t$ , должна обращаться в нуль  $\tilde{\nu} = 0$ .

На входных участках проницаемой границы расчетной области для переменной  $\tilde{\nu}$  должно быть задано условие первого рода, а на выходных - величина  $\tilde{\nu}$  экстраполируется на границу из внутренних точек области.

При расчете аэродинамических течений (задачи внешнего обтекания различных тел) конкретный выбор величины  $\tilde{\nu}$ , задаваемой на внешней входной границе, осуществляется следующим образом.

Если точка (линия) перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения известна (из эксперимента или предварительного расчета, например, с помощью метода Дрела “ $e^n$ ” [51]), то значение  $\tilde{\nu}$  на внешней входной границе расчетной области полагается равным некоторой малой величине (обычно порядка  $10^{-3}$  молекулярной вязкости), конкретный выбор которой не играет роли. При этом, благодаря наличию в уравнении (2.3) “триггера перехода”, переход от ламинарного к турбулентному режиму течения происходит в малой окрестности заданной точки (линии) перехода.

В тех случаях, когда положение точки (линии) перехода заранее не известно, но число Рейнольдса достаточно велико, так что

ламинарным участком пограничного слоя на обтекаемом теле можно пренебречь, можно использовать так называемый “полностью турбулентный” (Fully Turbulent или FT) подход к описанию перехода. В рамках этого подхода член с “триггером перехода” в уравнении (2.3) полагается равным нулю, а на входном участке внешней границы расчетной области задается достаточно высокий уровень  $\tilde{\nu}$  ( $\tilde{\nu} = (0.1 \div 5)\nu$ ). При этом уравнение (2.3) обеспечивает быстрый (на расстоянии нескольких шагов сетки от передней критической точки) переход к развитому турбулентному течению в пограничном слое.

Наконец, в тех случаях, когда переход к турбулентности происходит не в присоединенном пограничном слое, а в оторвавшемся от обтекаемой поверхности слое смешения (такая ситуация может иметь место, например, при докритических режимах обтекания затупленных тел), возможно использование следующей двухстадийной процедуры расчета, получившей название “Trip-Less” (TL) подхода [52].

Расчет начинается в рамках FT-подхода, а затем (после формирования развитой отрывной зоны) производится переход к первому из рассмотренных выше сценариев (то есть относительно большая величина  $\tilde{\nu}$  на входных границах заменяется малой величиной) с той лишь разницей, что “trip term” не активируется. В результате, при продолжении расчета турбулентная вязкость “вымывается” конвекцией из области присоединенного течения, расположенной вверх по потоку от отрывной зоны, и течение в этой области становится ламинарным. В то же время, в отрывной зоне и вниз по потоку от нее, благодаря “рециркуляции” турбулентности, течение остается турбулентным.

Отметим, в заключение, что для “диагностики” состояния пограничного слоя при проведении расчетов полезно использовать так называемый индекс турбулентности, величина которого

в развитом турбулентном пограничном слое близка к единице, а в ламинарном – к нулю. Индекс турбулентности вычисляется по формуле [48]

$$i = \frac{1}{k u_\tau} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}, \quad (2.14)$$

где “скорость трения” на стенке  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  в общем случае трехмерного течения рассчитывается как  $u_\tau = \sqrt{\nu \Omega}$  ( $\Omega$  - модуль завихренности в рассматриваемой точке стенки).

Завершая описание оригинальной формулировки SA модели, следует отметить, что в течение более чем двадцатилетней истории ее интенсивного использования эта модель оставалась практически неизменной и лишь сравнительно недавно было предложено несколько модификаций, которые заметно расширили область ее применимости. Наиболее существенными из них являются рассмотренные в разделе 2.1.4 поправка на кривизну линий тока и вращение [53], [54], поправка на сжимаемость потока [55] и поправка, учитывающая шероховатость обтекаемой поверхности [56].

### **2.1.2. Оригинальная версия модели Ментера (модель SST-93)**

Эта модель предложена в 1993 году [49] почти одновременно с SA моделью и, таким образом, опыт ее эксплуатации также насчитывает уже более 20 лет. Этот опыт свидетельствует о том, что данная модель, получившая название Shear Stress Transport (SST) модели, по совокупности своих качеств является одной из лучших, если не лучшей, среди существующих RANS моделей турбулентности (см. раздел 2.1.3).

SST модель представляет собой комбинацию двух давно известных моделей турбулентности, а именно стандартной  $k$ - $\epsilon$  модели [57] и  $k$ - $\omega$  модели Уилкокса [58], и сочетает в себе лучшие

качества этих моделей. Так,  $k$ - $\epsilon$  модель хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных и струйных сдвиговых течений, для анализа которых собственно и была предназначена ее первая версия, предложенная Харлоу [59], а  $k$ - $\omega$  модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [60]. С учетом этих обстоятельств, Ментером [49] было предложено объединить эти модели с использованием специально сконструированной для этого эмпирической функции  $F_1$  (см. далее), которая обеспечивает близость итоговой модели к модели  $k$ - $\epsilon$  вдали от твердых стенок и к модели  $k$ - $\omega$  в пристеночной части потока.

В первой редакции [49] формулировка SST модели, записанной в терминах  $k$  (кинетическая энергия турбулентности) и  $\omega$  (удельная скорость ее диссипации), выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P_k - \beta^* \rho \omega k, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + \\ + (1 - F_1) D_{k\omega}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Расчет генерационного члена в уравнениях переноса (2.15), (2.16) производится по формуле

$$P_k = \min(\mu_t S^2, 20\beta^* \rho k \omega), \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij}, \quad (2.17)$$

а последний член в правой части уравнения переноса  $\omega$  (так называемый член с перекрестной диффузией – cross-diffusion term) имеет вид

$$D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}. \quad (2.18)$$

Эмпирическая весовая функция  $F_1$  в уравнении (2.16) определяется соотношением

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad (2.19)$$

в котором  $\arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500\nu}{d_w^2\omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega_2}k}{CD_{k\omega}d_w^2} \right]$ , где

$$CD_{k\omega} = \max \{D_{k\omega}, 10^{-20}\}.$$

Эта функция построена таким образом, что во внутренней части пограничного слоя она близка к нулю, а во внешней - к единице.

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям  $k$  и  $\omega$  в SST модели используется соотношение

$$\mu_T = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1\omega, \Omega F_2)}, \quad (2.20)$$

которое базируется на стандартном соотношении [55]  $\mu_t = \rho k / \omega$  и известной гипотезе Брэдшоу [61] о пропорциональности напряжения сдвига в пристеночной части пограничного слоя энергии турбулентных пульсаций  $\tau = \rho a_1 k$ .

Заметим, что соотношение (2.20) ограничивает сверху величину турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя, где оно принимает вид  $\mu_t = \rho a_1 k / (\Omega F_2)$ , и что его использование позволяет избежать характерного для  $k$ - $\varepsilon$  моделей затягивания отрыва потока под действием положительного (неблагоприятного) продольного градиента давления.<sup>6</sup>

Эмпирическая функция  $F_2$ , входящая в (2.20), рассчитывается по формуле

---

<sup>6</sup> Именно введение этого ограничителя сдвигового напряжения (ограничителя Shear Stress Transport) определило название, данное модели ее автором.

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad (2.21)$$

где  $\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500\nu}{d_w^2\omega}\right)$ , а через  $d_w$ , как и в случае SA модели, обозначено расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности.

Наконец, эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы  $k$ - $\varepsilon$  (индекс “1”) и  $k$ - $\omega$  (индекс “2”) моделей с помощью упоминавшейся выше эмпирической “весовой” функции  $F_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1\sigma_{k1} + (1 - F_1)\sigma_{k2}, \\ \sigma_\omega &= F_1\sigma_{\omega1} + (1 - F_1)\sigma_{\omega2}, \\ \beta &= F_1\beta_1 + (1 - F_1)\beta_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Эмпирические константы  $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$  моделей, входящие в (2.22), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85, \sigma_{\omega1} = 0.5, \beta_1 = 0.075, \\ \sigma_{k2} &= 1.0, \sigma_{\omega2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828, \end{aligned} \quad (2.23)$$

а остальные константы равны

$$\beta^* = 0.09, \kappa = 0.41, a_1 = 0.31, \gamma = \beta/\beta^* - \sigma_\omega\kappa^2/\sqrt{\beta^*}. \quad (2.24)$$

Граничные условия к уравнениям SST модели (2.15), (2.16) задаются следующим образом.

На твердой стенке кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю, а удельная скорость ее диссипации определяется по формуле

$$\omega_w = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_1^2}, \quad (2.25)$$

где  $\Delta y_1$  – величина первого пристеночного шага сетки.

На входных участках внешней границы расчетной области задается значение удельной скорости диссипации

$$\omega_{\infty} = C \frac{U_{\infty}}{L}, \quad (2.26)$$

где  $U_{\infty}$  и  $L$  – характерные для данного течения скоростной и линейный масштабы, а рекомендованные в [49] значения константы  $C$  лежат в диапазоне  $1 \div 10$ .

Что касается величины кинетической энергии турбулентности на входных границах, то ее значение  $k_{\infty}$  либо задается непосредственно (если оно известно из эксперимента или из каких-то физических соображений), либо рассчитывается по величине кинематической турбулентной вязкости на входной границе  $(\nu_t)_{\infty}$ , которая предполагается заданной:  $k_{\infty} = \rho_{\infty} (\nu_t)_{\infty} \omega_{\infty}$ . При этом значение  $(\nu_t)_{\infty}$ , в принципе, может задаваться так же, как и в рамках SA модели (см. раздел 2.1.1). Однако, в тех случаях, когда оно мало, модель SST рекомендуется использовать в сочетании с моделью ламинарно-турбулентного перехода [62] или [63]. В противном случае, модель SST может приводить к так называемому “вычислительному переходу”, положение которого никак не связано с физическим переходом и зависит от параметров используемой сетки и численного метода.

Как и SA модель, SST модель на протяжении многих лет не подвергалась каким-либо изменениям, и лишь в статье [50], подводящей итоги десятилетнего опыта эксплуатации данной модели, в нее были внесены некоторые незначительные изменения, рассмотренные в разделе 2.1.4.

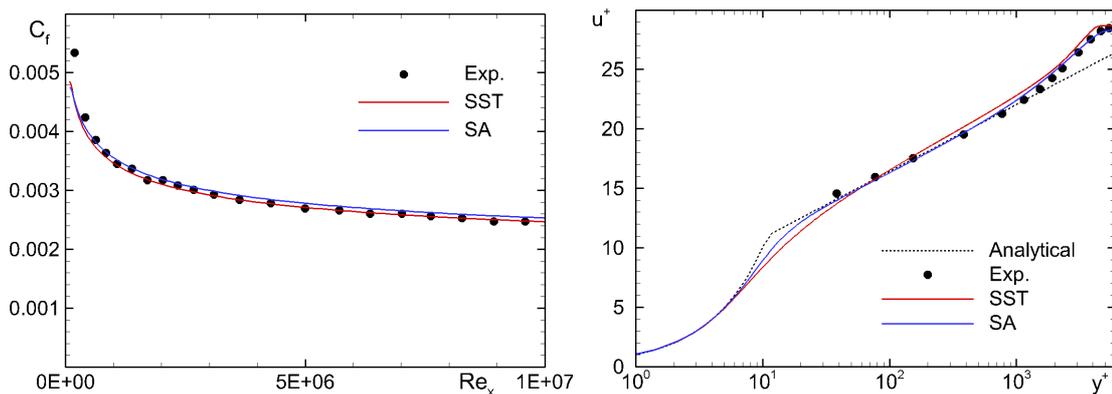
### **2.1.3. Примеры применения оригинальных версий моделей SA-92 и SST-93**

К сожалению, отдать однозначное предпочтение одной из этих моделей при расчете течений различных классов не представляется возможным. С определенной уверенностью можно констатировать лишь то, что обе модели дают близкие результаты при расчете безотрывных течений при умеренных продольных градиентах давления, и что SA модель, как правило, несколько “затягивает” отрыв пограничного слоя, индуцированный неблагоприятным продольным градиентом давления. Кроме того, обе модели занижают темп релаксации пограничного слоя, формирующегося вниз по потоку от точки присоединения, к своему “равновесному” состоянию (этот недостаток в той или иной степени присущ всем известным полуэмпирическим моделям турбулентности).

Следует также отметить, что несмотря на многие свои достоинства, ни та, ни другая модель не позволяет получить результаты, удовлетворяющие достаточно высоким современным требованиям к точности расчета аэродинамических характеристик даже для некоторых безотрывных течений. К ним, в частности, относятся течения с сильной кривизной линий тока и вращением (для расчета таких течений разработаны специальные поправки к обеим моделям - см. раздел 2.1.4.1). По понятным причинам обе модели также не обеспечивают удовлетворительной точности расчета течений, в которых наблюдается существенное отклонение от гипотезы Буссинеска. Для расчета таких течений необходимо использование нелинейных моделей турбулентной вязкости или моделей рейнольдсовых напряжений (см. раздел 2.2).

Рассмотрим ряд примеров расчетов, иллюстрирующих сформулированные выше характерные свойства SA и SST моделей<sup>7</sup>.

На рисунке 2.1 представлены результаты, полученные с использованием обеих моделей при решении классической задачи о расчете турбулентного пограничного слоя с нулевым градиентом давления (обтекание плоской пластины). Видно, что для данного относительно простого течения обе модели обеспечивают практически одинаковую и достаточно высокую точность предсказания как распределения коэффициента трения вдоль поверхности пластины, так и профиля скорости в пограничном слое.



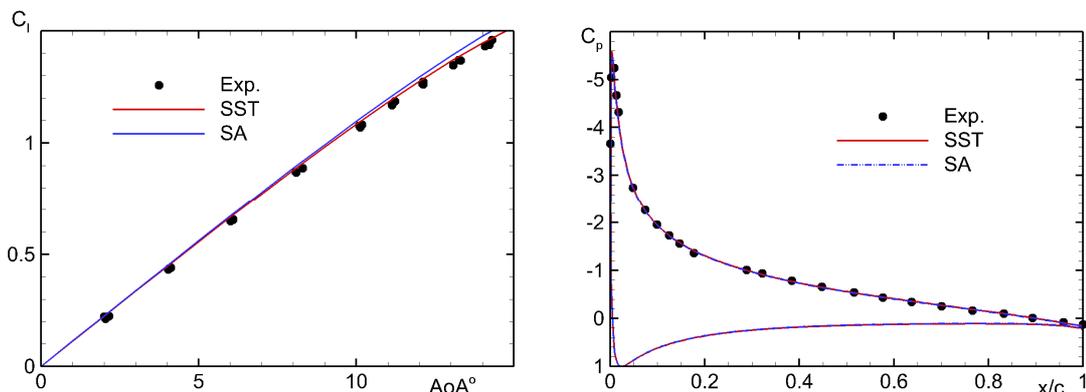
**Рисунок 2.1.** Сравнение результатов расчета коэффициента трения и профиля скорости, построенного в координатах “закона стенки” ( $u^+ = u / \sqrt{\tau_w / \rho}$ ,  $y^+ = y \sqrt{\tau_w / \rho} / \nu$ ), в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными [65]

Аналогичная картина наблюдается при расчете дозвукового обтекания аэродинамических профилей под небольшими углами

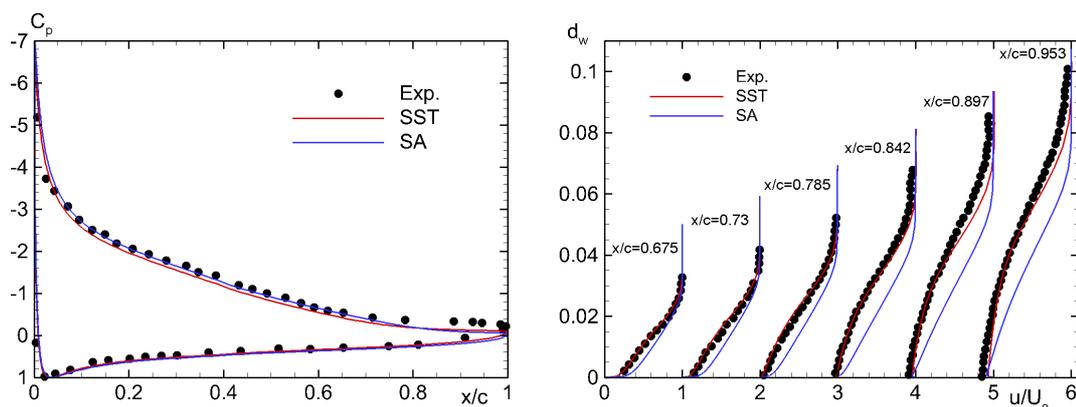
---

<sup>7</sup> Расчеты, результаты которых представлены ниже, выполнены авторами настоящего пособия и их коллегами в лаборатории “Вычислительная аэроакустика и турбулентность” СПбПУ с помощью кода NTS (Numerical Turbulence Simulation) [18, 64].

атаки (см. рис. 2.2) и при моделировании многих других безотрывных течений с умеренными градиентами давления.



**Рисунок 2.2.** Сравнение зависимости коэффициента подъемной силы аэродинамического профиля NACA0012 от угла атаки и распределения коэффициента давления по поверхности профиля при угле атаки  $10^\circ$ , полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными, приведенными в [6]

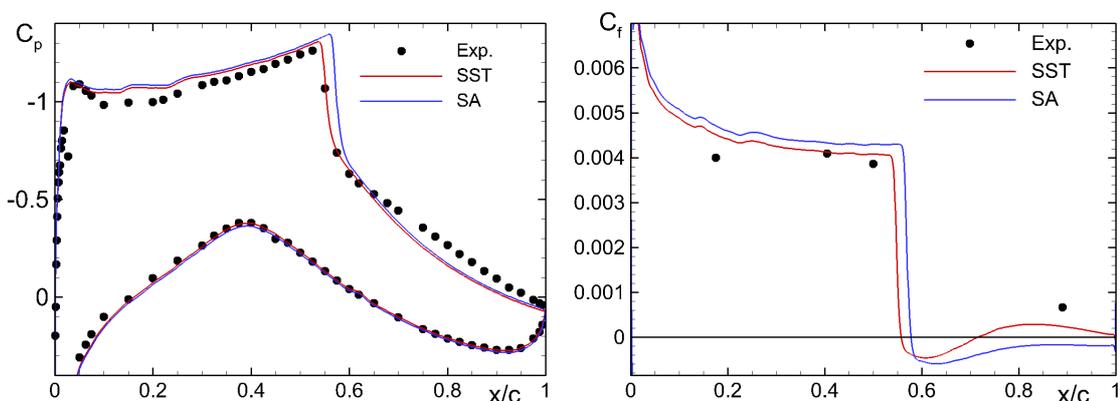


**Рисунок 2.3.** Сравнение распределений коэффициента давления и профилей скорости в различных сечениях, полученных при расчете обтекания профиля NACA 4412 под углом атаки  $13.87^\circ$  с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными [66]

Однако с ростом величины неблагоприятного градиента давления до значений, приводящих к предотрывному состоянию и, тем более, к отрыву потока, ситуация изменяется: для таких течений SST модель предсказывает более ранний отрыв, чем SA модель, причем полученные с ее использованием результаты заметно лучше согласуются с экспериментальными данными.

Это иллюстрирует рис. 2.3, на котором представлены результаты расчетов дозвукового обтекания аэродинамического профиля NASA 4412 с ограниченным отрывным пузырем у задней кромки (угол атаки  $\alpha = 13.87^\circ$ ).

Еще одним примером течений с ограниченной зоной отрыва, при расчете которых SA и SST модели приводят к существенно отличающимся друг от друга результатам, является трансзвуковое обтекание аэродинамических профилей. В качестве примера на рисунке 2.4 сравниваются полученные с помощью обеих моделей распределения коэффициентов давления и трения по поверхности профиля RAE 2822 (Режим 10 – число Маха  $M=0.75$ , угол атаки  $\alpha = 3.19^\circ$  [67]). Характерной особенностью данного течения является локальный отрыв потока за скачком уплотнения, замыкающим сверхзвуковую зону, формирующуюся на верхней поверхности профиля.



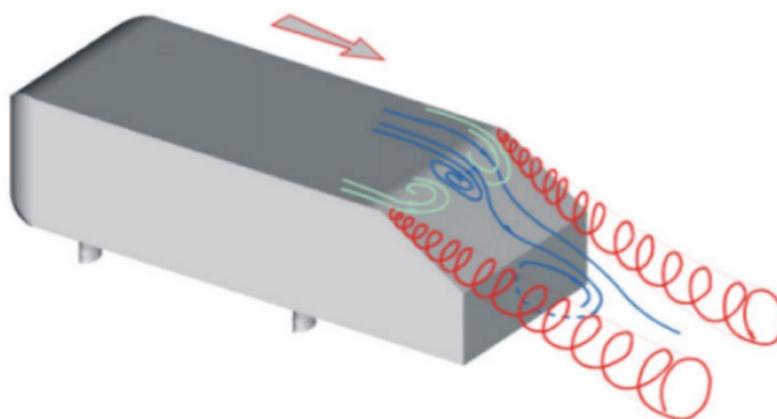
**Рисунок 2.4.** Сравнение расчетных распределений коэффициентов давления и трения по поверхности профиля RAE2822 при трансзвуковом режиме течения (Режим 10), полученных с использованием SA и SST моделей, с результатами измерений [67]

Из рисунка видно, в частности, что согласно SA модели, скачок находится несколько ниже по потоку и является более интенсивным, чем согласно SST модели. Кроме того, SST модель предсказывает, что оторвавшийся пограничный слой вновь присоединяется к поверхности профиля (трение на поверхности

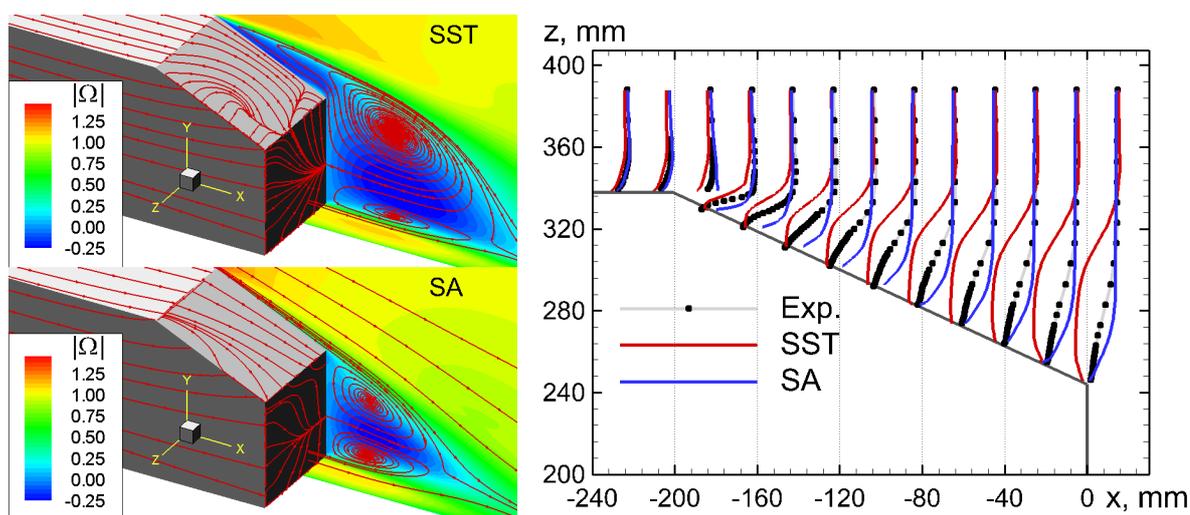
профиля вновь становится положительным), а согласно SA модели, отрывной пузырь простирается вплоть до задней кромки профиля. При этом результаты расчетов по SST модели несколько лучше согласуются с экспериментом.

Аналогичные результаты получаются при расчете обтекания модельного автомобиля (рис. 2.5), исследовавшегося в экспериментах [68] (результаты расчетов этого течения часто используются для оценки возможностей моделей турбулентности при расчете отрывных течений – см., например, [9]).

На рисунке 2.6 представлены некоторые результаты расчетов данного течения с использованием SA и SST моделей при угле наклона заднего скоса “крыши” автомобиля равном  $25^\circ$ . Из него видно, что SA модель предсказывает безотрывное обтекание скоса в вертикальной плоскости симметрии, в то время как согласно SST модели, в этой плоскости имеет место полностью отрывное течение. При этом ни та, ни другая модель не воспроизводит измеренное поле скорости, в котором в указанной плоскости происходит отрыв потока, сопровождающийся его присоединением к поверхности скоса и последующим отрывом от задней кромки “крыши”.



**Рисунок 2.5.** Схема упрощенной модели автомобиля, экспериментально исследовавшейся в [68] (из [69])

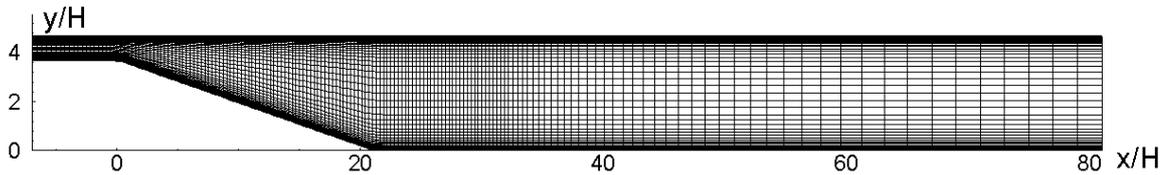


**Рисунок 2.6.** Сравнение с экспериментом [68] картин линий тока и профилей скорости в плоскости симметрии, полученных при расчете обтекания модельного автомобиля с использованием SA и SST моделей

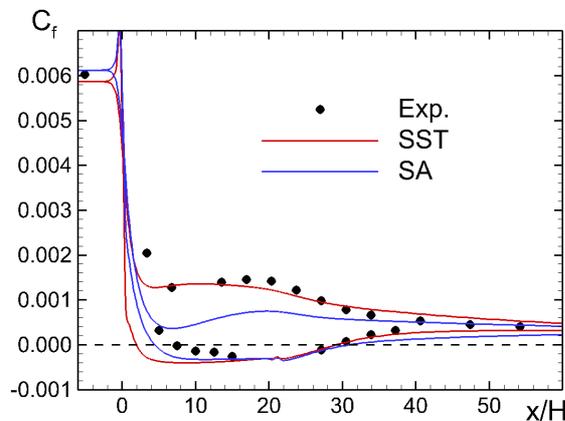
На рисунках 2.7-2.12 представлены еще два примера применения SA и SST моделей для расчета течений с ограниченным отрывом потока (в отличие от ранее рассмотренных задач внешнего обтекания, эти течения являются внутренними).

В частности, на рис. 2.7 изображена схема и расчетная сетка, а на рис. 2.8, 2.9 показаны результаты расчета течения в плоском асимметричном диффузоре [70] (так называемый диффузор Obi), в котором поток отрывается от нижней наклонной стенки. Видно, что согласно SA модели, отрыв, как обычно, происходит ниже по течению, чем согласно SST модели (рис. 2.8). Однако, в отличие от примеров, рассмотренных выше, в данном случае предсказание точки отрыва по SA модели несколько лучше согласуется с данными измерений [70], чем по SST модели. С другой стороны, SST модель заметно лучше, чем SA модель, описывает изменение трения вдоль верхней (прямой) стенки диффузора (рис. 2.8), пограничный слой на которой также развивается под воздействием значительного неблагоприятного градиента давления, но остается присоединенным. Кроме того, рис. 2.9, на котором с экспериментом сравниваются расчетные и экспериментальные профили скорости и касательных напряжений, рассчитанные с использованием SA

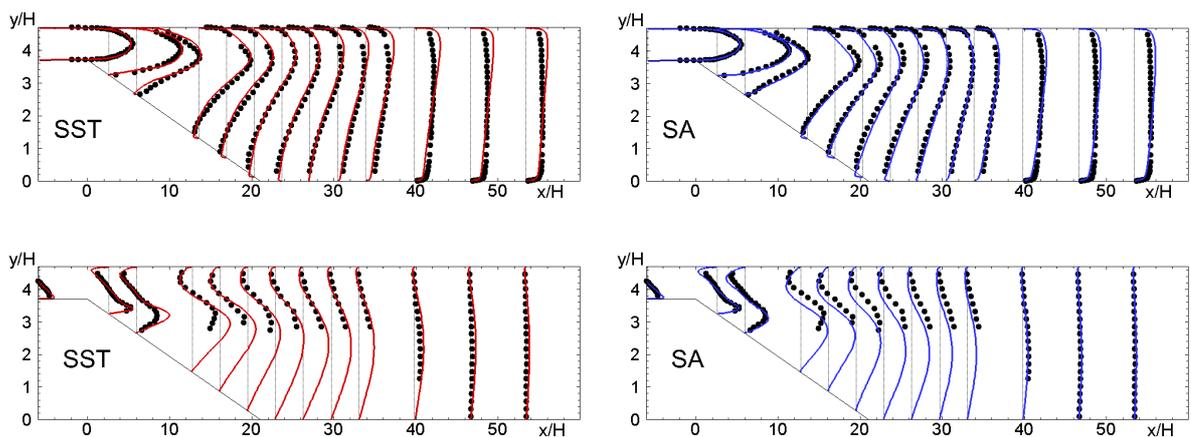
и SST моделей, служит иллюстрацией упомянутого выше факта завышения обеими моделями длины участка релаксации течения к равновесному состоянию вниз по потоку от точки присоединения.



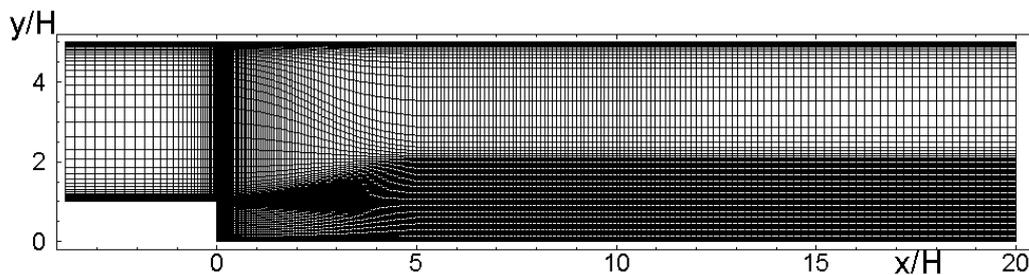
**Рисунок 2.7.** Геометрия плоского асимметричного диффузора (диффузор Obi), течение в котором экспериментально исследовалось в [70], и сетка, использовавшаяся при его расчете



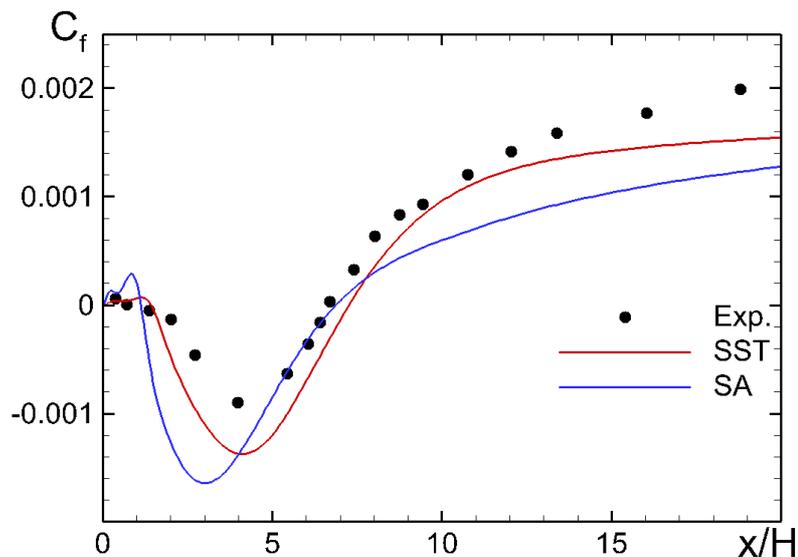
**Рисунок 2.8.** Сравнение расчетных и экспериментальных распределений трения вдоль наклонной (нижней) и прямой (верхней) стенок асимметричного плоского диффузора [70]



**Рисунок 2.9.** Сравнение расчетных и экспериментальных [70] профилей продольной скорости (верхний ряд) и касательных напряжений (нижний ряд) в различных сечениях плоского асимметричного диффузора



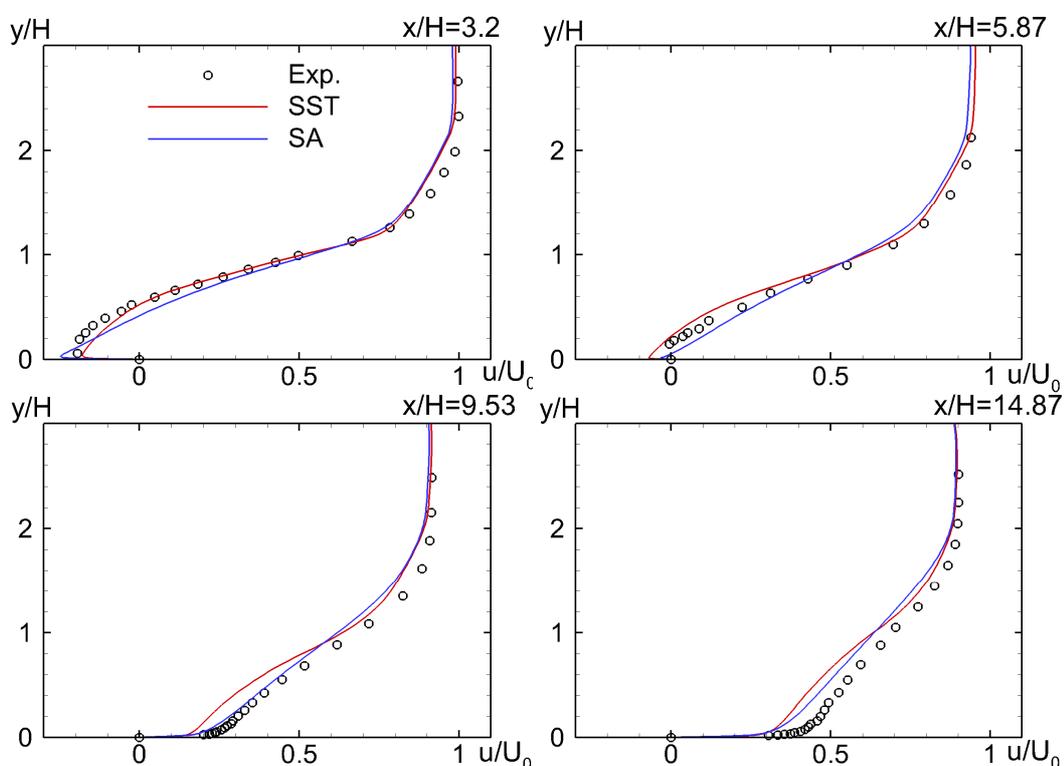
**Рисунок 2.10.** Геометрия и расчетная сетка плоского канала с внезапным расширением (обратным уступом), течение в котором экспериментально исследовалось в [71]



**Рисунок 2.11.** Сравнение расчетных распределений трения вдоль нижней стенки канала за уступом, полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными [71]

Аналогичный пример показан на рисунках 2.10 - 2.12, на которых представлены результаты расчетов течения в плоском канале с внезапным расширением (с “обратным уступом”), исследовавшегося в экспериментах [71]. Видно, что обе рассматриваемые модели качественно правильно описывают данное течение, но при этом наблюдается значительное количественное рассогласование результатов расчетов с экспериментальными данными. В частности, как SA, так и SST модель завышают интенсивность возвратного течения в отрывной зоне за уступом и, как и для диффузора Оби, предсказывают

слишком медленное восстановление параметров пограничного слоя вниз по потоку от точки присоединения. Тем не менее, в данном случае, как и при расчете трансзвукового обтекания профиля, SST модель, в целом, заметно превосходит по точности SA модель.

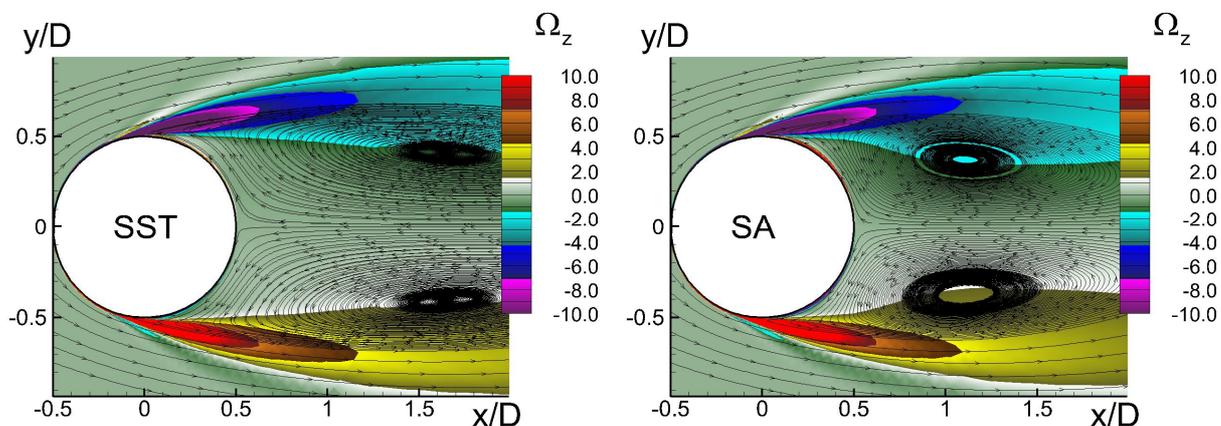


**Рисунок 2.12.** Сравнение расчетных профилей скорости, полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными профилями [71] в различных сечениях канала с обратным уступом на нижней стенке

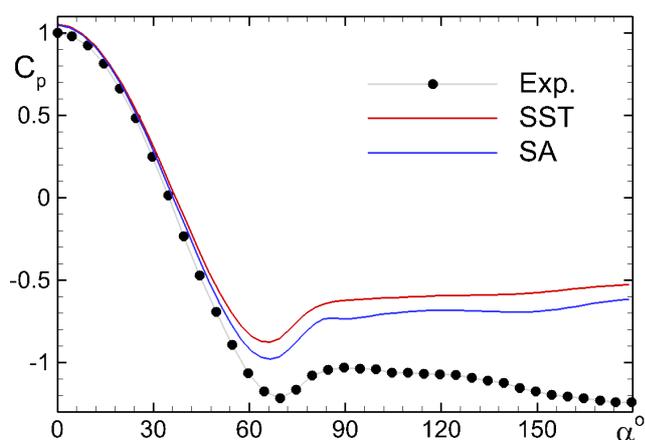
Таким образом, приведенные примеры достаточно убедительно свидетельствуют о том, что даже при расчете течений с ограниченными отрывными зонами SA и SST модели, заслуженно считающиеся в настоящее время лучшими линейными RANS моделями, как правило, приводят к существенно отличающимся друг от друга результатам. Более того, в некоторых случаях обе эти модели оказываются неспособными предсказать характеристики данного класса течений с приемлемой точностью.

В еще большей степени эти слабости SA и SST моделей проявляются при расчете течений с глобальным отрывом.

Это наглядно иллюстрируют рис. 2.13, 2.14, на которых представлены результаты, полученные с использованием обеих моделей при расчете докритического режима обтекания цилиндра (число Рейнольдса  $Re = 5 \cdot 10^4$ ).

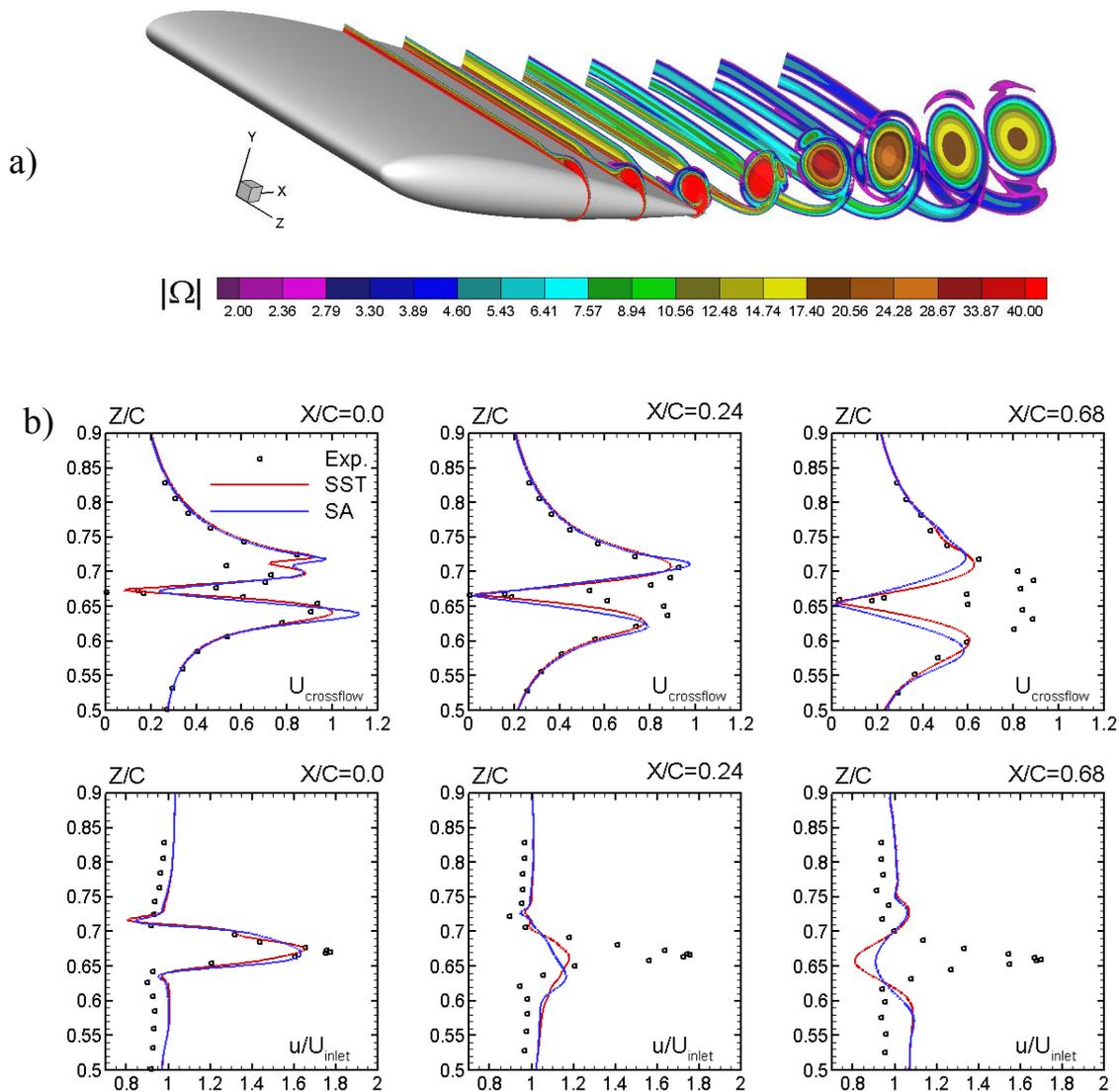


**Рисунок 2.13.** Поля поперечной компоненты завихренности и линии тока, полученные при расчете обтекания цилиндра на основе стационарных уравнений RANS с использованием SST и SA моделей



**Рисунок 2.14.** Сравнение распределений коэффициента давления вдоль поверхности цилиндра, полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными [72]

Из рисунков видно, что обе модели не способны с приемлемой точностью предсказать измеренное в эксперименте распределение давления и, следовательно, сопротивление цилиндра. Это связано с фундаментальными недостатками RANS моделей, обсуждавшимися в главе 1.

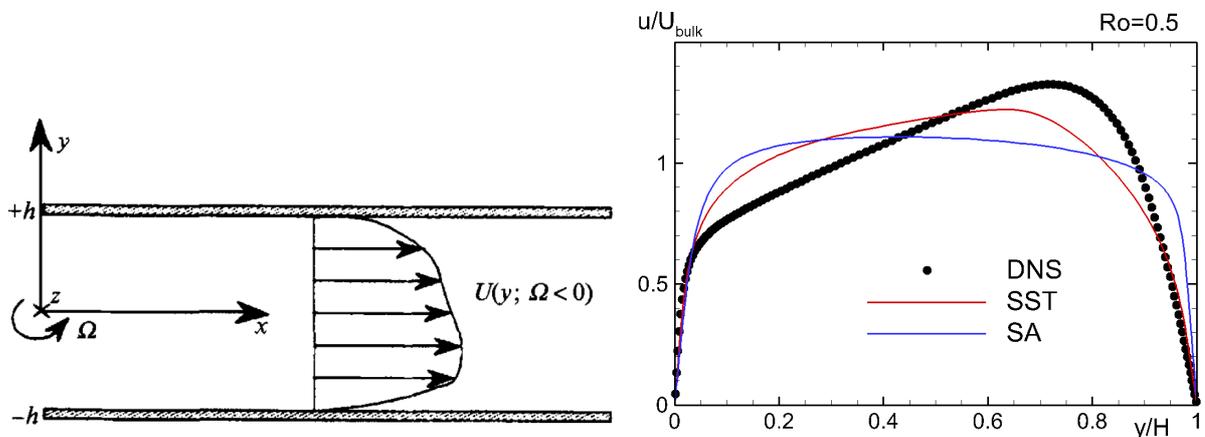


**Рисунок 2.15.** Геометрия крыла конечного размаха  $NACA0012$  со скругленной кромкой и поле модуля завихренности (а); сравнение расчетных и экспериментальных [73] профилей поперечной и продольной составляющих скорости в различных сечениях следа за крылом (б)

Как уже отмечалось в начале данного раздела, ограниченность возможностей линейных моделей RANS проявляется также при расчете течений, в которых существенную роль играют эффекты кривизны линий тока и / или вращения потока. В качестве примера на рисунке 2.15 представлены полученные с использованием SA и SST моделей результаты расчетов вихревого следа за крылом конечного размаха с профилем  $NACA\ 0012$  и скругленной боковой кромкой, характерной особенностью которого является сильная

кривизна линий тока. Видно, что согласование этих результатов с данными измерений поля скорости в следе резко ухудшается по мере движения вниз по потоку, причем обе модели сильно завышают скорость диссипации кромочного вихря.

Еще один пример неудовлетворительной работы SA и SST моделей при расчете вращающихся потоков (установившееся течение в плоском вращающемся канале) представлен на рис. 2.16. Из него видно, что эти модели приводят не только к большим количественным ошибкам, но и к качественно неверному предсказанию влияния вращения на профиль скорости.



**Рисунок 2.16.** Схема течения и сравнение профилей скорости, рассчитанных с использованием DNS [74] и с помощью SA и SST моделей, для течения во вращающемся плоском канале

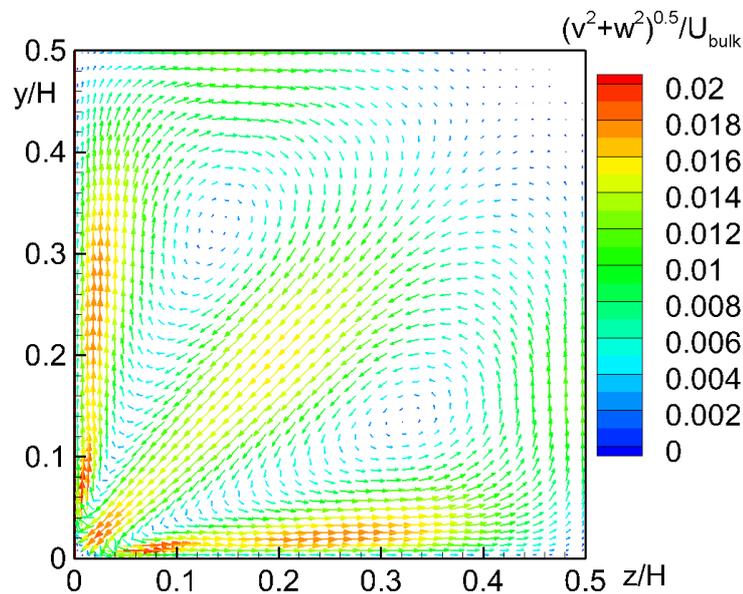
Наконец, как и все линейные RANS модели, модели SA и SST не могут обеспечить адекватного описания турбулентных течений, в которых имеет место значительное нарушение гипотезы Буссинеска о линейной связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций (2.1) или, иными словами, концепция скалярной турбулентной вязкости является несправедливой. “Провал” SA и SST моделей при расчете таких течений иллюстрируют рисунки 2.17 - 2.21.

В частности, на рисунках 2.17 и 2.18 представлены результаты расчетов установившегося течения в канале квадратного сечения

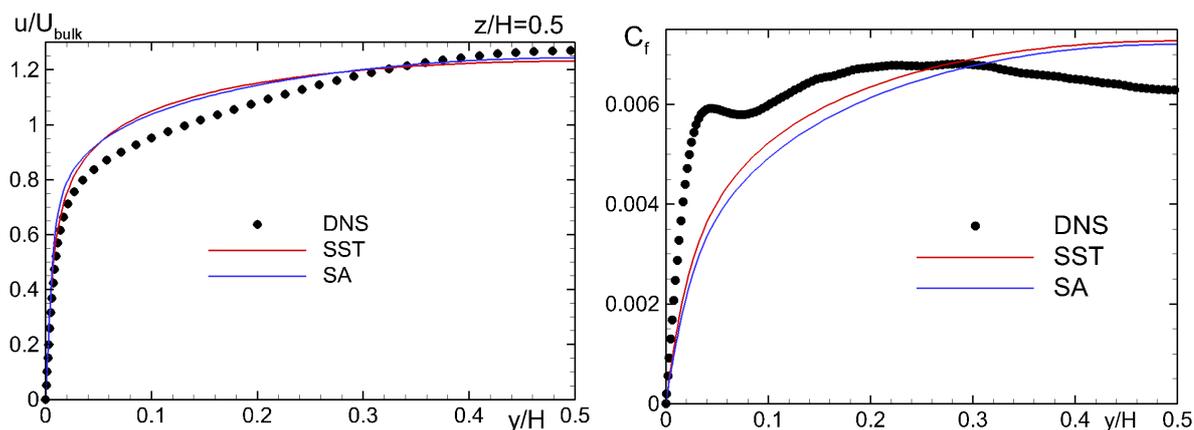
при числе Рейнольдса, построенном по динамической скорости  $u_\tau = \sqrt{\overline{\tau_w}}/\rho$  ( $\overline{\tau_w}$  - среднее по периметру сечения канала трение на стенке) и высоте канала  $H$ , равном 1200.

Для этого течения модели SA и SST в силу своей линейности предсказывают отсутствие так называемого “вторичного” течения, то есть течения в плоскостях, нормальных к оси канала  $x$  (в соответствующих решениях поперечные компоненты вектора скорости  $v$  и  $w$  равны нулю). В действительности же вторичное течение в канале имеет место и, как видно из рис. 2.17, на котором показано поле средней поперечной скорости, полученное из решения рассматриваемой задачи с помощью DNS [75], его интенсивность отнюдь не пренебрежимо мала.

Вследствие этого использование SA и SST моделей приводит к значительным погрешностям и при расчете продольной составляющей вектора скорости, а также распределения трения вдоль стенки канала (рис. 2.18).

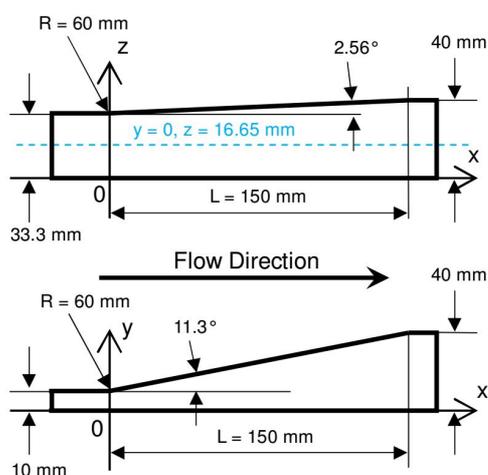


**Рисунок 2.17.** Векторное поле вторичного течения в одном из квадрантов канала квадратного сечения, рассчитанное на основе DNS [75]. Цветом показана интенсивность вторичного течения (величина модуля скорости, отнесенная к среднерасходной скорости)



**Рисунок 2.18.** Профиль продольной скорости в плоскости симметрии и распределение коэффициента трения по периметру канала, рассчитанные с помощью DNS [75] и в рамках SA и SST RANS.

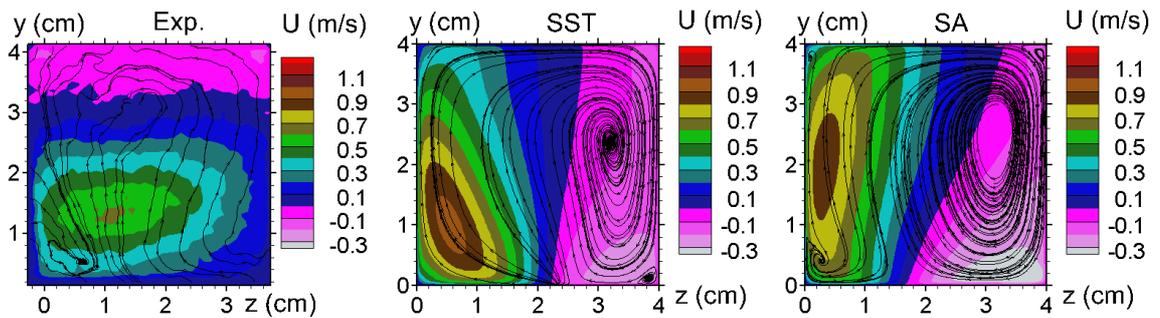
При расчете более сложных течений, характеризующихся сильной анизотропией реynольдсовых напряжений, ошибки, обусловленные использованием SA, SST и других линейных моделей, могут быть еще более существенными. Ярким примером таких течений является течение несжимаемой жидкости в несимметричном диффузоре прямоугольного сечения (см. схему на рис. 2.19), экспериментальное исследование которого было проведено в Стэнфордском университете [76, 77] (результаты измерений характеристик течения в этом диффузоре, часто называемом “стэнфордским диффузором”, широко используются для валидации моделей турбулентности).



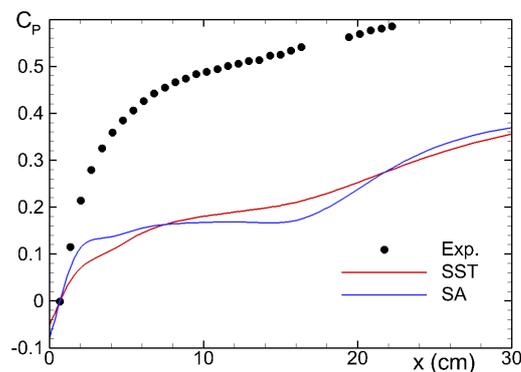
**Рисунок 2.19.** Схема асимметричного диффузора [76, 77]

В эксперименте вверх по потоку от диффузора расположен длинный канал прямоугольного сечения, так что течение на входе в диффузор является развитым. Число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости на входе  $U_b = 1$  м/с и высоте канала ( $H = 1$  см), равно  $10^4$ .

При расчете описанного течения с помощью SA и SST моделей полностью искажается структура потока: обе модели предсказывают обширный отрыв от боковой стенки диффузора, в то время как в эксперименте наблюдается отрыв от его верхней стенки (см. рис. 2.20). В результате, продольное распределение давления в диффузоре, рассчитанное с помощью линейных моделей, оказывается совершенно неверным (рис. 2.21).

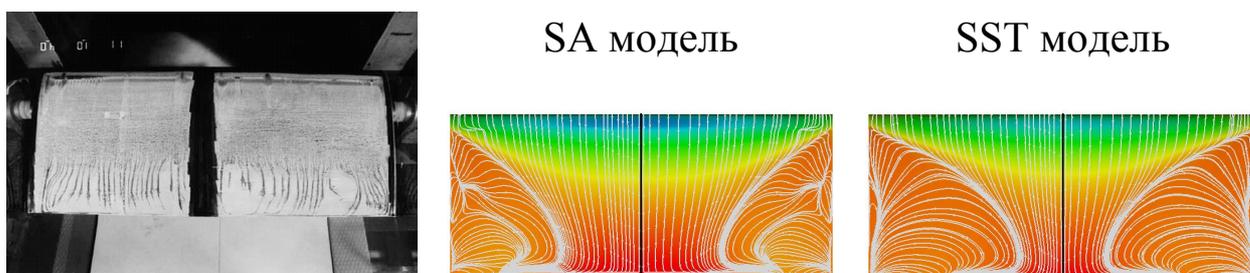


**Рисунок 2.20.** Сравнение расчетных полей продольной скорости и линий тока вторичного течения в асимметричном диффузоре в сечении  $x = 16$  см, полученных с помощью линейных SA и SST моделей, с экспериментальными данными [76, 77]

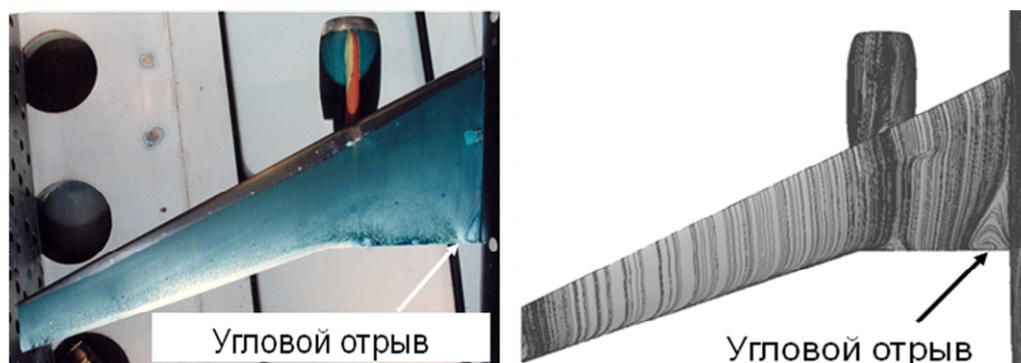


**Рисунок 2.21.** Сравнение расчетных распределений давления вдоль центральной линии ( $z = 16.65$  мм) стенки диффузора, полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными [76, 77]

Два другие примера, представленные на рис. 2.22 и 2.23, относятся к внешним задачам аэродинамики. Они наглядно иллюстрируют известный факт сильного завышения SA и SST моделями размеров отрывных зон, возникающих под воздействием неблагоприятного градиента давления в “двухгранных углах” (угол между поверхностью секции крыла и боковыми стенками аэродинамической трубы (рис. 2.22) и угол между поверхностями крыла и фюзеляжа самолета (рис. 2.23)). Это связано с уже отмечавшейся выше неспособностью линейных моделей предсказать развитие в двухгранных углах вторичных токов (см. рис. 2.17), “прижимающих” поток к обтекаемой поверхности и тем самым препятствующих отрыву.



**Рисунок 2.22.** Сравнение экспериментальных линий тока на поверхности аэродинамического профиля ONERA (A-airfoil) [78], полученных методом масляной пленки при угле атаки  $13^\circ$  (левая рамка), с расчетными линиями тока, полученными с использованием SA и SST моделей (направление потока – сверху вниз)



**Рисунок 2.23.** Обтекание модели самолета DLR-F6: экспериментальные и расчетные (модель SST) поверхностные линии тока [79]

Завершая данный раздел, отметим, что некоторые из продемонстрированных в нем дефектов SA и SST моделей могут быть в той или иной мере устранены путем введения поправок, рассмотренных в следующем разделе.

## 2.1.4. Модификации моделей SA-92 и SST-93

### 2.1.4.1. Поправки на кривизну линий тока и вращение потока

Хорошо известно [80], что кривизна линий тока и вращение потока оказывают существенное влияние на характеристики турбулентности и могут приводить как к ее существенной интенсификации, так и к подавлению. Эти эффекты, в принципе, автоматически описываются в рамках моделей переноса рейнольдсовых напряжений (см. раздел 2.2.1). В рамках же линейных моделей для их учета необходимо введение специальных поправок. Наиболее удачной из таких поправок является, по-видимому, поправка Спаларта-Шура [53], [54], учитывающая единую природу эффектов кривизны линий тока и вращения и применимая, вообще говоря, к любым линейным моделям.

Калибровка данной поправки, названной “Rotation-Curvature correction” (RC), была выполнена как для модели SA, так и для модели SST.

Соответствующая (при наличии поправки) версия первой из них получившей название SA RC модели [53], состоит в домножении генерационного члена  $P_v$  оригинальной SA модели (2.3) на эмпирическую функцию

$$f_{r1} = \frac{2r^*(1+C_{r1})}{1+r^*} [1 - C_{r3} \arctg(C_{r2}\tilde{r})] - C_{r1}, \quad (2.27)$$

которая зависит от двух параметров,  $r^*$  и  $\tilde{r}$ , являющихся мерой кривизны линий тока и вращения. Выражения для этих параметров имеют следующий вид:

$$r^* = \frac{S}{\Omega}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{r} = \frac{2\Omega_{ik}S_{jk}(DS/Dt)_{ij}}{D^4}. \quad (2.29)$$

Здесь через  $(DS/Dt)_{ij}$  обозначена соответствующая компонента полной (частной плюс конвективной) производной по времени от тензора скоростей деформаций, а величина  $D$  определяется соотношением

$$D^2 = (S^2 + \Omega^2)/2, \quad (2.30)$$

где

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Три дополнительные эмпирические константы SARC модели, входящие в (2.27), равны

$$C_{r1} = 1, \quad C_{r2} = 12, \quad C_{r3} = 1. \quad (2.31)$$

В работе [81] описанная поправка была адаптирована к SST модели. Соответствующая модификация (SST RC) исходной версии этой модели (2.15)-(2.24) заключается в умножении генерационного члена  $P_k$  в уравнениях для кинетической энергии турбулентности (2.15) и удельной диссипации (2.16) на функцию

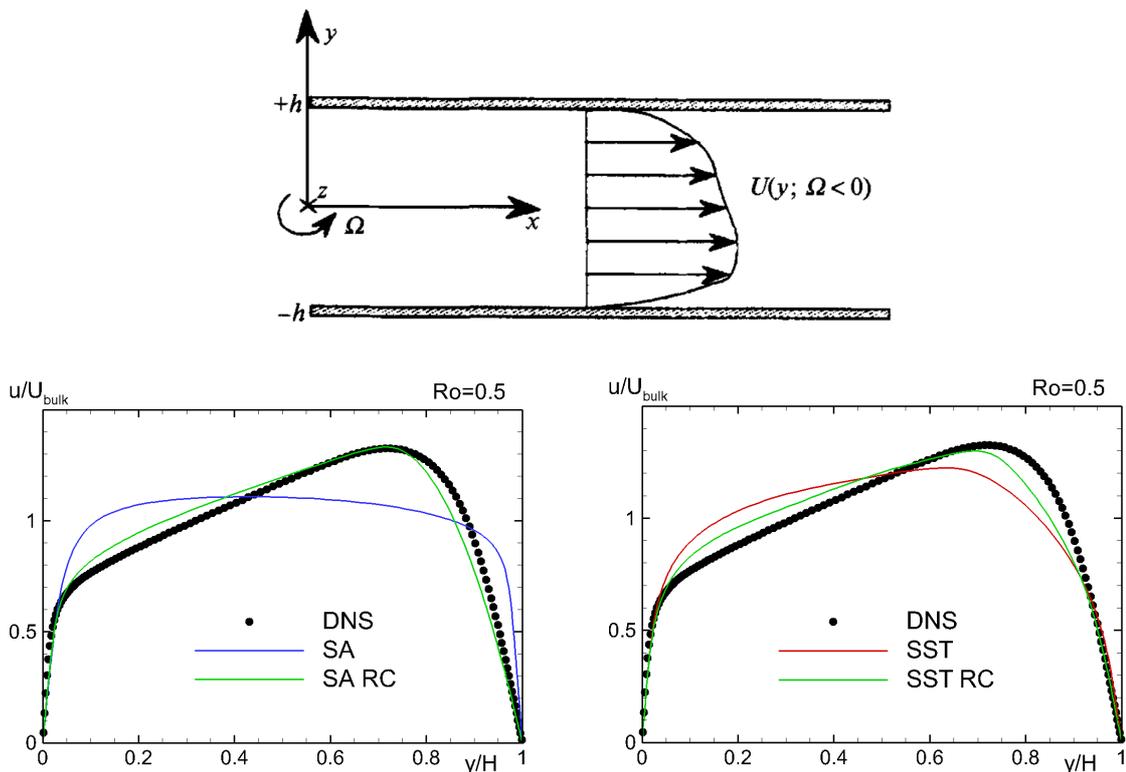
$$f_r = \max\{\min(f_{r1}, 1.25), 0\}. \quad (2.32)$$

Отметим, что в версии поправки, предназначенной для модели SST, выражение для параметра  $\tilde{r}$  (2.29) изменено на

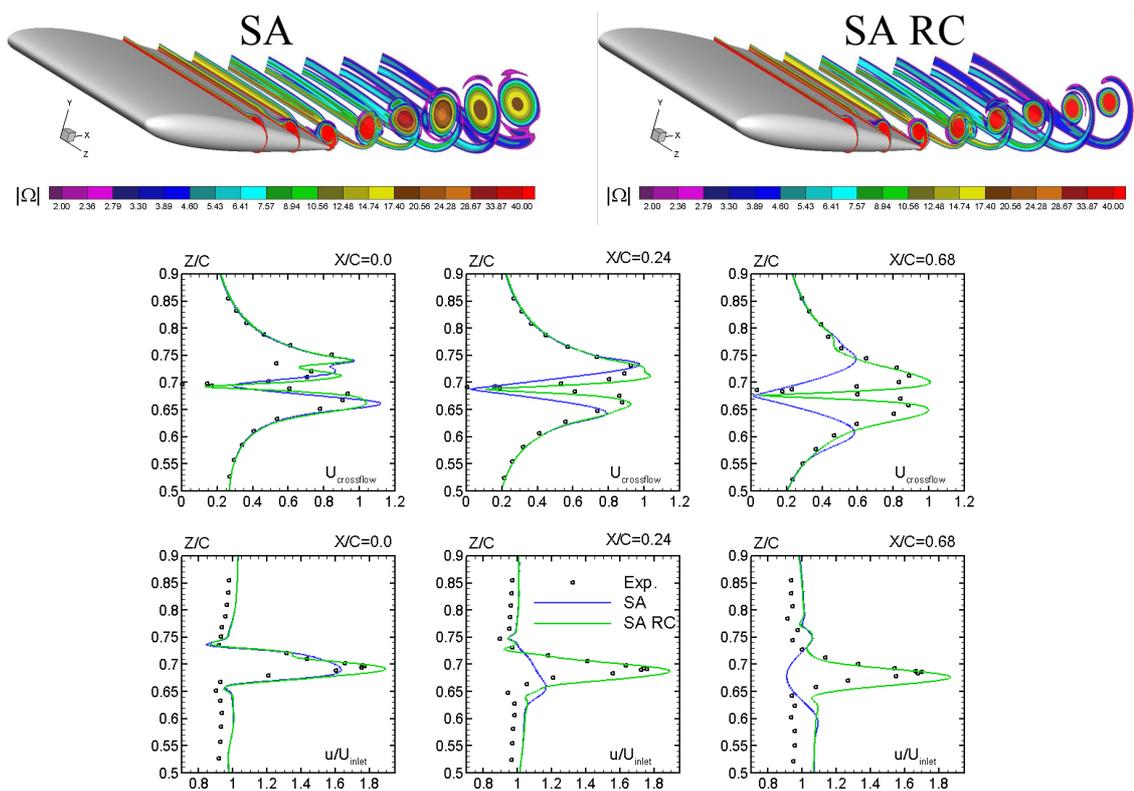
$$\tilde{r} = \frac{2\Omega_{ik}S_{jk}(DS/Dt)_{ij}}{\Omega[\max(S^2, 0.09\omega^2)]^{1.5}}, \quad (2.33)$$

а значение константы  $C_{r2} = 2$ .

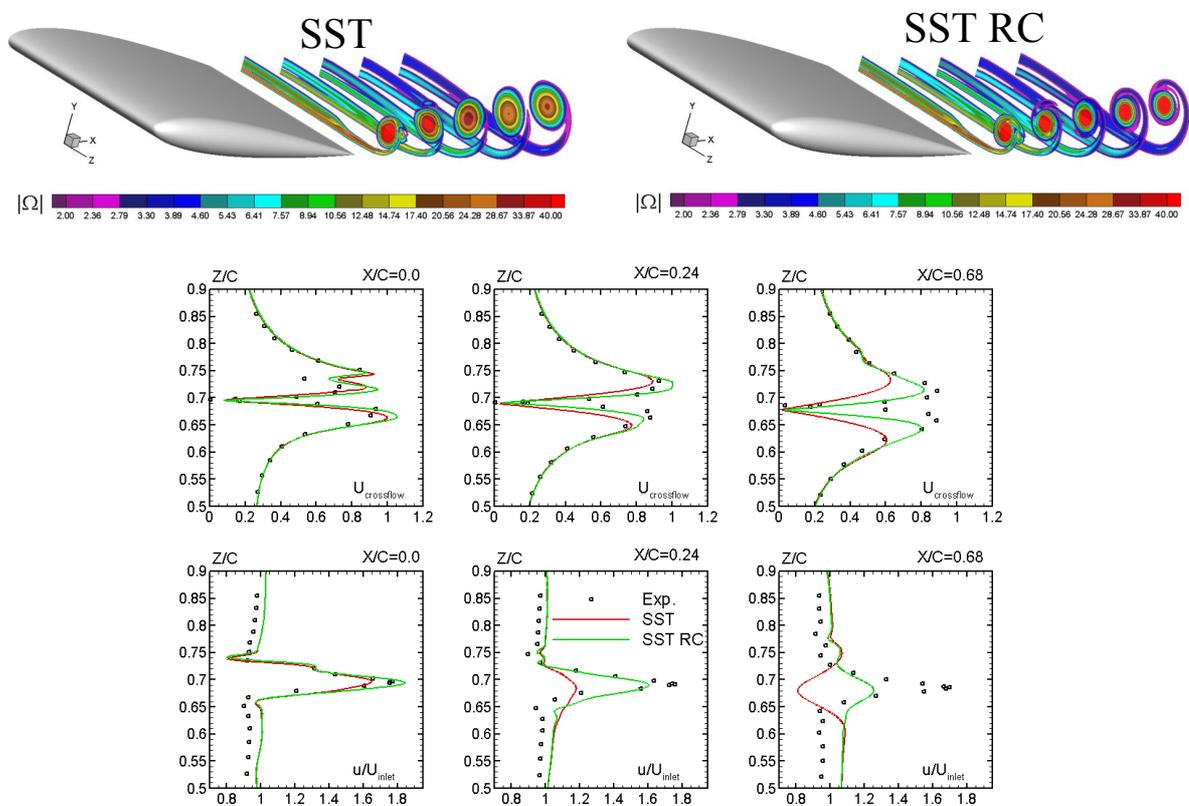
Убедительным свидетельством значительного повышения точности, достигаемого при использовании моделей SA RC и SST RC, по сравнению с оригинальными SA и SST моделями, являются результаты решения уже рассматривавшихся выше задач об установившемся течении во вращающемся канале и об обтекании крыла конечного размаха, представленные на рисунках 2.24-2.26.



**Рисунок 2.24.** Влияние поправки на кривизну и вращение для моделей SA и SST на результаты решения задачи об установившемся течении во вращающемся плоском канале. Схема течения (верхняя рамка) и сравнение профилей скорости, рассчитанных с использованием оригинальных SA и SST моделей, с аналогичными профилями, рассчитанными с помощью SA RC и SST RC моделей. Символы: результаты прямого численного моделирования [74]

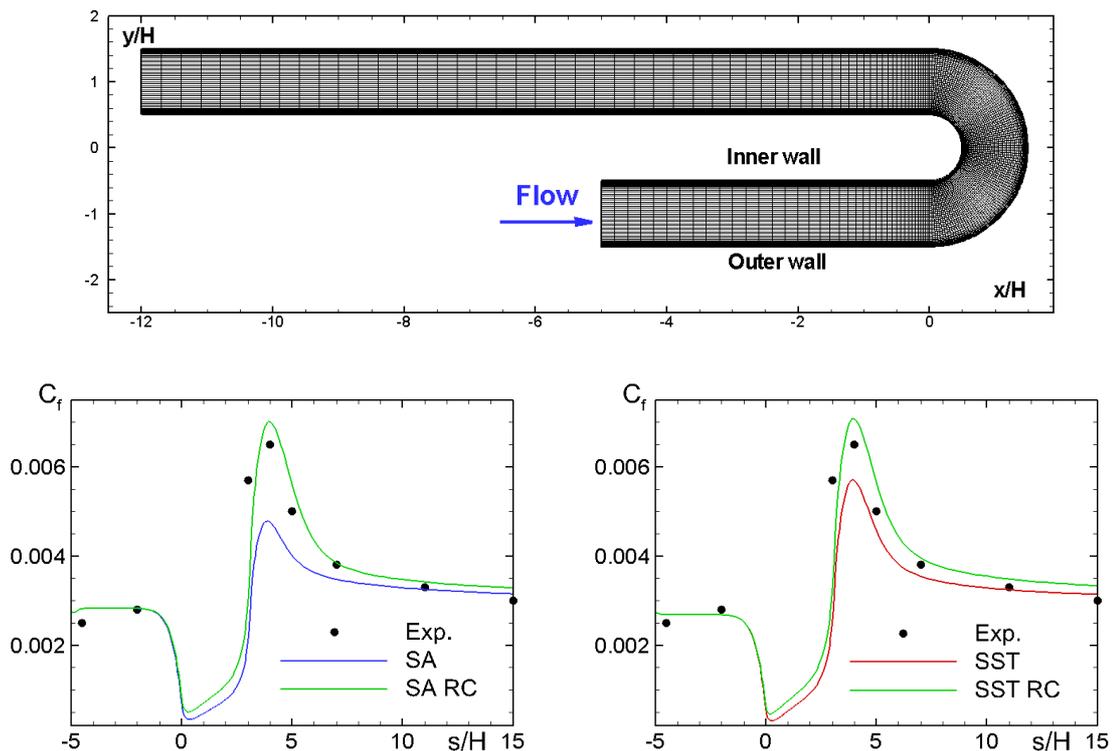


**Рисунок 2.25.** Влияние поправки на кривизну и вращение для модели SA на результаты расчета следа за крылом конечного размаха. Символы: экспериментальные данные [73]



**Рисунок 2.26.** То же, что и на рис. 2.25, для модели SST

Еще один пример применения SA RC и SST RC моделей, позволяющий судить об их точности при расчете течений с сильной кривизной линий тока, представлен на рисунке 2.27, на котором сравниваются с экспериментом результаты расчета распределения коэффициента трения вдоль внешней стенки U-образного канала, полученные с использованием исходных и модифицированных моделей SA и SST.



**Рисунок 2.27.** Схема U-образного канала с расчетной сеткой и сравнение расчетных распределений трения вдоль внешней стенки, рассчитанных с использованием моделей SA и SA RC (левая рамка) и SST и SST RC (правая рамка), с экспериментальными данными [82]

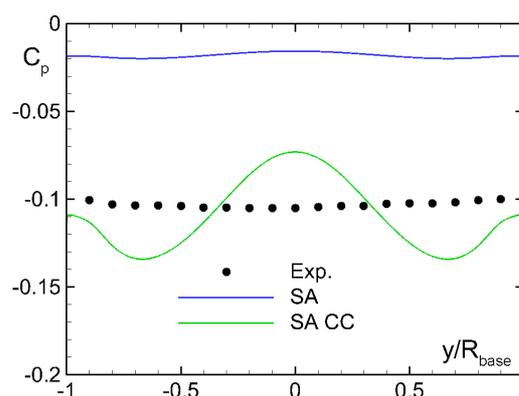
#### 2.1.4.2. Поправка к SA модели на сжимаемость потока (SACC)

Согласно так называемой гипотезе Морковина (см. [83]), при расчете пристеночных пограничных слоев непосредственное влияние сжимаемости на турбулентность начинает сказываться лишь тогда, когда среднеквадратичные пульсации плотности перестают быть малыми по сравнению со средней плотностью потока. Это происходит при числах Маха больше 5, а при меньших

числах Маха достаточным оказывается учет эффектов сжимаемости только через учет переменности плотности в уравнениях Рейнольдса. По этой причине оригинальная SA модель, предназначенная, главным образом, для расчета сравнительно низкоскоростных течений, не содержит каких-либо специальных членов, учитывающих влияние сжимаемости потока на характеристики турбулентности. Однако опыт показывает, что в некоторых течениях даже при не слишком высоких числах Маха эффекты сжимаемости все же могут оказывать существенное влияние на турбулентность (приводить к ее подавлению) и, тем самым, на важные характеристики осредненного течения. В связи с этим, в 2000 г. в SA модель была введена поправка на сжимаемость [55], аналогичная такой же поправке в модели А.Н. Секундова  $v_t$ -92 [84]. Она состоит во введении в правую часть уравнения (2.3) следующего дополнительного диссипативного слагаемого

$$D_{cc} = -C_5 \rho \frac{v_t^2 S^2}{a^2}, \quad (2.34)$$

где  $a$  – локальная скорость звука, а эмпирическая константа  $C_5 = 3.5$ .



**Рисунок 2.28.** Сравнение распределений давления по донному срезу при сверхзвуковом ( $M_\infty = 2.54$ ) продольном обтекании круглого цилиндра, рассчитанных с помощью оригинальной модели SA и модели SA с поправкой на сжимаемость (compressibility correction – SA CC модель [55]), с экспериментальными данными [85]

Характер влияния указанной поправки иллюстрирует рисунок 2.28, на котором представлены результаты расчетов сверхзвукового ( $M_\infty = 2.54$ ) продольного обтекания круглого цилиндра с плоским донным срезом. Из рисунка видно, что введение поправки на сжимаемость позволяет заметно повысить точность расчета уровня донного давления, который является наиболее важной с практической точки зрения характеристикой рассматриваемого течения.

#### 2.1.4.3. Поправка к SA модели на шероховатость поверхности

Хорошо известно, что при высоких числах Рейнольдса даже незначительная негладкость (“шероховатость”) поверхности обтекаемого тела существенно влияет на его сопротивление. Для учета этого эффекта в рамках SA модели турбулентности в работе [55] была предложена специальная поправка, опирающаяся на понятие так называемой эквивалентной “песочной” шероховатости, которая характеризуется единственным параметром – высотой шероховатости  $k_s$ . При этом степень влияния шероховатости на турбулентный пограничный слой определяется отношением  $k_s$  и линейного масштаба внутренней области пограничного слоя  $\nu / u_\tau$ , то есть безразмерным параметром [86]

$$k_s^+ = \frac{k_s u_\tau}{\nu}. \quad (2.35)$$

Это влияние становится заметным, когда высота шероховатости становится больше толщины вязкого подслоя, величина которой, выраженная в координатах внутренней области  $y^+ = y u_\tau / \nu$ , составляет около 10, то есть при  $k_s^+ > 10$ , и проявляется в уменьшении константы  $B$  в логарифмическом профиле скорости (“законе стенки”)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad (2.36)$$

где  $\kappa = 0.41$  – константа Кармана,  $u^+ = u/u_\tau$ ,  $y^+ = yu_\tau/\nu$  – безразмерные касательная скорость и расстояние до стенки, а стандартное значение  $B$ , используемое для калибровки большинства полуэмпирических моделей турбулентности, в том числе SA модели, равно 5.2.

В предложенной в [55] поправке учет шероховатости достигается путем замены стандартного для гадкой поверхности граничного условия для модифицированной турбулентной вязкости SA модели  $\tilde{v}_w = 0$  на следующее граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = \frac{\tilde{v}}{d}, \quad (2.37)$$

где  $n$  – нормаль к обтекаемой шероховатой поверхности в рассматриваемой точке, а  $d$  – модифицированное расстояние до стенки, определяемое как  $d = d_w + 0.03k_s$  и входящее вместо величины  $d_w$  во все соотношения SA модели.

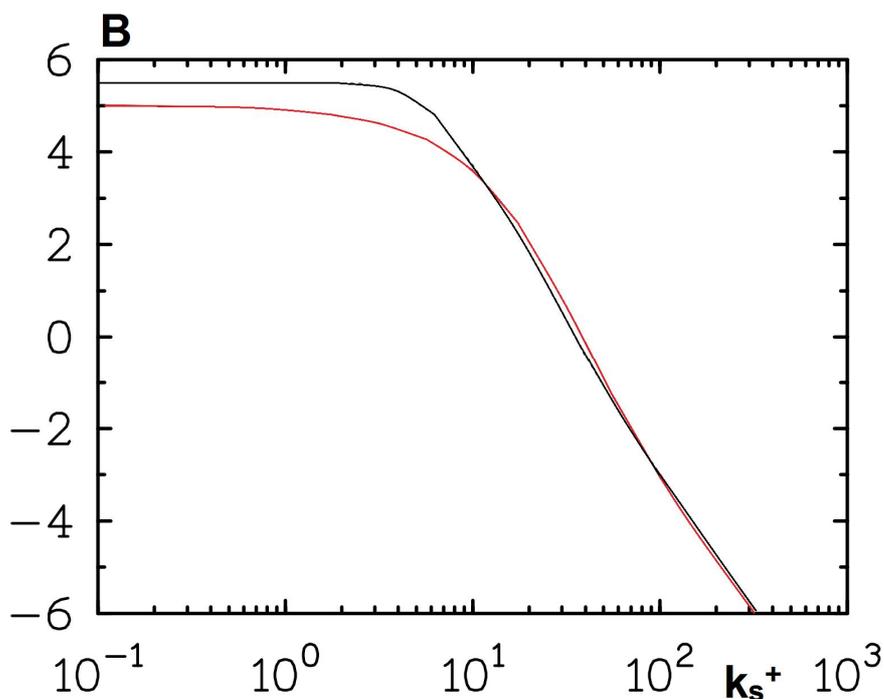
Кроме того, величина  $\chi$  (2.5) определяется как

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{\nu} + C_{r1} \frac{k_s}{d}, \quad C_{r1} = 0.5 \quad (2.38)$$

во всех формулах модели, за исключением выражения для функции  $f_{v2}$  (2.8), которое сохраняет свой стандартный вид

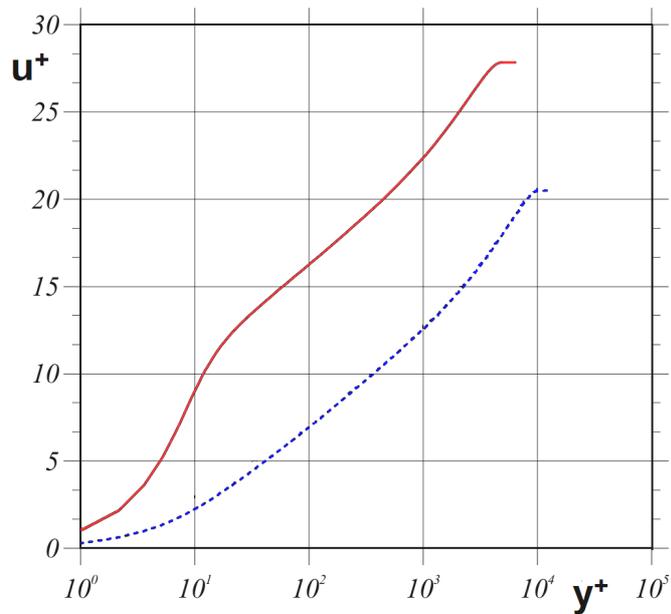
$$f_{v2} = 1 - \frac{\tilde{v}/\nu}{1 + f_{v1} \cdot \tilde{v}/\nu}. \quad (2.39)$$

Как видно из рис. 2.29, предложенная модификация модели обеспечивает достаточно хорошее соответствие сдвига  $B$  в логарифмическом законе экспериментальным данным.

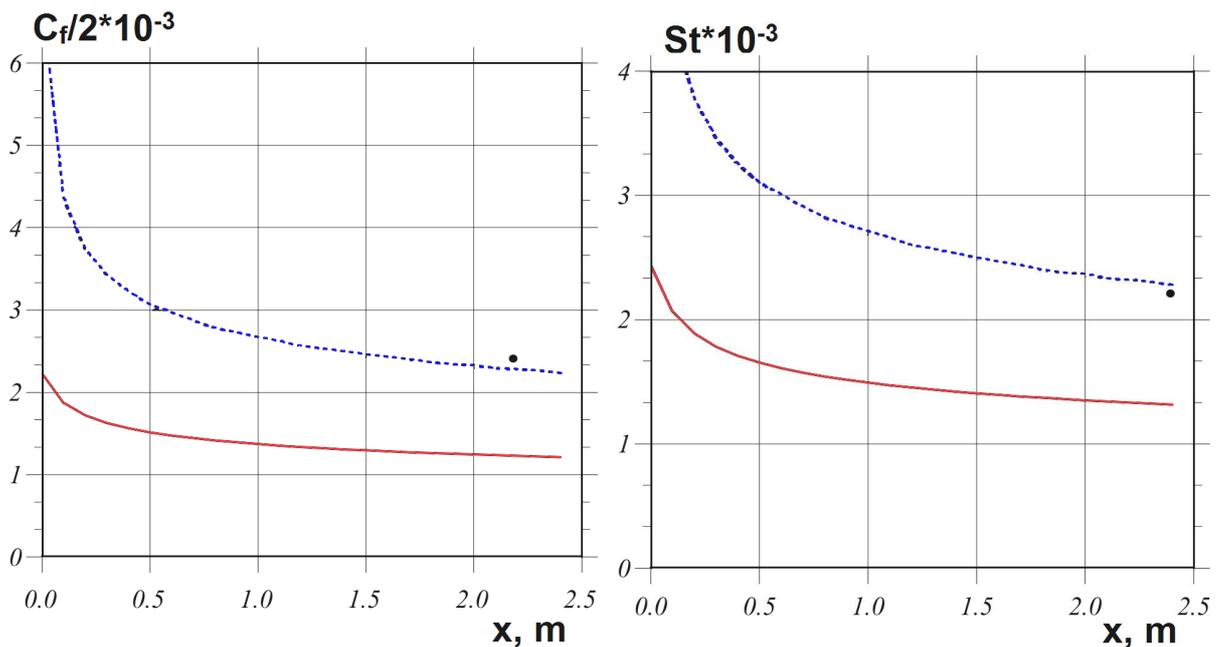


**Рисунок 2.29.** Полученная в [55] зависимость величины сдвига логарифмического профиля скорости от безразмерной высоты бугорков песочной шероховатости. Черная линия - эксперимент из [86], красная линия - аппроксимация для SA модели

Пример применения предложенной поправки к пограничному слою на плоской пластине с очень сильной шероховатостью ( $k_s^+ = 220$ ) приведен на рисунках 2.30 и 2.31. Как видно из этих рисунков, при использовании модифицированной модели логарифмический участок профиля скорости для шероховатой поверхности действительно оказывается существенно сдвинутым вниз относительно стандартного (предсказываемого для гладкой поверхности) уровня (рис. 2.30). Это, в свою очередь, обеспечивает радикальное улучшение согласования предсказываемых коэффициентов трения и теплообмена с экспериментальными данными (рис. 2.31).



**Рисунок 2.30.** Сравнение профилей скорости в пограничном слое на шероховатой пластине с  $k_s^+ = 220$ , полученных в [56] с использованием SA модели для гладкой поверхности (красная сплошная кивая) и SA модели с поправкой на шероховатость (синяя штриховая кивая)



**Рисунок 2.31.** Влияние поправки на шероховатость на продольные распределения коэффициента трения и числа Стэнтона. Черные точки: эксперимент [87]; остальные обозначения как на рис. 2.30

## 2.2. Нелинейные модели турбулентности

Данная категория моделей включает все модели, не опирающиеся на гипотезу Буссинеска. Эти модели можно условно разбить на две группы. В первую группу входят так называемые модели переноса рейнольдсовых напряжений (Reynolds Stress Transport Models - RSTM) или дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений, а во вторую – алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (Algebraic Reynolds Stress Models – ARSM) и нелинейные модели турбулентной вязкости (Non-Linear Eddy Viscosity Models – NLEVM).

В данном разделе описываются основные принципы построения нелинейных моделей, приводятся формулировки наиболее популярных из них и рассматриваются примеры расчетов, иллюстрирующие их возможности.

### 2.2.1. Модели переноса рейнольдсовых напряжений

Модели этой группы представляют собой наиболее общую форму нелинейных моделей и включают уравнения переноса всех независимых элементов тензора рейнольдсовых напряжений и уравнение переноса какой-либо величины, позволяющей при известном значении кинетической энергии турбулентности  $k$  определить масштаб турбулентности (как правило, это уравнение величин скорости или удельной скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  или  $\omega$ ).

В силу фундаментальных причин, подробно рассмотренных в главе 1, большие надежды, первоначально возлагавшиеся на RSTM, нельзя считать вполне оправдавшимися. Тем не менее, лучшие из известных моделей такого типа позволяют успешно рассчитывать многие сложные турбулентные течения, для которых линейные модели турбулентной вязкости или априори

неприменимы, или приводят к неприемлемо высоким погрешностям.

Как уже отмечалось в разделе 1.1, уравнения переноса рейнольдсовых напряжений могут быть формально выведены из уравнений Навье-Стокса с использованием стандартных правил осреднения по Рейнольдсу и собственно уравнений Рейнольдса (см., например, [88]). В случае несжимаемой жидкости полученные в результате уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + D_{ijk} \right) + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \quad (2.40)$$

Слагаемые, входящие в правую часть уравнения (2.40), описывают соответственно турбулентную диффузию рейнольдсовых напряжений ( $D_{ijk}$ ), их генерацию ( $P_{ij}$ ), порождение или диссипацию за счет корреляции пульсаций давления и тензора скоростей деформаций ( $\Phi_{ij}$ ) и вязкую диссипацию  $\varepsilon_{ij}$ . Они определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_{ijk} &= -\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} - \delta_{ik} \overline{u'_j p'} - \delta_{jk} \overline{u'_i p'}, \\ P_{ij} &= -\overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \\ \Phi_{ij} &= \overline{p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}, \\ \varepsilon_{ij} &= 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

В силу симметричности тензора рейнольдсовых напряжений, достаточно записать шесть таких уравнений для трех нормальных

и трех касательных компонент этого тензора, а именно для  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$  и  $\overline{v'w'}$ .

Уравнения (2.40), (2.41) являются столь же строгими, как и сами уравнения Рейнольдса, однако, так же, как и эти уравнения, они незамкнуты, так как наряду с напряжениями Рейнольдса, в выражения для  $D_{ijk}$ ,  $\Phi_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  (2.41) входят неизвестные двойные и тройные корреляции, включающие пульсаций давления, скорости и ее производных. Таким образом, для получения замкнутой RSTM необходимо каким-либо образом определить связь этих слагаемых с параметрами осредненного течения и компонентами тензора рейнольдсовых напряжений.

При построении таких соотношений возникает ряд физических проблем, а при практическом использовании RSTM – ряд вычислительных трудностей.

К числу наиболее серьезных физических проблем относится необходимость моделирования большого числа членов, входящих в правые части уравнений RSTM. Это приводит к появлению в RSTM большого числа эмпирических констант, калибровка которых, то есть определение оптимальных значений на основе сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными, является чрезвычайно сложной и трудоемкой задачей, решение которой неизбежно включает определенные компромиссы. В связи с этим, многие модели такого типа оказываются достаточно успешными при расчете тех или иных сложных течений и, в то же время, уступают по точности несопоставимо более простым линейным моделям турбулентной вязкости при расчете других, относительно простых сдвиговых течений. Например, ошибка в расчете трения в пограничном слое на плоской пластине при использовании некоторых RSTM может достигать 10%-15%. По той же причине эти модели не всегда обеспечивают достаточно точное описание ряда эффектов, которые, в принципе, должны

учитываться ими автоматически. К их числу относятся, например, эффекты кривизны линий тока и вращения потока. В результате, при расчете течений, в которых эти эффекты играют существенную роль, в некоторые RSTM, так же, как и в линейные модели турбулентной вязкости, приходится вводить специальные поправки (см., например, [89]).

Вычислительные трудности, возникающие при практическом применении RSTM, связаны с их громоздкостью (7 дифференциальных уравнений переноса при расчете изотермических и 10 – при расчете неизотермических течений) и сильной нелинейностью. В результате, для проведения расчетов с помощью этих моделей требуется применение специальных трудоемких вычислительных алгоритмов, обеспечивающих итерационную сходимость решения (например, применение векторных прогонок в сочетании с использованием релаксационных процедур), и значительные большие вычислительные ресурсы, чем при использовании линейных моделей.

Указанные проблемы привели к тому, что на практике RSTM используются пока относительно редко, в связи с чем их реальные возможности исследованы в значительно меньшей степени, чем возможности линейных моделей турбулентной вязкости, рассмотренных в предыдущем разделе. С учетом этого, ниже более подробно рассмотрена лишь одна RSTM, а именно модель [90], разработанная в рамках проекта Европейского союза FLOMANIA [9]. Эта модель представляет собой комбинацию модели Speziale–Sarkar–Gatski (SSG модель) [91] в пристеночной области течения и модели Launder–Reese–Rodi (LRR модель) [92] во внешней части потока<sup>8</sup> и, судя по имеющимся в литературе данным

---

<sup>8</sup> В этом смысле SSG/LRR RSTM [90] аналогична модели SST Менгера (раздел 2.1.2).

(см., например, [6]), является на сегодняшний день одной из лучших, если не лучшей моделью данного класса.

Величины  $D_{ijk}$  и  $\Phi_{ij}$ , входящие в правую часть (2.40), определяются в этой модели следующим образом:

$$D_{ijk} = \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}, \quad (2.42)$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2}, \quad (2.43)$$

$$\Phi_{ij,1} = -\rho\varepsilon[(C_1 + C_1^* P_k / \rho\varepsilon)a_{ij} + C_2(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}A_2\delta_{ij})], \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,2} = \rho k[(C_3 - C_3^* \sqrt{A_2})S_{ij} + C_4(a_{ik}S_{kj} + S_{ik}a_{kj} - \frac{2}{3}a_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) + \\ + C_5(a_{ik}\Omega_{kj} + \Omega_{ik}a_{kj})]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

В соотношениях (2.42) - (2.45), наряду с определенными ранее компонентами тензоров скоростей деформаций  $S_{ij}$  и завихренности  $\Omega_{ij}$ , введены тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений  $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - \frac{2}{3}\delta_{ij}$  и инвариант этого тензора  $A_2 = a_{ij}a_{ji}$ , а также величина генерации кинетической энергии турбулентности  $P_k = P_{ii} / 2$ .

Кроме того, в RSTM [90] используется допущение об изотропности тензора скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon_{ij}$ , входящего в уравнение (2.40), то есть предполагается, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho\varepsilon, \quad (2.46)$$

где  $\varepsilon$  представляет собой изотропную скорость диссипации кинетической энергии турбулентности и рассчитывается по формуле  $\varepsilon = C_\mu k\omega$ , в которой величина удельной скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\omega$  находится из решения следующего уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k \omega}{\partial x_k} = \alpha_{\omega} \rho \frac{\omega}{k} P_k - \beta_{\omega} \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu + \sigma_{\omega} \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \\ + \frac{\sigma_d \rho}{\omega} \max \left( \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Наконец, эмпирические константы модели определяются аналогично тому, как это делается в рамках SST модели Ментера (см. раздел 2.1.2), то есть через константы, соответствующие  $\varepsilon$  и  $\omega$  ветвям модели, с помощью эмпирической “весовой” функции  $F_1$ :

$$\phi = F_1 \phi_{(\omega)} + (1 - F_1) \phi_{(\varepsilon)}, \quad (2.48)$$

где

$$\phi = \left\{ \alpha_{\omega}, \beta_{\omega}, \sigma_{\omega}, \sigma_d, C_1, C_1^*, C_2, C_3^*, C_4, C_5, D \right\}, \quad (2.49)$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4),$$

$$\arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{C_{\mu} \omega d_w}, \frac{500 \mu}{\rho d_w^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega(\varepsilon)} k}{\sigma_{d(\varepsilon)} d_w^2 \frac{\rho}{\omega} \max \left( \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0 \right)} \right]. \quad (2.50)$$

Константы, соответствующие  $\varepsilon$  и  $\omega$  ветвям модели, равны:

$$\alpha_{\omega(\omega)} = 0.5556, \quad \alpha_{\omega(\varepsilon)} = 0.44,$$

$$\beta_{\omega(\omega)} = 0.075, \quad \alpha_{\omega(\varepsilon)} = 0.0828,$$

$$\sigma_{\omega(\omega)} = 0.5, \quad \sigma_{\omega(\varepsilon)} = 0.856,$$

$$\sigma_{d(\omega)} = 0, \quad \sigma_{d(\varepsilon)} = 1.712,$$

$$C_{1(\omega)} = 1.8, \quad C_{1(\varepsilon)} = 1.7,$$

$$C_{1(\omega)}^* = 0, \quad C_{1(\varepsilon)}^* = 0.9,$$

$$\begin{aligned}
C_{2(\omega)} &= 0, C_{2(\varepsilon)} = 1.05, \\
C_{3(\omega)}^* &= 0, C_{3(\varepsilon)}^* = 0.65, \\
C_{4(\omega)} &= (9c_2^{LRR} + 6)/11, C_{4(\varepsilon)} = 0.625, \\
C_{5(\omega)} &= (-7c_2^{LRR} + 10)/11, C_{5(\varepsilon)} = 0.2, \\
D_{(\omega)} &= 0.75C_\mu, D_{(\varepsilon)} = 0.22,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

а остальные константы модели определяются следующим образом

$$C_\mu = 0.09, C_3 = 0.8, c_2^{LRR} = 0.52. \tag{2.52}$$

### 2.2.2 Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений и нелинейные модели турбулентной вязкости

Отмеченные выше недостатки RSTM, главными из которых являются сложность их калибровки и вычислительная трудоемкость, мотивировали поиск путей их упрощения. Это привело к созданию моделей, в которых дифференциальные уравнения переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса заменяются на алгебраические (вообще говоря, трансцендентные) уравнения, связывающие эти компоненты в каждой точке потока. Такие модели получили название алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений (Algebraic Reynolds Stress Models – ARSM).

Первые модели этой группы были основаны на гипотезе локального равновесия, то есть равенства генерационных и диссипативных членов в уравнениях переноса рейнольдсовых напряжений:  $(P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) = 0$ . Однако это предположение является очень грубым, и не выполняется в большинстве течений, представляющих практический интерес. Более обоснованными являются ARSM, базирующиеся на гипотезе Роди [93] о пропорциональности членов, описывающих конвекцию

и диффузию напряжений Рейнольдса<sup>9</sup>, следствием которой является пропорциональность генерации и диссипации турбулентных напряжений соответствующим величинам для кинетической энергии турбулентности

$$\begin{aligned}
 P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial(\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + D_{ijk} \right) \cong \\
 &\cong \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \left( \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial x_k} + D_k \right) \right) = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k - \varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{2.53}$$

С использованием соотношения (2.53) из любой модели переноса рейнольдсовых напряжений (RSTM) можно получить соответствующую алгебраическую модель (ARSM), которая представляет собой совокупность шести трансцендентных уравнений относительно напряжений Рейнольдса, дополненных уравнениями переноса  $k$  и  $\varepsilon$ ,  $k$  и  $\omega$  или их комбинаций, аналогичных уравнениям, используемым в линейных моделях турбулентной вязкости (см. раздел 2.1). Эти уравнения принято называть “базой” или “платформой” ARSM.

Следует отметить однако, что модели этой группы не нашли сколько-нибудь заметного практического применения, так как решение системы трансцендентных алгебраических уравнений является далеко не тривиальной задачей. В частности, такая система может вообще не иметь действительных решений или иметь несколько таких решений, что может приводить к трудностям при отыскании решения, имеющего физический смысл.

---

<sup>9</sup> Следует отметить, что эта гипотеза также не имеет теоретического обоснования [4].

Гораздо более широкое применение получили так называемые явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (Explicit Algebraic Stress Models – EARSМ), то есть модели, в которых тем или иным способом получены явные алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и характеристиками осредненного течения. Одна из возможных методологий построения EARSМ, получившая достаточно широкое распространение, была предложена в известной работе Поупа (S. Pope) [94]. Она базируется на предположении о том, что напряжения Рейнольдса зависят только от компонент тензора градиента скорости  $\partial u_i / \partial x_j$ , который представляет собой сумму симметричного тензора скоростей деформаций  $S_{ij}$  и антисимметричного тензора завихренности  $\Omega_{ij}$ . В этом случае тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений  $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - \frac{2}{3} \delta_{ij}$  может быть представлен в форме линейной комбинации 10 симметричных девиаторных тензорных групп, зависящих только от тензоров  $S_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^{10} \beta_n T_{n,ij} . \quad (2.54)$$

Входящие в (2.54) коэффициенты  $\beta_n$  являются функциями пяти тензорных инвариантов

$$\begin{aligned} II_S &= S_{kl} S_{lk} , \\ II_\Omega &= \Omega_{kl} \Omega_{lk} , \\ III &= S_{kl} S_{lm} S_{mk} , \\ IV &= S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mk} , \\ V &= S_{kr} S_{rl} \Omega_{lm} \Omega_{mk} , \end{aligned} \quad (2.55)$$

а тензоры  $T_{n,ij}$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
T_{1,ij} &= S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}, \\
T_{2,ij} &= S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} I_S \delta_{ij}, \\
T_{3,ij} &= \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} I_\Omega \delta_{ij}, \\
T_{4,ij} &= S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}, \\
T_{5,ij} &= S_{ik} S_{kl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} S_{kl} S_{lj}, \\
T_{6,ij} &= S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} + \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} - \frac{2}{3} IV \delta_{ij}, \\
T_{7,ij} &= S_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} \Omega_{lj} + \Omega_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} S_{lj} - \frac{2}{3} V \delta_{ij}, \\
T_{8,ij} &= S_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} S_{lj} - S_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} S_{lj}, \\
T_{9,ij} &= \Omega_{ik} S_{kr} \Omega_{rl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{kr} S_{rl} \Omega_{lj}, \\
T_{10,ij} &= \Omega_{ik} S_{kr} S_{rm} \Omega_{ml} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{kr} S_{ml} S_{ml} \Omega_{lj}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Полученные на этой основе различные EARSМ модели отличаются между собой количеством ненулевых коэффициентов  $\beta_n$  в (2.54), а также максимальным показателем степени производных скорости, входящих в тензорные группы. Увеличение количества ненулевых членов, в принципе, повышает точность модели. Однако при этом значительно усложняется ее калибровка, что может свести на нет потенциальное повышение точности, а также увеличивается вычислительная трудоемкость модели.

Альтернативный подход к построению EARSМ состоит в использовании для этой цели RSTM и некоторых дополнительных предположений. Одной из наиболее удачных моделей такого типа является модификация явной алгебраической модели Валлина-Йохансона (S. Wallin, A. Johansson) [95], предложенная в работе [79]. Как и оригинальная модель [95], она получена на основе

RSTM LRR [92], но, в отличие от модели [95], которая применялась в сочетании с  $k - \omega$  моделью Уилкокса [60] в качестве платформы, модель [79] использует для этой цели  $k - \omega$  BSL модель Менстера [49].

В рамках модели [79] (WJ BSL EARSM) явное выражение, связывающее тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений с кинематическими характеристиками осредненного течения, имеет вид:

$$a_{ij} \equiv \overline{u'_i u'_j} / k - \frac{2}{3} \delta_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij}. \quad (2.57)$$

Коэффициенты  $\beta_i$  в (2.57) рассчитываются по формулам

$$\beta_1 = -\frac{N}{Q}, \quad \beta_3 = -\frac{2IV}{NQ_1}, \quad \beta_4 = -\frac{1}{Q}, \quad \beta_6 = -\frac{N}{Q_1}, \quad (2.58)$$

где

$$Q = (N^2 - 2\Pi_\Omega) / A_1, \quad Q_1 = Q(2N^2 - \Pi_\Omega) / 6,$$

а  $N$  – корень кубического уравнения

$$N^3 - C'_1 N^2 - (2.7 \cdot \Pi_S + 2 \cdot \Pi_\Omega) N + 2C'_1 \Pi_\Omega = 0, \quad (2.59)$$

аналитическое решение которого имеет вид

$$\begin{cases} N = \frac{C'_1}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 - \sqrt{P_2}|^{1/3}, & P_2 \geq 0, \\ N = \frac{C'_1}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right), & P_2 < 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

$$P_1 = \left( \frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20} \Pi_S - \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right) C'_1, \quad (2.61)$$

$$P_2 = P_1^2 - \left( \frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10} \Pi_S + \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right)^3.$$

Эмпирические константы модели равны:

$$A_1 = 1.245, C_1' = \frac{9}{4}(C_1 - 1), C_1 = 1.8. \quad (2.62)$$

Используемая в качестве платформы WJ BSL модели  $k - \omega$  BSL модель Менгера [49] имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} k) = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k] + P_k - \beta^* \rho \omega k, \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \omega) = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + \\ + (1 - F_1) D_{k\omega}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где генерационный член  $P_k$  и перекрестная диффузия  $D_{k\omega}$  определяются соотношениями  $P_k = \min(-\overline{u_i' u_j'} \partial u_i / \partial x_j, 10 \beta^* k \omega)$  и  $D_{k\omega} = 2 \rho \sigma_{\omega 2} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega) / \omega$ , а эмпирические константы, как и в модели SST (2.15), рассчитываются как линейная комбинация соответствующих констант  $k$ - $\varepsilon$  (индекс “1”) и  $k$ - $\omega$  (индекс “2”) ветвей BSL модели [49]:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \\ \sigma_\omega &= F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\beta = F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075, \\ \sigma_{k2} &= 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Весовая функция  $F_1$  в (2.65) определяется по формуле

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d_w}, \frac{500 \nu}{d_w^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d_w^2} \right], \quad (2.67)$$

где  $CD_{k\omega} = \max\{D_{k\omega}, 10^{-20}\}$ , а остальные константы равны

$$\beta^* = 0.09, \kappa = 0.41, \gamma = \beta / \beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \quad (2.68)$$

Достаточно большой опыт практического применения модели WJ BSL [79], накопленный к настоящему времени, свидетельствует о том, что при расчете простых сдвиговых течений она сопоставима по точности с линейной моделью SST. В то же время, она позволяет с приемлемой точностью рассчитать ряд более сложных течений, в которых существенную роль играет анизотропия рейнольдсовых напряжений (ряд иллюстрирующих это примеров представлен в разделе 2.2.3).

Еще одна группа нелинейных моделей, получивших название нелинейных моделей турбулентной вязкости (Non-linear Eddy Viscosity Models – NLEVM), тесно примыкает к EARSM, но, в отличие от них, не опирается на разложение (2.54) или на ARSM. Различие между NLEVM и EARSM состоит только в способе определения коэффициентов перед соответствующими тензорными группами: в EARSM выражения для них “выводятся”, а в NLEVM определяются эмпирически. Однако это различие является непринципиальным, так как при “выводе” этих выражений используются допущения, не вытекающие из каких-либо теоретических соображений, что делает их, по существу, также эмпирическими.

В качестве примера приведем так называемую модель с квадратичными замыкающими соотношениями (Quadratic Constitutive Relations или QCR) [45], которая достаточно широко используется в последние годы.

В рамках этой модели для определения компонентов тензора рейнольдсовых напряжений используются следующие соотношения:

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu_t S_{ij} + 2\nu_t C_{cr1} (O_{ik} S_{jk} + O_{jk} S_{ik}), \quad (2.69)$$

где через  $O_{ik}$  обозначены нормированные компоненты тензора завихренности

$$O_{ik} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) / \sqrt{\frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U_n}{\partial x_m}}, \quad (2.70)$$

а  $\nu_t$  - турбулентная вязкость, рассчитанная по какой-либо линейной модели. При этом эмпирическая константа  $C_{cr1}$  подбирается так, чтобы обеспечить правильное соотношение между нормальными напряжениями  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  и  $\overline{w'^2}$  во внешней области пограничного слоя. Для нелинейной версии модели SA [45] (SA QCR модель) подобранное таким образом значение этой константы оказывается равным 0.3.

Заметим, что соотношение (2.69) можно представить в форме

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu_t S_{ij} - C_{cr1} \frac{4\nu_t}{\sqrt{(S^2 + \Omega^2)}/2} (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}), \quad (2.71)$$

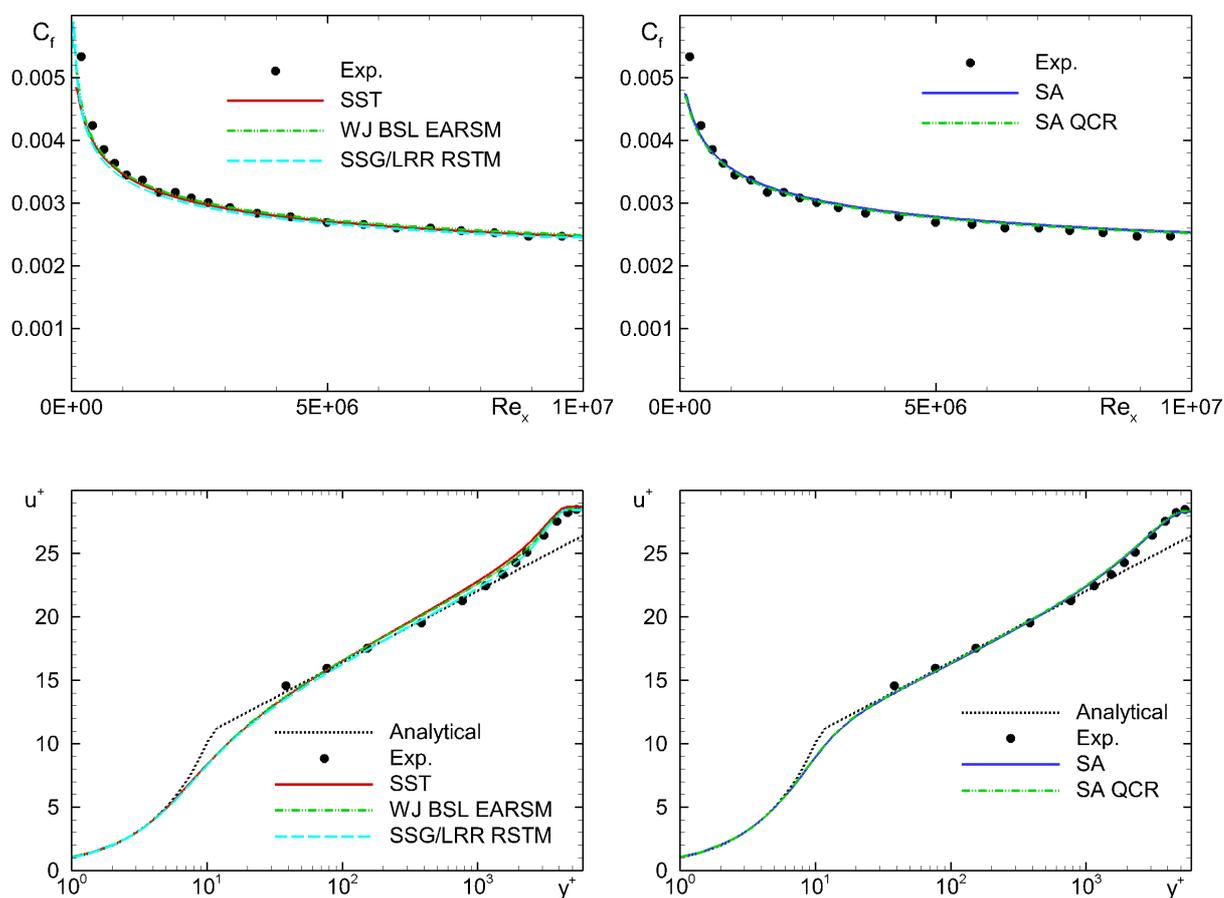
где величины  $S$  и  $\Omega$  представляют собой модули тензоров деформации и завихренности:  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ,  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ . Такая форма записи QCR ясно показывает, что эта модель представляет собой частный случай общей формы записи EARSM (2.54), в которой содержится лишь одно нелинейное (квадратичное) слагаемое (именно это обстоятельство определило название модели).

Несмотря на простоту формулировки, эта модель оказывается весьма точной (см. полученные с ее помощью результаты решения тестовых задач, представленные в разделе 2.2.3).

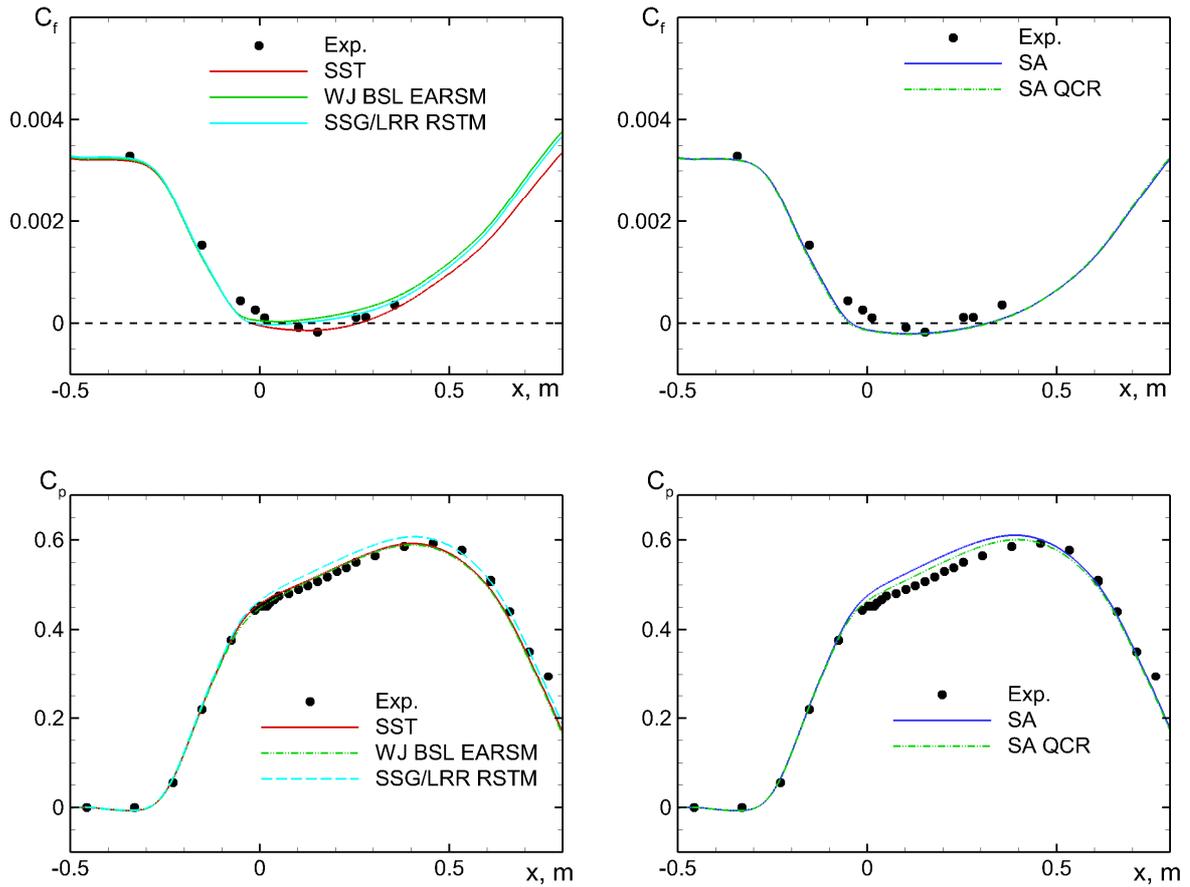
### 2.2.3. Примеры, иллюстрирующие возможности нелинейных моделей турбулентности

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности нелинейных моделей различных типов.

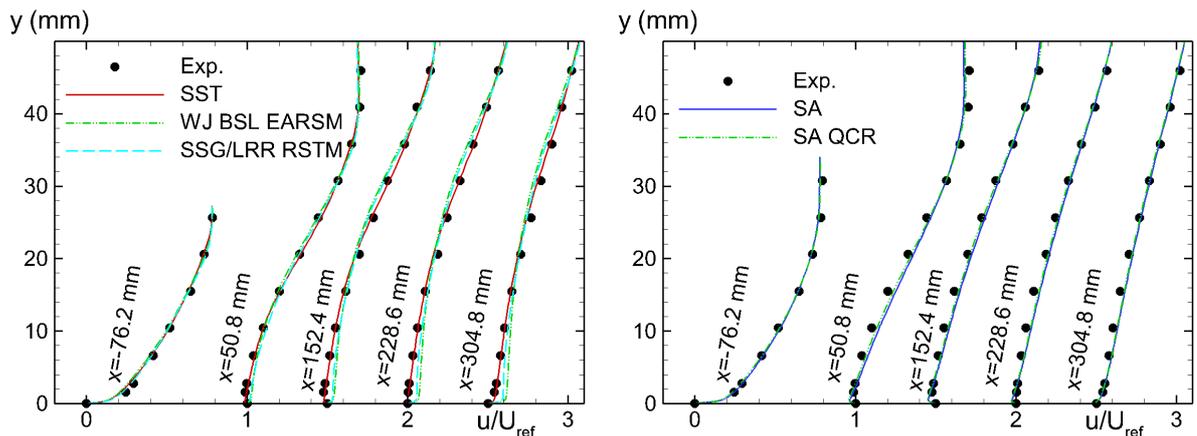
На рисунках 2.32-2.35 представлены результаты, полученные с использованием SSG/LRR RSTM [90], WJ BSL EARSM [79] и SA QCR [45] при расчете некоторых относительно "простых" течений, то есть течений, для которых линейные модели SA и SST обеспечивают вполне приемлемую точность. Из этих рисунков следует, что при расчете всех этих течений указанные нелинейные модели обеспечивают точность расчета, близкую к точности лучших линейных моделей.



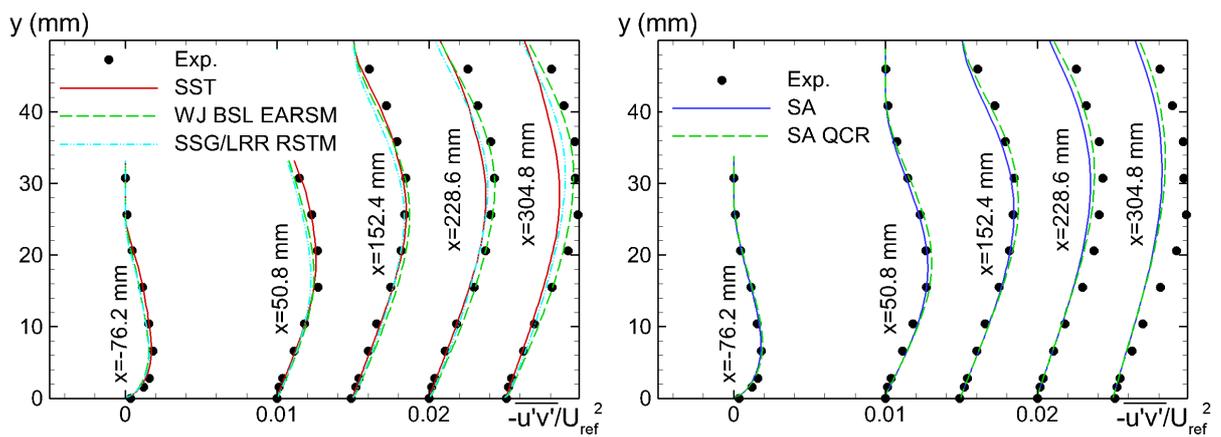
**Рисунок 2.32.** Сравнение результатов расчета коэффициента трения и профиля скорости в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, полученных с использованием различных нелинейных моделей, с результатами линейных моделей и экспериментальными данными [65]



**Рисунок 2.33.** Сравнение результатов расчета коэффициентов трения и давления в осесимметричном диффузоре, полученных с использованием различных нелинейных моделей, с результатами линейных моделей и экспериментальными данными [96]



**Рисунок 2.34.** Сравнение результатов расчета профилей скорости в осесимметричном диффузоре, полученных с использованием различных нелинейных моделей, с результатами линейных моделей и экспериментальными данными [96]

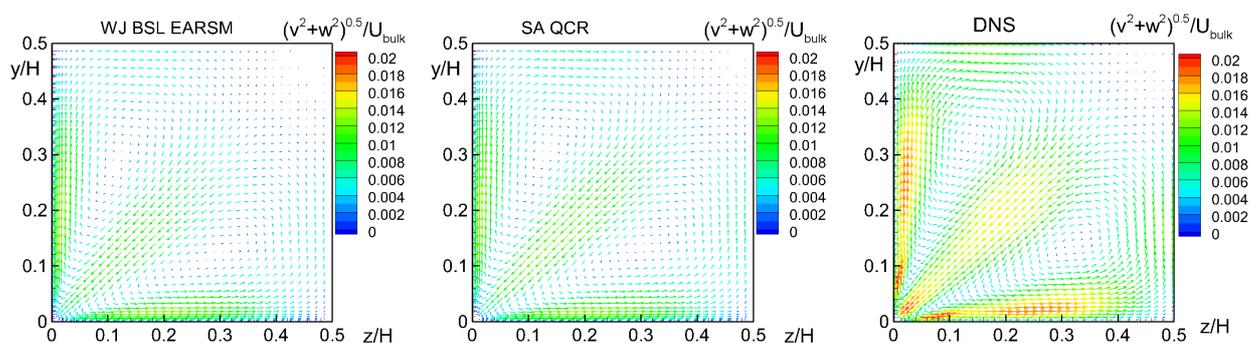


**Рисунок 2.35.** Сравнение результатов расчета профилей касательных напряжений в осесимметричном диффузоре, полученных с использованием различных нелинейных моделей, с результатами линейных моделей и экспериментальными данными [96]

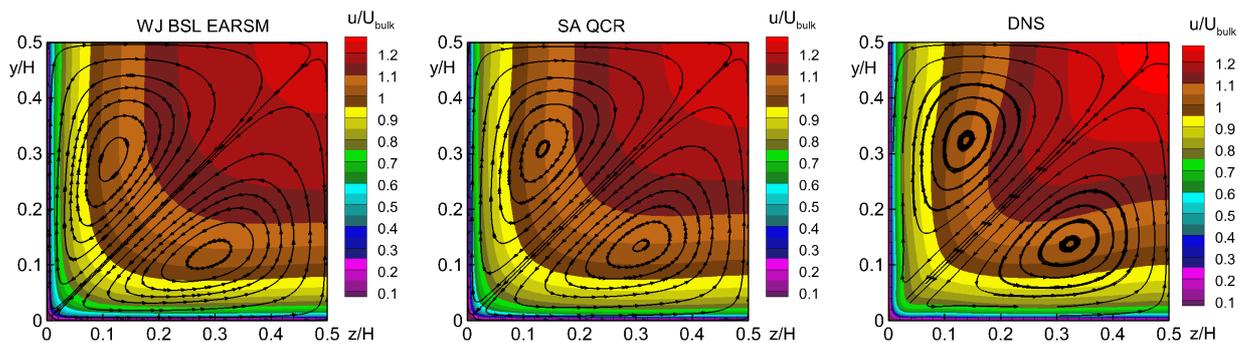
Вместе с тем, при расчете более сложных течений нелинейные модели значительно превосходят линейные. Прежде всего, их преимущество проявляется, естественно, в тех случаях, когда игнорирование анизотропии нормальных рейнольдсовых напряжений по тем или иным причинам является недопустимым. Как уже отмечалось, классическим примером таких течений являются течения в окрестности двухгранных углов, в которых вследствие этой анизотропии возникают так называемые “вторичные токи”, то есть движение в плоскостях, перпендикулярных направлению основного потока. Результаты расчетов некоторых внутренних течений такого типа, полученные с использованием линейных и нелинейных моделей турбулентности, показаны на рис. 2.36-2.45.

В частности, на рис. 2.36-2.40 представлены результаты расчетов установившегося течения несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения, уже рассматривавшегося выше для иллюстрации неприменимости в этом случае линейных RANS моделей SA и SST (см. рис. 2.17, 2.18 и комментарии к ним). На первом из этой серии рисунков (рис. 2.36) построены векторные поля вторичных токов, рассчитанные с использованием

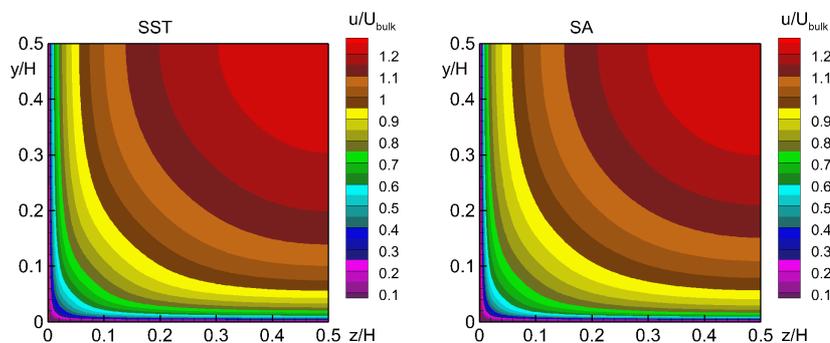
нелинейных моделей WJ BSL EARSM и SA QCR, и аналогичные поля из DNS [75]. Видно, что хотя обе нелинейные модели заметно занижают интенсивность вторичных токов (наиболее существенное отклонение результатов расчетов в рамках этих моделей от результатов DNS наблюдается в непосредственной окрестности угла канала ( $y/H < 0.1$  и  $z/H < 0.1$ ), с их помощью удается, тем не менее, качественно правильно описать структуру вторичного течения. Более наглядно это иллюстрирует рис. 2.37, на котором показаны соответствующие линии тока. Благодаря этому, поля продольной скорости в канале, рассчитанные с использованием обеих нелинейных моделей, оказываются достаточно близкими к полю скорости, полученному с помощью DNS (оно также показано на рис. 2.37). В противоположность этому, представленные на рис. 2.38 поля продольной скорости, рассчитанные с использованием линейных моделей SA и SST, не способных предсказать возникновение вторичных токов, существенно отличаются от поля скорости из DNS.



**Рисунок 2.36.** Сравнение векторных полей скорости вторичных токов в левом нижнем квадранте сечения установившегося течения в плоском канале, рассчитанных с использованием нелинейных моделей турбулентности WJ BSL EARSM и SA QCR, с данными DNS [75] (цветом показана скорость основного течения)



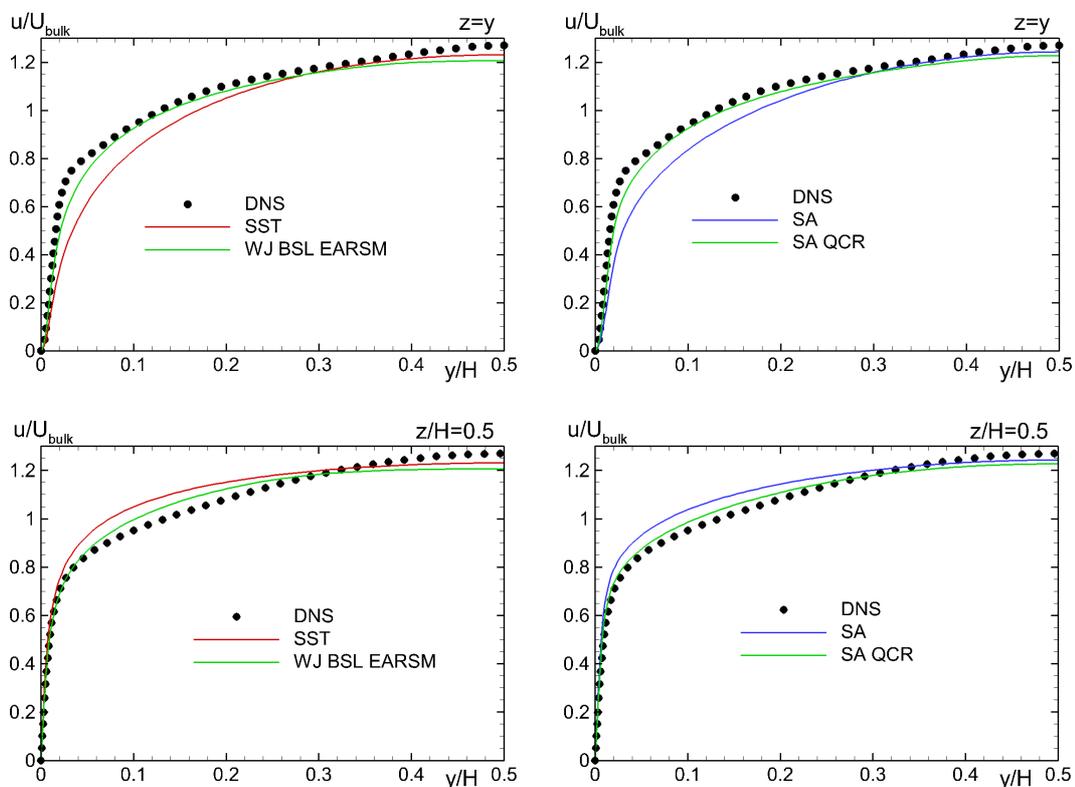
**Рисунок 2.37.** Линии тока вторичного течения и поля продольной скорости при установившемся течении в квадратном канале, рассчитанные с использованием нелинейных моделей турбулентности WJ BSL и SA QCR, с данными DNS [75]. Показан левый нижний квадрант поперечного сечения канала



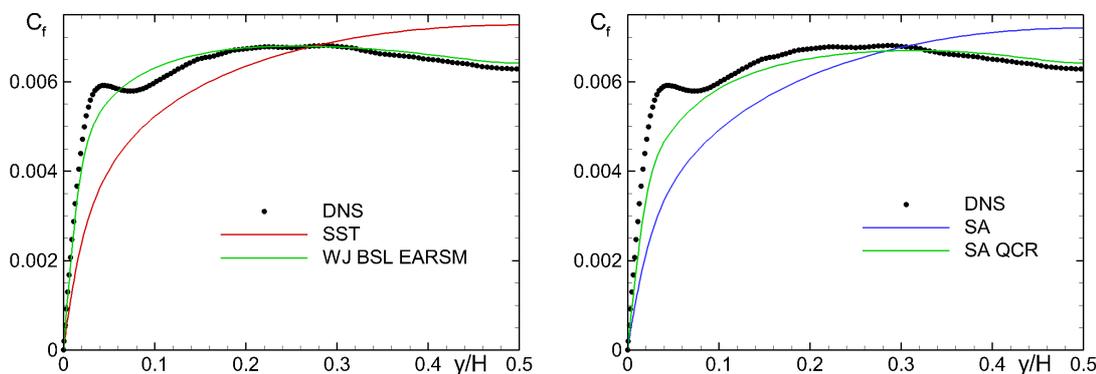
**Рисунок 2.38.** Поля продольной скорости, аналогичные показанным на рис. 2.37, но рассчитанные с использованием линейных моделей турбулентности SST и SA

Более ясное количественное представление о точности, обеспечиваемой линейными и нелинейными моделями при расчете рассматриваемого течения, дают рис. 2.39, 2.40. На этих рисунках сравниваются распределения продольной скорости вдоль диагонали и плоскости симметрии поперечного сечения канала (рис.2.39) и распределения коэффициента трения по его периметру (рис.2.40), рассчитанные с использованием различных моделей турбулентности и DNS. Из них ясно видно, что точность нелинейных моделей существенно выше, чем точность линейных моделей. В то же время, следует отметить, что даже при использовании рассматриваемых нелинейных моделей расчетные

характеристики основного течения заметно отличаются от результатов DNS. В частности, эти нелинейные модели не предсказывают наличие локального максимума трения при  $y/H = 0.04$  (рис.2.40).

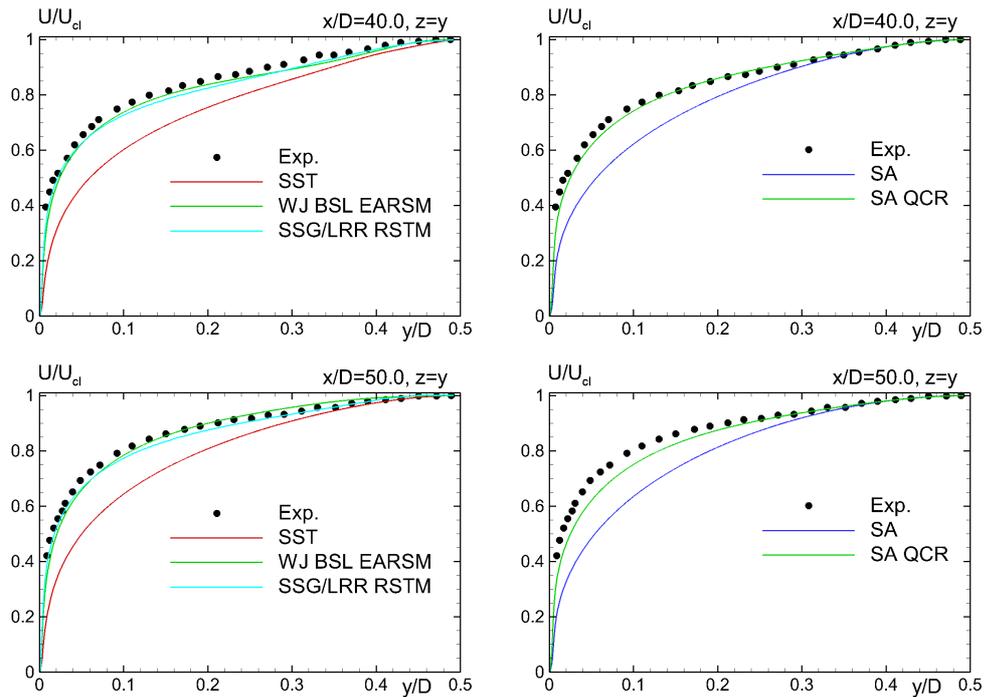


**Рисунок 2.39.** Сравнение профилей продольной компоненты скорости на диагонали (верхний ряд) и в плоскости симметрии (нижний ряд), рассчитанных с использованием нелинейных и линейных моделей турбулентности, с данными DNS [75]

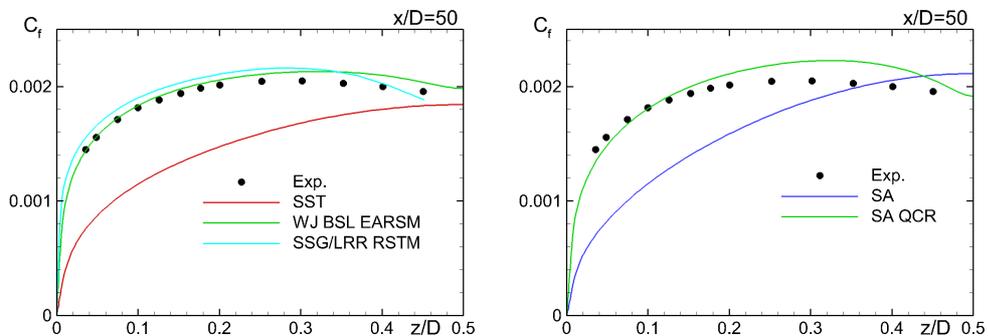


**Рисунок 2.40.** Сравнение распределений коэффициента трения по периметру сечения канала, рассчитанных с использованием нелинейных и линейных моделей турбулентности, с данными DNS [75]

Аналогичные выводы можно сделать на основе анализа результатов расчетов сверхзвукового течения на начальном участке канала квадратного сечения при числе Маха 3.9 и числе Рейнольдса  $5.08 \cdot 10^5$ , представленных на рис. 2.41 и 2.42. Сравнение этих результатов с экспериментальными данными [97] убедительно демонстрирует превосходство нелинейных моделей над линейными.



**Рисунок 2.41.** Сравнение с экспериментом [97] распределений продольной компоненты скорости вдоль диагонали поперечного сечения квадратного канала на расстояниях от входа  $x/D=40$  и  $50$ , рассчитанных с использованием линейных и нелинейных моделей турбулентности



**Рисунок 2.42.** Сравнение с экспериментом [97] распределений коэффициента трения по периметру сечения квадратного канала при  $x/D=50$ , рассчитанных с использованием линейных и нелинейных моделей турбулентности

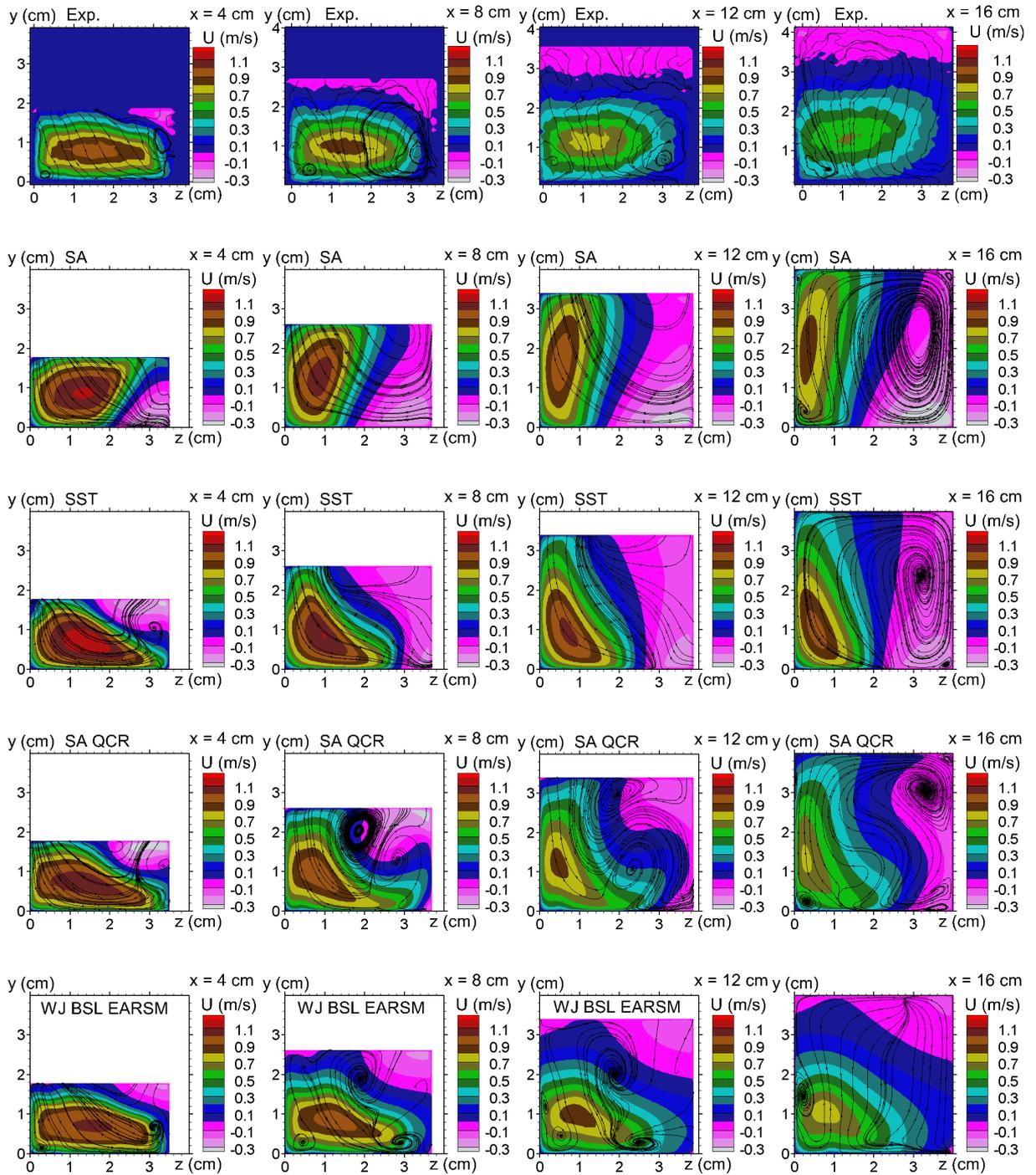
Еще один, также рассматривавшийся ранее (см. рис. 2.19) пример внутренних течений, в которых существенным образом проявляется анизотропия рейнольдсовых напряжений в окрестности двухгранных углов, является течение в стэнфордском диффузоре. Результаты расчетов этого течения, полученные с использованием двух линейных (SST и SA) и двух нелинейных (SA QCR и WJ BSL EARSM) RANS моделей показаны на рисунках 2.43 и 2.44.

В частности, на рисунке 2.43 с экспериментом сравниваются расчетные поля продольной составляющей вектора скорости в различных сечениях диффузора. Из рисунка видно, что в данном случае не только линейные, но и одна из двух рассмотренных нелинейных моделей (SA QCR) предсказывают качественно неверную структуру потока: согласно этим моделям, отрыв потока происходит на боковой стенке диффузора, в то время как в эксперименте наблюдается отрыв от его верхней стенки. Более того, хотя результаты расчетов, полученные с использованием второй нелинейной модели (модели WJ BSL EARSM), качественно согласуются с экспериментом, их количественное различие с результатами измерений поля скорости остается весьма существенным. В результате, как видно из рисунка 2.44, ни одна из рассмотренных моделей не позволяет с приемлемой степенью точности рассчитать продольное распределение давления в диффузоре, которое с практической точки зрения является его основной характеристикой.

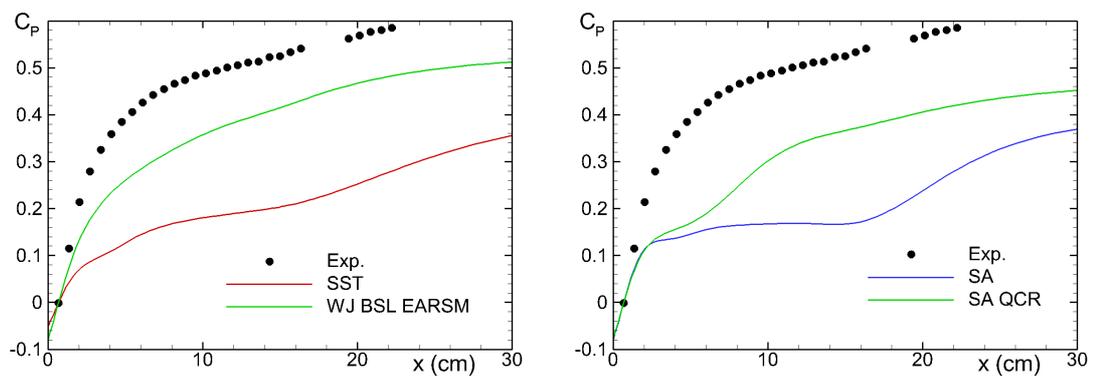
Остановимся далее на некоторых примерах, иллюстрирующих возможности нелинейных RANS моделей турбулентности при решении внешних задач аэродинамики.

На рис. 2.45 показано сравнение с экспериментом результатов расчетов обтекания механизированного крыла самолета А-310 в посадочной конфигурации (см. фото в левой части рисунка),

выполненных в работе [98] при числе Маха внешнего потока равном 0.22 и числе Рейнольдса  $4.1 \cdot 10^6$  в широком диапазоне

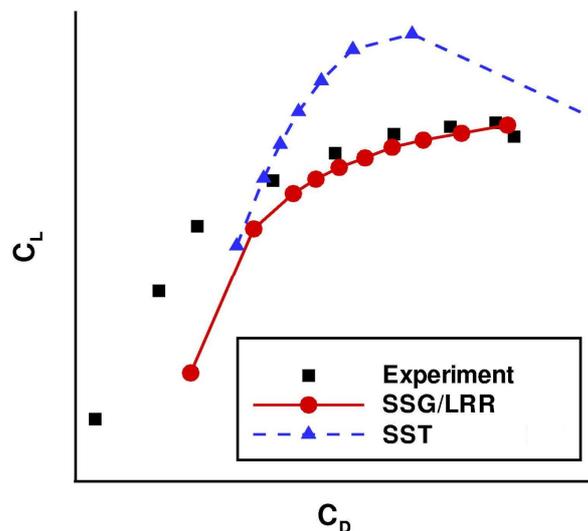
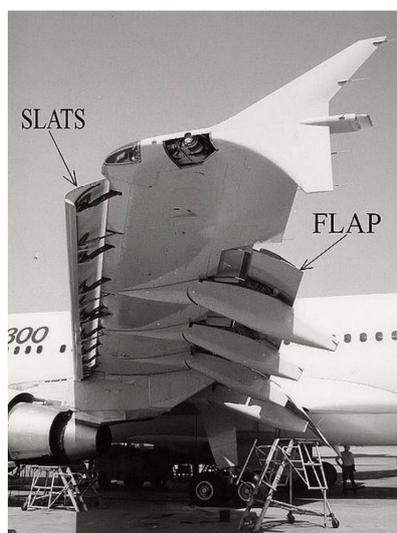


**Рисунок 2.43.** Сравнение полей продольной составляющей вектора скорости и линий тока вторичного течения в различных сечениях стэнфордского диффузора, измеренных в [76, 77], с соответствующими полями, рассчитанными с использованием различных моделей турбулентности



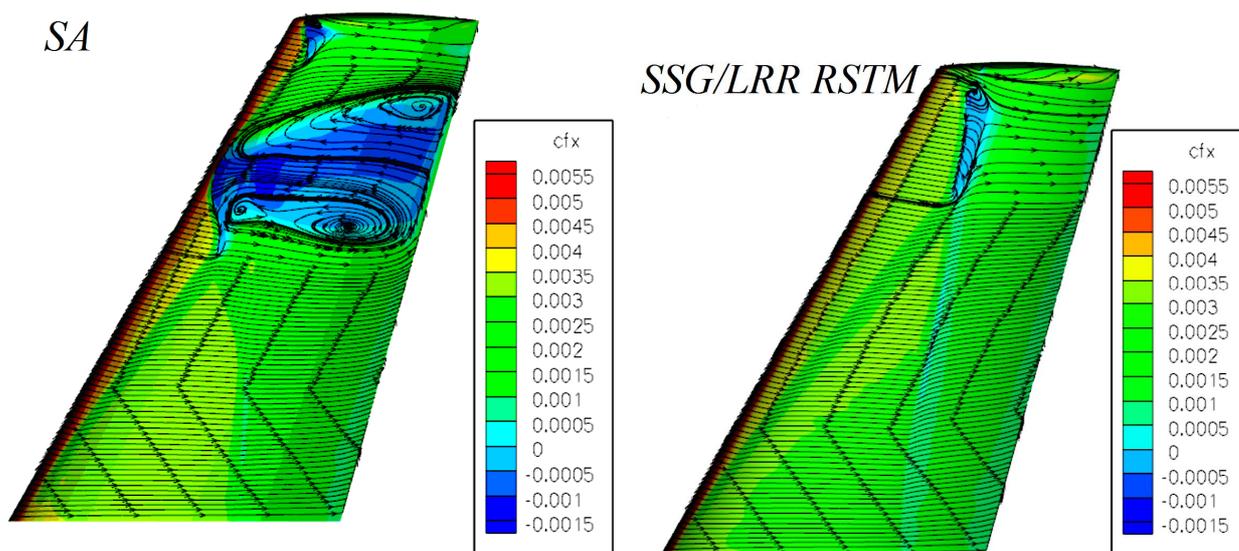
**Рисунок 2.44.** Сравнение расчетных распределений коэффициента давления  $C_p = (p - p_0) / (\rho_0 U_0^2)$  по длине стэнфордского диффузора, рассчитанных с использованием различных моделей турбулентности, с экспериментальными данными [76, 77]

изменения угла атаки. В расчете использовались две RANS модели турбулентности: линейная модель SST и SSG/LRR RSTM [90]. Как видно из рисунка, для данного течения RSTM обеспечивает вполне удовлетворительное предсказание поляры крыла (зависимости его подъемной силы от сопротивления), в то время как модель SST, являющаяся, как уже неоднократно отмечалось, одной из лучших линейных моделей, значительно завышает подъемную силу и предсказывает слишком ранний срыв потока.

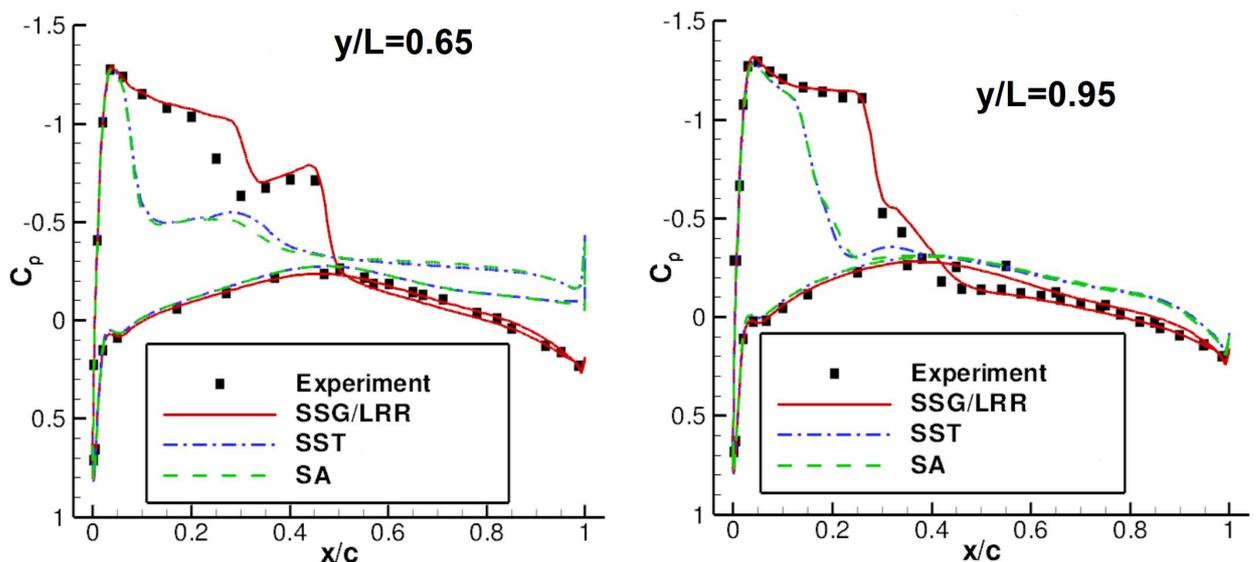


**Рисунок 2.45.** Механизированное крыло самолета А-310 в посадочной конфигурации (слева) и сравнение поляры крыла, рассчитанной в работе [98] с использованием моделей SST и SSG/LRR RSTM, с экспериментальными данными (справа)

Еще один пример достаточно успешного применения SSG/LRR RSTM представлен на рис. 2.46, 2.47, на которых показаны результаты расчета обтекания крыла ONERA M6 при крейсерском режиме полета (число Маха 0.84, число Рейнольдса  $1.172 \cdot 10^7$ , угол атаки  $4.08^\circ$ ), выполненного в работе [99]. Из рисунков видно, в частности, что линейная SA модель предсказывает формирование на стороне разрежения крыла значительно большей зоны отрыва, чем SSG/LRR RSTM (рис. 2.46), что приводит к большим ошибкам в распределении коэффициента давления по поверхности крыла (рис. 2.47). Кроме того, рисунок 2.47 показывает, что при решении данной задачи с использованием модели SST погрешность расчета распределения давления  $C_p$  оказывается столь же значительной, как и при использовании SA модели.

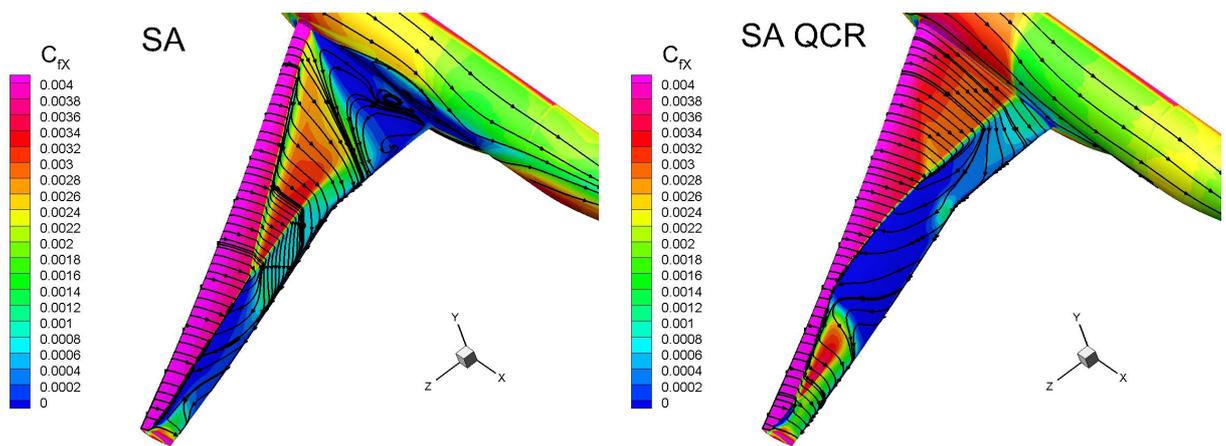


**Рисунок 2.46.** Контуры продольной составляющей коэффициента трения и линии тока на поверхности крылового профиля ONERA M6 (поверхность разрежения), рассчитанные в [99] с использованием моделей SA и SSG/LRR RSTM

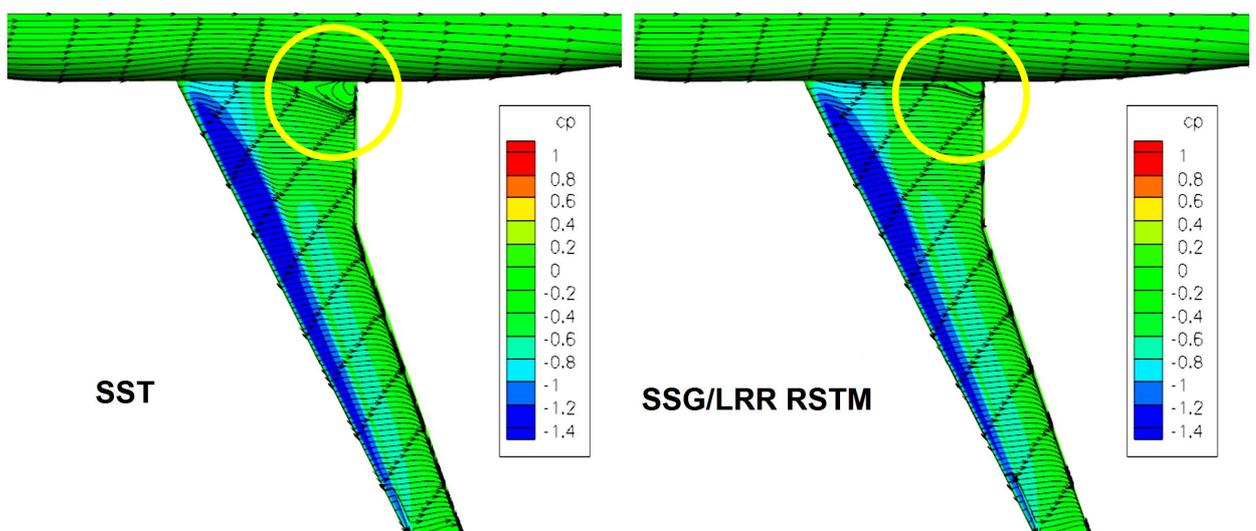


**Рисунок 2.47.** Сравнение распределений коэффициента давления в двух сечениях крыла ONERA M6, рассчитанных в работе [99] с использованием моделей SA, SST и SSG/LRR RSTM, с экспериментальными данными [100].

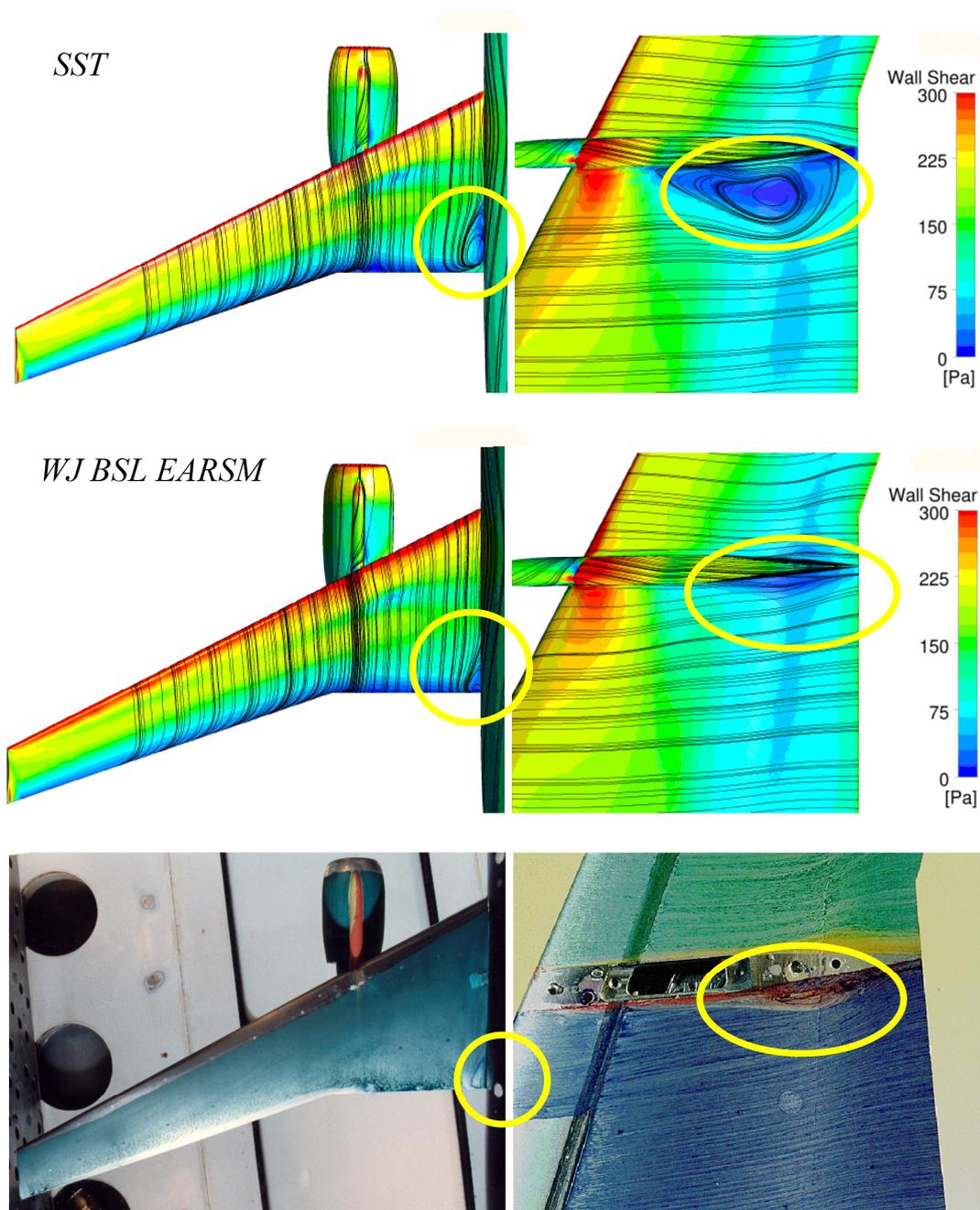
Наиболее ярко преимущество нелинейных моделей над линейными проявляется при расчете обтекания аэродинамических конфигураций, содержащих “двухгранные углы”, например, при расчете течения в области сопряжения крыла с фюзеляжем. Как уже отмечалось, линейные модели не могут описать образующиеся при этом вторичные токи, которые прижимают поток к обтекаемой поверхности и тем самым препятствуют его отрыву под воздействием неблагоприятного градиента давления, возникающего при обтекании крыла. В результате, линейные модели предсказывают слишком ранний (при меньших углах атаки) и более обширный отрыв потока в этой области (“угловой отрыв”), что, в свою очередь, может исказить картину обтекания крыла в целом. Эту отрицательную тенденцию иллюстрируют рисунки 2.48 - 2.50, на которых показаны картины обтекания различных модельных конфигураций “крыло-фюзеляж”, полученные с использованием линейных и нелинейных моделей турбулентности.



**Рисунок 2.48.** Изолинии коэффициента трения и линии тока на поверхности модельной конфигурации CRM (Common Research Model [101]) для крейсерского режима полета ( $M_\infty=0.85$ ,  $Re=5 \cdot 10^6$ , угол атаки  $\alpha=4.1^\circ$ ), полученные с использованием моделей SA и SA QCR



**Рисунок 2.49.** Изолинии коэффициента давления и линии тока на поверхности модельной конфигурации DLR-ALVAST [102], рассчитанные с использованием линейной модели SST и SSG/LRR RSTM при  $M_\infty=0.75$ ,  $Re=4.8 \cdot 10^6$  и угле атаки, обеспечивающем  $C_L=0.5$  [99]



**Рисунок 2.50.** Сравнение распределений напряжения трения и линий тока на поверхности модельной конфигурации крыло - фюзеляж - мотогондола DLR-F6, полученных в работе [79] для режима  $M_\infty = 0.75$ ,  $Re = 3 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 1^\circ$  с использованием линейной модели SST и модели WJ BSL EARSM, с экспериментальными данными [103]

В целом, результаты расчетов, приведенные в данной главе, свидетельствуют о том, что лучшие из известных нелинейных RANS моделей турбулентности не уступают по точности лучшим линейным моделям и, в то же время, позволяют с приемлемой

точностью рассчитывать некоторые сложные течения, для которых использование линейных моделей приводит к недопустимо большим погрешностям. Тем не менее, по ряду фундаментальных причин физического характера, подробно обсуждавшихся в разделе 1.1, ни одна из этих моделей не является универсальной. Данное обстоятельство привело в конце прошлого века к интенсификации исследований, направленных на поиск новых (отличных как от RANS, так и от LES) подходов к моделированию турбулентности. В результате, в 1997 г. был предложен метод моделирования отсоединенных вихрей (DES) [27], положивший начало “эры” гибридных RANS-LES методов моделирования турбулентности, рассмотрению которых посвящены две следующие главы данного пособия.

### 3. Метод моделирования отсоединенных вихрей (DES) и его модификации

В данной главе объяснен общий принцип построения DES моделей и приведены примеры, иллюстрирующие как открываемые этим методом новые возможности, так и недостатки, выявленные в процессе широкого практического применения DES в течение почти 20 лет с момента его создания в 1997 г. Наряду с этим, описаны более поздние версии DES, позволяющие в той или иной степени устранить эти недостатки.

#### 3.1. Общий принцип построения DES

Как уже отмечалось в разделе 1.3, метод DES был предложен в качестве альтернативы RANS и LES методам применительно к расчету пристеночных течений с обширными отрывными зонами при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса. Расчет таких течений с использованием RANS моделей не обеспечивает приемлемую точность, а LES требует огромных вычислительных ресурсов из-за наличия тонких присоединенных пограничных слоев.

Реализация описанной в разделе 1.3 общей идеи метода DES достаточно проста и базируется на том, что уравнения RANS (1.4) и LES (1.7) имеют общую форму. Кроме того, предполагается, что RANS модель, на основе которой строится модель DES, может быть преобразована в подсеточную модель для LES путем замены линейного масштаба турбулентности  $l_{RANS}$ , явно или неявно фигурирующего во всех RANS моделях, на подсеточный линейный масштаб  $l_{SGS}$ . Тогда, вводя гибридный линейный масштаб

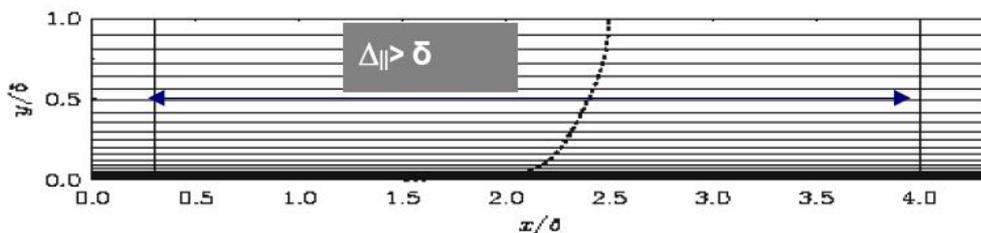
$$l_{DES} = \min\{l_{RANS}, l_{SGS}\}, \quad (3.1)$$

получим гибридную модель DES, которая, в зависимости от соотношения линейных масштабов RANS и LES,  $l_{RANS}$  и  $l_{SGS}$ , функционирует либо как базовая RANS модель, либо как ее подсеточная версия.

В результате, в областях потока, в которых используемая сетка является слишком грубой и непригодна для разрешения турбулентных структур, то есть при  $l_{SGS} > l_{RANS}$ , DES функционирует как RANS, а в областях с достаточно мелкой сеткой, то есть при  $l_{SGS} < l_{RANS}$  - как подсеточная модель для LES.

Важной особенностью DES является также то, что в качестве линейного подсеточного масштаба в нем используется величина  $l_{SGS} = C_{DES} \Delta$ , где  $C_{DES}$  - эмпирическая константа порядка единицы, а  $\Delta$  определяется как максимальный из трех шагов сетки в рассматриваемой точке потока

$$\Delta = \max \{ \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \}. \quad (3.2)$$



**Рисунок 3.1.** Типичная сетка для расчета течения в присоединенном пограничном слое

На рисунке 3.1 показана типичная расчетная сетка для DES в области присоединенного пограничного слоя. Характерной особенностью этой сетки, как и аналогичных сеток, используемых в RANS расчетах, является ее сильная анизотропия: шаги сетки в направлениях касательных к стенке ( $x$  и  $z$ ) приблизительно равны между собой и намного превосходят шаг сетки по нормали к стенке ( $y$ ). При этом максимальный из шагов сетки в направлениях  $x$  и  $z$ ,  $\Delta_{||} = \max \{ \Delta_x, \Delta_z \}$ , превышает толщину пограничного слоя  $\delta$ .

В этой ситуации определение  $\Delta$  (3.2) приводит к тому, что во всем пограничном слое или, по крайней мере, в его основной части, населенной мелкими и относительно “универсальными” турбулентными вихрями, выполняется неравенство  $C_{DES}\Delta > l_{RANS}$ . В результате, в качестве линейного масштаба DES в этой области используется величина  $l_{RANS}$ , то есть DES функционирует как базовая RANS модель. В противоположность этому, вне пограничного слоя, в том числе в отрывной области потока, населенной зависящими от конкретной геометрии течения сравнительно крупными “отсоединенными” вихрями, выполняется обратное неравенство:  $C_{DES}\Delta < l_{RANS}$ . В результате, в качестве масштаба турбулентности в этой области используется величина  $C_{DES}\Delta$ , то есть DES функционирует как подсеточная модель для LES.

Ниже показано, как этот общий подход реализуется применительно к DES, базирующемуся на SA и SST RANS моделях турбулентности.

## 3.2. DES на базе SA RANS модели

### 3.2.1. Оригинальная версия

Линейным масштабом в SA RANS модели (2.3) служит расстояние от рассматриваемой точки потока до обтекаемой поверхности  $d_w$ , которое входит в диссипативный член модели (2.7) и некоторые другие ее члены. Поэтому, следуя общему подходу, описанному в предыдущем разделе, для того, чтобы получить из (2.3) подсеточную версию SA модели, величина  $d_w$  в этих членах должна быть заменена на величину  $C_{DES}\Delta$ . В результате искомая подсеточная версия SA модели может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{v}_{SGS}}{Dt} = P^v - D^v + \\ + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{v}_{SGS}) \nabla \tilde{v}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{v}_{SGS}) \cdot (\nabla \tilde{v}_{SGS})] \right\} + f_{t1} \Delta U^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$D^v = \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{v}_{SGS}}{C_{DES} \Delta} \right)^2, \quad (3.4)$$

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}_{SGS}}{\kappa^2 (C_{DES} \Delta)^2}, \quad (3.5)$$

$$r = \frac{\tilde{v}_{SGS}}{\tilde{S} \kappa^2 (C_{DES} \Delta)^2}, \quad (3.6)$$

а остальные обозначения совпадают с обозначениями, используемыми при формулировке SA RANS модели (раздел 2.1.1).

Отметим, что в случае равновесия (“генерация  $P^v$  равна диссипации  $D^v$ ”) модель (3.3) переходит в алгебраическую модель типа Смагоринского (см. об этом подробнее в следующем разделе).

После того, как подсеточная версия SA модели построена, формулировка DES на основе этой модели не составляет труда. Действительно, с учетом того, что в данном случае  $l_{RANS} = d_w$ , общее определение гибридного линейного масштаба для DES (3.1) принимает вид

$$l_{DES} = \min \{ d_w, C_{DES} \Delta \}, \quad (3.7)$$

а уравнение переноса “гибридной” вязкости DES совпадает по форме с аналогичными уравнениями переноса турбулентной вязкости (2.3) и подсеточной вязкости (3.3):

$$\frac{D\tilde{v}_{DES}}{Dt} = P^v - D^v + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{v}_{DES}) \nabla \tilde{v}_{DES}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{v}_{DES}) \cdot (\nabla \tilde{v}_{DES})] \right\} + f_{t1} \Delta U^2, \quad (3.8)$$

где

$$D^v = \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{v}_{DES}}{l_{DES}} \right)^2, \quad (3.9)$$

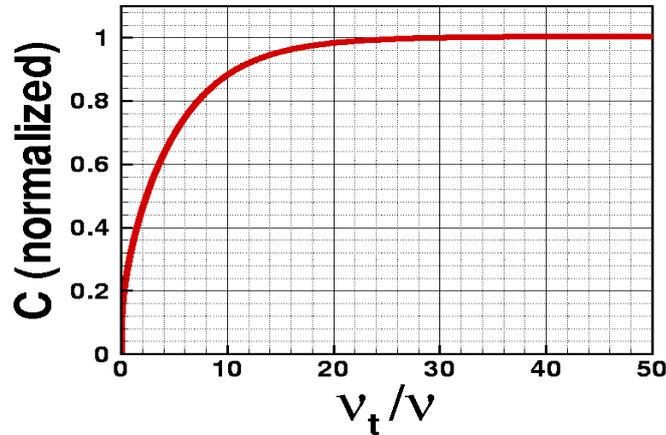
$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}_{DES}}{\kappa^2 l_{DES}^2}, \quad (3.10)$$

$$r = \frac{\tilde{v}_{DES}}{\tilde{S} \kappa^2 l_{DES}^2}. \quad (3.11)$$

### 3.2.2. Поправка на низкие числа Рейнольдса

SA RANS модель (2.3) содержит специальные функции, описывающие подавление турбулентности в вязком подслое и переходной области турбулентного пограничного слоя, а именно функции  $f_{v1}$  (2.5) и  $f_{v2}$  (2.8). Обе эти функции, а также подавляющая спонтанный ламинарно-турбулентный переход функция  $f_{t2}$  (2.10) зависят от отношения модифицированной турбулентной и молекулярной вязкостей  $\chi = \tilde{\nu}/\nu$  или, что, по существу, то же самое, от отношения  $\nu_t/\nu$ , причем они становятся “активными” (отличными от единицы) вблизи стенки, где это отношение мало ( $\nu_t/\nu < \sim 15$ ). Однако в рамках DES уменьшение  $\nu_t$  до такого или даже более низкого уровня может происходить и вдали от твердых стенок в силу использования мелкой сетки в LES области DES или при проведении расчетов при относительно низких числах Рейнольдса. Это падение  $\nu_t$  ошибочно “трактруется” моделью как “близость стенки”, в результате чего происходит активация ее низкорейнольдсовых членов и, как следствие, дальнейшее

быстрое падение турбулентной (подсеточной) вязкости практически до нуля.



**Рисунок 3.2.** Зависимость нормализованной величины  $C_{norm} = \tilde{C} / (\tilde{C})_{v_t / \nu \rightarrow \infty}$  от отношения турбулентной и молекулярной вязкостей

Причину такого некорректного поведения легко понять, рассмотрев предельную форму подсеточной SA модели (3.3) в случае равновесия (генерация равна диссипации). При этом модель переходит в модель типа модели Смагоринского  $\nu_{SGS} = (\tilde{C}\Delta)^2 |S|$  (1.9). Однако, в отличие от модели Смагоринского, величина  $\tilde{C}$  является не константой, а функцией от параметра  $v_t / \nu$ ,  $\tilde{C} = C_{DES} f(v_t / \nu)$ , показанной на рисунке 3.2 в “нормализованном” виде (функция отнесена к своему предельному значению при  $v_t / \nu \rightarrow \infty$  или, иными словами, при высоких числах Рейнольдса).

Из приведенного анализа ясно, что для устранения описанного выше недостатка SA DES достаточно ввести в выражение подсеточного линейного масштаба в LES-ветви DES  $C_{DES}\Delta$  (3.7) дополнительный множитель, который компенсировал бы зависимость  $C_{norm}(v_t / \nu)$ , показанную на рисунке 3.2, то есть определить этот линейный масштаб следующим образом

$$C_{DES,mod} = C_{DES} \Psi(v_t / \nu), \quad \Psi(v_t / \nu) = 1 / C_{norm}(v_t / \nu). \quad (3.12)$$

В результате выражение для линейного масштаба  $l_{DES}$  (3.7) принимает вид

$$l_{DES} = \min \{l_{RANS}, C_{DES, \text{mod}} \Delta\} = \min \{l_{RANS}, C_{DES} \Psi(v_t / \nu) \Delta\}. \quad (3.13)$$

Аналитическое выражение для функции  $\Psi$  имеет вид [104]:

$$\Psi^2 = \frac{1 - c_{b1} [f_{t2} + (1 - f_{t2}) f_{v2}] / (c_{w1} \kappa^2 f_w^*)}{(1 - f_{t2}) f_{v1}}, \quad (3.14)$$

( $f_w^* = 0.4241$  - равновесное значение  $f_w$  при высоких числах Рейнольдса), а ее график показан на рисунке 3.3.

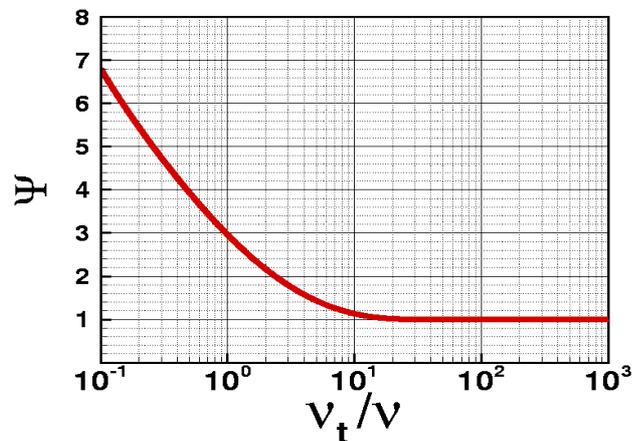
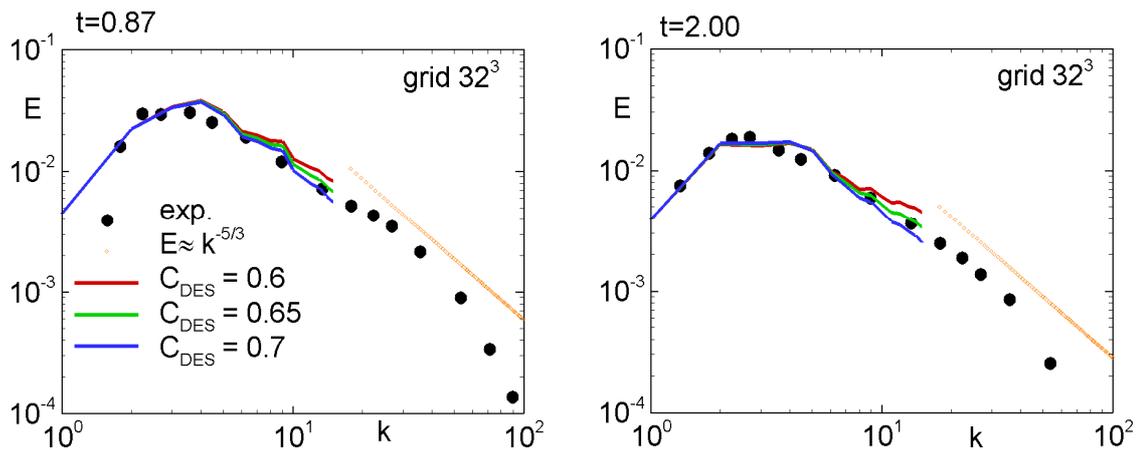


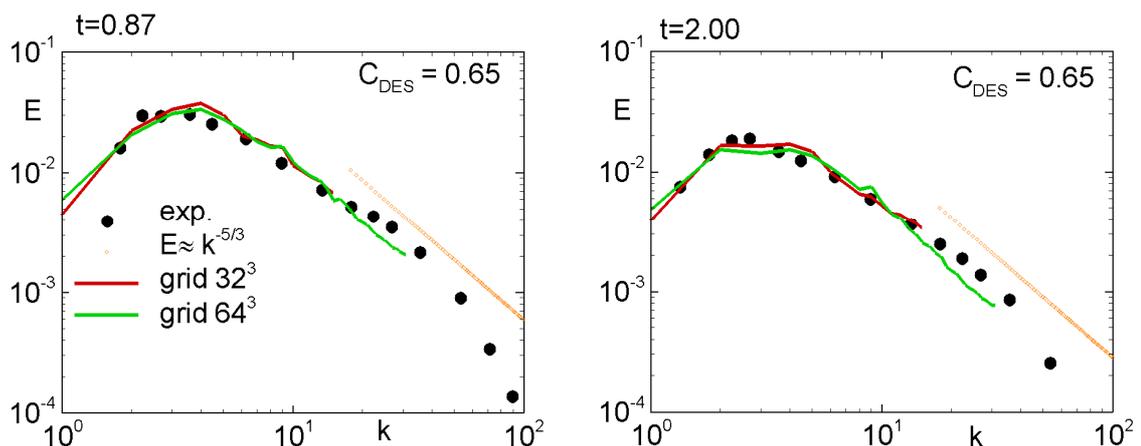
Рисунок 3.3. График поправочной функции  $\Psi$

### 3.2.3. Калибровка эмпирической константы $C_{DES}$

Калибровка константы  $C_{DES}$  осуществляется на основе традиционного для LES подхода, а именно на основе сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными по затуханию однородной изотропной турбулентности. Результаты такой калибровки, проведенной с использованием кода NTS и экспериментальных данных [105], показаны на рисунках 3.4 и 3.5. Из этих рисунков видно, что оптимальное значение константы  $C_{DES}$  равно примерно 0.65.



**Рисунок 3.4.** Спектры разрешенной энергии турбулентности в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности, полученные с помощью NTS кода в расчетах на сетке  $32^3$  с использованием SA DES с поправкой на низкие числа Рейнольдса (3.13), (3.14) при различных значениях константы  $C_{DES}$



**Рисунок 3.5.** Спектры разрешенной энергии турбулентности в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности, полученные с помощью NTS кода в расчетах на сетках  $32^3$  и  $64^3$  с использованием SA DES с поправкой на низкие числа Рейнольдса (3.13), (3.14) при  $C_{DES} = 0.65$

### 3.3. DES на базе SST RANS модели

Стимулом для разработки этой версии DES послужило то обстоятельство, что в рамках общей концепции DES весь присоединенный пограничный слой вплоть до точки (линии) отрыва должен находиться в RANS области DES. Это означает, что точность предсказания положения отрыва (а значит, и точность

расчета течения в целом) в рамках DES в значительной степени определяется RANS моделью. Поэтому наличие DES только на основе SA модели существенно ограничивало бы возможности DES-подхода в целом. Отметим также, что, в отличие от DES на основе модели SA, на базе SST модели можно построить несколько в равной степени обоснованных версий DES (это связано с тем, что уравнения переноса для  $k$  и  $\omega$  (2.15), (2.16) могут быть записаны через линейный масштаб SST RANS  $l_{RANS}^{SST} = k^{1/2} / (\beta^* \omega)$  несколькими способами). Однако опыт использования различных версий SST DES свидетельствует о том, что результаты расчетов практически не зависят от того, какая именно подсеточная версия SST модели используется. В связи с этим в данном разделе приводится лишь наиболее простая из всех возможных формулировок SST DES, предложенная в работах [106], [64]. Она базируется на записи уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (2.15) с использованием линейного масштаба турбулентности в следующем виде

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k] + P_k - \rho k^{3/2} / l_{RANS}, \quad (3.15)$$

где

$$l_{RANS} = l_{RANS}^{SST} = k^{1/2} / (\beta^* \omega). \quad (3.16)$$

После этого, следуя общей схеме получения подсеточных версий RANS моделей, описанной в разделе 3.1, подсеточная версия SST модели турбулентности может быть получена путем замены  $l_{RANS}$  в (3.15) на величину  $l_{LES} = C_{DES}^{SST} \Delta$  (уравнение переноса  $\omega$  (2.16) при этом не изменяется)

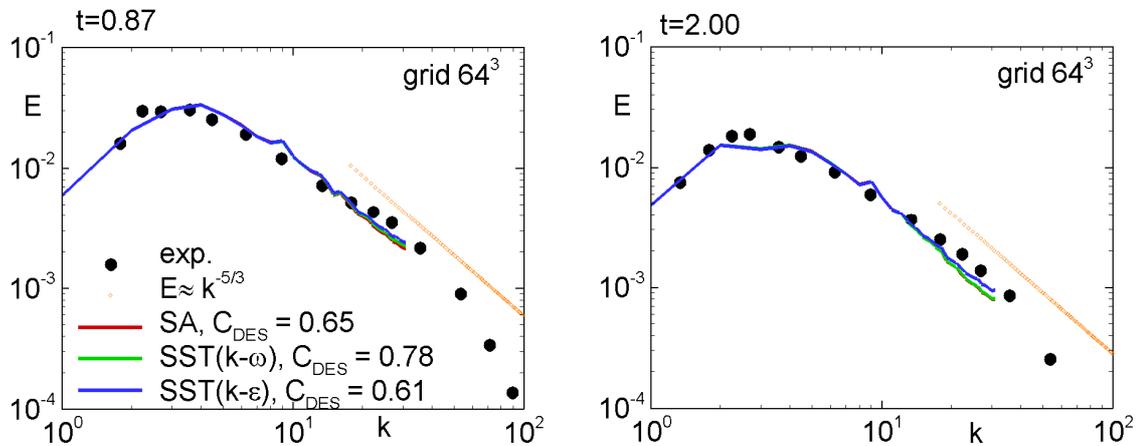
$$\rho \frac{Dk_{SGS}}{Dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_{SGS}) \nabla k_{SGS}] + P_k - \rho k_{SGS}^{3/2} / l_{LES}. \quad (3.17)$$

Что касается константы  $C_{DES}^{SST}$ , то, как и константы SST RANS модели (2.22), она определяется через аналогичные константы подсеточных версий входящих в SST модель  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  ветвей с использованием “весовой” функции  $F_1$  (2.19):

$$C_{DES}^{SST} = F_1 C_{DES}^{k-\omega} + (1 - F_1) C_{DES}^{k-\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Таким образом, для определения  $C_{DES}^{SST}$  необходимо провести калибровку констант  $C_{DES}^{k-\omega}$  и  $C_{DES}^{k-\varepsilon}$  в подсеточных  $k-\omega$  и  $k-\varepsilon$  моделях по отдельности. Как и для других подсеточных моделей, такая калибровка была выполнена путем решения задачи о затухании изотропной однородной турбулентности. Ее результаты, полученные с использованием NTS кода (см. рис. 3.6), дают следующие значения констант:

$$C_{DES}^{k-\omega} = 0.78; C_{DES}^{k-\varepsilon} = 0.61. \quad (3.19)$$



**Рисунок 3.6.** Спектры разрешенной энергии турбулентности в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности, полученные с помощью NTS кода в расчетах на сетке  $64^3$  с использованием  $(k-\omega)$ -DES при  $C_{DES}^{k-\omega} = 0.78$ ,  $(k-\varepsilon)$ -DES при  $C_{DES}^{k-\varepsilon} = 0.61$  и SA-DES при  $C_{DES}^{SA} = 0.65$

После того, как подсеточная версия SST RANS модели сформулирована, соответствующую версию DES легко получить путем замены  $l_{RANS}$  в (3.15) на величину

$$l_{DES}^{SST} = \min \{l_{RANS}^{SST}, C_{DES}^{SST} \Delta\}. \quad (3.20)$$

Отметим, что поскольку SST модель не содержит низкорейнольдсовых членов, необходимости во введении в (3.20) поправки, аналогичной низкорейнольдсовой поправке для подсеточной SA модели, не возникает.

В заключение обратим внимание на одно важное отличие представленной выше SST версии DES от SA DES. Как видно из выражения для линейного масштаба SST DES (3.20) и формулы (3.16), граница между RANS и LES областями, определяемая этим выражением, зависит не только от используемой в расчете сетки, как в случае SA DES, но и от решения задачи. Это обусловлено тем, что входящий в (3.20) линейный масштаб SST RANS модели  $l_{RANS}^{SST}$  зависит от  $k$  и  $\omega$ , а не является чисто геометрическим, как в SA модели ( $l_{RANS}^{SA} = d_w$ ). Таким образом, в рамках SST DES граница между RANS и LES областями является нестационарной и может иметь весьма сложную форму.

### 3.4. Примеры применения DES

Благодаря исключительной простоте реализации метода DES и открываемой им принципиальной возможности достаточно точного расчета широкого круга сложных отрывных турбулентных течений, этот метод быстро получил широкое распространение и, в частности, был внедрен во все основные коммерческие CFD коды. Это, а также большое число исследований, выполненных с помощью DES как отдельными научными группами во всем мире, так и рамках четырех специальных Европейских проектов (FLOMANIA [9], DESider [107], АТААС [10] и Go4Hybrid [108]), позволило накопить большой объем информации обо всех аспектах данного метода, включая его достоинства, недостатки и вычислительные особенности.

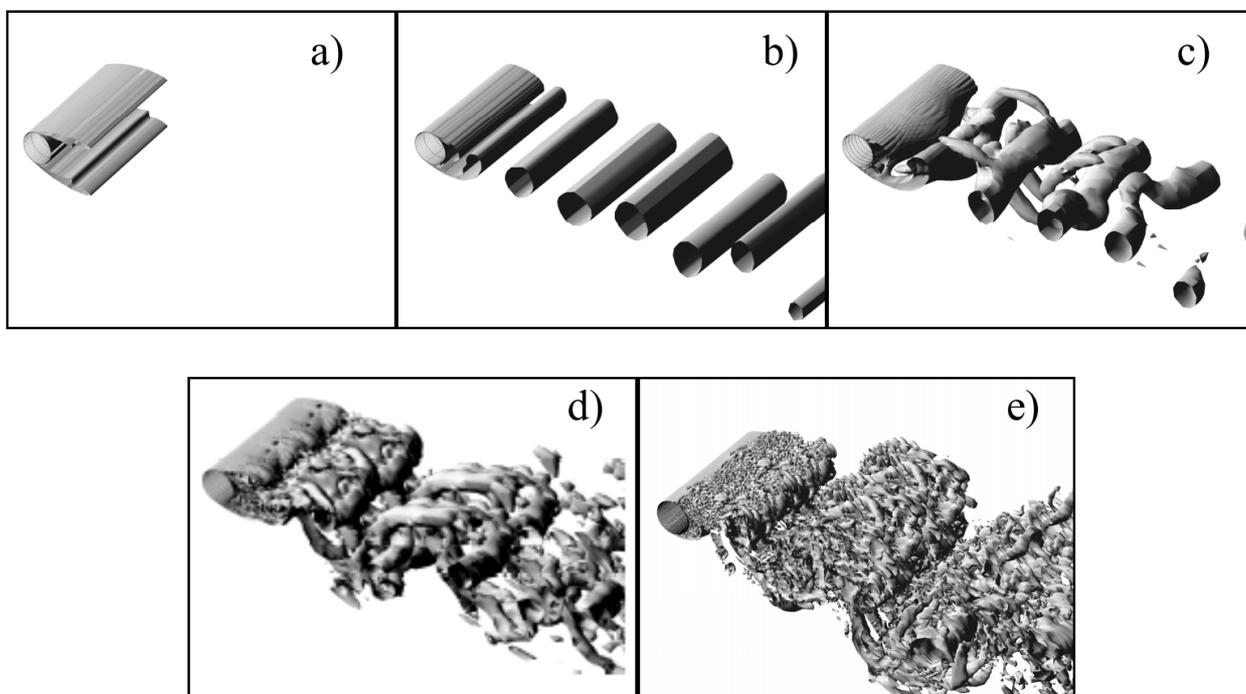
Остановимся более подробно на примерах, иллюстрирующих возможности представленных выше исторически первых версий DES [27, 106], базирующихся на SA и SST RANS моделях турбулентности.

Как уже отмечалось, первоначально DES предназначался для расчета аэродинамических течений с обширным отрывом при высоких числах Рейнольдса, типичными примерами которых являются течения у плохообтекаемых тел (цилиндр, сфера, крыло под большим углом атаки и т. п.). В настоящее время в литературе имеется множество примеров, демонстрирующих высокую точность DES при расчете таких течений, некоторые из которых приведены ниже на рисунках 3.7-3.13.

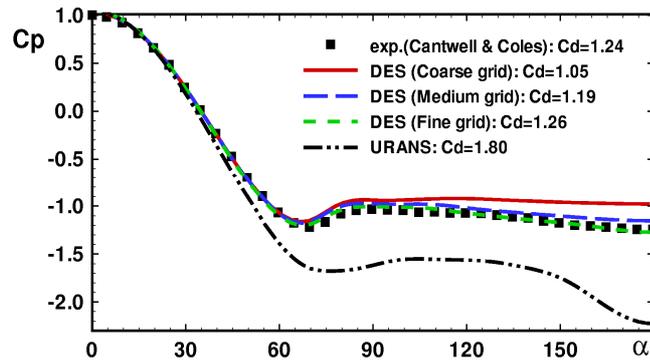
Первый из них дает общее представление о возможностях, открываемых DES по сравнению с другими подходами к моделированию отрывных течений, на примере расчета обтекания кругового цилиндра при числе Рейнольдса  $Re = 1.4 \cdot 10^5$ , соответствующем докритическому режиму течения (отрыв ламинарного пограничного слоя и переход к турбулентности в оторвавшемся слое смешения). Он наглядно иллюстрирует принципиальное различие DES и RANS подходов к моделированию течений с обширным отрывом.

В частности, при расчете данного течения с использованием стационарных двумерных уравнений Рейнольдса (2D RANS) можно получить решение, симметричное относительно геометрической плоскости симметрии цилиндра (рис.3.7а). В случае решения той же задачи в рамках нестационарных двумерных уравнений Рейнольдса (2D URANS) в следе за цилиндром формируется двумерная вихревая дорожка Кармана (рис.3.7b), а при использовании трехмерных уравнений (3D RANS) на нее накладываются продольные вихревые структуры, приводящие к деформации “основных” вихрей (рис.3.7c). Однако, при всех

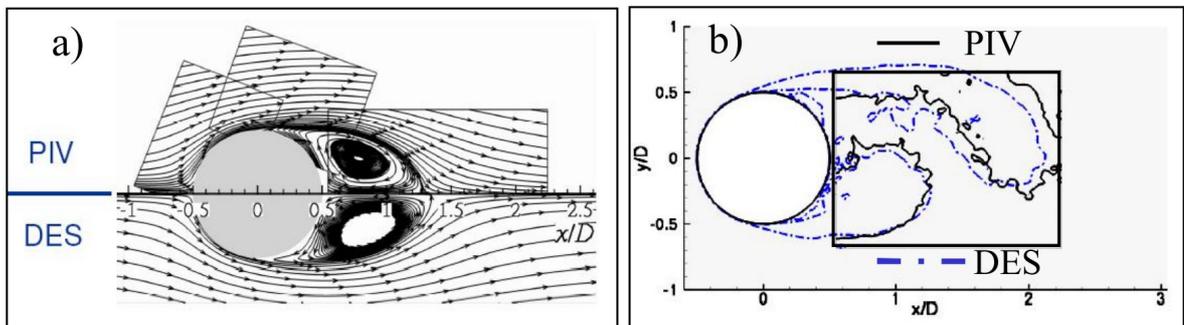
отмеченных отличиях, ни один из этих трех подходов не позволяет с приемлемой степенью точности предсказать такие важные параметры осредненного течения, как сопротивление цилиндра и длина зоны рециркуляции в его следе. В противоположность этому, при использовании DES эти параметры удается рассчитать с достаточно высокой точностью даже на относительно грубых сетках (в рассматриваемом случае - порядка полумиллиона ячеек), причем при измельчении сетки наблюдается отчетливая тенденция к сеточной сходимости, а погрешность расчета уменьшается.



**Рисунок 3.7.** Исоповерхность параметра закрутки  $\lambda_2$  (модуль второго собственного числа тензора градиента скорости), построенная по результатам расчетов обтекания цилиндра, выполненных в рамках различных подходов к моделированию турбулентности: а) – двумерные стационарные уравнения Рейнольдса, SA модель; б) - двумерные нестационарные уравнения Рейнольдса, SA модель; в) - трехмерные нестационарные уравнения Рейнольдса, SA модель; д) - SA DES на грубой сетке; е) - SA DES на мелкой сетке



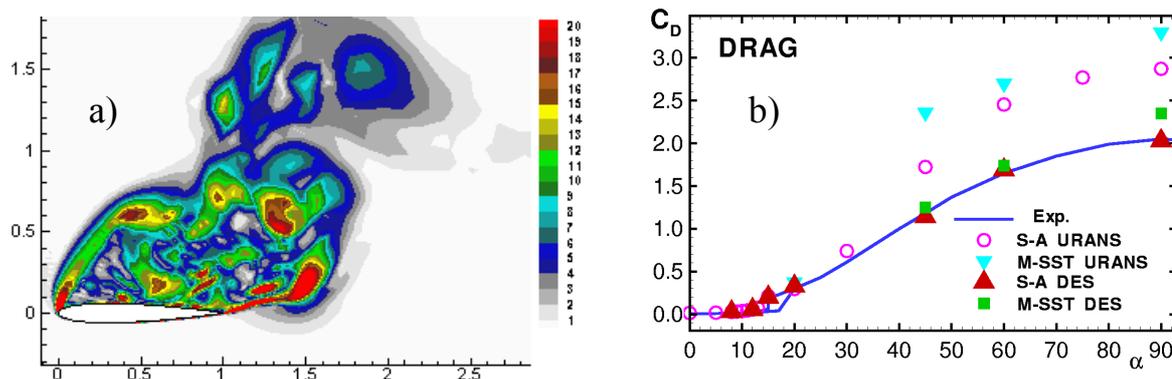
**Рисунок 3.8.** Сравнение распределений коэффициента давления по поверхности цилиндра, полученных путем осреднения по времени SA DES и SA URANS решений, с экспериментальными данными [109] (в “легенде” указаны также соответствующие значения коэффициента сопротивления цилиндра  $C_d$ )



**Рисунок 3.9.** Сравнение результатов DES с измерениями с помощью PIV [110]: а) – линии тока осредненного течения; б) – осредненное по фазе мгновенное поле поперечной составляющей завихренности

Об этом убедительно свидетельствуют рисунки 3.8 и 3.9, на которых представлено сравнение результатов расчетов данного течения с использованием DES на разных сетках с соответствующим решением 2D URANS (оно является сошедшимся по сетке, то есть практически не изменяется при ее дальнейшем измельчении) и с результатами измерений [109], [110].

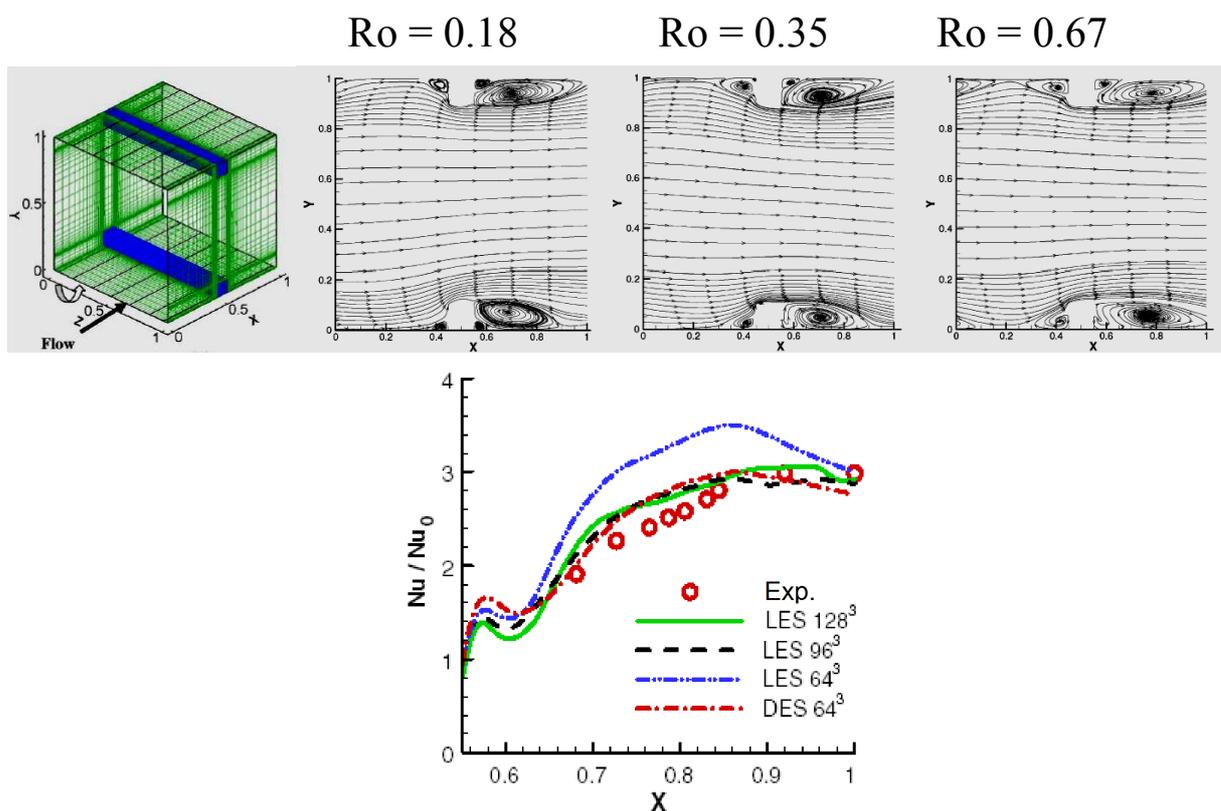
Результаты одного из первых исследований, проведенных с помощью DES, а именно, результаты расчета обтекания профиля NASA0012 при углах атаки в диапазоне от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  представлены на рисунке 3.10.



**Рисунок 3.10.** Результаты расчетов обтекания профиля NACA0012 при  $Re = 10^5$ : а) мгновенное поле модуля завихренности из расчета с помощью SA DES при угле атаки  $45^\circ$ ; б) сравнение с экспериментом [111] расчетных зависимостей коэффициента сопротивления профиля от угла атаки, полученных с использованием SA и SST 2D URANS и с помощью SA и SST DES

Рисунок демонстрирует значительное превосходство DES над RANS. В частности, из него видно, что RANS и DES дают близкие результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом, только при относительно низких значениях угла атаки ( $\alpha < 30^\circ$ ). В случае же больших углов атаки, при которых за профилем формируется обширная отрывная зона, результаты расчетов, полученные с использованием двух RANS моделей, сильно отличаются между собой и далеки от эксперимента, в то время как обе версии DES предсказывают очень близкие и прекрасно согласующиеся с экспериментом значения коэффициента сопротивления. Следует подчеркнуть, что хотя расчетная сетка в трехмерных DES расчетах была примерно в 30 раз больше двумерной сетки, использовавшейся в URANS, ее общее число узлов составляло около 400,000, что по современным меркам является весьма скромным (проведение описанных расчетов на современных персональных компьютерах занимает не более суток).

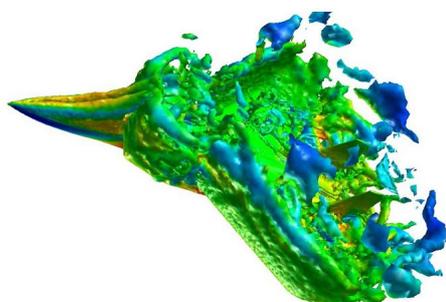
Один из примеров успешного применения DES для расчета сложных внутренних течений и теплообмена представлен на рисунке 3.11.



**Рисунок 3.11.** Расчетная область, поверхностная сетка и результаты DES развитого течения во вращающемся канале с оребренными стенками при различных скоростях вращения (верхний ряд) и результаты расчета теплообмена при отсутствии вращения [112] ( $Nu_0$  – число Нуссельта при развитом течении в канале без оребрения [113])

Речь идет о развитом турбулентном течении во вращающемся канале квадратного сечения с оребренными нагретыми стенками [112] (см. левую верхнюю рамку на рисунке 3.11). Число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости  $U_b$  и стороне канала  $L$ , составляло 20 000, а число Россби  $Ro = \omega L / U_b$ , ( $\omega$  – угловая скорость вращения канала) изменялось в диапазоне от 0.18 до 0.67. Как видно из рисунка, DES позволяет рассчитать данное течение и теплообмен с точностью, не уступающей LES. При этом расчетная сетка DES содержала примерно в 3.4 раза меньше узлов, чем сетка LES, а общие затраты машинного времени на проведение DES были примерно в 5 раз меньше, чем в LES, благодаря возможности увеличения шага интегрирования по времени при проведении расчетов на более грубой сетке.

Приведем еще несколько примеров применения DES, свидетельствующих о возможности его использования для решения исключительно сложных задач аэродинамики, представляющих непосредственный практический интерес, а также для решения задач аэроакустики.



|     |          | $C_L$ | $C_D$ | $C_M$  | $\%C_L$ | $\%C_D$ | $\%C_M$ |
|-----|----------|-------|-------|--------|---------|---------|---------|
|     | Exp      | 0.781 | 1.744 | -0.466 |         |         |         |
|     | Coarse   | 0.747 | 1.677 | -0.431 | -4.25%  | 3.86%   | -7.62%  |
| DES | Baseline | 0.736 | 1.616 | -0.495 | -5.70%  | -7.35%  | 6.10%   |
|     | Fine     | 0.759 | 1.648 | -0.457 | -2.81%  | -5.52%  | -2.00%  |
|     | Coarse   | 0.855 | 1.879 | -0.504 | 9.49%   | 7.73%   | 8.17%   |
| S-A | Baseline | 0.852 | 1.867 | -0.523 | 9.09%   | 7.05%   | 12.22%  |
|     | Fine     | 0.860 | 1.880 | -0.507 | 10.22%  | 7.78%   | 8.72%   |

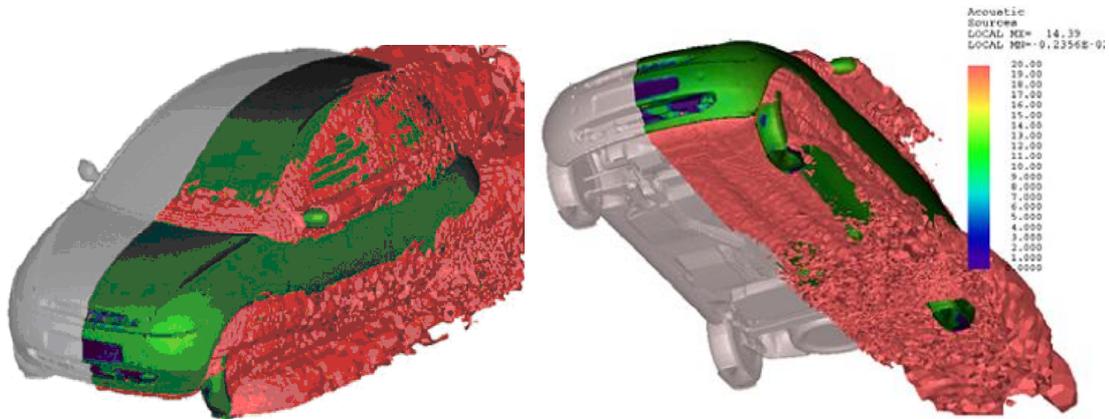
**Рисунок 3.12.** Мгновенная изоповерхность Q-критерия  $Q=0.5(\Omega^2-S^2)$  из SA DES обтекания истребителя F-15 под углом атаки  $65^\circ$  (цветом показано давление) и сопоставление результатов расчетов коэффициентов интегральных сил и момента, рассчитанных с помощью SA RANS и SA DES [46]

Так, на рис. 3.12 представлены результаты расчета обтекания истребителя F-15 под углом атаки  $65^\circ$ , полученные с помощью SA DES в работе [46] с использованием коммерческого CFD кода COBALT на трех последовательно измельченных сетках. Видно, что на самой мелкой из них (она содержит около 6 миллионов ячеек) погрешность расчета интегральных характеристик течения (подъемной силы, силы сопротивления и крутящего момента) оказывается меньше 6%, в то время как погрешность расчета этих характеристик с использованием SA RANS на той же сетке превышает 10%.

Два примера аэроакустических приложений DES представлены на рисунках 3.13 и 3.14.

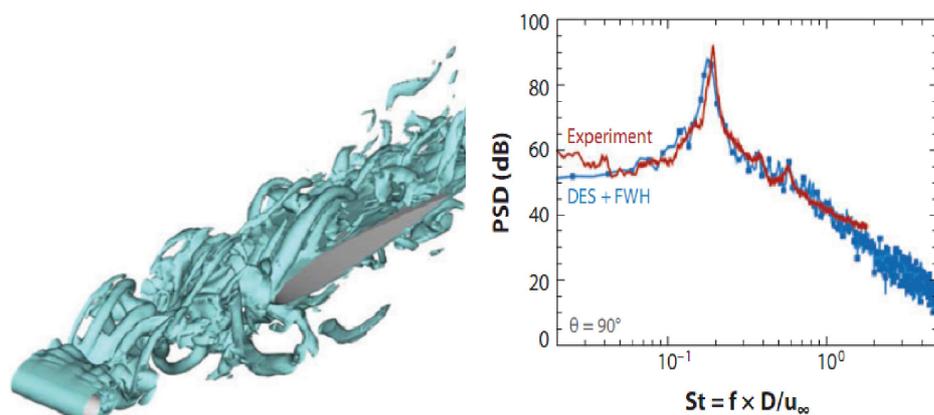
Первый из них относится к расчету обтекания автомобиля Форд [114] (расчет выполнен с помощью коммерческого CFD кода STAR-CD) и показывает, что основными источниками генерируемого при этом шума являются боковое зеркало заднего

вида, углубления для “дворников”, передняя стойка кузова, арки колес, крыши и след за автомобилем.



**Рисунок 3.13.** Мгновенная изоповерхность интенсивности источников шума, рассчитанных на основе расчета обтекания автомобиля Форд с помощью SADES [114]

Второй пример, показанный на рисунке 3.14 (расчет обтекания конфигурации цилиндр – аэродинамический профиль [115]), дает количественное представление о возможностях DES при расчете шума, генерируемого в дальнем поле сложным турбулентным потоком, формирующимся при взаимодействии следа за тонким цилиндром с аэродинамическим профилем.



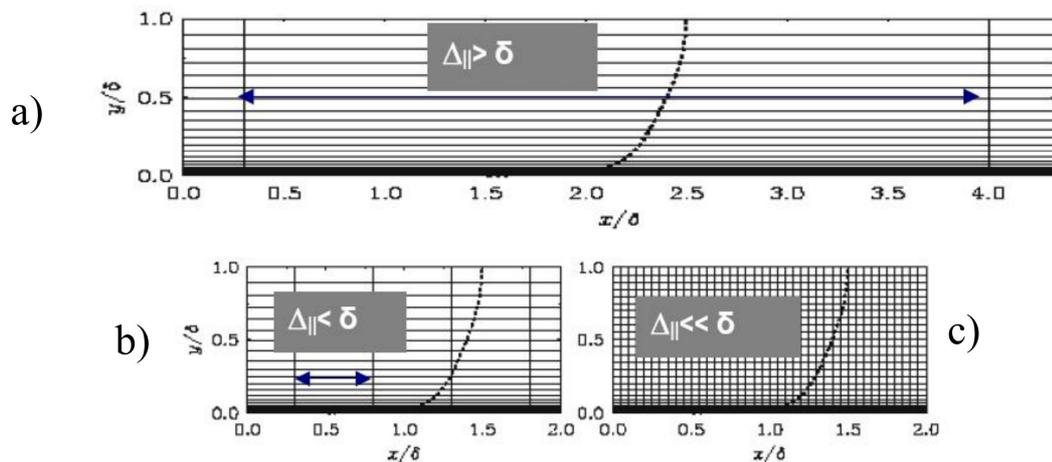
**Рисунок 3.14.** Изоповерхность завихренности из расчета обтекания профиля в следе за цилиндром методом DES и сравнение расчетного и экспериментального энергетических спектров шума, генерируемого системой в дальнем поле [115]

### 3.5. Недостатки оригинальной версии DES и модификации, предложенные для их устранения

Как уже отмечалось, наряду с широким спектром возможностей и важными достоинствами DES по сравнению с RANS при расчете течений с обширным отрывом, в процессе интенсивной эксплуатации DES были выявлены также некоторые недостатки данного метода. Остановимся на них более подробно.

#### 3.5.1. Переключение DES в LES-режим внутри пограничного слоя, обусловленное измельчением шагов сетки

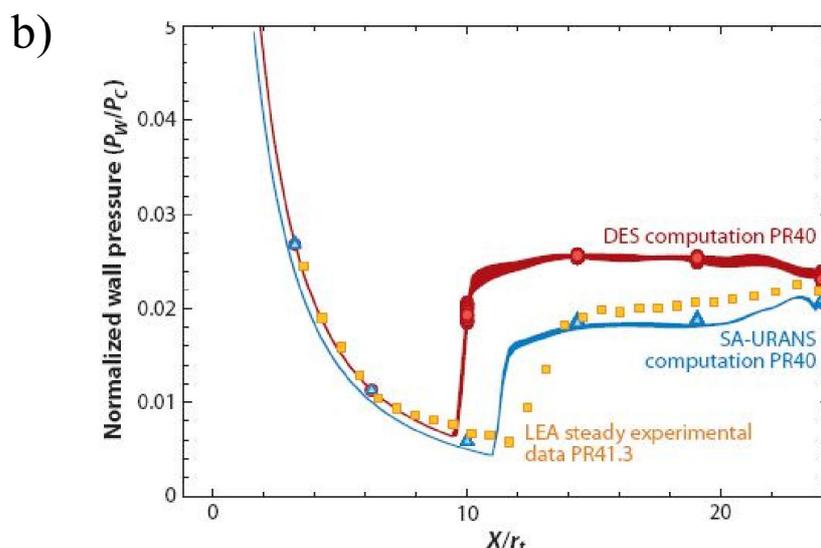
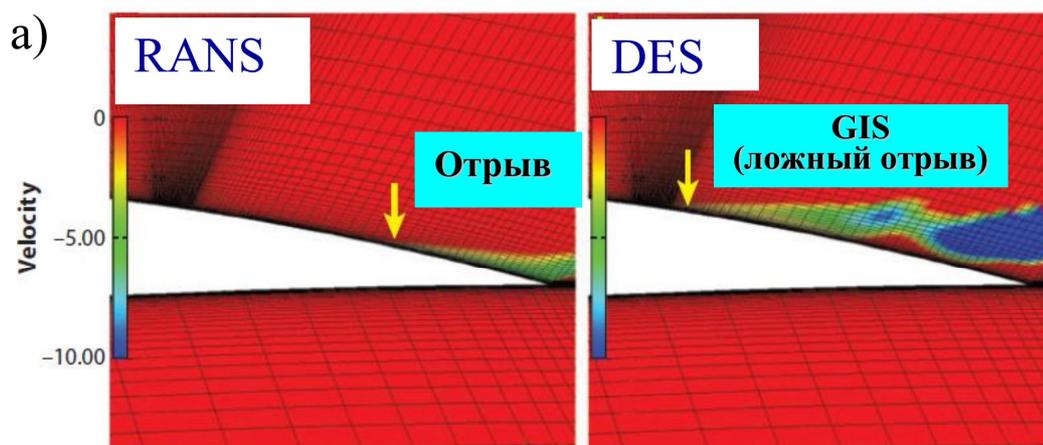
Данный недостаток DES проявляется при уменьшении шагов расчетной сетки в направлениях тангенциальных к обтекаемой поверхности  $\Delta_{\parallel}$  (см. рис. 3.15).



**Рисунок 3.15.** Три возможных типа сеток в пограничном слое: а) – типичная сетка для RANS и DES; б) – промежуточная сетка; в) – типичная сетка для LES

Напомним, что идея DES состоит в том, что *весь* присоединенный пограничный слой или, по крайней мере, основная его часть должны находиться в RANS области DES. Однако оригинальная формулировка DES (см. раздел 3.2) гарантирует выполнение этого требования лишь при условии, что шаги  $\Delta_{\parallel}$

удовлетворяют неравенству  $\Delta_{\parallel} > \delta$  ( $\delta$  - толщина пограничного слоя – см. рис. 3.15a). Такие сетки являются типичными для RANS расчетов и, как правило, позволяют получить сошедшиеся (практически не изменяющиеся при дальнейшем измельчении сетки) решения. Однако в некоторых случаях, например, вследствие локальных особенностей формы обтекаемой поверхности, для получения точного решения RANS требуется уменьшение  $\Delta_{\parallel}$ , что приводит к необходимости использования “промежуточной сетки” (см. рис. 3.15b), в которой неравенство  $\Delta_{\parallel} > \delta$  не выполняется. Такая же ситуация может возникнуть из-за наличия сильных градиентов параметров потока в направлениях параллельных стенке, как это имеет место, например, при взаимодействии с пограничным слоем скачков уплотнения, а также при фиксированном шаге по продольной координате из-за увеличения толщины пограничного слоя вдоль по потоку под воздействием положительного градиента давления. Как следует из формулировки DES, подробно представленной в разделе 3.2, это приводит к тому, что переключение DES из RANS в LES режим происходит *внутри* пограничного слоя. Однако в “промежуточных” сетках величина  $\Delta_{\parallel}$  недостаточно мала для LES пограничного слоя (для этого требуется “LES сетка” с существенно меньшими значениями  $\Delta_{\parallel}$ , показанная на рис. 3.15c). В результате, модельная часть турбулентных напряжений в LES области уменьшается по сравнению с RANS, а их разрешенная часть из-за грубости сетки оказывается недостаточной для компенсации возникшего “дефицита”. Это приводит к существенному снижению точности расчета таких важных характеристик, как коэффициент трения, а при наличии положительного градиента давления может привести даже к ложному (“индуцированному сеткой”) отрыву пограничного слоя.



**Рисунок 3.16.** Ложный отрыв пограничного слоя от поверхности профиля (a) и от стенок сопла (b) при проведении SA-DES на сетках промежуточного типа [116]

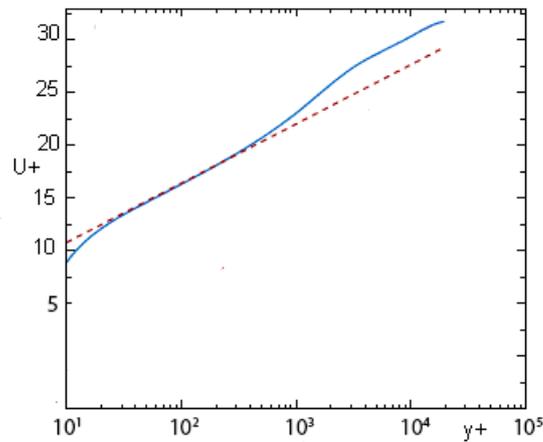
Это явление (в англоязычной литературе оно получило название Grid-Induced Separation или GIS) иллюстрирует рисунок 3.16, на котором сравниваются решения, полученные с помощью SA RANS и SA DES при расчете обтекания профиля и течения в сверхзвуковом сопле с использованием сеток промежуточного типа. Видно, что в рамках DES отрыв потока в обоих случаях происходит существенно раньше, чем при использовании RANS, что противоречит исходной концепции DES, согласно которой весь присоединенный пограничный слой, включая точку отрыва, должен описываться RANS ветвью DES.

Для устранения или, по крайней мере, значительного ослабления описанных выше отрицательных свойств оригинальной версии DES в работе [104] была предложена ее соответствующая модификация, получившая название Delayed DES (Задержанный DES или DDES). Этот метод и примеры, демонстрирующие его эффективность, представлены в разделе 3.6.

### **3.5.2. Формирование двух логарифмических участков на профиле скорости в присоединенных пограничных слоях при использовании DES в качестве LES с пристеночным моделированием**

Как подчеркивалось выше, метод DES разрабатывался для расчета отрывных течений, и его применение в качестве LES с пристеночным моделированием присоединенных течений (Wall Modeled LES – см. раздел 1.3) авторами DES не предполагалось. Однако попытка такого рода использования SA DES, предпринятая в 2000 г. в работе [117], оказалась достаточно успешной: полученные в ней результаты расчета установившегося турбулентного течения в плоском канале были сопоставимы по точности с аналогичными результатами “специализированных” WMLES подходов. В частности, было показано, что при увеличении числа Рейнольдса DES не требует измельчения сетки в направлениях параллельных стенке и, таким образом, допускает использование неограниченных значений соответствующих шагов сетки, выраженных в единицах “закона стенки” ( $\Delta_x^+ = \Delta_x \sqrt{\tau_w / \rho} / \nu$  и  $\Delta_z^+ = \Delta_z \sqrt{\tau_w / \rho} / \nu$ ), что, собственно, и является основным преимуществом WMLES. Однако, как и при использовании большинства других моделей WMLES, в профиле скорости, рассчитанном с использованием DES, возникает дефект, а именно, вместо одного логарифмического участка формируются два таких

участка, имеющих одинаковый (правильный) наклон, но несколько сдвинутых друг относительно друга.



**Рисунок 3.17.** Профиль скорости в установившемся турбулентном течении в плоском канале, рассчитанный с помощью SA DES [117]

Данный дефект, который хорошо виден на рис. 3.17, приводит к сильному (до 65%) завышению локального наклона профиля скорости  $du/dy$  в окрестности точки  $y = \Delta_{\parallel}$  и к большой (до 15%) ошибке в расчете трения на стенках канала, что, естественно, недопустимо для такого простого течения.

Как уже отмечалось, возникновение двух сдвинутых относительно друг друга логарифмических участков на профиле скорости в присоединенных пограничных слоях (этот эффект получил в литературе название Log-Layer Mismatch – LLM [116]) характерно не только для DES, но и для других гибридных WMLES моделей. Это явление объясняется следующим образом.

Внутренний логарифмический участок формируется в RANS области WMLES (и DES, в частности), благодаря тому, что все “хорошие” RANS модели настроены таким образом, чтобы гарантировать наличие такого участка. Внешняя же часть профиля скорости формируется в области действия LES, который начинает работать “правильно” (то есть воспроизводить логарифмический

закон) лишь тогда, когда расстояние от стенки до рассматриваемой точки становится много большим, чем максимальный пространственный шаг используемой сетки. В результате, два логарифмических участка оказываются сдвинутыми друг относительно друга, а между ними возникает более или менее протяженный (зависящий от конкретных особенностей используемого WMLES метода) переходный участок.

Устранение LLM является исключительно важной задачей, поскольку ее решение открывает возможность применения WMLES при расчете сложных турбулентных течений на доступных уже в настоящее время компьютерах. Еще более привлекательной представляется идея создания комбинированного подхода, который функционировал бы как DES / DDES при расчете течений с отрывом и автоматически переходил в режим WMLES, не приводя при этом к LLM, при расчете присоединенных течений. Эта идея реализована в методе DDES с улучшенным пристеночным LES моделированием (DDES with Improved wall-modeling capabilities или IDDES [43]). Данный метод и примеры его применения представлены в разделе 3.6.2.

### **3.5.3. Задержка перехода к турбулентности в слоях смешения**

В рамках незонных (типа DES) RANS-LES подходов к моделированию турбулентных течений область, расположенная вверх по потоку от точки (линии) отрыва, описывается с помощью RANS моделей турбулентности. В результате, турбулентная вязкость в этой области оказывается весьма высокой. При использовании в расположенной вниз по потоку от линии отрыва LES-области дифференциальных подсеточных моделей, в частности, подсеточных версий SA и SST моделей, вследствие конвекции вязкости из RANS области, вязкость на начальном участке оторвавшегося от обтекаемой поверхности слоя смешения

также остается весьма высокой. Это усугубляется ее избыточной генерацией в данной области из-за обычно используемых в ней сильно неизотропных сеток в сочетании с подсеточным масштабом турбулентности  $\Delta_{\max}$ . В свою очередь, высокие значения вязкости на начальном участке слоя смешения приводят к задержке его распада, обусловленного неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца (КН-неустойчивостью) и, следовательно, к задержке развития хаотических трехмерных турбулентных структур (так называемого вторичного перехода к турбулентности в оторвавшемся слое смешения). Иными словами, в переходной от RANS к LES области течения (“серая область”) используется нефизическая “смесь” RANS и LES подходов, что, собственно, и приводит к некорректному описанию турбулентности в этой области. Это существенно снижает точность решения многих задач аэродинамики и делает незонные RANS-LES гибриды типа DES практически непригодными для решения задач аэроакустики, в которых затягивание перехода в слоях смешения влечет за собой совершенно неверное предсказание аэродинамического шума [118]. Эффективный способ кардинального сокращения протяженности серой области, предложенный недавно в работе [119], подробно описан в разделе 3.6.3.

## **3.6. Пути устранения недостатков оригинальной версии DES**

### **3.6.1. Метод DDES**

Как отмечалось в разделе 3.5.1, эта модификация оригинальной версии DES предназначена для исключения или, по крайней мере, значительного понижения вероятности переключения DES в LES-режим *внутри* присоединенного пограничного слоя при измельчении шагов расчетной сетки в направлениях, параллельных обтекаемой поверхности. Напомним, что оригинальная версия DES

гарантирует это только при выполнении условия  $\Delta_{\parallel} = \max\{\Delta x, \Delta z\} > \delta$ , где  $\delta$  – толщина пограничного слоя (см. рис. 3.15).

Для устранения этого недостатка, в работе [104] предложена простая модификация DES, которая была названа Delayed DES (DDES) и состоит в следующем.

Вместо исходного определения линейного масштаба DES ( $l_{DES} = \min\{l_{RANS}, C_{DES}\Psi\Delta\}$ , см. (3.13)), в DDES этот масштаб определяется соотношением

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max\{0, (l_{RANS} - C_{DES}\Psi\Delta)\}. \quad (3.21)$$

Из него следует, что при  $f_d=0$  DDES, независимо от размеров сетки (от величины  $\Delta$ ), функционирует как RANS, а при  $f_d=1$  – переходит в стандартную модель DES, поскольку в этом случае

$$\begin{aligned} l_{DDES} &= l_{RANS} - \max\{0, (l_{RANS} - C_{DES}\Psi\Delta)\} \equiv \\ &\equiv \min\{l_{RANS}, C_{DES}\Psi\Delta\} \equiv l_{DES}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким образом, если функция  $f_d$  в (3.21) близка к нулю во всей внутренней области пограничного слоя и к единице вне этой области, то, независимо от сетки, в основной части пограничного слоя DDES работает как RANS, а в остальной части течения функционирует как оригинальная модель DES.

Удовлетворяющая сформулированным требованиям эмпирическая функция  $f_d$ , предложенная в [104], имеет вид

$$f_d = 1 - \tanh[(C_{d1}r_d)^{C_{d2}}], \quad (3.23)$$

где параметр  $r_d$ , определяемый выражением

$$r_d = \frac{v + v_t}{\kappa^2 d_w^2 \max\{[0.5(S^2 + \Omega^2)]^{1/2}, 10^{-10}\}}, \quad (3.24)$$

является индикатором внутренней области пограничного слоя: в этой области его величина близка к 1.0, а затем, по мере

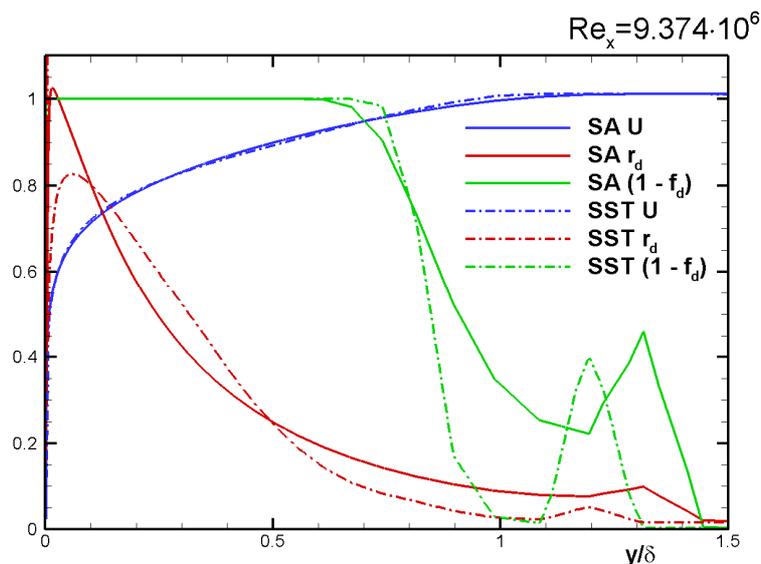
приближения к внешней границе пограничного слоя, она постепенно уменьшается до 0 [48].

Таким образом, при надлежащем подборе эмпирических констант  $C_{d1}$  и  $C_{d2}$  можно добиться желаемого поведения функции  $f_d$ , то есть ее близости к 0 внутри пограничного слоя и к 1.0 – в его внешней области и вдали от стенок. Результаты такого подбора для SA и SST DDES, полученные на примере решения задачи о расчете турбулентного пограничного слоя на плоской пластине с использованием различных сеток, приведены в таблице 3.1, а соответствующие профили скорости, функции  $f_d$  и ее аргумента  $r_d$  в пограничном слое из расчетов с помощью SA и SST DES показаны на рис. 3.18.

**Таблица 3.1**

Значения констант функции  $f_d$  для DDES на основе SA и SST моделей

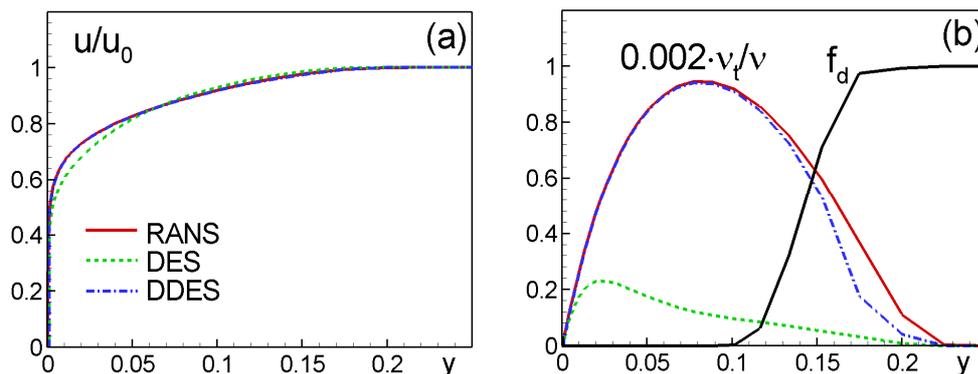
| Метод    | $C_{d1}$ | $C_{d2}$ |
|----------|----------|----------|
| SA DDES  | 8        | 3        |
| SST DDES | 20       | 3        |



**Рисунок 3.18.** Профили скорости, функции  $f_d$  и ее аргумента  $r_d$  в пограничном слое, полученные из расчетов с помощью SA и SST DDES при значениях эмпирических констант  $C_{d1}$  и  $C_{d2}$ , приведенных в Таблице 3.1.

Из рисунка видно, в частности, что при выбранных значениях констант функция  $f_d$  близка к нулю в основной части пограничного слоя (70-80% от его толщины  $\delta$ ) и, таким образом, гарантирует работу DDES в этой области в режиме RANS даже при использовании сеток с  $\Delta_{\parallel}$  существенно меньше  $\delta$ .

Завершая описание DDES, следует отметить, что различие между этим методом и оригинальным методом DES является достаточно глубоким, поскольку в DDES граница между областями RANS и LES зависит не только от используемой расчетной сетки, как в SA-DES, но и от решения через параметр  $r_d$  (3.24). Это, в принципе, может приводить к зависимости статистически установившегося решения от используемых начальных условий, что следует иметь в виду при анализе полученных результатов.



**Рисунок 3.19.** Сравнение результатов расчетов турбулентного пограничного слоя на пластине на сетке с тангенциальными шагами  $\Delta_x = \Delta_z = 0.1\delta$ , полученных с использованием SA DES, SA DDES и SA RANS моделей (значения констант  $C_{d1}$  и  $C_{d2}$  в функции  $f_d$  равны 8 и 3 соответственно)

В качестве иллюстрации эффективности DDES на рис. 3.19 результаты SA DES и SA DDES пограничного слоя, полученные на сетках с очень мелкими тангенциальными шагами (10% толщины пограничного слоя), сравниваются с аналогичными результатами расчетов по SA RANS. В идеале, решение DDES должно совпадать с решением RANS и, как видно из рисунка, этого практически удается достигнуть. В противоположность этому, при

использовании оригинальной версии DES на столь мелкой сетке турбулентная вязкость и трение на стенке оказываются существенно заниженными.

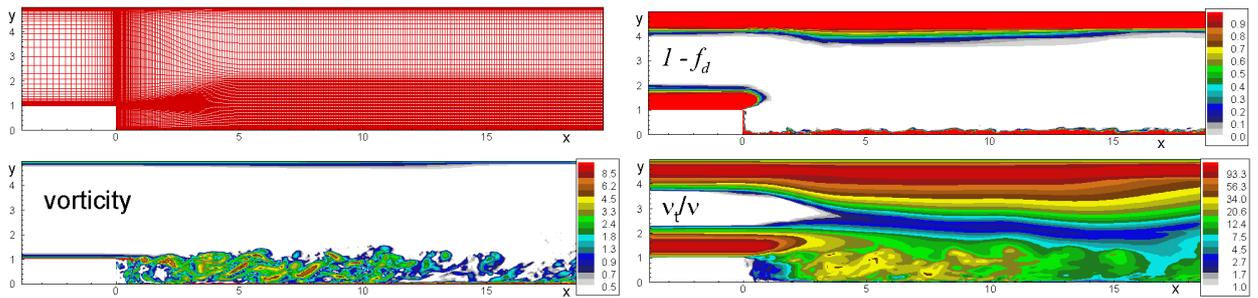
Приведем два примера расчета более сложных течений, в которых достаточно ярко проявляется превосходство DDES над DES.

Первое из них – течение в плоском канале с обратным уступом на нижней стенке, исследовавшееся в экспериментах [71]. В расчете использовалась структурированная сетка в плоскости  $XY$  (рис. 3.20), сильно сгущающаяся в направлении  $x$  в окрестности уступа, и равномерная (с шагом  $0.03h$ , где  $h$ -высота уступа) сетка по координате  $z$ . В результате, в окрестности уступа все шаги сетки оказываются намного меньшими, чем толщина пограничного слоя на стенках канала, составляющая примерно  $0.3h$ , и при использовании стандартной версии SA DES граница между RANS и LES областями DES, определяемая переключателем  $l_{DES} = \min\{d_w, C_{DES}\Psi\Delta\}$  с  $\Delta = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ , находится глубоко внутри пограничного слоя.

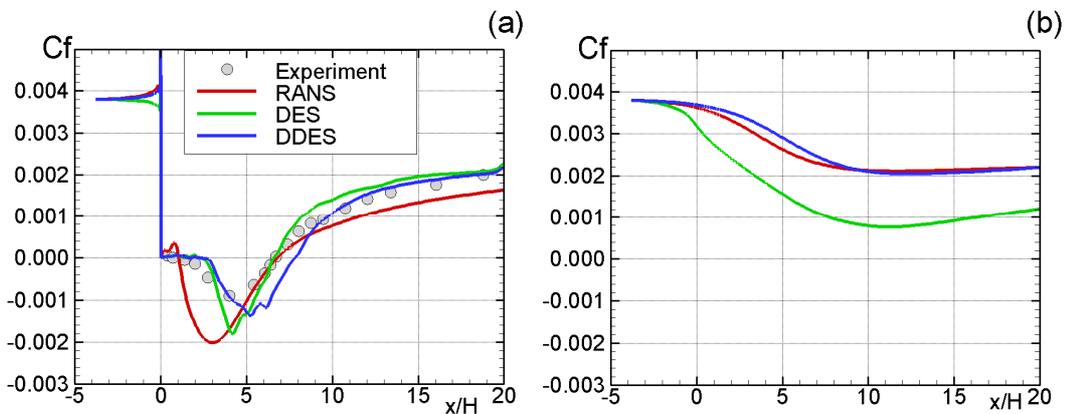
В случае же использования DDES функция  $f_d$  оказывается равной нулю как во всем присоединенном пограничном слое на верхней стенке канала, так и вблизи остальных его стенок (см. поле функции  $(1-f_d)$  на рис. 3.20). Это обеспечивает работу DDES в указанных областях в режиме RANS, о чем можно судить по полям завихренности и турбулентной вязкости, показанным на том же рисунке.

В результате, трение на верхней (прямой) стенке канала, рассчитанное с помощью DDES, практически совпадает с результатами расчета по RANS, в то время как трение, полученное с использованием оригинальной версии DES, оказывается заниженным более чем вдвое (см. рис. 3.21). Что касается точности расчета распределения трения вдоль нижней

стенки, то в этом отношении отдать предпочтение DES или DDES довольно трудно, так как DES точнее предсказывает точку присоединения оторвавшегося слоя смешения, а DDES лучше описывает процесс релаксации пограничного слоя в области вниз по потоку от этой точки. Тем не менее, как DES, так и DDES предсказывают распределение трения вдоль нижней поверхности значительно лучше, чем RANS.



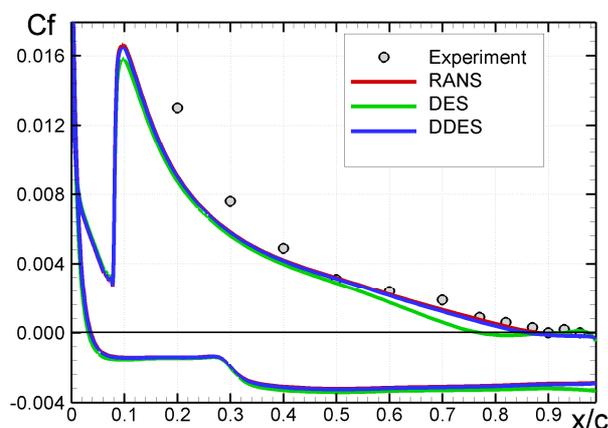
**Рисунок 3.20.** Расчетная сетка и поля функции  $(1-f_d)$ , модуля завихренности и турбулентной вязкости в канале с обратным уступом на нижней стенке [71], полученные с использованием SA DDES



**Рисунок 3.21.** Средний по времени и трансверсальной координате коэффициент трения в канале с обратным уступом на нижней стенке: (a) – нижняя стенка, (b) – верхняя стенка. Сравнение результатов расчетов по SA RANS, SA DES и SA DDES моделям с экспериментальными данными [71]

Вторым из двух упомянутых выше примеров течений, в которых наглядно проявляется преимущество DDES, является обтекание крылового профиля A-airfoil ONERA, экспериментальное исследование которого было выполнено

в работах [78, 120]. Данное течение характеризуется наличием сильного положительного градиента давления на верхней поверхности профиля, вследствие чего толщина пограничного слоя на этой поверхности увеличивается вниз по потоку и при приближении к задней кромке профиля достигает 7% от хорды профиля. В то же время, для получения достаточно точного решения сетка по продольной координате  $x$  и по поперечной (вдоль размаха крыла)  $z$  должна быть достаточно мелкой (в представленном на рис. 3.22 примере расчета шаги сетки  $\Delta x$  и  $\Delta z$  составляли около 0.005 хорды профиля).



**Рисунок 3.22.** Сравнение расчетных распределений коэффициента трения по поверхности профиля A-airfoil ONERA при угле атаки  $13.3^\circ$ , полученных из SA DES и SA DDES, с результатами SA RANS и экспериментальными данными [78]

При этом стандартная версия SA DES предсказывает возникновение отрывного пузыря вблизи задней кромки профиля (трение в этой области становится отрицательным – см. зеленую кривую на рис. 3.22), а трение, рассчитанное по SA RANS, остается положительным (красная кривая на рисунке). Это свидетельствует о том, что ранний отрыв в DES является ложным (см. раздел 3.5.1), и, как видно из рис. 3.22, DDES полностью устраняет этот дефект DES (синяя кривая на рисунке практически совпадает с красной).

Завершая данный раздел, следует отметить, что DDES является более общим методом, чем метод DES, и переходит в последний при  $f_d=1$ , в связи с чем во вновь разрабатываемых программах следует реализовывать DDES.

### 3.6.2. Метод IDDES

Рассмотренный выше метод DDES предназначен для улучшения работы оригинальной версии DES в области его “естественных” приложений, то есть при расчете течений с массивованным отрывом. В противоположность этому, метод IDDES (Improved DDES), предложенный в работе [43], распространяет область применимости DES на расчет присоединенных течений, то есть делает его пригодным для LES с пристеночным моделированием, о котором говорилось в разделах 1.3 и 3.5.2.

В основу IDDES положена идея о возможности объединения DDES с другой гибридной RANS-LES моделью, предназначенной для WMLES, в сочетании с автоматическим выбором той или иной модели, в зависимости от того, имеется ли на входной границе LES подобласти разрешенный турбулентный контент. Соответственно, основными элементами IDDES являются DDES и WMLES ветви этого подхода и алгоритм, координирующий их работу.

Как и оригинальная версия DES, IDDES базируется на замене линейного масштаба  $l_{RANS}$  соответствующих RANS моделей (расстояния до стенки  $d_w$  в SA модели, величины  $l_{RANS}^{SST} = k^{1/2} / (\beta^* \omega)$  в SST модели и т. п.) гибридным линейным масштабом. Однако выражение для этого гибридного масштаба существенно отличается от аналогичных выражений для DES (3.13) и DDES (3.21) и имеет вид [43]

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d)l_{LES}, \quad (3.25)$$

где  $\tilde{f}_d$  и  $f_e$  - эмпирические функции ( $\tilde{f}_d \in [0,1]$ ,  $f_e \geq 0$ ).

Еще одно существенное отличие IDDES от DES и DDES состоит в том, что величина  $\Delta$ , входящая в определение линейного подсеточного масштаба для LES ( $l_{LES} = C_{DES} \Psi \Delta$ ), считается зависящей не только от шагов используемой расчетной сетки (см. 3.2), но и от расстояния от рассматриваемой точки до обтекаемой поверхности  $d_w$ , и определяется следующим выражением

$$\Delta = \min[\max(C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}), \Delta_{\max}], \quad (3.26)$$

где  $\Delta_{\max}$  и  $\Delta_{wn}$  – максимальный шаг сетки и шаг сетки в направлении нормали к обтекаемой поверхности в рассматриваемой точке, соответственно, а  $C_w = 0.15$  – эмпирическая константа.

Как показано в работе [43], такое определение  $\Delta$  позволяет использовать одно и то же значение эмпирической константы подсеточных моделей при проведении LES как свободных, так и пристеночных течений, например, значение  $C_S \approx 0.2$  в модели Смагоринского (1.9). Это обстоятельство является крайне важным для IDDES, поскольку данная модель должна функционировать в режиме LES не только вдали от обтекаемой поверхности, но и в непосредственной ее близости.

Что касается эмпирических функций  $\tilde{f}_d$  и  $f_e$ , то они предназначены для координации работы RANS и DDES/WMLES ветвей IDDES и построены таким образом, чтобы при расчете пристеночных течений модель работала по одному из следующих двух сценариев.

1. Если в присоединенной части рассматриваемого течения по тем или иным причинам имеются нестационарные турбулентные

вихревые структуры<sup>10</sup>, то IDDES должен функционировать как LES с пристеночным моделированием (WMLES), то есть как RANS во внутренней области пограничного слоя и как LES в его остальной части.

2. В противном случае, IDDES должен функционировать как DDES, то есть, при расчете присоединенных течений - как RANS во всей расчетной области, а при расчете отрывных течений - как RANS в присоединенной и как LES в отрывной областях потока.

Следует отметить, что хотя построение функций  $\tilde{f}_d$  и  $f_e$ , удовлетворяющих сформулированным требованиям, является весьма сложной задачей, выражения для этих функций, предложенные в работе [43], уже прошли достаточно надежную проверку и представляются вполне работоспособными (об этом, в частности свидетельствуют примеры применения IDDES, представленные в конце данного раздела). Ниже приводятся эти выражения с некоторыми дополнительными комментариями.

Функция  $\tilde{f}_d$  определяется как

$$\tilde{f}_d = \max\{(1 - f_{dt}), f_B\}, \quad (3.27)$$

где

$$f_{dt} = 1 - \tanh[(C_{d1} r_{dt})^{C_{d2}}], \quad (3.28)$$

$$r_{dt} = \frac{V_t}{\kappa^2 d_w^2 \max\{[0.5(S^2 + \Omega^2)]^{1/2}, 10^{-10}\}}, \quad (3.29)$$

$$f_B = \min\{2 \exp(-9\alpha^2), 1\}, \quad \alpha = 0.25 - d_w / h_{\max}. \quad (3.30)$$

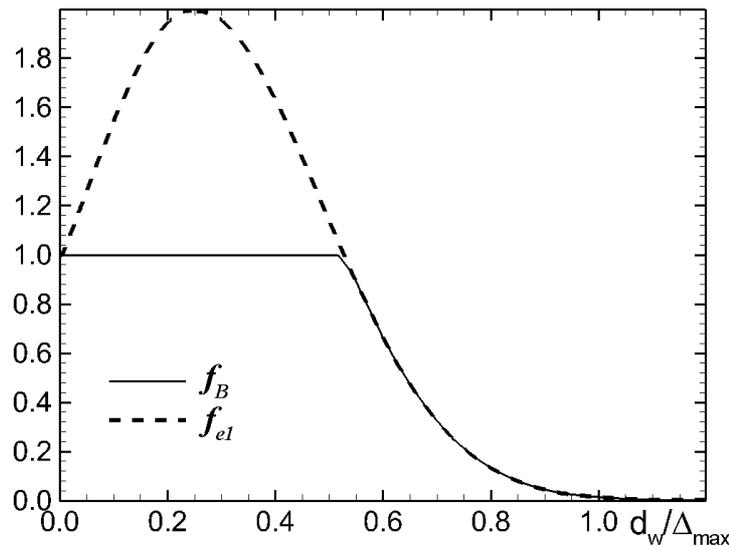
---

<sup>10</sup> Такие структуры могут быть созданы искусственно и заданы в качестве входных граничных условий или возникнуть в результате использования LES в области, расположенной вверх по потоку от рассматриваемой части течения.

Функции  $f_{dt}$  и  $r_{dt}$  по своему назначению и форме аналогичны функциям  $f_d$  и  $r_d$  (3.23), (3.24) в методе DDES и отличаются от них только тем, что вместо суммы молекулярной и турбулентной вязкостей в них входит турбулентная вязкость.

Функция  $f_B$  становится активной ( $\tilde{f}_d = f_B$ ) только при работе IDDES в режиме WMLES (первый из двух описанных выше сценариев) и зависит от отношения расстояния от рассматриваемой точки до стенки и максимального шага используемой сетки,  $d_w/\Delta_{\max}$  (см. сплошную кривую на рис. 3.23). В этом случае (при  $\tilde{f}_d = f_B$ ) общее выражение для гибридного линейного масштаба IDDES (3.25) переходит в выражение

$$l_{IDDES} = f_B(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - f_B)l_{LES}. \quad (3.31)$$



**Рисунок 3.23.** Графики функций  $f_B$  и  $f_{e1}$

Функция  $f_e$  в (3.31), как и  $f_B$ , активна только при работе IDDES в режиме WMLES и обеспечивает при этом компенсацию обусловленного работой RANS модели в “нестандартных” (нестационарных) условиях снижения уровня модельных напряжений в RANS области вблизи ее границы с LES областью. Выражение для этой функции имеет вид

$$f_e = \max(f_{e1} - 1, 0) \Psi f_{e2}, \quad (3.32)$$

где

$$f_{e1} = \begin{cases} 2 \exp(-11.09\alpha^2) & \text{при } \alpha \geq 0 \\ 2 \exp(-9.0\alpha^2) & \text{при } \alpha < 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

(график этой функции показан штриховой линией на рис. 3.23), а

$$f_{e2} = 1 - \max(f_t, f_l), \quad (3.34)$$

где

$$f_l = \tanh[(c_l^2 r_{dl})^{10}], \quad (3.35)$$

$$f_t = \tanh[(c_t^2 r_{dt})^3]. \quad (3.36)$$

Величина  $r_{dl}$  в (3.35) представляет собой “ламинарный” аналог величины  $r_d$

$$r_{dl} = \frac{\nu}{\kappa^2 d_w^2 \max\{[0.5(S^2 + \Omega^2)]^{1/2}, 10^{-10}\}}. \quad (3.37)$$

Для IDDES на основе SA модели эмпирические константы  $c_l$  и  $c_t$ , входящие в функции (3.35) и (3.36), имеют значения 3.55 и 1.63, а для IDDES на основе SST модели они равны соответственно 5.0 и 1.87 [43]. Кроме того, в [121] показано, что в рамках SST-IDDES функция  $f_e$  в (3.31) может быть опущена (положена равной 0).

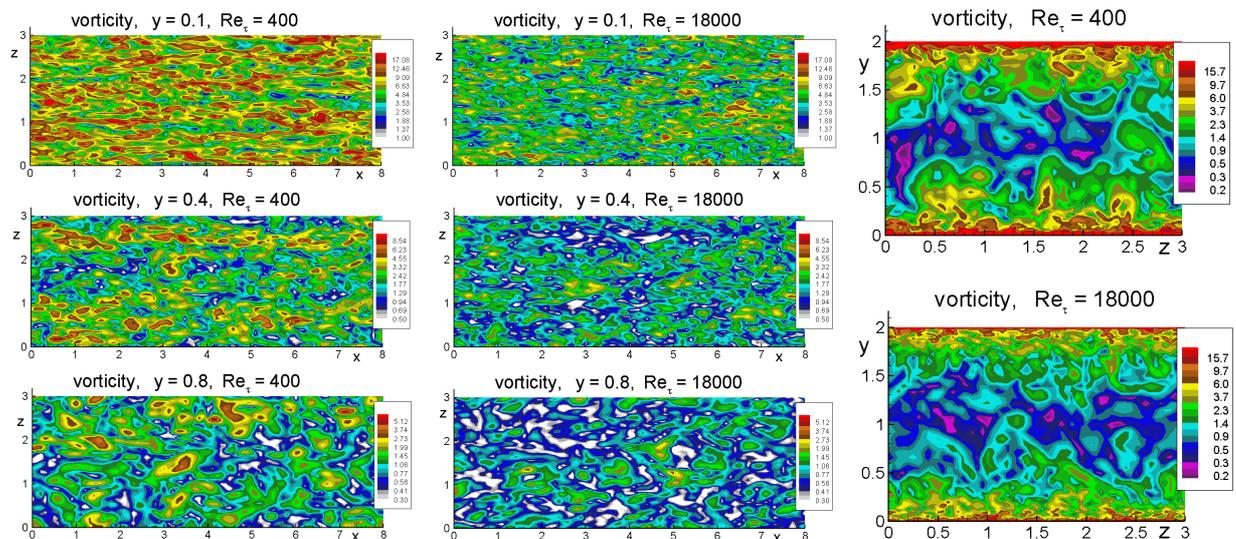
Ниже приведено два конкретных примера, иллюстрирующих работу IDDES в режиме WMLES (сценарий 1) и в смешанном (DDES и WMLES) режиме.

Функционирование IDDES как WMLES-подхода легче всего пояснить на примере расчета установившегося течения в плоском канале при различных значениях числа Рейнольдса, построенного по полувысоте канала и динамической скорости,  $Re_\tau = 0.5H\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$ . В соответствии с общепринятой практикой

проведения WMLES развитого течения в канале, все эти расчеты выполнены с использованием периодических граничных условий по  $x$ , причем для всех чисел  $Re_\tau$  используемые сетки имели одни и те же значения шагов по координатам  $x$  и  $z$ :  $\Delta_x = 0.05H$ ,  $\Delta_z = 0.025H$  ( $H$  - полная высота канала).

Результаты описанных расчетов, полученные с использованием IDDES на основе SA и SST RANS моделей, представлены на рисунках 3.24 - 3.26.

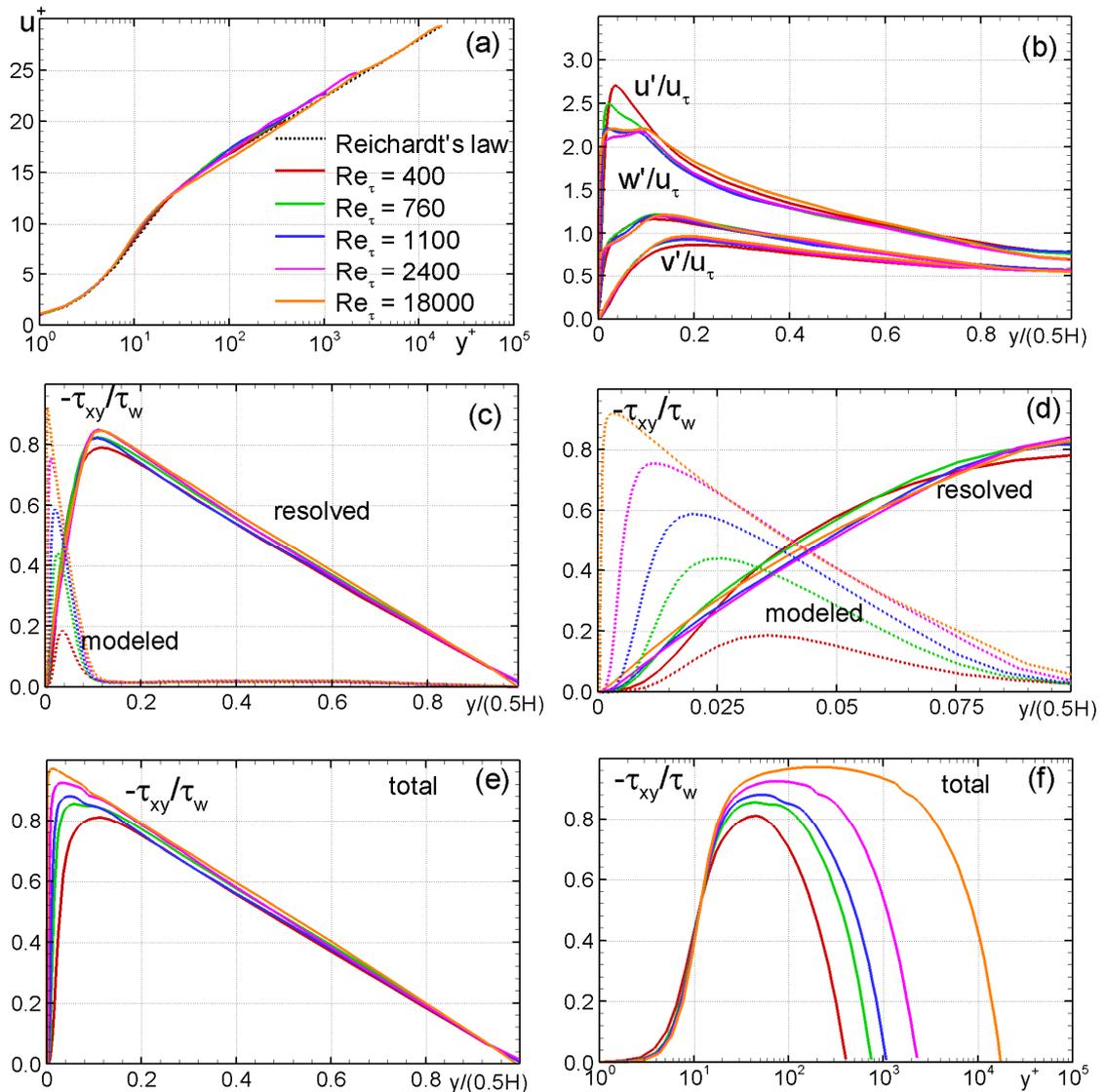
Рисунок 3.24 свидетельствует о том, что, независимо от числа Рейнольдса, IDDES адекватно описывает структуру турбулентности в канале и, в частности, воспроизводит постепенное усиление анизотропии турбулентных вихрей по мере приближения к стенкам канала, наблюдаемое в экспериментах и при DNS рассматриваемого течения.



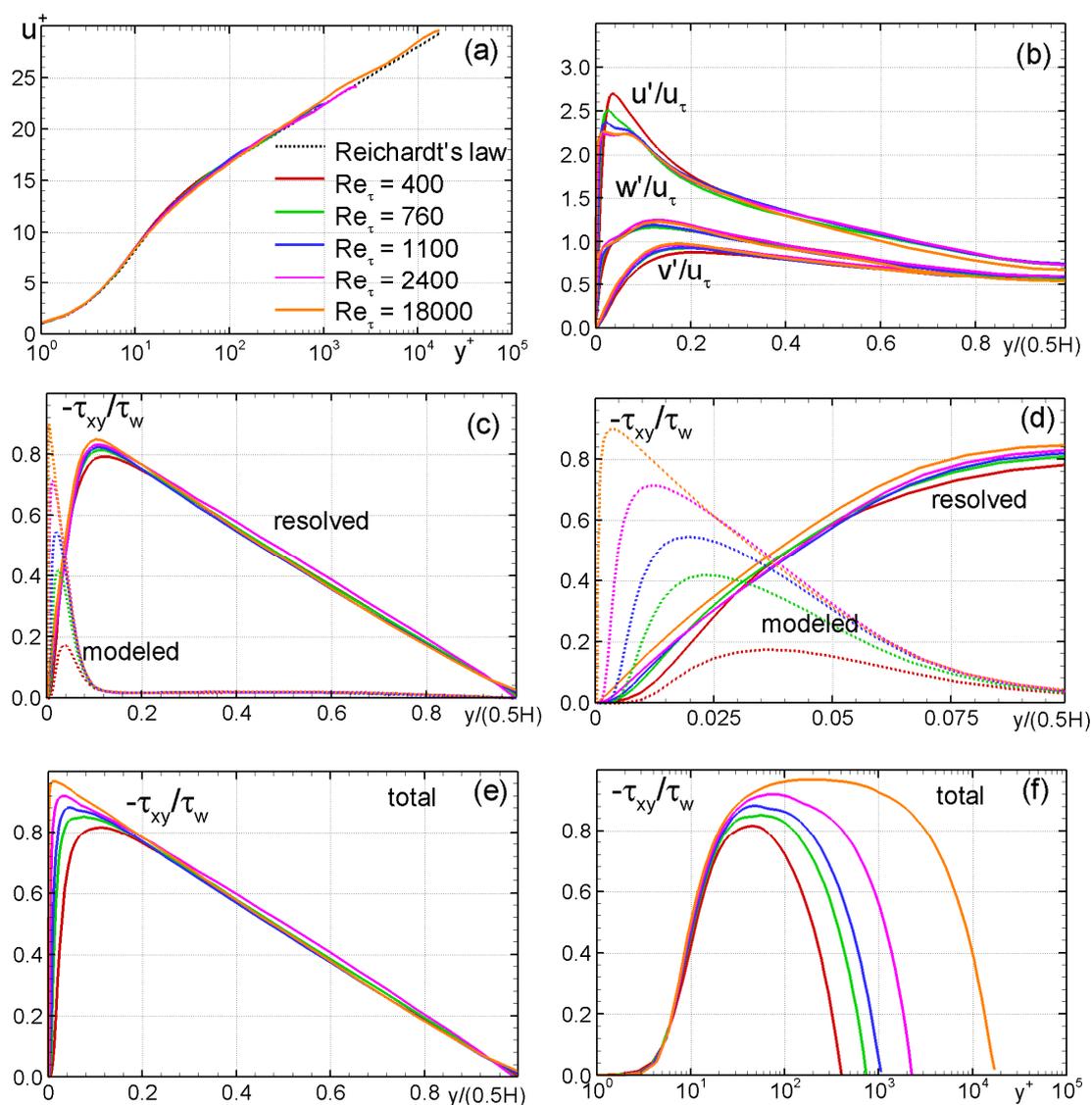
**Рисунок 3.24.** Мгновенные поля модуля завихренности в различных сечениях канала, параллельных его стенкам (первые две колонки), и в сечении, нормальном к направлению потока (третья колонка). Расчеты с использованием SA IDDES

Рисунки 3.25 и 3.26 дают количественное представление о точности расчета осредненных (профиль скорости) и пульсационных (профили напряжений Рейнольдса) характеристик

течения в канале, обеспечиваемой IDDES. Из этих рисунков видно, что при использовании как SA, так и SST базовых RANS моделей IDDES позволяет весьма точно (без заметного сдвига между логарифмическими участками профиля скорости в RANS и LES областях) рассчитать все эти характеристики и, в частности, получить вполне реалистичные распределения нормальных и касательных рейнольдсовых напряжений поперек канала.



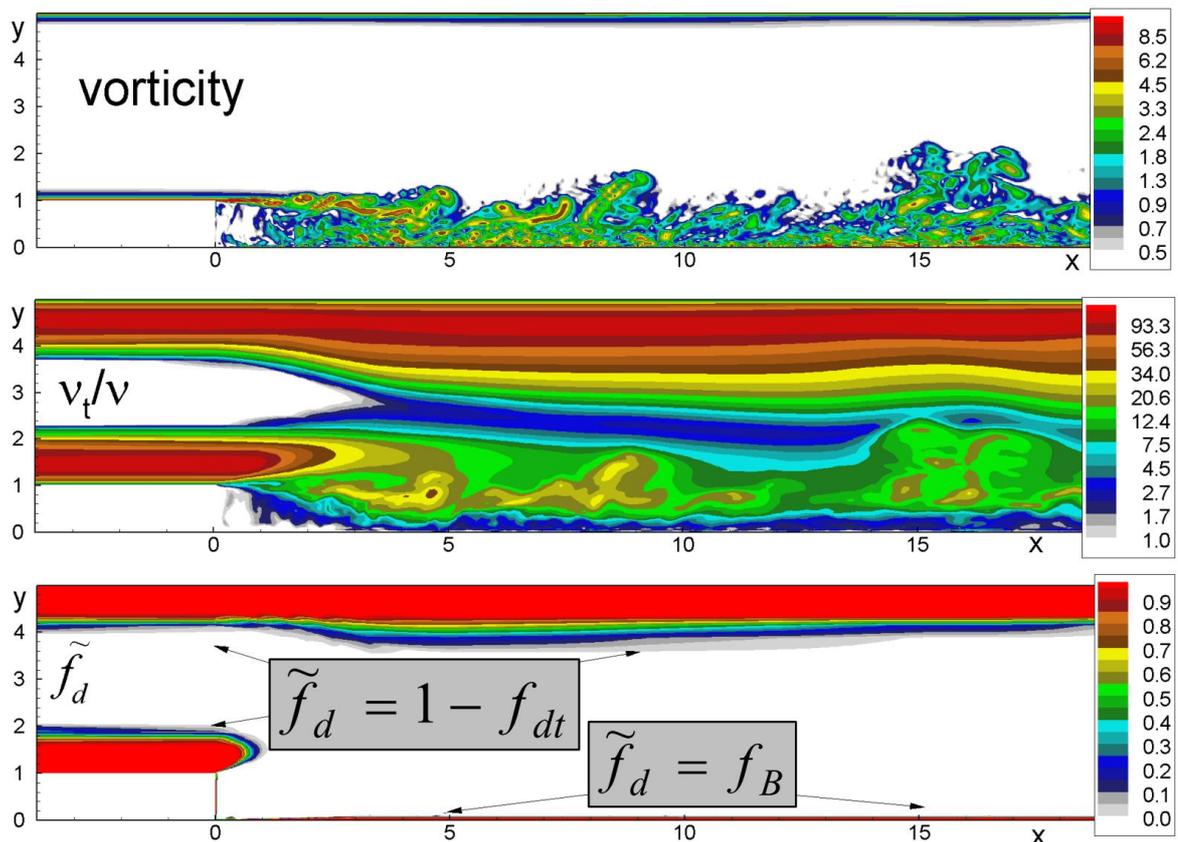
**Рисунок 3.25.** Результаты расчета установившегося течения в плоском канале при различных числах Рейнольдса с помощью SA IDDES: (a) – профиль средней скорости в координатах “закона стенки”, (b) – профили разрешенных нормальных напряжений, (c), (d) – профили разрешенных и моделируемых касательных напряжений, (e), (f) – профили суммарных турбулентных касательных напряжений



**Рисунок 3.26.** То же, что и на рис. 3.25, в случае использования SST IDDES

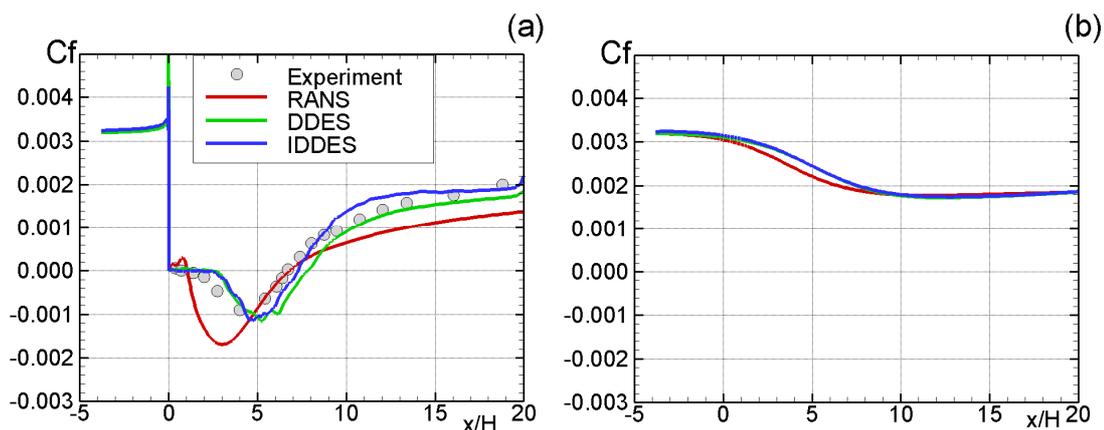
Функционирование IDDES в смешанном (DDES и WMLES) режиме иллюстрируют рисунок 3.27, на котором представлены результаты расчетов течения в плоском канале с обратным уступом на нижней стенке, уже рассматривавшегося выше при демонстрации возможностей метода DDES (см. рис. 3.20, 3.21). На этом рисунке показаны мгновенные поля модуля завихренности, турбулентной вязкости и функции  $\tilde{f}_d$ , определяемой соотношениями (3.27) - (3.30) и показывающей в каких режимах IDDES функционирует в различных областях потока. Анализ приведенных на рисунке полей свидетельствует о том, что

в основной части канала  $\tilde{f}_d = 1 - f_{dt}$ . В результате, в этой области IDDES функционирует как DDES. Иными словами, в пограничном слое на всей верхней стенке канала и на участке нижней стенки, расположенном вверх по потоку от уступа (в этих областях  $f_{dt} = 0$ ), он работает как RANS, а вне этих пограничных слоев, в том числе, в зоне рециркуляции за уступом, где  $f_{dt} = 1$ , как LES. В то же время, в области вниз по потоку от точки присоединения к нижней стенке оторвавшегося от уступа слоя смешения, вследствие наличия в этой области турбулентных пульсаций, активной оказывается WMLES ветвь IDDES ( $\tilde{f}_d = f_B$ ).



**Рисунок 3.27.** Мгновенные поля модуля завихренности, турбулентной вязкости и функции  $\tilde{f}_d$  из SA IDDES расчета течения в плоском канале с обратным уступом на нижней стенке

Именно такое (“смешанное”) функционирование IDDES при расчете рассматриваемого течения обеспечивает его заметное превосходство не только над RANS, но и над DDES. Об этом свидетельствует сопоставление результатов расчетов в рамках всех трех моделей между собой и с экспериментальными данными, показанное на рис. 3.28.



**Рисунок 3.28.** Средний по времени и трансверсальной координате коэффициент трения в канале с обратным уступом на нижней стенке: (a) – нижняя стенка, (b) – верхняя стенка. Сравнение результатов расчетов по SA RANS, SA DDES и SA IDDES моделям с экспериментальными данными [71]

### 3.6.3. DDES и IDDES с линейным подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения

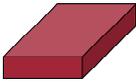
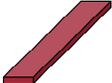
В данном разделе представлены результаты недавних исследований, выполненных авторами в рамках проекта, поддержанного Российским научным фондом (грант № 14-11-00060). С учетом важности рассматриваемых вопросов и отсутствием пока соответствующих публикаций на русском языке, материал данного раздела изложен несколько подробнее, чем в большинстве других разделов.

Как уже отмечалось в разделе 3.5.3, при использовании гибридных RANS-LES методов типа DES на начальных участках свободных и оторвавшихся от обтекаемой поверхности сдвиговых слоев (слоев смешения) имеет место сильная задержка развития

неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КН-неустойчивости) и, как следствие этого, соответствующая задержка так называемого вторичного перехода к развитой трехмерной турбулентности. Там же было упомянуто, что этот недостаток в значительной степени связан с особенностями сеток, обычно используемых в начальных областях слоев смешения. В частности, для того, чтобы достаточно точно разрешить характерные для этих областей большие градиенты скорости в поперечном направлении при разумных вычислительных затратах, сетки имеют очень мелкий шаг в направлении поперек, а иногда и вдоль слоя смешения ( $y$  и  $x$  соответственно) и относительно большой шаг в трансверсальном (или азимутальном) направлении  $z$ . Иными словами, сетки на начальном участке слоев смешения имеют ячейки типа “книга”, “карандаш” или “лента” (см. Табл. 3.2), причем в большинстве случаев используются ячейки двух последних типов.

**Таблица 3.2**

**Типы анизотропных ячеек сеток, используемых в начальной области свободных и оторвавшихся от стенок слоев смешения**  
(предполагается, что поток направлен по  $x$ , а максимальный градиент по  $y$ )

| Тип ячейки | Соотношение сторон                       | Схема   |
|------------|--|---|
| “Книга”    | $\Delta y \ll \Delta x \approx \Delta z$ |  |
| “Карандаш” | $\Delta y \approx \Delta x \ll \Delta z$ |  |
| “Лента”    | $\Delta y \ll \Delta x \ll \Delta z$     |  |

Однако такие ячейки весьма далеки от близких к изотропным ячеек, рекомендуемых для LES [122], что значительно усложняет физически корректную формулировку определения линейного подсеточного масштаба  $\Delta$ , входящего в DES и, за редким

исключением, в любые другие гибридные RANS-LES и LES модели.

Напомним, что в оригинальной версии DES это масштаб определяется как максимум размеров ячейки по всем трем направлениям, то есть полагается равным  $\Delta_{\max} \equiv \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ . Следует подчеркнуть, что данное определение никак не связано с гибридной природой DES, и что при использовании анизотропных сеток оно является более рациональным и “безопасным”, чем, например, широко используемое определение  $\Delta$  как корня кубического из объема ячейки  $\Delta_{vol} = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$ . Остановимся на этом аспекте LES более детально.

В идеальном для LES случае изотропных сеток, то есть сеток с близкими к кубическим ячейками, размеры которых находятся внутри инерционного интервала спектра турбулентности (см. раздел 1.2.2) определения  $\Delta_{\max}$  и  $\Delta_{vol}$  являются практически идентичными. Однако в рассматриваемом случае сильно анизотропных сеток, которые являются типичными для большинства практических задач, они становятся далеко не эквивалентными, причем в этом случае определение  $\Delta_{\max}$  является более корректным. Действительно, очевидно, что уменьшение размера ячейки только в одном или даже в двух из трех направлений не влияет на размеры разрешаемых сеткой изотропных вихрей (именно такие вихри характерны для инерционного интервала энергетического спектра турбулентности) и, следовательно, в масштаб подсеточной модели LES минимальное измерение ячейки входить не должно. Таким образом, несмотря на широкое использование определения  $\Delta_{vol} = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$ , начиная с 70-х годов прошлого века, его нельзя считать физически обоснованным, и удовлетворительные результаты, полученные с его использованием, во многих случаях объясняются частичной

взаимной компенсацией неточностей физического моделирования (заведомо заниженной подсеточной вязкостью) и вычислительных ошибок, обусловленных высокой численной диссипацией используемых алгоритмов.

С другой стороны, как отмечалось выше, на начальных участках сдвиговых слоев поперечный шаг сетки  $\Delta z$  обычно намного превышает два других шага, и в этой ситуации определение  $\Delta_{\max}$  оказывается слишком “консервативным”, то есть приводит к избыточной генерации подсеточной вязкости и, как следствие, к подавлению КН-неустойчивости, имеющей двумерный характер. Иными словами, это определение является “безопасным” (не ведет к преувеличению реальной разрешающей способности сетки), но контрпродуктивным с точки зрения развития турбулентности в начальной области слоя смешения.

В результате, хотя и по совершенно различным причинам, применительно к области начального участка слоя смешения оба рассмотренных определения подсеточного линейного масштаба оказываются неудовлетворительными.

Это обстоятельство послужило стимулом к поиску новых определений подсеточного линейного масштаба, учитывающих физические особенности течения и структуру типичных расчетных сеток в этой области. Такое определение было предложено в работе [119], результаты которой представлены ниже.

Прежде всего, для учета анизотропии сеток в начальной области слоя смешения предлагается использовать вместо  $\Delta_{\max}$  следующий подсеточный масштаб  $\Delta$ , зависящий не только от сетки, но и от поля скорости

$$\Delta = \tilde{\Delta}_{\omega} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \max_{n,m=1,8} |(\mathbf{l}_n - \mathbf{l}_m)|, \quad (3.38)$$

где  $\mathbf{l}_n = \mathbf{n}_{\omega} \times \mathbf{r}_n$ , вектор  $\mathbf{n}_{\omega}$  - орт вектора завихренности, а  $\mathbf{r}_n$  - радиус-векторы вершин рассматриваемой ячейки сетки ( $n = 1, \dots, 8$ ).

Масштаб  $\tilde{\Delta}_\omega$  представляет собой “диаметр” набора точек  $\mathbf{I}_n$  и может трактоваться как результат “фотографирования” рассматриваемой ячейки сетки в направлении локального вектора завихренности  $\mathbf{n}_\omega$  с последующим применением стандартного для методов типа DES подсеточного масштаба  $\Delta = \Delta_{\max}$  к полученной фотографии. Его преимущества перед стандартным определением  $\Delta_{\max}$  легко понять на примере анализа типичной ситуации, возникающей при расчете свободного сдвигового слоя, развивающегося в плоскости  $(x, y)$ , с использованием сетки, имеющей шаг по  $z$ , намного превышающий шаги по  $x$  и  $y$  (ячейки типа “карандаш” или “лента” в Таблице 3.2).

С учетом того, что на начальном участке сдвигового слоя вектор завихренности направлен вдоль оси  $z$ , в этом случае масштаб  $\tilde{\Delta}_\omega$ , определяемый по (3.38), оказывается равным  $\frac{1}{\sqrt{3}}(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ , то есть имеет порядок  $O(\max\{\Delta x, \Delta y\})$ , а не  $\Delta z$ , как это было бы при использовании стандартного определения  $\Delta_{\max}$ . С физической точки зрения это является вполне оправданным. Действительно, размеры турбулентных вихрей в рассматриваемой области имеют примерно одинаковые масштабы по  $x$  и  $y$ , а шаг сетки по  $z$  никак не сказывается на точности разрешения этих вихрей из-за квазидвумерного характера течения. При этом масштаб  $\tilde{\Delta}_\omega$  обеспечивает существенно меньшие значения вязкости, чем стандартный масштаб  $\Delta_{\max}$ , что, естественно, способствует разблокировке КН-неустойчивости и ускорению перехода к развитой турбулентности. В то же время, в полностью развитой турбулентности масштаб  $\tilde{\Delta}_\omega$  переходит в величину, близкую к стандартному масштабу DES, то есть имеет порядок  $\max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ .

Следует однако отметить, что при расчете представляющих практический интерес течений с высокими числами Рейнольдса

на доступных в настоящее время сетках использование масштаба  $\tilde{\Delta}_\omega$  не обеспечивает понижения подсеточной вязкости на начальном участке слоев смешения до уровней, достаточных для быстрого развития неустойчивости, наблюдаемого в реальных потоках. Это означает, что необходима дополнительная модификация подсеточного линейного масштаба, которая обеспечивала бы снижение турбулентной вязкости на начальных участках слоев смешения независимо от используемой сетки. Для этого необходимо построение чисто кинематического критерия, позволяющего идентифицировать двумерные и квазидвумерные области потока.

Критерий, предложенный для этой цели в работе [119] и названный авторами “мерой переориентации вихрей” (Vortex Tilting Measure - VTM), представляет собой нормализованное значение векторного произведения вектора невязкой эволюции завихренности  $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$  и самого вектора завихренности  $\boldsymbol{\omega}$

$$VTM \equiv \frac{\sqrt{6} |(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}|}{\boldsymbol{\omega}^2 \sqrt{3tr(\mathbf{S}^2) - [tr(\mathbf{S})]^2}}, \quad (3.39)$$

где  $\mathbf{S}$  - тензор скоростей деформаций, а  $tr(\cdot)$  означает след тензора.

Данный критерий изменяется в пределах от 0 до 1 и равен нулю при условии, что направление вектора завихренности совпадает с направлением какого-либо собственного вектора тензора скоростей деформаций, то есть в областях, где течение имеет двумерный и квазидвумерный характер. Именно этим определяется название VTM: ненулевые значения этого критерия соответствуют ситуациям, когда тензор скоростей деформаций стремится изменить *направление* вектора завихренности, а не просто “растягивает” или “сокращает” этот вектор. Таким образом, VTM является адекватной мерой *локальной* трехмерности течения, которая имеет место в развитой турбулентности, то есть

турбулентности, соответствующей инерционной части энергетического спектра пульсаций скорости. В таких областях поле VTM в целом близко к единице, однако в нем возможно появление острых локальных минимумов со значениями существенно меньше единицы. Это связано с ненулевой вероятностью случайного совпадения направлений вектора завихренности и собственных векторов тензора скоростей деформаций, что объясняется слабой коррелированностью ориентаций собственных векторов этого тензора и вектора завихренности.

Погрешности в идентификации областей развитой турбулентности с помощью VTM-критерия, обусловленные такими случайными минимумами, можно устранить с помощью осреднения мгновенного поля величины VTM по текущей и ближайшим соседним ячейкам сетки. В результате, осредненный VTM-критерий ( $\langle VTM \rangle$ ) позволяет автоматически детектировать квазидвумерные области потока, “склонные” к КН-неустойчивости (в них этот критерий близок к нулю).

С использованием описанного свойства величины  $\langle VTM \rangle$  в [119] построена безразмерная эмпирическая функция от этой величины  $F_{KH}(\langle VTM \rangle)$ , предназначенная для разблокировки КН-неустойчивости в начальной области сдвиговых слоев. Эта функция имеет вид:

$$F_{KH}(\langle VTM \rangle) = \max \left\{ F_{KH}^{\min}, \min \left[ F_{KH}^{\max}, F_{KH}^{\min} + \frac{F_{KH}^{\max} - F_{KH}^{\min}}{a_2 - a_1} (\langle VTM \rangle - a_1) \right] \right\}, \quad (3.40)$$

где  $F_{KH}^{\max} = 1.0$ , а эмпирические параметры  $F_{KH}^{\min}$ ,  $a_1$  и  $a_2$ , подобранные на основе серии численных экспериментов для задачи о двумерном слое смешения (см. далее), равны 0.1, 0.15 и 0.3

соответственно. График функции  $F_{KH}(\langle VTM \rangle)$  представлен на рисунке 3.29.

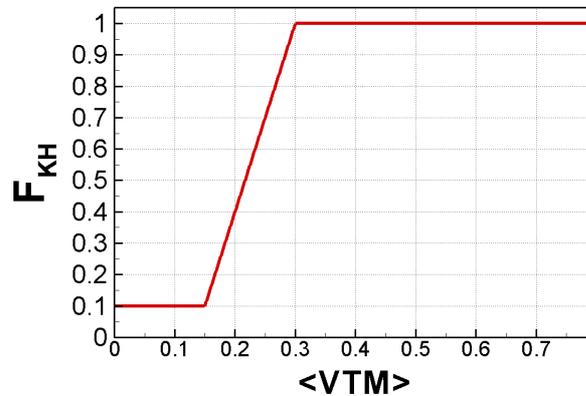


Рисунок 3.29. График функции  $F_{KH}(\langle VTM \rangle)$

Как видно из этого графика, данная функция имеет малое постоянное значение равное 0.1 при  $\langle VTM \rangle$  меньше 0.15 (область квазидвумерного течения), быстро (в диапазоне изменения  $\langle VTM \rangle$  от 0.15 до 0.3) возрастает до 1.0 и остается равной 1.0 при дальнейшем увеличении  $\langle VTM \rangle$ , то есть в области развитого турбулентного течения. Таким образом, для обеспечения дополнительного (не связанного с анизотропией сетки) уменьшения линейного подсеточного масштаба турбулентности  $\tilde{\Delta}_\omega$  (3.38) в квазидвумерных областях, необходимого для разблокировки КН-неустойчивости, следует просто домножить его на функцию  $F_{KH}(\langle VTM \rangle)$ :

$$\Delta \equiv \Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}(\langle VTM \rangle), \quad (3.41)$$

где индекс “SLA” означает “Shear-Layer-Adapted” (адаптированный к сдвиговым слоям).

В невязких областях потока из-за сингулярности формулы (3.39) при  $\omega \rightarrow 0$  в поле  $\langle VTM \rangle$  могут иметь место сильные пространственные осцилляции. Для того, чтобы исключить возможные вычислительные трудности, связанные с этими

осцилляциями, определение подсеточного масштаба (3.41) несколько модифицируется, а именно заменяется выражением:

$$\Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH} \left( \langle \text{VTM} \rangle \cdot \max \left\{ 1, \frac{0.2\nu}{\max \{ (v_t - v_{t,\infty}), 10^{-6} v_{t,\infty} \}} \right\} \right), \quad (3.42)$$

где через  $v_{t,\infty}$  обозначено значение турбулентной вязкости во внешнем потоке.

При использовании (3.42) в невязкой области потока исходное значение  $\langle \text{VTM} \rangle$  умножается на достаточно большую величину и оказывается больше 0.3, что гарантирует равенство  $F_{KH}(\langle \text{VTM} \rangle)$  единице (см. (3.40)), то есть ее фактическое “отключение”. Вместе с тем, формула (3.42) не изменяет величину  $\Delta_{SLA}$  в турбулентной зоне (при  $v_t - v_{t,\infty} > 0.2\nu$ ).

Определение подсеточного масштаба (3.42) является общим и может использоваться как в LES, так и в гибридных RANS-LES подходах. Однако конкретные способы его инкорпорации в различных методах несколько отличаются между собой.

В частности, в рамках DDES (см. раздел 3.6.1) функцию  $F_{KH}$  следует деактивировать в присоединенном пограничном слое, где DDES функционирует в режиме RANS. Для этого выражение для этой функции (3.40) заменяется выражением [119]

$$F_{KH}^{DDES} = \begin{cases} 1.0 & \text{при } f_d < (1 - \varepsilon) \\ F_{KH} & \text{при } f_d \geq (1 - \varepsilon), \end{cases} \quad (3.43)$$

где  $f_d$  определяется формулой (3.23), а  $\varepsilon = 0.01$  - эмпирическая константа.

В результате выражение подсеточного масштаба для DDES принимает вид

$$\Delta_{SLA}^{DDES} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{DDES} \left( \langle \text{VTM} \rangle \cdot \max \left\{ 1, \frac{0.2\nu}{\max \{ (v_t - v_{t,\infty}), 10^{-6} v_{t,\infty} \}} \right\} \right) \quad (3.44)$$

и используется в DDES вместо  $\Delta_{\max} = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ .

В рамках IDDES аналогичная функция  $F_{KH}$  имеет вид

$$F_{KH}^{IDDES} = \begin{cases} 1.0 & \text{при } \tilde{f}_d > \varepsilon \\ F_{KH} & \text{при } \tilde{f}_d \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.45)$$

где  $\tilde{f}_d$  определяется формулой (3.27), а эмпирическая константа  $\varepsilon$ , как и в рамках DDES, равна 0.01.

Эта модификация срабатывает только в ситуациях, когда IDDES функционирует как DDES, то есть при отсутствии на входе в расчетную область нестационарных турбулентных пульсаций, и так же, как и соответствующая модификация для DDES (3.43), деактивирует функцию  $F_{KH}$  в присоединенных пограничных слоях.

В результате, в рамках IDDES модифицированное выражение для подсеточного масштаба принимает вид

$$\Delta_{SLA}^{IDDES} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{IDDES} \left( \langle \text{VTM} \rangle \cdot \max \left\{ 1, \frac{0.2\nu}{\max\{(v_t - v_{t,\infty}), 10^{-6}v_{t,\infty}\}} \right\} \right), \quad (3.46)$$

а исходное определение подсеточного масштаба турбулентности в IDDES  $\Delta = \min\{\max[C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}], \Delta_{\max}\}$  (см. раздел 3.6.2) следует заменить следующим определением

$$\Delta = \min\{\max[C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}], \Delta_{SLA}^{IDDES}\}. \quad (3.47)$$

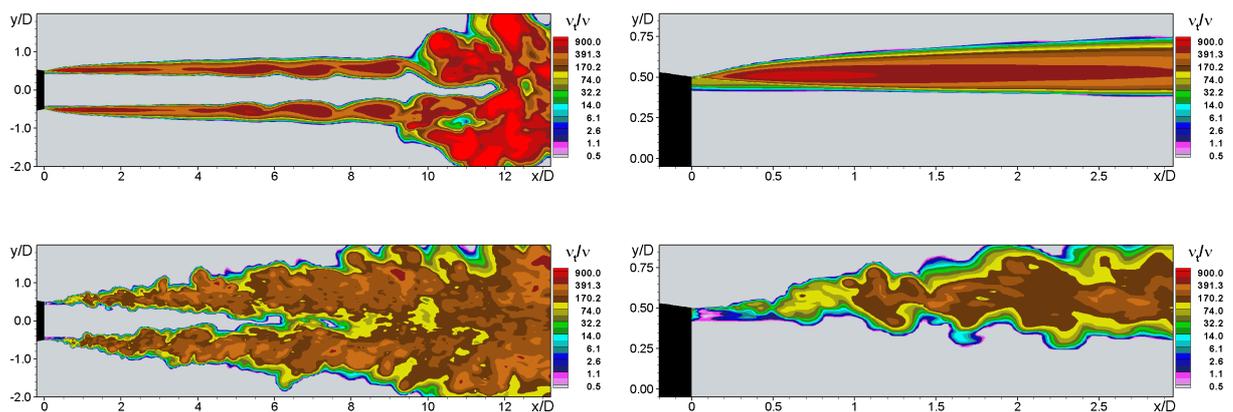
Рассмотрим в заключение несколько примеров, иллюстрирующих работу DDES и IDDES в сочетании с новыми линейными подсеточными масштабами.

Первый из них относится к расчету струйных течений, а именно к расчету классической дозвуковой необогреваемой турбулентной струи, истекающей из конического сопла с диаметром  $D = 0.06223$  м. Число Маха струи на выходе из сопла равно 0.9, а число Рейнольдса, построенное по диаметру сопла и скорости,

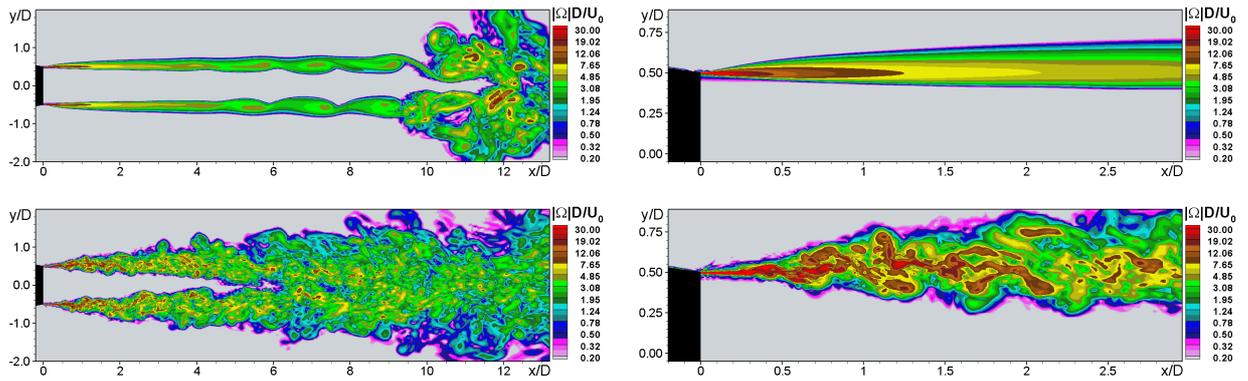
равно  $1.1 \cdot 10^6$ . Экспериментальные исследования аэродинамических характеристик этой струи проводились в большом числе работ (см., например, [123 - 127]), а шум, генерируемый ею в дальнем поле, измерялся в работе [128]. Полученные в этих работах экспериментальные данные широко используются для оценки точности различных подходов к расчету аэродинамики и шума турбулентных струй.

На рисунках 3.30 - 3.35 представлены полученные в [119] результаты расчетов данного течения, выполненных с помощью кода NTS на сетке, содержащей 4.2 миллиона узлов с использованием стандартной версии SA DDES и ее модификации  $\Delta = \Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_{\omega} F_{KH}^{DDES}$ , описанной выше.

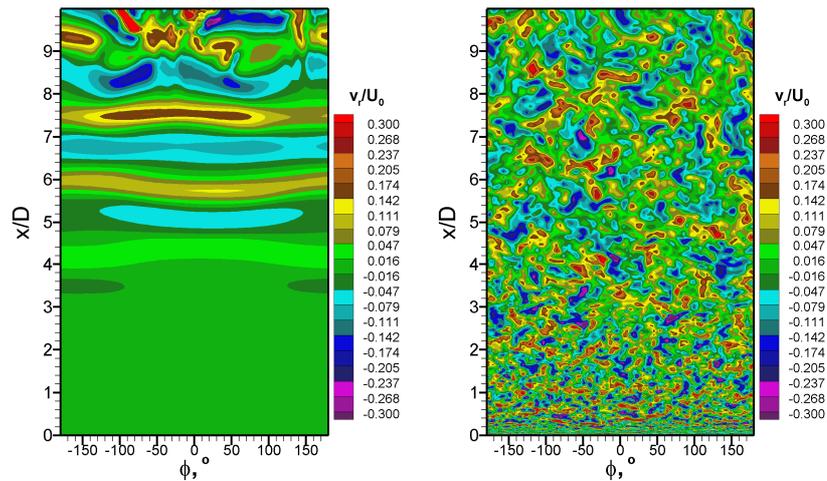
В частности, на рисунках 3.30 - 3.32 показаны различные формы визуализации результатов расчета, которые свидетельствуют о радикальном уменьшении подсеточной вязкости на начальном участке слоев смешения струи и ускорении процессов их дестабилизации и перехода к развитой трехмерной турбулентности, обеспечиваемом при использовании модифицированной модели.



**Рисунок 3.30.** Мгновенные поля турбулентной вязкости в меридиональном сечении струи и их увеличенные фрагменты из расчетов с помощью стандартного ( $\Delta = \Delta_{\max}$ ) и модифицированного ( $\Delta = \tilde{\Delta}_{\omega} F_{KH}^{DDES}$ ) SA DDES. Верхний ряд – стандартная версия; нижний ряд – модифицированная версия



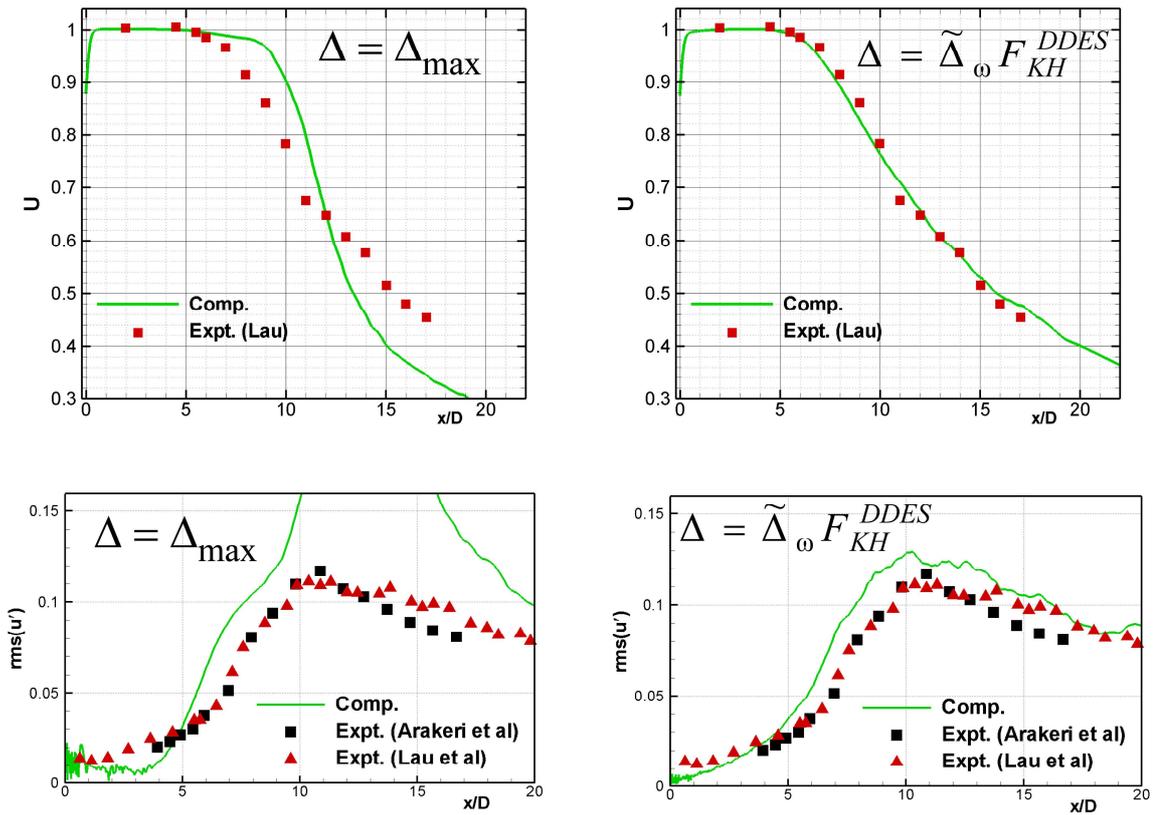
**Рисунок 3.31.** То же, что и на рис. 3.30, для мгновенного поля завихренности



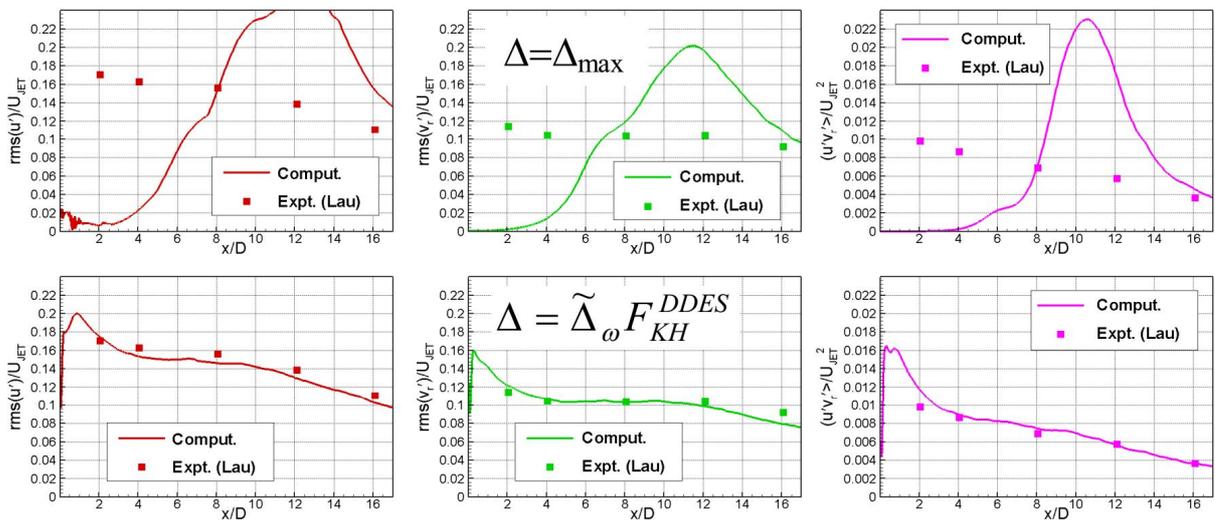
**Рисунок 3.32.** Мгновенные поля радиальной составляющей вектора скорости на “развертке” сеточной поверхности, находящейся внутри слоя смешения. Слева: расчет с помощью стандартного SA DDES ( $\Delta = \Delta_{\max}$ ), справа: расчет с помощью модифицированного SA DDES ( $\Delta = \tilde{\Delta}_{\omega} F_{KH}^{DDES}$ )

Это, в свою очередь, приводит к столь же радикальному улучшению согласования расчетных данных с экспериментом по аэродинамическим характеристикам струи, по статистическим характеристикам ее турбулентности и по шуму, генерируемому струей в дальнем поле (см. рис. 3.33 - 3.35).

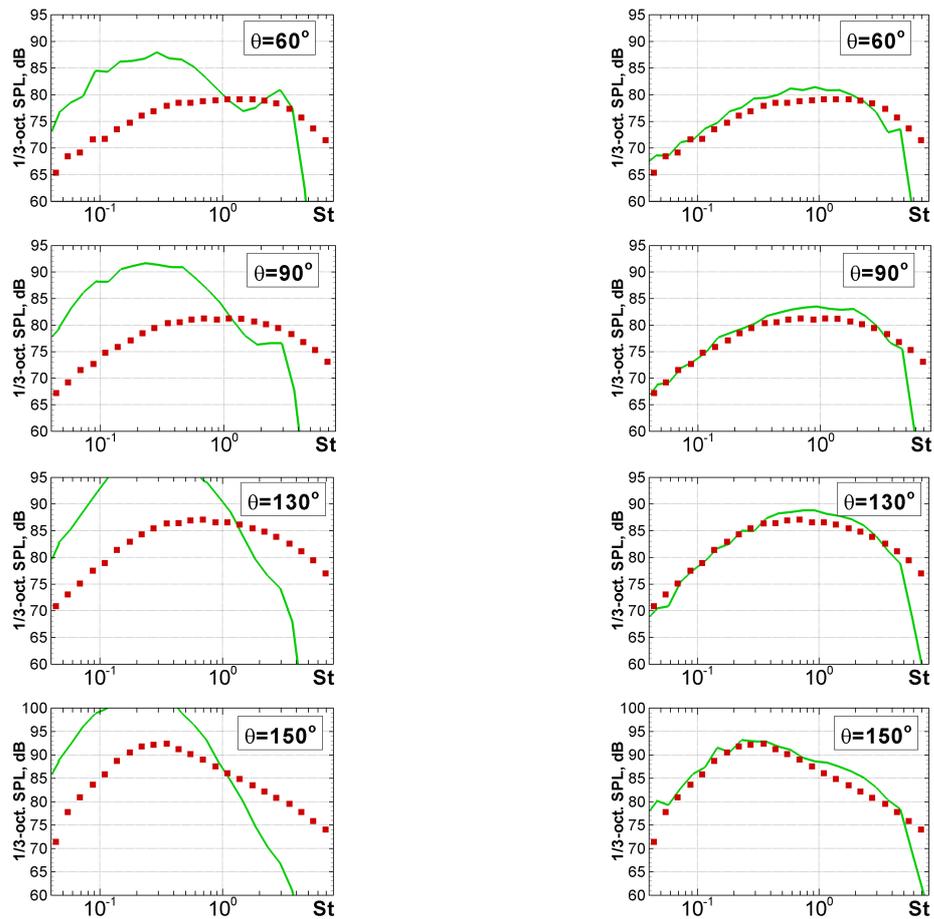
Приведенные результаты позволяют констатировать, что применительно к струйным течениям описанная модификация DDES позволяет успешно решить проблему задержки перехода к развитой турбулентности на начальном участке струи, то есть проблему “серой области”, которая неоднократно упоминалась выше.



**Рисунок 3.33.** Сравнение с экспериментом распределений средней скорости (верхний ряд) и среднеквадратичных значений пульсаций продольной скорости (нижний ряд) вдоль оси струи, рассчитанных с помощью стандартной и модифицированной версий DDES



**Рисунок 3.34.** Сравнение с экспериментом продольных распределений пиковых значений среднеквадратичных пульсаций различных компонент скорости и касательного напряжения, рассчитанных с помощью стандартной (верхний ряд) и модифицированной (нижний ряд) версий DDES



**Рисунок 3.35.** Сравнение с экспериментом 1/3-октавных спектров шума, генерируемого струей в дальнем поле, рассчитанных с использованием стандартной (левая колонка) и модифицированной (правая колонка) версий DDES

Еще один пример, демонстрирующий преимущества модификации DDES, базирующейся на использовании подсеточного масштаба  $\Delta = \Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}$ , при расчете свободных слоев смешения представлен на рисунках 3.36 - 3.41. На них показаны полученные с использованием оригинальной и модифицированной версий DDES результаты расчетов плоского турбулентного слоя смешения, развивающегося вниз по потоку от разделительной пластины, помещенной в аэродинамическую трубу, в которой проводились эксперименты [129] (см. схему на рис. 3.36).

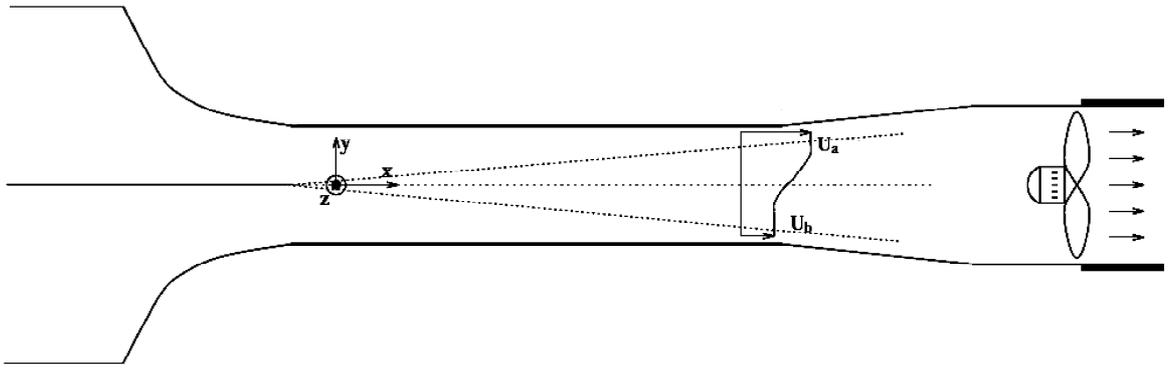


Рисунок 3.36. Схема течения в эксперименте [129]

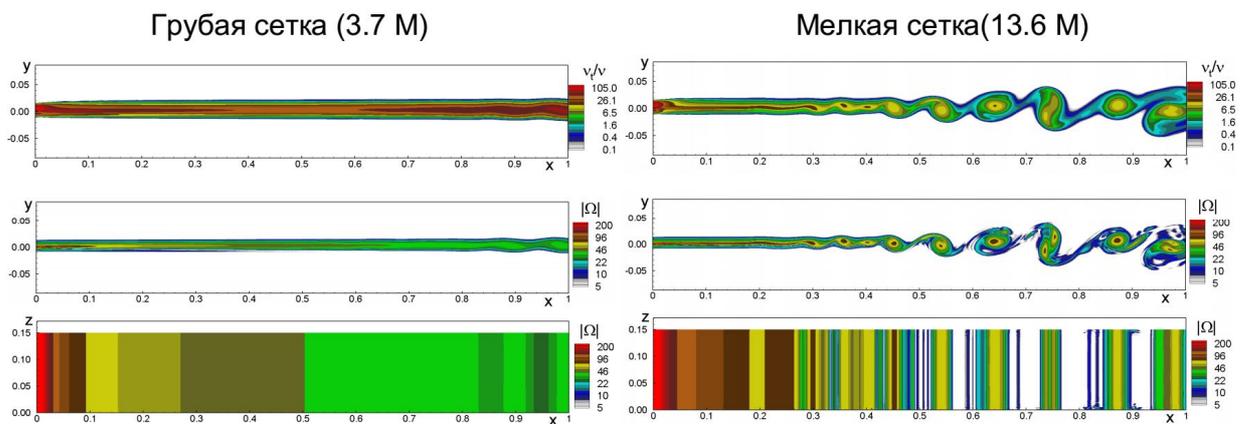


Рисунок 3.37. Мгновенные поля вихревой вязкости в плоскости  $XY$  и модуля завихренности в плоскостях  $XY$  и  $XZ$ , рассчитанные на двух сетках с помощью оригинальной версии SA DDES

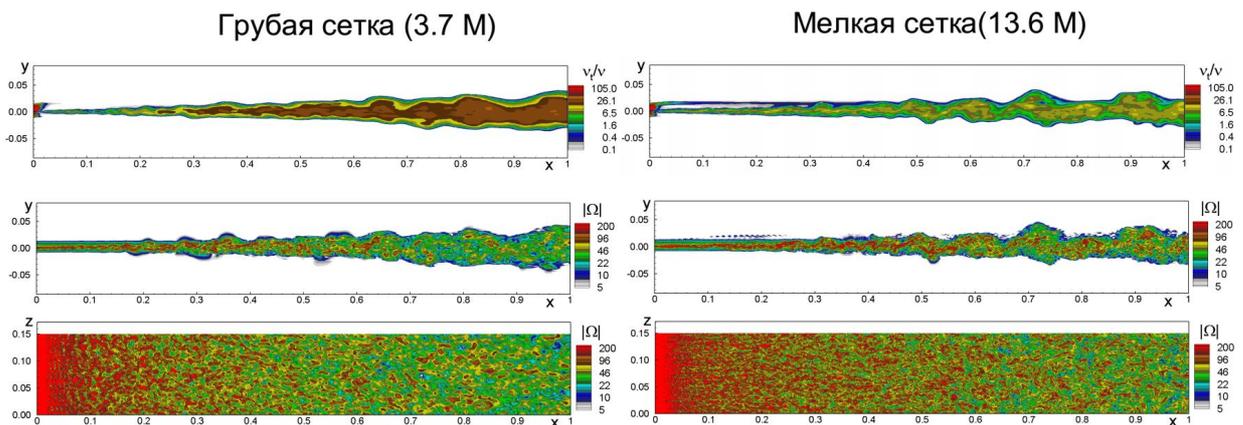
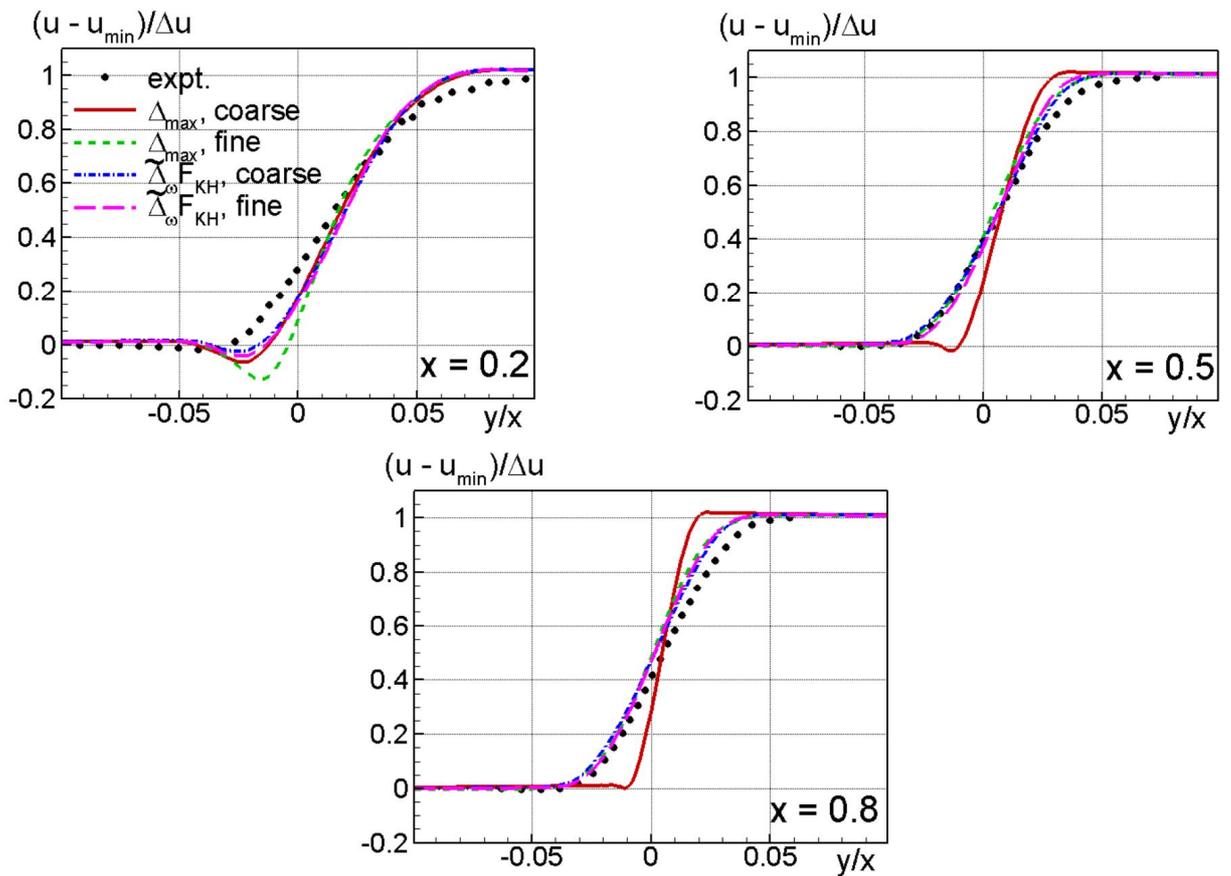
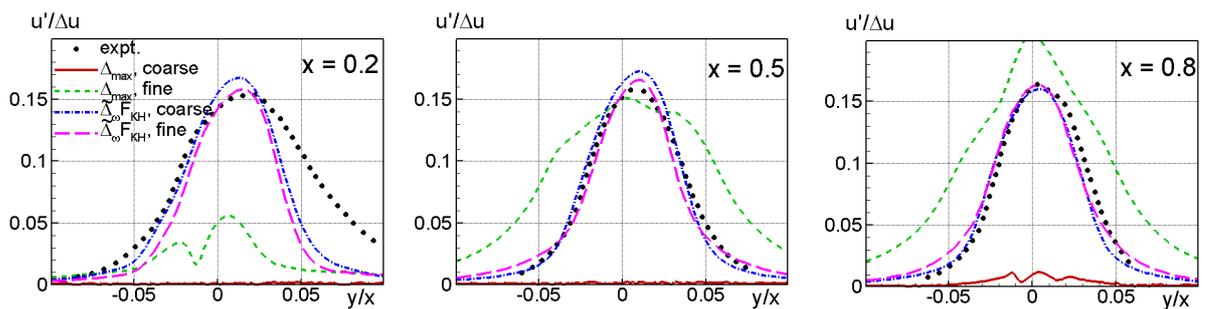


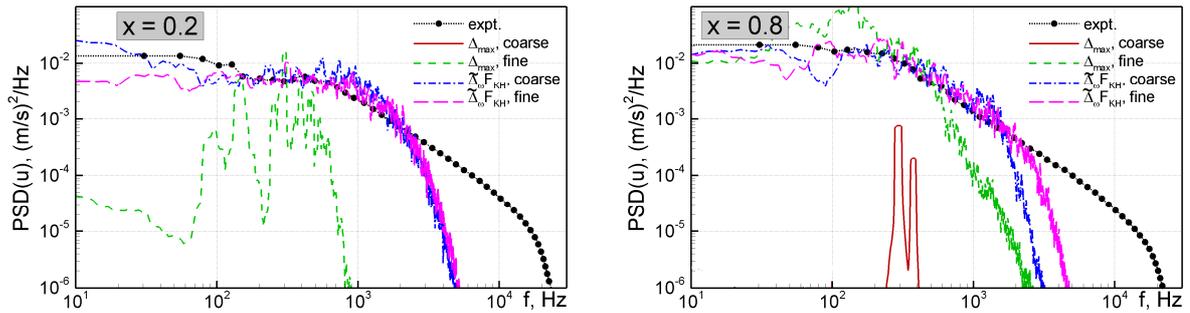
Рисунок 3.38. То же, что и на рис. 3.37, с использованием модифицированной версии SA DDES



**Рисунок 3.39.** Сравнение с экспериментом профилей средней скорости в различных сечениях слоя смешения, рассчитанных с помощью стандартной ( $\Delta = \Delta_{\max}$ ) и модифицированной ( $\Delta = \tilde{\Delta}_{\omega} F_{KH}^{DDES}$ ) версии SA DDES на грубой и мелкой сетках



**Рисунок 3.40.** То же, что и на рис. 3.39, для профилей среднеквадратичных пульсаций продольной скорости



**Рисунок 3.41.** То же, что и на рис. 3.40, для спектров пульсаций продольной составляющей вектора скорости на средней линии слоя смешения  $y=0$

Основные выводы, которые могут быть сделаны на основе анализа этих рисунков, состоят в следующем.

При расчете пространственной эволюции плоского слоя смешения, как и при расчете круглой дозвуковой струи, использование стандартной версии SA DDES приводит к очень сильному затягиванию перехода к развитой трехмерной турбулентности (течение в слое смешения остается практически двумерным вплоть до  $x = 1$  м даже на весьма мелкой сетке – см. рис. 3.37). В результате, при использовании разумных с точки зрения вычислительных затрат расчетных сеток данная версия DDES является практически неработоспособной.

В противоположность этому, модифицированная версия SA DDES, базирующаяся на использовании подсеточного масштаба  $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{DDES}$ , обеспечивает очень быстрый переход к развитой трехмерной турбулентности (см. рис. 3.38) и позволяет достигнуть хорошего согласования с экспериментом как по осредненным, так и пульсационным характеристикам слоя смешения даже при использовании довольно грубых сеток.

Рассмотрим далее два примера, иллюстрирующих работу модифицированных версий DDES и IDDES при расчете отрывных пристеночных течений.

Первое из них (обтекание выпуклости на плоской поверхности – см. рис. 3.42) исследовалось в экспериментах NASA [130], результаты которых используются для валидации различных подходов к моделированию турбулентности как отдельными научными группами, так и в рамках крупных международных проектов (см., например, [6, 10]). Число Рейнольдса, построенное по длине выпуклости  $s$  и максимальной скорости потока вверх по потоку от нее  $U_0$ , составляло в экспериментах  $9.36 \cdot 10^5$ , а высота выпуклости  $h$  была равна  $0.128s$ .



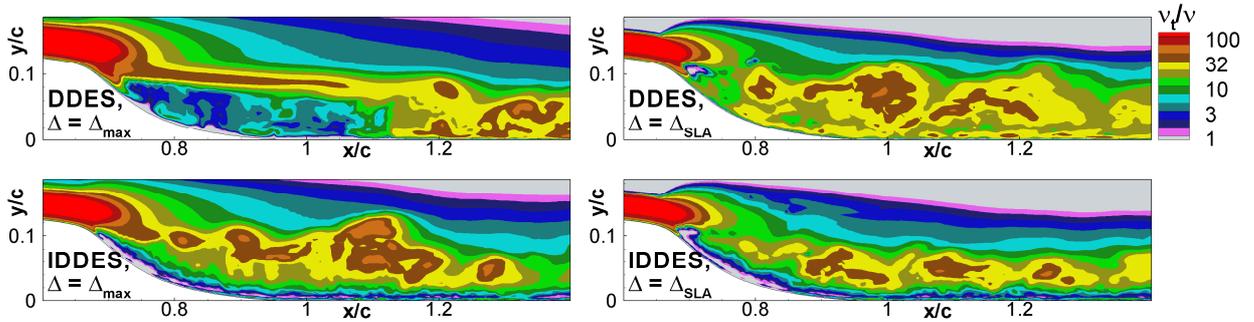
**Рисунок 3.42.** Фотография экспериментальной установки из [130]

При таких условиях поток отрывается от выпуклости с последующим присоединением оторвавшегося слоя смешения к плоской поверхности и релаксацией присоединенного турбулентного пограничного слоя далее вниз по потоку.

Ниже кратко представлены результаты расчетов данного течения, полученные в работах [131, 132] с использованием оригинальных версий SA DDES и IDDES и их модифицированных версий, базирующихся на подсеточных масштабах  $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{DDES}$  и  $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{IDDES}$ .

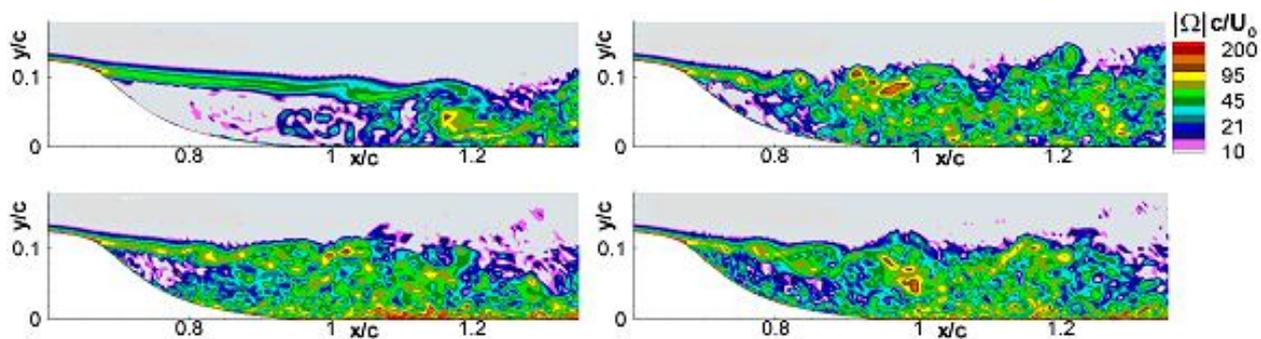
В частности, на рисунках 3.43 и 3.44 показаны мгновенные поля турбулентной вязкости и модуля завихренности из четырех указанных расчетов. Из них ясно видно, что обе модифицированные модели обеспечивают желаемое уменьшение турбулентной вязкости на начальном участке слоя смешения

по сравнению с их стандартными версиями (рис. 3.43). Однако в рамках IDDES этот эффект выражен слабее, чем в рамках DDES. Это объясняется тем, что оригинальная версия IDDES уже сама по себе предсказывает в этой области более низкий уровень турбулентной вязкости, чем оригинальная версия DDES.

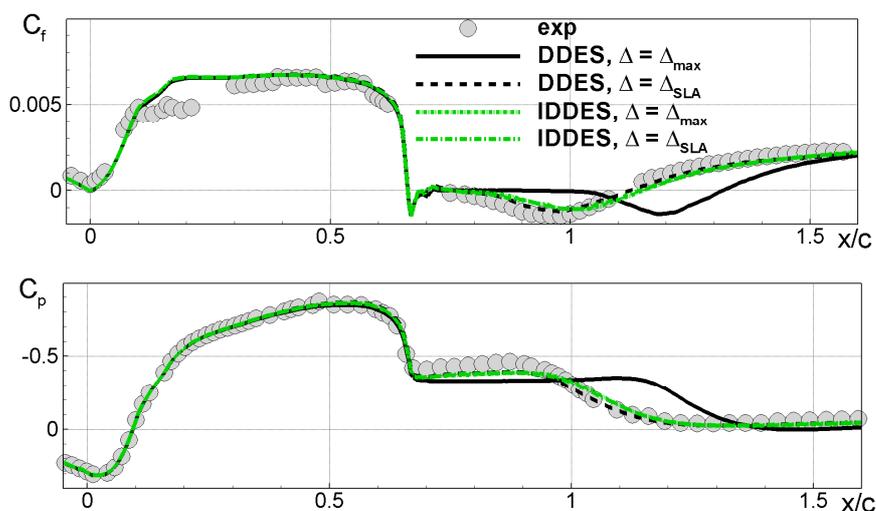


**Рисунок 3.43.** Мгновенные поля турбулентной вязкости в плоскости  $XY$ . Верхний ряд: стандартный (слева) и модифицированный (справа) SA DDES; нижний ряд: стандартный (слева) и модифицированный (справа) SA IDDES

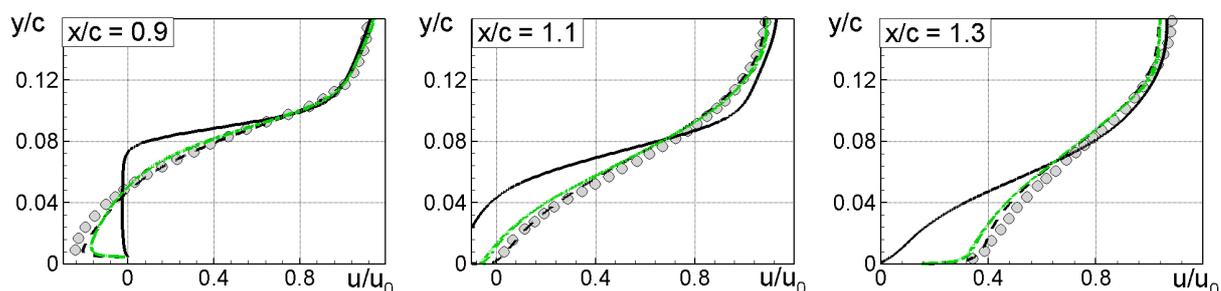
Отмеченные тенденции в поведении турбулентной вязкости, предсказываемой различными моделями, приводят к соответствующему изменению в поведении мгновенных полей завихренности, показанных на рисунке 3.44. Так, в результате модификации DDES достигается радикальное ускорение распада оторвавшегося слоя смешения и перехода к развитой турбулентности, в то время как эффект модификации IDDES на эти процессы оказывается незначительным. В полном соответствии с этим модификация SA DDES позволяет значительно улучшить согласование с экспериментом результатов расчета осредненных и пульсационных характеристик рассматриваемого течения. В противоположность этому, в рамках IDDES модификация оказывается практически пассивной: обе версии SA IDDES обеспечивают достаточно быстрый распад слоя смешения и дают близкие результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными данными (см. рис. 3.45 - 3.47).



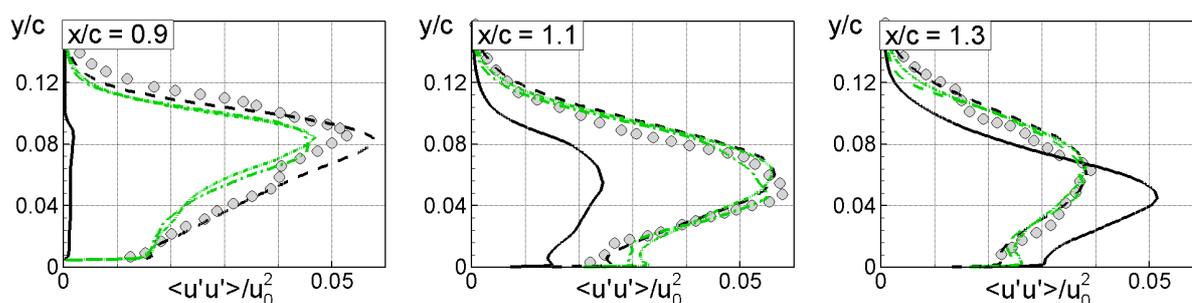
**Рисунок 3.44.** То же, что на рис. 3.43, для мгновенных полей модуля завихренности



**Рисунок 3.45.** Сравнение с экспериментом распределений коэффициентов трения и давления, рассчитанных с использованием стандартных и модифицированных версий SA DDES и SA IDDES



**Рисунок 3.46.** То же, что и на рис. 3.45, для профилей скорости в различных сечениях потока



**Рисунок 3.47.** То же, что и на рис. 3.45, для профилей разрешенных среднеквадратичных пульсаций продольной компоненты скорости

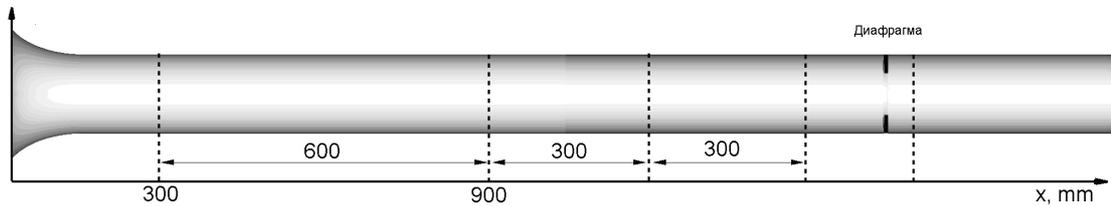
Таким образом, результаты расчетов отрывного обтекания выпуклости на плоской поверхности с использованием стандартных и модифицированных версий SA DDES и IDDES позволяют сделать следующие выводы.

Модифицированный метод DDES обеспечивает значительное ускорение дестабилизации оторвавшегося слоя смешения и перехода в нем к развитой турбулентности и, как следствие этого, обеспечивает радикальное улучшение согласования результатов расчетов с экспериментом.

Модификация метода IDDES также оказывает положительное влияние, однако оно оказывается незначительным.

Второй из упомянутых выше примеров расчета пристенных отрывных течений призван продемонстрировать эффективность модифицированной (опирающейся на новое определение подсеточного масштаба) версии IDDES при расчете акустических характеристик турбулентных течений. В этом примере рассматривается течение в круглой трубе с диафрагмой (см. рис. 3.48), экспериментально исследовавшееся в работе [133] в рамках проекта ЕС IDEALVENT, посвященного разработке и валидации методов расчета аэродинамического шума, создаваемого различными элементами систем вентиляции. Диаметр трубы  $D = 0.15$  м, а диаметр отверстия диафрагмы  $d = 0.116$  м, так что ее открытая площадь равна 59.8% от площади сечения трубы.

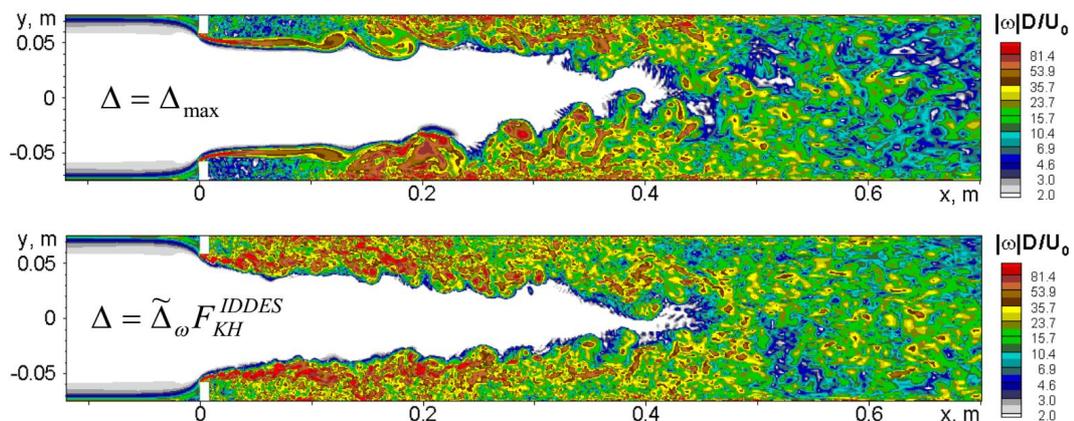
Объемный расход воздуха через трубу VFR составлял  $0.531 \text{ м}^3/\text{с}$ , что соответствует скорости потока в ее цилиндрической части  $U_0 = 32 \text{ м/с}$ .



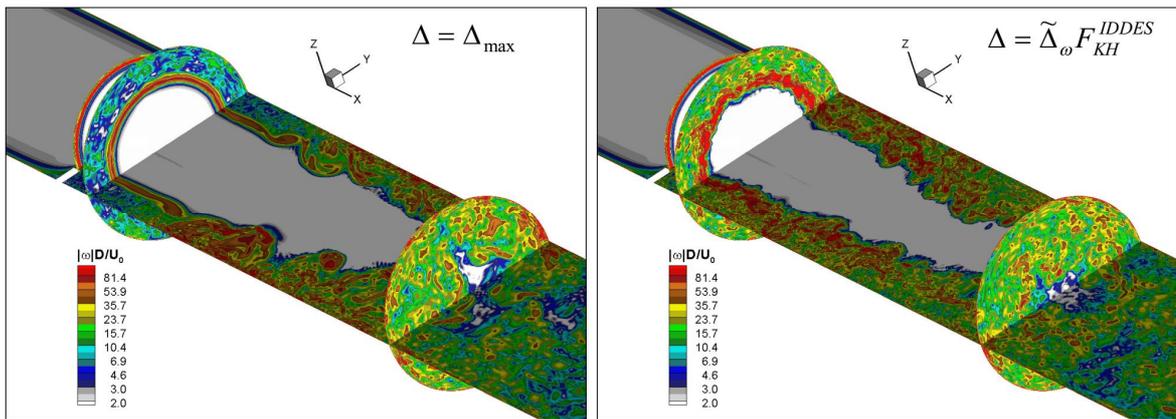
**Рисунок 3.48.** Схема круглой трубы с диафрагмой

Расчеты этого течения были выполнены с использованием стандартной версии SST IDDES и модифицированной версии этой модели, базирующейся на подсеточном масштабе  $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{IDDES}$ .

Некоторые результаты этих расчетов представлены на рисунках 3.49 - 3.53. В частности, на рисунках 3.49 и 3.50 показаны мгновенные поля модуля завихренности в меридиональной плоскости трубы и в ее поперечных сечениях. Средние поля скорости показаны на рис. 3.51, а поля кинетической энергии турбулентности (ТКЕ) и продольные распределения среднеквадратичных пульсаций давления на стенке трубы - на рисунках 3.52 и 3.53.



**Рисунок 3.49.** Мгновенные поля модуля завихренности в меридиональной плоскости трубы, рассчитанные с использованием стандартной (сверху) и модифицированной (снизу) версий SST IDDES



**Рисунок 3.50.** Мгновенные поля модуля завихренности в меридиональной плоскости трубы и в трех ее поперечных сечениях, рассчитанные с использованием стандартной и модифицированной версий SST IDDES

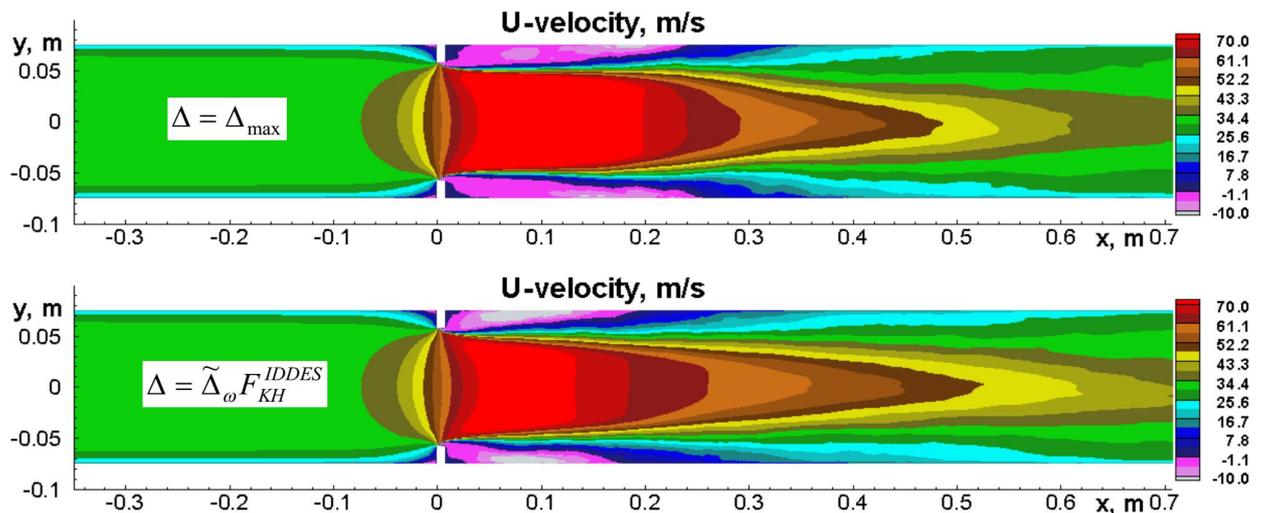
Анализ мгновенных полей завихренности (рис. 3.49, 3.50) позволяет заключить, что для данного течения использование модифицированной версии IDDES приводит к сильному ускорению развития неустойчивости в слое смешения, отрывающемся от внутренней кромки диафрагмы, и к гораздо более быстрому переходу в ней к развитому турбулентному течению.<sup>11</sup> Это, в свою очередь, влечет за собой уменьшение длины зоны рециркуляции, формирующейся за диафрагмой, и области однородного поля скорости вниз по потоку от нее (см. рис. 3.51), а также к значительному сдвигу области максимума разрешенной кинетической энергии турбулентности к началу оторвавшегося слоя смешения (рис. 3.52).

Наконец, прямым следствием описанных положительных изменений в предсказании характеристик турбулентности на начальном участке оторвавшегося от края диафрагмы слоя смешения, обеспечиваемых использованием модифицированной

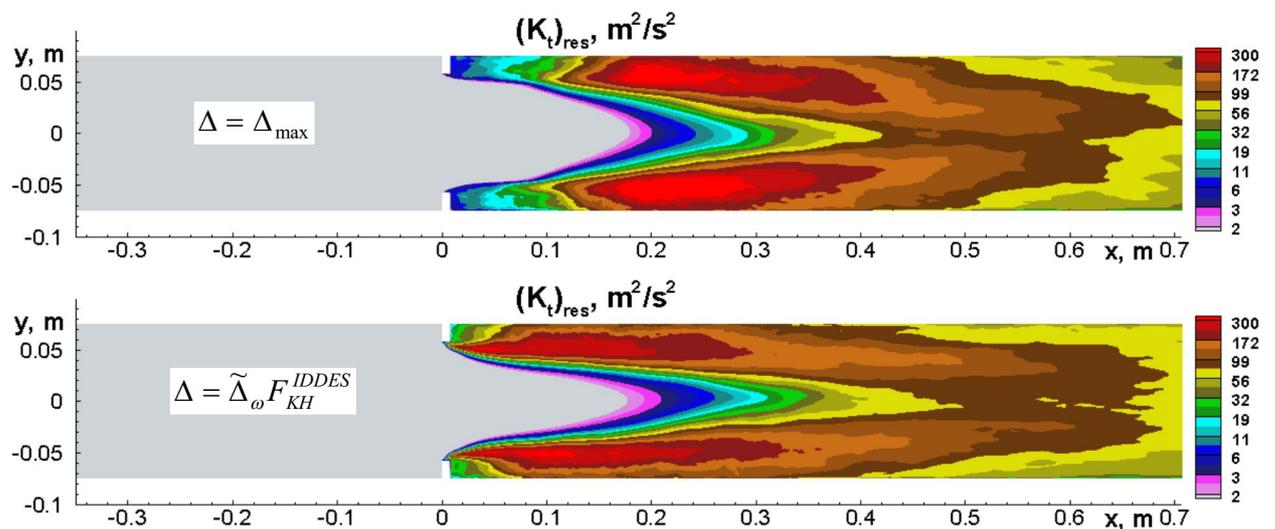
---

<sup>11</sup> Напомним, что при расчете обтекания выпуклости на плоской поверхности этот эффект выражен гораздо слабее (см. рис. 3.44). Это означает, что степень положительного влияния модификации IDDES на результаты расчетов зависит от рассматриваемого течения и используемой сетки.

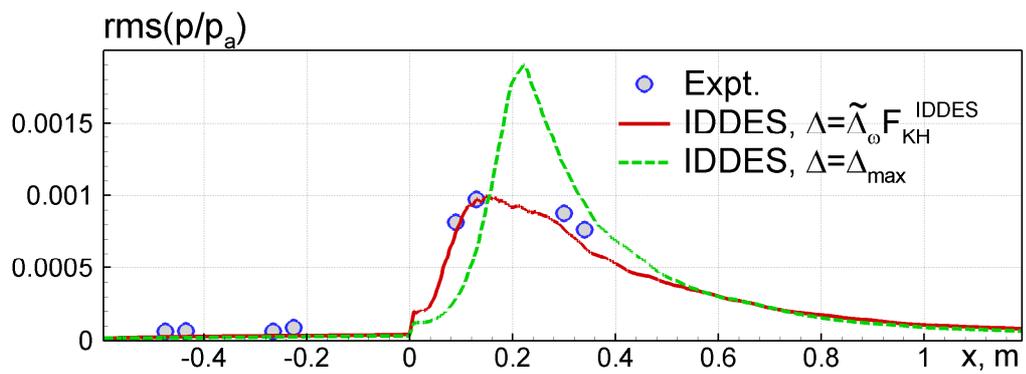
версии IDDES, является значительное повышение точности предсказания турбулентных пульсаций давления на поверхности трубы (см. рис. 3.53), которые, в свою очередь, определяют шум, генерируемый потоком.



**Рисунок 3.51.** Поля продольной скорости осредненного течения, рассчитанные с использованием стандартной и модифицированной версий SST IDDES



**Рисунок 3.52.** Поля разрешенной кинетической энергии турбулентности, рассчитанные с использованием стандартной и модифицированной версий SST IDDES



**Рисунок 3.53.** Сравнение с экспериментом продольных распределений среднеквадратичных пульсаций давления на стенках трубы, рассчитанных с использованием стандартной и модифицированной версий SST IDDES

#### **4. Зонные RANS-LES методы и способы создания турбулентного контента на входе в LES подобласть**

В отличие от течений с обширным отрывом, для расчета которых могут с успехом применяться незонные или “глобальные” гибридные методы типа DES (см. предыдущую главу), при расчете присоединенных течений и течений с “мелкими” ограниченными отрывными зонами (окрестность задней кромки крыла или закрылок механизированного крыла) ситуация существенно изменяется. В этом случае как аэродинамические характеристики потока, так и генерируемый им шум, существенным образом зависят от турбулентных вихревых структур, населяющих присоединенные пограничные слои или области “мелкого” отрыва, в которых глобальные методы типа DES не обеспечивают необходимой точности расчета. Строго говоря, адекватное описание турбулентности в этих областях может быть достигнуто только с использованием DNS или, как минимум, “полного” (обеспечивающего разрешение всех энергонесущих турбулентных вихревых структур и предсказание ламинарно-турбулентного перехода) LES. Однако, как неоднократно отмечалось в Главе 1, это не представляется возможным не только в настоящее время, но и в обозримом будущем. Таким образом, единственной реальной альтернативой для расчета таких течений является использование зонного/встроенного LES с априори заданными границами RANS и LES областей и созданием искусственной турбулентности (флуктуаций скорости) на входе в LES область.<sup>12</sup> Необходимость

---

<sup>12</sup> Заметим, что такой подход может быть полезным и при расчете течений с массивованным отрывом, в которых его использование существенно сокращает “серую область”, приводящую к задержке перехода к развитой турбулентности (эта проблема и методы ее решения в рамках незонных методов подробно обсуждалась в предыдущей главе).

“инъекции” турбулентности на RANS-LES интерфейсе обусловлена наличием неизбежно возникающего вниз по потоку от входной границы LES подобласти “участка адаптации”, на котором достигается развитое LES решение. При отсутствии разрешенной турбулентности на входе в LES подобласть этот участок оказывается очень протяженным, что приводит к полному искажению решения задачи. По существу, он аналогичен обсуждавшейся в предыдущей главе в контексте незонных RANS-LES методов “серой области”, которая возникает на начальном участке оторвавшихся слоев смешения в течениях с обширным отрывом. Однако в таких течениях существует внутренний механизм, ограничивающий протяженность “серой области”, а именно неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, в то время как в присоединенных течениях подобный механизм отсутствует.

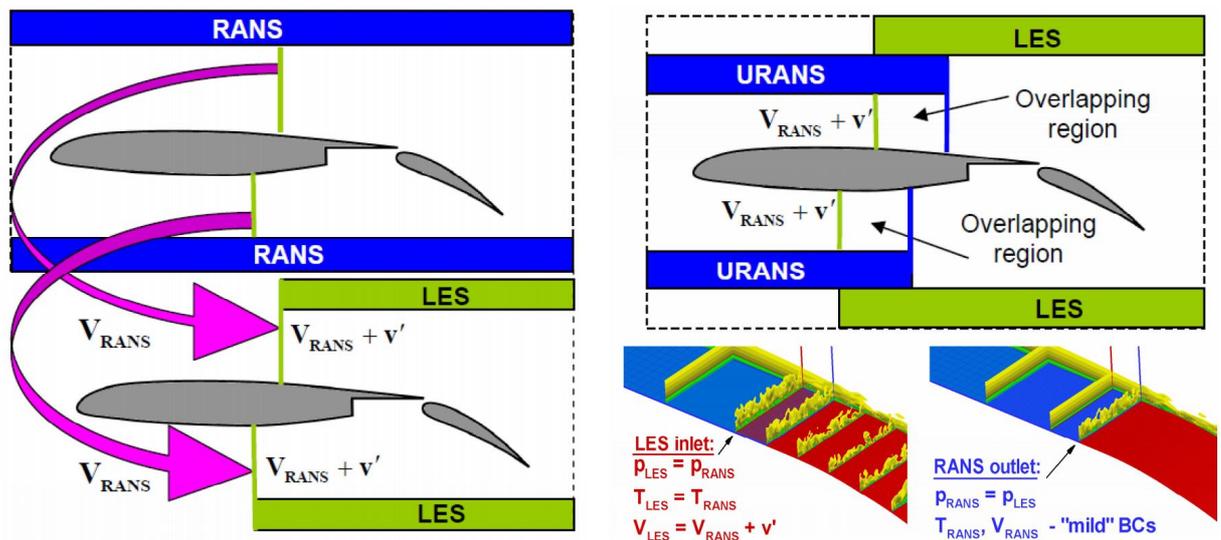
Таким образом, поиск физически обоснованных и экономичных способов создания турбулентности на RANS-LES интерфейсе в зонных RANS-LES подходах является исключительно важным этапом на пути разработки успешных методов такого типа. Следует, однако, иметь в виду, что искусственная природа этой “турбулентности” делает полное исключение участка адаптации невозможным, и речь может идти лишь о его существенном сокращении. Еще более сложная ситуация возникает при использовании зонных RANS-LES методов для решения задач аэроакустики, поскольку в таких задачах необходимо не только сократить длину участка адаптации, но и обеспечить подавление ложных источников шума на RANS-LES интерфейсе, обусловленных внезапным появлением на нем нестационарных вихревых структур. Поэтому даже в идеале можно рассчитывать лишь на нахождение путей минимизации, а не полного устранения описанных отрицательных эффектов.

В первом разделе данной главы представлен краткий обзор различных способов создания искусственной турбулентности на входе в LES подобласть, используемых в рамках зонных RANS-LES методов. Затем во втором разделе (раздел 4.2) приведена детальная формулировка одного из таких методов, предложенного в работе [134], сопровождаемая рядом вычислительных примеров, иллюстрирующих его возможности при решении как чисто аэродинамических, так и аэроакустических задач в рамках зонного RANS-IDDES.

#### **4.1. Основные способы создания турбулентного контента на входных границах LES в рамках зонных RANS-LES методов**

В литературе представлен довольно широкий спектр методов, предложенных для создания турбулентного контента на входе в LES область в рамках зонных RANS-LES подходов к моделированию турбулентности. Эти подходы могут быть условно разделены на пять категорий: 1) использование предварительных DNS или LES расчетов; 2) “рецикл” турбулентности; 3) создание “синтетической турбулентности”; 4) использование искусственного форсинга и объемных источников; 5) использование устройств для генерации вихрей. Ниже будут кратко описаны и охарактеризованы все перечисленные категории. Однако прежде, чем перейти к этому, необходимо остановиться на существующих процедурах “сшивки” решений в RANS и LES подобластях расчетной области, применяемых в рамках зонных методов.

Эти процедуры можно разделить на две большие группы, базирующиеся на двустадийной и одностадийной стратегиях соответственно.



**Рисунок 4.1.** Схемы двухстадийной (слева) и одностадийной (справа) стратегий реализации зонных RANS-LES методов

В рамках двухстадийной стратегии, иллюстрируемой в левой части рисунка 4.1, расчет выполняется в два этапа. На первом этапе проводится RANS расчет *всего* рассматриваемого течения, а на втором этапе - LES расчет *только* в LES зоне. При этом на LES этапе расчета в качестве граничного условия для скорости на RANS-LES интерфейсе задается скорость в соответствующем сечении из уже известного (полученного на первом этапе) RANS решения, к которой добавляются искусственные (“турбулентные”) флуктуации. При расчете сжимаемых течений, температура на интерфейсе может полагаться равной температуре, известной из RANS решения, но иногда к ней тоже добавляются турбулентные температурные флуктуации (см., например, [135]). Наконец, граничные условия на интерфейсе для давления зависят от локального числа Маха потока. В сверхзвуковых потоках давление на интерфейсе полагается равным давлению из известного RANS решения, а в дозвуковых и несжимаемых течениях определяется путем экстраполяции из внутренних точек LES области. Описанный подход иногда называют частично связанным (“semi-coupled”), чтобы подчеркнуть, что при его

использовании решение в LES области никак не влияет на решение в RANS области.

В рамках одностадийной стратегии, которую иллюстрирует правая часть рисунка 4.1 (в противоположность первому подходу его называют полностью связанным – “fully coupled”), решение в RANS и LES подобластях расчетной области производится одновременно, что предполагает их перекрытие и использование в RANS подобласти нестационарных уравнений Рейнольдса (URANS). Кроме того, в этом случае, наряду с граничными условиями на входе в LES, необходима постановка граничных условий на выходной границе RANS подобласти.

Граничные условия на входе в LES подобласть обычно задаются так же, как и в рамках двухстадийного подхода. Разница состоит лишь в том, что в данном случае требуемые для этого параметры потока на интерфейсе “заимствуются” из текущего решения URANS. Это могут быть как мгновенные параметры на предыдущем временном слое, так их бегущие средние значения. Кроме того, учитывая, что в данном случае входная граница LES подобласти является, по существу, межблочной границей в многоблочной сетке, можно положить на ней давление равным давлению из RANS решения даже при расчете дозвуковых/несжимаемых потоков.

На выходе из RANS подобласти при расчете дозвуковых и несжимаемых течений давление полагается равным мгновенному давлению, известному из LES решения, или его бегущему среднему, а все остальные переменные экстраполируются из внутренних точек RANS подобласти<sup>13</sup>. При расчете

---

<sup>13</sup> Это предполагает, что как RANS-LES интерфейс, так и выход из RANS подобласти должны быть расположены в безотрывной области потока.

сверхзвуковых течений все переменные, включая давление, определяются путем экстраполяции.

В тех случаях, когда в LES подобласти зонного гибридного метода используется какая-либо дифференциальная подсеточная модель, наряду с условиями для основных аэродинамических переменных, на RANS-LES интерфейсе необходимо поставить какие-либо граничные условия для подсеточных характеристик турбулентности. Например, при использовании LES или WMLES (в частности, IDDES) с базовыми моделями SA или SST эти условия задаются следующим образом.

Подсеточная вязкость на интерфейсе может быть определена с помощью какой-либо алгебраической модели (например, модели Смагоринского (1.9) или алгебраической гибридной модели [43]). Поле подсеточной удельной скорости диссипации  $\omega_{SGS}$ , необходимое в случае использования LES на основе SST модели, полагается равным  $\omega_{RANS}$ , а поле  $k_{SGS}$  рассчитывается по  $\omega_{SGS}$  и  $v_{SGS}$ .

Две описанные стратегии “сшивки” RANS и LES областей существенно отличаются между собой, и каждая из них имеет свои преимущества и недостатки.

Главным преимуществом одностадийной стратегии является то, что она позволяет учесть обратное влияние течения в LES подобласти на течение в URANS подобласти. Это делает данную стратегию более толерантной по отношению к выбору положения интерфейса и, в частности, позволяет располагать его в относительно близкой окрестности “чувствительных” областей потока, для расчета которых используется LES. Еще одним преимуществом одностадийной процедуры является то, что она не требует предварительного RANS расчета рассматриваемого течения.

С другой стороны, двустадийная процедура является более толерантной по отношению к топологии расчетных сеток, так как

она не опирается на наличие в них перекрывающихся блоков. В связи с этим ее использование является предпочтительным в тех случаях, когда RANS модель обеспечивает достаточно высокую точность расчета аэродинамических характеристик течения во всей расчетной области. В таких ситуациях обратное влияние течения в LES подобласти на течение в RANS подобласти является несущественным, а LES подобласть вводится лишь для получения нестационарной информации, необходимой, например, для расчета вибраций и шума.

При всех отличиях двустадийного и одностадийного подходов, описанных выше, их общим ключевым элементом, в значительной степени определяющим успех метода в целом, является процедура создания турбулентных флуктуаций скорости  $v'$  на RANS-LES интерфейсе. Это объясняется тем, что никакие искусственные флуктуации, не могут воспроизвести *все* характеристики реальной турбулентности и, следовательно, любой алгоритм их генерации является несовершенным и неизбежно представляет собой компромисс между точностью, функциональностью, сложностью программной реализации и вычислительными затратами.

Как уже отмечалось, с точки зрения точности и функциональности, алгоритм должен обеспечивать максимально возможное сокращение длины участка адаптации, на котором достигается “зрелое” состояние турбулентности в LES подобласти вниз по потоку от RANS-LES интерфейса. Крайне желательно также, чтобы применимость алгоритма не была ограничена простейшими течениями, например, течением в пограничном слое с нулевым градиентом давления, поскольку это накладывает жесткие ограничения на положение RANS-LES интерфейса в сложных течениях. Кроме того, желательно, чтобы алгоритм правильно функционировал в сочетании с любым вихреразрешающим подходом (DNS, полностью разрешенный LES

и WMLES). Наконец, применительно к задачам аэроакустики первоочередным требованием к способу создания искусственной турбулентности является отсутствие интенсивных ложных источников шума, которые могут полностью исказить истинный шум, генерируемый потоком. Решение этой задачи является далеко не тривиальным, так как практически все существующие методы генерации искусственной турбулентности приводят к мгновенному формированию вниз по потоку от RANS-LES интерфейса интенсивных вихревых структур, которые неизбежно генерируют сильный ложный шум. Поэтому применительно к аэроакустике любой базовый “аэродинамический” алгоритм создания нестационарного контента на входных границах LES должен быть дополнен какими-либо средствами подавления ложного шума.

Наконец, с технологической точки зрения алгоритмы генерации флуктуаций должны быть несложными для программной реализации на различных типах сеток и экономичными, а также должны использовать только те характеристики турбулентности, которые “поставляются” традиционными RANS моделями ( $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$ , рейнольдсовы напряжения).

Ниже описываются наиболее известные методы создания искусственной турбулентности на RANS-LES интерфейсе<sup>14</sup> и дается их оценка с точки зрения удовлетворения сформулированным выше требованиям.

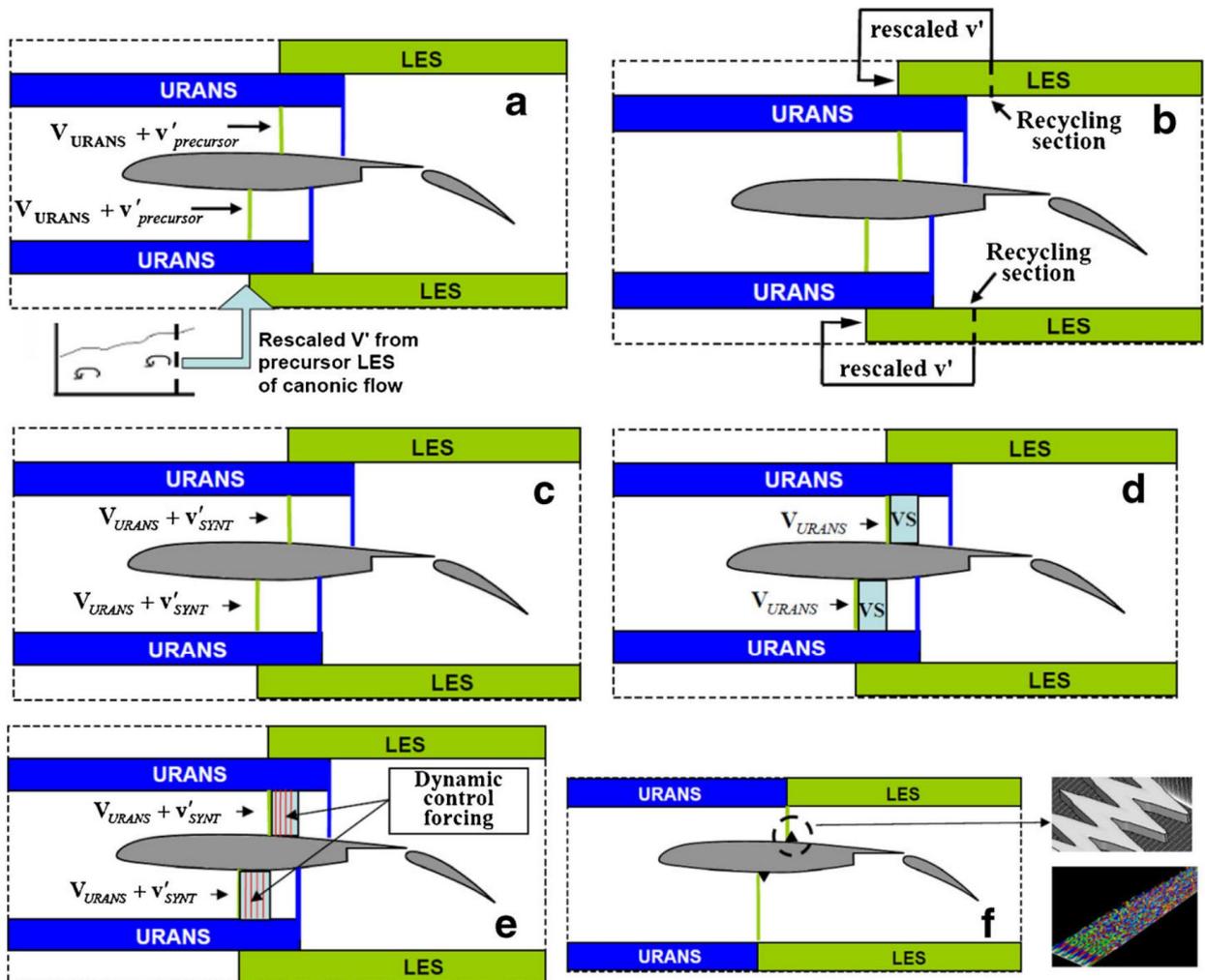
#### **4.1.1. Предварительный DNS или LES**

В этом методе (см. схему на рис. 4.2а) флуктуации вектора скорости  $\mathbf{v}'$  на RANS-LES интерфейсе полагаются равными

---

<sup>14</sup> Для определенности это делается на примере одностадийной процедуры сшивки RANS и LES подобластей.

соответствующим образом отмасштабированным флуктуациям из вспомогательного DNS или LES какого-либо “канонического” течения (например, установившегося течения в канале или течения в пограничном слое на плоской пластине). Наряду с этим, могут также использоваться уже существующие базы данных, содержащие результаты таких расчетов.



**Рисунок 4.2.** Схемы, поясняющие различные способы задания флуктуаций скорости на RANS-LES интерфейсе

При условии, что используемые при этом способы масштабирования являются корректными, этот подход позволяет получить на RANS-LES интерфейсе наиболее близкую к реальной искусственную турбулентность и, следовательно, обеспечивает

минимально возможную (близкую к нулю) длину участка адаптации. Однако он не является самодостаточным и требует проведения трудоемких вспомогательных DNS/LES расчетов или использования внешних баз данных, в связи с чем область его применимости ограничена относительно простыми (близкими к каноническим) течениями при достаточно низких числах Рейнольдса, для которых проведение таких расчетов возможно. Кроме того, следует отметить, что большинство DNS и LES расчетов канонических течений проводятся в областях с малыми размерами по поперечной координате (для определенности, координате  $z$ ) с использованием граничных условий периодичности, в то время как большинство течений, представляющих практический интерес, имеют достаточно большую (как минимум, порядка толщины пограничного слоя) протяженность в поперечном направлении. Поэтому при использовании результатов предварительных расчетов для задания пульсаций скорости на интерфейсе их необходимо “дублировать” в поперечном направлении, что приводит к неестественной коррелированности турбулентности по этому направлению и/или к нарушению гладкости полей турбулентных характеристик, если поток неоднороден по  $z$ .

#### **4.1.2. “Рецикл” турбулентности**

Идея этого метода предложена в работе [136], в которой он использовался для формулировки входных граничных условий для LES и DNS пограничного слоя на плоской пластине. Она состоит в переносе на входную границу пульсаций скорости из нестационарного решения, полученного в том же расчете в некотором сечении, расположенном вниз по потоку от входного сечения (см. рис. 4.2b). Для течений, эволюционирующих в продольном направлении, это подразумевает необходимость

соответствующего “перемасштабирования” переносимых пульсаций, что в общем случае является далеко не тривиальной задачей. Однако, если ее удастся решить, создаваемая в результате искусственная турбулентность обладает “высоким качеством” (близка к реальной турбулентности), что обеспечивает быстрый (на расстояниях в несколько толщин пограничного слоя от входной границы) переход к “зрелой” развитой турбулентности. Отметим также, что благодаря более общим процедурам перемасштабирования и адаптации к одностадийной стратегии сшивки RANS и LES подобластей, предложенные позже модификации метода рецикла (см. [137 - 139]) позволили существенно расширить область его применимости по сравнению с оригинальной версией [136]. В результате, в настоящее время этот метод является весьма эффективным средством для создания турбулентного контента на RANS-LES интерфейсе, и с точки зрения удовлетворения сформулированных выше общих требований его “рейтинг” значительно выше, чем у метода, опирающегося на вспомогательный DNS/LES. Тем не менее, из-за трудностей перемасштабирования в сложных течениях (например, в пограничном слое с сильным продольным градиентом давления) его использование для расчета таких течений остается весьма проблематичным. Кроме того, для практической реализации метода рецикла требуется его специальная инициализация, обеспечивающая быстрое установление развитой турбулентности внутри области рецикла. В этом смысле данный метод, так же, как и метод, базирующийся на вспомогательном DNS/LES, является не вполне самодостаточным. Наконец, при использовании метода рецикла в спектре турбулентности появляются нефизические (ложные) пики на частоте рецикла  $f_{recycl} \approx U_{conv} / L_{recycl}$  ( $U_{conv}$  - характерная скорость конвекции,  $L_{recycl}$  - длина участка рецикла) и ее субгармониках. Этот хорошо

известный дефект метода (его проявление будет продемонстрировано в разделе 4.2.3) может приводить к неприемлемым погрешностям при применении рецикла турбулентности в задачах аэроакустики<sup>15</sup>.

#### 4.1.3. “Синтетическая” турбулентность

В методах данной группы, которые в настоящее время считаются более подходящими для решения сложных прикладных задач, чем методы, использующие вспомогательный DNS/LES расчет или рецикл турбулентности, на поле скорости из RANS на RANS-LES интерфейсе накладываются искусственные (“синтетические”) турбулентные флуктуации скорости (см. схему на рис. 4.2с). Эти флуктуации рассчитываются с использованием так называемых генераторов синтетической турбулентности (Synthetic Turbulence Generators или STG), спектр которых в настоящее время, как уже отмечалось, достаточно широк. Так, простейший STG создает флуктуации в виде случайного белого шума, а наиболее сложные STG опираются на информацию о статистических характеристиках турбулентности, которые могут быть определены с использованием RANS моделей, и даже на временные и пространственные корреляции пульсационных характеристик турбулентности. Эти методы имеют ряд общих привлекательных свойств. В частности, все они являются самодостаточными, относительно простыми в реализации, экономичными и относительно толерантными к типу и топологии вычислительных сеток. Однако искусственная природа турбулентности, создаваемой STG, часто приводит к длинному

---

<sup>15</sup> Способ ослабления данного недостатка при LES сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине предложен в работе [140], однако он весьма сложен, включает несколько управляющих параметров и существенно опирается на использование структурированных сеток.

участку адаптации. Иными словами, точность методов этой группы полностью определяется тем, насколько создаваемая STG турбулентность близка к реальной. Не останавливаясь на детальном обзоре различных STG (такие обзоры можно найти, например, в работах [28], [141 - 144]), отметим лишь следующее. Простейшие из них (генераторы белого шума) приводят к тому, что длина адаптации, оцениваемая по эволюции коэффициента трения, составляет около 50 толщин пограничного слоя [136], что делает их, по существу, бесполезными. Причина этого состоит в том, что генерируемая таким способом турбулентность оказывается пространственно некоррелированной, в результате чего большая часть мелкомасштабных флуктуаций скорости, наложенных на поле скорости RANS на интерфейсе, быстро затухает вниз по потоку от него, а их последующее восстановление в LES подобласти происходит очень медленно. Этот недостаток в значительной мере устраняется при использовании STG, базирующихся на цифровой фильтрации или на создании когерентных турбулентных структур с заданными размерами и формами [145 - 152]. Хотя такие STG более сложны в реализации, они являются существенно более точными и обеспечивают длины участка адаптации от примерно 20 вплоть до 5-6 [152] толщин пограничного слоя. Наконец, еще одна группа STG базируется на идее Крейчнана (Kraichnan [153]), предложившего использовать для этих целей суперпозицию пространственно-временных Фурье мод со случайными амплитудами и фазами [154 - 157]. При использовании этих методов для RANS-LES расчетов относительно простых течений удается сократить длину участка адаптации, оцениваемую по коэффициенту трения, до 2-4 толщин пограничного слоя.

#### 4.1.4. Искусственный форсинг

Два известных в настоящее время подхода данного типа тесно связаны с рассмотренными выше STG-методами.

Первый из них (см., например, [158]) основан на введении в уравнения переноса импульса и кинетической энергии турбулентности специальным образом сконструированных объемных источников/стоков (Volume Sources или VS). Эти члены активируются в некоторой ограниченной части зоны перекрытия RANS и LES подобластей расчетной области (см. рис. 4.2d) и предназначены для создания вниз по потоку искусственной турбулентности, близкой к той, которая создается STG [134] (см. также раздел 4.2 настоящего пособия) непосредственно на RANS-LES интерфейсе. Таким образом, в данном случае реализуется непрерывное поле скорости с искусственным источником импульса, действующим в некоторой ограниченной зоне. Главным технологическим преимуществом данного подхода по сравнению с STG-методами является его совместимость с любыми типами сеток (источник и сток могут быть активированы в произвольном наборе ячеек, так что RANS-LES интерфейс может даже не образовывать сеточную поверхность). Кроме того, он имеет высокий потенциал для акустических приложений, поскольку интенсивности источника и стока могут изменяться вниз по потоку плавно, что позволяет уменьшить ложный шум, обусловленный внезапным появлением турбулентных вихрей при использовании STG-методов.

Второй из упомянутых выше подходов, опирающихся на искусственный форсинг (см. схему на рис. 4.2e), представляет собой комбинацию метода STG с методом динамического форсинга (Dynamic Control Forcing или DCF). Идея этого подхода состоит в следующем. На серии “контрольных плоскостей”, расположенных вниз по потоку от RANS-LES интерфейса, на котором к скорости

из RANS решения добавляются пульсации, рассчитанные с помощью STG, в уравнения вводятся объемные источники. При этом интенсивность этих источников не задается априори, а определяется динамически (в процессе расчета), а именно полагается пропорциональной различию между бегущими средними и желаемыми (“целевыми”) значениями некоторого параметра потока, поле которого известно из RANS решения (обычно сдвигового или нормального напряжений Рейнольдса). В результате, независимо от качества турбулентности, создаваемой STG, обеспечивается быстрая подстройка этой турбулентности к реальной турбулентности в рассматриваемом потоке. Отметим, что это достигается за счет значительного усложнения метода и увеличения вычислительных затрат.

Первый STG-DCF метод был предложен и опробован в работе [159] на примере зонного RANS-LES расчета пограничного слоя на плоской пластине. При этом, несмотря на использование простейшего STG (генератор белого шума), было достигнуто сокращение длины участка адаптации с примерно 50 до 6 толщин пограничного слоя. В дальнейшем в работе [160] была предложена усовершенствованная процедура DCF в сочетании с STG [145], что обусловило успех метода при расчете пограничных слоев с сильным продольным градиентом давления. В работе [161] метод DCF был использован в комбинации с модификацией [152] метода синтетических вихрей [149, 150] (Synthetic Eddy Method или SEM), а процедура DCF была адаптирована к LES с пристеночным моделированием в рамках зонного RANS-LES метода. При этом как в [160], так и в [161] было достигнуто формирование развитой турбулентности непосредственно вниз по потоку от конца области DCF. Однако сама по себе длина этой области в обеих работах была достаточно велика (около 20 толщин пограничного слоя в [160] и 8.5 в [161]). В тех случаях, когда RANS-LES интерфейс находится

в “проблемных” областях потока (например, в области сильного продольного градиента давления), это значительно снижает точность определения “целевых” значений параметров турбулентности. Наконец, в работах [162, 163], в которых DCF процедура использовалась в сочетании с оригинальным методом SEM [149, 150], была продемонстрирована высокая точность этой комбинации при расчете трансзвукового обтекания аэродинамического профиля и сверхзвукового пограничного слоя (длина участка адаптации в этих расчетах составляла всего 2-3 толщины пограничного слоя).

#### **4.1.5. Устройства, генерирующие вихри**

Идея этого метода, предложенного М. Терраколом (M. Terracol) в 2012 г. (см. [134]) состоит в инициировании развития турбулентности в LES подобласти зонных методов с использованием устройств для генерации вихрей (Vortex-Generating Device или VGD), аналогичных реальным устройствам, применяемым в экспериментах для инициирования ламинарно-турбулентного перехода (см. рис. 4.2f). Ясно, что как и в эксперименте, для того, чтобы избежать при этом глобального изменения потока, толщина VGD должна быть значительно (в несколько раз) меньше толщины пограничного слоя.

Преимущества VGD по сравнению с рассмотренными выше методами создания искусственной турбулентности состоят, прежде всего, в том, что этот метод не имеет каких-либо ограничений с точки зрения сложности потока и достаточно прост в реализации, особенно если учесть, что к точности воспроизведения в расчетах формы VGD не предъявляется высоких требований. Кроме того, этот метод является гораздо менее “шумным”, чем все рассмотренные выше методы создания турбулентного контента на RANS-LES интерфейсе и, следовательно, имеет высокий

потенциал в аэроакустических приложениях. С другой стороны, длина участка релаксации при его использовании оказывается относительно большой (более 10 толщин пограничного слоя), то есть значительно превосходит длины релаксации, обеспечиваемые лучшими методами для чисто аэродинамических приложений.

Проведенный краткий обзор существующих методов создания искусственной турбулентности на RANS-LES интерфейсе позволяет сформулировать следующие основные выводы.

Данное направление исследований быстро эволюционирует, что объясняется его важностью для многих научных и промышленных приложений. Для чисто аэродинамических приложений лучшие из уже существующих методов являются достаточно эффективными, то есть обеспечивают малые (около 2-4 толщин пограничного слоя) длины адаптации искусственной турбулентности к развитой “реальной” турбулентности в LES подобласти. Однако в настоящее время невозможно отдать определенное предпочтение какому-либо одному методу, поскольку разные методы имеют свои достоинства и недостатки и существенно отличаются не только с точки зрения точности, но и по общности и сложности реализации.

К сожалению, по причинам, обсуждавшимся выше, ни один из “чисто аэродинамических” методов, за исключением, быть может, метода VGD, имеющего другие недостатки, не обеспечивает приемлемой для практики точности решения аэроакустических задач. Поэтому для этих целей необходима разработка соответствующих “акустических” модификаций существующих методов. Один из примеров таких модификаций рассмотрен ниже в разделе 4.2.2.

## 4.2. Метод генерации синтетической турбулентности NTS STG<sup>16</sup>

Исходная, чисто аэродинамическая версия данного метода была предложена в работе [156], а ее слегка модифицированный вариант и акустически адаптированная версия описана в работе [134]. Данный метод опирается на идеи Крейчнана [153] и имеет ряд общих черт с STG, предложенными в работах [154], [155], [164] и [165]. Сильная сторона NTS STG состоит в его способности качественно правильно воспроизводить анизотропию турбулентных вихревых структур, являющуюся одной из важнейших физических особенностей пристеночной турбулентности, даже в тех случаях, когда синтетическая турбулентность генерируется на основе RANS решения, полученного с использованием линейных моделей турбулентности. Кроме того, в данном методе отсутствует проблема некоррелированности создаваемых вихрей, которая неизбежно возникает при использовании STG, базирующихся на локальных определениях пространственных и временных масштабов турбулентности. В данном разделе вначале приводится формулировка аэродинамической версии NTS STG, а затем описывается его акустически адаптированная версия.

### 4.2.1. Формулировка аэродинамической версии NTS STG

В рамках данного метода, как и в других методах генерации синтетической турбулентности (см. схему на рис. 4.2с), вектор скорости в точке  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ , лежащей на RANS-LES интерфейсе, задается как сумма вектора скорости осредненного течения,

---

<sup>16</sup> Аббревиатура NTS относится к названию кода (Numerical Turbulence Simulation), в котором данный метод был впервые реализован.

который предполагается известным из RANS решения, и искомого вектора синтетических пульсаций скорости:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_{RANS}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t). \quad (4.1)$$

Для того, чтобы автоматически обеспечить равенство тензора вторых моментов синтетических флуктуаций  $\overline{u'_i u'_j}$  тензору рейнольдсовых напряжений  $\hat{\mathbf{R}} = \{R_{ij}\} \equiv \overline{u'_i u'_j}_{RANS}$ , который также предполагается известным из RANS решения<sup>17</sup>, к тензору  $\hat{\mathbf{R}}$  применяется так называемое разложение Холецкого  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}}$ , где тензор  $\hat{\mathbf{A}}$  определяется следующим образом

$$\hat{\mathbf{A}} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

С использованием (4.2) компоненты вектора синтетических пульсаций скорости  $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ , входящие в (4.1), могут быть выражены через компоненты тензора  $\hat{\mathbf{A}}$

$$u'_i(\mathbf{r}, t) = a_{ij} v'_j(\mathbf{r}, t), \quad (4.3)$$

где величины  $v'_j(\mathbf{r}, t)$  представляют собой компоненты вспомогательного вектора флуктуаций, удовлетворяющие ограничениям  $\overline{v'_i} = 0$  и  $\overline{v'_i v'_j} = \delta_{ij}$ .

Таким образом, задача определения  $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$  в (4.1) сводится к задаче нахождения вспомогательного вектора  $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$ ,

---

<sup>17</sup> В случае, если RANS решение получено с использованием линейных моделей турбулентности, нормальные напряжения обычно полагаются равными 2/3 кинетической энергии турбулентности  $k$ . В тех случаях, когда последняя неизвестна, например, при использовании SA модели (см. раздел 2.2.2), для оценки  $k$  используется приближенное соотношение  $k = v_t S / 0.3$ .

удовлетворяющего указанным ограничениям. Этот вектор представляется в форме следующей суперпозиции взвешенных пространственно-временных Фурье мод:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = 2\sqrt{3/2} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} \left[ \boldsymbol{\sigma}^n \cos(k^n \mathbf{d}^n \cdot \mathbf{r}' + \varphi^n) \right]. \quad (4.4)$$

Здесь  $N$  - число мод;  $q^n$  - нормализованная амплитуда моды  $n$ , определяемая локальным энергетическим спектром турбулентности;  $k^n$  амплитуда вектора волнового числа моды  $n$ ,  $\mathbf{k}^n = k^n \mathbf{d}^n$  ( $\mathbf{d}^n$  - единичный вектор со случайным направлением, равномерно распределенным по сфере);  $\boldsymbol{\sigma}^n$  - единичный вектор нормальный к вектору  $\mathbf{d}^n$  ( $\boldsymbol{\sigma}^n \cdot \mathbf{d}^n = 0$ ) [153], направление которого в плоскости, нормальной к  $\mathbf{d}^n$ , определяется случайным углом, равномерно распределенным в интервале  $[0, 2\pi)$ ;  $\varphi^n$  - фаза моды  $n$ , которая также является случайным числом, равномерно распределенным в интервале  $[0, 2\pi)$ .

Отметим, что все перечисленные случайные величины “разыгрываются” для каждой моды  $n$  только один раз и, следовательно, не изменяются во времени.

Что касается зависимости флуктуаций скорости от времени, то она вводится в (4.4) через вектор  $\mathbf{r}'$ , компоненты которого определяются формулами

$$\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}, \quad x' = \frac{2\pi}{k^n \max\{l_e(\mathbf{r})\}} (x - U_0 t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (4.5)$$

где  $U_0$  - макромасштаб скорости на RANS-LES интерфейсе (например, максимальная или среднерасходная скорость),  $l_e$  - локальный линейный масштаб наиболее энергосодержащих вихрей (его определение дано ниже – см. (4.8)), а  $\max\{l_e(\mathbf{r})\}$  - максимальное значение  $l_e$  на интерфейсе.

Нормализованные амплитуды мод  $q^n$  в (4.4) определяются соотношением

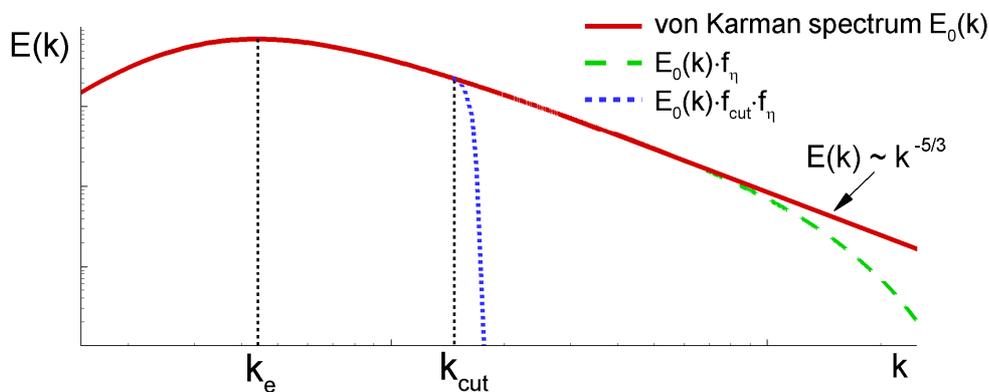
$$q^n = \frac{E(k^n) \Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n) \Delta k^n}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1, \quad (4.6)$$

в котором величина  $E(k^n)$  представляет собой заданный пространственный спектр кинетической энергии турбулентности.

В качестве этого спектра используется модифицированный спектр фон Кармана, показанный на рисунке 4.3 и рассчитываемый по формуле

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2.4(k/k_e)^2]^{17/6}} f_\eta f_{cut}, \quad (4.7)$$

в которой через  $k_e$  обозначено волновое число, соответствующее спектральному максимуму, а  $f_\eta$  и  $f_{cut}$  - эмпирические функции.



**Рисунок 4.3.** Энергетический спектр турбулентности, используемый в NTS STG

Согласно (4.7), волновое число  $k_e$  соответствует длине волны наиболее энергосодержащей моды  $l_e = l_e(\mathbf{r})$  синтетических флуктуаций скорости ( $k_e = 2\pi/l_e$ ) или, иными словами, локальному размеру наиболее энергосодержащих вихрей. Это делает надлежащее определение величины  $l_e$  крайне важным и во многом

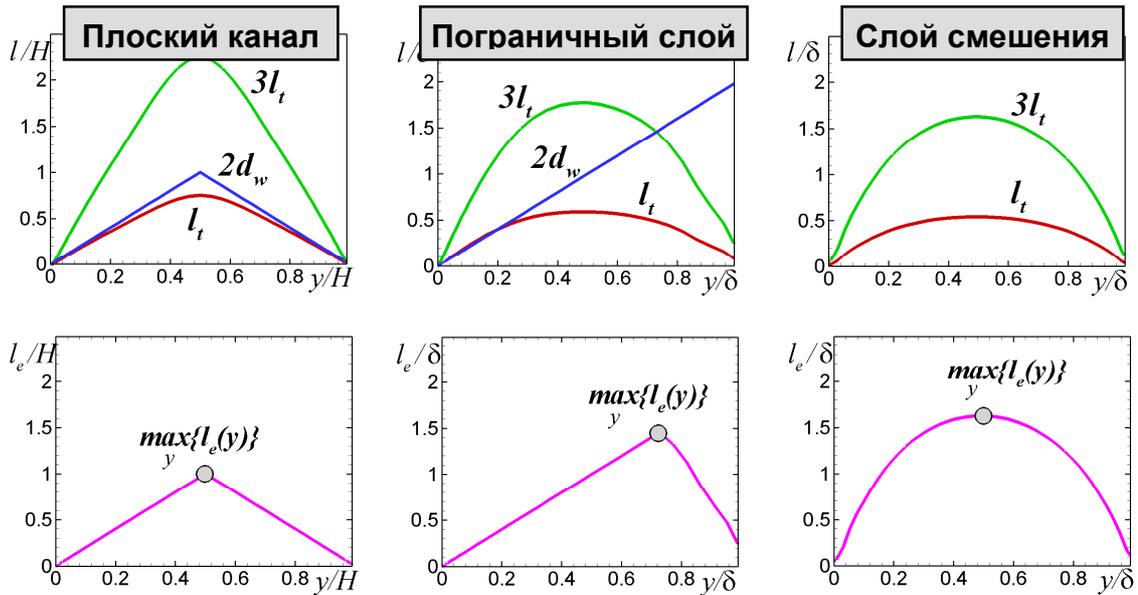
определяющим скорость адаптации синтетической турбулентности к реальной. В рамках рассматриваемого метода предполагается, что эта величина пропорциональна линейному масштабу RANS модели турбулентности, на базе которой работает STG, но, исходя из простых геометрических соображений, ограничена сверху удвоенным расстоянием от рассматриваемой точки до обтекаемой поверхности  $d_w$ :

$$l_e = \min(2d_w, C_l l_t). \quad (4.8)$$

В этом соотношении  $C_l = 3.0$  - эмпирическая константа, определенная на основе предварительных расчетов плоского слоя смешения, а  $l_t$  - линейный масштаб базовой RANS модели турбулентности (например, для  $k$ - $\omega$  модели  $l_t = k_t^{1/2} / (C_\mu \omega_t)$ ), определенный из стационарного RANS решения.

Функция (4.8) построена таким образом, чтобы величина  $l_e$  в пристеночной области пограничного слоя была равна удвоенному расстоянию до стенки, а в его внешней области становилась пропорциональной линейному масштабу используемой базовой RANS модели турбулентности.

Примеры определенных по формуле (4.8) нормализованных распределений  $l_e(\mathbf{r})$  в трех канонических сдвиговых течениях (развитое течение в плоском канале, пограничный слой на плоской пластине и свободный слой смешения), рассчитанных с использованием SST модели, представлены на рисунке 4.4. Эти примеры свидетельствуют о том, что изменение  $l_e$  поперек сдвиговых слоев полностью соответствует физическим представлениям о размерах наиболее энергонесущих вихрей в различных областях потока. В частности, величина  $l_e(y)$  оказывается малой вблизи твердых стенок и на внешней границе сдвиговых слоев и достигает максимального значения порядка толщины слоя внутри этих слоев.



**Рисунок 4.4.** Профили “ингредиентов” величины линейного масштаба  $l_e$  (4.8) (верхний ряд) и ее распределения в различных “канонических” сдвиговых течениях (нижний ряд). Первая колонка – течение в плоском канале; вторая колонка – пограничный слой на плоской пластине; третья колонка – свободный слой смешения.  $H$  – высота канала;  $\delta$  – толщина пограничного слоя или слоя смешения. Серый кружок показывает значение максимума величины  $l_e$ ,  $l_e^{\max} = \max_r[l_e(\mathbf{r})]$

Возвращаясь к выражению для энергетического спектра синтетической турбулентности (4.7), отметим, что эмпирическая функция  $f_\eta$  введена в это выражение для того, чтобы обеспечить демпфирование спектра в окрестности волновых чисел, соответствующих колмогоровскому линейному масштабу  $l_\eta = (v^3/\varepsilon)^{1/4}$ , то есть в окрестности  $k_\eta = 2\pi/l_\eta$ . Эта функция построена на основе классических экспериментов Comte-Bellot и Corrsin [105] и имеет вид

$$f_\eta = \exp[-(12k/k_\eta)^2]. \quad (4.9)$$

Вторая эмпирическая функция  $f_{cut}$ , входящая в (4.7), демпфирует спектр при волновых числах, превышающих значение  $k_{cut}$ , соответствующее частоте Найквиста (Nyquist [166]), и имеет вид

$$f_{cut} = \exp\left(-\left[\frac{4 \max(k - 0.9k_{cut}, 0)}{k_{cut}}\right]^3\right), \quad k_{cut} = 2\pi / l_{cut}, \quad (4.10)$$

где

$$l_{cut} = 2 \min\{[\max(\Delta_y, \Delta_z, 0.3\Delta_{max}) + 0.1d_w], \Delta_{max}\}, \quad (4.11)$$

$\Delta_y$  и  $\Delta_z$  - локальные шаги сетки на RANS-LES интерфейсе, а  $\Delta_{max} = \max\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$ .

Наконец, следует подчеркнуть, что набор волновых чисел в суперпозиции пространственно-временных мод (4.4), используемой для определения флуктуаций скорости  $\mathbf{v}'$  в рамках NTS STG, считается общим для всей поверхности RANS-LES интерфейса и задается геометрической прогрессией:

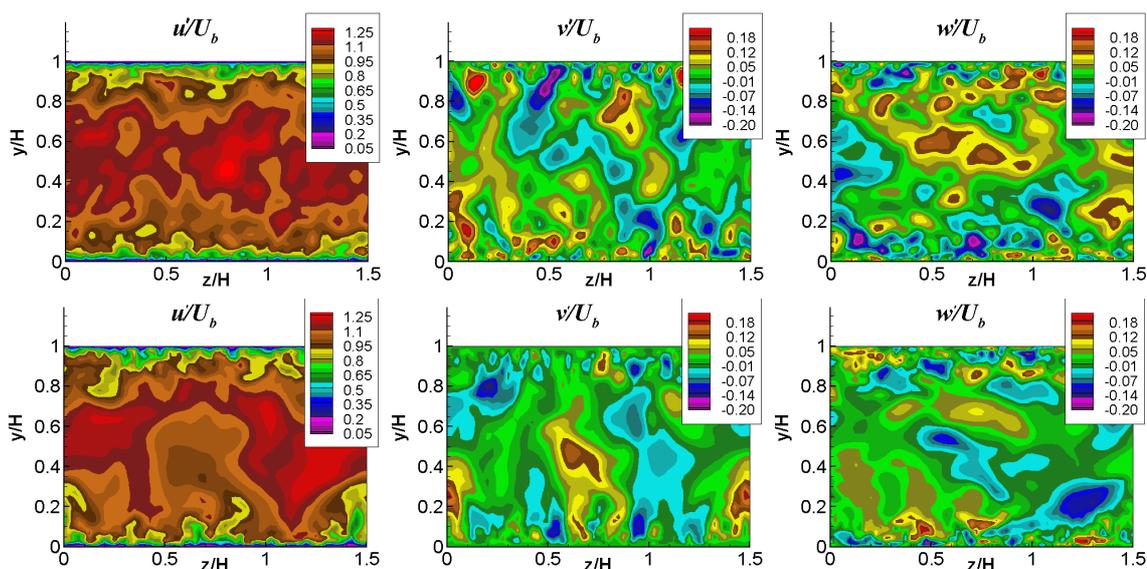
$$k^n = k^{\min} (1 + \alpha)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad 0.01 \leq \alpha \leq 0.05. \quad (4.12)$$

Здесь  $k^{\min} = \beta k_e^{\min}$  - минимальное значение волнового числа в наборе,  $\beta$  - эмпирическая константа равная 0.5,  $k_e^{\min} = 2\pi / l_e^{\max}$  - волновое число, соответствующее максимальному значению  $l_e$  на интерфейсе  $l_e^{\max} = \max_{\mathbf{r}}\{l_e(\mathbf{r})\}$ , а значение  $N$  (число мод в (4.4)) определяется как минимальное целое число, для которого  $k^N$  удовлетворяет неравенству  $k^N \geq k_{\max} = 1.5 \max\{k_{cut}(\mathbf{r})\}$ .

Отметим, что при проведении RANS-LES расчетов использование геометрической прогрессии для определения набора волновых чисел вместо их равномерного распределения с шагом, равным минимальному шагу этой прогрессии, позволяет значительно (на порядок величины) сократить суммарное число мод без сколько-нибудь заметной потери точности.

Завершая описание аэродинамической версии NTS STG, приведем пример поля турбулентных пульсаций скорости, генерируемого им по решению, полученному с использованием

SST RANS модели при расчете развитого течения в плоском канале. Это поле показано на рисунке 4.5 вместе с аналогичным полем из LES этого течения, выполненного с использованием периодических граничных условий по продольной координате. Из рисунка видно, что, по крайней мере, качественно синтетическое и “реальное” (рассчитанное с использованием LES) поля близки друг к другу.

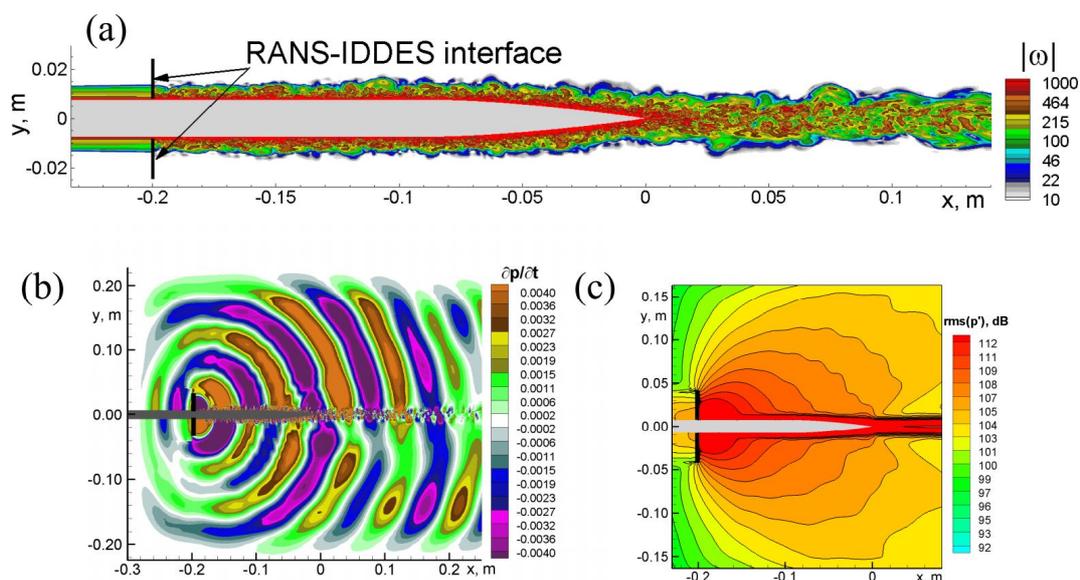


**Рисунок 4.5.** Синтетическое поле пульсаций скорости в поперечном сечении установившегося течения в плоском канале, рассчитанное с использованием NTS STG (верхний ряд), и аналогичное поле, полученное из LES данного течения с использованием граничных условий периодичности по продольной координате (нижний ряд)

#### 4.2.2. Акустически адаптированная версия NTS STG

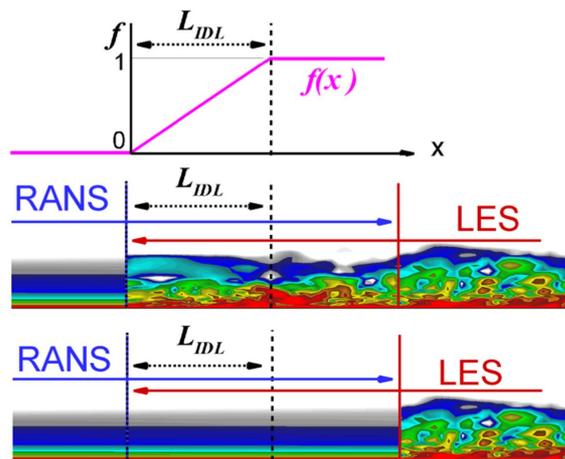
Как уже неоднократно отмечалось выше при обсуждении различных способов создания турбулентного контента на входе в LES подобласть в рамках зонных RANS-LES подходов, внезапное формирование вихревых структур на RANS-LES интерфейсе приводит к появлению ложных источников шума. Применительно к NTS STG этот негативный эффект наглядно иллюстрирует рисунок 4.6, на котором представлены результаты RANS-IDDES расчета обтекания задней кромки аэродинамического профиля

[167], полученные с использованием этого генератора синтетической турбулентности.



**Рисунок 4.6.** Мгновенные поля модуля завихренности (а), производной по времени от давления в акустическом диапазоне (b) и среднеквадратичных пульсаций давления (с) при обтекании задней кромки аэродинамического профиля при числе Маха 0.15 [167], рассчитанные с использованием зонного RANS-IDDES и NTS STG

Как известно, основной источник шума в этом течении расположен в непосредственной близости к задней кромке. Однако, согласно результатам расчета, доминирующими оказываются сильные волны (см. рис. 4.6b и 4.6c), генерируемые на RANS-IDDES интерфейсе вихревыми структурами (см. рис. 4.6a), на фоне которых истинный источник шума становится просто невидимым. В результате, акустическое поле оказывается полностью искаженным, что убедительно свидетельствует о неприменимости чисто аэродинамических версий генераторов синтетической турбулентности к задачам аэроакустики и о необходимости их соответствующих (аэроакустических) модификаций. Суть одной из таких модификаций, предложенной в [134], иллюстрирует рисунок 4.7.



**Рисунок 4.7.** Схема внутреннего демпфирующего слоя (IDL)

В рамках этой модификации для подавления ложных источников шума, создаваемого синтетической турбулентностью на RANS-LES интерфейсе, в области перекрытия RANS и LES подобластей зонного RANS-LES вводится внутренний демпфирующий слой (Internal Damping Layer или IDL). Внутри этого слоя поле статического давления, рассчитанное с использованием LES на каждом временном шаге модифицируется путем его “взвешивания” с давлением, рассчитанным с помощью URANS, которое также доступно в области перекрытия, то есть определяется с помощью соотношения

$$p_{LES}^{mod} = f(x) \cdot p_{LES} + [1 - f(x)] \cdot p_{RANS}, \quad (4.13)$$

в котором эмпирическая весовая функция  $f(x)$  имеет вид  $f = \max\{\min[(x-x_0)/L_{IDL}, 1], 0\}$ , через  $x_0$  обозначена продольная координата входа в LES подобласть (положение RANS-LES интерфейса), а через  $L_{IDL}$  - длина демпфирующего слоя, которая обычно полагается равной двум локальным толщинам пограничного слоя.<sup>18</sup>

---

<sup>18</sup> Другой способ подавления ложного шума на RANS-LES интерфейсе, основанный на введении специальных объемных источников в исходные уравнения, предложен в работах [162, 163].

Что касается скорости и температуры внутри IDL, то они остаются неизменными, а плотность в нем пересчитывается по модифицированному давлению с использованием уравнения состояния.

Рассмотрим далее некоторые примеры, иллюстрирующие работу описанных выше чисто аэродинамической и акустически адаптированной версий NTS STG в рамках зонного RANS-IDDES подхода к моделированию турбулентности.

#### **4.2.3. Примеры, иллюстрирующие возможности NTS STG в рамках зонного RANS-IDDES подхода**

В данном разделе на примерах нескольких типичных аэродинамических и аэроакустических задач иллюстрируется функционирование NTS STG в рамках RANS-IDDES с базовой RANS моделью SST.

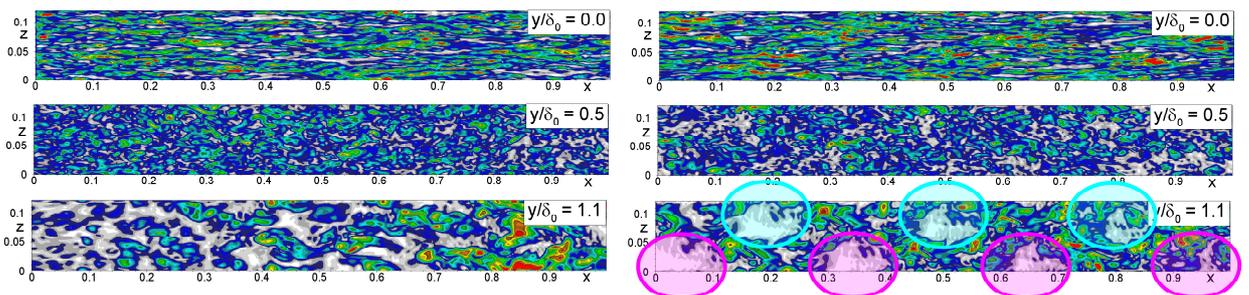
##### Турбулентный пограничный слой на плоской пластине.

Расчеты этого течения были выполнены при числе Рейнольдса, построенном по толщине потери импульса в начальном сечении  $Re_{\theta_0} = 10^3$ , в области с размерами  $L_x = 25\delta_0$ ,  $L_y = 10\delta_0$ , и  $L_z = 3\delta_0$  в направлениях основного потока, по нормали к стенке и поперек потока соответственно. В этих расчетах использовалась сетка с размером  $N_x \times N_y \times N_z = 251 \times 71 \times 61$ , с равномерными шагами по  $x$  и  $z$  ( $\Delta x = 0.1\delta_0$ ,  $\Delta z = 0.05\delta_0$ ) и неравномерным шагом по  $y$ , изменяющимся от минимального значения  $\Delta y_{min} = 0.0025\delta_0$  на поверхности пластины до максимального значения  $\Delta y_{max} = 0.05\delta_0$  по геометрической прогрессии с коэффициентом равным 1.12. Соответствующие величины шагов в координатах закона стенки составляли  $\Delta x^+ = 40$ ,  $\Delta z^+ = 20$  и  $\Delta y_{min}^+ \approx 1.0$ .

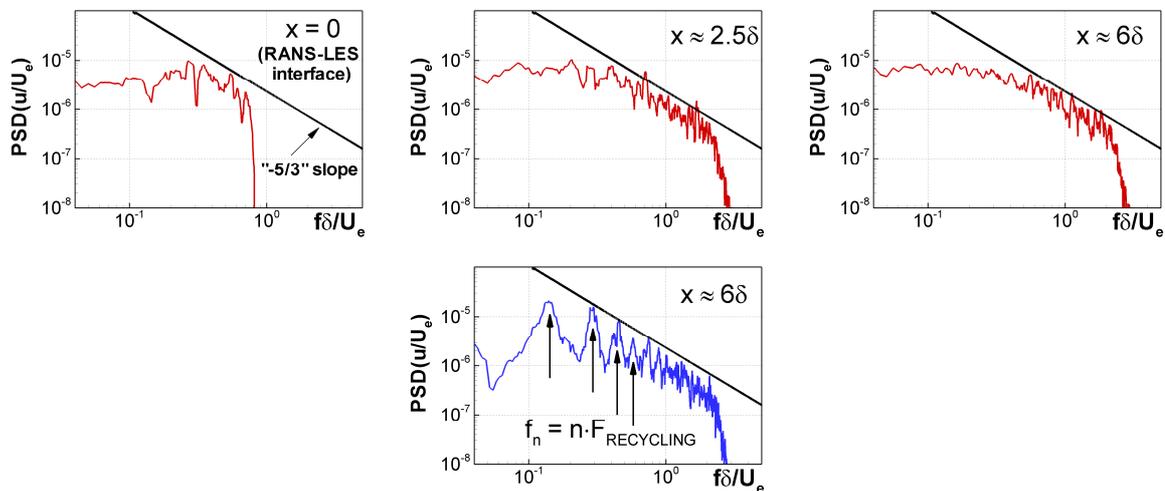
Результаты расчетов представлены на рисунках 4.8 – 4.11, где они сравниваются с аналогичными результатами, полученными

в рамках “глобального” (во всей области) SST IDDES подхода в сочетании с процедурой рецикла турбулентности [138] при длине зоны рецикла, равной шести начальным толщинам пограничного слоя, и с результатами DNS [168].

Первые два из этих рисунков наглядно иллюстрируют преимущества зонного IDDES в сочетании с STG по сравнению с глобальным IDDES в сочетании с рециклом турбулентности.

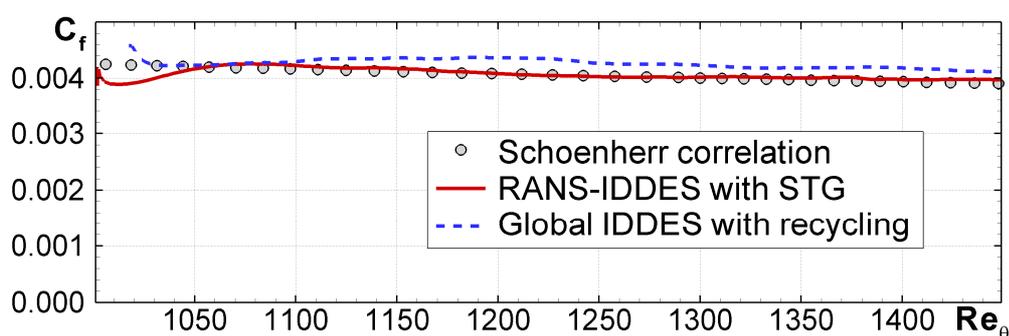


**Рисунок 4.8.** Мгновенные поля модуля завихренности в различных  $XZ$  сечениях пограничного слоя на плоской пластине. Слева: зонный RANS-IDDES в сочетании с NTS STG; справа: глобальный IDDES в сочетании с рециклом турбулентности

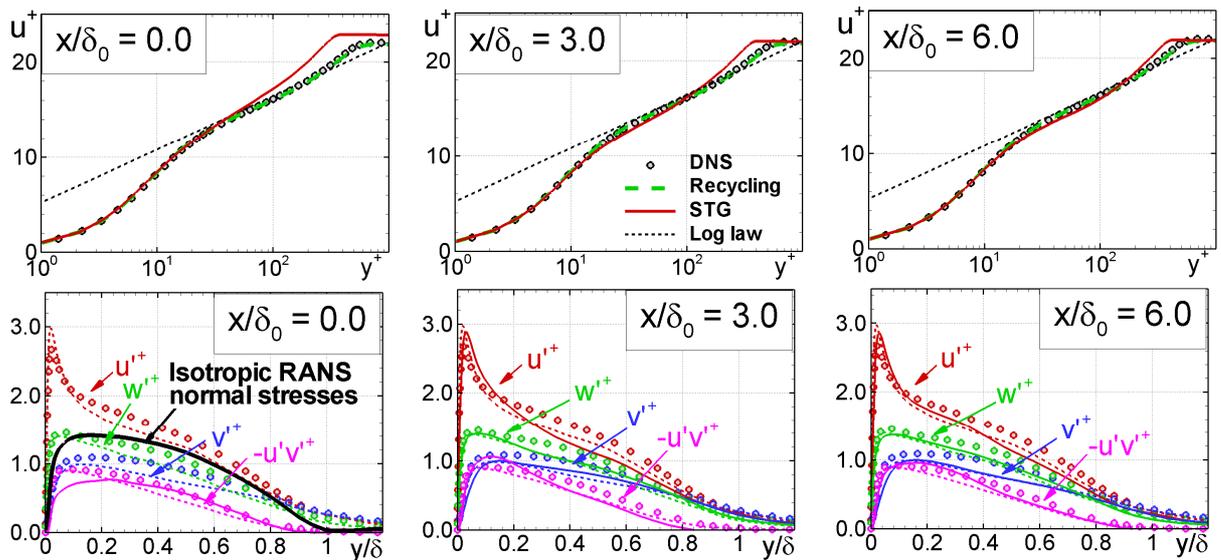


**Рисунок 4.9.** Эволюция вниз по потоку от входной границы ( $x = 0$ ) спектров пульсаций продольной скорости в середине пограничного слоя ( $y/\delta \approx 0.5$ ) из зонного RANS-IDDES расчета с использованием NTS STG (верхний ряд) и аналогичный спектр в сечении  $x = 6\delta$  из глобального IDDES расчета с использованием рецикла турбулентности (нижний рисунок)

В частности, из рисунка 4.8 видно, что во внутренней части пограничного слоя (при  $y/\delta_0=0$  и 0.5) оба метода обеспечивают быстрое формирование реалистичных турбулентных структур. В то же время, во внешней части пограничного слоя использование рецикла турбулентности, в отличие от STG, приводит к возникновению нефизических периодических структур (они обведены на рисунке овалами) с периодом, близким к длине зоны рецикла. Этот недостаток метода рецикла турбулентности, обсуждавшийся ранее в разделе 4.1.3, ясно виден также на рисунке 4.9, на котором сравниваются спектры флуктуаций скорости из двух расчетов. При использовании STG происходит быстрое восстановление “естественного” спектра с достаточно протяженным инерционным интервалом, описываемым законом “-5/3”, в то время как рецикл турбулентности приводит к появлению в спектре ложных пиков с частотами кратными основной частоте рецикла, происхождение которых связано с периодическими вихревыми структурами, показанными на рисунке 4.8. Этот негативный эффект может быть ослаблен за счет увеличения длины области рецикла, однако это приводит к неоправданному увеличению вычислительных затрат.



**Рисунок 4.10.** Сравнение продольных распределений коэффициента трения, рассчитанных с использованием RANS-IDDES с NTS STG и глобального IDDES с рециклом турбулентности, с экспериментальной корреляцией Шойнера (Schoenherr [86])



**Рисунок 4.11.** Сравнение профилей скорости (верхний ряд) и разрешенных реинольдсовых напряжений (нижний ряд), рассчитанных с использованием RANS-IDDES с NTS STG, глобального IDDES с рециклом турбулентности и DNS [168]

На рисунках 4.10 и 4.11 представлены результаты расчетов основных осредненных характеристик потока и реинольдсовых напряжений, полученные с использованием двух рассматриваемых методов.

Из этих рисунков видно, в частности, что оба метода предсказывают близкие друг к другу продольные распределения коэффициента трения  $C_f$ , которые хорошо согласуются с эмпирической корреляцией [86]. В то же время, профили осредненной скорости вблизи RANS-IDDES интерфейса, рассчитанные с использованием зонного RANS-IDDES с NTS STG заметно отклоняются от профилей, полученных с использованием глобального IDDES с рециклом турбулентности и DNS (см. рис. 4.11). Однако этот дефект объясняется не какими-либо недостатками NTS STG как такового, а неточностью SST RANS решения, на котором он базируется. Эта неточность обусловлена сравнительно низким значением числа Рейнольдса (при таких числах Рейнольдса все известные RANS модели оказываются заметно менее точными, чем при высоких числах Рейнольдса,

для которых проведена их калибровка), а также игнорированием анизотропии нормальных рейнольдсовых напряжений в рамках линейной SST RANS модели. Это ясно видно из сопоставления профилей нормальных рейнольдсовых напряжений на рис. 4.11 при  $x = 0$  (RANS-IDDES интерфейс), рассчитанных с использованием двух подходов к созданию турбулентного контента. Действительно, метод рецикла турбулентности предсказывает эти профили достаточно точно (полученные с его помощью результаты близки к результатам DNS), в то время как синтетические флуктуации скорости, рассчитанные с использованием STG, естественно, воспроизводят изотропные нормальные напряжения, рассчитанные с помощью линейной RANS модели и задаваемые в качестве входных данных для STG. Тем не менее, восстановление правильной анизотропии нормальных напряжений вниз по потоку от интерфейса происходит достаточно быстро, и уже при  $x/\delta_0 = 3$  напряжения, рассчитанные с использованием обоих методов, становятся вполне сопоставимыми и близкими к результатам DNS.

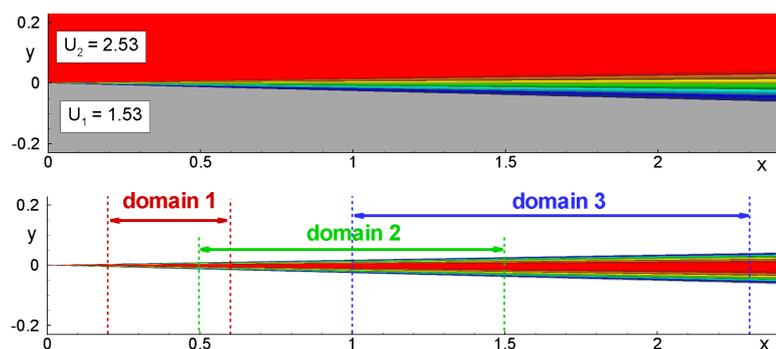
#### Плоский слой смещения.

Данное течение является классическим примером свободных сдвиговых потоков, и его расчеты с использованием зонного RANS-IDDES в сочетании с NTS STG позволяют объективно оценить возможности данного метода применительно к течениям такого типа. На рисунках 4.12 - 4.14 представлены результаты таких расчетов, выполненных для условий эксперимента [169] при трех положениях RANS-IDDES интерфейса (0.2 м, 0.5 м и 1.0 м) с IDDES подобластями, имеющими следующие размеры (см. рис. 4.12):

$0.2 \text{ м} \leq x \leq 0.6 \text{ м}$ ,  $-0.8 \text{ м} \leq y \leq 0.8 \text{ м}$ ,  $0 \leq z \leq 0.08 \text{ м}$  (область 1);

$0.5 \text{ м} \leq x \leq 1.5 \text{ м}$ ,  $-1.0 \text{ м} \leq y \leq 1.0 \text{ м}$ ,  $0 \leq z \leq 0.18 \text{ м}$  (область 2);

$1.0 \text{ м} \leq x \leq 2.3 \text{ м}$ ,  $-1.2 \text{ м} \leq y \leq 1.2 \text{ м}$ ,  $0 \leq z \leq 0.28 \text{ м}$  (область 3).

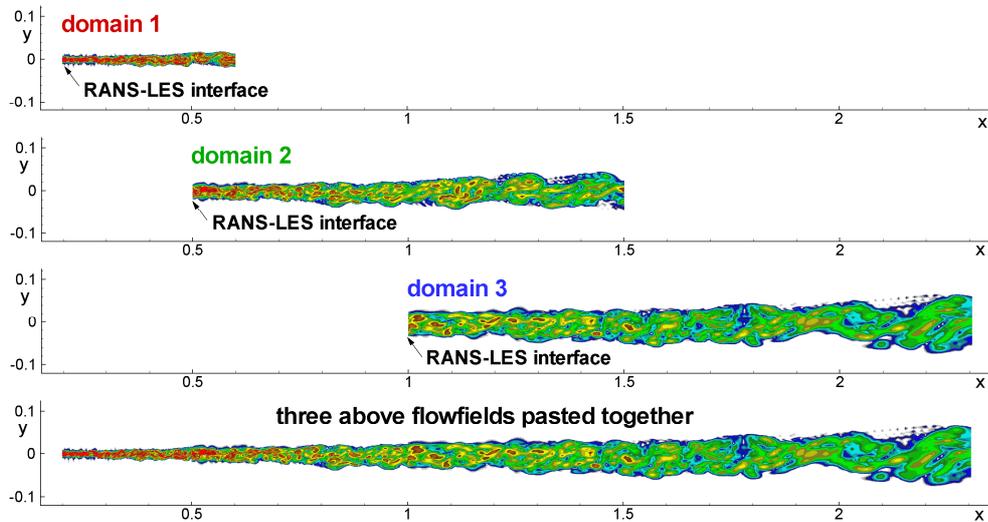


**Рисунок 4.12.** Поле продольной составляющей вектора скорости (сверху) и модуля завихренности (снизу) в плоском слое смешения [169], рассчитанные с использованием SST RANS модели. Нижний рисунок показывает также положения IDDES подобластей в трех RANS-IDDES расчетах

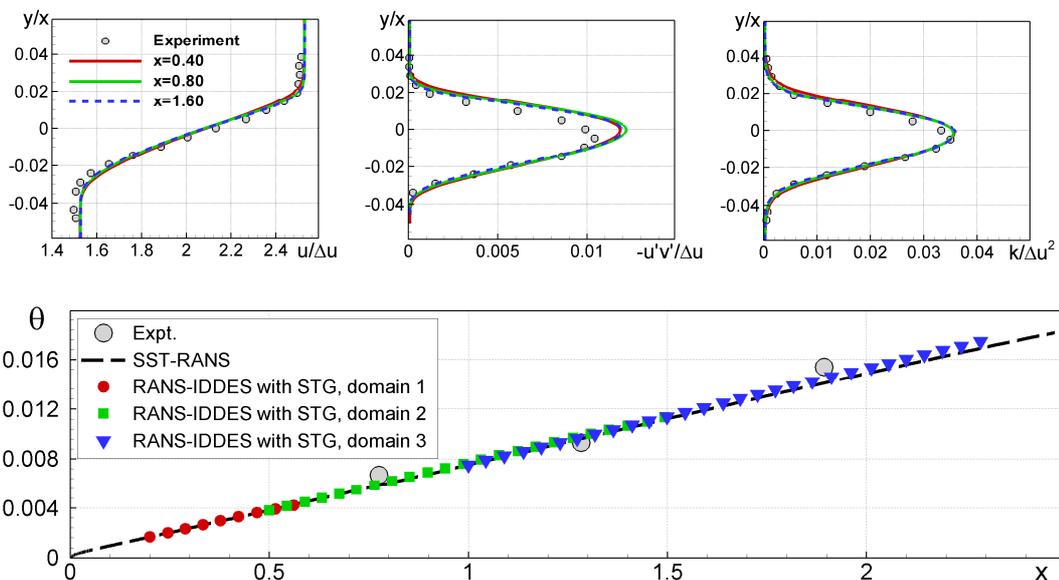
Толщина завихренности слоя смешения  $\delta_\omega = (U_2 - U_1) / \max(\partial u / \partial y)$  изменяется от 0.013 м при  $x = 0.2$  м до 0.12 м при  $x = 2.3$  м, что определяет шаги расчетной сетки, используемой в трех расчетах. Так, шаг сетки в продольном направлении  $x$  изменяется от  $9.8 \cdot 10^{-4}$  м до  $9.8 \cdot 10^{-3}$  м, сетка в направлении  $z$  является равномерной и имеет шаг равный  $0.0033 \delta_{\omega_{\max}}$  ( $\delta_{\omega_{\max}}$  - максимальное значение толщины завихренности в соответствующей подобласти), а минимальный шаг в направлении  $y$  в каждой подобласти составляет примерно  $0.01 \delta_{\omega_{\max}}$ .

На рисунке 4.13 показаны мгновенные поля модуля завихренности в IDDES подобластях, полученные в трех описанных выше расчетах, и соответствующее полное поле, полученное их “склеиванием”, а на рисунке 4.14 основные характеристики осредненного течения в слое смешения, рассчитанные с помощью RANS-IDDES и с помощью SST RANS, сравниваются с экспериментальными данными [169]. Из рисунков ясно видно, что на RANS-LES интерфейсе не возникает каких-либо видимых разрывов решения, и что RANS-IDDES в сочетании с NTS

STG обеспечивает очень хорошее согласование расчета с экспериментом.



**Рисунок 4.13.** Мгновенные поля модуля завихренности в плоском слое смешения из RANS-IDDES расчета с использованием NTS STG при различных положениях интерфейса



**Рисунок 4.14.** Эволюция профиля скорости, полного (разрешенного и моделируемого) касательного напряжения и кинетической энергии турбулентности (верхний ряд) и продольное распределение толщины потери импульса слоя смешения (нижний рисунок). Сравнение результатов зонного RANS-IDDES расчета при различных положениями интерфейса с экспериментом [169] и с результатами SST RANS расчета

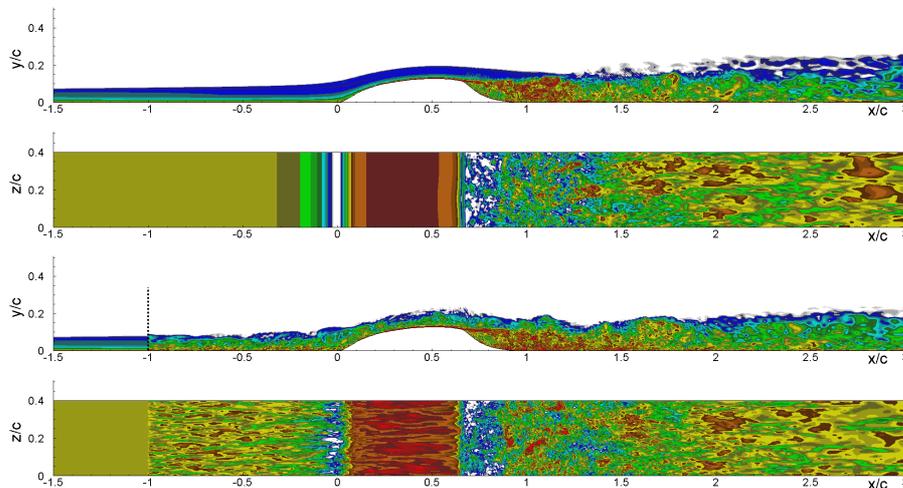
Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что, по крайней мере, для канонических сдвиговых течений данный метод обеспечивает надежное воспроизведение как средних параметров потока, так и структуры турбулентности и ее статистических характеристик. Этот вывод справедлив также и в отношении более сложных отрывных течений, один из примеров которых рассмотрен ниже.

#### Обтекание выпуклости на стенке плоского канала.

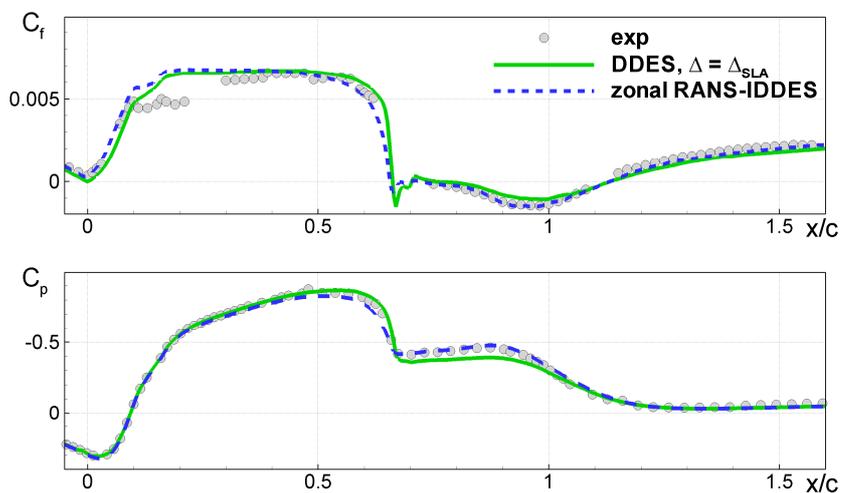
Это течение уже рассматривалось выше (в разделе 3) для иллюстрации возможности решения проблемы “серой” области на начальном участке оторвавшегося слоя смешения с помощью адаптированного к слоям смешения подсеточного масштаба для LES в рамках глобальных (незонных) DDES и IDDES подходов (см. рис. 3.42 - 3.47). Однако данная проблема может быть успешно решена и в рамках зонных подходов, в частности, с использованием зонного RANS-IDDES в сочетании с NTS STG. Об этом свидетельствуют рисунки 4.15 и 4.16, на которых представлено сравнение результатов расчетов рассматриваемого течения в рамках данного подхода (с использованием стандартного подсеточного масштаба  $\Delta_{\max}$ ) и в рамках глобального DDES в сочетании с подсеточным масштабом  $\Delta_{SLA}^{DDES}$  (3.44). Из этих рисунков видно, что оба подхода оказываются практически эквивалентными как с точки зрения скорости формирования развитой турбулентности на начальном участке оторвавшегося слоя смешения (рис. 4.15), так и в смысле согласования результатов расчета основных характеристик потока с экспериментальными данными по параметрам осредненного течения.

Таким образом, можно заключить, что для чисто аэродинамических приложений генератор синтетической турбулентности NTS STG, описанный в разделе 4.2.1 данной главы,

обеспечивает вполне приемлемую точность расчета как присоединенных пограничных слоев, так и свободных и оторвавшихся от обтекаемой поверхности слоев смешения.



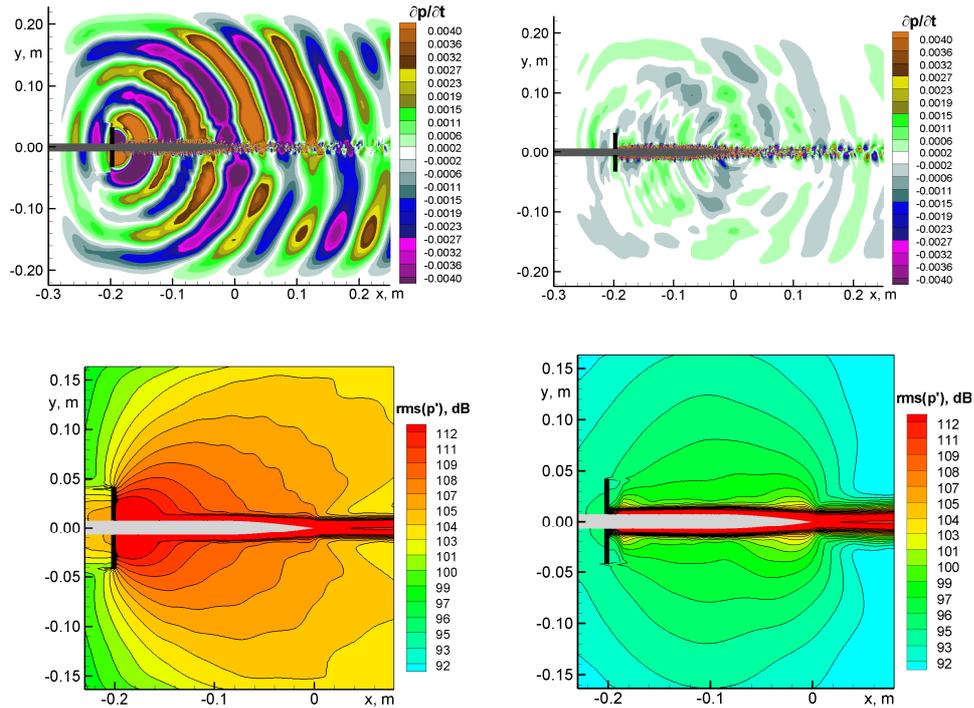
**Рисунок 4.15.** Мгновенные поля модуля завихренности в сечении XY потока и на стенке канала из глобального DDES с  $\Delta_{SLA}^{DDES}$  (верхний рисунок) и из зонного RANS-IDDES с  $\Delta_{max}$  и генератором синтетической турбулентности NTS STG на RANS-LES интерфейсе, расположенном при  $x/c = -1.0$  (нижний рисунок)



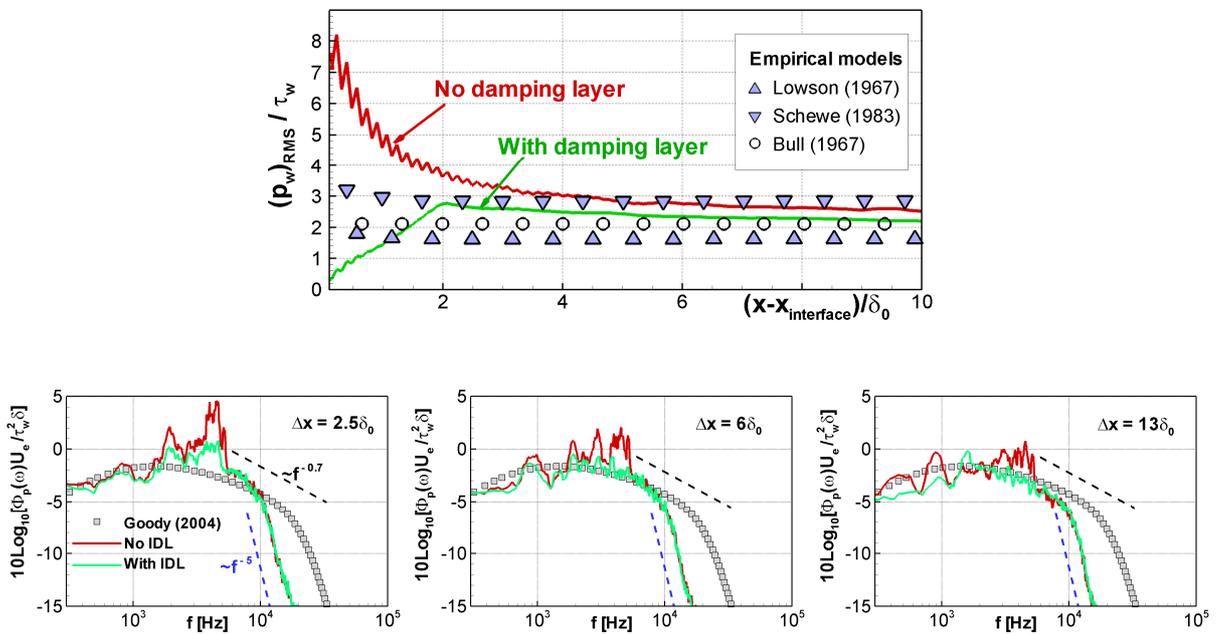
**Рисунок 4.16.** Сравнение с экспериментом продольных распределений коэффициентов трения и давления, рассчитанных с использованием глобального DDES с  $\Delta_{SLA}^{DDES}$  и зонного RANS-IDDES с  $\Delta_{max}$  и генератором синтетической турбулентности NTS STG на RANS-LES интерфейсе, расположенном при  $x/c = -1.0$

Что касается аэроакустической версии NTS STG (STG с внутренним поглощающим слоем IDL, раздел 4.2.2), то ее возможности иллюстрируют рисунки 4.17-4.25, на которых представлены некоторые примеры ее применения для решения задач аэроакустики.

В частности, на рисунке 4.17 представлено сравнение мгновенных полей производной по времени от акустического давления и полей среднеквадратичных пульсаций давления, рассчитанных с использованием чисто аэродинамической и акустической версий NTS STG в задаче об обтекании задней кромки аэродинамического профиля, решение которой с использованием чисто аэродинамической версии STG, уже рассматривалось в разделе 4.2.2. Из рисунка видно, что аэроакустическая версия STG (соотношение (4.12)) обеспечивает практически полное подавление ложных источников шума в окрестности RANS-LES интерфейса и делает доминирующим истинный источник шума, расположенный в окрестности задней кромки профиля. Более того, как следует из приведенного на рис. 4.18 сопоставления результатов расчетов с эмпирическими корреляциями [170 - 173], использование акустической версии STG позволяет более точно, чем его оригинальная версия, рассчитать интенсивность пульсаций давления на стенке и их спектральные характеристики в IDDES подобласти непосредственно вниз по потоку от конца IDL. Следует также отметить, что, несмотря на искажение нестационарного поля давления в LES подобласти внутри IDL, использование IDL не препятствует воспроизведению в расчете звуковых волн, генерируемых источниками, расположенными вниз по потоку от конца RANS подобласти и распространяющихся вверх по потоку: в пределах IDL эти волны распространяются по RANS-подобласти.



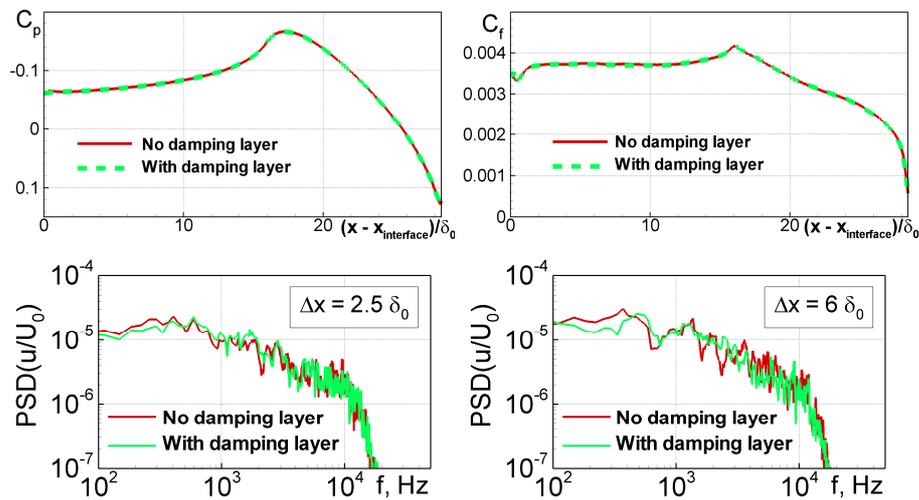
**Рисунок 4.17.** Мгновенные поля производной по времени от акустического давления (верхний ряд) и поля среднеквадратичных пульсаций давления (нижний ряд). Левая колонка: аэродинамическая версия NTS STG; правая колонка: NTS STG с IDL (соотношение (4.12))



**Рисунок 4.18.** Влияние IDL на среднеквадратичные пульсации давления на стенке в IDDES-подобласти зонного RANS-IDDES и на спектры давления на стенке (символами показаны результаты расчетов с использованием эмпирических корреляций [170 - 173])

Таким образом, результаты расчетов обтекания задней кромки аэродинамического профиля свидетельствуют о том, что с точки зрения предсказания аэроакустических характеристик потока использование IDL не влечет за собой отрицательных побочных эффектов.

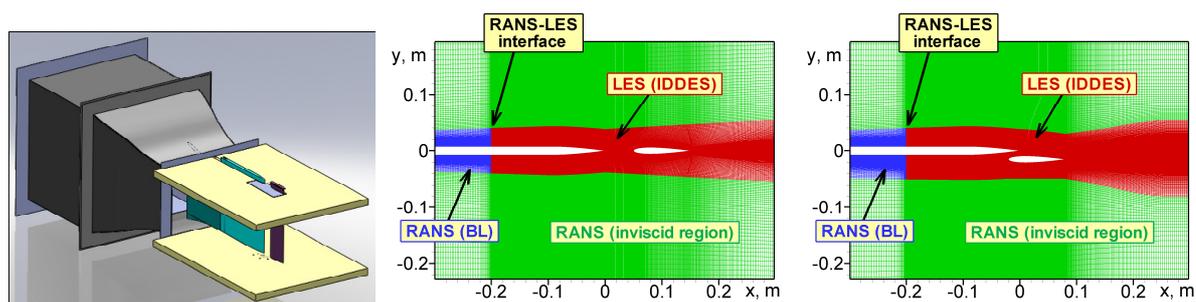
Тот же вывод можно сделать и в отношении предсказания аэродинамических характеристик осредненного течения и спектров скорости: как видно из рисунка 4.19, по крайней мере, при рассматриваемом низком числе Маха, введение IDL не приводит к сколько-нибудь заметному изменению этих характеристик.



**Рисунок 4.19.** Влияние IDL на распределения коэффициентов давления и трения и на спектры скорости в различных сечениях IDDES подобласти в середине пограничного слоя ( $y/\delta \approx 0.5$ )

Пример, демонстрирующий высокую точность аэроакустической версии NTS STG при расчете более сложных течений, представлен на рисунках 4.20 - 4.25. Речь идет о модельной конфигурации крыло-закрылок, экспериментальное исследование которой выполнено в работе [167]. В этих экспериментах крыло моделировалось длинной пластиной с острой задней кромкой, а закрылок представлял собой аэродинамический профиль NACA0012. Число Рейнольдса,

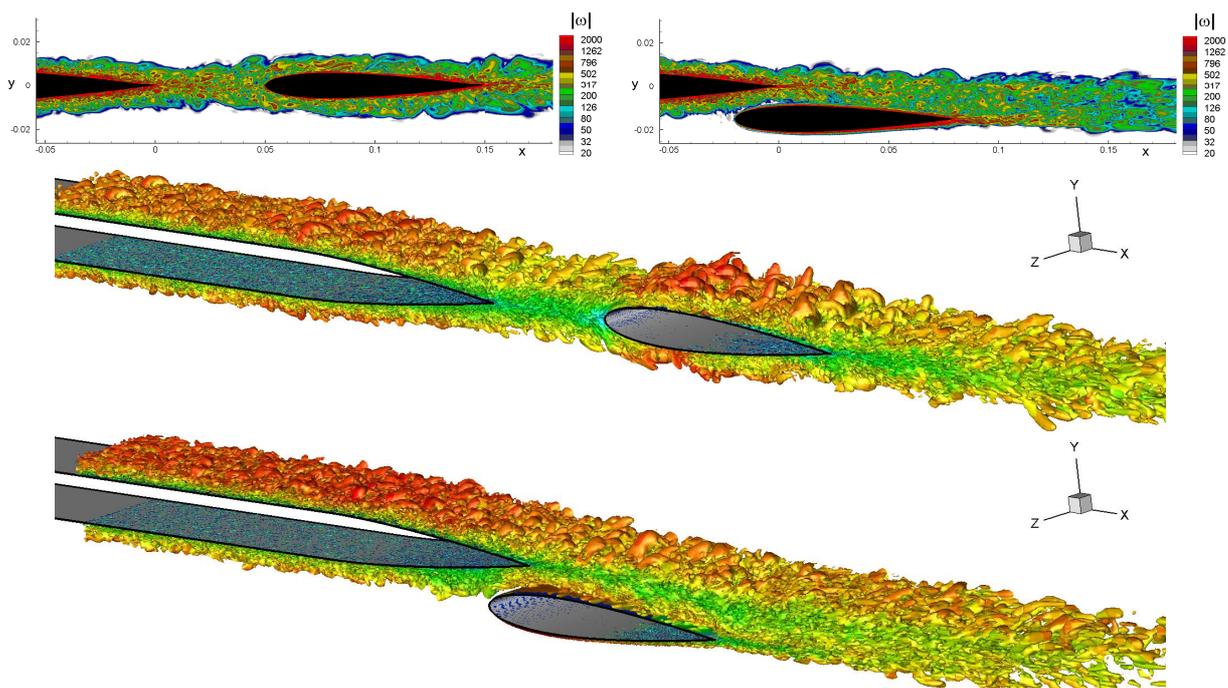
построенное по скорости внешнего потока ( $U_0 = 50$  м/с) и хорде закрылка ( $c_{flap} = 0.1$  м) составляло  $3.3 \cdot 10^5$ , а число Маха внешнего потока равнялось 0.15. В экспериментах были рассмотрены две конфигурации, которые характеризуются несколько разными механизмами генерации шума. В первой конфигурации закрылок расположен на одной линии с крылом, а во втором – сдвинут относительно него вниз (см рис. 4.20).



**Рисунок 4.20.** Схема эксперимента [167] и некоторые элементы вычислительных сеток в плоскости  $XY$ , использовавшихся в зонных RANS-IDDES расчетах двух рассматриваемых конфигураций “крыло-закрылок”

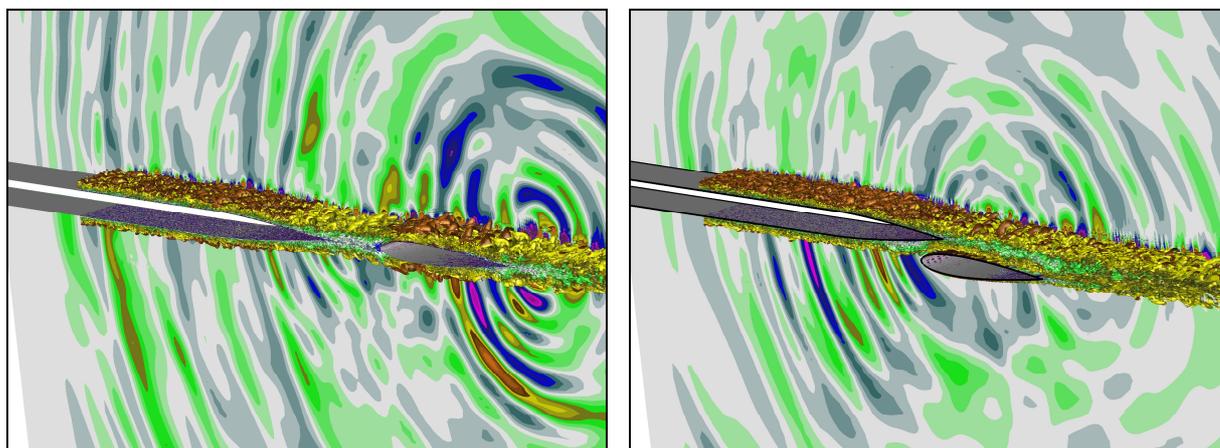
В расчетах описанного течения RANS-IDDES интерфейс располагался на расстоянии 0.2 м вверх по потоку от задней кромки пластины, а вычислительная сетка в IDDES подобласти была построена с учетом общепринятых рекомендаций для WMLES. В частности, пристеночный шаг был равен  $8 \times 10^{-6}$  м, что соответствует значению  $\Delta y_1^+ < 1.2$  во всей расчетной области. Значения шагов сетки по продольной координате  $x$  составляли не более 1/10 толщины пограничного слоя, а шаг сетки в направлении поперек потока (по координате  $z$ ) был постоянным и равным примерно 1/20 толщины пограничного слоя. Размер области по координате  $z$  составлял 0.03 м (1/10 от размера экспериментальной модели), и на границах области по этой координате использовались условия периодичности. В результате общее число ячеек сетки составляло около 18 миллионов.

На рисунке 4.21 показаны визуализации результатов расчетов обтекания обеих рассматриваемых конфигураций. Они свидетельствуют о том, что расчеты обеспечивают разрешение достаточно мелких развитых турбулентных структур в пограничных слоях основного крыла, и наглядно иллюстрируют различие характера взаимодействия турбулентных структур с закрылком в этих конфигурациях.

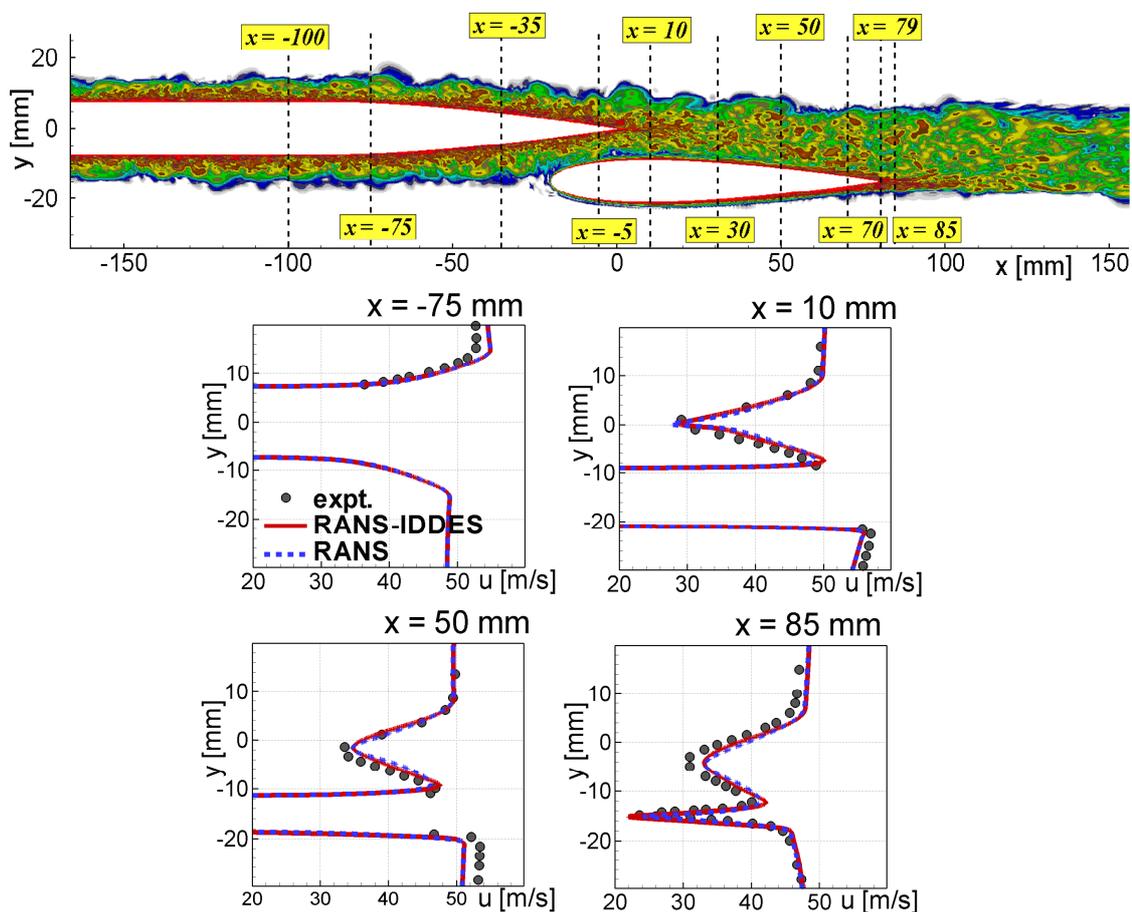


**Рисунок 4.21.** Мгновенные поля модуля завихренности (верхний ряд) и изоповерхности величины закрутки (второй инвариант тензора градиента скорости)  $\lambda = 200U_0 / c_{flap}$ , раскрашенные величиной продольной скорости

Соответствующие мгновенные поля акустического давления, представленные на рисунке 4.22, отражают различную интенсивность и положение основного источника шума в двух рассматриваемых течениях, а именно, окрестность задней кромки закрылка в первом и область между его передней кромкой и основным профилем во втором. Отметим также, что на рисунке не видно каких-либо ложных источников шума, расположенных в окрестности RANS-IDDES интерфейса, что подтверждает высокую эффективность акустической версии NTS STG.



**Рисунок 4.22.** Мгновенные поля производной по времени от давления в акустическом диапазоне из расчетов двух рассматриваемых конфигураций, совмещенные с мгновенными изоповерхностями величины закрутки

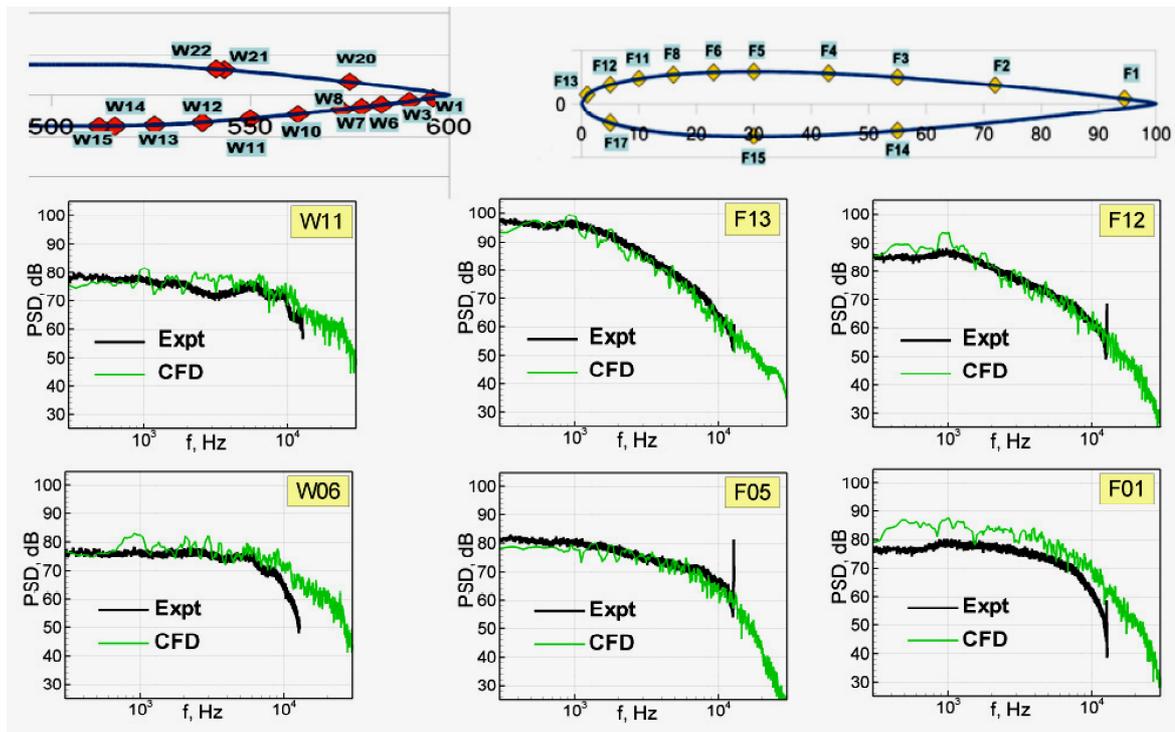


**Рисунок 4.23.** Сравнение расчетных и экспериментальных профилей средней скорости для конфигурации 2. Верхний рисунок показывает расположение рассматриваемых сечений

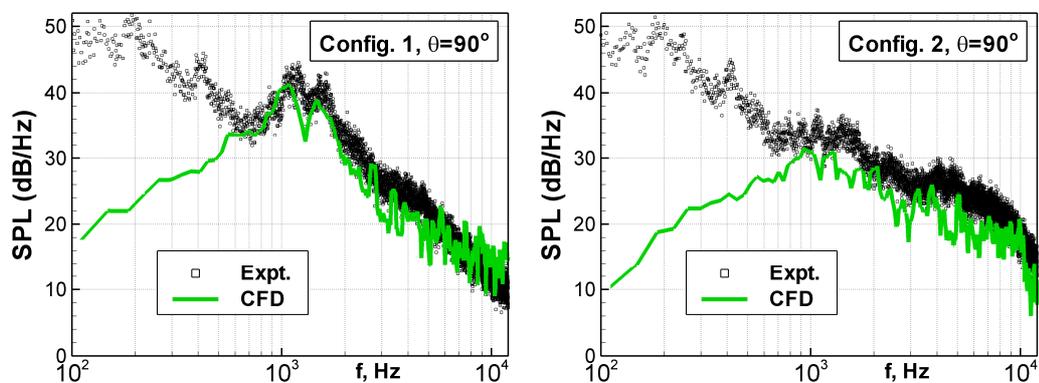
Сравнение результатов зонных RANS-IDDES расчетов с аналогичными результатами расчетов по SST RANS и с результатами измерений профилей осредненной продольной скорости в различных сечениях потока на примере второй из рассмотренных конфигураций представлено на рисунке 4.23. Как видно из этого рисунка, оба расчетных подхода предсказывают практически идентичные и хорошо согласующиеся с экспериментом профили скорости, что вполне естественно для безотрывных течений в отсутствии сильных продольных градиентов давления.

Удовлетворительное согласование расчета с использованием зонного RANS-IDDES с экспериментом наблюдается также по спектрам пульсаций давления на поверхности основного крыла и закрылка (см. рис. 4.24): расчет правильно воспроизводит как форму, так и уровень пульсаций давления. Некоторое отклонение расчетных спектров от экспериментальных наблюдается только в окрестности задней кромки закрылка (точка F01 на рисунке), однако это, скорее всего, объясняется неточностью измерений, так как, исходя из физических соображений, следует ожидать, что степень нестационарности давления в данной точке должна быть выше, а не ниже, чем, например, в точке F05.

Наконец, на рисунке 4.25 сравниваются расчетные и экспериментальные спектры шума, генерируемого при обтекании обеих рассматриваемых конфигураций в дальнем поле при полярном угле наблюдателя  $90^\circ$  (расчеты шума были выполнены с использованием модификации метода Фокса Уильямса и Хоукинга [118, 174]). Как видно из рисунка, результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментом всюду, кроме области низких частот, в которой к шуму рассматриваемых потоков добавляется фоновый шум аэродинамической трубы (аналогичные результаты были получены и для других углов наблюдателя).



**Рисунок 4.24.** Сравнение с экспериментом спектров пульсаций давления на поверхности основного профиля и закрылка, рассчитанных с использованием зонного RANS-IDDES для конфигурации 1. Верхний рисунок показывает положение датчиков давления в эксперименте



**Рисунок 4.25.** Сравнение расчетных и измеренных спектров шума генерируемого двумя рассматриваемыми конфигурациями в дальнем поле для полярного угла наблюдателя  $90^\circ$  на расстоянии 2 м от задней кромки основного профиля

Завершая данный раздел, можно констатировать, что при использовании генераторов синтетической турбулентности, обеспечивающих относительно короткую зону адаптации и подавление ложных источников шума на RANS-LES интерфейсе,

зонный RANS-IDDES подход к описанию турбулентности представляет собой достаточно эффективный вычислительный инструмент для решения как чисто аэродинамических, так и аэроакустических задач. Более того, с ростом мощности компьютеров возможности данного подхода будут постепенно расширяться, так как это позволит постепенно сужать область использования полуэмпирических моделей RANS за счет перемещения RANS-LES интерфейса вверх по потоку (в область более тонкого пограничного слоя) и, тем самым, повышать общую точность расчета.

## Список литературы

1. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. "Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений", – СПб, Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 86 с.
2. Снегирёв А. Ю. "Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений", – СПб, Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 143 с.
3. Reynolds O. "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion", Phil. Trans. Roy. Soc., 1895, **186**, 123–161 (русский перевод в Рейнольдс О. "Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия", Проблемы турбулентности. – М.; Л.: ОНТИ, 1936, с. 135-227).
4. Spalart P. R. "Philosophies and fallacies in turbulence modeling", Progress in Aerospace Sciences, 2015, **74**(1), 1–15.
5. Hanjalić K., Launder B. "Modelling Turbulence in Engineering and the Environment: Second-Moment Routes to Closure", Cambridge University Press, 2011. – 402 p.
6. "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", <http://turbmodels.larc.nasa.gov> (page curator and responsible official C. Rumsey).
7. "ERCOFTAC QNET-CFD Knowledge Base Wiki", [http://www.ercoftac.org/products\\_and\\_services/wiki/](http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki/)
8. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M. A., Müller U. R. (Eds.). "ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models", Notes on Numerical Fluid Mechanics, 1997, v. 58.
9. Haase W., Aupoix B., Bunge U., Schwamborn D. (Eds.) "FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling", Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2006, v. 94 (<http://cfd.mace.manchester.ac.uk/flomania/>).
10. "ATAAC - Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges". <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>.

11. Ferziger J. H. "Recent Advances in Large Eddy Simulation", Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3, W. Rodi and G. Bergeles (Eds.), 1996, Elsevier, pp. 163-176.
12. Волков К. Н., Емельянов В. Н. "Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений", – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
13. Garnier E., Adams N., Sagaut P. "Large eddy simulation for compressible flows", Springer, 2009. – 276 p.
14. Smagorinsky J. "General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment", Monthly Weather Review, 1963, **91**, pp. 99-164.
15. Deardorff J. "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers", Journal of Fluid Mechanics, 1970, **41**(2), pp. 453–480.
16. Oran E. S., Boris J. P. "Numerical Simulation of reactive flow", Cambridge University Press, 2001. – 550 p.
17. Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J. "Implicit Large Eddy Simulation", Cambridge University Press, 2007. – 577 p.
18. Shur M., Strelets M., Travin A. "High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows," Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology, October 5-7, 2004, Huntington Beach, USA.
19. Piomelli U., Zang T., Speziale C., Hussaini M. "On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows", Physics of Fluids A, 1990, **2**, pp. 257-265.
20. Moser R. ., Kim J., Mansour N. N. "DNS of Turbulent Channel Flow up to  $Re_\tau=590$ ", Physics of Fluids, 1999, **11**, pp 943-945.
21. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1991, **3**(7), pp. 1760–1765.
22. Lilly D. K. "A proposed modification of the Germano closure method", Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1992, **4**(3), pp. 633–635.

23. Meneveau C., Katz J. "Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, **32**, pp. 1–32.
24. You D., Moin P. "A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries", *Physics of Fluids*, 2007, **19**(6), 065110.
25. Chapman D. R. "Computational aerodynamics development and outlook", *AIAA Journal*, 1979, **17**, pp. 1293-1313.
26. Piomelli U., Balaras E. "Wall-layer models for large-eddy simulations", *Annual Rev. Fluid Mech.*, 2002, **34**, pp. 349-374.
27. Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M., Allmaras S. R. "Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach", *Proceedings of first AFOSR international conference on DND/LES*, 1997.
28. Sagaut P., Deck S., Terracol M. "Multiscale and multiresolution approaches in turbulence", *Imperial College Press*, 2006. – 340 p.
29. von Terzi D., Frohlich J. "Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows", *Progress in Aerospace Sciences*, 2008, **44**(5), pp. 349–377.
30. Menter F. R., Schütze J., Gritskevich M. S. "Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. Hybrid RANS-LES Modelling", *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2012, **117**, pp. 15–28.
31. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. "Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions", *Mechanical Engineering Reviews*, 2015, 00418.
32. Peng S.-H., Haase W., (Eds.) "Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Corfu, Greece, 17–18 June 2007". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 97, 2008.
33. Peng S.-H., Doerffer P., Haase W., (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Gdansk, Poland, June 2009". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 111, 2010.

34. Fu S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Beijing, China, September 2011". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, v. 117, 2012.
35. Girimaji S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, College Station, A&M University, Texas, USA, 19-21 March 2014". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, v. 130, 2015.
36. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. "Extra-large eddy simulation of massively separated flows", AIAA Paper, AIAA-2004-0264.
37. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. "Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance", AIAA Paper, AIAA-2000-0473.
38. Deck S. "Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation", Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2011, **26**(6), pp. 523–550.
39. Schumann U. "Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli", Journal of Computational Physics, 1975, **18**(4), pp. 376–404.
40. Piomelli U., Ferziger J., Moin P., Kim J. "New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows", Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1989, **1**(6), pp. 1061–1068.
41. Piomelli U., Balaras E. "Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations", Annual Review of Fluid Mechanics, 2002, **36**(1), pp. 505–374.
42. Piomelli U. "Wall-layer models for large-eddy simulations", Progress in Aerospace Sciences, 2008, **44**(6), pp. 437–446.
43. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. "A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities", International Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, **29**, pp. 1638-1649.
44. Girimaji S., Sreenivasan R., Jeong E., "PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results." FEDSM2003-45336, Proceedings of ASME

- FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences, July 13-16, Honolulu, Hawaii USA, 2003.
45. Spalart P. R. "Strategies for turbulence modeling and simulations", *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2000, **21**, pp. 252–263.
  46. Forsythe J., Squires K., Wurtzler K., Spalart P. "Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha", *AIAA Paper*, AIAA-2002-0591.
  47. Prandtl L. "Uber die ausgebildete Turbulenz", *Z. angew Math. Mech.*, 1925, **5**(1), 136–139.
  48. Spalart P. R., Allmaras S. R. "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows", *AIAA Paper*, AIAA-1992-0439.
  49. Menter F. R. "Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows", *AIAA-Paper*, AIAA-1993-2906.
  50. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4* (ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers), 2003, pp. 625 - 632.
  51. Drela M., Giles M. B. "Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils", *AIAA Journal*, 1987, **25**(10), pp. 1347-1355.
  52. Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin A. "Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with backward splitter plate", *Computational Fluid Dynamics '96*. Ed. by J.-A.Desideri, C.Hirsch, P.Le Tallec, M.Pandolfi and J.Periaux. John Wiley & Sons Publ., 1996, p. 676-682.
  53. Spalart P. R., Shur M. L. "On the sensitization of simple turbulence models to rotation and curvature", *Aerospace Science and Technology*, 1997, **1**(5), pp. 297-302.
  54. Shur M., Strelets M., Travin A., Spalart P. R. "Turbulence modelling in rotating and curved channels: assessment of the Spalart-Shur correction term", *AIAA Journal*, 2000, **38**(5), pp. 784-792.
  55. Spalart P. R. "Trends in Turbulence Treatments", *AIAA Paper*, AIAA-2000-2306.

56. Aupoix B., Spalart P. R. "Extensions of the Spalart-Allmaras turbulence model to account for wall roughness", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2003, **24**(4), pp. 454–462.
57. Launder B. E., Spalding D. B. "The numerical computation of turbulent flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, **3**(2), pp. 269–289.
58. Wilcox D. C. "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models", *AIAA Journal*, 1988, **26**(11), pp. 1299–1310.
59. Harlow F. H., Nakayama H. "Transport of turbulence energy decay rate", Los Alamos Science Lab., University California Report LA-3854, 1968.
60. Wilcox D. C. "A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows", *AIAA Paper*, AIAA-1993-2905.
61. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P. "Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation", *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, **28**, pp. 593-616.
62. Langtry R. B., Menter F. R. "Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes", *AIAA Journal*, 2009, **47**(12), pp. 2894-2906.
63. Menter F. R., Smirnov P. E., Liu T., Avancha R. "A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model". *Flow, Turbulence and Combustion* 2015, **95**(4), pp. 1-37
64. Strelets M. "Detached eddy simulation of massively separated flows", *AIAA Paper*, AIAA-2001-0879.
65. Wieghardt K., Tillman W., "On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure", *NACA TM-1314*, 1951.
66. Coles D., Wadcock J. "Flying-Hot-wire Study of Flow Past an NACA 4412 Airfoil at Maximum Lift", *AIAA Journal*, 1979, **17**(4), pp. 321-329.
67. Cook P. H., McDonald M. A., Firmin M. C. P. "Aerofoil RAE 2822 – Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements", *AGARD Report AR 138*, 1979.
68. Lienhart H., Becker S. "Flow and Turbulence Structures in the Wake of a Simplified Car Model", *SAE Technical paper*, 2003-01-0656.

69. Guilmineau E. "Computational study of flow around a simplified car body", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2008, **96**, pp. 1207–1217.
70. Buice C. U., Eaton J. K. "Experimental Investigation of Flow Through an Asymmetric Plane Diffuser", Report No. TSD-107, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford, 1997.
71. Vogel J. C., Eaton J. K. "Combined heat transfer and fluid dynamic measurements downstream of a backward-facing step", *Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, **107**, pp. 922–929.
72. Norberg, C., "Pressure forces on a circular cylinder". In: Eckelmann, H. et al. (eds), *Bluff-Body Wakes, Dynamics and Instabilities*. Springer-Verlag, Berlin, 1993, pp. 275-278.
73. Chow J., Zilliac G., Bradshaw P. (1997). "Turbulence measurements in the near field of a wingtip vortex", NASA Technical Memorandum, 1997, 110418.
74. Kristoffersen R., Andersson H. I. "Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel", *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, **256**, pp. 163–197.
75. Raiesi H., Piomelli U., Pollard A. "Evaluation of Turbulence Models Using Direct Numerical and Large-Eddy Simulation Data", *Journal of Fluids Engineering*, 2011, **133**(2), 021203.
76. Cherry E. M., Elkins C. J., Eaton J. K. "Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008, **29**(3), pp. 803–811.
77. Cherry E. M., Elkins C. J., Eaton J. K. "Pressure measurements in a three-dimensional separated diffuser", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2009, **30**(1), pp. 1–2.
78. Gleyzes C., Capbern P. "Experimental study of two AIRBUS/ONERA airfoils in near stall conditions. Part I: Boundary layers", *Aerospace Science and Technology*, 2003, **7**(6), pp. 439–449.
79. Menter F. R., Garbaruk A. V., Egorov Y. "Explicit Algebraic Reynolds Stress Models for Anisotropic Wall-Bounded Flows", *Proceedings of EUCASS – 3rd European Conference for Aero-Space Sciences*, 2009.

80. Bradshaw P. "Effects of Streamwise Curvature on Turbulent Flow", AGARD-AG-169, 1973.
81. Smirnov P. E., Menter F. R. "Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term", Journal of Turbomachinery, 2009, **131**, 041010
82. Monson D., Seegmiller H. L., McConnaughey P. K., Chen Y. S. "Comparison of Experiment with Calculations Using Curvature-Corrected Zero and Two Equation Turbulence Models for a Two-Dimensional U-Duct", AIAA Paper, AIAA-1990-1484.
83. Morkovin M. "Effects of compressibility on turbulent flows". In: "The Mechanics of Turbulence", A. Favre (ed.), Gordon and Breach., N.Y., 1964, pp. 367-380.
84. Гуляев А. Н., Козлов В. Е., Секундов А. Н. "К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости", Изв. АН СССР, МЖГ, 1993, No.4, с. 69-81.
85. Herrin J. L., Dutton J. C. "Supersonic base flow experiments in the near wake of a cylindrical afterbody", AIAA Journal, 1994, **32**(1), pp. 77–83.
86. Шлихтинг Г. "Теория пограничного слоя". М.: Наука, 1974, – 712 с.
87. Hosni M. H., Coleman H. W., Garner J. W., Taylor R. P. "Roughness element shape effects on heat transfer and skin friction in rough-wall turbulent boundary layers", International Journal of Heat and Mass Transfer, 1993, **36**(1), pp. 147-153.
88. Wilcox D. C., "Turbulence Modeling for CFD", 3rd edition, DCW Industries, Inc., La Canada CA, 2006. – 522 p.
89. Dong S. K., Chung, M. K. "Curvature Corrections to Reynolds Stress Model for Computation of Turbulent Recirculating Flows", AIAA Journal, 1992, **30**(12), pp. 2968–2970.
90. Cecora R. D., Eisfeld B., Probst A., Crippa S., Radespiel R. "Differential Reynolds Stress Modeling for Aeronautics", AIAA Paper, AIAA-2012-0465.
91. Speziale C. G., Sarkar S., Gatski T. "Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach", Journal of Fluid Mechanics, 1991, **227**, pp. 245-272.

92. Launder B. E., Reece G. J., Rodi W. "Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure", *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, **68**(3), pp. 537-566.
93. Rodi W. "The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two equation model of turbulence", Ph. D. thesis, University of London, 1972.
94. Pope S. B. "A More General Effective-Viscosity Hypothesis", *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, **72**(2), pp. 331-340.
95. Wallin S., Johansson A. V. "An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows", *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, **403**, pp. 89-132.
96. Driver D. M. "Reynolds shear stress measurements in a separated boundary layer flow", AIAA Paper, AIAA-1991-1787.
97. Davis D. O., Gessner F. B. "Further experiments on supersonic turbulent flow development in a square duct", *AIAA Journal*, 1989, **27**(8), pp. 1023–1029.
98. Eisfeld B. "Computation of complex compressible aerodynamic flows with a Reynolds stress turbulence model", In *Int. Conference on Boundary and Interior Layers BAIL 2006* G. Lube, G. Rapin (Eds), 2006.
99. Eisfeld B. "Reynolds Stress Modelling for Complex Aerodynamic Flows". In *V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010* J. C. F. Pereira and A. Sequeira (Eds) Lisbon, Portugal, 2010.
100. Schmitt V., Charpin F. "Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers". In: J. Barche (Ed.), *Experimental Data Base for Computer Program Assessment*, AGARD Report AGARD-AR-138, Section B1, 1979.
101. Vassberg J, DeHaan M. A., Rivers S. M., Wahls R. A. "Development of a Common Research Model for Applied CFD Validation Studies", AIAA Paper, AIAA-2008-6919.
102. Puffert-Meissner W. "ALVAST Half-Model Wind Tunnel Investigations and Comparison with Full-Span Model Results", DLR IB 129-96/20, 1996.

103. Laflin K. R., Wahls R. A., Morrison J. H., Tinoco E. N., Vassberg J. C., Brodersen O., Godard J. L. "Summary of Data from the Second AIAA CFD Drag Prediction Workshop", AIAA Paper, AIAA-2004-555.
104. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. "A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2006, **20**(3), pp. 181-195.
105. Comte-Bellot G., Corrsin S. "Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, "isotropic" turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, **48**, pp. 273-337.
106. Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. R. "Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows", *Fluid Mechanics and Its Applications*, 2004, **65**(5), pp. 239-254.
107. Haase W., Braza M., Revell A. (Eds.). "DESider – A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2009, v. 103.  
<http://cfd.mace.manchester.ac.uk/desider/>
108. Mockett C., Haase W., Schwamborn D. (Eds.). "Go4Hybrid – Grey Area Mitigation for Hybrid RANS-LES Methods". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2017.  
<http://go4hybrid.mace.manchester.ac.uk>
109. Cantwell B., Coles D. "An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **136**, pp. 321-374.
110. Perrin R., Braza M., Cid E., Cazin S., Barthet A., Sevrain A., Mockett C., Thiele F. "Obtaining phase averaged turbulence properties in the near wake of the circular cylinder at high Reynolds number using POD", *Experiments in Fluids*, 2007, **43**(2-3), pp. 341-355.
111. Hoerner S. F. "Fluid-Dynamic Lift", Hoerner Fluid Dynamics, Brick Town, NJ, 1975, pp. 4-19.
112. Viswanathan A. K., Tafti D. K. "Detached eddy simulation of flow and heat transfer in fully developed rotating internal cooling channel with normal ribs", *International J. of Heat and Fluid Flow*, 2006, **27**, pp. 351–370.

113. Rau G., Cakan M., Moeller D., Arts T. "The effect of periodic ribs on local aerodynamic and heat transfer performance of a straight cooling channel", *ASME J. Turbomachinery*, 1988, **120**, pp. 368–375.
114. Mendonca F., Allen R., de Charentenay J., Lewis M. "Towards understanding LES and DES for industrial aeroacoustic predictions". Int. Workshop "LES for Acoustics", Gottingen, 2002.
115. Greschner B., Jacob M. C., Casalino D., Thiele F. "Prediction of Sound generated by a rod-airfoil configuration using EASM DES and the generalized Lighthill/FW-H analogy", *Computers & Fluids*, 2008, **37**(4), pp. 402-413.
116. Spalart P. R. "Detached-Eddy Simulation", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2009, **41**(1), pp. 181-202.
117. Nikitin N., Nicoud F., Wasistho B., Squires K. D., Spalart P. R. "An approach to wall modeling in large-eddy simulations", *Physics of Fluids*, 2000, **12**(7), pp. 1629-1632.
118. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K. "Noise prediction for increasingly complex jets. Part I: Methods and tests", *International Journal of Aeroacoustics*, 2005, **4**(3+4), pp. 213–246.
119. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. "An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2015, **95**(4), pp 709-737.
120. Gleyzes C. "Operation décrochage – resultats de la 2eme campagne d'essais a F2 – mesures de pression et velocimetrie laser", ONERA, TR RT-DERAT 55/5004. Paris, 1989.
121. Gritskevich M. S., Garbaruk A. V., Schütze J., Menter F. R. "Development of DDES and IDDES Formulations for the  $k-\omega$  Shear Stress Transport Model", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2012, **88**(3), pp. 431–449.
122. Spalart P. R. "Young-Person's Guide to Detached-Eddy Simulation Grids", NASA Contractor Report 211032, 2001.
123. Lau J. C., Morris P. J. M., Fisher M. J. "Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter", *Journal of Fluid Mechanics*, 1979, **93**, pp. 1–27.

124. Lau J.C. "Effects of exit Mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets", *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, **105**, pp 193-218.
125. Simonich C., Narayanan S., Barber T. J., Nishimura M. "Aeroacoustic characterization, noise reduction and dimensional scaling effects of high subsonic jets", *AIAA Journal*, 2001, **39**, pp. 2062-2069.
126. Arakeri V. H., Krothapalli A., Siddavaram V., Alkislar M. B., Lourenco L. M. "On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet", *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, **490**, pp. 75-98.
127. Bridges J, Wernet M. P. "Establishing Consensus Turbulence Statistics for Hot Subsonic Jets", *AIAA Paper*, AIAA-2010-3751.
128. Viswanathan K. "Aeroacoustics of hot jets", *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, **516**, pp. 39–82.
129. Delville J. "La décomposition orthogonale aux valeurs propres et l'analyse de l'organisation tridimensionnelle des écoulements turbulents cisailés libres", Ph.D. thesis, Department of Fundamental and Applied Sciences. University of Poitiers, 1995.
130. Greenblatt D., Paschal Y. C., Harris J. K., Schaeffler N., Washburn A. "A separation control CFD validation test case. Part 1: Baseline & steady suction", *AIAA Paper*, AIAA-2004-2220.
131. Гусева Е.К., Гарбарук А.В., Стрелец М.Х. "Тестирование метода DDES с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения", *Тепловые процессы в технике*, 2015, **7(12)**, с. 552-557.
132. Guseva E. K., Garbaruk A. V., Strelets M. Kh. "Assessment of Delayed DES and Improved Delayed DES Combined with a Shear-Layer-Adapted Subgrid Length-Scale in Separated Flows", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2016 (принята в печать).
133. IDEALVENT Karban U., Ogus G., Kucukcoskun K., Schram C., Sovardi C., Polifke W. "Noise Produced by a Tandem Diaphragm: Experimental and Numerical Investigations", *AIAA Paper*, AIAA-2014-3225.
134. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. "Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic

- and Aeroacoustic Problems", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2014, **93**(1), pp. 63–92.
135. Garnier E., Adams N., Sagaut P. "Large Eddy Simulation for Compressible Flows", Springer, 2009. – 276 p.
  136. Lund T., Wu X., Squires K. "Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations", *Journal of Computational Physics*, 1998, **140**, pp. 233–258.
  137. Spalart P. R., Strelets M., Travin A. "Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, **27**, pp. 902–910.
  138. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. "A rapid and accurate switch from RANS to LES in boundary layers using an overlap region", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2011, **86**, pp. 179–206.
  139. Araya G., Castillo L., Meneveau C., Cansen K. "A dynamic multi-scale approach for turbulent inflow boundary conditions in spatially developing flows", *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, **670**, pp. 581-605.
  140. Morgan B., Larsson J., Kawai S., Lele S. K. "Improving low-frequency characteristics of recycling/rescaling inflow turbulence generation", *AIAA Journal*, 2011, **49**, pp. 582–597.
  141. Keating A., Piomelli U., Balaras E., Kaltenbach H. -J. "A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation", *Phys. Fluids*, 2004, **16**, pp. 4696–4712.
  142. Keating A., De Prisco G., Piomelli U. "Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, **27**, pp. 777–788.
  143. Tabor G., Baba-Ahmadi M. "Inlet conditions for large eddy simulation: a review", *Computers and Fluids*, 2010, **39**, pp. 553–567.
  144. Xie Z.-T., Castro, I. P. "Efficient generation of inflow conditions for large eddy simulation of street-scale flows", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2008, **81**, pp. 449–470.

145. Klein M., Sadkiki A., Janicka J. "A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations", *Journal of Computational Physics*, 2003, **186**, pp. 652–665.
146. Di Mare L., Klein M., Jones W., Janicka J. "Synthetic turbulence inflow conditions for large-eddy simulation", *Phys. Fluids*, 2006, **18**, 025107.
147. Kornev N., Hassel E. "Method of random spots for generation of synthetic inhomogeneous turbulent fields with prescribed autocorrelation functions", *Commun. Numer. Methods Eng.*, 2007, **23**, pp. 35–43.
148. Veloudis I., Yang Z., McQuirk J. J., Page G. J., Spencer A. "Novel implementation and assessment of a digital filter based approach for the generation of LES inlet conditions", *Flow, Turbulence and Combustion*, 2007, **79**, pp. 1–24.
149. Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., Prosser R. "A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, **27**, pp. 585–593.
150. Jarrin N., Prosser R., Uribe J., Benhamadouche S., Laurence D. "Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a synthetic-eddy method", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2009, **30**, pp. 435–442.
151. Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.-P., Sergent E. "Assessment of the vortex method for Large Eddy Simulation inlet conditions", *Prog. Comput. Fluid Dyn.*, 2006, **6**, pp. 58–67.
152. Pamiès M., Weiss P.-E., Garnier E., Deck S., Sagaut P. "Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows", *Phys. Fluids*, 2009, **21**, 045103.
153. Kraichnan R. "Diffusion by a random velocity field", *Phys. Fluids*, 1970, **13**, pp. 22–31.
154. Smirnov A., Shi S., Celik I. "Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling", *J. Fluids Eng.*, 2001, **123**, pp. 359–371.
155. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. "Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation", *AIAA Journal*, 2004, **42**, pp. 485–492.

156. Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х, Травин А. К. "Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений", Математическое моделирование, 2011, **23**(7), с. 3-19.
157. Козелков А. С., Куркин А. А., Крутякова О. Л., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. "Зонный RANS-LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений", Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2015, №5, с. 24-33.
158. Грицкевич М. С., Гарбарук А. В. "Встроенный LES с использованием объемного источника турбулентных пульсаций", Научно-технические ведомости Политехнического университета. Физико-математические науки, 2012, **141**(1), с. 27-35.
159. Spille-Kohoff, A., Kaltenbach, H.-J.: Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile. In: Liu, C., Sakell, L., Beutner, T. (eds.) DNS/LES Progress and Challenges, Proceedings of the Third AFOSR International Conference on DNS/LES, pp. 319–326. Greyden press, Columbus, 2001.
160. De Prisco G., Piomelli U., Keating A. "Improved turbulence generation techniques for hybrid RANS/LES calculations", Journal of Turbulence, 2008, **9**, pp. 1–20
161. Laraufie R., Deck S., Sagaut P. "A dynamic forcing method for unsteady turbulent inflow conditions", Journal of Computational Physics, 2011, **230**, pp. 8647–8663.
162. Roidl B., Meinke M., Schroder W. "Zonal RANS-LES computation of transonic airfoil flow", AIAA Paper, AIAA-2011–3974.
163. Roidl B., Meinke M., Schroder W. "A zonal RANS-LES method for compressible flows", Computers and Fluids, 2012, **67**, pp. 1–15.
164. Bechara W., Bailly C., Lafon P., Candel S. "Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows", AIAA Journal, 1994, **32**, pp. 455–463.
165. Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L. "Jet noise prediction using stochastic turbulence modeling", AIAA Paper, AIAA-2003–3282.

166. Nyquist H., "Certain topics in telegraph transmission theory", Trans. AIEE, 1928, **47**, pp. 617—644.
167. Lemoine B., Roger M., Legriffon I. "Aeroacoustics of a model non-liftingwing-flap system in a parallel flow", AIAA Paper, AIAA-2011-2735.
168. Spalart P.R. "Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\tau = 1440$ ", Journal of Fluid Mechanics, 1988, **187**, pp. 61–98.
169. Bell J., Mehta R. "Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers", AIAA Journal, 1990, **28**, pp. 2034–2042.
170. Lawson M.V. "Prediction of Boundary Layer Pressure Fluctuations", Wyle Laboratories Research Staff Report, WR67-15, 1967.
171. Schewe G. "On the structure and resolution of wall-pressure fluctuations associated with turbulent boundary-layer flow", Journal of Fluid Mechanics, 1983, **134**, pp. 311–328.
172. Bull M.K. "Wall-pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary layer flow", Journal of Fluid Mechanics, 1967, **28**, pp. 719–754.
173. Goody M. "Empirical spectral model of surface pressure fluctuations", AIAA Journal, 2004, **42**, pp. 1788–1794.
174. Spalart P.R., Shur M.L. "Variants of the Ffowcs Williams – Hawkings equation and their coupling with simulations of hot jets", Int. J. Aeroacoustics, 2009, **8**, pp. 477–492.

*Гарбарук Андрей Викторович  
Стрелец Михаил Хаимович  
Травин Андрей Константинович  
Шур Михаил Львович*

**СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ  
К МОДЕЛИРОВАНИЮ  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

Учебное пособие

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

---

Подписано в печать 31.08.2016. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 14,75. Тираж 120. Заказ 14603б.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,  
в Типографии Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.