Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Б.И. Положинцев

Теория вероятностей и математическая статистика

Введение в математическую статистику

Санкт-Петербург
2016

УДК 519.2

Положинцев Б.И. **Теория вероятностей и математическая статистика. Введение в математическую статистику**: Учебное пособие. – СПб.: 2016.– 95 с.

Изложены основные понятия и методы статистической обработки экспериментальных данных: точечное и интервальное оценивание параметров распределений, проверка статистических гипотез о параметрах распределений (критерии значимости), а также о виде распределений (критерии согласия). В пособии рассмотрены прикладные аспекты, связанные со спецификой направлений обучения студентов кафедры «Радиотехнические и телекоммуникационные системы» СПбПУ.

СОДЕРЖАНИЕ

В пособии рассматриваются основные понятия и методы анализа данных, полученных в результате опыта – наблюдений (измерений, регистраций) величин, случайных по своей природе. При этом принципиально осуществимой предполагается возможность неограниченного числа таких наблюдений в одних и тех же условиях.

В большинстве случаев далее считается, что статистические данные представляют собой результат серии независимых опытов, в каждом из которых зарегистрировано значение исследуемой одномерной случайной величины.

1. Определение случайной выборки

Пусть X – исследуемая случайная величина, $F_X(x) = P(X < x)$ – ее функция распределения (вообще говоря, неизвестная). В ряде случаев может быть известен вид распределения случайной величины, а неизвестными являются один или несколько параметров, от которых зависит функция распределения. Ради краткости в записи $F_X(x)$ индекс может в дальнейшем опускаться. Условимся также указывать, непрерывной или дискретной является исследуемая случайная величина.

Пусть проводится серия n независимых наблюдений (измерений) случайной величины X в одних и тех же условиях (эксперимент). В результате эксперимента получают n чисел – значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые случайная величина X последовательно принимала в данной серии наблюдений. Эти числа будем считать значениями n одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, каждая из которых имеет функцию распределения $F_X(x)$ – ту же, что исследуемая случайная величина X.

Конечную последовательность n независимых одинаково распределенных случайных величин будем называть *случайной выборкой* $X_1, \dots, X_n$ (короче – выборкой) из распределения $F_X(x)$, а указанные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученные в данном эксперименте – *реализацией выборки*. Отметим, что множество всех возможных значений исследуемой случайной величины называют генеральной совокупностью.

На основе выборок строят *оценки* параметров распределения исследуемой случайной величины X, таких как математическое ожидание, стандартное отклонение и других, а также судят о виде функции распределения $F_X(x)$.

Понятно, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно также рассматривать как значение n-мерной случайной величины $(X_1, \dots, X_n)$, компоненты которой $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены.

Всякую функцию выборки $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ называют статистикой. Статистика $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ – случайная величина, распределение которой зависит от распределения $F_X(x)$, из которого извлечена выборка, и от объема выборки n.

2. Закон распределения порядковых статистик

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка объема n из распределения $F_X(x)$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – некоторая ее реализация.

Упорядочим числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ по возрастанию и обозначим их следующим образом: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, где $x_{(1)} = \min\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$.

Представим, что упорядочены все возможные реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ и введем новую случайную величину $X_{(k)}$ – порядковую статистику порядка k $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Множество возможных значений случайной величины $X_{(k)}$ определим так: оно состоит из тех и только тех чисел $x^i_{(k)}$, которые оказываются на k-м месте при упорядочении любой реализации $x_1, x_2, \dots, x_n$ выборки $X_1, \dots, X_n$ (индекс $i = 1, 2, \dots$ – номер реализации).

Таким образом, по выборке $X_1, \dots, X_n$ построена последовательность $X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \dots, X_{(n)}$, называемая вариационным рядом. Элементы вариационного ряда – порядковые статистики удовлетворяют соотношениям: $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(k)} \le \ldots \le X_{(n)}$, при этом в любой реализации вариационного ряда числа $x^i_{(1)}, \ldots, x^i_{(k)}, \ldots, x^i_{(n)}$ связаны неравенствами $x^i_{(1)} \le \ldots \le x^i_{(k)} \le \ldots \le x^i_{(n)}$ (верхний индекс i – номер реализации, $i = 1, 2, \ldots$).

$$\begin{array}{ccccc}
x^1_{(1)}, & \ldots & x^1_{(k)} & \ldots & x^1_{(n)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
x^i_{(1)} & \ldots & x^i_{(k)} & \ldots & x^i_{(n)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
X_{(1)} & \ldots & X_{(k)} & \ldots & X_{(n)}
\end{array}$$

Найдем функцию распределения k-й порядковой статистики

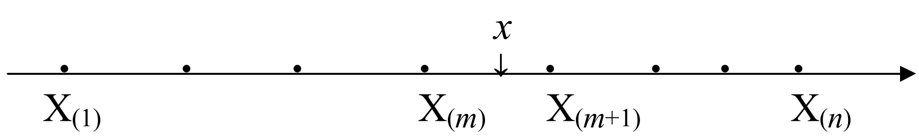
$$X_{(k)}: F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} < x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эмпирической частотой $N_n(x)$ назовем случайную величину, равную числу элементов выборки $X_1, \ldots, X_n$, меньших x (иначе – числу элементов вариационного ряда $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, меньших x). Ясно, что возможные значения эмпирической частоты $N_n(x)$ – число осуществлений события $(X < x)$ на выборке $X_1, \ldots, X_n$ объема n – это числа $m = 0, 1, \ldots, n$. Действительно,

$$(N_n(x) = 0) = (x \le X_{(1)});$$

$$(N_n(x) = m) = (X_{(m)} < x \le X_{(m+1)}) \quad \forall m = 1, \ldots, n-1;$$

$$(N_n(x) = n) = (x > X_{(n)}).$$

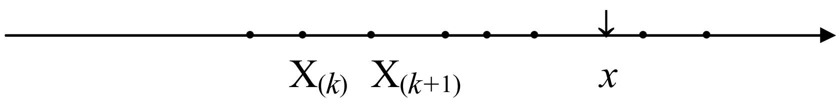


Извлечение выборки из распределения $F_X(x)$ представляет собой серию n независимых испытаний – n наблюдений (регистраций значений) исследуемой случайной величины X. Для каждого из указанных испытаний вероятность события $(X < x)$ равна $P(X < x) = F_X(x)$.

Отсюда следует, что случайная величина $N_n(x)$ подчиняется биномиальному распределению:

$$P(N_n(x) = m) = C_n^m\,(F_X(x))^m\,(1 - F_X(x))^{n-m} \quad (m = 0,1,\ldots,n).$$

Заметим, что события $(X_{(k)} < x)$ и $(N_n(x) \ge k)$ равносильны,



то есть $(X_{(k)} < x) = (N_n(x) \ge k) = \sum_{m=k}^{n} (N_n(x) = m)$.

Таким образом, получаем:

$$P(X_{(k)} < x) = F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m (F_X(x))^m (1 - F_X(x))^{n-m},\ \forall\ k = 1, \ldots, n\ –$$

– закон распределения порядковых статистик.

При $k = 1$ и $k = n$ имеем распределения *экстремальных порядковых статистик*:

минимальной $X_{(1)}$: $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$ и

максимальной $X_{(n)}$: $F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n$.

3. Эмпирическая функция распределения

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения $F_X(x)$, $X_{(1)}, \ldots X_{(k)}, \ldots, X_{(n)}$ – вариационный ряд, $N_n(x)$ – эмпирическая частота. Случайная величина $F_n(x) = N_n(x)/n$, называемая эмпирической функцией распределения – относительная частота числа элементов выборки $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющих условию $X_i < x$.

Ясно, что множество возможных значений эмпирической функции распределения есть: 0, $1/n$, …, m/n, …, n/n.

События $(F_n(x) = m/n)$ и $(N_n(x) = m)$ – равносильны, эмпирическая частота $N_n(x)$ распределена по биномиальному закону, поэтому

$$P(F_n(x) = m/n) = C_n^m (F_X(x))^m (1 - F_X(x))^{n-m} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) -$$

– закон распределения эмпирической функции распределения $F_n(x)$.

С помощью функции единичного скачка (функции Хевисайда) эмпирическая функция распределения может быть записана в виде:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e\,(x - X_{(k)}),$$

где $e(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Заметим, что для каждой реализации выборки эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения. Действительно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторая реализация выборки, $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ – соответствующая реализация вариационного ряда, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$.

Среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выберем только различные, упорядочим их и обозначим через $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, тогда

$$x_{(1)} = x_{i_1} < \ldots < x_{i_k} = x_{(n)} \qquad (k \le n)$$

x_{i_1}	…	x_{i_m}	…	x_{i_k}
n_1	…	n_m	…	n_k
n_1/n	…	n_m/n	…	n_k/n

Здесь n_m – абсолютная, n_m/n – относительная частота элемента x_{i_m}, при этом, очевидно: $\sum_{m=1}^{k} n_m = n$; $\sum_{m=1}^{k} \frac{n_m}{n} = 1$.

Введем случайную величину X^*, заданную рядом распределения

X^*	x_{i_1}	$\ldots$	x_{i_m}	$\ldots$	x_{i_k}
$P(X^* = x_{i_m})$	n_1/n	$\ldots$	n_m/n	$\ldots$	n_k/n

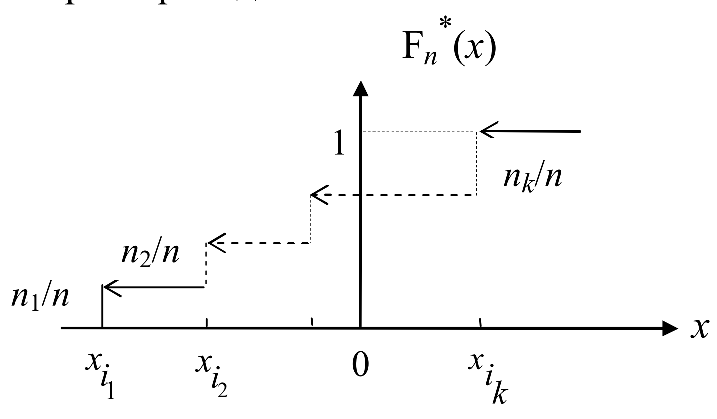
Заметим, что таким образом каждому элементу реализации выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приписана вероятность $1/n$.

Обозначим через $F_n^*(x)$ реализацию случайной величины $F_n(x)$, отвечающую данной реализации выборки, тогда

$$F_n^*(x) = P(X^* < x) = \sum_{m:\, x_{i_m} < x} \frac{n_m}{n}.$$

$F_n^*(x)$ – кусочно-постоянная (ступенчатая) функция, принимающая свои значения на отрезке $[0; 1]$. В каждой точке x, кроме точек x_{i_m}, функция $F_n^*(x)$ непрерывна; в точках x_{i_m} – она непрерывна слева, величина скачка справа равна n_m/n $(m = 1, 2, \ldots, k)$.

График эмпирической функции распределения для некоторой реализации выборки приведен ниже:



Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ как относительная частота числа осуществлений на выборке события $(X < x)$ при любом x сходится по вероятности к вероятности этого события

$P(X < x) = F_X(x)$, – к теоретической функции распределения, вообще говоря, неизвестной: $\forall x \quad F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}} F_X(x)$, поэтому, если объем выборки n достаточно велик, то значение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ в каждой точке x оказывается близким к соответствующему значению теоретической функции распределения $F_X(x)$.

Доказано (*теорема Гливенко*), что отклонение *эмпирической* функции распределения $F_n(x)$ – случайной величины – от *теоретической* функции распределения $F_X(x)$ с вероятностью 1 сколь угодно мало при достаточно большом объеме выборки n:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\,(\sup_x |F_n(x) - F_X(x)| \le \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

при этом $F_n(x)$ служит равномерным приближением $F_X(x)$ на всей числовой оси. Заметим, что разность $(F_n(x) - F_X(x))$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием.

4. Группирование выборочных данных, гистограмма

Эмпирическая функция распределения является характеристикой выборки, позволяющей наглядно представлять статистические данные и выдвигать предположения о виде неизвестной функции распределения исследуемой (наблюдаемой) случайной величины.

Другой способ представления статистического материала – это построение группированного статистического ряда и гистограммы.

Пусть исследуемая случайная величина X – непрерывна. Если выборка достаточно большая (обычно в статистике большими считают выборки объемом $n \ge 100$), то ее реализацию $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подвергают группировке следующим образом.

Отрезок $[x_{(1)}; x_{(n)}]$, где $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, содержащий все элементы выборки, разбивают на k равных интервалов Δ_i (обычно $5 \le k \le 15$):

$$\alpha_{(0)} = x_{(1)}\ ,\ \ \alpha_{(k)} = x_{(n)}\ ,\ \ \Delta_i = (\alpha_{i-1}\,;\alpha_i)\ \ (i = 1,\ldots,k)\ ;$$

$$|\,\Delta_i\,| = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{k} = h\ -\ \text{шаг разбиения.}$$

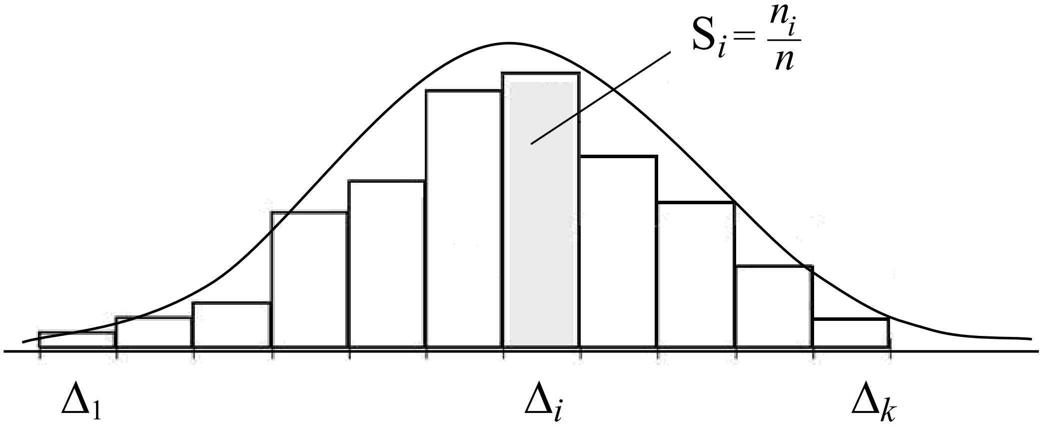
$x_{(1)}$ Δ_i $x_{(n)}$

α_0 α_1 α_{i-1} α_i α_k

Число n_i – частота, $\dfrac{n_i}{n}$ – относительная частота числа элементов реализации выборки, попавших в i - й интервал $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n,\ \ \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{n} = 1\right)$.

Группированный статистический ряд – это совокупность интервалов $\Delta_1,\ldots,\ \Delta_k$ и соответствующих им частот $n_1,\ldots,n_k$ (или относительных частот $\dfrac{n_1}{n},\ldots,\dfrac{n_k}{n}$).

Наглядное графическое представление группированного статистического ряда дает гистограмма. Гистограммой называют ступенчатую фигуру, построенную следующим образом: на каждом интервале $\Delta_i = (\alpha_{i-1}\,;\ \alpha_i)$, как на основании длиной $h = |\Delta_i\,|$, строят прямоугольник с высотой, равной $\dfrac{n_i}{nh}$, так что площадь S_i каждого такого прямоугольника оказывается равной относительной частоте $\dfrac{n_i}{n}$ числа элементов выборки, попавших в интервал Δ_i ($i = 1,\ldots,k$).



Относительная частота событ   ия по вероятности сходится к вероятности этого события, поэтому если длина интервалов разбиения h достаточно мала, то $\frac{n_i}{n} \cong f_X(x)\,h\ \forall\, x \in \Delta_i$. При больших n верхний контур гистограммы (ступенчатый график) служит приближением графика плотности вероятности $f_X(x)$ (вообще говоря, неизвестной). Таким образом, разумно построенная гистограмма позволяет выдвинуть гипотезу о виде распределения исследуемой случайной величины X. Заметим, что слишком малое или слишком большое число интервалов разбиения k при построении гистограммы может привести к ее недостаточной информативности.

Число интервалов k при разбиении отрезка $[x_{(1)}; x_{(n)}]$ обычно определяют по формуле $k = 1 + 3{,}32 \lg n$ (формула Старджесса), либо по формуле $k = 1{,}72\, n^{1/3}$.

5. Определение и свойства точечных оценок параметров распределения: состоятельность, несмещенность, эффективность

Пусть θ – некоторый параметр распределения $F_X(x, \theta)$. Информация, необходимая для нахождения оценки $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ, содержится в выборке $X_1, \ldots, X_n$ из данного распределения. Таким образом, возникает задача построения оценки $\hat{\theta}$ параметра распределения как функции случайной выборки: $\hat{\theta} = \hat{\theta}\,(X_1, \ldots, X_n)$.

Заметим, что оценка параметра распределения является случайной величиной (статистикой). В результате проведения эксперимента (серии n независимых наблюдений) получают реализацию выборки – числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом оценка $\hat{\theta}$ принимает соответствующее числовое значение $\hat{\theta}_e = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое является приближенным значением неизвестного параметра θ. Оценки указанного типа называют точечными, их применение целесообразно при достаточно больших выборках. При малых объемах выборок используют интервальные оценки, которые будут рассмотрены далее.

Ниже определяются свойства точечных оценок: *состоятельность*, *несмещенность*, *эффективность*, каждое из которых определенным образом характеризует меру близости оценки $\hat{\theta}$ (случайной величины) к истинному значению (неслучайной величине) неизвестного параметра θ распределения $F_X(x, \theta)$. Понятно, что вопрос обладает ли данная оценка каким-либо (или всеми) из указанных свойств требует специального рассмотрения.

Состоятельность. Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной оценкой параметра θ, если оценка $\hat{\theta}$ по вероятности сходится к оцениваемому параметру: $\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ (символически это принято записывать так: $\hat{\theta} \underset{n \to +\infty}{\overset{P}{\to}} \theta$). Иными словами, состоятельная оценка обладает свойством: с увеличением объема выборки n уменьшается вероятность того, что абсолютная величина отклонения оценки от оцениваемого параметра θ превзойдет любое наперед заданное $\varepsilon > 0$.

Несмещенность. Оценка $\hat{\theta}$ называется несмещенной оценкой параметра θ, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M\hat{\theta} = \theta$.

Если $M\hat{\theta} \neq \theta$, то имеет место систематическая ошибка, величину $|M\hat{\theta} - \theta|$ называют смещением.

Оценка $\hat{\theta}$ называется асимптотически несмещенной, если

$$M\hat{\theta} \underset{n \to +\infty}{\to} \theta$$

В качестве упражнения докажем следующее *утверждение*:

Пусть $\hat{\theta}$ – несмещенная оценка параметра распределения θ, причем $D[\hat{\theta}] \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, тогда $\hat{\theta}$ – состоятельна.

Запишем неравенство Чебышева: $\forall\varepsilon > 0 \quad 0 \le P(|\hat{\theta} - M\hat{\theta}| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D[\hat{\theta}]}{\varepsilon^2}$.

Учтем, что по условию $\hat{\theta}$– несмещенная оценка ($M\hat{\theta} = \theta$), тогда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, по теореме о сжатой переменной имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ P(|\hat{\theta} - \theta| \ge \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ то есть } \hat{\theta} \text{ – состоятельна: } \hat{\theta} \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} \theta.$$

<u>*Эффективность.*</u> Оценку $\hat{\theta}$ называют эффективной оценкой параметра θ в классе оценок, имеющих дисперсию, если дисперсия $\hat{\theta}$ минимальна. Из двух оценок, принадлежащих данному классу, более эффективна та, которая имеет меньшую дисперсию.

Рассмотрим в качестве примера свойства относительной частоты как оценки вероятности в схеме Бернулли.

Пусть случайная величина X подчиняется биномиальному распределению с параметрами n и p.

Относительная частота $\dfrac{X}{n} = \hat{p}$ как оценка вероятности p обладает следующими свойствами:

1) $\hat{p}$ – состоятельная, что следует из закона больших чисел:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} p.$$

2) $\hat{p}$ – несмещенная, так как:

$$M[\hat{p}] = M[\frac{1}{n}\ X] = \frac{1}{n}\ M[X] = \frac{1}{n} np = p$$

3) Дисперсия $\hat{p}$ – бесконечно малая при $n \to +\infty$:

$$D[\hat{p}] = D[\frac{X}{n}] = \frac{1}{n^2}\ npq = (1/n)\,pq \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4) Согласно теореме Муара-Лапласа эта оценка является асимптотически нормальной: $\hat{p} = \dfrac{X}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} N(p; \sqrt{\dfrac{pq}{n}})$.

6. Оценки основных числовых характеристик распределения и их свойства

Функция распределения $F_X(x)$, полностью определяющая свойства случайной величины X, в большинстве случаев неизвестна. Однако информацию о распределении, достаточную во многих случаях для практических целей, могут дать оценки основных числовых характеристик распределения.

Итак, пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – выборка из распределения $F_X(x)$ исследуемой одномерной случайной величины, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – реализация выборки.

Числовая характеристика случайной величины X	Оценка числовой характеристики– – функция выборки $(X_1, \dots, X_n)$	Реализация оценки – – значение оценки в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\alpha_k = M[X^k]$ – начальный момент k-го порядка	$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ – выборочный начальный момент k-го порядка	$\hat{\alpha}_{ke} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = a_k$ – выборочный начальный момент k-го порядка
$MX = m_X = m = \alpha_1$ – математическое ожидание	$\bar{X} = \hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\alpha}_1$ – выборочное среднее	$\bar{x} = \hat{m}_e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\alpha}_{1e}$ – выборочное среднее
$\mu_k = M[(X - MX)^k]$ – центральный момент k-го порядка	$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$ – выборочный центральный момент k-го порядка	$\hat{\mu}_{ke} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k = m_k$ – выборочный центральный момент k-го порядка
$DX = M[(X - MX)^2] = \sigma^2 = \mu_2$ – дисперсия $\sigma_X = \sigma$ – стандартное отклонение	$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}^2$ – выборочная дисперсия $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ – исправленная (несмещенная) выборочная дисперсия	$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \hat{\mu}_{2e} = \hat{\sigma}_e^2$ – выборочная дисперсия $s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ – исправленная (несмещенная) выборочная дисперсия

Подчеркнем еще раз, что числовая характеристика случайной величины – неслучайная величина, ее оценка (функция выборки) – случайная величина, реализация оценки (значение оценки, которое она принимает в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) – неслучайная величина (число).

Следующие теоремы раскрывают свойства указанных оценок.

Теорема Выборочный начальный момент k-го порядка $\hat{\alpha}_k$ ($\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$) является несмещенной, состоятельной, асимптотически нормальной оценкой начального момента k-го порядка α_k (α_k = M[X^k]) случайной величины X (при условии, что существуют конечные α_k и α_{2k}).

Доказательство Поскольку $MX_i = MX$ и $MX_i^k = MX^k$,

имеем: $M[\hat{\alpha}_k] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k] = \frac{1}{n}(nM[X^k]) = \alpha_k$ – несмещенность.

Далее, $D[\hat{\alpha}_k] = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k] = (\frac{1}{n})^2 \sum_{i=1}^{n} D[X_i^k] = (\frac{1}{n})^2 nD[X^k] =$

$$= \frac{1}{n}(M[X^{2k}] - (M[X^k])^2) = \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^{\,2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Таким образом $\hat{\alpha}_k$ – несмещенная оценка, ее дисперсия – бесконечно малая при $n \to +\infty$, откуда следует состоятельность $\hat{\alpha}_k$ (см. утверждение о несмещенной оценке, дисперсия которой – бесконечно малая при $n \to +\infty$, доказанное в п. 5):

$$\hat{\alpha}_k \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \alpha_k .$$

Заметим, что выборочные центральные моменты $\hat{\mu}_k$ – также являются состоятельными оценками центральных моментов μ_k случайной величины X.

Докажем теперь, что $\hat{\alpha}_k$ – асимптотически нормальная оценка начального момента α_k.

Действительно, выборочный начальный момент $\hat{\alpha}_k$ есть сумма одинаково распределенных независимых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание и дисперсию.

Согласно центральной предельной теореме:

$$\frac{\hat{\alpha}_k - \mathrm{M}[\hat{\alpha}_k]}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{\alpha}_k]}} = \frac{\hat{\alpha}_k - \alpha_k}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{2k} - \alpha_k^{\,2}}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0;1).$$

Таким образом, $\hat{\alpha}_k$ – асимптотически нормальная случайная величина с математическим ожиданием и стандартным отклонением, равными, соответственно: α_k и $\sqrt{\dfrac{\alpha_{2k} - \alpha_k^{\,2}}{n}}$. Символически это можно записать так: $\hat{\alpha}_k \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(\alpha_k ; \sqrt{\dfrac{\alpha_{2k} - \alpha_k^{\,2}}{n}}\right)$.

<u>*Следствие*</u> Выборочное среднее $\bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = \hat{\alpha}_1$ является несмещенной, состоятельной, асимптотически нормальной оценкой математического ожидания MX случайной величины X.

<u>*Теорема*</u>. Выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \bar{\mathrm{X}})^2$ – состоятельная, асимптотически несмещенная оценка дисперсии DX случайной величины X.

<u>*Доказательство*</u>

Запишем следующее очевидное равенство: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \bar{\mathrm{X}})^2 =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i^{\,2} - 2\mathrm{X}_i\bar{\mathrm{X}} + \bar{\mathrm{X}}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2 - \bar{\mathrm{X}}^2 = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1^{\,2}.$$

В предыдущей теореме доказана состоятельность оценки $\hat{\alpha}_k$ k-го начального момента α_k:

$$\hat{\alpha}_k \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \alpha_k .$$

Известные теоремы о пределе суммы и произведения функций справедливы и для сходимости по вероятности, поэтому имеем:

$$S^2 = (\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1^{\,2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} (\alpha_2 - \alpha_1^{\,2}) = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - (\mathrm{MX})^2 = \mathrm{DX}.$$

Таким образом, S^2 – состоятельная оценка дисперсии DX:

$$S^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mathrm{DX} = \sigma_{\mathrm{X}}^{\,2}.$$

Докажем теперь, что выборочная дисперсия S^2 является *асимптотически несмещенной* оценкой дисперсии DX.

Поскольку $S^2 = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1^{\,2}$, имеем: $\mathrm{M}[S^2] = \mathrm{M}\hat{\alpha}_2 - \mathrm{M}(\hat{\alpha}_1^{\,2})$.

Как было доказано, выборочные начальные моменты $\hat{\alpha}_k$ – несмещенные оценки соответствующих начальных моментов α_k, поэтому $\mathrm{M}[\hat{\alpha}_2] = \alpha_2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}^2)$.

Далее запишем:

$$\mathrm{M}(\hat{\alpha}_1^{\,2}) = \mathrm{M}(\bar{\mathrm{X}}^2) = \mathrm{D}\bar{\mathrm{X}} + (\mathrm{M}\bar{\mathrm{X}})^2 = \frac{1}{n}\mathrm{DX} + (\mathrm{M}\bar{\mathrm{X}})^2 = \frac{1}{n}\mathrm{DX} + (\mathrm{MX})^2$$

(здесь использованы очевидные равенства $\mathrm{M}\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{MX}$, $\mathrm{D}\bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\mathrm{DX}$).

В итоге получаем:

$$\mathrm{M}S^2 = \mathrm{M}\hat{\alpha}_2 - \mathrm{M}(\hat{\alpha}_1^{\,2}) = \mathrm{M}(\mathrm{X}^2) - \frac{1}{n}\mathrm{DX} - (\mathrm{MX})^2 = \mathrm{DX} - \frac{1}{n}\mathrm{DX} = \frac{n-1}{n}\,\mathrm{DX},$$

выборочная дисперсия S^2 не является несмещенной; однако, эта оценка – *асимптотически* несмещенная, поскольку

$$\mathrm{M}S^2 = \frac{n-1}{n}\,\mathrm{DX} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{DX}.$$

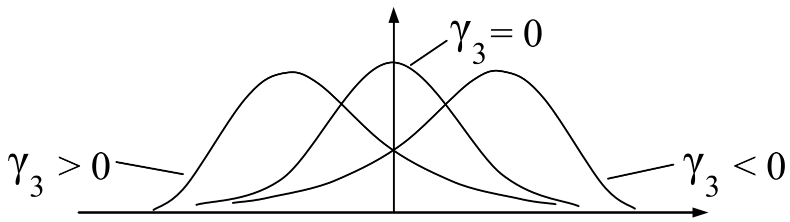
Наряду с выборочной дисперсией S^2 в качестве оценки дисперсии DX используют также *исправленную* выборочную дисперсию $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{\mathrm{X}})^2 = \frac{n}{n-1}\,S^2$ – несмещенную состоятельную оценку дисперсии DX.

Действительно: $\mathrm{M}S^{*2} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\mathrm{DX}\right) = \mathrm{DX}$ и $S^{*2} = \left(\frac{n}{n-1}\,S^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mathrm{DX}$.

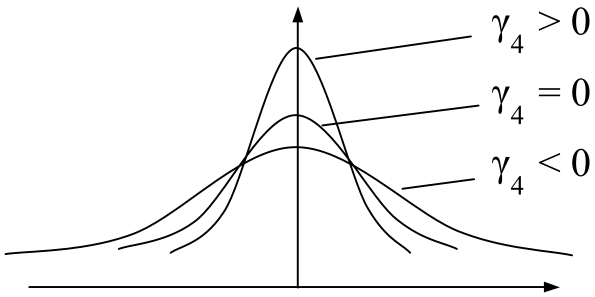
Замечание

Коэффициент асимметрии (асимметрия) $\gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$ и коэффициент эксцесса (эксцесс) $\gamma_4 = \mu_4/\sigma^4 - 3$ характеризуют асимметрию и "островершинность" распределения, соответственно. Используют также обозначение *sk* (skewness) для асимметрии и *ku* (kurtosis) – для эксцесса. Указанные числовые характеристики определены для распределений, у которых существуют конечные центральные моменты до четвертого включительно.

Для симметричных распределений (в частности – для нормального распределения) коэффициент асимметрии $\gamma_3 = 0$.



Нормальное распределение имеет эксцесс равный нулю, $\gamma_4 = 0$.



Оценками указанных числовых характеристик служат *выборочная асимметрия* $\hat{\gamma}_3 = \hat{\mu}_3 / S^3$ и *выборочный эксцесс* $\hat{\gamma}_4 = \hat{\mu}_4 / S^4 - 3$.

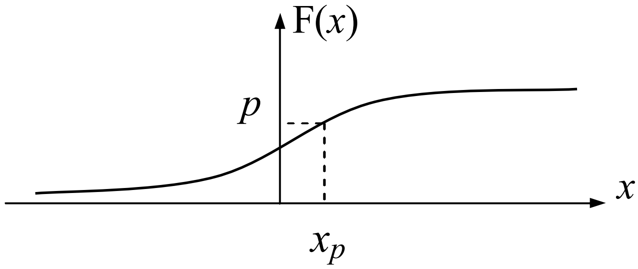
Реализации этих оценок: $\hat{\gamma}_{3e} = \hat{\mu}_{3e}/s^3$, $\hat{\gamma}_{4e} = \hat{\mu}_{4e}/s^4 - 3$

Выборочные коэффициенты эксцесса и асимметрии можно использовать для грубой проверки выборки "на нормальность" (а именно – отклонения гипотезы о нормальности распределения): если отличие от нуля значения эксцесса ($\hat{\gamma}_{3e}$) или асимметрия ($\hat{\gamma}_{4e}$) оказывается существенным, то гипотезу о нормальности распределения следует отвергнуть.

Заметим, что в ряде статистических модулей прикладных программ (в частности, в Excel) реализованы *несмещенные* выборочные оценки числовых характеристик распределений, в том числе, асимметрии и эксцесса.

7. Выборочные квантили

Напомним: *квантилью порядка p* одномерного распределения называется корень x_p уравнения $\mathrm{F}(x)=p$, где $\mathrm{F}(x)$ – функция распределения.



Вообще функция распределения $\mathrm{F}(x)$ – неубывающая. Если она строго монотонна, то уравнение $\mathrm{F}(x)=p$ имеет единственный корень x_p; в противном случае при некоторых значениях p это уравнение может иметь более одного решения, тогда в качестве квантили x_p берут наименьшее из них. Заметим, что порядок p квантили x_p – это вероятность того, что случайная величина X примет значение *левее точки* x_p: $\mathrm{P}(\mathrm{X}< x_p)=p$.

Выборочной квантилью $\mathrm{Z}_{n,p}$ порядка p называется следующая статистика:

$$\mathrm{Z}_{n,p}=\begin{cases}\mathrm{X}_{([np]+1)}, & \text{если } np \text{ - дробное}\\ \mathrm{X}_{(np)}, & \text{если } np \text{ - целое}\end{cases}\qquad \text{здесь } [np] \text{ – целая часть } np.$$

Напомним: целой частью данного числа называют наибольшее целое число, не превосходящее данное; $\mathrm{X}_{(k)}$– k-я порядковая статистика (элемент вариационного ряда).

Из определения следует, что $Z_{n,p}$ – это максимальная из порядковых статистик, обладающая свойством: *левее* нее располагаются члены вариационного ряда, доля которых $\frac{[np]}{n}$ *не превосходит* p.

Таким образом, выборочная квантиль является статистическим аналогом квантили x_p исследуемой случайной величины X.

<u>*Частные случаи.*</u>

Значению $p = 1/2$ отвечает выборочная медиана

$$Z_{n,1/2} = Med = \begin{cases} X_{([n/2]+1)}, \text{ если } n/2 \text{ - дробное} \\ X_{(n/2)}, \quad \text{если } n/2 \text{ - целое} \end{cases}.$$

Выборочная медиана Med – оценка медианы MeX распределения случайной величины X (напомним: P(X< MeX) = = P(X > MeX) = 1/2). Реализацию med выборочной медианы Med вычисляют по реализации вариационного ряда $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$.

б) Значениям $p = 1/4$ и $p = 3/4$ отвечают выборочные *квартили* $Z_{n,1/4}$ и $Z_{n,3/4}$ (оценки нижней и верхней квартилей $x_{1/4}$ и $x_{3/4}$), их реализации обозначают $z_{n,1/4}$ и $z_{n,3/4}$, соответственно.

<u>*Замечание*</u> При наличии выбросов при измерениях или в случае “зашумленных” выборок в качестве оценок математического ожидания MX и дисперсии DX симметричных распределений, целесообразным оказывается использование также оценок, перечисленных ниже.

<u>*Оценки* MX</u> (положение центра распределения):

Med – выборочная медиана,

$\hat{\theta}_R = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ – среднее арифметическое экстремальных статистик.

$\hat{\theta}_Q = \frac{1}{2}$ $(Z_{n,1/4} + Z_{n,3/4})$ – среднее арифметическое выборочных квартилей.

Оценки DX (мера рассеяния распределения):

$\mathcal{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\,X_i - Med|$ – среднее абсолютное отклонение,

$R = X_{(n)} - X_{(1)}$ – размах,

$Q = Z_{n,\,3/4} - Z_{n,\,1/4}$ – интерквартильная широта.

8. Нахождение оценок параметров распределений методом максимального правдоподобия

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения $F_X(x, \theta)$, зависящего от одного неизвестного параметра θ и стоит задача построить оценку этого параметра. Один из методов нахождения оценок параметров непрерывных и дискретных распределений – *метод максимального правдоподобия*.

а) пусть X – непрерывная исследуемая случайная величина, $X_1, \ldots, X_n$, – выборка из распределения с плотностью вероятности $f_X(x, \theta)$, зависящей от неизвестного параметра, причем вид функции f известен, и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторая реализация выборки.

Функция $L(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, \theta) = f_X(x_1, \theta) \ldots f_X(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta)$,

рассматриваемая в фиксированной точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как функция параметра θ, называется функцией правдоподобия.

Вероятностный смысл этой функции – значение плотности вероятности n-мерной случайной величины $X_1, \ldots, X_n$, вычисленное в данной точке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и зависящее от параметра θ (говорят– *апостериорное* значение плотности вероятности).

б) пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторая реализация выборки $X_1, \ldots, X_n$ из распределения дискретной случайной величины, множество возможных значений которой $\{x_i\}$ $i=1,2,\ldots,$ причем распределение $P(X=x_i)=p_i(\theta)$ зависит от параметра θ.

Пусть в данной реализации $x_1,x_2,\ldots,x_n$ значение x_m встречается n_m раз (здесь $m=1, 2,\ldots\ k$; причем $n_1+\ldots+n_k=n$).

В случае дискретного распределения функцию правдоподобия определяют так:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)=p_1^{n_1}(\theta)\ \ldots\ p_k^{n_k}(\theta)=\prod_{m=1}^{k}p_m^{n_m}(\theta)$$

Вероятностный смысл функции правдоподобия для случая дискретного распределения состоит в следующем: это вероятность того, что случайная выборка $X_1,\ldots,X_n$ примет значение, равное именно данной реализации выборки $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Понятно, что чем ближе значение переменной θ к истинному (неизвестному) значению параметра распределения $F_X(x,\theta)$, тем выше вероятность при проведении эксперимента получить данную реализацию выборки $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}_{МП}$ неизвестного параметра θ (точнее – значением оценки, отвечающим данной конкретной реализации выборки $x_1,x_2,\ldots,x_n$) называется такое значение переменной θ, которое доставляет максимум функции правдоподобия $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)$.

Функция правдоподобия L, определенная выше, представляет собой произведение ряда сомножителей, поэтому при поиске точки максимума L целесообразно перейти к $\ln L$ (очевидно, что $\ln L$ и L имеют максимум в одной и той же точке) и оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}_{МП}$ параметра θ находить из *уравнения правдоподобия* $\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln L)=0$.

В случае, когда неизвестными являются m параметров $\theta_1,\ldots,\theta_m$, оценки $\hat{\theta}_{1\text{МП}},\ldots,\hat{\theta}_{m\text{МП}}$ находят из соответствующей системы m уравнений.

Заметим, что метод максимального правдоподобия всегда приводит к состоятельным оценкам, распределенным асимптотически нормально, имеющим наименьшую возможную дисперсию среди других асимптотически нормальных оценок. Однако на практике он может осложняться трудностями, связанными с решением систем уравнений правдоподобия.

9. Примеры нахождения оценок максимального правдоподобия (МП- оценок) параметров распределений

Пример 1_мп (нормальное распределение).

Пусть имеется выборка $X_1,\ldots,X_n$ из нормального распределения $N(m;\sigma)$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – некоторая реализация выборки. Найдем оценки максимального правдоподобия $\hat{m}_{\text{МП}}$ и $\hat{\sigma}_{\text{МП}}$ параметров распределения m и σ.

Функция правдоподобия в точке $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ равна

$$\mathrm{L}(x_1,x_2,\ldots,x_n, m,\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i,m,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}\right),$$

ее логарифм $\ln\mathrm{L}=\left(-\frac{n}{2}\right)\ln 2\pi-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$.

Решая систему уравнений правдоподобия

$\frac{\partial\ln\mathrm{L}}{\partial m}=0,\ \frac{\partial\ln\mathrm{L}}{\partial\sigma}=0$ относительно неизвестных m и σ,

получаем: $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$; $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=s^2$.

Полученное решение – значение реализаций оценок параметров m и σ, соответствующее данной реализации выборки, однако все приведенные рассуждения справедливы для любой реализации выборки, поэтому искомые оценки равны, соответственно:

$$\hat{m}_{\text{МП}} = \bar{\mathrm{X}}\,;\ \hat{\sigma}_{\text{МП}} = S^2 .$$

Пример 2_мп (распределение Пуассона)

Найдем оценку максимального правдоподобия $\hat{a}_{\text{МП}}$ параметра a распределения Пуассона $\mathrm{P}(\mathrm{X}= i)=p_i = \dfrac{a^i}{i!}e^{-a}$ $(i = 0,\ 1, 2,\ldots)$.

Пусть $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – некоторая реализация выборки $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ из распределения Пуассона, так что числа $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – целые неотрицательные. Обозначим через k наибольшее из них и подсчитаем число раз, которое каждое из чисел $0,1,\ldots,k$ встретилось в данной реализации выборки:

$0 - n_0$ раз, $1 - n_1$ раз,…, $m - n_m$ раз,…., $k - n_k$ раз,

при этом $\sum\limits_{m=0}^{k} n_m = n,\ \sum\limits_{m=0}^{k} m n_m = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Далее, $\mathrm{L}(x_1, x_2,\ldots,x_n,\ a\,) = \prod\limits_{m=0}^{k} p_m^{n_m}(a)$, $\quad \ln \mathrm{L} = \sum\limits_{m=0}^{k} n_m \ln p_m(a)$,

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial a} = \sum_{m=0}^{k} n_m\left(\frac{m}{a} - 1\right) = 0, \quad \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{k} m n_m - \sum_{m=0}^{k} n_m = 0, \quad \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i = n,$$

откуда $a = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Таким образом, оценка максимального правдоподобия параметра a распределения Пуассона равна $\hat{a}_{\text{МП}} = \bar{\mathrm{X}}$. Заметим, что эта оценка несмещенная состоятельная асимптотически нормальная.

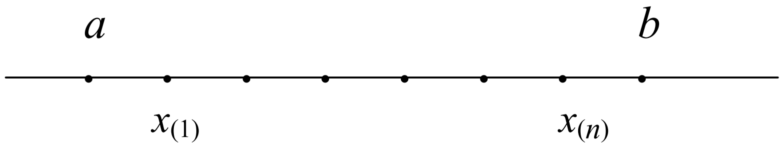
Пример 3_мп (равномерное распределение**).**

Пусть $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – некоторая реализация выборки $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ из равномерного распределения с параметрами a и b, а $x_{(1)} \le \ldots \le x_{(n)}$ –

соответствующая реализация вариационного ряда. Найдем оценки максимального правдоподобия параметров a и b.

Функция правдоподобия в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна:

- $\mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = (\frac{1}{b-a})^n$, если $\forall i \; x_i \in [a; b]$



- $\mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = 0$, если хотя бы одно число из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежит вне $[a; b]$.

Ясно, что функция правдоподобия $\mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = (\frac{1}{b-a})^n$ максимальна (как функция параметров a и b) при условии, что величина разности $b-a$ минимальна. Таким образом, поскольку $a \le x_{(1)}$, $b \ge x_{(n)}$, то значения параметров, доставляющие максимум функции правдоподобия $a = x_{(1)}$, $b = x_{(n)}$, а искомые оценки $\hat{a}_{\text{МП}} = \mathrm{X}_{(1)}$, $\hat{b}_{\text{МП}} = \mathrm{X}_{(n)}$.

Пример 4_мп (распределение Бернулли)

Найдем оценку максимального правдоподобия вероятности p (вероятности успеха) в каждом испытании при проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли. Индикатор X_i появления успеха в i-м испытании – случайная величина, принимающая два возможных значения 1 или 0, а именно, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i = 1) = p$, если в результате i - го испытания осуществился успех и $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i = 0) = 1 - p = q$ если результат i - го испытании – неуспех (распределение Бернулли):

X_i	0	1
P	q	p

Пусть в результате данной серии n испытаний получена реализация выборки из распределения Бернулли, в которой значение 1 встретилось точно m раз, а значение 0 соответственно $n-m$ раз (ровно m успехов в n испытаниях). Функция правдоподобия имеет вид: $\mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) = p^m q^{n-m} = p^m (1-p)^{n-m}$.

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0, \text{ откуда } p = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, искомой оценкой максимального правдоподобия вероятности p является относительная частота $\hat{p}_{\text{МП}} = \frac{\mathrm{X}}{n}$ числа успехов при проведении n независимых испытаний.

10. Понятие доверительного интервала

Пусть θ – некоторый неизвестный параметр распределения. По выборке $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ из данного распределения построим интервальную оценку параметра θ распределения, то есть найдем такой интервал, внутри которого с заданной (высокой) вероятностью $1-\alpha$ находится истинное значение неизвестного параметра θ. Указанную вероятность $1-\alpha$ называют доверительной вероятностью, а величину α – уровнем значимости.

В качестве значений доверительной вероятности обычно выбирают величины 0,9, 0,95, 0,99, достаточно близкие к 1. В каждом конкретном случае выбор величины доверительной вероятности определяется спецификой решаемой практической задачи.

Итак, пусть $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ – выборка из данного распределения и задана величина доверительной вероятности $1-\alpha$. Интервал $(\vartheta_1; \vartheta_2)$ называют доверительным интервалом для параметра θ, отвечающим доверительной вероятности $1-\alpha$, если его границы $\vartheta_1 = \vartheta_1(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$

и $\vartheta_2 = \vartheta_2(X_1, \ldots, X_n)$ – две статистики такие, что верно равенство:

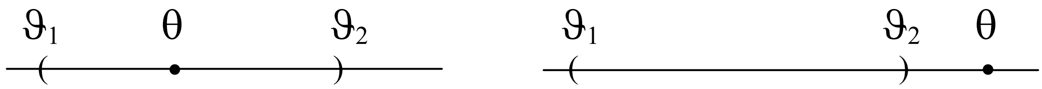
$$P(\vartheta_1 < \theta < \vartheta_2) = 1 - \alpha.$$

Заметим, что границы доверительного интервала ϑ_1 и ϑ_2 – случайные величины (функции выборки $X_1, \ldots, X_n$), параметр θ – неслучайная величина, так что интервал $(\vartheta_1;\vartheta_2)$ “накрывает“ величину θ с вероятностью $1-\alpha$ (соответственно, “не накрывает“ с вероятностью α).

Длина интервала $\vartheta_2 - \vartheta_1$ характеризует точность, а доверительная вероятность $1-\alpha$ – надежность интервальной оценки. Очевидно, что точность и надежность взаимосвязаны: увеличение надежности приводит к уменьшению точности – увеличению длины интервала $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Выбирая величину доверительной вероятности $1-\alpha$, принимают соглашение: считать события, вероятность которых $P \geq 1-\alpha$, – практически достоверными, а события, вероятность которых $P \leq \alpha$ – практически невозможными.

Практически достоверно
$\theta \in (\vartheta_1; \vartheta_2)$
(вероятность $1-\alpha$)

Практически невозможно
$\theta \notin (\vartheta_1; \vartheta_2)$
(вероятность α)



11. Основные этапы процедуры построения доверительных интервалов

Напомним, что границы доверительного интервала $\vartheta_1(X_1, \ldots, X_n)$ и $\vartheta_2(X_1, \ldots, X_n)$ – случайные величины (функции выборки $X_1, \ldots, X_n$). Результатом эксперимента (серии n независимых измерений данной случайной величины) является реализация выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Соответственно, значения статистик ϑ_1 и ϑ_2 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – это *числа* $\vartheta_{1e} = \vartheta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vartheta_{2e} = \vartheta_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким образом, будем различать, идет ли речь о *доверительном интервале*, границы которого по смыслу – случайные величины, или о *реализации доверительного интервала*, границами которого являются конкретные числа.

Для построения реализации доверительного интервала на основе данной реализации выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняют следующие действия:

(1) формулируют предположения о распределении и о выборке $X_1, \ldots, X_n$ (допущения, принимаемые при построении априорной теоретической модели).

(2) строят доверительный интервал, для чего:

а) выбирают значение доверительной вероятности $1-\alpha$ (или уровня значимости α), то есть принимают соглашение:

– *вероятность практически достоверного события* $= 1-\alpha$;

– *вероятность практически невозможного события* $= \alpha$.

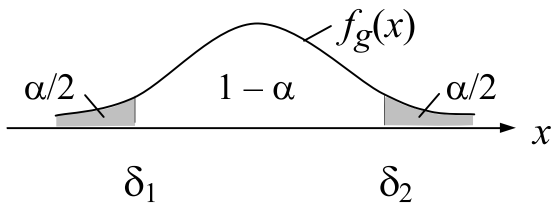
б) записывают вероятностное равенство:

$$P(\delta_1 < g(\theta;\hat{\theta}) < \delta_2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f_g(x)\,dx = 1-\alpha,$$

где статистика g имеет известную (табулированную) плотность вероятности $f_g(x)$, θ – оцениваемый параметр, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ – некоторая его оценка.

Существует бесконечное множество значений величин δ_1 и δ_2, обеспечивающих справедливость указанного равенства, однако, если использовать дополнительное условие

$P(g(\theta;\hat{\theta}) < \delta_1) = P(g(\theta;\hat{\theta}) > \delta_2) = \alpha/2$, то решение $(\delta_1; \delta_2)$ будет единственным:



в) преобразуют неравенство $\delta_1 < g(\theta;\hat{\theta}) < \delta_2$ к виду $\vartheta_1 < \theta < \vartheta_2$, где $\vartheta_1 = \vartheta_1(X_1, \ldots, X_n)$, $\vartheta_2 = \vartheta_2(X_1, \ldots, X_n)$ – функции выборки, тогда

$$P(\vartheta_1 < \theta < \vartheta_2) \equiv 1 - \alpha.$$

(3) проводят эксперимент – получают конкретную реализацию выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(4) вычисляют значения $\vartheta_{1e} = \vartheta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vartheta_{2e} = \vartheta_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В результате перечисленных действий (1) – (4) получают реализацию доверительного интервала – числовой интервал $(\vartheta_{1e}; \vartheta_{2e})$.

Степень уверенности в том, что полученный интервал $(\vartheta_{1e}; \vartheta_{2e})$ в действительности содержит неизвестный параметр θ выражается *выбранной априори* величиной доверительной вероятности $1-\alpha$ (вероятностью практически достоверного события). Иными словами, априори допускается, что утверждение “данная реализация доверительного интервала $(\vartheta_{1e}; \vartheta_{2e})$ содержит оцениваемый параметр θ” может оказаться ошибочным, однако, число таких случаев ма́ло и может наблюдаться лишь в $\alpha \cdot 100\%$ общего числа случаев; при этом приемлемая доля указанных ошибок выражается уровнем значимости α – вероятностью практически невозможного события.

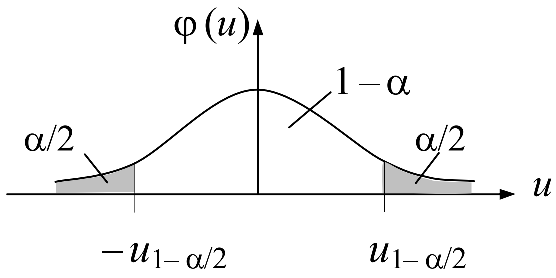
12. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пример 1_ди

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из нормального распределения $N(m;\sigma)$. Предполагается, что параметр σ известен: $\sigma = \sigma_o$ (например, этот параметр определен в результате специальных многократных измерений).

При указанных предположениях справедливо: $\bar{X} \sim N(m; \sigma_o / \sqrt{n})$ или иначе, $\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma_o / \sqrt{n}} \sim N(0; 1)$.

Построим доверительный интервал для математического ожидания m. Зададим величину доверительной вероятности $1 - \alpha$ и запишем вероятностное равенство $P(\left|\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma_o / \sqrt{n}}\right| < u) = 1 - \alpha$, откуда имеем: $u = u_{1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1 - \alpha/2$ (см. рисунок ниже, где $\varphi(u)$ – плотность вероятности стандартного нормального распределения).



Далее, $P(\left|\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma_o / \sqrt{n}}\right| < u_{1-\alpha/2}) \equiv 1 - \alpha$, откуда

$$P(\bar{X} - \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) \equiv 1 - \alpha.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал, отвечающий доверительной вероятности $1 - \alpha$ имеет вид:

$$(\bar{X} - \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}; \bar{X} + \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$$

Заметим, что для данной величины $1 - \alpha$ доверительной вероятности длина этого интервала равна $d = 2 \dfrac{\sigma_o}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$.

При данном объеме выборки n длина d постоянна, от выборки к выборке меняется только положение центра интервала $\bar{X}$.

Замечание

Проиллюстрируем связь точности и надежности интервальной оценки при фиксированных значениях n и σ_o:

$$1-\alpha=0{,}9 \qquad u_{1-\alpha/2}=u_{0{,}95}=1{,}65 \qquad d=3{,}3\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}};$$

$$1-\alpha=0{,}95 \qquad u_{1-\alpha/2}=u_{0{,}975}=1{,}96 \qquad d=3{,}92\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}};$$

$$1-\alpha=0{,}99 \qquad u_{1-\alpha/2}=u_{0{,}995}=2{,}58 \qquad d=5{,}16\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}.$$

Видим, что при данном объеме выборки n с ростом надежности оценки $1-\alpha$ ее точность убывает (длина d соответствующего интервала растет). Таким образом, как уже упоминалось, плата за повышение надежности – уменьшение точности интервальной оценки.

Пусть заданы $\varepsilon>0$ и $1-\alpha$ – величины, характеризующие соответственно точность и надежность оценки. Найдем объем выборки, достаточный для обеспечения одновременно заданных значений точности и надежности оценки. Из условия $d\le 2\varepsilon$ получаем:

$$n \ge \left(\frac{\sigma_o}{\varepsilon}u_{1-\alpha/2}\right)^2.$$

Пример 1_ди (доверительный интервал для m при известном σ, $1-\alpha=0{,}95$)

Точность прибора известна (в паспорте прибора указано σ_o = 0,02). С помощью этого прибора проведено n независимых повторных измерений ($n=25$) некоторой физической величины. По результатам измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ вычислено среднее выборочное, оказавшееся равным $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ = 2,42. Считая числа $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ реализацией выборки из нормального распределения $N(m;\sigma_o)$, где σ_o = 0,02, найти реализацию доверительного интервала для математического ожидания m; доверительная вероятность $1-\alpha=0{,}95$.

<u>Решение</u>

Выражение для реализации доверительного интервала для математического ожидания m нормального распределения (при $\sigma=\sigma_o$), отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha$, имеет вид:

$$(\bar{x}-\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2};\bar{x}+\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}).$$

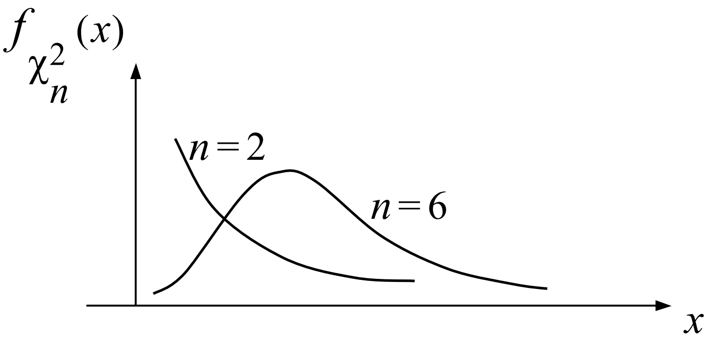
По таблице квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль порядка $1-\alpha/2$: $u_{1-\alpha/2}=u_{0,975}=1{,}96$. Подставляя $\bar{x}=2{,}42$, $\sigma_o=0{,}02$, $n=25$ в выражение для реализации доверительного интервала, получаем:

$$(2{,}420 - 0{,}008;\ 2{,}420 + 0{,}008) = (2{,}412;\ 2{,}428).$$

13. Распределение χ^2, распределение Стьюдента, лемма Фишера

<u>Распределение χ^2</u>

Сумма квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин $\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\chi_n^2$ называется случайной величиной χ_n^2 (с n степенями свободы). Плотность вероятности распределения χ_n^2 табулирована, ее график имеет вид, представленный на рисунке:



Для распределения χ_n^2 имеют место следующие соотношения: $M[\chi_n^2]=n$, $D[\chi_n^2]=2n$, $Mo[\chi_n^2]=n-2$. Заметим, что с ростом n кривая

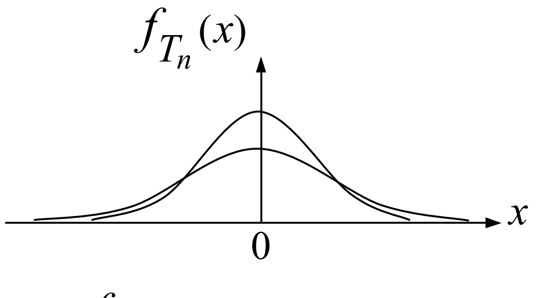
$f_{\chi_n^2}(x)$ становится более симметричной, а ее максимум смещается вправо.

Заметим также, что в силу центральной предельной теоремы центрированная и нормированная случайная величина $\dfrac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0;1)$ асимптотически нормальна, поэтому в таблицах для распределения χ_n^2 приводятся квантили только для $n \le 30$.

<u>Распределение Стьюдента</u>

Пусть случайные величины $X \sim N(0;\, 1)$ и χ_n^2 – независимы.

Случайная величина $T_n = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{\chi_n^2}{n}}}$ называется отношением Стьюдента (t – отношением). Плотность вероятности распределения Стьюдента табулирована, ее график имеет вид, представленный на рисунке:



Распределение $f_{T_n}(x)$ симметрично, $M[T_n] = 0$ и имеет место асимптотическое свойство: $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0;\, 1)$.

При малых значениях n распределение Стьюдента заметно отличается от стандартного нормального распределения, однако при $n > 30$ эти распределения близки.

<u>Лемма Фишера</u> (о совместном распределении $\bar{X}$ и S^2 для выборки из нормального распределения)

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $N(m;\sigma)$ тогда:

- выборочное среднее $\bar{X}$ и выборочная дисперсия S^2 (или исправленная выборочная дисперсия S^{*2}) – взаимно независимы;
- выборочное среднее $\bar{X}$ подчиняется нормальному распределению: $\bar{X} \sim N(m; \sigma/\sqrt{n})$;
- случайная величина $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ (или $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2}$) распределена по закону χ^2_{n-1} (с $n-1$ степенью свободы).

Заметим, что из леммы Фишера следует независимость $\bar{X}$ и $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$, а также $\bar{X}$ и $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2}$.

14. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии Примеры 2_ди и 3_ди

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $N(m;\sigma)$, параметры которого m и σ неизвестны. Найдем интервальную оценку параметра m, отвечающую заданной величине доверительной вероятности $1-\alpha$.

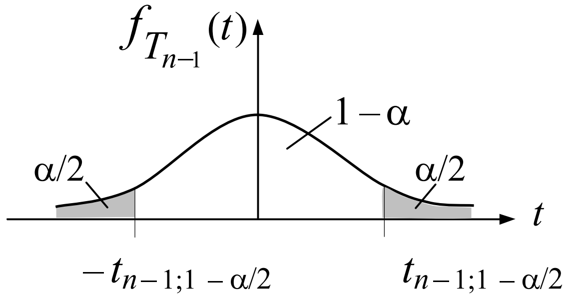
Согласно лемме Фишера статистики $U = \dfrac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0;1)$ и $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}$ – независимы. Составим отношение

$$T_{n-1} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = \frac{\bar{X}-m}{S^*/\sqrt{n}}$$ – отношение Стьюдента.

Из вероятностного равенства $P(|T_{n-1}|<t)=1-\alpha$ имеем: $t=t_{n-1;1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента.

Далее, $P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-m}{S^*/\sqrt{n}}\right|<t_{n-1;\,1-\alpha/2}\right)\equiv 1-\alpha$, откуда

$$P\left(\bar{X}-\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}<m<\bar{X}+\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}\right)\equiv 1-\alpha.$$



$$P\left(\bar{X}-\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}<m<\bar{X}+\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}\right)\equiv 1-\alpha.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал, отвечающий доверительной вероятности $1-\alpha$ имеет вид:

$$\left(\bar{X}-\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2};\ \bar{X}+\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}\right).$$

Заметим, что положение центра этого интервала, как и его длина – случайные величины.

Пример 2_ди (доверительный интервал для m при неизвестном σ, $1-\alpha=0{,}6827$)

По результатам пяти измерений вычислено выборочное среднее $\bar{x}$ и исправленная выборочная дисперсия s^{*2}, соответственно:

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=4 \text{ и } s^{*2}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10/4.$$

Считая числа $x_1, x_2, \ldots, x_5$ реализацией выборки из нормального распределения $N(m;\sigma)$, где σ неизвестно, записать реализацию доверительного интервала для математического ожидания m, приняв величину доверительной вероятности равной $1-\alpha = 0{,}6827$.

<u>Решение</u>

Реализация доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha$, для математического ожидания m нормального распределения имеет вид:

$$(\bar{x} - \frac{s^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2}\,; \bar{x} + \frac{s^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2})$$

Здесь $\dfrac{s^*}{\sqrt{n}}$ – стандартная ошибка, $\dfrac{s^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2}$ – погрешность.

Правило записи реализации доверительного интервала (для $1-\alpha =$ $= 0{,}6827$):

1) округление значения погрешности – округляемая цифра отбрасывается, если она <5, если она ≥ 5 то в предыдущий разряд добавляется единица;
2) в погрешности оставляют одну значащую цифру, если она ≥ 4 и две, если первая из них <4;
3) в значении $\bar{x}$ оставляют последнюю значащую цифру в том же разряде, что и в погрешности;
4) общий множитель вида 10^k выносят за скобки.

Находим (по таблицам) значение квантили $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{4;\,0,84135} = 1{,}22$, вычисляем значение погрешности $\dfrac{s^*}{\sqrt{5}} t_{4;\,0,84135} = 0{,}9$ и получаем искомую реализацию доверительного интервала: $(4{,}0 - 0{,}9; 4{,}0 + 0{,}9) = (3{,}1; 4{,}9)$.

Пример 3_ди (доверительный интервал для m при неизвестном σ, $1-\alpha=0{,}95$)

Произведено $n=19$ измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ некоторой физической величины с помощью прибора, измеряющего с точностью до 0,1. Вычислено выборочное среднее $\bar{x}=\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} x_i=7{,}07$ и исправленная выборочная дисперсия $s^{*2}=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{19}(x_i-\bar{x})^2=0{,}041$.

Считая, что $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ – реализация выборки из нормального распределения $N(m;\sigma)$, где σ неизвестно, записать реализацию доверительного интервала для математического ожидания m при доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}95$.

Решение

Правило записи реализации доверительного интервала для $1-\alpha=0{,}95$:

1) выборочное среднее $\bar{x}$ вычисляется с точностью на порядок большей, чем точность измерений;
2) выборочное стандартное отклонение s^* (исправленное) – с точностью, на порядок большей, чем точность вычисления среднего;
3) правило округления: если округляемая цифра <5, то она отбрасывается, если она ≥ 5 – в предыдущий разряд добавляется единица.

Реализация доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha$, для математического ожидания m при неизвестном σ имеет вид:

$$\left(\bar{x}-\frac{s^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2};\bar{x}+\frac{s^*}{\sqrt{n}}t_{n-1;1-\alpha/2}\right)$$

Находим по таблицам значение квантили $t_{n-1;1-\alpha/2}=t_{18;\,0{,}975}=2{,}10$, вычисляем значение погрешности

$\frac{s^*}{\sqrt{19}} t_{18;\,0,975} = 0{,}098$ и получаем искомую реализацию доверительного интервала для m:

$$(7{,}07 - 0{,}098;\ 7{,}07 + 0{,}098) = (6{,}972;\ 7{,}168).$$

15. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из нормального распределения $N(m;\sigma)$. Параметры распределения m и σ неизвестны. Найдем интервальную оценку дисперсии распределения σ^2, отвечающую заданной величине доверительной вероятности $1-\alpha$.

Известно (п. 13), что статистика $\frac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2_{n-1} (хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы):

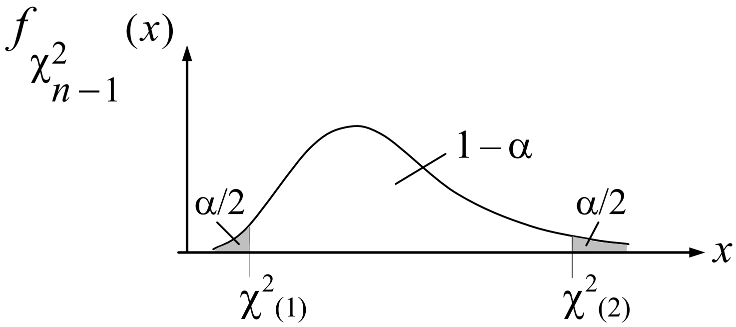
$$\frac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}$$

Запишем равенство:

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{(1)} < {(n-1)\,S^{*2}}/{\sigma^2} < \chi^2_{(2)}\right) = 1-\alpha,$$

здесь $\chi^2_{(1)}$ и $\chi^2_{(2)}$ – границы доверительного интервала, подлежащие определению. С учетом дополнительного условия $\mathrm{P}(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{(1)}) = \mathrm{P}(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{(2)}) = \alpha/2$ эти границы определяются единственным образом. Действительно $\chi^2_{(1)} = \chi^2_{n-1;\,\alpha/2}$ и $\chi^2_{(2)} = \chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}$ – квантили распределения случайной величины χ^2_{n-1} порядка $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$, соответственно. В итоге получаем:

$$\mathrm{P}\left({(n-1)\,S^{*2}}/{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < {(n-1)\,S^{*2}}/{\chi^2_{(1)}}\right) \equiv 1-\alpha.$$



<u>*Замечание*</u>

В случае выборки большого объема из произвольного распределения может быть построен приближенный доверительный интервал для стандартного отклонения σ. При этом предполагается, что у распределения, из которого извлечена выборка, существуют конечные первые четыре момента.

В выборочной дисперсии $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{\mathrm{X}})^2$ не все слагаемые являются независимыми, так как $\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{\mathrm{X}}) = 0$. Если объем выборки n достаточно велик, то этой связью можно пренебречь и считать, что все слагаемые независимы. При этом, согласно центральной предельной теореме, центрированная и нормированная случайная величина $\frac{S^2 - \mathrm{M}S^2}{\mathrm{D}S^2}$ будет распределена асимптотически нормально.

Таким образом примем, что при данном объеме выборки справедливо:

$$\frac{S^2 - \mathrm{M}S^2}{\sqrt{\mathrm{D}(S^2)}} \sim N(0;1).$$

Полагая, что выполнены все указанные условия, приведем без доказательства формулу для асимптотического доверительного интервала:

$$S(1 + u_{1-\alpha/2}\sqrt{(\hat{\gamma}_4 + 2)/n})^{-1/2} < \sigma < S(1 - u_{1-\alpha/2}\sqrt{(\hat{\gamma}_4 + 2)/n})^{-1/2}.$$

Здесь $u = u_{1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения, $\hat{\gamma}_4 = \hat{\mu}_4 / S^4 - 3$ – выборочный эксцесс.

16. Приближенная интервальная оценка для математического ожидания произвольного распределения по выборке большого объема

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из некоторого (произвольного) распределения, причем объем выборки n достаточно велик.

Введем обозначения: $MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$ $(i = 1, \ldots, n)$, тогда $M\bar{X} = m$, $D\bar{X} = (\sigma/\sqrt{n}\,)^2$.

Согласно центральной предельной теореме имеем: $\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0;1)$ при $n \to +\infty$. По условию $n -$ велико, поэтому примем допущение, что указанная нормальность $\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0;1)$ имеет место при данном объеме выборки n.

Зададимся величиной доверительной вероятности $1-\alpha$ и запишем: $P\left(\left|\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u\right) = 1-\alpha$, откуда $u = u_{1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Таким образом, $P\left(\bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right) \equiv 1-\alpha$.

Заменяя в последнем равенстве неизвестную величину σ ее несмещенной состоятельной оценкой S^*, получаем *приближенную* интервальную оценку для математического ожидания *m,* отвечающую доверительной вероятности $1-\alpha$ при большом объеме выборки:

$$\left(\bar{X} - \frac{S^*}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{S^*}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right).$$

17. Приближенная интервальная оценка вероятности *p* в схеме Бернулли по выборке большого объема. Пример 4_ди

Пусть проводится n независимых испытаний, p – вероятность успеха в каждом испытании и $X_1, \dots, X_n$ – выборка из соответствующего распределения Бернулли, причем объем выборки n достаточно велик. Каждый элемент выборки – индикатор X_i появления успеха в i-м испытании. Случайная величина $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – число успехов – подчиняется биномиальному распределению:

$$P(X = m) = C_n^m (p)^m (1 - p)^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Согласно теореме Муавра-Лапласа, центрированная и нормированная случайная величина $\dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{X/n - p}{\sqrt{pq/n}}$ является асимптотически нормальной, что можно символически записать так: $\dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \sim N(0;1)$ при $n \to +\infty$. Здесь относительная частота $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ – оценка максимального правдоподобия вероятности p (несмещенная состоятельная асимптотически эффективная и асимптотически нормальная точечная оценка), $q = 1 - p$.

Это означает, что при достаточно больших значениях n распределение статистики $\dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$ близко к стандартному нормальному. Будем считать, что нормальность распределения имеет место при данном (достаточно большом) объеме выборки n.

Зададимся величиной доверительной вероятности $1 - \alpha$ и запишем: $P\left(\left|\dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}\right| < u\right) = 1 - \alpha$, откуда $u = u_{1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1 - \alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Таким образом, $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}\right|<u_{1-\alpha/2}\right)\equiv 1-\alpha$,

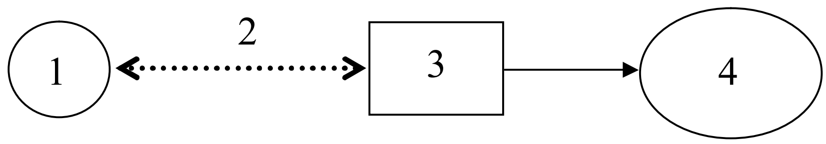
$$\mathrm{P}\left(\hat{p}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}<p<\hat{p}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}\right)\equiv 1-\alpha.$$

Заменив в последнем тождестве неизвестную величину p ее оценкой $\hat{p}$, получим выражение для приближенного (асимптотического) доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha$:

$$\left(\hat{p}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\,;\,\hat{p}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right)$$

Отметим еще раз, что полученное выражение используют для нахождения *приближенной* интервальной оценки вероятности p при достаточно больший значениях n.

Пример 4_ди



Приемное устройство (3) охранной системы находится в режиме ожидания (дежурном режиме) и может получать сообщения (пакеты) фиксированной длительности $\Delta\tau$ от датчика (1) по радиоканалу (2). Если в каком-либо интервале времени $\Delta\tau$ от датчика поступает сообщение, то на исполнительное устройство (4) передается извещение "тревога".

Под *ложной тревогой* понимают ошибочное формирование извещения "тревога" при условии, что сообщение от датчика отсутствует; ложная тревога обусловлена только наличием собственного шума в системе, в частности – в радиоканале.

Для оценки вероятности ложной тревоги осуществили наблюдение за работой системы в течение интервала времени, равного $10^4\Delta\tau$. Подсчитали частоту события "ложная тревога" (число интервалов $\Delta\tau$, таких, в которых было ошибочно сформировано извещение “тревога”) и его относительную частоту, оказавшуюся равной 0,006.

Найдем приближенную интервальную оценку вероятности ложной тревоги при доверительной вероятности $1-\alpha = 0{,}95$.

Указание: Принять допущение, что вероятностной моделью эксперимента по оценке вероятности p ложной тревоги служит последовательность независимых испытаний (схема Бернулли), то есть, что выборка объема $n=10^4$ извлечена из распределения Бернулли с параметром p.

<u>Решение</u>

Выражение для реализации приближенного доверительного интервала для неизвестного параметра p, отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha$, имеет вид:

$$\left(\hat{p}_e - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_e(1-\hat{p}_e)/n};\, \hat{p}_e + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_e(1-\hat{p}_e)/n}\right),$$

где $\hat{p}_e$ – значение оценки $\hat{p} = \mathrm{X}/n$, вычисленное по реализации выборки (по результатам эксперимента); по условию задачи $\hat{p}_e = 0{,}006$.

По таблицам квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$. Вычисляем

$$u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_e(1-\hat{p}_e)/n} = 1{,}96\ \sqrt{0{,}006\,(1-0{,}006)/10000} = 0{,}0015,$$

$$\hat{p}_e - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_e(1-\hat{p}_e)/n} = 0{,}006 - 0{,}0015 = 0{,}0045,$$

$$\hat{p}_e + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_e(1-\hat{p}_e)/n} = 0{,}006 + 0{,}0015 = 0{,}0075.$$

В итоге получаем искомую реализацию приближенного доверительного интервала: $(0{,}0045; 0{,}0075)$, соответствующего доверительной вероятности $1-\alpha = 0{,}95$.

18. Постановка задачи проверки статистических гипотез

Пример 1_кз

Задачу проверки статистических гипотез рассмотрим на примере.

Пример 1_кз (двусторонний критерий).

В результате многократных измерений некоторого параметра эталонного образца получено значение 2,40 (условных единиц). Точность прибора по паспорту $\sigma_o = 0{,}02$. Периодически настройку прибора проверяют и при необходимости корректируют. Прибором некоторое время пользовались, а затем произвели $n = 25$ контрольных независимых измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ указанного параметра того же эталонного образца и получили $\bar{x} = 2{,}42$.

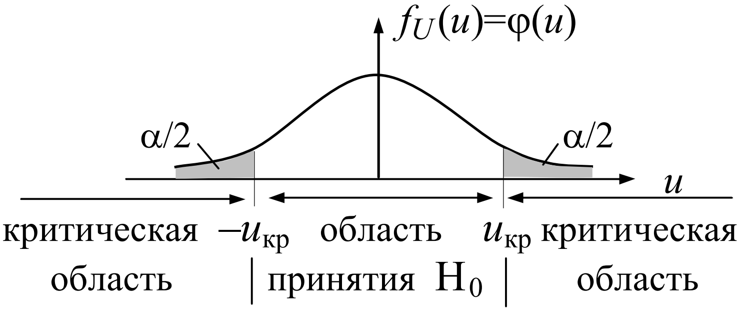
Допустим, что полученные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ – реализация выборки $X_1, \ldots, X_{25}$ из нормального распределения $N(m; \sigma)$, один из параметров которого известен: $\sigma = \sigma_o = 0{,}02$ и проверим, является ли обоснованным предположение: контрольная выборка извлечена из нормального распределения с математическим ожиданием $m = m_0 = 2{,}40$, а отличие выборочного среднего от математического ожидания естественно объясняется случайностью выборки?

Иными словами, проверим гипотезу H_0: $m = m_0 = 2{,}40$ о значении математического ожидания нормального распределения $N(m;\ \sigma_o)$, из которого извлечена выборка. Гипотезу H_1: $m \neq m_0$ рассмотрим как альтернативную к гипотезе H_0.

При справедливости гипотезы H_0 имеем:

$$\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = U \sim N(0;1).$$

Статистику U назовем *статистикой критерия*. Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Всякое событие, вероятность которого $P \le \alpha$ будем считать практически невозможным при справедливости гипотезы H_0, а событие, вероятность которого $P \ge 1 - \alpha$ – практически достоверным при справедливости гипотезы H_0.



При выбранном уровне значимости α так называемое критическое число $u_{кр}$ определяется условиями $P(|U| \geq u_{кр}) = \alpha$, $P(|U| < u_{кр}) = 1 - \alpha$, так что при справедливости гипотезы H_0 событие $(|U| \geq u_{кр})$ – *практически невозможное*, а событие $(|U| < u_{кр})$ – *практически достоверное*. Таким образом, множество значений статистики критерия U разбивается на интервалы, соответствующие практически невозможному событию (*критическая область*), либо практически достоверному событию (*область принятия* H_0). Указанное разбиение позволяет сформулировать следующее правило принятия решения об отклонении или принятии гипотезы H_0:

при $(|U| \geq u_{кр})$ гипотеза H_0 отвергается,

при $(|U| < u_{кр})$ гипотеза H_0 принимается.

При $\alpha = 0{,}05$ имеем $u_{кр} = u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$.

Обозначим через u_e значение, которое статистика U приняла в результате контрольных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$, тогда

$$u_e = U(x_1, x_2, \ldots, x_{25}) = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{2{,}42 - 2{,}40}{0{,}02 / \sqrt{25}} = 5 > u_{кр} = 1{,}96.$$

Попадание значения u_e в критическую область означает, что произошло событие, практически невозможное при справедливости гипотезы H_0. Данные измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ не согласуются с гипотезой H_0, а напротив, опровергают ее, поэтому гипотезу H_0: $m = m_0$ следует отклонить (соответственно – принять альтернативную к ней гипотезу H_1: $m \neq m_0$). Практически это означает, что прибор следует настроить заново.

19. Критерии значимости: гипотезы, критическая область, решения, ошибки

Пусть X – исследуемая случайная величина, $F_X(x) = P(X < x)$ – ее функция распределения, зависящая от одного или нескольких параметров, и пусть о параметре распределения или о виде распределения выдвинута и подлежит проверке некоторая гипотеза H_0 (нуль-гипотеза) и указана альтернативная к ней гипотеза H_1.

Поставим задачу: на основе опытных данных либо отвергнуть гипотезу H_0, если опытные данные и гипотеза противоречат друг другу, либо принять H_0, то есть сделать вывод о том, что эта гипотеза согласуется с опытными данными. Таким образом, решение об отклонении гипотезы H_0 или ее принятии будет строиться на основе выборки $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $F_X(x)$.

Гипотезу называют простой, если она полностью определяет распределение и сложной – в противном случае.

В рассмотренном в п.18 примере вид распределения предполагался известным (нормальное распределение $N(m; \sigma)$), один из параметров которого $\sigma = \sigma_o -$ известен, поэтому нуль-гипотеза H_0: $m = m_0$ о значении другого параметра распределения – *простая*, так как она полностью определяет распределение, в то время как альтернативная к ней гипотеза H_1: $m \neq m_0$ – *сложная*.

Правило принятия решения, согласно которому принимается или отвергается гипотеза H_0, называют *статистическим критерием*.

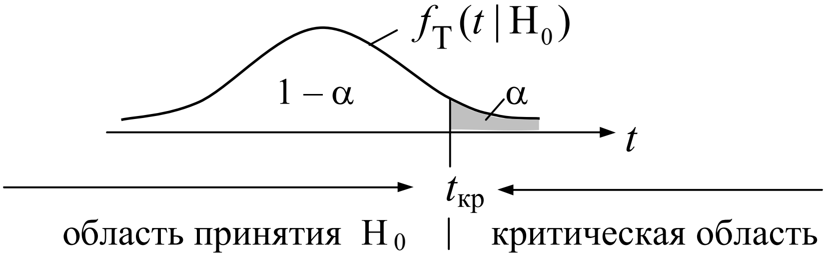
Пусть $\mathfrak{X} = \{(X_1, \ldots, X_n)\} -$ множество всех возможных значений случайной выборки и задана вероятность α практически невозможного события при справедливости гипотезы H_0 (эту вероятность называют *уровнем значимости* α). При этом множество $\mathfrak{X}$ разбивается на два подмножества $\mathfrak{X}_{кр}$ – *критическая область* и

$\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}_{\text{кр}}$ – *область принятия гипотезы* H_0 следующим образом: $\mathfrak{X}_{\text{кр}}$ – подмножество $\mathfrak{X}$ такое, что любое событие $((X_1,\dots,X_n)\in\mathfrak{X}_{\text{кр}})$, вероятность которого $P((X_1,\dots,X_n)\in\mathfrak{X}_{\text{кр}}\,|\,H_0)=\alpha$ – это практически невозможное события при справедливости гипотезы H_0. Соответственно, $P((X_1,\dots,X_n)\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}_{\text{кр}}\,|\,H_0)=1-\alpha$ – вероятность практически достоверного события. Если в результате опыта происходит событие $((X_1,\dots,X_n)\in\mathfrak{X}_{\text{кр}})$, то гипотезу H_0 отвергают; если же происходит событие $((X_1,\dots,X_n)\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}_{\text{кр}})$, то H_0 принимают.

Критерий (правило принятия решения об отклонении или принятии гипотезы H_0) строится на основе соответствующей случайной величины – *статистики критерия* $T(X_1,\dots,X_n)$. При этом предполагается, что распределение статистики критерия $f_T(t\,|\,H_0)$ известно при справедливости гипотезы H_0. Статистика критерия отображает множество $\mathfrak{X}=\{(X_1,\dots,X_n)\}$ на числовую прямую. По распределению статистики критерия $f_T(t\,|\,H_0)$ и заданному уровню значимости α находят так называемые *критические числа*, которые разбивают все множество значений статистики критерия на интервалы, соответствующие либо принятию гипотезы H_0, либо ее отклонению. Понятно, что отклонение H_0 означает принятие альтернативной гипотезы H_1 при данном уровне значимости α.

Рассмотрим примеры.

Односторонний (правосторонний) критерий



В случае правостороннего критерия критическое число $t_{кр}$ определяется соотношениями:

$$P(T(X_1, \dots, X_n) \geq t_{кр} \mid H_0) = \alpha,$$
$$P(T(X_1, \dots, X_n) < t_{кр} \mid H_0) = 1 - \alpha.$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – реализация выборки $X_1, \dots, X_n$. Обозначим через t_e значение статистики критерия в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $t_e = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

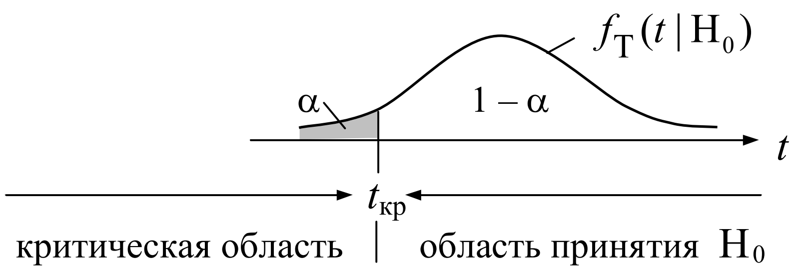
Правило принятия решения в случае правостороннего критерия формулируют так:

если $t_e < t_{кр}$, то гипотезу H_0 принимают,

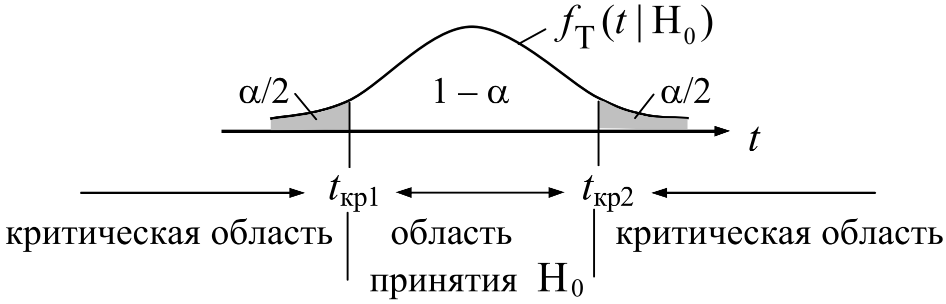
если $t_e \geq t_{кр}$, то гипотезу H_0 отвергают.

Аналогично строятся левосторонний и двусторонний критерии.

Односторонний (левосторонний) критерий



Двусторонний критерий



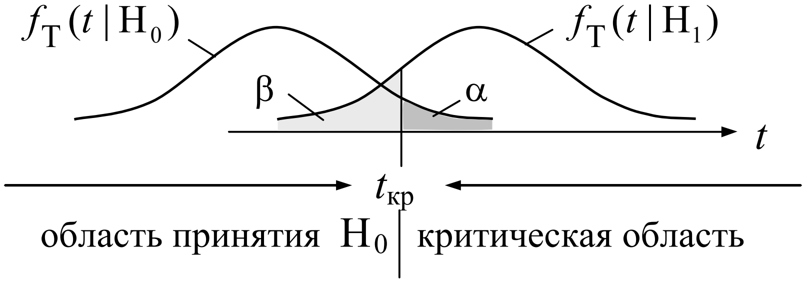
Описанные критерии называют *критериями значимости*. Если в результате опыта наблюдается значение статистики критерия, попадающее в критическую область, то такой результат можно рассматривать как *значимое опровержение* гипотетического согласия между результатами наблюдений и проверяемой гипотезой.

<u>*Замечания*</u>

1. Из гипотезы H_0 логически следует, что при проведении эксперимента (извлечении реализации выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$) значение t_e *практически неизбежно* должно попадать в область принятия H_0. Если же в результате эксперимента произошло событие, *практически невозможное при справедливости* H_0 (значение t_e попало в критическую область), то гипотеза H_0 должна быть отвергнута.
2. Таким образом, проверка гипотезы H_0 осуществляется косвенно. Доказать справедливость гипотезы H_0 косвенным образом нельзя, так как правильное заключение может следовать и из неверной посылки, однако отвергнуть H_0 – можно.
3. Принятие H_0 не означает, что гипотеза H_0 – единственно верное утверждение, это означает лишь, что гипотеза H_0 не противоречит имеющимся экспериментальным данным.

Решения и ошибки (случай <u>*простых*</u> гипотез H_0 *и* H_1)

Пусть гипотеза H_0 (нуль-гипотеза) и альтернативная к ней гипотеза H_1 – обе простые и рассматривается правосторонний критерий; при этом $f_\mathrm{T}(t\,|\,\mathrm{H}_0)$ и $f_\mathrm{T}(t\,|\,\mathrm{H}_1)$ – распределения статистики критерия T при справедливости гипотез H_0 и H_1, соответственно:



Ошибки, допускаемые при этом, классифицируют следующим образом:

Ошибка 1-го рода – отклонить H_0, когда верна H_0.

Ошибка 2-го рода – принять H_0, когда верна H_1.

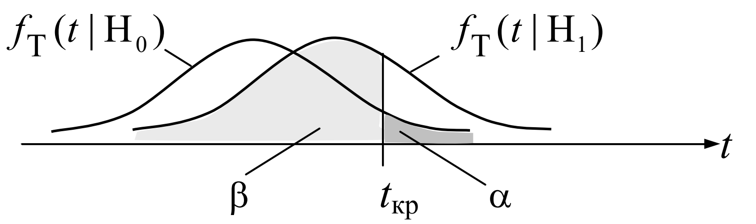
Вероятность ошибки 1-го рода равна уровню значимости:

$$P(T(X_1, \dots, X_n) \geq t_{кр} \mid H_0) = \alpha$$

Вероятность ошибки 2-го рода обозначают через β, она равна

$$P(T(X_1, \dots, X_n) < t_{кр} \mid H_1) = \beta.$$

Заметим, что при фиксированном α величина β зависит от гипотезы H_1 и от вида критической области:



Обычно критерий стараются выбрать так, чтобы при данном уровне значимости α величина ошибки второго рода β была минимальной (чтобы максимальной была так называемая мощность критерия $1-\beta$).

20. Основные этапы процедуры проверки статистических гипотез

Процедура проверки состоит из двух этапов

<u>На первом этапе</u>

- формулируют предположения о распределении и о выборке $X_1, \dots, X_n$ из этого распределения;
- выдвигают нуль-гипотезу H_0 и альтернативную гипотезу H_1;
- задают уровень значимости α;
- выбирают статистику критерия $T(X_1, \dots, X_n)$;
- находят критические числа (границы критической области и области принятия гипотезы H_0);
- формулируют правило принятия решения.

<u>*На втором этапе*</u>

- проводят эксперимент – получают реализацию выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- вычисляют $\mathrm{T}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t_e$;
- сопоставляют t_e с критическими числами;
- формулируют вывод об отклонении гипотезы H_0 на уровне значимости α или о ее принятии.

21. Подход к проверке статистических гипотез о параметрах распределений, основанный на доверительных интервалах

Пример 1_кди

Пусть проверяется гипотеза H_0: $\theta = \theta_0$ о параметре распределения против альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$ (или H_1: $\theta < \theta_0$, или H_1: $\theta > \theta_0$) при заданном уровне значимости α.

Для проверки гипотезы указанного типа (параметрической гипотезы) можно воспользоваться подходом, основанном на доверительном интервале для параметра θ.

Пусть $(\vartheta_1; \vartheta_2)$ – доверительный интервал для параметра θ, соответствующий данному уровню значимости α: $\mathrm{P}(\vartheta_1 < \theta < \vartheta_2) \equiv 1-\alpha$, где $\vartheta_1 = \vartheta_1(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$, $\vartheta_2 = \vartheta_2(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ – функции выборки. Правило принятия решения формулируют так: если интервал $(\vartheta_1 < \theta < \vartheta_2)$ накрывает θ_0, то гипотезу H_0 принимают при данном уровне значимости α, в противном случае – отвергают.

По реализации выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляют границы реализации доверительного интервала $\vartheta_{1e} = \vartheta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vartheta_{2e} = \vartheta_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $\theta_0 \in (\vartheta_{1e}; \vartheta_{2e})$, то гипотезу H_0 принимают, в противном случае $\theta_0 \notin (\vartheta_{1e}; \vartheta_{2e})$ – гипотезу H_0 отвергают (соответственно, принимают H_1) на заданном уровне значимости α.

Замечание

Отыскание критической области и доверительного интервала приводит к одинаковым результатам, однако их истолкование различно:

- критическая область определяет критические числа, между которыми заключено $(1-\alpha)\%$ числа наблюдаемых значений *статистики критерия*;
- доверительный интервал определяет границы (концы доверительного интервала), между которыми в $(1-\alpha)\%$ опытов заключено *истинное значение* оцениваемого параметра θ распределения.

Пример 1_кди

Проиллюстрируем описанный подход на примере проверки гипотезы о математическом ожидании нормального распределения в случае, когда стандартное отклонение известно. Конкретное содержание задачи приведено в п. 18 и п. 12 (Пример 1_кз и Пример 1_ди).

Допустим, что выборка $X_1, \ldots, X_{25}$ извлечена из нормального распределения $N(m;\sigma)$, стандартное отклонение которого известно: $\sigma = \sigma_o = 0{,}02$. Проверке подлежит гипотеза о математическом ожидании m этого распределения: H_0: $m = m_0 = 2{,}40$ против альтернативы H_1: $m \neq m_0$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

В п. 12 по реализации выборки x_1, x_2, …, x_{25} получена реализация доверительного интервала $(2{,}412; 2{,}428)$ для m, отвечающего доверительной вероятности $1-\alpha = 0{,}95$.

Поскольку $m_0 = 2{,}40 \notin (2{,}412; 2{,}428)$, делаем вывод, что статистические данные не согласуются с гипотезой H_0, эта гипотеза должна быть отклонена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

22. Примеры проверки гипотез о параметрах распределений

Пример 2_кз_кди

По результатам многократных проверок установлено, что вероятность ложной тревоги для охранной системы, функционирующей в штатном режиме, составляет 0,005 (описание системы приведено в п. 17). При очередной плановой проверке исправности системы относительная частота события “ложная тревога”, вычисленная по реализации контрольной выборки объема $n = 10^4$, оказалась равной 0,006.

Необходимо выяснить, позволяет ли результат проверки считать, что система работает исправно, а отличие относительной частоты $\hat{p}_e = 0{,}006$ от вероятности $p = 0{,}005$ объясняется случайными факторами. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$.

<u>*Решение*</u>

а) двусторонний критерий значимости

Допустим, что выполнены условия применимости схемы Бернулли: проведено *n независимых* испытаний, *p* – вероятность успеха *в каждом испытании*. Индикатор “успеха” в *i*-м испытании; X_i подчиняется распределению Бернулли, а случайная величина $X = X_1 + \ldots + X_n$ – биномиальному распределению (см. п. 17)

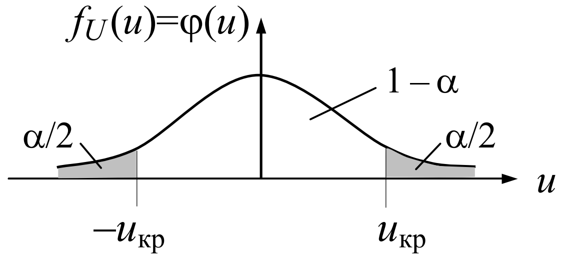
Проверке подлежит гипотеза H_0: $p = p_0 = 0{,}005$ о вероятности p в схеме Бернулли против альтернативы H_1: $p \neq p_0$ при заданном уровне значимости α.

Относительная частота числа успехов в *n* испытаниях:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Согласно теореме Муавра-Лапласа, центрированная и нормированная случайная величина $U = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$ распределена асимптотически нормально при $n \to +\infty$. Объем выборки $n = 10^4$, поэтому примем допущение, что статистика U при данном (большом) объеме выборки и при справедливости гипотезы H_0 подчиняется стандартному нормальному распределению:

$$U=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0 q_0/n}} \sim N(0;1) \text{ – статистика критерия.}$$



Правило принятия решения имеет вид:

при ($|U| \geq u_{\text{кр}}$) гипотеза H_0 отвергается,

при ($|U| < u_{\text{кр}}$) гипотеза H_0 принимается.

При $\alpha = 0{,}05$ имеем: $u_{\text{кр}} = u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$.

Обозначим через u_e значение, которое статистика U приняла в результате $n = 10^4$ указанных контрольных измерений, тогда:

$$|u_e| = \left|\frac{\hat{p}_e - p_0}{\sqrt{p_0 q_0/n}}\right| = \left|\frac{0{,}006-0{,}005}{\sqrt{0{,}005(1-0{,}005)/10000}}\right| = 1{,}42 < u_{\text{кр}} = 1{,}96.$$

Статистические данные не противоречат проверяемой гипотезе о параметре p биномиального распределения, а именно, H_0: $p = p_{\text{o}} = 0{,}005$. Таким образом, эта гипотеза принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Практический вывод – результат проверки не дает оснований считать, что *вероятность* ложной тревоги отличается от значения $p = 0{,}005$, характерного для функционирования системы в штатном режиме.

б) критерий, основанный на доверительном интервале

В п. 17 для вероятности p ложной тревоги при относительной частоте $\hat{p}_e = 0{,}006$ и объеме выборки $n = 10^4$ была найдена реализация доверительного интервала $(0{,}0045; 0{,}0075)$, соответствующего доверительной вероятности $1-\alpha = 0{,}95$.

Проверим гипотезу о параметре p биномиального распределения H_0: $p = p_o = 0{,}005$ против альтернативы H_1: $p \neq p_o$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью указанного доверительного интервала.

Поскольку $p = p_o = 0{,}005 \in (0{,}0045; 0{,}0075)$, гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Пример 3_кз_кди (левосторонний критерий)

Стандартное содержание нежелательной примеси в выпускаемом продукте равно 2%. Контроль осуществляется с помощью прибора, точность которого указана в его паспорте и характеризуется параметром $\sigma_o = 0{,}4\%$. После усовершенствования технологии тем же прибором провели $n = 16$ повторных независимых измерений содержания примеси $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ и получили $\bar{x} = 1{,}8\%$. Необходимо выяснить, объясняется ли уменьшение содержания примеси случайными факторами или физическими причинами – новой технологией. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$. *Указание*: считать, что контрольная выборка извлечена из нормального распределения.

Какой вывод об успешности новой технологии при величине $\bar{x} = 1{,}8\%$, полученной по серии контрольных измерений, можно сделать в случаях:

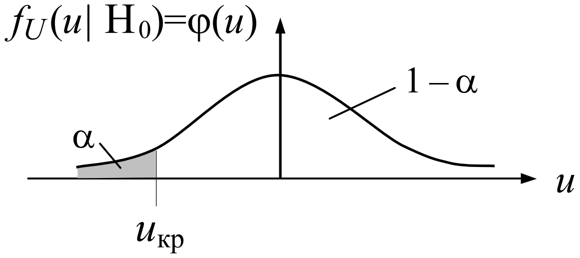
(1) при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ при том же объеме контрольной выборки $n = 16$; (2) при $\alpha = 0{,}01$ и объеме выборки $n = 25$.

Решение

Допустим, что $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ – реализация выборки $X_1, \ldots, X_{16}$ – из нормального распределения $N(m; \sigma)$, один параметр которого σ известен: $\sigma = \sigma_o$. Проверке подлежит гипотеза H_0: $m = m_0 = 2\%$ о математическом ожидании распределения, из которого (после изменения технологии) извлечена выборка, против альтернативы H_1: $m < m_0$ (левосторонняя альтернатива) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

(*а*) *односторонний (левосторонний) критерий значимости*

При указанных предположениях о распределении, из которого извлечена выборка, и справедливости гипотезы H_0 статистика критерия $\dfrac{\bar{X} - m_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = U$ подчиняется стандартному нормальному распределению: $U \sim N(0; 1)$.



Правило принятия решения, основанное на данной статистике критерия U:

при ($U \le u_{кр}$) гипотеза H_0 отвергается,

при ($U > u_{кр}$) гипотеза H_0 принимается.

Критическое число $u_{кр}$ является квантилью порядка α стандартного нормального распределения:

$$u_{кр} = u_{\alpha} = -u_{1-\alpha} = u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}65.$$

Вычислим значение u_e статистики критерия и сравним его с критическим числом $u_{кр}$:

$$u_e = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{0,018 - 0,020}{0,004}\sqrt{16} = -\frac{0,002}{0,004} \cdot 4 = -2 < -1{,}65 = u_{кр}.$$

Таким образом, гипотеза H_0: $m = m_0 = 2\%$ противоречит результату контрольных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$, поэтому ее следует отвергнуть и принять альтернативную гипотезу H_1: $m < m_0$.

Практический вывод: можно считать, что изменение технологии привело к цели – уменьшению содержания нежелательной примеси в выпускаемом продукте. Заметим, что этот вывод справедлив при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Ответим теперь на поставленные в задаче дополнительные вопросы (1) и (2).

(1) При $\alpha = 0{,}01$ и объеме выборки $n = 16$ имеем:

$$u_{\text{кр}} = u_{\alpha} = -u_{1-\alpha} = u_{0,01} = -u_{0,99} = -2{,}33 < -2 = u_e \ .$$

В соответствие с указанным правилом принятия решения обнаруживаем, что нулевая гипотеза H_0: $m = m_0 = 2\%$ согласуется со статистическими данными при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Практический вывод в этом случае: контрольные измерения не дают оснований считать, что содержание примеси в выпускаемом продукте уменьшилось.

(2) Заметим, что величина $|u_e|$ растет с увеличением объема выборки n: $\quad u_e = \dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n} = \dfrac{0{,}018 - 0{,}020}{0{,}004}\sqrt{n} = -\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Отклонению нулевой гипотезы H_0 соответствует выполнение условия $\quad u_e \le u_{\text{кр}}$: $-\dfrac{\sqrt{n}}{2} \le -2{,}33$, откуда $n \ge 22$.

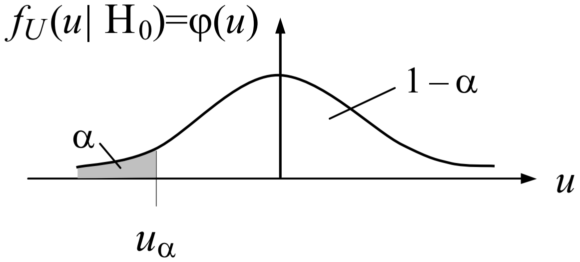
Если бы результат контрольных измерений $\bar{x} = 1{,}8\%$ был получен при $n \ge 22$, то гипотезу H_0: $m = m_0 = 2\%$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ следовало бы отвергнуть, а альтернативную гипотезу H_1: $m < m_0$ – принять. Таким образом, результат $\bar{x} = 1{,}8\%$ при $n = 25$ свидетельствует против гипотезы H_0.

Обычно, для обоснованного отклонения нулевой гипотезы H_0 выбирают $\alpha = 0{,}01$. Если же речь идет о принятии H_0, то уровень значимости α выбирают равным 0,05.

(*б*) *критерий, основанный на одностороннем (левостороннем) доверительном интервале*

Как и в предыдущем пункте (*а*), допустим, что $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ – реализация выборки $X_1, \ldots, X_{16}$ – из нормального распределения $N(m; \sigma)$, один параметр которого σ известен $\sigma = \sigma_o$, таким образом, полагаем $X_i \sim N(m; \sigma_o)$ $i = 1, \ldots, 16$. При указанных предположениях и справедливости гипотезы H_0 статистика $U = \dfrac{\bar{X} - m}{\sigma_o / \sqrt{n}}$ подчиняется стандартному нормальному распределению $N(0; 1)$.

Построим левосторонний доверительный интервал для математического ожидания *m*. Зададим величину доверительной вероятности $1 - \alpha$ и запишем равенство $P\left(\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma_o / \sqrt{n}} > u\right) = 1 - \alpha$, откуда $u = u_\alpha$ – квантиль порядка α (см. рисунок ниже, где $\varphi(u)$ – плотность вероятности стандартного нормального распределения).



$$P\left(-\infty < m < \bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.–$$

Правую границу этого интервала $\bar{X} - u_\alpha \dfrac{\sigma_o}{\sqrt{n}}$ – функцию выборки обозначим через $\tilde{m}_{гр}(X_1, \ldots, X_n)$.

Правило принятия решения при проверке гипотезы H_0: $m = m_0$:

если $m_0 \in (-\infty; \tilde{m}_{гр})$, то гипотезу H_0 принимают;

если $m_0 \notin (-\infty;\ \tilde{m}_{гр})$ – гипотезу H_0 отвергают (соответственно, принимают альтернативную гипотезу H_1) на заданном уровне значимости α.

По реализации выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ построим реализацию левостороннего доверительного интервала.

При $\alpha = 0{,}05$ $u_\alpha = -u_{1-\alpha} = u_{0{,}05} = -u_{0{,}95} = -1{,}65$.

Вычислим значение правой границы интервала $\tilde{m}_{гр\,e}$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{16})$: $\tilde{m}_{гр\,e} = \bar{x} - u_{0{,}05}\dfrac{\sigma_o}{\sqrt{n}} = 0{,}018 + 1{,}65\dfrac{0{,}004}{4} = 0{,}01965$

Видим, что $m_0 = 0{,}02 \notin (-\infty; 0{,}01965)$, поэтому гипотезу H_0 следует отвергнуть при $\alpha = 0{,}05$.

При $\alpha = 0{,}01$ и объеме выборки $n = 16$ имеем: $u_\alpha = -u_{1-\alpha} = u_{0{,}01} =$

$$= -u_{0{,}99} = -2{,}33;\ \text{тогда}\ \tilde{m}_{гр\,e} = 0{,}018 + 2{,}33\frac{0{,}004}{4} = 0{,}02033.$$

Гипотеза H_0 не противоречит статистическим данным, полученным в результате контрольных измерений, поскольку $m_0 = 0{,}02 \in (-\infty; 0{,}02033)$. Таким образом, гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Пример 4_кз (правосторонний критерий)

Средний срок службы до первого отказа для приборов, выпускаемых по стандартной технологии, равен 1000 час. Для повышения надежности выпускаемой продукции технологию усовершенствовали. С целью контроля эффективности новой технологии отобрали и испытали опытную партию из $n = 10$ приборов. По этой выборке вычислили выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение (исправленное) срока службы, соответственно, $\bar{x} = 1100$ час. и $s^* = 100$ час. Можно ли считать, что новая технология увеличила срок службы приборов? Принять уровень значимости равным $\alpha = 0{,}01$. *Указание*: считать, что контрольная выборка извлечена из нормального распределения.

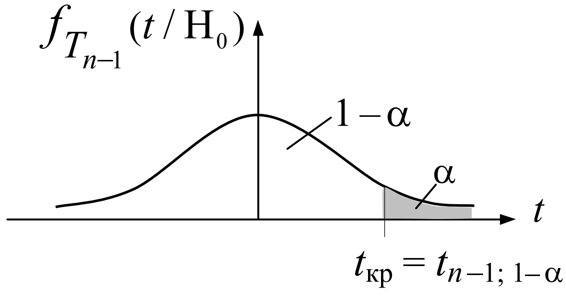
Решение

Положим, что контрольная выборка $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{10}$ – реализация выборки $X_1, \ldots, X_{10}$ из нормального распределения $X \sim N(m;\sigma)$ с неизвестными параметрами m и σ.

Проверим гипотезу H_0: $m = m_0 = 1000$ о математическом ожидании распределения, из которого (после изменения технологии) извлечена выборка, против альтернативы H_1: $m > m_0$ (правосторонняя альтернатива) при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$. Согласно лемме Фишера (п. 13) $U = \dfrac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0;\,1)$ и $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}$ – независимые статистики.

В качестве статистики критерия проверки гипотезы H_0 возьмем отношение $T_{n-1} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = \dfrac{\bar{X} - m_0}{\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}}$, подчиняющееся распределению Стьюдента при справедливости H_0.

Сформулируем правило принятия решения, основанное на распределении статистики критерия T_{n-1} при справедливости H_0:



при ($T_{n-1} \geq t_{кр}$) гипотеза H_0 отвергается,

при ($T_{n-1} < t_{кр}$) гипотеза H_0 принимается.

Критическое число $t_{кр}$ – это квантиль порядка $1-\alpha$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы: $t_{кр}=t_{n-1;\,1-\alpha}=t_{9;\,0,99}=2,82$ при $\alpha=0,01$. Вычислим значение статистики критерия t_e, отвечающее контрольной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ и сравним с значением $t_{кр}$:

$$t_e=\frac{\overline{x}-m_0}{s^*}\sqrt{n}=\frac{1100-1000}{100}\sqrt{10}=3,16>2,82=t_{кр}$$

Таким образом, гипотеза H_0 не согласуется с экспериментальными данными (значение t_e попадает в критическую область), поэтому гипотезу H_0 следует отвергнуть на уровне значимости $\alpha=0,01$ и принять альтернативную гипотезу H_1: $m>m_0=1000$ (правостороннюю).

Практический вывод, который можно сделать в результате исследования опытной партии – применение новой технологии привело к увеличению срока службы выпускаемых приборов.

Пример 5_кз_кди (двусторонний критерий)

По результатам предварительных исследований установлено, что разброс значений контролируемого параметра изделий, произведенных на автоматической линии, характеризуется стандартным отклонением, равным $\sigma_0=20$ (условных единиц). Для проверки стабильности работы линии извлекли контрольную выборку из $n=25$ изделий и получили выборочное стандартное отклонение (исправленное) $s^*=24,3$ единицы. Считая, что контрольная выборка извлечена из нормального распределения, проверить обоснованность предположения о стабильности работы линии. Уровень значимости принять равным $\alpha=0,05$.

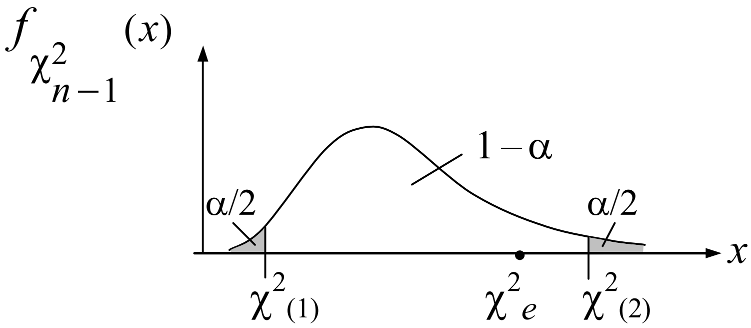
Решение

По условию выборочное стандартное отклонение $s^*=24,3$ вычислено по реализации выборки из нормального распределения $N(m;\sigma)$.

Необходимо проверить гипотезу H_0: $\sigma = \sigma_0 = 20$ о стандартном отклонении распределения, из которого извлечена выборка, против альтернативы H_1: $\sigma \neq \sigma_0$ (двусторонний критерий) на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

(*а*) *двусторонний критерий значимости*

При справедливости гипотезы H_0 имеем: $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma_0^{\,2}} = \chi^2_{n-1}$ (п. 13 – *лемма Фишера*).



Находим критические числа $\chi^2_{(1)} = \chi^2_{n-1\,;\,\alpha/2} = \chi^2_{24\,;\,0{,}025} = 12{,}40$

и $\chi^2_{(2)} = \chi^2_{n-1\,;\,1-\alpha/2} = \chi^2_{24\,;\,0{,}975} = 39{,}36$

Значение статистики критерия (вычисленное по контрольной выборке) $\chi^2_e = \dfrac{(n-1)\,s^{*2}}{\sigma_0^{\,2}} = \dfrac{24\cdot(24{,}3)^2}{(20)^2} = 35{,}43$ принадлежит области принятия гипотезы. Вывод: гипотеза H_0 не противоречит результату контрольных измерений и может быть принята на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Таким образом, предположение о стабильности работы линии можно считать обоснованным.

(*б*) *критерий, основанный на доверительном интервале*

Доверительный интервал для квадрата стандартного отклонения σ^2 нормального распределения, отвечающий доверительной вероятности $1-\alpha$, имеет вид (п. 15):

$$\left({(n-1)\,S^{*2}}\big/{\chi^2_{(2)}};\ {(n-1)\,S^{*2}}\big/{\chi^2_{(1)}} \right) = (\vartheta_1;\vartheta_2).$$

Для проверки гипотезы H_0 необходимо установить, накрывает ли реализация этого интервала (ϑ_{1e}; ϑ_{2e}) значение $\sigma_0^2 = 400$.

Вычислим границы этой реализации

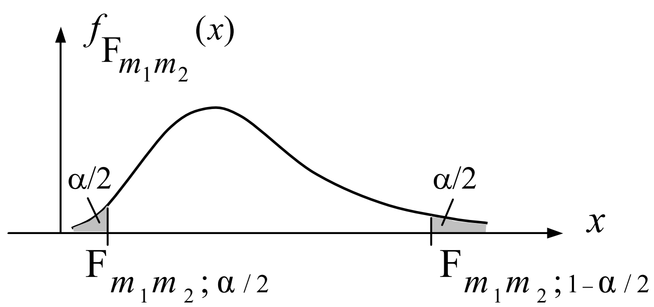
$$\vartheta_{1e} = \vartheta_1(x_1, x_2, \ldots, x_{20}) = {(n-1)\,s^{*2}}\big/{\chi^2_{(2)}} = \frac{24\cdot 590,49}{39,36} \cong 360;$$

$$\vartheta_{2e} = \vartheta_2(x_1, x_2, \ldots, x_{20}) = {(n-1)\,s^{*2}}\big/{\chi^2_{(1)}} = \frac{24\cdot 590,49}{12,40} \cong 1143.$$

Поскольку $\sigma_0^2 = 400 \in (360; 1143)$, гипотезу H_0 принимаем на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

23. Распределение Фишера, свойство квантилей

Пусть случайные величины $\chi^2_{m_1}$ и $\chi^2_{m_2}$ – независимы. Случайная величина $F_{m_1 m_2} = \dfrac{\chi^2_{m_1}\big/m_1}{\chi^2_{m_2}\big/m_2}$ – отношение Фишера (F– отношение) подчиняется распределению Фишера с m_1 и m_2 степенями свободы; плотность вероятности $f_{F_{m_1 m_2}}(x)$ – известна (табулирована).



Докажем следующее свойство квантилей распределения Фишера:

$$F_{m_2 m_1;\ \alpha/2} = \frac{1}{F_{m_1 m_2;\ 1-\alpha/2}}$$

Учтем очевидное соотношение $\dfrac{1}{F_{m_1 m_2}} = F_{m_2 m_1}$ и определение квантили соответствующего порядка и запишем:

$$P(F_{m_1 m_2} > F_{m_1 m_2;1-\alpha/2}) = P\left(\frac{1}{F_{m_1 m_2}} < \frac{1}{F_{m_1 m_2;1-\alpha/2}}\right) =$$

$$= P\left(F_{m_2 m_1} < \frac{1}{F_{m_1 m_2;1-\alpha/2}}\right) = \alpha/2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{F_{m_1 m_2;1-\alpha/2}} = F_{m_2 m_1;\alpha/2}\,.$$

В таблицах квантилей распределения Фишера приведены только "правые" квантили, так как "левые" могут быть легко получены из указанного соотношения. Заметим также, что правые квантили обладают свойством: $F_{m_1 m_2;1-\alpha/2} > 1$.

24. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений (критерий Фишера). Пример 6_кз

Имеем две независимые выборки $X_1, \ldots, X_{n_1}$ и $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ объема n_1 и n_2 из нормальных распределений $X \sim N(m_X;\sigma_X)$, $Y \sim N(m_Y;\sigma_Y)$ (элементы внутри каждой из выборок– взаимно независимы по определению случайной выборки).

Проверяется гипотеза $H_0: \sigma_X = \sigma_Y$ против альтернативной гипотезы H_1: $\sigma_X \neq \sigma_Y$ при уровне значимости α.

<u>*Статистика критерия*</u>:

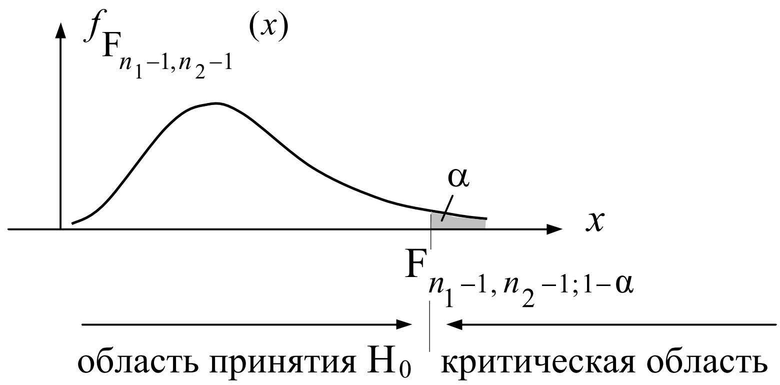
Исправленные выборочные дисперсии для указанных независимых выборок S_X^{*2} и S_Y^{*2} – независимы, кроме того, известно: $(n_1-1)\,S_X^{*2}/\sigma^2_X = \chi^2_{n_1-1}$, $(n_2-1)\,S_Y^{*2}/\sigma^2_Y = \chi^2_{n_2-1}$ (п. 13), поэтому статистика $\dfrac{S_X^{*2}/\sigma^2_X}{S_Y^{*2}/\sigma^2_Y} = \dfrac{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}{\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)}$ подчиняется распределению Фишера с n_1-1 и n_2-1 степенями свободы.

При справедливости гипотезы H_0 имеем $\sigma_X = \sigma_Y$, откуда отношение $\dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} = F_{n_1-1,\,n_2-1}$ – статистика критерия $\dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}$ подчиняется распределению Фишера.

Примем соглашение: обозначать бóльшую из выборочных дисперсий через S_X^{*2}, меньшую – через S_Y^{*2}, тогда $\dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} > 1$.

Таким образом, приходим к правостороннему критерию: проверке подлежит гипотеза H_0: $\sigma_X = \sigma_Y$ против альтернативы H_1: $\sigma_X > \sigma_Y$.

Решение об отклонении или принятии гипотезы H_0 принимают, сопоставляя значение статистики критерия $\dfrac{s_X^{*2}}{s_Y^{*2}} = F_e$, полученное в эксперименте, с критическим числом – квантилью порядка $1-\alpha$ распределения Фишера $F_{n_1-1,\,n_2-1;\,1-\alpha}$.



Пример 6_кз *(правосторонний критерий)*

Выяснить, значимо ли варьирует от одного дня к другому величина контролируемого параметра – изменчивости температуры в термостатируемом помещении, если в первый день по выборке объема n_1=16 получена выборочная дисперсия s_1^{*2} = 1,23, а во второй – по выборке объема n_2= 20 получена s_2^{*2} = 0,97, соответственно.

Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. *Указание*: принять допущение, что выборки извлечены из нормальных распределений.

Решение

Следуя описанной выше процедуре, проверим гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных распределений, из которых извлечены выборки:

$$H_0\colon \sigma_X = \sigma_Y \text{ против альтернативы } H_1\colon \sigma_X > \sigma_Y .$$

Найдем критическое число $F_{n_1-1,\, n_2-1;\, 1-\alpha} = F_{15;19;0,95} = 2{,}23$

(по таблице квантилей распределения Фишера) и сравним его с

значением статистики критерия $F_e = \dfrac{s_X^{*2}}{s_Y^{*2}} = \dfrac{1{,}23}{0{,}97} = 1{,}268 < 2{,}23$

Вывод: на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотеза H_0: $\sigma_X = \sigma_Y$ и данные опыта не противоречат друг другу. Это означает, что отличие значений контролируемого параметра – изменчивости температуры в термостатируемом помещении, измеренных в первый и второй день, может быть объяснено случайными факторами (незначимо на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$).

25. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных распределений (критерий Стьюдента)

Пример 7_кз

Пусть $X_1, \ldots, X_{n_1}$ и $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ – две независимые выборки объема n_1 и n_2, соответственно, из нормальных распределений $N(m_X;\sigma_X)$ и $N(m_Y;\sigma_Y)$. Элементы внутри каждой из выборок – взаимно независимы по определению случайной выборки.

Проверяется гипотеза $H_0: m_X = m_Y$ против альтернативной гипотезы H_1: $m_X \neq m_Y$ при уровне значимости α.

Статистика критерия:

а) Если стандартные отклонения σ_X и σ_Y известны (вообще говоря, $\sigma_X \neq \sigma_Y$), то при сделанных предположениях имеем:

$$\bar{X} \sim N(m_X; \sigma_X / \sqrt{n_1}), \quad \bar{Y} \sim N(m_Y; \sigma_Y / \sqrt{n_2}).$$

Статистики $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ независимы, как функции независимых выборок, а их разность $\bar{X} - \bar{Y}$ (композиция нормальных распределений) распределена по нормальному закону с параметрами

$$\mathrm{M}(\bar{X} - \bar{Y}) = m_X - m_Y \quad \text{и} \quad \mathrm{D}(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma_X^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_Y^{\,2}}{n_2}.$$

При справедливости гипотезы H_0: $m_X - m_Y = 0$ имеем:

$$U = (\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{\frac{\sigma_X^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_Y^{\,2}}{n_2}} \sim N(0;1).$$

Правило принятия решения относительно гипотезы H_0 имеет вид:

при $|U| < u_{\text{кр}} = u_{1-\alpha/2}$ гипотеза H_0 принимается;

при $|U| \geq u_{\text{кр}} = u_{1-\alpha/2}$ гипотеза H_0 отклоняется.

б) Рассмотрим теперь задачу проверки гипотезы H_0 при неизвестных σ_X и σ_Y, причем $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ (допущение о равенстве дисперсий может быть проверено с помощью критерия Фишера).

Имеем: $(n_1 - 1)\, S_X^{*2} / \sigma^2 = \chi^2_{n_1 - 1}$, $(n_2 - 1)\, S_Y^{*2} / \sigma^2 = \chi^2_{n_2 - 1}$ (лемма Фишера п. 13), при этом $\chi^2_{n_1 - 1}$ и $\chi^2_{n_2 - 1}$ независимы, так как выборочные дисперсии S_X^{*2} и S_Y^{*2} – функции независимых выборок.

Отсюда, по определению случайной величины χ^2_n, получаем:

$$\chi^2_{n_1 - 1} + \chi^2_{n_2 - 1} = \chi^2_{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)\, S_X^{*2} + (n_2 - 1)\, S_Y^{*2}}{\sigma^2}.$$

Далее, при справедливости гипотезы H_0: $m_X = m_Y$, имеем:

$U \sim N(0;1)$ – стандартное нормальное распределение.

При $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ и справедливости гипотезы H_0 : $m_X = m_Y$ статистики $U = (\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}$ и $\chi^2_{n_1+n_2-2}$ – независимы, поэтому $\dfrac{U}{\sqrt{\chi^2_{n_1+n_2-2} / (n_1+n_2-2)}} = T_{n_1+n_2-2}$ – отношение Стьюдента.

Таким образом, получаем выражение для статистики критерия:

$$T_{n_1+n_2-2} = (\bar{X} - \bar{Y}) \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{(n_1 - 1) S_X^{*2} + (n_2 - 1) S_Y^{*2}}} .$$

Решения о принятии или отклонении гипотезы H_0 принимают на основе указанной статистики критерия (критерий Стьюдента):

при $|T_{n_1+n_2-2}| < t_{кр} = t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2}$ гипотеза H_0 принимается;

при $|T_{n_1+n_2-2}| \geq t_{кр}$ гипотеза H_0 отвергается.

При $n_1 = n_2 = n$ выражение для статистики критерия имеет вид:

$$T_{2(n-1)} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_X^{*2} + S_Y^{*2}}} \sqrt{n} .$$

Замечание

В случае, когда дисперсии неизвестны и их равенство не предполагается, используют статистику критерия, аналогичную рассмотренной в настоящем параграфе для случая, когда дисперсии считались известными, но не равными.

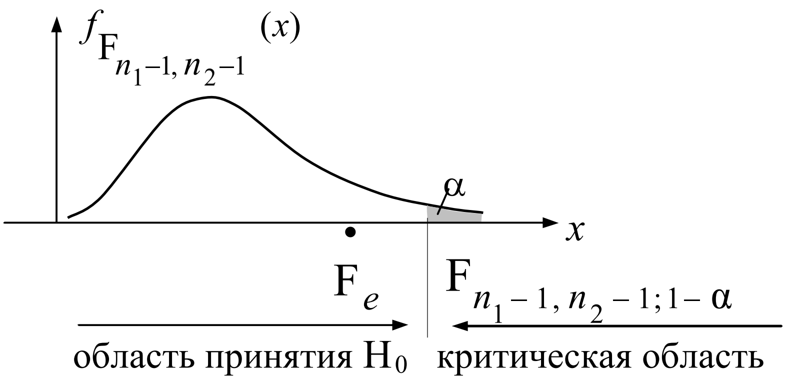
Пример 7_кз (двусторонний критерий)

Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий двух нормальных распределений $N(m_1; \sigma_1)$ и $N(m_2; \sigma_2)$ на основе двух независимых выборок одинакового объема $n_1 = n_2 = n = 15$ из этих распределений. При обработке реализации первой выборки получено: $\bar{x}_1 = 18{,}80$, $s_1^{*2} = 24{,}03$ (выборочное среднее и исправленная выборочная дисперсия); второй: $\overline{x}_2 = 16{,}13$; $s_2^{*2} = 15{,}43$. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$.

Указание: Предварительно с помощью критерия Фишера (см. п.24) проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ справедливость гипотезы о равенстве стандартных отклонений $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ распределений, из которых извлечены выборки.

<u>*Решение*</u>

1) Применим критерий Фишера для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ против альтернативы H_1: $\sigma_1 > \sigma_2$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Найдем критическое число $F_{n_1-1,\, n_2-1;\, 1-\alpha} = F_{14;14;0,95} = 2{,}40$ (по таблице квантилей распределения Фишера) и сравним его с значением статистики критерия $F_e = \dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} = \dfrac{24{,}03}{15{,}43} = 1{,}56$.



Значение статистики критерия F_e принадлежит области принятия гипотезы, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотеза $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ принимается, поэтому будем считать, что стандартные отклонения распределений, из которых извлечены выборки, равны.

2) Полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (σ – неизвестно), с помощью критерия Стьюдента проверим теперь гипотезу о равенстве математических ожиданий указанных распределений $H_0 : m_1 = m_2$ против

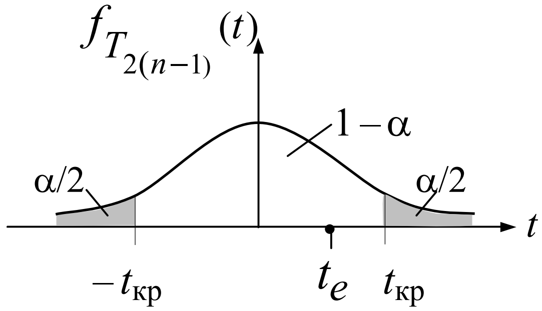
альтернативной гипотезы $H_1: m_1 \neq m_2$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вычислим значение статистики критерия

$$T_{2(n-1)} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_X^{*2} + S_Y^{*2}}}\sqrt{n}$$, отвечающее данным выборкам:

$$t_e = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_1^{*2} + s_2^{*2}}}\sqrt{n} = \frac{18{,}80 - 16{,}13}{\sqrt{24{,}03 + 15{,}43}}\sqrt{15} = 1{,}646.$$

По таблицам квантилей распределения Стьюдента найдем критическое число $t_{кр} = t_{2(n-1);\,1-\alpha/2} = t_{28;\,0{,}975} = 2{,}048$.



Таким образом, значение t_e статистики критерия принадлежит области принятия гипотезы; гипотеза $H_0: m_1 = m_2$ о равенстве математических ожиданий распределений не противоречит опытным данным и может быть принята на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

26. Теорема Пирсона, проверка гипотезы о вероятностях в обобщенной схеме Бернулли

1. Рассмотрим последовательность n независимых испытаний с числом k ($k \geq 2$) исходов в каждом испытании (обобщенная схема Бернулли).

<u>*Теорема К. Пирсона.*</u> Пусть n – число независимых испытаний, результатом каждого испытания является один из k исходов $A_1, \ldots, A_k$ ($k \geq 2$). Вероятности исходов $A_1, \ldots, A_k$ равны, соответственно: $p_1, \ldots, p_k$ и не зависят от номера испытания; все $p_i \neq 0$ и $p_1 + \ldots + p_k = 1$.

Пусть в результате проведения n испытаний исход A_1 наблюдался N_1 раз; … $A_i - N_i$ раз; … $A_k - N_k$ раз, при этом $N_1 + \ldots + N_k = n$.

Заметим, что $N_i\ (i = 1, \ldots, k)$ – случайные величины, подчиняющиеся биномиальному распределению с параметрами n и p_i, при этом $\mathrm{M}(N_i) = np_i$, $\mathrm{D}(N_i) = np_i(1 - p_i)$.

Примем без доказательства утверждение (*теорема Пирсона*): случайная величина (хи–квадрат) $\mathbb{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$ при $n \to +\infty$ распределена как χ^2_{k-1} (хи-квадрат с $k-1$ степенью свободы):

$$\forall x \ \ \mathrm{P}(\mathbb{X}^2 < x) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathrm{P}(\chi^2_{k-1} < x).$$

Величины N_i называют *наблюдаемыми* частотами, а np_i – *ожидаемыми* частотами.

2. Пусть относительно вероятностей $p_1, \ldots, p_k$ выдвинута *простая* гипотеза о вероятностях H_0: $p_1 = p_1^0, \ldots, p_k = p_k^0$ (альтернативная гипотеза H_1: $\exists i\ (i = 1, \ldots, k)\ p_i \neq p_i^0$ и задан уровень значимости α.

В качестве статистики критерия для проверки гипотезы H_0 возьмем $\mathbb{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = n \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{N_i}{n} - p_i^0)^2}{p_i^0} \right)$.

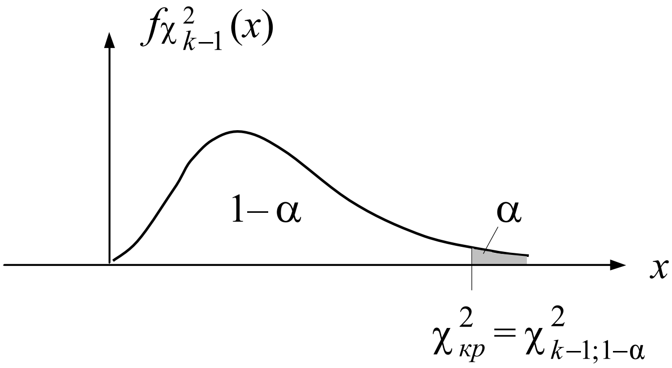
Если гипотеза H_0 верна, то согласно теореме Пирсона имеем:

$$\mathbb{X}^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \chi^2_{k-1}.$$

Если H_0 – неверна, то хотя бы одна из относительных частот $\frac{N_i}{n}$ сходится по вероятности к величине p_i, отличной от p_i^0:

$$\frac{N_i}{n} \underset{n \to +\infty}{\overset{P}{\to}} p_i \neq p_i^0, \text{ поэтому } \mathbb{X}^2 = n \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{N_i}{n} - p_i^0)^2}{p_i^0} \right) \underset{n \to +\infty}{\to} \infty.$$

Отсюда следует, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута, если полученное в опыте значение $\mathbb{X}^2$ велико:



Таким образом, приходим к правостороннему критерию:

при $\mathbb{X}^2 \geq \chi^2_{кр}$ – гипотезу H_0 отклоняют;

при $\mathbb{X}^2 < \chi^2_{кр}$ – H_0 принимают.

Пусть в данном эксперименте частоты N_i (случайные величины) приняли конкретные значения n_i, соответственно. Вычисляют $\chi^2_e = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$, и решение об отклонении или принятии гипотезы H_0 принимают, сопоставляя значение χ^2_e с критическим числом $\chi^2_{кр} = \chi^2_{k-1;1-\alpha}$.

Не следует считать, что при справедливости гипотезы H_0 величина $\mathbb{X}^2$ должна быть близкой к нулю, поскольку результаты наблюдений (измерений) – это реализация *случайной* выборки.

Также необходимо учесть, что применение непрерывного распределения χ^2_{k-1} в качестве аппроксимации распределения дискретной случайной величины $\mathbb{X}^2$ порождает ряд ограничений. В частности требуется, чтобы n было достаточно велико ($n \geq 50$), "ожидаемые" частоты $np_i{}^0$, а также значения n_i не должны быть малыми. Более детально практические рекомендации будут обсуждены далее.

27. Проверка гипотезы о виде распределения – метод $\chi 2$ для простой гипотезы

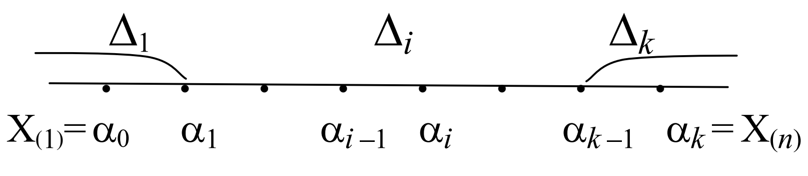
Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из распределения $F_X(x)$ непрерывной случайной величины X, объем выборки n – достаточно велик, элементы выборки независимы и $F_{X_i}(x) = F_X(x)$, для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть относительно распределения $F_X(x)$ проверке подлежит гипотеза H_0: $F_X(x) = F_0(x)$, альтернативная гипотеза H_1: $F_X(x) \neq F_0(x)$ и задан уровень значимости α.

Статистика критерия

По вариационному ряду $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ построим k промежутков аналогично тому, как это делалось при построении гистограммы, с тем отличием, что в качестве крайних промежутков возьмем полубесконечные: $\Delta_1 = (-\infty; \alpha_1], \dots, \Delta_i = (\alpha_{i-1}; \alpha_i], \dots, \Delta_k = (\alpha_{k-1}; +\infty)$.

Число интервалов разбиения k обычно берут таким же, как при построении гистограммы, а именно, применяют либо формулу Старджесса: $k = 1 + 3{,}32 \lg n$, либо формулу: $k = 1{,}72 n^{1/3}$, а сами промежутки полагают равными (за исключением крайних – полубесконечных):



Наблюдаемые частоты N_i (случайные величины) – число элементов выборки, попавших в i-й промежуток разбиения $\Delta_i = (\alpha_{i-1}; \alpha_i]$.

Обозначим через p_i вероятность $P(X \in \Delta_i)$ для случайной величины X принять значение в промежутке Δ_i.

При справедливости гипотезы H_0 имеем:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\in\Delta_1\,|\mathrm{H}_0) = \mathrm{F}_0(\alpha_1) = p_1^0;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\in\Delta_i\,|\mathrm{H}_0) = \mathrm{F}_0(\alpha_i) - \mathrm{F}_0(\alpha_{i-1}) = p_i^0 \;\; (i=2,\ldots,k-1);$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\in\Delta_k\,|\mathrm{H}_0) = 1 - \mathrm{F}_0(\alpha_{k-1}) = p_k^0.$$

Проверяемая гипотеза о распределении H_0: $\mathrm{F}_\mathrm{X}(x) = \mathrm{F}_0(x)$ равносильна гипотезе о том, что упомянутые вероятности p_i приняли определенные значения p_i^0. Таким образом, приходим к задаче о проверке *простой гипотезы о вероятностях в обобщенной схеме Бернулли*, рассмотренной в п. 26: H_0: $p_i = p_i^0$ $(i = 1,\ldots,k)$.

Правило принятия решения об отклонении (принятии) проверяемой гипотезы H_0 о виде распределения строится на основе приближения распределения статистики критерия Пирсона $\mathbb{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$ распределением χ^2_{k-1} при больших объемах выборки ($n \geq 50$).

Практически по реализации выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получают реализацию вариационного ряда и отрезок $[x_{(1)}; x_{(n)}]$, где $x_{(1)} = min\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_{(0)}$, $x_{(n)} = max\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_{(k)}$, содержащий все элементы выборки, разбивают на k равных интервалов. Подсчитывают $\chi^2_e = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{ie}^0)^2}{np_{ie}^0}$, где n_i – *наблюдаемые* частоты (значения случайных величин N_i) – число элементов реализации выборки, фактически попавших в соответствующий интервал Δ_i, np_{ie}^0 – вычисленные *ожидаемые* частоты.

Решение об отклонении или принятии гипотезы H_0 принимают, сопоставляя значение χ^2_e, соответствующее данной реализации выборки, с критическим числом $\chi^2_{кр} = \chi^2_{k-1;\,1-\alpha}$.

28. Проверка гипотезы о виде распределения – метод $\chi 2$ для сложной гипотезы

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из распределения непрерывной случайной величины X, функция распределения которой зависит от r неизвестных параметров $F_X(x, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_r)$. В этом случае гипотеза о виде распределения H_0: $F_X(x, \theta_1, \dots \theta_r) = F_0(x, \theta_1, \dots \theta_r)$ – сложная.

В функции распределения F_0 неизвестные параметры заменим оценками максимального правдоподобия $\hat{\theta}_{1МП}, \dots, \hat{\theta}_{rМП}$ и, действуя аналогично процедуре проверки простой гипотезы, рассмотренной в п. 27, вычислим вероятности $\hat{p}_i^0 = P(X \in \Delta_i \mid H_0)$:

$$\hat{p}_i^0 = F_0(\alpha_i, \hat{\theta}_{1МП}, \dots \hat{\theta}_{rМП}) - F_0(\alpha_{i-1}, \hat{\theta}_{1МП}, \dots \hat{\theta}_{rМП}), \ (i = 2, \dots, k-1).$$

для $\Delta_1 : \hat{p}_1^0 = F_0(\alpha_1; \hat{\theta}_{1МП}, \dots \hat{\theta}_{rМП})$,

для $\Delta_k : \hat{p}_k^0 = 1 - F_0(\alpha_{k-1}; \hat{\theta}_{1МП}, \dots \hat{\theta}_{rМП})$.

Гипотезы H_0 и H_1 при этом формулируются следующим образом:

$$H_0\text{: } p_i = \hat{p}_i^0 \ (i = 1, \dots, k); \quad H_1\text{: } \exists i \ (i = 1, \dots, k) \ p_i \neq \hat{p}_i^0.$$

Доказано (теорема Фишера) что распределение статистики $\mathbb{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0}$ при справедливости гипотезы H_0 при $n \to +\infty$ стремится к распределению случайной величины χ^2_{k-r-1} (с $k-r-1$ степенью свободы): $\forall x \ P\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0} < x\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(\chi^2_{k-r-1} < x)$,

где r – число параметров, оцениваемых по выборке.

В остальном проверка гипотезы H_0 совпадает с рассмотренной в п. 27 процедурой проверки для случая простой гипотезы:

по реализации выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычисляют значение

$$\chi_e^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{p}_{ie}^0)^2}{n\hat{p}_{ie}^0},$$

где n_i – значения *наблюдаемых* частот, фактически полученные в эксперименте; $n\hat{p}_{ie}^0$ – вычисленные *ожидаемые* частоты. Сопоставляя значение χ_e^2 с $\chi_{кр}^2 = \chi_{k-r-1;1-\alpha}^2$, принимают решения: на уровне значимости α гипотезу H_0 отвергнуть, если $\chi_e^2 \geq \chi_{кр}^2$ или гипотезу H_0 принять, если $\chi_e^2 < \chi_{кр}^2$.

Замечания

Применимость аппроксимации непрерывным распределением χ_{k-1}^2 (в случае простой гипотезы) и χ_{k-r-1}^2 (в случае сложной гипотезы) к соответствующей статистике $\mathbb{X}^2$, распределение которой дискретно, накладывает определенные ограничения на построение упомянутого разбиения. Промежутки разбиения Δ_i следует строить так, чтобы выполнялось условие: "ожидаемое" $n\hat{p}_{ie}^0 \geq 5$. При этом длины промежутков не должны быть обязательно равными. Если для какого-либо промежутка $n\hat{p}_{ie}^0 < 5$, или наблюдаемая частота $n_i < 5$, то такой промежуток объединяют с соседним.

Число промежутков k таким образом может сократиться по сравнению с первоначальным и решение об отклонении (принятии) гипотезы H_0 принимают, сравнивая χ_e^2 с $\chi_{кр}^2 = \chi_{k^*-r-1;\,1-\alpha}^2$, где k^* – окончательное число промежутков после объединения.

В то же время, условие "минимальное ожидаемое $n\hat{p}_{ie}^0 \geq 5$" может оказаться слишком жестким – допустимый минимум зависит от числа степеней свободы k.

В специальной литературе по прикладной статистике приводятся также следующие рекомендации. Общее количество промежутков разбиения k должно быть не меньше 8. В каждый интервал разбиения должно попасть не менее 7–10 элементов реализации выборки, причем желательно, чтобы в разные интервалы попало примерно одинаковое число точек.

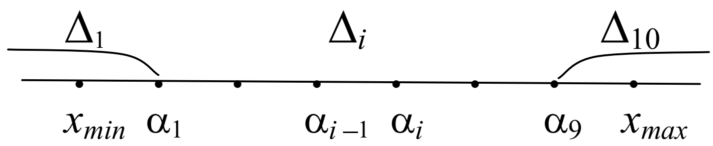
29. Пример 1_кс. Проверка гипотезы о нормальном распределении

Пусть имеется реализация выборки $x_1, x_2, \ldots, x_{500}$ из некоторого распределения, объем выборки $n = 500$. Вычислены выборочное среднее и исправленное стандартное отклонение, равные соответственно $\overline{x} = 0{,}044289$ и $s^* = 1{,}015813$, определены минимальный и максимальный элементы выборки $x_{(1)} = x_{min} = -2{,}769448$, $x_{(500)} = x_{max} = 2{,}835368$.

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ необходимо проверить гипотезу H_0 о нормальности распределения, для которого экспериментально получена данная реализация выборки.

<u>*Решение*</u>

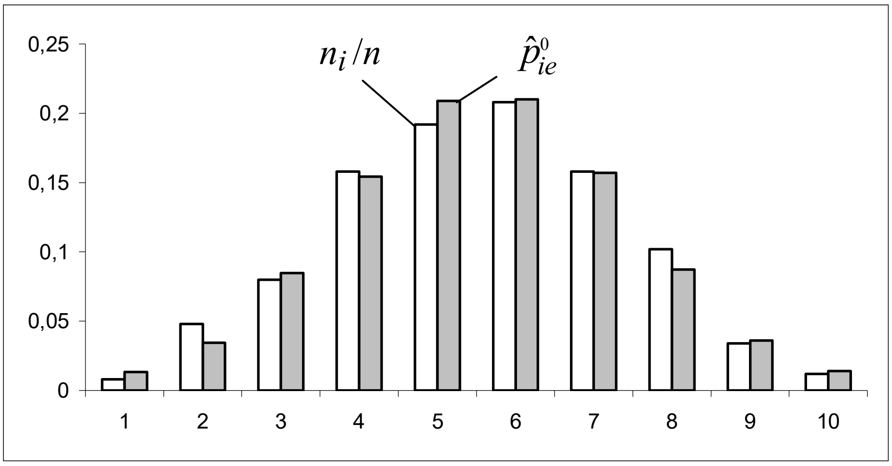
Построим группированный статистический ряд. Число интервалов разбиения примем равным $k = 10$, крайний левый и крайний правый интервалы равными, соответственно, $\Delta_1 = (-\infty; \alpha_1]$, $\Delta_{10} = (\alpha_9; +\infty)$.



Неизвестные параметры нормального распределения m и σ заменим значениями их оценок, вычисленными по данной реализации выборки, а именно $m = \hat{m}_e = \overline{x}$, $\sigma = \hat{\sigma}_e = s^*$. Для случайной величины, подчиняющейся нормальному распределению $N(\overline{x}; s^*)$, вычислим вероятности принять значение внутри соответствующих интервалов разбиения: $\hat{p}^0_{1e} = \Phi((\alpha_1 - \overline{x})/s^*)$; $\hat{p}^0_{10e} = 1 - \Phi((\alpha_9 - \overline{x})/s^*)$; $\hat{p}^0_{ie} = \Phi((\alpha_i - \overline{x})/s^*) - \Phi((\alpha_{i-1} - \overline{x})/s^*)$, $i = 2, \ldots, 9$, ($\Phi(x)$ – функция Лапласа).

Группированные числовые данные и результаты расчетов приведены в таблице и представлены на графике ниже.

i	Интервал $\Delta_i=(\alpha_{i-1};\alpha_i]$		"Наблюдаемые" частоты n_i	"Ожидаемые" значения $n\hat{p}_{ie}^0$	$\dfrac{(n_i-n\hat{p}_{ie}^0)^2}{n\hat{p}_{ie}^0}$
1	$-\infty$	-2,209	4	6,635	1,047
2	-2,209	-1,648	24	17,272	2,621
3	-1,648	-1,088	40	42,341	0,129
4	-1,088	-0,527	79	77,126	0,046
5	-0,528	0,033	96	104,401	0,676
6	0,0330	0,593	104	105,029	0,010
7	0,593	1,154	79	78,526	0,002
8	1,154	1,714	51	43,631	1,245
9	1,714	2,275	17	18,013	0,057
10	2,275	$+\infty$	6	7,025	0,149
					$\chi_e^2 = 5,983$



На рисунке выше представлены экспериментальная и теоретическая гистограммы: белые прямоугольники соответствуют наблюдаемым относительным частотам n_i/n, серые – вероятностям $\hat{p}_{ie}^0$ попадания значений выборки в соответствующий интервал.

Найдем (по таблице) критическое число $\chi_{кр}^2=\chi_{k-r-1;\,1-\alpha}^2$ – квантиль порядка $1-\alpha=0,95$ распределения хи-квадрат с числом степеней свободы $k-r-1=10-2-1=7$: $\chi_{k-r-1;\,1-\alpha}^2=\chi_{7;\,0,95}^2=14,067.$

Имеем: $$\chi_e^2=\sum_{i=1}^{10}\frac{(n_i-n\hat{p}_{ie}^0)^2}{n\hat{p}_{ie}^0}=5,983<\chi_{7;\,0,95}^2=14,067.$$

Таким образом, гипотеза H_0 о нормальности распределения, из которого получена реализация выборки $x_1, x_2, \ldots, x_{500}$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ не противоречит экспериментальным данным и может быть принята.

Заметим, что по существу проверялась *гипотеза о нормальности распределения с параметрами* $m = \hat{m}_e = \overline{x}$, $\sigma = \hat{\sigma}_e = s^*$.

30. Пример 2_кс: проверка гипотезы о распределении Пуассона

Для статистического анализа процесса возникновения метеорных следов в определенной области атмосферы полное время наблюдения разбили на 2550 равных промежутков длительностью $\Delta\tau$, в каждом из которых регистрировалось число обнаруженных метеорных следов.

Результаты приведены в таблице, где наблюдаемые частоты n_i – число промежутков из 2550, в которых было зарегистрировано соответствующее число i $(i = 0,1,\ldots,13)$ метеорных следов:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	44	189	375	475	491	430	265	143	83	31	15	7	1	1

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ необходимо проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число зарегистрированных метеорных следов за временной промежуток длительностью $\Delta\tau$, подчиняется распределению Пуассона:

$$P(X = i) = p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a} \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

<u>*Решение*</u>

Поскольку значение n_i в последних двух столбцах исходной таблицы меньше 5, объединим три последних столбца, получим таблицу для расчетов:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	44	189	375	475	491	430	265	143	83	31	15	9

Используя данные *исходной* таблицы, вычислим значение $\hat{a}_e$ оценки неизвестного параметра a распределения Пуассона ($\hat{a}_e = \bar{x}$, где $\bar{x}$ –выборочное среднее):

$$\bar{x} = \frac{1}{2550}\sum_{i=1}^{13} i n_i = 10264/2550 = 4{,}025098 = \hat{a}_e .$$

Заменим в гипотетическом распределении Пуассона $p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}$ неизвестный параметр a значением его оценки $\hat{a}_e$, вычисленным по экспериментальной выборке $\hat{a}_e = 4{,}025098$.

Таким образом, проверке подлежит гипотеза H_0: $p_i = \hat{p}^0_{ie} = \frac{\hat{a}_e^i}{i!} e^{-\hat{a}_e}$ $i = 0,1,\ldots 11$ (против альтернативы H_1: $\exists i$ ($i = 1,\ldots,k$) $p_i \neq \hat{p}^0_{ie}$), на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Заметим, что проверяемая гипотеза H_0 – сложная, так как распределение содержит неизвестный параметр a, значение которого заменено значением его оценки $\hat{a}_e = \bar{x}$.

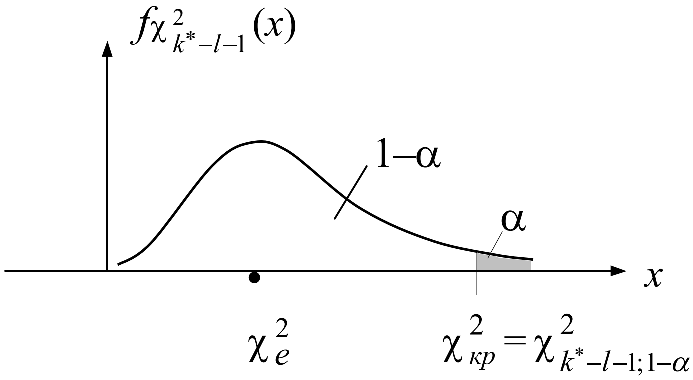
В таблице ниже приведен расчет величины $\chi^2_e = \sum_{i=1}^{11} \frac{(n_i - n\hat{p}^0_{ie})^2}{n\hat{p}^0_{ie}}$.

i	n_i	$i n_i$	$\hat{p}^0_{ie}$	$n\hat{p}^0_{ie}$	$\frac{(n_i - n\hat{p}^0_{ie})^2}{n\hat{p}^0_{ie}}$
0	44	0	0,017883	45,54727	0,052561
1	189	189	0,071959	183,3322	0,175222
2	375	750	0,144778	368,9651	0,09871
3	475	1425	0,194192	495,0402	0,811265
4	491	1964	0,195353	498,1463	0,10252
5	430	2150	0,157217	401,0176	2,094627
6	265	1590	0,105438	269,0225	0,060145
7	143	1001	0,060611	154,6917	0,883667
8	83	664	0,030487	77,83116	0,343268
9	31	279	0,013631	34,80867	0,416735
10	15	150	0,005485	14,01083	0,069836
≥11	9	99	0,002969	7,586556	0,263337
	2550	10261	1,0	2550	χ^2_e=5,371893

Заметим, что при расчете “теоретических” вероятностей в случае *целочисленной* случайной величины для крайних значений выборки следует поступать так же, как это делалось для непрерывного распределения (п. 28), когда крайние интервалы считались полубесконечными. В данном случае вероятность в строке таблицы, обозначенной ≥ 11, равна сумме вероятностей всех значений $i \geq 11$ случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона: $\hat{p}^0_{\geq 11} = 1 - \sum_{i=1}^{10} \hat{p}^0_{ie}$.

Для случая сложной гипотезы статистикой критерия служит χ^2_{k-l-1}, где l – число параметров, оцениваемых по выборке, $k -$ общее число *различных* значений случайной величины X, зарегистрированных в данном эксперименте (аналог числа интервалов разбиения, используемого в методе χ-квадрат при проверке гипотезы о непрерывном распределении). В рассматриваемом примере $k = 14$.

Учтем, что три последних столбца исходной таблицы были объединены в один, поэтому $k^* = k – 2 = 12$, а также то, что неизвестное значение параметра распределения a было заменено значением его оценки $\hat{a}_e$, поэтому число степеней свободы для χ-квадрат равно окончательно $k^* – l – 1 = 12–1–1=10$.



Квантиль порядка 0,95 распределения χ^2 с числом степеней свободы равным 10, равна: $\chi^2_{кр} = \chi^2_{10;\,0,95} = 18{,}30704$.

Поскольку $\chi_e^2 = 5{,}371893 < 18{,}30704 = \chi_{кр}^2$, – нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Таким образом, гипотеза H_0 о том, что случайная величина – число метеорных следов, возникающих в выделенной области атмосферы за промежуток времени $\Delta\tau$, подчиняется распределению Пуассона с параметром, равным $\hat{a}_e = 4{,}025098$, не противоречит результатам наблюдений и может быть принята на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

<u>*Замечание*</u>

Другой подход к проверке гипотезы H_0 о распределении Пуассона основан на известном свойстве этого распределения: $MX = DX = a$. Если $X_1, \dots, X_n$ – выборка из распределения Пуассона, то $S^{*2} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} DX = a$ и $\bar{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} MX = a$, поэтому отношение $S^{*2}/\bar{X}$ должно быть близким к 1 при достаточно больших значениях n. Доказано, что это отношение распределено асимптотически нормально: $S^{*2}/\bar{X} \sim N(1; \sqrt{2a^2/n})$ при $n \to +\infty$.

Если объем выборки n достаточно велик, то распределение центрированной и нормированной случайной величины $((S^{*2}/\bar{X}) - 1)/\sqrt{2a^2/n}$ будет близким к стандартному нормальному распределению $N(0; 1)$.

Заменим в последнем выражении неизвестный параметр a его несмещенной состоятельной асимптотически нормальной оценкой $\hat{a} = \bar{X}$, тогда статистика критерия $U = \sqrt{n}(S^{*2} - \bar{X})/(\bar{X}^2\sqrt{2})$ будет распределена приблизительно нормально при достаточно больших n. Возьмем U в качестве статистики критерия; правило принятия решения при уровне значимости α имеет вид:

при $(|U| \geq u_{1-\alpha/2})$ гипотеза H_0 отвергается,

при $(|U| < u_{1-\alpha/2})$ гипотеза H_0 принимается.

31. Проверка гипотезы о равенстве параметров p_1 и p_2 двух биномиальных распределений по выборкам большого объема из соответствующих распределений Бернулли

Пусть $X_1, \dots, X_{n_1}$ и $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ – две независимые выборки объема n_1 и n_2 из распределений Бернулли с параметрами p_1 и p_2, соответственно. Таким образом, проведено n_1 независимых испытаний с вероятностью успеха p_1 в каждом испытании и n_2 испытаний с вероятностью успеха p_2, причем величины n_1 и n_2 (объемы выборок) достаточно велики. Как обычно, будем обозначать $1 - p_1 = q_1$ и $1 - p_2 = q_2$.

Необходимо проверить гипотезу $H_0: p_1 = p_2$ против альтернативной гипотезы $H_1: p_1 \neq p_2$ при уровне значимости α.

Статистика критерия:

Обозначим через X число успехов при проведении n_1 испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p_1 в каждом испытании, через Y – число успехов при проведении n_2 испытаний с вероятностью p_2. Относительные частоты $\hat{p}_1 = \dfrac{X}{n_1}$ и $\hat{p}_2 = \dfrac{Y}{n_2}$ являются асимптотически нормальными случайными величинами (см. п. 17):

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1; \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}}\right) \text{ при } n_1 \to +\infty; \ \hat{p}_2 \sim N\left(p_2; \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}}\right) \text{ при } n_2 \to +\infty.$$

Будем считать, что нормальность распределений имеет место при данных (больших) объемах выборок n_1 и n_2. По условию $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ – независимы, поэтому их разность также подчиняется нормальному распределению (как композиция нормальных распределений):

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}\right).$$

Заменив в последнем отношении неизвестные параметры p_1 и p_2 их оценками $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, получим, что при справедливости гипотезы $H_0: p_1 = p_2$, статистика $U = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}} \sim N(0;1)$ подчиняется (приближенно) стандартному нормальному распределению. Возьмем U в качестве статистики критерия проверки гипотезы H_0: $p_1 = p_2$, тогда правило принятия решения имеет вид:

при $(|U| \geq u_{1-\alpha/2})$ гипотеза H_0 отвергается,

при $(|U| < u_{1-\alpha/2})$ гипотеза H_0 принимается.

Практически процедура проверки гипотезы сводится к сравнению значения статистики критерия, вычисленного по результатам конкретного эксперимента, $u_e = U(\hat{p}_{1e}; \hat{p}_{2e})$ с квантилью $u_{1-\alpha/2}$ порядка $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Замечание

При данных (больших) объемах выборок n_1 и n_2 будем считать справедливым утверждение:

$\dfrac{p_1 - p_2 - (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0;1)$. Заменим в знаменателе этого отношения неизвестные параметры распределений их оценками $\hat{p}_1$, $1-\hat{p}_1=\hat{q}_1$ и $\hat{p}_2$, $1-\hat{p}_2=\hat{q}_2$.

Действуя аналогично п. 17., построим приближенный доверительный интервал для разности p_1-p_2, соответствующий доверительной вероятности $1-\alpha$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}.$$

Сформулируем правило принятия решения при проверке гипотезы $H_0: p_1 - p_2 = 0$, основанное на доверительном интервале:

если $0 \notin \left(\hat{p}_1-\hat{p}_2-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}};\,\hat{p}_1-\hat{p}_2+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right)$,

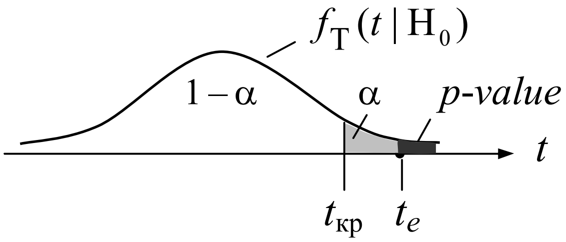
то гипотеза H_0 отвергается;

если $0 \in\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}};\,\hat{p}_1-\hat{p}_2+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right)$,

то гипотеза H_0 принимается на данном уровне значимости α.

32. Понятие *p*-значения

Рассмотрим односторонний (правосторонний) критерий).



При заданном уровне значимости α критическое число $t_{кр}$ определяется соотношением $P(T(X_1,\dots,X_n)\geq t_{кр} \mid H_0)=\alpha$, а p-значение (*p-value*)– соотношением $P(T(X_1,\dots,X_n)\geq t_e \mid H_0)=p\text{-}value$.

В русскоязычной литературе p-значение (*p-value*) называют также *достигаемым уровнем значимости* (пи-величиной). Чем меньше оказывается значение *p-value*, тем сильнее свидетельствует совокупность наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ против нулевой гипотезы.

Приложение 1. Предельные теоремы теории вероятностей

<u>*Теорема* (*неравенство Чебышева*)</u>

Пусть непрерывная случайная величина X имеет второй начальный момент MX^2, тогда:

$$\forall\varepsilon>0\ \ P(|X|\geq\varepsilon)\leq MX^2/\varepsilon^2.$$

<u>*Следствие*</u> Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание MX и дисперсию $DX=\sigma^2$, тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ P(|X-MX|\geq\varepsilon)\leq DX/\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon = 3\sigma$ из последнего неравенства получаем “3σ-оценку” вероятности абсолютного отклонения случайной величины от ее математического ожидания на величину, не меньшую 3σ:

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{MX}| \geq 3\sigma) \leq 1/9.$$

Заметим, что эта оценка универсальна – она справедлива для любого распределения, однако является довольно грубой: для нормального распределения имеем: $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{MX}| \geq 3\sigma) = 0{,}027 \leq 1/9$; для равномерного распределения: $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{MX}| \geq 3\sigma) = 0 \leq 1/9$.

Закон больших чисел (теорема Чебышева)

Пусть $\{\mathrm{X}_i\}$ – последовательность независимых случайных величин и пусть каждый член последовательности X_i имеет конечные математическое ожидание $\mathrm{MX}_i = m_i$ и дисперсию $\mathrm{DX}_i = \mathrm{D}_i$, причем дисперсии ограничены в совокупности ($\exists \mathrm{B}\quad 0 < \mathrm{B} < +\infty \quad \forall i \quad \mathrm{D}_i \leq \mathrm{B} < +\infty$), тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Приведем определение сходимости по вероятности. Последовательность случайных величин $\{S_n\}$ называют сходящейся по вероятности к случайной величине S , если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \mathrm{P}(|S_n - S| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Для сходимости по вероятности принято обозначение: $S_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{P}} S$. Поскольку любую неслучайную величину С ($\mathrm{C} = \mathrm{const}$) можно рассматривать как случайную величину Х, принимающую свое единственное значение с вероятностью единица $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{C}) = 1$, то можно говорить и о сходимости по вероятности последовательности случайных величин к неслучайной величине.

Следствие 1 из закона больших чисел – о сходимости по вероятности среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин к их математическому ожиданию.

Пусть $\{X_i\}$ – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин, имеющих конечные математическое ожидание $MX_i = m$ и дисперсию $DX_i = \sigma^2$ (m и σ^2 – одни и те же для всех X_i), тогда: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{P} m.$

<u>*Следствие* 2 *из закона больших чисел*</u> – теорема Бернулли о сходимости по вероятности относительной частоты к вероятности.

Пусть случайная величина X – число наступлений события A (успеха) при проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли, $p = P(A)$ – вероятность успеха в каждом испытании, $\hat{p} = \frac{X}{n}$ – относительная частота числа успехов в n испытаниях, тогда

$$\hat{p} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} p.$$

<u>*Центральная предельная теорема*</u>

Рассмотрим последовательность $\{X_i\}$ независимых случайных величин ($\forall n$ $X_1, \dots, X_n$ – независимы в совокупности) с математическими ожиданиями $\{m_i\}$ и дисперсиями $\{D_i\}$. При любом фиксированном n имеем:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} MX_i = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \text{[в силу независимости } X_i\text{]} = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} D_i.$$

Случайная величина $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$ является центрированной и нормированной по определению (ее математическое ожидание $MY_n = 0$, а дисперсия $DY_n = 1$).

Термин *центральная предельная теорема* (ЦПТ) вообще означает ряд теорем, утверждающих (при каких-либо условиях) справедливость предельного равенства вида:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{Y}_n < x\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_i}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt .$$

Если указанное предельное равенство имеет место, то при достаточно больших значениях n на его основе строится следующее приближение:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_i}} < x\right) \approx \Phi(x) .$$

В статистике принято считать, что такое приближение приемлемо уже при $n > 30$.

<u>Теорема</u> (ЦПТ для независимых одинаково распределенных величин)

Пусть $\{\mathrm{X}_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математическое ожидание m и дисперсию σ^2, тогда

$$\forall x \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt .$$

Символически утверждение ЦПТ записывают так: $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \underset{n\to\infty}{\sim} N(nm; \sigma\sqrt{n})$. Отсюда $\bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \underset{n\to\infty}{\sim} N(m; \sigma/\sqrt{n})$ – среднее арифметическое *любых* независимых одинаково распределенных случайных величин (имеющих математическое ожидание и дисперсию) асимптотически нормально.

Заметим, что две последние символические записи удобны для применения ЦПТ в “*допредельной*” форме – при конечных достаточно больших значениях n.

Предельная теорема Муавра-Лапласа

Пусть X – число успехов при проведении n независимых испытаний (по схеме Бернулли) с вероятностью p успеха в каждом испытании, при этом MX = np, DX = npq, тогда для центрированной и нормированной случайной величины $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ справедливо предельное равенство:

$$\forall x \ \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}}<x\right)=\Phi(x).$$

Иными словами, теорема утверждает, что число успехов X в схеме Бернулли – асимптотически нормально: X $\underset{n\to+\infty}{\sim} N(np;\sqrt{npq}\,)$.

Действительно, пусть X_i – индикатор появления успеха в i –м испытании (X_i – случайная величина, принимающая значение 1, если результатом i –го испытания является успех и значение 0 в противном случае):

X_i	0	1
P	q	p

$MX_i=p$, $DX_i=pq$, тогда $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ – сумма одинаково распределенных независимых случайных величин (индикаторов X_i) удовлетворяет требованиям центральной предельной теоремы, откуда и следует утверждение теоремы Муавра-Лапласа.

Замечание 1

Как известно, случайная величина X подчиняется биномиальному распределению:

$$P(X=k)=b_k\,(n;p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n).$$

При больших n и малых p непосредственные вычисления по этой формуле затруднительны, поэтому при $n>40$, $p<1/10$

используют приближение, основанное на теореме Пуассона:

$$b_k(n;p) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \text{ где } a = np.$$

<u>*Замечание 2*</u>

На основании теоремы Муавра-Лапласа при достаточно больших значениях n имеем приближенно:

$$\mathrm{P}(k_1 \le \mathrm{X} \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Это приближение применяют при значениях p не близких к нулю, величинах k_1 и k_2 – порядка несколько десятков, а $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – порядка нескольких единиц.

Упражнение

(а) Вычислить приближенно $\mathrm{P}(|\frac{\mathrm{X}}{n} - p| \le \varepsilon)$ – вероятность отклонения относительной частоты $\hat{p} = \frac{\mathrm{X}}{n}$ числа успехов от вероятности p на величину, не превосходящую по абсолютной величине ε (величины n, p и $\varepsilon > 0$ заданы) при проведении n независимых испытаний.

(б) найти наименьшее значение числа испытаний n, при котором выполняется условие $\mathrm{P}(|\frac{\mathrm{X}}{n} - p| \le \varepsilon) = 0{,}95$ при $\varepsilon = 0{,}01$ и $p = 0{,}5$.

<u>*Решение*</u>

(а) Если случайная величина Y распределена по нормальному закону $N(m;\sigma)$, то верно равенство $\forall\, t \;\; \mathrm{P}(|\mathrm{Y} - m| \le \sigma t) = 2\Phi_{\text{o}}(t)$.

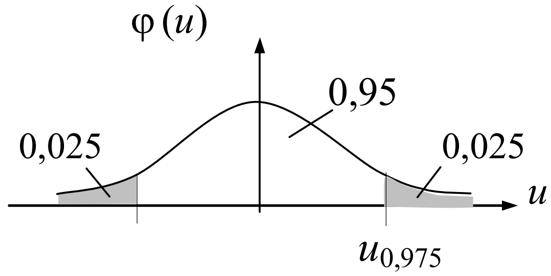
При достаточно больших n имеем приближенно:

$$\frac{\mathrm{X}}{n} \sim N\left(p; \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right), \text{ откуда } \quad \mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{n} - p\right| \le t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\,\Phi_{\text{o}}(t).$$

Полагая $\varepsilon = t\dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$, $t = \varepsilon\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$, получаем:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\,\Phi_o\left(\varepsilon\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

(б) По условию $P\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 0{,}95$, $2\,\Phi_o(u) = 0{,}95$, отсюда



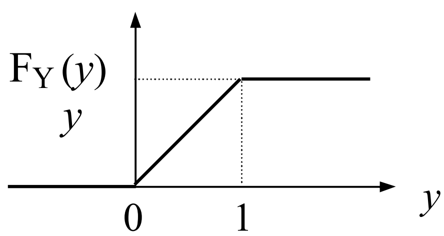
$u = u_{0,975} = 1{,}96$ и $\varepsilon\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = 1{,}96$. При $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}5$ имеем

$1{,}96 = 0{,}01\,\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{0,25}}$, поэтому условие (б) выполняется при $n \ge (98)^2$.

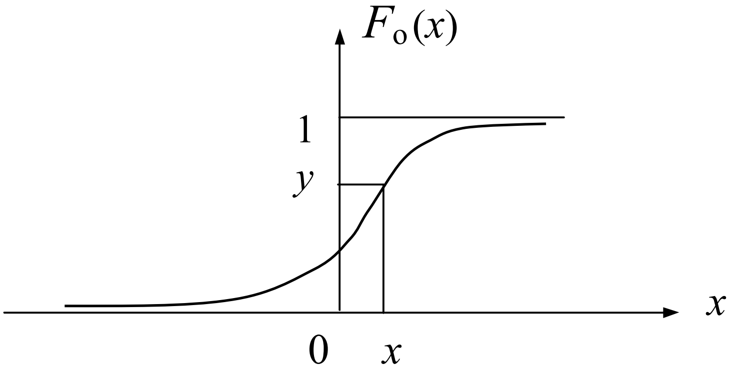
***Приложение 2*. Получение выборки из заданного распределения**

Пусть заданная функция распределения $F_o(x)$ непрерывна и строго монотонна (так что существует обратная к ней функция F_o^{-1}), а случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0;1]$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & y \in [0;1] \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$



Докажем, что при этом функция распределения $F_X(x) = P(X < x)$ случайной величины X, полученной преобразованием $X = F_o^{-1}(Y)$), будет равна заданной функции распределения $F_o(x)$.



В силу монотонности $F_o(x)$ события $(X < x)$ и $(0 < Y < y)$ равносильны, $y = F_o(x)$ и $x = F_o^{-1}(y)$, поэтому:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(0 < Y < y) = F_Y(y) - F_Y(0) = y = F_o(x).$$

Для любого значения y случайной величины Y, *равномерно распределенной на* [0;1], число x, полученное путем преобразования $x = F_o^{-1}(y)$, будет *соответствующим* значением (реализацией) случайной величины X, подчиняющейся наперед заданному распределению $F_o(x)$. Таким образом, реализация выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ из распределения $F_o(x)$, может быть получена из реализации выборки $y_1, y_2, \dots, y_n$ из указанного равномерного распределения с помощью преобразования $x_i = F_o^{-1}(y_i)$.

Заметим, что верно также следующее *утверждение*.

Пусть случайная величина X имеет строго монотонную функцию распределения $F_X(x)$ и $Y = F_X(X)$, тогда Y – равномерно распределена на отрезке [0;1].

Действительно, поскольку $0 \le Y \le 1$ и $x = F_X^{-1}(y)$ (F_X – строго монотонна по условию, поэтому обратная функция F_X^{-1} существует), имеем:

$$F_Y(y) = P(0 < Y < y) = P(X < x) = F_X(x) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$$

$F_Y(y) = y,\ y \in [0;1]$: Y – равномерно распределена на отрезке [0;1].

Литература

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983, 471 с.
2. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике.– М.: Наука, 1977. – 408 с., ил.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 248 с., ил.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975, 648 с.
5. Максимов Ю.Д. Математика. Теория и практика по математической статистике. Конспект-справочник по теории вероятностей.: Учеб. пособие / Ю.Д. Максимов; под ред. В.И. Антонова. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2009. – 395 с.
6. Положинцев Б.И. Введение в математическую статистику : Учеб. пособие .– СПб., Изд-во Политехнического ун-та 1994 .– 56с.
7. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере/ под ред. Фигурнова В.Э. –М.: ИНФРА – М. 1998. – 528 с., ил.