Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций

Кафедра «Экспериментальная физика»

Д.В. Свистунов

Общие подходы к решению задач по физике: электричество и магнетизм

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2016

УДК 53 (075.8)

Рецензенты:

В.Е. Привалов, профессор, доктор физико-математических наук, профессор ИФНиТ СПбПУ

М.Ю. Липовская, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент ИФНиТ СПбПУ

Д.В. Свистунов. **Общие подходы к решению задач по физике: электричество и магнетизм /** Учеб. пособие. – СПб.: СПбПУ, 2016.

В пособии продолжено изложение основных подходов к решению задач по темам базового курса физики. Рассмотрены вопросы, входящие в обязательную часть программы второго семестра обучения общей физике. Представленные в пособии рекомендации дополняют собой материалы задачников по физике, в том числе задачников с примерами решения некоторых типовых задач.

Пособие предназначено для студентов СПбПУ всех направлений подготовки бакалавров и специалистов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данное пособие продолжает изложение основных общих подходов, применяемых для решения задач по курсу физики. Поскольку, как и первая часть, это пособие является дополнительным материалом, предназначенным для использования совместно с задачниками, то сводный перечень законов и формул, связанных с решением задач, здесь не приводится, так как такие перечни обычно содержатся в задачниках. Тематическое содержание ограничено в этом пособии вопросами, входящими в обязательную часть программы базового курса физики.

Перед изложением основных подходов и приемов решения задач по разделам курса, приведем некоторые дополнительные общие рекомендации.

Получив в результате решения задачи расчетную формулу, очень полезно для проверки ее правильности оценить значение рассчитываемой величины при подстановке в формулу таких значений ее переменных параметров, при которых эта величина имеет очевидное значение. Часто для этого надо рассмотреть предельные случаи, которые получаются при присвоении параметрам нулевых или бесконечно больших значений. Например, понятно, что величина напряженности электрического поля должна стремиться к нулю при удалении на бесконечно большое расстояние от создавшего это поле заряженного тела.

Другим критерием правильности выведенной формулы является условие одинаковой размерности левой и правой частей полученного равенства. Отметим, что проверку формулы по ее размерности допустимо проводить, подставляя в нее не размерность членов в классическом понимании этого термина (когда каждая физическая величина представлена в виде произведения $M^{\alpha}\,L^{\beta}\,T^{\gamma}\,I^{\delta}\,\Theta^{\varepsilon}\,J^{\eta}$, где буквами M,L,T,I,Θ,J обозначены соответственно масса, длина, время, сила электрического тока, термодинамическая температура и сила света, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\eta$ – некоторые числа), а единицы измерения этих величин (конечно, в одной системе – СИ). При этом надо помнить связь между этими единицами. Например, если в левой части формулы при подстановке в нее единиц измерения величин имеем Дж (Джоуль), а в правой получили произведение В*А*с (Вольт*Ампер*сек), то рассматриваемая формула согласована по размерности.

Материал пособия разбит на разделы, каждый из которых может служить темой одного или двух практических занятий.

Взаимодействие электрических зарядов

Силовое взаимодействие заряженных тел осуществляется через посредника – электрическое поле, источником которого являются электрические заряды этих тел. Это взаимодействие можно рассчитать двумя путями: непосредственно, применяя экспериментально установленный закон Кулона, или используя величины, характеризующие электрическое поле (этот способ рассмотрим в следующем разделе). При этом следует помнить, что хорошо известная запись закона Кулона справедлива для точечных зарядов. Если в задаче фигурируют протяженные заряженные тела, их разбивают на элементарные участки, полагая эти участки квазиточечными зарядами.

Начинать решение задач, в которых задана система точечных зарядов, следует с составления векторной диаграммы сил взаимодействия зарядов. На этой диаграмме надо показать все силы, действующие на каждый заряд со стороны остальных зарядов системы. Основой решения таких задач является применение принципа суперпозиции, согласно которому любой заряд взаимодействует с каждым зарядом системы независимо от влияния остальных зарядов, а результирующая сила, которая действует на рассматриваемый заряд, является векторной суммой всех сил этих отдельных взаимодействий. Модуль результирующего вектора можно найти двумя способами. Первый – с использованием свойств векторной суммы нескольких векторов: выбрать оси координат и совместить их начало с рассматриваемым зарядом, затем найти проекции каждого слагаемого вектора на эти оси, после чего для каждой оси суммировать проекции на нее всех векторов (конечно, с учетом знаков этих проекций). Направление осей лучше выбирать так, чтобы какая-нибудь ось была либо сонаправлена с одним из слагаемых векторов, либо перпендикулярна ему. В результате этой процедуры будут определены проекции результирующего вектора на выбранные оси, и дальше можно найти его модуль по обычному правилу: $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$. Так можно найти модуль суммы сразу нескольких векторов. Второй способ – проводить сложение векторов попарно, рассчитывая модуль суммы двух векторов как $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\alpha$, где A – модуль суммы, A_1 и A_2 – модули слагаемых векторов, α – угол между этими векторами. Полученный вектор можно складывать со следующим вектором системы сил или с векторным результатом подобного суммирования другой пары сил.

В задачах, относящихся к данному разделу курса, обычно рассматриваются системы зарядов в статическом состоянии. Поэтому, как следствие 2-го закона Ньютона, в таких задачах соблюдается равенство нулю результирующей силы, действующей на каждый заряд системы. Это условие как раз и может служить базой для решения задачи.

Иногда по условию задачи происходит контакт заряженных тел, приводящий к перераспределению электрического заряда между ними. В этом случае при решении надо дополнительно привлечь закон сохранения заряда, согласно которому общий заряд изолированной системы остается неизменным. Поскольку обычно в задачах данного курса заряды находятся в вакууме или в непроводящей среде, то уравнение закона может быть записано как для всей заданной системы зарядов, так и для ее части (в том числе для пары контактирующих тел), мысленно выделив эту часть в виде изолированной мини-системы.

При рассмотрении взаимодействия точечного заряда с распределенным, протяженное заряженное тело разбивают на элементарные участки очень малого размера и показывают на рисунке вектор силы d**F**, действующей на точечный заряд со стороны заряда dq произвольного взятого элементарного участка. Малые размеры такого участка позволяют считать его тоже точечным зарядом. Это дает возможность записать модуль вектора d**F** согласно закону Кулона. При этом пользуются понятиями линейной, поверхностной или объемной плотности заряда, и выражают заряд dq как произведение длины dl (площади dS, объёма dV) этого участка на соответствующую плотность заряда. Результирующая сила **F** находится путем векторного суммирования сил d**F** , обусловленных всеми участками. С учетом малости участков, следовало бы суммирование проводить в форме операции интегрирования. Однако, требуется провести векторное сложение, а операция интегрирования имеет по своей сути скалярный характер. Чтобы преодолеть это затруднение, вектор d**F** раскладывают на компоненты $d\mathbf{F}_x$, $d\mathbf{F}_y$, $d\mathbf{F}_z$ вдоль осей координат, направления которых выбирают из условий удобства решения задачи. После этого проводится интегрирование для модуля каждой компоненты по отдельности, в результате чего получаются компоненты $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ результирующей силы взаимодействия **F**.

Что касается взаимодействия двух протяженных заряженных тел, то после разбиения тел на элементарные заряды определяют силу взаимодействия одного квазиточечного заряда первого тела с каждым участком другого тела. После этого векторным сложением находят силу взаимодействия участка первого тела со всем вторым телом. Затем эта процедура повторяется для другого квазиточечного заряда первого тела. Эти промежуточные суммы находят по описанной выше методике определения взаимодействия точечного заряда с протяженным заряженным телом. Общей силой взаимодействия двух заряженных тел является векторная сумма результатов этих промежуточных векторных сложений. В общем случае тел произвольной формы и распределения зарядов в них эта задача решается численными методами. Для тел простой формы при равномерном распределении заряда она часто может иметь достаточно простое аналитическое решение.

Отметим, что во многих случаях оказывается проще проводить решение с привлечением понятия напряженности поля, как будет показано в следующем разделе.

Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля можно искать двумя путями: с помощью принципа суперпозиции и с использованием теоремы Гаусса.

Первый путь пригоден для любой конфигурации системы зарядов и заряженных тел.

Если в задаче задана система точечных зарядов, то начинать решение следует с составления векторной диаграммы напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом системы в рассматриваемой точке. При этом следует помнить, что вектор напряженности электрического поля направлен по направлению кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд, который мысленно помещается в эту точку. Поскольку напряженность электрического поля подчиняется принципу суперпозиции, то результирующий вектор находится путем векторного суммирования всех векторов диаграммы, показанных в данной точке.

Часто в задачах рассматриваются заряды, находящиеся в какой-то диэлектрической среде. Тогда надо ввести в формулу для модуля напряженности поля в вакууме дополнительное деление на величину диэлектрической проницаемости среды ε . Лучше вообще взять себе за правило всегда вводить такое деление в коэффициент формулы. Это не позволит забыть учесть влияние среды при решении, а в случае вакуума просто надо подставить $\varepsilon = 1$.

Если заряды системы являются распределёнными, то для применения принципа суперпозиции каждое заряженное тело следует разбить на элементарные участки, которые можно считать точечными зарядами. После этого на диаграмме показывают вектор напряженности поля $d\mathbf{E}$, созданный в заданной точке пространства зарядом dq такого участка. Тогда появляется возможность записать выражение для модуля вектора $d\mathbf{E}$ согласно известной формуле поля точечного заряда. При этом, как и при поиске кулоновской силы, выражают точечный заряд dq как произведение линейной, поверхностной или объемной плотности заряда на длину dl (площадь dS, объём dV) элементарного участка. Согласно принципу суперпозиции, результирующий вектор напряженности поля $\mathbf{E}$ равен векторной сумме векторов $d\mathbf{E}$ полей, созданных в рассматриваемой точке зарядами всех элементарных участков тела. Чтобы при определении модуля вектора $\mathbf{E}$ можно было использовать операцию интегрирования, применяют описанный в предыдущем разделе подход: исходя из соображений удобства решения задачи выбирают направления осей координат (например, если по задано осесимметричное тело, то одну из осей координат лучше направить вдоль оси симметрии) и раскладывают вектор $d\mathbf{E}$ на компоненты $d\mathbf{E}_x$, $d\mathbf{E}_y$, $d\mathbf{E}_z$. После этого, проводят интегрирование для модуля каждой компоненты по отдельности, в результате чего получаются компоненты $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, $\mathbf{E}_z$ результирующего вектора $\mathbf{E}$, модуль которого находят по обычному правилу: $E = (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)^{1/2}$.

Надо отметить, что при определении напряженности поля в точках оси симметрии равномерно заряженного осесимметричного тела оказывается, что это поле будет иметь только одну векторную компоненту, направленную вдоль этой оси. Это вызвано тем, что симметрично расположенные элементарные участки создают в точках оси равные по модулю и противоположно направленные поперечные компоненты векторов напряженности поля, и при сложении эти компоненты компенсируют друг друга.

Для электрических полей, обладающих заведомо симметричным распределением напряженности поля в пространстве, удобно применять при решении задачи теорему Гаусса. При этом надо выбрать замкнутую поверхность, охватывающую заряды, руководствуясь следующими соображениями. Поверхность должна проводиться так, чтобы в точках значительной ее части (предпочтительно – во всех точках) напряженность поля была бы одинакова по модулю. Это можно сделать, учтя симметрию поля и форму заданного тела (например, охватить заряженный шар сферической поверхностью или выбрать для протяженной заряженной нити соосную с ней цилиндрическую поверхность). Кроме того, надо стремиться провести поверхность так, чтобы вектор напряженности поля был нормален к поверхности хотя бы в одной ее части (а лучше – во всех точках поверхности), в то время как в остальных точках был бы направлен по касательной к выбранной поверхности (отмеченные примеры сферы вокруг шара и цилиндрической поверхности, охватывающей длинный заряженный стержень, нить или трубу). При таких условиях поток вектора **E** через части поверхности, по отношению к которым вектор **E** имеет касательное направление, равен нулю. Общий поток определяется как сумма потоков через остальные части поверхности, причем эти потоки равны просто произведению площади этих частей на модуль напряженности поля E (пока еще неизвестный). Это произведение отрицательно, если вектор **E** направлен противоположно нормали к поверхности, т.е. если силовая линия входит в эту часть поверхности. Тогда, определив суммарный заряд, охваченный всей проведенной поверхностью, легко найти искомую напряженность поля **E**.

Следует, однако, сказать, что далеко не для всех симметричных тел удается выбрать подходящую поверхность охвата. Известным примером такого случая является задача определения поля заряженного диска. В то же время, эта задача дает возможность показать еще один прием применения принципа суперпозиции для протяженных тел : при решении задач, в которых рассматриваются тела, симметричные относительно какой-то точки или оси, можно разбивать эти тела не на квазиточечные заряды, а на симметричные относительно того же центра или оси протяженные участки. При этом, эти участки должны иметь такую форму, для которой можно считать известной или легко выводимой формулу, описывающую поле этого участка. Например, при нахождении поля на оси диска можно разбить диск на совокупность тонких заряженных колец, радиус которых изменяется от минимального (нулевого) до внешнего радиуса диска. После этого, пользуясь описанным выше обычным путем решения, надо найти формулу для поля на оси произвольно взятого кольца, что довольно просто с учетом обнуления поперечной компоненты этого поля. Полученное выражение будет содержать параметр симметрии участка (в данном примере – радиус тонкого кольца r, а также его приращение dr, обозначающее ширину кольца). Для нахождения модуля результирующей напряженности поля всего диска в заданной точке оси, проводят суммирование полей этих условно элементарных участков, для чего интегрируют полученную формулу по переменной – радиусу кольца r.

Заметим, что на примере этой задачи показывают и то, что напряженность поля можно искать через ее связь с потенциалом поля, о чем будет сказано в следующем разделе.

В задачах данного курса обычно ограничиваются случаями неограниченной изотропной среды либо среды, граничные поверхности которой совпадают с эквипотенциальными поверхностями рассматриваемого в задаче поля (например, слой диэлектрика, нанесенный на поверхность заряженного шара). В этих случаях удобно решать задачу, используя запись теоремы Гаусса для индукции электрического поля. Эта форма теоремы особенно полезна, когда выбранная замкнутая поверхность отсекает части диэлектрические тел или слоев, помещенных в электрическое поле. На поверхности этих тел возникают связанные заряды, которые трудно поддаются учету в общей сумме охваченных поверхностью зарядов. Однако, теорема Гаусса для электрической индукции поля учитывает только свободные заряды, создавшие поле, а связанные заряды учитываются здесь автоматически в самом понятии индукции поля. Заметим, кстати, что в разных учебниках и задачниках эта величина называется по-разному: в одних она названа электрической индукцией, в других – электрическим смещением. Надо запомнить, что эти два термина тождественны, обозначая одну и ту же величину.

Иногда в задачах рассматриваются заряженные тела правильной формы, легко поддающиеся расчету по теореме Гаусса или методом суперпозиции, но задано, что в этом теле есть незаряженная полость, или имеется разрыв, или что-нибудь подобное. В этом случае полезно применить следующий прием: заданное тело рассматривается как сплошное, бездефектное и рассчитывается создаваемая им напряженность поля. Чтобы учесть заданный незаряженный промежуток, условно считают, что в этом месте на сплошное тело наложено (вложено) другое тело, имеющее форму заданного дефекта и заряженное с той же плотностью заряда, что и заданное тело, но обратного знака. Проводится расчет поля, созданного этим условным телом в точке наблюдения, и векторным сложением находится общее поле сплошного и условного тел. Результат и является полем заданного в задаче заряженного «дефектного» тела. Этот прием позволяет выполнить условие задачи о наличии в теле нейтральной области и при этом значительно упростить решение.

Как отмечено выше, можно использовать понятие напряженности поля, чтобы найти силу электрического взаимодействия заряженных тел. Особенно привлекателен этот подход тогда, когда поле одного из тел можно отнести к упоминавшимся выше стандартным случаям (поле шара, нити, плоскости и т.д.). Тогда другое взаимодействующее тело рассматривается как распределенный заряд, находящийся в поле известной конфигурации. Это второе тело разбивают на элементарные участки с зарядом dQ и находят действующую на каждый участок силу d**F**, используя соотношение $d\mathbf{F} = dQ*\mathbf{E}(x,y,z)$. После этого обычным образом находят результирующую силу векторным сложением этих частных сил, применяя при необходимости разложение их на некоторые выбранные направления и раздельное интегрирование этих проекций частных сил. Такой подход позволяет вдвое сократить общую процедуру решения, поскольку здесь не требуется разбивать первое тело на участки и рассматривать силы взаимодействия каждого такого участка с участками второго тела. Если же тело с зарядом Q находится в однородном поле **E** , то даже нет необходимости разбивать это тело на участки. Действующая на него сила просто может быть записана как $\mathbf{F} = Q\,\mathbf{E}$.

В некоторых задачах в электрическое поле помещен диполь, и требуется найти действующую на него силу. Напомним, что в однородном поле сила, действующая на весь диполь как единый объект, равна 0. В этом случае на заряды диполя действует пара сил, момент которой вызывает поворот диполя, стремясь установить направление вектора дипольного момента по направлению поля. Силу, вызывающую поступательное движение диполя в неоднородном поле, определяют как $\mathbf{F} = p\,\partial\mathbf{E}/\partial l$. Здесь следует подчеркнуть, что в этой формуле производная берется *по направлению вектора дипольного момента* **p** (и совпадающего с ним вектора ***l***), а не по направлению радиус-вектора **r** , задающего пространственное положение диполя в поле. Это же касается и формулы $F_x = p\,\partial E_x/\partial l$, по которой находится проекция силы на некоторую ось. Можно использовать и такую форму записи формулы действующей на диполь силы: $\mathbf{F} = p_x\,\partial\mathbf{E}/\partial x + p_y\,\partial\mathbf{E}/\partial y + p_z\,\partial\mathbf{E}/\partial z$, где p_x, p_y, p_z – проекции вектора **p** на оси координат. Движение диполя в неоднородном поле является комбинацией вращательного и поступательного движений, что надо учесть при нахождении общей работы, совершённой над диполем.

При использовании теоремы Гаусса часто сложно найти простую форму замкнутой поверхности, удовлетворив отмеченным выше условиям. В таких случаях следует использовать дифференциальную форму теоремы Гаусса, связывающую изменение векторов **E** (или **D**) с объемной плотностью заряда ρ в окрестности данной точки пространства. Такой подход оказывается полезным, например, если задана зависимость напряженности поля от координат и требуется найти распределение заряда или наоборот. Здесь надо учесть, что запись дивергенции различается в разных координатах. Так, в декартовых координатах имеем: div $\mathbf{E} = \partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z$, тогда как запись относительно радиальной координаты **r** : div $\mathbf{E} = (1/r^2)\, \partial(r^2\, E)/\partial r$.

Потенциал электрического поля

Прежде всего, поскольку само понятие потенциала применимо только к потенциальным полям, следует убедиться, что условия задачи подразумевают наличие именно такого поля: должно быть понятно, что в задаче рассматривается *электростатическое* поле, т.е. что оно стационарно во времени или его параметры изменяются очень медленно.

Основой методов нахождения потенциала поля в заданной точке служит принцип суперпозиции, который справедлив и для потенциала. При этом, важным преимуществом методик определения характеристик поля с использованием его потенциала является то, что в ходе решения задачи не приходится прибегать к векторному суммированию величин. В отличие от напряженности поля, потенциал является скалярной величиной. Поэтому, потенциал общего поля, созданного системой зарядов, находится путем алгебраического суммирования потенциалов полей, созданных каждым зарядом в рассматриваемой точке. Конечно, при этом учитываются знаки величин этих потенциалов. Это свойство потенциала оказывается особенно полезным при нахождении потенциала поля распределенного заряда.

При рассмотрении распределенного заряда действуют по уже известному алгоритму: тело разбивают на элементарные участки. Определяя потенциал поля всего тела в заданной точке пространства, проводят алгебраическое суммирование потенциалов полей этих элементарных зарядов в заданной точке. Если по условиям задачи поле тела заведомо обладает осевой симметрией, например, поле заряженного диска, то при поиске потенциала поля на оси симметрии, как и при определении напряженности поля, можно выбрать в качестве элементарного заряда некоторый участок тела, симметричный относительно этой оси (для примера диска – тонкое заряженное кольцо). Разбив этот участок на точечные заряды dq и записав для такого заряда известную формулу потенциала, интегрированием этого выражения прямо по переменной q легко находят потенциал поля всего выбранного участка тела. Далее действуют как описано в предыдущем разделе: интегрируют полученное выражение по содержащемуся в нем параметру симметрии участка в пределах его изменения согласно условиям задачи (в выбранном примере – по радиусу кольца r в пределах от нуля до внешнего радиуса диска). В результате получают искомый потенциал поля всего тела в заданной точке оси симметрии тела.

Некоторые задачи имеет смысл решать, используя связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля, которая представлена выражением $\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$. В частности, это касается упомянутой задачи нахождения напряженности поля на оси диска. Эта формула связи используется в обоих направлениях. Если задано или по ходу решения найдено распределение потенциала, по этой формуле можно легко найти значения напряженности поля в интересующих точках. Отсутствие необходимости векторного суммирования значительно облегчает в таких случаях процедуру решения задачи. Наоборот, при известной зависимости напряженности поля от координат находят значения потенциала поля или разности потенциалов в заданных точках путем интегрирования модуля вектора напряженности по направлению вдоль силовой линии поля. В рамках данного курса физики обычно ограничиваются случаем зависимости от одной декартовой координаты или радиальным распределением этих величин. При решении таких задач часто делают ошибки, выбирая путь (и, соответственно, пределы) интегрирования. Надо вспомнить, что по одному из двух своих определений потенциал поля φ численно равен работе по перемещению единичного положительного заряда из заданной точки в ту точку, в которой потенциал имеет нулевой уровень. При этом в большинстве задач полагают $\varphi = 0$ на бесконечном удалении от системы зарядов, создавшей поле. Учтем и то, что численное значение потенциала, как и любой другой величины, фактически является его отсчетом от нулевого уровня. Поэтому интегрирование ведется *от точки нулевого уровня* (т.е. от бесконечно удаленного положения) до рассматриваемой точки, а не от начала координаты до точки наблюдения. Например, пусть распределение напряженности поля имеет вид **E**(x) и требуется найти потенциал поля в точке x_a при том, что в задаче задано и положение начала координат x_0 (например, по условию это начало связано с центром заряженного тела). Тогда определяем потенциал как $\varphi = -\int_{\infty}^{x_a} E(x)dx$, подставляя в верхний предел x_a , а в нижний – бесконечно удаленную точку, т.е. ∞, а не x_0 . Если требуется найти разность потенциалов Δφ на определенном отрезке, то используют эту же формулу, только в пределы интеграла подставляют координаты заданных точек. Вспомним здесь, что можно изменить знак интеграла, поменяв местами пределы интегрирования.

В этом же разделе рассматриваются задачи по определению работы по перемещению заряженного тела в электрическом поле. Если в электростатическом поле движется точечное заряженное тело, то искомая работа определяется как произведение заряда этого тела на разность потенциалов внешнего поля в крайних точках траектории движения. То же относится к случаю движения объемного заряженного тела в однородном внешнем поле. В задачах данного курса ограничиваются этими двумя простыми случаями (помимо отмеченного выше случая нахождения работы над диполем). В других случаях решение задачи значительно усложняется из-за необходимости разбиения объемного тела на квазиточечные заряды и поиска общей работы как суммы работ перемещения этих зарядов в неоднородном внешнем поле. В целом же, в случае любого электростатического поля способ расчета работы через разность потенциалов является простейшим, т.к. здесь не требуется учитывать траекторию движения.

Проводники и диэлектрики в электрическом поле

Действие электростатического поля на помещенный в него проводник выражается в появлении на гранях проводника индуцированных зарядов вследствие перераспределения свободных электронов внутри проводника под воздействием приложенного поля. В свою очередь, возникшие индуцированные заряды искажают своим полем распределение заданного внешнего поля, созданного свободными зарядами. В рамках данного курса рассматривается самый простой вариант, в котором задана система свободных зарядов, определенным образом расположенная относительно плоской металлической поверхности. Для решения задач с такой схемой применяется так называемый метод изображений.

Метод изображений заключается в том, что строится эквивалентная заданной условная система зарядов. В общем случае, положение условного заряда определяется таким образом, чтобы поверхность проводника совпала с эквипотенциальной поверхностью общего поля заданного свободного и введенного условного зарядов. Если поверхность проводника плоская, то эта процедура сводится к тому, что симметрично (относительно металлической плоскости) заданному свободному заряду вводится равный ему по величине заряд противоположного знака и далее в задаче рассматривается общее поле этих зарядов, эквивалентное суммарному полю заданного и индуцированных зарядов. Если же по условию задачи свободный заряд помещен между двумя пересекающимися металлическими плоскостями, то для построения эквивалентной схемы надо отразить заданный заряд относительно каждой плоскости, а затем проводить отражение получаемых условных зарядов относительно этих плоскостей (или их продолжений, представляя плоскости бесконечными), действуя так до тех пор, пока при очередном шаге новые условные заряды не окажутся отраженными в одну и ту же точку. Получив эквивалентную схему, проводят дальнейшее решение обычным методом, уже не учитывая наличие металлического тела.

Следует отметить особенность решения задач, в которых по условию заряд движется относительно металлической плоскости, и надо определить работу по его перемещению. Кажется, что эту работу проще всего найти, используя разность потенциалов поля индуцированных на плоскости зарядов (ведь именно в этом поле движется заданный заряд), определив эти потенциалы в начальной и конечной точках движения с привлечением метода зеркального изображения. Однако, это приведет к ошибке. Понятием потенциала здесь пользоваться нельзя. Действительно, при движении заряда изменяется распределение напряженности его поля в области металлической плоскости, следовательно, меняется распределение индуцированного заряда в металле, что приводит к изменению распределения электрического поля этой плоскости во всем пространстве. Таким образом, электрическое поле плоскости является здесь переменным во времени, и поэтому оно не удовлетворяет критерию потенциальности поля. В таких задачах работу следует определять по известному из механики способу через кулоновскую силу как $A = \int \mathbf{F}(x)\, d\mathbf{x}$. Эта сила определяет здесь взаимодействие заданного свободного и распределенного индуцированного заряда, заменяемого согласно правилам метода зеркального изображения на условный заряд, причем при решении надо учесть, что этот условный заряд тоже движется относительно плоскости симметрично движению свободного заряда.

При решении задач, в которых рассматривается помещенный в электрическое поле диэлектрик, удобно пользоваться известными условиями на границе раздела диэлектриков: в случае отсутствия на границе раздела сред внесенных сторонних зарядов, при пересечении границы сохраняются нормальная компонента вектора электрической индукции и тангенциальная компонента вектора напряженности электрического поля. Излом силовых линий происходит таким образом, что соблюдается равенство $\mathrm{tg}\,\beta_1/\,\mathrm{tg}\,\beta_2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$, где β_1 и β_2 – углы падения и преломления линии на границе раздела сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . С другой стороны, тангенсы этих углов равны соотношению модулей тангенциальной и нормальной компонент напряженности поля в каждой среде (в чем можно убедиться, обозначив эти компоненты на рисунке силовых линий), и это можно использовать в решении задачи.

Используя в ходе решения задачи численное равенство $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, следует иметь в виду, что это равенство является формальным. В него входят совершенно разные по своей сути величины: в то время как поверхностная плотность связанных зарядов σ' отражает распределение связанного заряда вдоль поверхности, вектор поляризации **P** равен дипольному моменту единицы объема диэлектрика. Заметим здесь же во избежание ошибок, что в формуле $\mathbf{P} = \chi\, \varepsilon_0\, \mathbf{E}$ для вектора поляризации диэлектрика, помещенного во внешнее поле $\mathbf{E_0}$ (χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика), стоит поле *внутри* диэлектрика **E** , а не внешнее поле $\mathbf{E_0}$.

Если на поверхности раздела двух диэлектриков присутствуют сторонние заряды, то условие для электрической индукции меняется: теперь разность нормальных компонент индукции равна $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, где σ – поверхностная плотность сторонних зарядов (и это равенство – тоже формальное). Что касается равенства тангенциальных компонент напряженности поля при пересечении границы раздела, то это условие сохраняется и в случае внесения свободных зарядов на границу раздела диэлектриков.

Энергия электрического поля. Электроемкость

Электрическая энергия системы N точечных зарядов представлена суммарной энергией взаимодействия этих зарядов. При расчете этой энергии по формуле $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$ (где i – номер заряда в заданной системе) следует помнить, что здесь φ_i рассчитывается как потенциал поля в точке r_i расположения заряда q_i , созданный всеми остальными j зарядами системы, кроме самого заряда q_i . Это условие можно записать так: $\varphi_i = \sum_{j \neq i} {}_{j=1}^{N} \varphi_j(r_i)$.

Применение этой формулы к случаю уединенного заряженного проводника приводит к схожей формуле для его энергии: $W = Q\,\varphi/2$, где Q – общий заряд проводника, φ – его потенциал. Это становится понятным, если вспомнить, что во всех точках проводника потенциал одинаков. В задачах часто задаются форма проводника и поверхностная плотность заряда σ . Тогда заряд проводника определяется произведением площади его поверхности на величину σ , а потенциал проводника находят описанными выше методами. Найденную таким образом энергию называют собственной энергией проводника. Для проверки правильности полученного результата надо знать, что собственная энергия всегда имеет положительное значение.

Энергия системы заряженных проводников складывается из суммы их собственных энергий (определяемых для каждого проводника системы в отдельности как для уединенного проводника) и энергии их взаимодействия (каждый проводник является здесь заряженным телом, находящимся в поле других заряженных проводников). При расчете энергии взаимодействия используют такой же подход, как в случае системы точечных зарядов. При проверке результатов расчета надо учесть, что энергия взаимодействия может быть как положительной, так и отрицательной, однако полная электрическая энергия системы, как и собственные энергии проводников, всегда положительна.

Задачи по нахождению энергии электрического поля, сосредоточенного в некотором объеме, решаются с привлечением понятия объемной плотности энергии w , которая может быть найдена как $w = \varepsilon\,\varepsilon_0\,E^2/2$. Заданный в задаче объем разбивается на малые элементарные объемы dV , энергию поля в каждом из которых записывают как w dV , а общая энергия находится интегрированием в пределах заданного объема: $W = \int_V w\,dV$. Если рассматривается неоднородное поле, то надо проверить, нельзя ли объединить в одну фигуру совокупность точечных объемов, в которых модуль E одинаков. Так, в условиях центро- или осесимметричного поля имеет смысл объединять в группы точечные объемы, находящиеся на одинаковом расстоянии от оси или центра симметрии. Во всех точках полученной при объединении фигуры величина w будет одинаковой вследствие равенства модуля E в этих точках. Тогда в качестве элементарного объема dV будет выступать эта групповая фигура (например, шаровой слой малой толщины dr , в центре которого – создавший поле точечный заряд). Записав dV такой фигуры через геометрические параметры структуры, при нахождении W интегрирование проводится по этим параметрам (например, по радиусу слоя r) в пределах, заданных в условии задачи.

Иногда в задачах ставится вопрос об определении силы взаимодействия пары заряженных проводников. Часто удобно делать это, используя известную связь силы и потенциальной энергии $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} W_p$. Определив энергию взаимодействия как указано выше, затем находят градиент полученной величины по направлению силовых линий поля. В качестве примера, можно отметить задачи по определению силы взаимодействия пары заряженных пластин.

В этом же разделе обычно собраны задачи по нахождению электроемкости отдельных конденсаторов и их сборок. Формулы для расчета емкости уединенной сферы и основных типов конденсаторов обычно выводятся в курсе лекций. Здесь стоит отметить, что если в задаче вследствие упущения тип конденсатора не указан, то можно использовать тот факт, что при малом зазоре между пластинами емкость конденсатора любого типа можно приблизительно оценить по формуле емкости плоского конденсатора.

Если в задаче рассматривается нестандартная конфигурация, то надо применить общий подход к нахождению емкости. На уединенный проводник или электроды конденсатора мысленно помещают заряд q и определяют выражение для напряженности поля E (для уединенного проводника – во всем окружающем пространстве, для конденсатора – между электродами, помня, что при концентрических электродах поле в межэлектродном промежутке создано только внутренним электродом). Используя связь E с потенциалом, интегрированием находят потенциал уединенного проводника или разность потенциалов обкладок конденсатора. Емкость получают делением внесенного заряда q на найденный потенциал (разность потенциалов), и при этом q сокращается в числителе и знаменателе.

В задачах бывает задано, что промежуток между электродами конденсатора заполнен несколькими слоями разных диэлектриков. Для нахождения емкости такого конденсатора можно применить следующий прием. Поскольку границы слоев оказываются параллельны обкладкам, то они совпадают с эквипотенциальными поверхностями поля в конденсаторе. Тогда можно мысленно нанести на эти границы тонкие металлические пленки. Это действие никак не нарушит ни распределение поля, ни распределение потенциала в конденсаторе, поскольку внесенный во внешнее поле металлический проводник имеет один и тот же потенциал во всем своем объеме, т.е. эти пленки просто как бы визуализируют эквипотенциальные поверхности поля в конденсаторе. С другой стороны, эти пленки можно рассматривать как обкладки конденсаторов, которые встроены в заданный и имеют каждый внутри себя только один диэлектрический слой. Таким образом, заданный конденсатор рассматриваем как ряд последовательно соединенных конденсаторов и находим общую емкость этого соединения по известному правилу.

Если обкладки конденсатора разделены на области, под каждой из которых межэлектродный промежуток заполнен диэлектриком со своим значением ε_k , то каждая такая область по сути является отдельным конденсатором, параллельно соединенным с остальными областями. Емкость такой области можно найти, используя тот факт, что емкость конденсатора пропорциональна площади обкладок. Действительно, обкладку любого конденсатора можно разбить на участки единичной площади. Тогда, рассматривая эти участки как электроды отдельных параллельно соединенных конденсаторов, получаем, что общая емкость равна сумме емкостей этих участков. Поэтому, какой бы конденсатор ни был задан в задаче (плоский, сферический или цилиндрический), для расчета емкости областей с разными ε_k надо воспользоваться известными формулами для целых конденсаторов заданной формы, домножив результат на отношение площади области с определенным ε_k к площади обкладки целого конденсатора. Общая же емкость заданного частично заполненного конденсатора равна сумме емкостей всех его областей с разными ε_k .

Что касается нахождения емкости сборки конденсаторов, то надо упростить заданную схему их соединения, выделив в схеме участки параллельного или последовательного соединения конденсаторов и представив их в виде эквивалентных емкостей. В ходе этого преобразования схемы надо знать, что точки схемы с равными потенциалами могут быть соединены или разъединены. Это можно использовать для получения более простой схемы. Процедуру просмотра схемы на предмет объединения ее ветвей в виде эквивалентных емкостей надо повторять до тех пор, пока дальнейшее упрощение уже не провести. Тогда в результате получится простая схема, легко поддающаяся расчету с применением формул для последовательного или параллельного соединения конденсаторов.

В задачах, где заданы некие действия с заряженным конденсатором (заполнение диэлектриком или его извлечение, изменение расстояния или площади перекрытия обкладок) и спрашивается, какая затрачена работа или какое количество тепла выделилось и т.д. и т.п., для решения задачи надо определить разность энергии конденсатора в начальном и конечном состояниях. При рассмотрении соединения заряженных конденсаторов следует помнить, что в параллельном соединении у всех конденсаторов становится одинаковой разность потенциалов обкладок, а заряды конденсаторов могут быть разными (при этом общий заряд сборки равен сумме зарядов этих конденсаторов). При последовательном соединении одинаковыми становятся заряды пластин, а падение напряжения на каждом из конденсаторов может иметь свое значение, в то время как общее напряжение сборки является суммой напряжений на отдельных конденсаторах.

Законы постоянного тока

В этом разделе содержатся задачи по нахождению проводимости заданных структур, по расчету электрических цепей и по рассмотрению превращения энергии электрического тока в тепловую форму энергии.

При рассмотрении заданной электрической цепи часто бывает полезно перечертить ее, чтобы получить новую, более наглядную и простую эквивалентную схему, в которой становится очевидным тип соединения (последовательное или параллельное) составных частей схемы (как ветвей цепи, так и отдельных элементов – резисторов, источников тока, конденсаторов). В ходе этой процедуры стоит использовать то, что в заданной схеме можно соединять или разъединять точки, имеющие равные потенциалы. Начинают составление эквивалентной схемы с рассмотрения каждой ветви заданной цепи. Упростив вид соединения элементов внутри каждой ветви, повторяют эту процедуру в отношении соединения целых ветвей. Эти процедуры проводят до тех пор, пока дальнейшего упрощения схемы уже не удается получить. Теперь можно использовать формулы для расчета сопротивления параллельно или последовательно соединенных резисторов, а также применить закон Ома для участков цепи и для всей замкнутой цепи. Определяя суммарную ЭДС включенных в участок цепи источников тока, нужно следить за тем, чтобы ЭДС встречно включенных источников вошли в сумму с разными знаками. Надо также учитывать то, что конденсатор не пропускает постоянный ток, поэтому сила тока на участке цепи, где конденсатор последовательно соединен с другими элементами, равна нулю.

Расчет сложных разветвленных электрических цепей производят с помощью правил Кирхгофа. При этом выполняют следующие действия:

а) определяют по схеме общее количество ветвей цепи M и узлов N

б) совершенно произвольно обозначают на схеме направления токов во всех ветвях

в) выделяют в схеме независимые контуры, следя за тем, чтобы каждый новый найденный контур включал в себя хотя бы одну ветвь, не содержащуюся в выделенных ранее контурах, после чего опять же произвольно выбирают направления обхода контуров г) составляют для любых (N-1) узлов систему уравнений для токов согласно первому правилу Кирхгофа, помня о том, что входящий в узел ток принято считать положительным, а вытекающий из узла – отрицательным

д) к этой системе уравнений добавляют M-(N-1) уравнений, составленных согласно второму правилу Кирхгофа для независимых контуров. При этом совершенно не нужно согласовывать между собой направления обхода выбранных контуров. Ток в ветви, входящей в разные контуры, может рассматриваться в одном уравнении как положительный (совпадая по направлению с выбранным направлением обхода этого контура), а в другом уравнении – как отрицательный. Здесь надо внимательно следить за правильностью записи знаков ЭДС источников тока, включенных в ветви контура : если при обходе контура идут *внутри* обозначенного на схеме источника от его «минуса» (отрицательного полюса) к «плюсу», т.е. если направление тока, который создает в ветви схемы именно этот источник (условно принято, что ток во внешней цепи направлен по направлению движения положительных зарядов – от «плюса» к «минусу»), совпадает с направлением обхода контура, то ЭДС этого источника входит в уравнение как положительная.

После этого решают полученную систему M уравнений относительно той входящей в них величины, которую надо определить по условию задачи (например, это может быть ток в одной из ветвей цепи, или сопротивление какого-нибудь резистора, или величина ЭДС). Если в результате получают отрицательные значения токов, это просто значит, что их действительные направления в схеме противоположны выбранным. Это же касается и ЭДС.

В задачах, рассматривающих переходные процессы в конденсаторах – их заряд и разряд, полезно иметь в виду, что сила тока в этих процессах максимальна в начальный момент времени в обоих случаях – и при заряде, и при разряде, тогда как разность потенциалов пластин спадает от максимума при разряде и возрастает от нуля при заряде.

В задачах по расчету проводимости слабопроводящих сред можно выделить два подхода: в первом используется известное выражение $R = \rho\, l\, /S$ для сопротивления цилиндрических проводников (где ρ – удельное сопротивление материала, l и S – соответственно длина и площадь поперечного сечения проводника), второй основан на применении закона Ома в обеих его формах.

Если задана система электродов такой конфигурации, что можно достаточно просто определить поперечное сечение проводника в любом месте межэлектродного промежутка, например, когда один из электродов окружен вторым, то этот промежуток делят на тонкие слои таким образом, чтобы поверхность каждого слоя в любой своей точке была поперечна направлению тока в этом месте, причем вследствие малой толщины «входную» и «выходную» (по току) поверхности слоя можно считать приблизительно равными, т.е. этот слой можно рассматривать как цилиндрический проводник длиной, равной толщине слоя. Тогда для слоя можно записать выражение для его сопротивления dR в приведенной выше форме, а затем проинтегрировать полученную формулу по всей толщине межэлектродного промежутка и найти тем самым общее сопротивление R всей заданной среды. Заметим, что этот подход применим как для однородной изотропной среды с постоянным значением ρ, так и при изменении ρ вдоль толщины межэлектродного промежутка. В последнем случае заданная координатная зависимость ρ просто вводится в формулу для dR .

Если поперечное сечение выделить сложно (например, при рассмотрении погруженных в среду электродах, отстоящих друг от друга на большое по сравнению с их размерами расстояние), то используют следующий прием: условно заряжают электроды зарядами +q и – q, после чего положительный электрод окружают замкнутой поверхностью, прилегающей к электроду, и с учетом геометрии электрода определяют на этой поверхности созданную зарядом q напряженность электрического поля E, полагая, что заряд равномерно распределен по электроду (влияние второго электрода на это распределение мало из-за большого расстояния между электродами). Затем записывают силу тока, прошедшего через замкнутую поверхность, как $I = j\ S_{пов}$, где j – плотность тока, $S_{пов}$ – площадь поверхности. Используя дифференциальный закон Ома, получают формулу для тока I , содержащую заряд q (стоящий в выражении для E) и заданную величину ρ . Найдя по описанным выше методикам разность потенциалов U между электродами, определяют сопротивление среды R из закона Ома как R = U / I . При этом в числителе и знаменателе сокращается введенный заряд q.

При решении задач на превращение электрической энергии в тепловую используют закон Джоуля-Ленца. Отметим, что в хорошо известной форме $Q = I^2 R t$ этот закон справедлив в случае постоянного тока. Однако, в условии многих задач указывается, что сила тока в цепи изменяется. Тогда надо воспользоваться тем, что этот закон может считаться справедливым для бесконечно малого промежутка времени. Это дает возможность определить выделившееся в течение этого малого времени количество теплоты, записав закон в дифференциальном виде $dQ = I^2(t) R\ dt$. Обычно в задаче указывается характер изменения тока со временем (например, равномерное возрастание или убывание). С учетом этого условия следует записать формулу зависимости силы тока от времени I(t) и подставить ее в выражение для dQ . После этого можно найти выделившееся за все время общее количество теплоты Q путем интегрирования по времени полученного выражения dQ .

Магнитное поле постоянного тока

Решение задач по определению индукции или напряженности магнитного поля следует начинать с составления графической схемы задачи. На этом рисунке нужно обозначить направления токов во всех проводниках схемы и нанести в точке, рассматриваемой по условию задачи, векторы индукции магнитных полей, созданных всеми проводниками с током. При этом надо учесть, что согласно закону Био-Савара-Лапласа вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости, проведенной через элемент тока и радиус-вектор, направленный от этого элемента к точке наблюдения. Направление вектора индукции определяется по правилу буравчика (иначе называемому правилом правой руки или правого винта). Поскольку магнитная индукция и напряженность магнитного поля подчиняются принципу суперпозиции, полная величина магнитного поля в заданной точке будет определяться векторной суммой магнитных индукций (или напряженностей магнитного поля), обусловленных каждым проводником. Отметим здесь обстоятельство, которое часто значительно облегчает решение задачи: если по условию задачи *все проводники и заданная точка наблюдения* лежат в одной плоскости, то все векторы магнитной индукции в этой точке будут направлены вдоль одной прямой, и общую магнитную индукцию можно искать просто алгебраическим сложением модулей векторов с учетом их знаков. Если же хотя бы один проводник (или даже отрезок проводника) выходит из этой плоскости, то надо проводить векторное сложение магнитных индукций.

Если в задаче заданы тонкие прямолинейные проводники, то модули индукции и напряженности их магнитных полей определяются согласно известным формулам для бесконечных или ограниченных по длине прямых токов. В случаях, когда форма тонкого проводника отличается от прямолинейной, надо выделять на нем элементарные участки $\mathrm{d}l$, которые условно считаются прямолинейными, и обозначить на схеме задачи вектор магнитной индукции $\mathrm{d}\mathbf{B}$, созданный одним из элементов тока $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ в рассматриваемой точке. Модуль этого элементарного вектора магнитной индукции записывается согласно закону Био-Савара-Лапласа. Магнитная индукция всего проводника $\mathbf{B}$ равна векторной сумме индукций $\mathrm{d}\mathbf{B}$ всех элементов тока. При нахождении этой суммы, чтобы можно было применить операцию интегрирования, используют тот же прием, что и в задачах по электростатике: выбирают на схеме направления осей, определяют проекции вектора магнитной индукции произвольного элемента тока на эти оси, после чего для каждой оси применяют операцию интегрирования, определяя проекции общего вектора магнитной индукции всего проводника. Направления осей выбирают наиболее удобным образом для условия конкретной задачи. Так, если проводник имеет симметричную форму, то одну из осей лучше направить вдоль оси симметрии проводника. Полезно знать, что если магнитное поле обладает очевидной осевой симметрией (например, поле кольцевого тока или соленоида) и определяется величина магнитной индукции в точках оси симметрии, то в этих точках вектор $\mathbf{B}$ будет направлен вдоль этой оси.

Когда в задаче задан широкий проводник, то применяют следующий подход : условно разбивают проводник по ширине на набор параллельных тонких проводников, в каждом из которых течет часть общего тока, и определяют магнитную индукцию, созданную каждым из этих проводников в рассматриваемой точке, после чего находят общую магнитную индукцию как сумму индукций этих проводников. Обычно в задачах данного курса ограничиваются случаем широких прямолинейных проводников постоянного сечения. В таких задачах ток в каждом условном тонком проводнике может быть записан как I (d*a* /*a*) , где I – общий ток в широком проводнике, d*a* и *a* – ширина условного и заданного широкого проводников соответственно. Если задано, что проводник плоский и точка наблюдения лежит в этой же плоскости, то общая магнитная индукция определяется путем алгебраического суммирования магнитных индукций полей условных проводников, проводимого в форме интегрирования по переменной – расстоянию от условного проводника до точки наблюдения. При этом, в качестве приращения этого расстояния выступает элементарная ширине d*a* условного тонкого проводника. Если же в задаче заданы другие условия, касающиеся формы сечения проводника или положения точки наблюдения, то надо проводить векторное суммирование магнитных индукций токов условных тонких проводников, и для применения интегрирования действовать как описано выше, а именно – разложить вектор индукции условного тока по выбранным осям и раздельно интегрировать проекции на эти оси, находя компоненты общего вектора магнитной индукции.

В некоторых задачах, особенно там, где заданный проводник имеет осевую симметрию, для решения удобно использовать закон полного тока или, иначе, теорему о циркуляции магнитной индукции. При этом надо выбирать контур обхода, учитывая следующие соображения. Контур должен полностью совпадать с линией магнитной индукции, в точках которой величина индукции имеет одинаковое значение, либо часть контура проводится так, чтобы быть перпендикулярной вектору индукции на этом участке. Это позволяет обнулить скалярное произведение **H**•d***l*** на одних частях контура и записать его просто как произведение модулей этих векторов H d*l* при проходе вдоль других частей контура. Примерами могут служить контур-окружность вокруг прямолинейного проводника круглого сечения (или внутри него, если надо рассмотреть такие точки), а также прямоугольный контур, пересекающий по нормали поперечное сечение плоского проводника. Направление обхода контура выбирается произвольно, а охватываемые контуром токи считаются положительными, если их направление соотносится с выбранным направлением обхода контура согласно правилу буравчика (правого винта). Если в результате решения задачи величина магнитной индукции (или напряженности магнитного поля) оказывается отрицательной, это значит, что действительное направление этого вектора противоположно выбранному направлению обхода контура.

В некоторых задачах заданы «дефектные» проводники, для которых, если бы они были целыми, было бы удобно использовать закон полного тока (например, трубчатый проводник с продольной прорезью или проводник круглого сечения с продольной полостью). Тогда, чтобы использовать этот закон, поступают следующим образом: проводник условно считают бездефектным, а в месте дефекта мысленно накладывают (вкладывают) другой проводник, в котором течет ток той же плотности тока j , что и в заданном проводнике, но в обратном направлении. Затем определяют магнитное поле каждого из этих токов в точке наблюдения. Искомое поле заданного «дефектного» проводника равно векторной сумме магнитных полей условного бездефектного и добавленного проводников со встречными токами.

Влияние электрических и магнитных полей на движущиеся заряды и проводники с током

Влияние стационарных во времени электрических полей на движение зарядов сводится к действию на заряды кулоновской силы, определяемой через заданную в задаче напряженность электрического поля как $\mathbf{F} = Q\,\mathbf{E}$. Обычно в рамках данного курса ограничиваются случаем движения точечного заряда. Кулоновскую силу следует обозначить на схематическом чертеже задачи (не забыв обратить внимание на знак заряда Q), после чего решение задачи о движении заряженной частицы проводить согласно обычным методикам решения задач по динамике механического движения.

Поскольку электрический ток есть направленное движение заряженных частиц, то по своей сути влияние магнитного поля на движущиеся заряды и проводники с током одинаковое. Оно проявляется в появлении силы, действующей на заряд или проводник и вызывающей, согласно 2-му закону Ньютона, возникновение сонаправленного с ней ускорения. Направление как силы Ампера (действующей на проводник), так и силы Лоренца (действующей на движущийся заряд) определяется одним и тем же правилом – так называемым правилом левой руки. Согласно этому правилу, если поставить левую руку так, чтобы вектор магнитной индукции как бы вонзался в ладонь и направить пальцы руки по направлению тока (движения заряженной частицы), то отставленный вбок большой палец покажет направление силы Ампера (Лоренца). Следует помнить, что такой способ определения направления силы Лоренца справедлив для *положительных* зарядов, а в случае отрицательных зарядов направление силы Лоренца будет противоположным.

Приступая к решению задачи, следует составить векторную диаграмму, указав на ней направление тока в проводнике (или вектор скорости движущегося заряда), вектор магнитной индукции и обозначив вектор силы, действующей на проводник или заряд. Если форма проводника (в том числе контура) соответствует ломаной линии, то следует разбить его на прямые отрезки и обозначить векторы силы Ампера, действующей на каждый участок контура. Общая сила находится векторной суммой этих сил. Если в проводнике нельзя выделить прямые участки (например, он имеет форму дуги), то его надо разбить на участки элементарной длины $\mathrm{d}l$, которые можно считать прямолинейными, и обозначить вектор силы Ампера $\mathrm{d}\mathbf{F}$, действующей на произвольно взятый участок. Тогда закон Ампера записывают для элемента тока $(I\ \mathrm{d}\boldsymbol{l})$: $\mathrm{d}\mathbf{F} = I\ [\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathbf{B}]$. Общая сила $\mathbf{F}$ является векторной суммой этих элементарных сил $\mathrm{d}\mathbf{F}$ и находится согласно описанной выше процедуре, когда выбираются наиболее удобным образом оси координат, записываются проекции силы $\mathrm{d}\mathbf{F}$ на эти оси и проводится раздельное интегрирование полученных выражений для нахождения проекций общего вектора силы $\mathbf{F}$, действующей на весь проводник.

В некоторых задачах контур проводника имеет вид рамки, закрепленной в каких-то своих точках на некоторой оси вращения. В этом случае, обозначив на чертеже векторы силы Ампера, решение задачи надо проводить в терминах моментов сил, как и положено при рассмотрении динамики вращательного движения тела.

Следует отметить, что в разных учебниках и задачниках в понятие силы Лоренца вкладывают разное содержание. В большинстве из них силой Лоренца называют силу воздействия со стороны магнитного поля на движущийся заряд. Однако, некоторые авторы применяют этот термин для обозначения общей силы, которая действует на заряд и со стороны электрического поля, и со стороны магнитного поля : $\mathbf{F} = Q\ \mathbf{E} + Q[\mathbf{V}\times\mathbf{B}]$, где $\mathbf{V}$ – вектор скорости движения заряда. Обычно же это равенство называют формулой Лоренца, а под силой Лоренца понимают только второе слагаемое.

Если по условию задачи на движение заряда одновременно оказывают влияние электрические и магнитные поля, то на схеме надо обозначить векторы кулоновской и лоренцевой сил, определив их направления по отмеченным выше правилам, после чего обычным образом решать задачу по динамике движения заряда. При этом надо помнить, что изменение кинетической энергии заряженной частицы происходит под действием только электрического поля, тогда как магнитное поле изменяет направление, но не модуль скорости частицы.

В этом же разделе рассматриваются задачи по нахождению работы, затраченной при изменении положения контура с током в магнитном поле. Заметим, что такие задачи целесообразно решать на основе наиболее общего подхода, определяя эту работу по формуле $A = I\ \Delta\Phi_м$, где $\Delta\Phi_м$ – изменение пронизывающего контур магнитного потока, I – сила тока в контуре. Эта общая формула позволяет определить работу и при вращении контура, и при его поступательном перемещении, и в случае комбинации этих движений. При этом надо следить, не изменился ли знак величины магнитного потока при повороте контура в магнитном поле, вспомнив о том, что элементарный поток определяется как $d\Phi_м = B_n\ dS$, где B_n – проекция вектора **B** на главную нормаль **n** площадки dS контура, направление которой связано правилом буравчика (правого винта, правой руки) с направлением тока в контуре. При повороте контура поворот вектора **n** может привести к изменению знака B_n.

Общий пронизывающий контур магнитный поток определяется суммированием потоков $d\Phi_м$ (интегрированием по площади контура). По возможности, облегчают эту процедуру тем, что в качестве dS выбирают не точечные площадки, а их объединения, составленные из таких площадок, для которых величина B_n одинакова (например, если магнитное поле создано лежащим в одной плоскости с контуром прямым проводником, то такой групповой площадкой в контуре будет параллельная проводнику полоска малой ширины dr, отстоящая на текущее расстояние r от проводника). Выразив dS через dr, можно проводить интегрирование по переменной r с учетом зависимости B_n (r). В случае однородного магнитного поля можно сразу записать : $\Phi_м = B_n\ S_{контура}$.

Электромагнитная индукция.

Задачи, в которых по условию возникает явление электромагнитной индукции, решаются с привлечением закона Фарадея, согласно которому при изменении магнитного потока $\Phi_м$ сквозь контур в нем возникает ЭДС $\epsilon_и$. Направление вызываемого ею индукционного тока надо определять с помощью правила Ленца: создаваемое этим током магнитное поле препятствует заданному в задаче изменению магнитного потока. Значит, если задано увеличение магнитного потока через контур, то поле индукционного тока направлено встречно к магнитной индукции исходного поля. Наоборот, при заданном уменьшении магнитного потока направления исходного и индукционного магнитных полей совпадают. Определив индукционного магнитного поля, находят по правилу буравчика (правого винта) направление индукционного тока в контуре и обозначают его на схематическом чертеже. Можно также вставить в схему контура дополнительный источник тока, имеющий ЭДС, равную $\epsilon_и$. Будучи обозначен на схеме, этот источник не позволит забыть учесть ЭДС индукции, если по ходу решения задачи потребуется записать найти общую силу тока в рассматриваемом контуре.

По описанной выше методике определяется выражение для пронизывающего контур магнитного потока, после чего для нахождения ЭДС просто берется производная по времени.

Надо подчеркнуть, что при движении проводников в магнитном поле закон Фарадея применяют для нахождения ЭДС не всегда. Он используется только, если контур, в который встроен движущийся проводник, проходит *через одни и те же точки* движущегося проводника (например, контур, в котором одна сторона-перемычка катится по параллельным сторонам-электродам). Примером случая, когда закон Фарадея использовать нельзя, служит схема, где вращается помещенный в однородное магнитное поле металлический диск, а к его оси и ободу приставлены скользящие контакты внешней цепи, образующей с диском контур. При вращении диска магнитный поток через контур не меняется, а ЭДС все же возникает. Значит здесь, где одна сторона контура проходит все время *через разные радиусы* диска при его вращении, закон Фарадея приведет к неверному результату. В таких случаях для поиска ЭДС используют ее определение через работу сторонних сил и записывают: $Є_и = (1/e) \int \mathbf{F_л}\, d\boldsymbol{l}$, где е – модуль заряда электрона, $\mathbf{F_л}$ – сила Лоренца, выступающая здесь как сторонняя сила.

Если задано движение незамкнутого проводника в магнитном поле и надо найти разность потенциалов на его концах, то тогда мысленно дополняют этот проводник до замкнутого контура неподвижными электродами, по которым скользят концы проводника, и находят искомую разность потенциалов по закону Фарадея как возникшую ЭДС индукции.

Когда в задаче требуют найти заряд, прошедший в сечении контура при изменении магнитного потока, дополнительно записывают закон Ома для замкнутого контура и определение силы тока $i = dq / dt$. Тогда, подставив ЭДС из закона Фарадея, получают в итоге формулу $q = – \Delta\Phi_м /R$, где R – сопротивление контура.

Изменение пронизывающего контур магнитного потока может быть обусловлено также изменением собственного магнитного поля контура, когда по условию в контуре течет созданный некоторым источником ток *i*, и задано изменение силы этого тока. Этот случай изменения собственного магнитного потока контура принято выделять в отдельную категорию электромагнитной индукции и называть явлением самоиндукции. При решении таких задач используется специальная форма записи закона Фарадея, связывающая ЭДС самоиндукции прямо со скоростью изменения тока в цепи: $Є_{си} = – d(L\ i) / dt$, где индуктивность контура L является коэффициентом пропорциональности между силой тока и собственным магнитным потоком контура: $\Phi_{мс} = L\ i$. Кстати, последняя формула служит основой общего способа определения величины L объекта (провода, коаксиального кабеля и т.д.) : мысленно пускают ток *i*, записывают выражение для созданной им магнитной индукции В и по описанной выше методике определяют пронизывающий объект магнитный поток, что дает выражение для L как коэффициента пропорциональности потока и силы тока. Отметим здесь, что индуктивность соленоида с ферромагнитным сердечником будет зависеть от силы тока в катушке из-за зависимости величины μ от магнитного поля в сердечнике. Поэтому при решении задачи с таким условием надо поискать график этой зависимости в справочном разделе задачника.

Отметим также и то, что если контур содержит некоторое количество витков проводника, то и $\Phi_м$, и $\Phi_{мс}$ заменяются в формулах на величину Ψ, называемую потокосцеплением и равную сумме магнитных потоков через все витки контура. Если в задаче рассматривается катушка с N витками одинакового размера, то тогда $\Psi = N\ \Phi_м$. Кроме того, число витков N надо не забыть учесть и при необходимости расчета сопротивления катушки заданных габаритов, когда по ходу решения надо найти силу индукционного тока.

В ряде задач рассматривается явление взаимной индукции: при наличии магнитной связи между контурами изменение тока в одном контуре вызывает возникновение ЭДС в другом. Запись закона Фарадея в этом случае использует коэффициент, называемый взаимной индуктивностью. Полезно помнить о теореме взаимности $L_{12} = L_{21}$, утверждающей равенство взаимных индуктивностей контуров при отсутствии ферромагнетиков в схеме задачи. Смысл этой теоремы в том, что магнитный поток, созданный током I первого контура во втором, равен магнитному потоку, созданному в первом контуре *таким же током* I второго контура. Эта теорема позволяет упростить нахождение магнитных потоков при сложной конфигурации поля, созданного одним из связанных контуров. Тогда просто рассчитывают магнитный поток уже через этот «трудный» контур, созданный таким же током, но текущем в другом контуре, поле которого легче описать. Напомним, что энергия связанных контуров (и образованного ими магнитного поля) складывается из сугубо положительных собственных энергий и взаимной энергии : $W = L_1\ I_1^2/2 + L_2\ I_2^2/2 + L_{12}\ I_1I_2/2 + L_{21}\ I_1I_2/2$, где взаимная энергия меняет знак при перемене направления одного из токов и может быть отрицательной.

Заключение

Как отмечено выше, представленные рекомендации по решению задач охватывают круг обязательных вопросов базового курса общей физики. Материал разбит на разделы, каждый из которых в рамках трехсеместрового курса обучения общей физике может быть рассмотрен на одном или двух практических занятиях. Однако, при проведении занятий по двухсеместровому курсу проводится ограничение тематики рассматриваемых типовых задач и комбинирование содержания предложенных разделов. При таком сжатии материала освобождающиеся часы занятий используются для изучения оставшихся обязательных разделов двухсеместрового курса общей физики. В этом случае, студентам следует обратиться к дополнительным методическим материалам, затрагивающим вопросы курса, не рассмотренные в данном учебном пособии.