

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Н.М. Вайсман, В.А. Голиков, А.А. Жарковский

**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА.  
ГИДРАВЛИКА**

Учебное пособие

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 15.00.00 «Машиностроение» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования направлений подготовки бакалавриата 15.03.01 «Машиностроение» и 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»*

Издательство Политехнического университета

Санкт-Петербург

2016

УДК 532:533 (075.8)

ББК 22.253я73

В14

Р е ц е н з е н т ы :

Заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук,  
профессор Омского государственного технического университета

*В.Е. Щерба*

Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского  
политехнического университета Петра Великого *А.Н. Скляревский*

*Вайсман Н.М. Механика жидкости и газа. Гидравлика : учеб. пособие / Н.М. Вайсман, В.А. Голиков, А.А. Жарковский. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 222 с.*

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту подготовки бакалавров по направлению 15.03.02 "Технологические машины и оборудование", а также направлению подготовки аспирантов 15.06.01 "Машиностроение", направленность 15.06.01\_12 "Гидравлические машины и гидропневоагрегаты" (научная специальность 05.04.13 "Гидравлические машины и гидропневоагрегаты").

Рассмотрены основные законы и уравнения гидравлики, охватывающие разделы физических свойств, гидростатики, кинематики и динамики жидкостей, гидродинамического подобия и особых случаев течения.

Изложены основные вопросы, направленные на приобретение студентами теоретических знаний, компетенций и практических навыков по исследованию процессов, протекающих в жидких средах, с ориентацией на лопастные гидромашин, гидравлические и пневматические приводы.

Предназначено для студентов Института энергетики и транспортных систем, изучающих курсы "Механика жидкости и газа" и "Гидравлика" по профилю 13.03.03\_05 "Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневоавтоматика" и другим профилям направления 13.03.03 "Энергетическое машиностроение", связанным с механикой жидкости и лопастными турбомашинами.

Табл. 11. Ил. 127. Библиогр.: 25 назв.

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета

Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

©Вайсман Н.М., Голиков В.А.

Жарковский А.А., 2016

© Санкт-Петербургский политехнический

университет Петра Великого, 2016

ISBN 978-5-7422-2841-7

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
Принятые обозначения.....	8
ВВЕДЕНИЕ.....	10
ГЛАВА 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ.....	11
1.1. Молекулярная структура рабочих сред.....	11
1.2. Силы, действующие в жидкости.....	13
1.3. Характеристики и свойства рабочих жидкостей.....	17
1.3.1. Уравнение состояния и объёмные деформации.....	17
1.3.2. Сжимаемость жидкости и модуль объёмной упругости.....	20
1.3.3. Плотность сплошной среды.....	22
1.3.4. Вязкость рабочих жидкостей.....	23
1.3.5. Поверхностное натяжение.....	28
1.3.6. Растворимость газов в жидкостях.....	30
ГЛАВА 2. ГИДРОСТАТИКА.....	31
2.1. Свойства гидростатического давления.....	32
2.2. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнения равновесия Эйлера).....	35
2.3. Основное уравнение гидростатики.....	39
2.3.1. Давление в произвольной точке покоящейся жидкости.....	41
2.3.2. Гидростатический напор.....	44
2.3.3. Сила гидростатического давления.....	47
2.3.4. Гидростатический парадокс.....	49
2.3.5. Центр гидростатического давления на плоскую поверхность.....	50
2.3.6. Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность.....	52
2.4. Относительный покой жидкости.....	55
2.4.1. Равномерное прямолинейное движение сосуда.....	56
2.4.2. Равноускоренное прямолинейное движение сосуда.....	57
2.4.3. Равномерное вращение сосуда вокруг вертикальной оси.....	59
2.4.4. Равномерное вращение сосуда вокруг горизонтальной оси.....	63
ГЛАВА 3. ГИДРОДИНАМИКА.....	66
3.1. Основные понятия и определения.....	66

3.2. Режимы движения жидкости.....	70
3.3. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера).....	73
3.4. Уравнения движения Эйлера в естественной системе координат.....	77
3.5. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся абсолютном движении .....	79
3.6. Физический смысл уравнения Бернулли.....	80
3.7. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при неустановившемся движении.....	82
3.8. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся относительном движении.....	83
3.9. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости.....	89
3.9.1. Установившееся абсолютное движение.....	89
3.9.2. Неустановившееся абсолютное движение.....	90
3.9.3. Установившееся относительное движение.....	91
3.10. Характеристики потока жидкости.....	91
3.11. Уравнение неразрывности для потока жидкости.....	93
3.12. Мощность потока при установившемся движении.....	94
3.13. Коэффициент Кориолиса.....	97
3.14. Инерционная мощность потока .....	99
3.15. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости .....	102
ГЛАВА 4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ.....	105
4.1. Подобие потоков жидкости.....	106
4.1.1. Геометрическое подобие.....	106
4.1.2. Кинематическое подобие.....	107
4.1.3. Динамическое подобие.....	108
4.2. Классификация гидравлических сопротивлений.....	111
4.3. Потери на трение при равномерном ламинарном движении в трубе.....	112
4.3.1. Дифференциальное уравнение ламинарного движения.....	112
4.3.2. Закон распределения скоростей в поперечном сечении трубы.....	114

4.3.3. Расход жидкости в круглой трубе .....	115
4.3.4. Формирование равномерного ламинарного движения в трубе.....	117
4.3.5. Потери напора на гидравлическое трение.....	118
4.3.6. Ламинарное движение жидкости между двумя соосными неподвижными цилиндрами.....	120
4.3.7. Закон изменения напряжения трения в круглой трубе.....	125
4.4. Потери на трение при турбулентном напорном движении в круглой трубе.....	126
4.4.1. Дифференциальное уравнение турбулентного движения.....	126
4.4.2. Закон распределения скоростей при турбулентном движении.....	130
4.4.3. Потери напора на гидравлическое трение при турбулентном движении.....	135
4.4.4. График Никурадзе.....	142
ГЛАВА 5. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ.....	145
5.1. Местные сопротивления и принцип наложения потерь.....	145
5.2. Потери напора при внезапном расширении.....	149
5.3. Теорема Борда-Карно.....	152
5.4. Потери энергии при внезапном сужении потока.....	156
5.5. Потери энергии в диафрагмах.....	159
5.6. Постепенное расширение потока. Диффузорные потери.....	160
5.7. Постепенное сужение потока. Конфузорные потери.....	165
5.8. Потери удельной энергии при повороте потока.....	167
5.9. Дросселирующие устройства.....	171
ГЛАВА 6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ.....	175
6.1. Истечение через малое отверстие при постоянном напоре.....	175
6.2. Истечение через насадки при постоянном напоре.....	179
ГЛАВА 7. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ.....	182
7.1. Классификация трубопроводов.....	182

7.2. Расчет простого короткого трубопровода постоянного сечения.....	184
7.3. Расчет простого короткого трубопровода переменного сечения.....	189
7.4. Расчет сифонного трубопровода.....	190
7.5. Расчет простого трубопровода, соединяющего резервуары.....	193
7.6. Определение давления в произвольной точке трубопровода.....	194
7.7. Графоаналитический метод расчета простого трубопровода.....	195
7.8. Расчет сложного разветвленного трубопровода.....	196
7.9. Графоаналитический метод расчета разветвленного трубопровода.....	199
7.10. Расчет длинных трубопроводов (водопроводные линии).....	201
7.10.1. Основы расчета длинных трубопроводов.....	201
7.10.2. Последовательное соединение трубопроводов.....	205
7.10.3. Последовательно-параллельное соединение трубопроводов.....	206
<b>ГЛАВА 8. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР</b> <b>В ТРУБОПРОВОДАХ.....</b>	<b>208</b>
8.1. Явление гидравлического удара.....	208
8.2. Формула Н.Е. Жуковского.....	214
Список литературы.....	225

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем учебном пособии изложены разделы классического курса гидравлики, в которых рассматриваются физические свойства, законы равновесия и движения жидкостей, используемых в гидравлических машинах различного назначения.

Изложение материала соответствует программе дисциплины «Гидравлика, гидравлические машины и гидропневмоприводы», предусмотренной рабочими учебными планами в высших учебных заведениях при подготовке бакалавров, специалистов и магистров энергомашиностроительного и технологического профиля.

Пособие также может быть полезно студентам и аспирантам судостроительного, водохозяйственного, нефтехимического и других направлений подготовки, связанных с использованием жидкости, как рабочего тела или транспортируемого материала.

Авторы выражают глубокую благодарность Заслуженному деятелю науки, профессору М.Е. Подольскому за внимание к настоящей работе, ценные советы и замечания, которые мы постарались учесть в окончательной редакции учебного пособия.

### Принятые обозначения:

$M, m$  – масса, кг;

$W$  – объем, м<sup>3</sup>;

$Q$  – объемный расход, м<sup>3</sup>/с;

$H$  – напор, м;

$H_{\text{гст}}$  – гидростатический напор, м;

$H_{\text{гд}}$  – гидродинамический напор, м;

$T$  – температура, °К;

$K$  – количество движения, кг·м/с;

$N$  – мощность, Вт;

$A$  – работа, Дж;

$F_{\text{тр}}$  – сила трения, Н;

$G$  – сила тяжести, Н;

$I$  – сила инерции, Н;

$R$  – сила поверхностная, Н;

$V, \vec{V}$  – абсолютная скорость, вектор абсолютной скорости, м/с;

$V_x, V_y, V_z$  – проекции абсолютной скорости на оси координат, м/с;

$V'_x, V'_y, V'_z$  – проекции пульсационной составляющей скорости на оси координат, м/с;

$\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z$  – проекции осредненной по времени скорости на оси координат, м/с;

$\vec{W}$  – вектор относительной скорости, м/с;

$\vec{U}$  – вектор переносной скорости, м/с;

$S$  – площадь, м<sup>2</sup>;

$R_{\text{г}}$  – гидравлический радиус, м;

$J$  – гидравлический уклон;

$J_{\text{п}}$  – пьезометрический уклон;

$a$  – ускорение, м/с<sup>2</sup>;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$h$  – потери напора, м;

$p$  – абсолютное давление, Па;

$p_{\text{ат}}$  – барометрическое (атмосферное) давление, Па;

$p_{\text{изб}}$  – избыточное давление, Па;  
 $p_{\text{вак}}$  – вакуумметрическое давление, Па;  
 $p_d$  – давление насыщенных паров, Па;  
 $t$  – время, с;  
 $\alpha$  – коэффициент Кориолиса – коэффициент неравномерности распределения кинетической энергии по живому сечению потока;  
 $\beta$  – коэффициент Буссинеска – коэффициент неравномерности распределения количества движения по живому сечению потока;  
 $\beta_p$  – коэффициент объемного сжатия, 1/Па;  
 $\beta_T$  – коэффициент температурного расширения, 1/град;  
 $\chi$  – смоченный периметр, м;  
 $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения;  
 $\mu$  – динамический коэффициент вязкости, Па·с;  
 $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости, м<sup>2</sup>/с;  
 $\tau$  – касательное напряжение, Па;  
 $\omega$  – угловая скорость, 1/с;  
 $\zeta$  – коэффициент местных потерь;  
 $\alpha$  – постоянная Кармана;  
 $\nabla$  – геодезическая отметка уровня свободной поверхности, м.

## ВВЕДЕНИЕ

При разнообразии гидравлических машин по принципу действия и конструкции их объединяет то, что рабочим телом в гидромашинах является жидкость, изучением законов движения которой в наиболее строгой физико-математической постановке занимается наука, называемая гидромеханикой.

Гидравлика – прикладная наука, изучающая равновесие и движение различных жидкостей, их взаимодействие с твердыми телами. Можно сказать, что гидравлика является технической механикой жидкости (технической гидромеханикой).

Сложность явлений, происходящих в движущейся жидкости, не позволяет во многих случаях довести результаты теоретических исследований в гидромеханике до практического применения. В гидравлике широко используют различные допущения и упрощающие предположения, экспериментальные данные, оперируют, как правило, средними по сечениям скоростями, стремятся к оценке только главных характеристик течения. В результате, с использованием методов гидравлики решают многие сложные практические задачи.

Научную основу гидравлики составляют законы общей физики, теоретической механики, гидромеханики.

Широкое использование гидравлических машин, в которых жидкость является либо рабочим телом, либо транспортируемым материалом, требует от инженеров знаний в области гидравлики.

Многие закономерности, действующие в жидкостях, могут быть распространены и на газы, если скорости их движения не превышают 50...70 м/с. При таких скоростях плотность газов изменяется не более чем на (1...2) % и ее величина в практических расчетах может быть принята постоянной.

# ГЛАВА 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

## 1.1. Молекулярная структура рабочих сред

Вещества могут находиться в трех агрегатных состояниях – твёрдом, жидком и газообразном. Агрегатное состояние вещества определяется особенностями атомно-молекулярной структуры тел и силами взаимодействия между молекулами. На некотором расстоянии  $r = r_0$  сила взаимодействия между молекулами равна нулю (рис. 1.1). Если  $r < r_0$ , то сила взаимодействия проявляется как сила отталкивания, если  $r > r_0$ , то сила взаимодействия проявляется как сила притяжения (см. рис. 1.1).

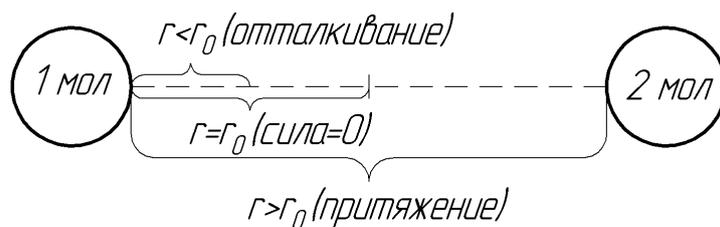


Рис. 1.1. Схема межмолекулярного взаимодействия

В твёрдых телах молекулы располагаются на расстояниях, примерно равных расстоянию  $r_0$  (см. рис. 1.1), и образуют кристаллическую решётку. Молекулярные движения представляют собой колебания молекул относительно центров в жесткой решетке. Благодаря этому твёрдые тела сохраняют объём и форму.

В газах при нормальных условиях межмолекулярные расстояния велики, а силы притяжения малы. Каждая молекула испытывает слабое воздействие со стороны других. Это позволяет в теории пренебречь силами взаимодействия между ними. Модель газа, в которой пренебрегают межмолекулярным взаимодействием, называют совершенным газом. Молекулы совершенного газа движутся прямолинейно и равномерно до столкновения друг с другом. Благодаря свободному

движению молекул газ может неограниченно расширяться во все стороны и принимать форму сосуда, в котором он заключён.

Жидкости по молекулярному строению занимают промежуточное положение между твёрдым телом и газом. Молекулы жидкостей расположены почти так же плотно, как в твёрдом теле (расстояния между молекулами соизмеримы с размерами молекул). Жидкости, как и твёрдые тела, устойчиво сохраняют занимаемый объём.

В твёрдых телах и жидкостях существует «свободный» объём  $W_F$ , равный разности объёма тела  $W$  и собственно объёма его молекул  $W_0$ . Их отношение называют коэффициентом упаковки:

$$K = \frac{W_0}{W} .$$

Для твёрдых тел коэффициент упаковки  $K = 0,625$ , для жидкостей –  $K = 0,5$ .

Структуру жидкостей можно представить в виде множества определённым образом организованных молекулярных комплексов (роёв), совершающих тепловое движение. Между комплексами спонтанно возникают и исчезают микропустоты. Образование и размеры микропустот в жидкости определяются уровнем ее внутренней энергии, которая зависит от температуры  $T$  и давления  $p$ , поэтому существует зависимость «свободного» объёма от давления и температуры

$$W_F = f(p, T).$$

При очень высоких давлениях жидкости ведут себя подобно аморфному твёрдому телу, а при очень высоких температурах подобно сильно сжатому газу.

Если на границе жидкости приложена сдвигающая касательная сила, то возникает течение в направлении действия силы. Для большинства жидкостей эта сила может быть сколь угодно малой. В этом проявляется основное физическое свойство жидкости – текучесть.

## 1.2. Силы, действующие в жидкости

Выделим в жидкости некоторый объём  $W$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 1.2). В общем случае на него будут действовать две группы сил:

1. Массовые (объемные) – силы, величина которых пропорциональна массе (объему) жидкости. Они приложены к каждой материальной частице  $M$  выделенного объема. К массовым силам относят силы тяжести, инерции, электромагнитные силы.

2. Поверхностные – силы, величина которых пропорциональна площади поверхности выделенного объема жидкости. Это те силы, которые действуют на поверхность рассматриваемого объема со стороны окружающей его жидкости. По отношению к рассматриваемому объему поверхностные силы являются внешними. К поверхностным силам относят силы давления и трения.

Рассмотрим элементарную площадку  $\Delta S$  на поверхности  $S$  выделенного объема  $W$  (см. рис. 1.2).

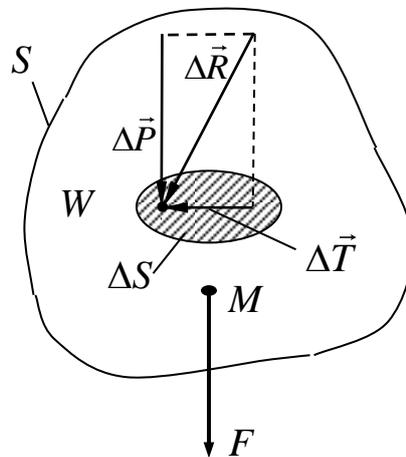


Рис. 1.2. Схема действия поверхностных сил

На эту площадку будет действовать поверхностная сила  $\Delta \vec{R}$ , которая может быть разложена на две составляющие:  $\Delta \vec{P}$  – нормальная составляющая;  $\Delta \vec{T}$  – касательная составляющая.

Нормальная составляющая поверхностной силы  $\Delta\vec{P}$  может быть направлена в сторону внешней нормали к поверхности, тогда это растягивающая сила (рис. 1.3).

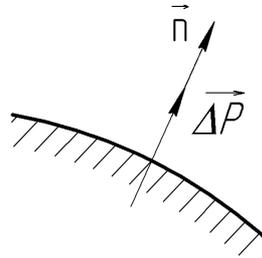


Рис. 1.3. Нормальная растягивающая сила

Сила  $\Delta\vec{P}$  может быть направлена в сторону внутренней нормали, тогда это сжимающая сила – сила давления (рис. 1.4).

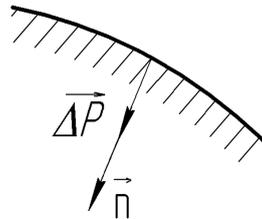


Рис. 1.4. Нормальная сжимающая сила

Физическая величина, являющаяся пределом отношения нормальной сжимающей силы к площади, на которую она действует, при стягивании этой площади в точку, называется давлением в точке:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}.$$

При равномерном распределении нормальной сжимающей силы  $P$  по поверхности, на которую она действует, давление определяется как

$$p = \frac{P}{S}.$$

Таким образом, давление представляет собой нормальное сжимающее напряжение.

В системе СИ давление измеряется в Паскалях

$$[p] = 1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

килопаскалях

$$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$$

или мегапаскалях

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}.$$

На практике давление часто измеряют в технических атмосферах:

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}.$$

Связь между этими единицами измерения можно установить из выражения для силы тяжести:

$$G = mg;$$

$$1 \text{ кгс} = 1 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 9,8 \text{ Н};$$

$$1 \text{ ат} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 \approx 10^5 \text{ Па} = 0,1 \text{ МПа};$$

$$1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ ат}.$$

Атмосфера – внесистемная единица измерения давления, приблизительно равная атмосферному давлению на поверхности Земли на уровне Мирового океана. Существуют две примерно равные друг другу единицы с таким названием:

1. Стандартная, нормальная или физическая атмосфера (атм) – в точности равна 101 325 Па или 760 миллиметрам ртутного столба. Это давление, уравниваемое столбом ртути высотой 760 мм при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ , плотности ртути 13595,1 кг/м<sup>3</sup> и нормальном ускорении свободного падения 9,80665 м/с<sup>2</sup>.

2. Техническая атмосфера (ат, кгс/см<sup>2</sup>) – равна давлению, производимому силой от массы в 1 кг при ускорении  $g$  (т. е. 1 килограмм-сила, кгс), которая направлена перпендикулярно и равномерно распределена по плоской поверхности площадью 1 см<sup>2</sup> (98066,5 Па).

Таблица 1.1

## Единицы измерения давления

	Паскаль	Бар	Техн. атм.	Физ. атм.	мм рт.ст.	м вод.ст.
	Па	бар	ат	атм	мм рт.ст.	м. вод.ст.
1 Па	<b>1 Н/м<sup>2</sup></b>	10 <sup>-5</sup>	1,0197·10 <sup>-5</sup>	9,8692·10 <sup>-6</sup>	7,5006·10 <sup>-3</sup>	1,019·10 <sup>-4</sup>
бар	10 <sup>5</sup>	<b>10<sup>5</sup> Н/м<sup>2</sup></b>	1,0197	0,98692	750,06	10,197
1 ат	98066,5	0,980665	<b>1 кгс/см<sup>2</sup></b>	0,96784	735,56	10
1 атм	101325	1,01325	1,033	<b>1 атм</b>	760	10,33
1 мм рт.ст.	133,321	1,3332·10 <sup>-3</sup>	1,3595·10 <sup>-3</sup>	1,3158·10 <sup>-3</sup>	<b>1 мм рт.ст.</b>	13,595·10 <sup>-3</sup>
1 м вод.ст.	9806,65	9,80665·10 <sup>-2</sup>	0,1	0,096784	73,556	<b>1 м вод.ст.</b>

Жидкости способны воспринимать практически сколь угодно большие сжимающие напряжения. Жидкости могут воспринимать и растягивающие напряжения, но при отсутствии в них растворенных газов или паров жидкости. Так, например, при вращении капиллярной трубки, в которой находится химически чистая деаэрированная жидкость (рис. 1.5), она не выбрасывается в обе стороны капилляра вплоть до достижения значительных растягивающих напряжений (280 кгс/см<sup>2</sup>). Это свидетельствует о способности жидкости воспринимать растягивающие напряжения при отсутствии в ней газа.

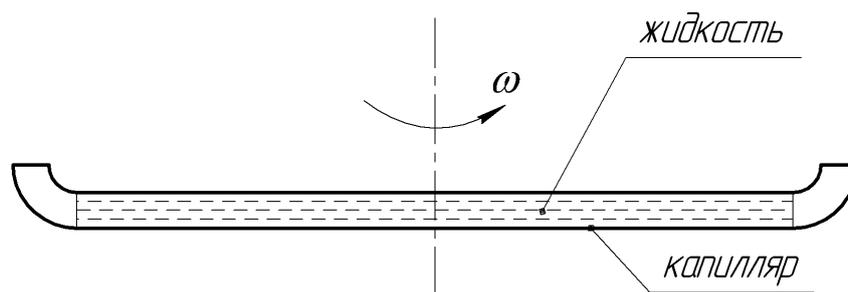


Рис. 1.5. Схема испытаний жидкости на растяжение

При наличии в реальной жидкости твердых и газообразных микровключений ее сопротивляемость растягивающим напряжениям резко снижается.

В гидравлических расчётах полагают, что нарушение сплошности жидкости происходит при снижении давления в ней до давления насыщенных паров (давления парообразования)  $p_d$  при данной температуре. Абсолютное давление насыщенных паров зависит от температуры и принимается, как наименьшее возможное давление в сплошных жидкостях. В тех зонах потока, где давление падает до величины  $p_d$ , возникает особое состояние жидкости, которое сопровождается местным образованием пузырьков, заполненных парами жидкости и газа. Явление холодного вскипания жидкости называется кавитацией.

### 1.3. Характеристики и свойства рабочих жидкостей

Обычно в гидравлике принимается гипотеза сплошности жидкости, в соответствии с которой жидкость рассматривается как непрерывная, сплошная среда, заполняющая пространство без пустот и промежутков. Исходя из этого, считают, что и физические характеристики, определяющие состояние и движение жидкости, распределяются и изменяются в занятом ею объеме непрерывно.

#### 1.3.1. Уравнение состояния и объёмные деформации

Уравнение состояния, устанавливающее связь объёма, давления и температуры, в неявной форме записывается:

$$W = f(p, T).$$

Уравнение состояния в дифференциальной форме

$$dW = df(p, T) = \left( \frac{\partial W}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_T dp.$$

Первый член этого уравнения  $(\partial W / \partial T)_p dT$  отражает тепловое расширение среды при  $p = \text{const}$ , а второй член  $(\partial W / \partial p)_T dp$  – сжимаемость среды при  $T = \text{const}$ . Частные производные  $(\partial W / \partial T)_p$  и

$(\partial W / \partial p)_T$  в определённых интервалах изменения давления и температуры могут быть приняты постоянными.

Относительное изменение объёма среды при изменении температуры на один градус определяется коэффициентом температурного расширения:

$$\beta_T = \frac{1}{W_0} \left( \frac{\partial W}{\partial T} \right)_p,$$

или приближенно:

$$\beta_T \approx \frac{\Delta W_T}{W_0} \frac{1}{\Delta T}.$$

Относительное изменение объёма  $\overline{\Delta W_T}$  за счет изменения температуры на величину  $\Delta T = T - T_0$  ( $T$  – текущая температура;  $T_0$  – начальная температура) можно рассчитать по известному коэффициенту температурного расширения по формуле:

$$\overline{\Delta W_T} = \frac{\Delta W_T}{W_0} = \beta_T \Delta T.$$

Коэффициент температурного расширения  $\beta_T$  обычно определяют при атмосферном давлении и температурах  $t = 20 \dots 70^\circ\text{C}$ . При этих условиях коэффициент температурного расширения  $\beta_T$  рабочих жидкостей, используемых в гидроприводах, находится в диапазоне:

$$\beta_T = (3 \dots 9) \cdot 10^{-4}, \text{ 1/град.}$$

Для минеральных масел коэффициент температурного расширения существенно уменьшается с ростом плотности. Так, при температуре  $20^\circ\text{C}$  с изменением плотности от 800 до 1000 кг/м<sup>3</sup> (для разных минеральных масел) величина коэффициента  $\beta_T$  изменяется от  $9,5 \cdot 10^{-4}$  1/град до  $5,1 \cdot 10^{-4}$  1/град, т. е. уменьшается почти в 2 раза.

Относительное изменение объёма  $\Delta W_p$  при изменении давления на одну единицу при постоянной температуре  $T = \text{const}$  определяется коэффициентом объёмного сжатия:

$$\beta_p = -\frac{1}{W_0} \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_T$$

или приближенно

$$\beta_p \approx -\frac{\Delta W_p}{W_0} \frac{1}{\Delta p}.$$

Величина, обратная коэффициенту объёмного сжатия

$$E = \frac{1}{\beta_p},$$

называется модулем объёмной упругости. Относительное изменение объёма жидкости при повышении давления на величину  $\Delta p$  равно:

$$\overline{\Delta W_p} = \frac{W - W_0}{W_0} = -\beta_p \Delta p = -\frac{\Delta p}{E}.$$

Это уравнение называют обобщённым законом Гука.

В последнем выражении учтено, что при увеличении давления объём среды уменьшается, поэтому в формуле появляется знак минус.

При одновременном изменении температуры и давления первоначальный объём  $W_0$  изменяется на величину  $\Delta W$ :

$$\Delta W = \Delta W_T + \Delta W_p = (\beta_T \Delta T - \beta_p \Delta p) W_0.$$

При повышении температуры среды на величину  $\Delta T$  в замкнутом, недеформируемом объёме ( $W = \text{const}$ ) происходит увеличение давления:

$$\Delta W = (\beta_T \Delta T - \beta_p \Delta p) W_0 = 0;$$

$$\Delta p = \frac{\beta_T \Delta T}{\beta_p} = \beta_T E \Delta T.$$

При охлаждении жидкости ( $\Delta T < 0$ ) произойдёт понижение давления ( $\Delta p < 0$ ).

Данная формула справедлива в пределах ограниченного диапазона изменения давления и температуры. Средние значения  $\beta_T$  и  $\beta_p$  в этих зависимостях получают экспериментальным путём.

При приближении температуры к абсолютному нулю, свободный объём  $W_F$  стремится к нулю, коэффициент температурного расширения при этом уменьшается. С ростом температуры коэффициенты температурного расширения и объемного сжатия увеличиваются, а модуль объемной упругости уменьшается.

С увеличением давления  $p$  увеличивается плотность упаковки молекул в жидкости и уменьшается свободный объём  $W_F$ , что приводит к увеличению плотности  $\rho$ , уменьшению коэффициента объемного сжатия и, наоборот, увеличению модуля упругости.

### 1.3.2. Сжимаемость жидкости и модуль объёмной упругости

Деформация жидкости при изменении давления имеет релаксационную природу, т. е. изменение давления и объёма не совпадают по времени (рис. 1.6), а имеют между собой некоторый сдвиг (запаздывание). Первый случай, представленный на рис. 1.6, *а*, имеет место в гидроприводах при резком возрастании нагрузки, второй, представленный на рис. 1.6, *б* – при внезапном (резком) закрытии гидроаккумулятора в линии.

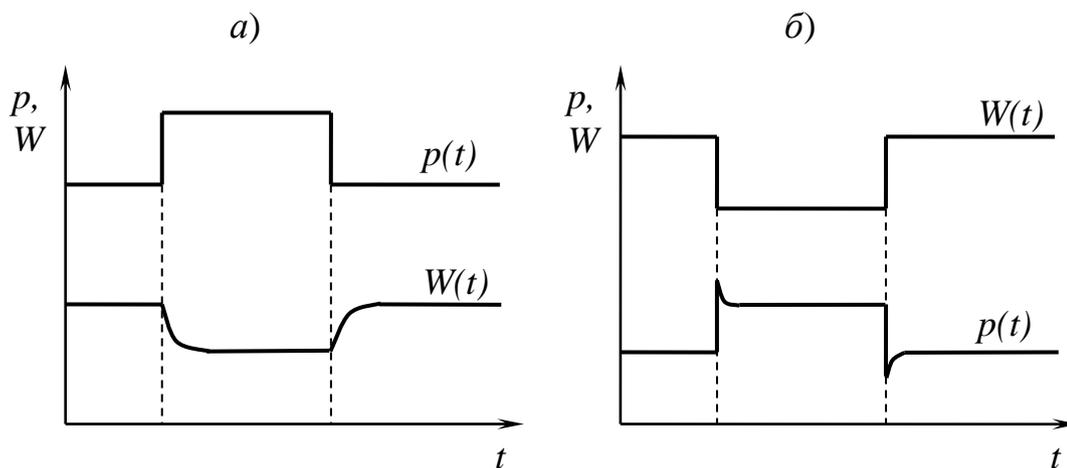


Рис. 1.6. График изменения давления и объема

Процесс изменения давления и объёма может совершаться многократно и происходить, например, по гармоническому закону:

$$p = p_0 \sin \omega t \quad \text{или} \quad W = W_0 \sin \omega t .$$

При медленно протекающем процессе ( $\omega \rightarrow 0$ ) теплообмен рабочей жидкости с окружающей средой успевает завершиться и будет соблюдаться постоянство температуры –  $T = \text{const}$ , в этом случае модуль упругости называют изотермическим и обозначают  $E_T$ .

При быстро протекающем процессе ( $\omega \rightarrow \infty$ ), например, ультразвуковых колебаниях, теплообмен не успевает завершиться, процесс идёт без отвода и подвода тепла (адиабатический процесс). Модуль упругости в этом случае называют адиабатическим и обозначают  $E_A$ .

Таким образом, модуль объёмной упругости жидкости зависит от давления, температуры и частоты процесса:

$$E = f(p, T, \omega).$$

Качественная зависимость модуля объёмной упругости от частоты процесса представлена на рис.1.7 ( $E_T < E_A$ ). При исследовании акустических процессов следует пользоваться адиабатическим модулем упругости.

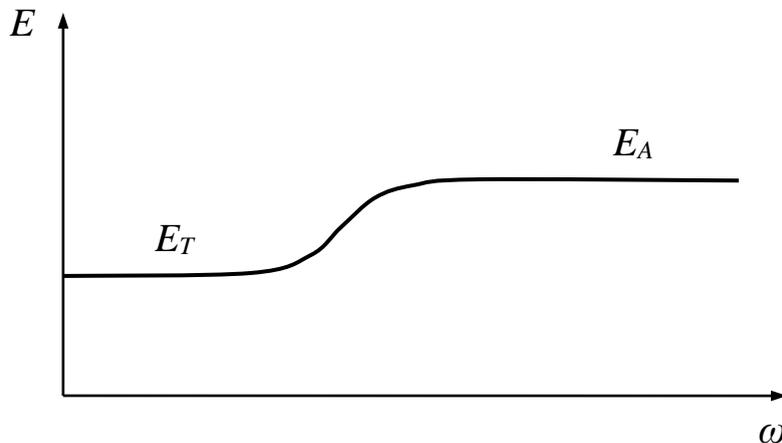


Рис.1.7. Изменение модуля объёмной упругости от частоты процесса

Экспериментально установлено, что модули упругости  $E_T$  и  $E_A$  для различных масел линейно возрастают с увеличением давления:

$$E_T = E_{T_0} + m_T p,$$

$$E_A = E_{A_0} + m_A p,$$

где  $E_{T_0}$  и  $E_{A_0}$  – начальные значения модулей упругости при  $p = 0,1$  МПа. Коэффициенты  $m_T$  и  $m_A$  называются угловыми коэффициентами, их значения лежат в диапазонах:

$$m_T = 12 \dots 14, \quad m_A = 10 \dots 12.$$

Изотермический и адиабатический модули объёмной упругости зависят от температуры. При повышении температуры начальные значения модулей  $E_{T_0}$  и  $E_{A_0}$  уменьшаются.

Существенное влияние на модуль упругости оказывает содержащийся в жидкости воздух, который значительно снижает его величину. При давлениях больше 10 МПа (100 ат), наличие воздуха в жидкости не оказывает существенного влияния на модуль упругости, так как при больших давлениях содержание воздуха в жидкости незначительно.

Каждая рабочая жидкость имеет свой модуль упругости. Модуль упругости минеральных масел при температуре  $20^\circ \text{C}$  и атмосферном давлении лежит в пределах (1300...1700) МПа, воды – 2000 МПа.

### ***1.3.3. Плотность сплошной среды***

Одной из основных характеристик жидкой среды является плотность распределения массы среды по объёму, или просто плотность среды, которая в произвольной точке определяется соотношением:

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W},$$

где  $\Delta M$  – масса среды;  $\Delta W$  – объём, в котором заключена эта масса.

В системе СИ размерность плотности

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

В общем случае плотность жидкой или газообразной среды может изменяться в пространстве от точки к точке и в каждой точке изменяться во времени, т. е.

$$\rho = f(x, y, z, t).$$

Ввиду того, что объём  $W$  является функцией термодинамических параметров  $p$  и  $T$ , плотность сплошной среды также оказывается функцией давления и температуры и определяется уравнением состояния. В зависимости от давления и температуры плотность может быть вычислена по выражению

$$\rho = \frac{M}{W} = \frac{M}{W_0(1 + \beta_T \Delta T - \beta_p \Delta p)} = \frac{\rho_0}{1 + \beta_T \Delta T - \beta_p \Delta p},$$

где  $\rho_0$  – плотность при начальных значениях температуры и давления.

#### 1.3.4. Вязкость рабочих жидкостей

Вязкостью называют способность жидкости оказывать сопротивление сдвигающим усилиям. Это свойство проявляется только при движении жидкости. Пусть некоторое количество жидкости заключено между двумя плоскими неограниченными пластинами (рис. 1.8); расстояние между ними –  $n$ ; скорость движения верхней пластины относительно нижней –  $V$ .

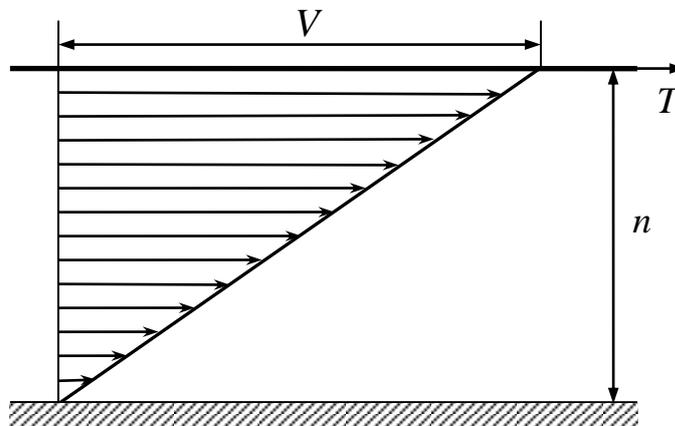


Рис.1.8. Схема представления тангенциальной вязкости

Опыт показывает, что слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенке, прилипает к ней. Отсюда следует, что скорость движения жидкости, прилегающей к нижней стенке, равна нулю, а к верхней –  $V$ . Промежуточные слои движутся со скоростью, постепенно возрастающей от 0 до  $V$ .

Таким образом, существует разность скоростей между слоями и возникает взаимное скольжение слоев, которое приводит к возникновению силы внутреннего трения.

Для перемещения одной пластины относительно другой необходимо приложить к движущейся пластине некоторую силу  $T$ , равную силе сопротивления жидкости обусловленную внутренним трением. Ньютон установил, что эта сила пропорциональна скорости  $V$ , площади поверхности соприкасающихся слоев  $S$  и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами  $n$ , т. е.

$$T = \mu \frac{\Delta V}{\Delta n} S,$$

где  $\Delta V$  – относительная скорость движения соседних слоев;  $\Delta n$  – расстояние между ними;  $\mu$  – коэффициент пропорциональности, который называется динамическим коэффициентом вязкости.

В пределе для силы внутреннего трения

$$T = \mu \frac{dV}{dn} S. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) была предложена Ньютоном в 1686 г.

Величина касательного напряжения  $\tau = T/S$ , которая принимается всегда положительной, определяется отношением

$$\tau = \pm \mu \frac{dV}{dn}, \quad (1.2)$$

где знак «+» будет соответствовать положительному значению  $dV/dn$ , а «-» – отрицательному; знак  $dV/dn$  зависит от закона изменения скорости по сечению потока и выбора направления нормали  $n$ .

Из формулы Ньютона можно получить выражение для определения величины динамического коэффициента вязкости

$$\mu = \left| \tau / \frac{dV}{dn} \right|, \quad (1.3)$$

из которого следует, что динамический коэффициент вязкости численно равен касательному напряжению  $\tau$  при градиенте скорости равном единице  $dV/dn = 1$ .

Коэффициент  $\mu$  в системе СИ имеет размерность:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[ \frac{dV}{dn} \right]} = \frac{H}{\frac{M^2 \cdot \frac{M}{c} \cdot \frac{1}{M}}{M^2}} = \frac{H}{M^2} c = \text{Па} \cdot \text{с} .$$

Жидкости, подчиняющиеся закону Ньютона, называют ньютоновскими (вода, минеральные масла, керосин, бензин, глицерин). Жидкости, не подчиняющиеся этому закону – неньютоновскими или аномальными жидкостями. К их числу относятся некоторые масла при отрицательных температурах, парафинистые нефтепродукты при низких температурах, эмульсии, коллоидные растворы, гудрон, асфальт, целлюлозно-бумажная масса, суспензии.

Если движение жидкости начинается только при достижении некоторого начального касательного напряжения  $\tau_0$ , то в таких жидкостях касательные напряжения определяют по формуле Бингама

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dV}{dn} .$$

Кроме динамического коэффициента вязкости в гидравлике широко используется кинематический коэффициент вязкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.4)$$

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{H}{M^2} c \frac{M^3}{кг} = \left( \frac{кг \cdot M}{c^2} \frac{c}{M^2} \right) \frac{M^3}{кг} = \left( \frac{кг}{M \cdot c} \right) \frac{M^3}{кг} = \frac{M^2}{c} .$$

Этот коэффициент получил такое название потому, что в размерность  $\nu$  входят только метры и секунды (и не входит размерность массы).

В литературе встречается также единица измерения динамического коэффициента вязкости в Пуазах (в честь французского врача Ж. Пуазейля, выполнившего фундаментальные исследования течения вязкой жидкости в трубах):

$$1 \text{ Пуаз} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} = \frac{10^{-3} \text{ кг}}{10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}} = 10^{-1} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = 10^{-1} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}^2} = 10^{-1} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

и кинематического коэффициента вязкости в Стоксах (в честь английского гидромеханика Дж. Стокса, который получил дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости):

$$1 \text{ Ст} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}} = \frac{10^{-4} \text{ м}^2}{\text{с}} = 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Сотая доля стокса называется сантистоксом. Например, кинематическая вязкость воды при температуре  $20^\circ\text{C}$  равна:

$$\nu_{\text{воды}} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = 10^{-2} \text{ Ст} = 1 \text{ сСт}.$$

Механизмы внутреннего трения, являющиеся следствием вязкости, в жидкостях и газах различны. В жидкостях молекулы расположены ближе друг к другу, чем в газах, и природа вязкости в жидкостях заключается в наличии сил межмолекулярного взаимодействия. С ростом температуры увеличивается амплитуда колебаний молекул относительно их центров, что ведёт к уменьшению сил межмолекулярного взаимодействия и снижает вязкость жидкости.

Вязкость газов, наоборот, с повышением температуры увеличивается. В газах вязкость обусловлена, главным образом, беспорядочным тепловым движением молекул. Интенсивность этого движения увеличивается с повышением температуры. Поэтому вязкость газов увеличивается с повышением температуры.

Влияние температуры на вязкость рабочих жидкостей, используемых в гидроприводах, определяется эмпирической зависимостью:

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)},$$

где  $\mu_0$  – вязкость при температуре  $20^\circ\text{C}$ ;  $\beta$  – экспериментальный коэффициент, который для минеральных масел изменяется в пределах  $\beta = 0,02 \dots 0,03$ . Для минеральных масел с вязкостью менее  $80 \text{ сСт}$  при температурах от  $20^\circ\text{C}$  до  $150^\circ\text{C}$  при расчете кинематического коэффициента вязкости используют формулу

$$\nu_t = \nu_{50} \left( \frac{50}{t} \right)^n,$$

где  $\nu_{50}$  – кинематический коэффициент вязкости при  $t = 50^\circ\text{C}$ ;  $t$  – температура в градусах Цельсия;  $n$  – опытный коэффициент (табл. 1.2).

Таблица 1.2

$\nu_{50}, \text{сСт}$	2,8	6,25	9,0	21,2	29,3	37,3	45,1	60,6	80,0
$n$	1,39	1,59	1,72	1,99	2,13	2,24	2,32	2,49	2,56

Динамический коэффициент вязкости газа в зависимости от температуры может быть вычислен по формуле Э. Сазерленда:

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2},$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости при заданной температуре  $T$ ,  $[\text{Па}\cdot\text{с}]$ ;  $\mu_0$  – контрольная вязкость при контрольной температуре  $T_0$ ,  $[\text{Па}\cdot\text{с}]$ ;  $T$  – заданная абсолютная температура;  $T_0$  – контрольная абсолютная температура в градусах Кельвина;  $C$  – постоянная Сазерленда, зависящая от рода газа.

Эта формула показывает, что с ростом температуры вязкость газов растет. Постоянная Сазерленда и контрольные вязкости газов при различных контрольных температурах приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Газ	$C$	$T_0$	$\mu_0$
	°К	°К	мкПа·с
Воздух	120	291,15	18,27
Азот	111	300,55	17,81
Кислород	127	292,25	20,18
Углекислый газ	240	293,15	14,8
Водород	72	293,15	8,76
Аммиак	370	293,15	9,82
Гелий	79,4	273	19,0

### ***1.3.5. Поверхностное натяжение***

Условия, в которых находятся молекулы жидкости на границе с газами или твёрдыми телами, отличаются от условий, в которых молекулы находятся внутри жидкого объёма. Если молекула находится внутри объёма, то её окружают соседние молекулы с такими же свойствами, поэтому силы, действующие со стороны окружающих молекул, уравновешены. У молекул расположенных на границе жидкости, силы, действующие со стороны граничного тела, могут отличаться от сил, действующих внутри объёма. Система сил оказывается неуравновешенной и появляется равнодействующая, направленная внутрь или наружу объёма жидкости. Эту силу называют силой поверхностного натяжения. Благодаря действию силы поверхностного натяжения, объём жидкости, на который не действуют никакие другие силы, стремясь иметь минимум энергии, принимает сферическую форму. Наличием поверхностного натяжения объясняется способность жидкостей образовывать капли. Из-за этой способности жидкости называют капельными.

Жидкость, имеющая криволинейную свободную поверхность, испытывает дополнительное усилие, увеличивающее или уменьшающее давление в жидкости. Увеличение давления происходит, когда поверхность жидкости выпукла, уменьшение – когда поверхность

жидкости вогнута. Капиллярностью называется свойство жидкостей подниматься или опускаться в трубках малого диаметра под действием дополнительного давления, вызванного силами поверхностного натяжения. Подъём жидкости происходит в капиллярной трубке, поверхность которой смачивается (например, вода - стекло), опускание – в трубке, поверхность которой жидкостью не смачивается (например, ртуть - стекло) (рис. 1.9).

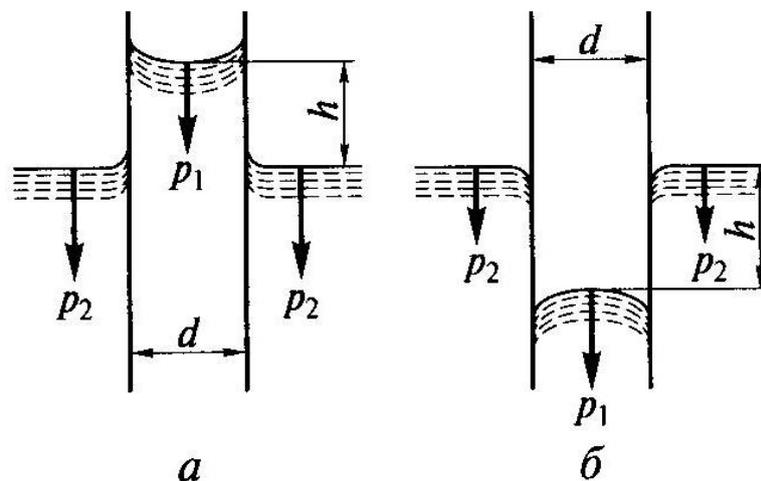


Рис. 1.9. Изменение уровня жидкости в капиллярах:

*a* – смачиваемая поверхность капилляра; *б* – несмачиваемая поверхность капилляра;  $p_1$  – давление на поверхности в трубке;  $p_2$  – давление на поверхности в резервуаре;  $h$  – высота уровня жидкости в капилляре

Вогнутая поверхность уменьшает давление, а выпуклая увеличивает. В первом случае возникает перепад давления  $\delta p_{\text{пов}} = p_2 - p_1$ , под воздействием которого жидкость в трубке поднимается на высоту  $h$  и уравнивается весом столба поднятой жидкости (см. рис. 1.9, *a*). В случае несмачиваемой поверхности под действием перепада давлений  $\delta p_{\text{пов}} = p_1 - p_2$  жидкость в трубке опускается (см. рис. 1.9, *б*).

В стеклянной трубке диаметром  $d$  (мм) вода при температуре  $20^\circ\text{C}$  поднимается дополнительно на высоту  $h$ :

$$h = \frac{29,8}{d}, \text{ мм.}$$

В такой же трубке ртуть опускается на высоту:

$$h = \frac{10,15}{d}, \text{ мм.}$$

Влияние капиллярности приходится учитывать, например, при работе с жидкостными приборами для измерения давления.

### 1.3.6. Растворимость газов в жидкостях

Растворимость газов в жидкостях характеризуется количеством растворенного газа в единице объема. Она различна для разных газов и жидкостей и зависит от давления газа над свободной поверхностью. Относительный объем газа, растворенного в жидкости при данной температуре до ее полного насыщения, в соответствии с законом Генри прямо пропорционален величине давления:

$$W_r/W_{ж} = k(p/p_0),$$

где  $W_r$  – объем растворенного газа, приведенный к нормальным условиям ( $p_0, T_0$ );  $W_{ж}$  – объем жидкости;  $k$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент растворимости газа в жидкости);  $p$  – давление в жидкости.

Для воды коэффициент растворимости газов при разных температурах приведен в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Коэффициент растворимости некоторых газов в воде (г/л)

Газ	Температура, °C		
	0	20	40
Азот	0,0293	0,0164	0,0118
Аргон	0,058	0,037	0,027
Кислород	0,049	0,031	0,023
Углекислый газ	1,713	0,878	0,53

Из таблицы можно видеть, что при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении в воде содержится 1,6 % растворенного воздуха по объему ( $k = 0,016$ ). С увеличением температуры коэффициент растворимости воздуха в воде уменьшается. Коэффициент растворимости воздуха в минеральных маслах при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  лежит в диапазоне 0,08...0,1.

Количество растворенного газа, как следует из приведенной выше формулы для  $W_{\text{г}}/W_{\text{ж}}$ , зависит от давления. Например, при повышении абсолютного давления с 7,09 до 10,9 МПа объем растворенного воздуха в масле увеличивается на 50 %.

## ГЛАВА 2. ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика – раздел гидравлики, в котором изучают законы, которым подчиняется жидкость, находящаяся в состоянии абсолютного или относительного покоя.

Если жидкость находится в состоянии покоя, то отсутствует перемещение частиц друг относительно друга и относительно сосуда, в котором она находится. Если при этом сам сосуд неподвижен относительно земли, то это состояние абсолютного покоя (рис. 2.1).

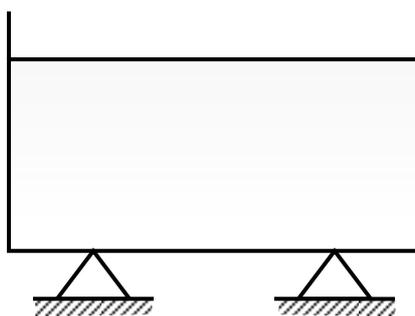


Рис. 2.1. Абсолютный покой жидкости

Если сосуд перемещается в пространстве относительно земли, то это случай относительного покоя (рис. 2.2).

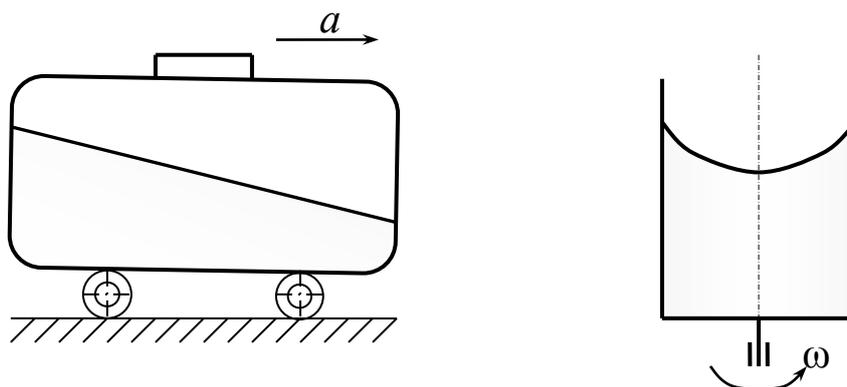


Рис. 2.2. Относительный покой жидкости

## 2.1. Свойства гидростатического давления

Гидростатическим давлением называют давление, которое действует в покоящейся жидкости.

Рассмотрим свойства гидростатического давления.

### Свойство 1

Гидростатическое давление всегда направлено по нормали к площадке, на которую оно действует и внутрь рассматриваемого объёма. Это свойство не нуждается в доказательстве и вытекает из определения давления, как нормального сжимающего напряжения (см. Главу 1).

### Свойство 2

В любой точке покоящейся жидкости величина гидростатического давления по всем направлениям одинакова. Следовательно, давление не зависит от ориентации площадки, для которой оно вычислено.

Для доказательства этого свойства выделим в жидкости, находящейся в состоянии абсолютного или относительного покоя, произвольный элементарный объём в форме прямоугольного тетраэдра. Три грани тетраэдра расположим перпендикулярно осям координат  $x$ ,

$y, z$  (рис. 2.3). Мысленно отбросим окружающую жидкость и выразим ее действие на грани тетраэдра соответствующими силами.

На выделенный тетраэдр будут действовать 2 группы сил: массовые и поверхностные. Из поверхностных сил будут действовать только нормальные силы – силы давления. Касательные силы в покоящейся жидкости отсутствуют.

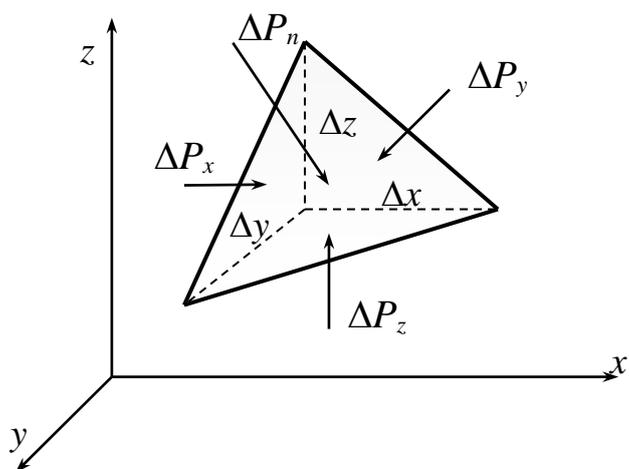


Рис. 2.3. Схема действия поверхностных сил

Силы давления, действующие на грани, равны:

$$\begin{aligned} \Delta P_x &= \frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z; \\ \Delta P_y &= \frac{1}{2} p_y \Delta x \Delta z; \\ \Delta P_z &= \frac{1}{2} p_z \Delta x \Delta y; \\ \Delta P_n &= p_n \Delta S, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\Delta S$  – площадь наклонной грани. Силы давления  $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z, \Delta P_n$  направлены внутрь выделенного объема.

Из массовых сил на жидкость, заключенную в тетраэдре, будут действовать сила тяжести  $\Delta \vec{G}$  и, в случае относительного покоя, сила инерции  $\Delta \vec{J}$ . Сила тяжести направлена вертикально вниз, а сила

инерции в сторону, противоположную ускорению. Результирующая массовых сил тяжести и инерции равна:

$$\Delta M \vec{A} = \Delta \vec{G} + \Delta \vec{J},$$

где  $\vec{A}$  – главный вектор ускорения массовых сил, приходящийся на единицу массы.

Проекции результирующей массовой силы на оси координат:

$$X \Delta M = \Delta G_x + \Delta J_x;$$

$$Y \Delta M = \Delta G_y + \Delta J_y;$$

$$Z \Delta M = \Delta G_z + \Delta J_z,$$

где  $\Delta M$  – масса рассматриваемого тетраэдра;  $X, Y, Z$  – проекции главного вектора ускорения массовых сил, которые численно равны сумме плотностей массовых сил тяжести и инерции (плотность массовой силы – сила, приходящаяся на единицу массы, выражает проекции главного вектора ускорения массовых сил на оси координат):

$$X = (\Delta G_x + \Delta J_x) / \Delta M;$$

$$Y = (\Delta G_y + \Delta J_y) / \Delta M;$$

$$Z = (\Delta G_z + \Delta J_z) / \Delta M.$$

Поэтому  $X, Y, Z$  еще называют проекциями плотности массовых сил.

Масса тетраэдра:

$$\Delta M = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6}. \quad (2.2)$$

Так как тетраэдр находится в равновесии, то сумма проекций на оси координат всех действующих на него сил будет равна нулю.

Составим уравнение равновесия всех сил в проекции на ось  $x$ :

$$\Delta P_x - \Delta P_n \cos(n, x) + X \Delta M = 0.$$

Подставим в последнее уравнение полученные ранее выражения для сил давления (2.1):

$$\frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z - p_n \Delta S \cos(n, x) + X \Delta M = 0.$$

Сомножитель  $\Delta S \cos(n,x)$  представляет собой проекцию площадки  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную оси  $x$ :

$$\Delta S \cos(n,x) = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z.$$

С учетом этого

$$\frac{1}{2} p_x (\Delta y \Delta z) - \frac{1}{2} p_n (\Delta y \Delta z) + X \rho \frac{\Delta x (\Delta y \Delta z)}{6} = 0,$$

откуда после сокращений получим уравнение равновесия в проекции на ось  $x$ :

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} X \rho \Delta x = 0.$$

При бесконечном уменьшении размеров тетраэдра третья слагаемое в уравнении равновесия в пределе обращается в нуль. Тогда

$$p_x = p_n.$$

Аналогично, составляя уравнения равновесия в проекции на оси  $y$  и  $z$ , получим, что

$$p_y = p_n;$$

$$p_z = p_n$$

или

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Отсюда следует, что значение гидростатического давления в точке покоящейся жидкости не зависит от ориентации площадки, для которой оно вычислено.

## 2.2. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнения равновесия Эйлера)

Выделим в объёме жидкости, находящейся в состоянии относительно покоя, элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , параллельными осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 2.4).

На выделенный объем будут действовать массовые и поверхностные силы. Из массовых сил будут действовать сила тяжести  $\Delta\vec{G}$  и силы инерции  $\Delta\vec{J}$ , возникающие в общем случае относительного покоя.

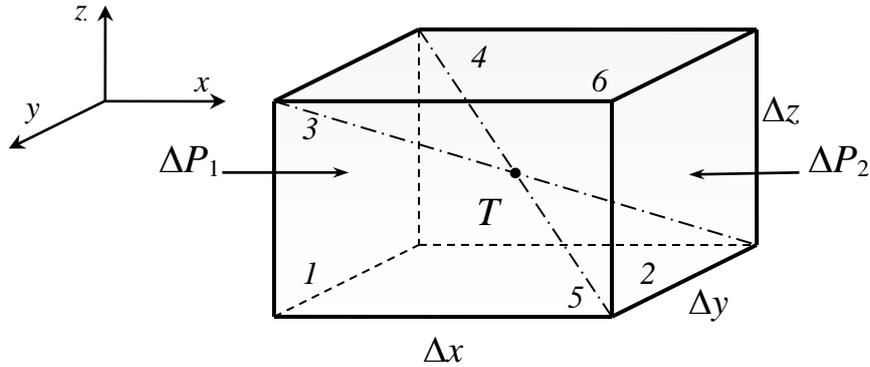


Рис. 2.4. Элементарный прямоугольный параллелепипед

Проекции массовой силы  $\Delta M\vec{A}$  на оси координат:

$$\begin{aligned} X\Delta M &= \Delta G_x + \Delta J_x; \\ Y\Delta M &= \Delta G_y + \Delta J_y; \\ Z\Delta M &= \Delta G_z + \Delta J_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Delta M = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$  – масса жидкости в выделенном объеме;  $X, Y, Z$  – проекции на оси координат главного вектора ускорения результирующей массовой силы, приходящейся на единицу массы (численно равны сумме проекций плотностей массовых сил тяжести и инерции).

Кроме массовых сил на выделенный объем будут действовать поверхностные силы – силы давления. Они направлены перпендикулярно соответствующим граням внутрь рассматриваемого объема. При этом, поскольку мы рассматриваем элементарный объем жидкости, можно считать, что по всей поверхности грани давление одинаково. Пронумеруем грани от 1 до 6. Давление в выделенном объеме является функцией координат:

$$p = f(x, y, z).$$

Если давление в центре грани 1 равно  $p$ , то давление, действующее на грань 2, будет равно  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$ . Силы давления, действующие на грани 1 и 2:

$$\Delta P_1 = p \Delta y \Delta z;$$

$$\Delta P_2 = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z.$$

Поскольку параллелепипед находится в равновесии, то сумма проекций на координатные оси всех сил, действующих на него, равна нулю. Спроектируем поверхностные и массовые силы на ось  $x$ :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 + X \Delta M = 0.$$

Подставим в это уравнение полученные выше выражения для  $\Delta P_1$ ,  $\Delta P_2$ ,  $\Delta M$ :

$$p \Delta y \Delta z - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + X \rho \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$p \Delta y \Delta z - p \Delta y \Delta z - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + X \rho \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

Проведя сокращения и разделив все члены уравнения на  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , получим:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Аналогично можно представить суммы проекций всех сил на оси  $y$  и  $z$ . В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.4) называется системой дифференциальных уравнений равновесия или уравнениями равновесия Эйлера. Полученные уравнения показывают, что при равновесии жидкости массовые силы уравновешиваются соответствующими поверхностными силами.

Если умножить каждое из уравнений системы (2.4) соответственно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и сложить их, то получим уравнение:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Выражение в скобках, представляет собой полный дифференциал давления  $dp$ . Тогда уравнение равновесия может быть представлено в виде:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp. \quad (2.5)$$

Из выражения (2.5) можно получить дифференциальное уравнение поверхности равного давления, на которой  $p = \text{const}$  и, следовательно,  $dp = 0$ :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) показывает, что равновесие возможно лишь в том случае, когда проекции плотности массовых сил являются производными от некоторой функции  $u = u(x, y, z)$ . Ее полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Примем  $dp = -\rho du$  и по уравнению равновесия (2.5) получим

$$X = -\frac{\partial u}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Функцию  $u = u(x, y, z)$  называют потенциальной функцией. Силы, для которых эта функция существует, называют силами, имею-

щими потенциал. Следовательно, жидкость может находиться в равновесии только под действием массовых сил, имеющих потенциал, так как только такие силы удовлетворяют уравнению равновесия Эйлера.

### 2.3. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим жидкость, заключённую в сосуде и находящуюся в состоянии абсолютного покоя (рис. 2.5). Из массовых сил на жидкость в данном случае действует только сила тяжести  $G = Mg$ .

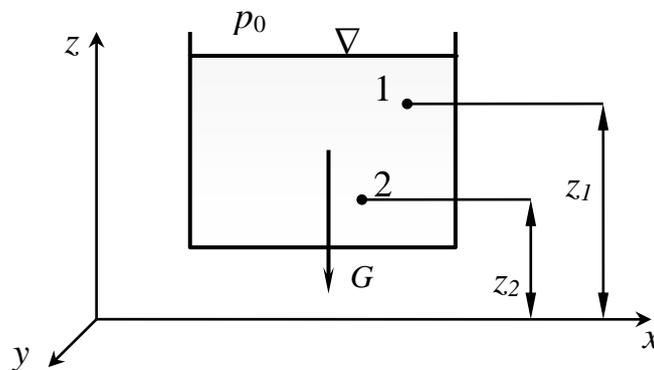


Рис. 2.5. Схема действия сил при абсолютном покое

Воспользуемся полученным выше уравнением равновесия (2.5). Если ось  $z$  направлена вертикально вверх, проекции плотности массовой силы тяжести на оси декартовой системы координат:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$dp = -\rho g dz$$

или

$$d\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получим:

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) представляет собой основное уравнение гидростатики. Оно справедливо для любых точек объёма однородной жидкости, находящейся в состоянии абсолютного покоя.

Если рассмотреть точки 1 и 2 с координатами  $z_1$  и  $z_2$ , то основное уравнение гидростатики можно записать в виде:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2. \quad (2.8)$$

Это уравнение представляет собой другую форму записи основного уравнения гидростатики. Здесь за плоскость отсчета высоты  $z$  принята плоскость сравнения, определяемая началом координат.

В гидростатике различают:

а) абсолютное давление  $p$  – давление, измеренное относительно нулевой плоскости, соответствующей абсолютному вакууму (рис. 2.6). Абсолютное давление не может быть отрицательным.

Давление на свободной поверхности  $p_0$  называют внешним давлением. Оно может быть равным атмосферному ( $p_0 = p_{ат}$ ) или отличаться от него в случае закрытого сосуда;

б) барометрическое (атмосферное) давление. Нормальным барометрическим давлением считают абсолютное давление  $p_{ат} = 760$  мм ртутного столба, или  $p_{ат} = 101325$  Н/м<sup>2</sup>. В приближенных гидравлических расчетах часто принимают  $p_{ат} = 10^5$  Па ;

в) избыточное (манометрическое) давление  $p_{изб}$  – это превышение

давления над атмосферным (см. рис. 2.6):  $p_{изб} = p_1 - p_{ат}$  ;

г) вакуумметрическое давление  $p_{вак}$  – это недостаток давления до атмосферного (см. рис. 2.6):  $p_{вак} = p_{ат} - p_2$ . Таким образом, ваку-

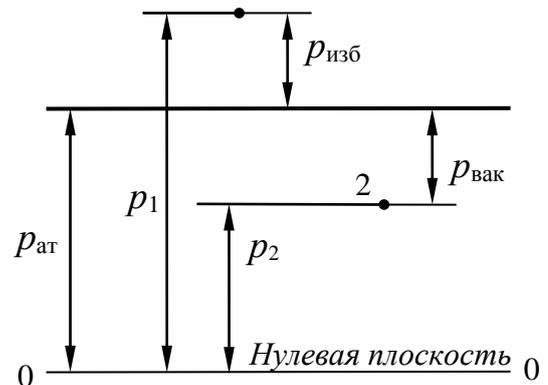


Рис.2.6. Система отсчета давления

умметрическое давление по абсолютной величине равно отрицательному избыточному давлению.

### 2.3.1. Давление в произвольной точке покоящейся жидкости

Определим форму поверхности равного давления для жидкости, находящейся в состоянии абсолютного покоя (рис. 2.7).

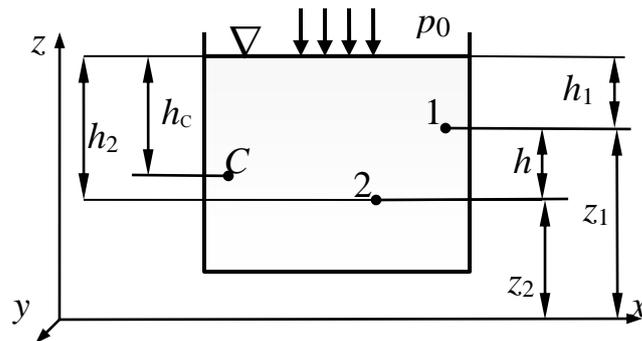


Рис. 2.7. Поверхности равного давления

Используем для этого уравнение поверхности равного давления (2.6). На жидкость, находящуюся в состоянии абсолютного покоя, из массовых сил действует только сила тяжести  $G$ , плотность которой численно равна ускорению свободного падения. Ее проекция на ось  $z$ :

$$Z = -g ,$$

тогда  $-gdz = 0$ . Отсюда после интегрирования получим:

$$z = \text{const} .$$

Таким образом, поверхности равного давления для жидкости, находящейся в состоянии абсолютного покоя, представляют семейство горизонтальных плоскостей. Свободная поверхность в открытом сосуде, на которой абсолютное давление  $p_0 = p_{\text{ат}}$ , также является горизонтальной плоскостью.

Из выражения (2.8) следует:

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2) .$$

Обозначим разность высот  $z_1 - z_2 = h$ . Одновременно величина  $h = h_2 - h_1$  представляет собой заглубление точки 2 относительно точки 1.

Если точка 1 расположена на свободной поверхности, то  $p_1 = p_0$ . Тогда

$$p_2 = p_0 + \rho gh_2,$$

где  $h_2$  – заглубление точки 2 под уровень свободной поверхности. Следовательно, для любой произвольной точки  $C$  в покоящейся жидкости выполняется равенство:

$$p_C = p_0 + \rho gh_C.$$

Отсюда получаем третью форму записи основного уравнения гидростатики (формулу гидростатического давления):

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (2.9)$$

где  $p$  – абсолютное гидростатическое давление в точке на глубине  $h$  под свободной поверхностью;  $p_0$  – абсолютное давление на свободной поверхности.

В частном случае, когда на свободной поверхности давление равно атмосферному (барометрическому), второе слагаемое в уравнении (2.9) выражает избыточное давление:

$$p_{\text{изб}} = \rho gh.$$

Избыточное давление может быть положительным и отрицательным, т. е.

$$p_{\text{изб}} = \pm \rho gh.$$

Знак минус относится к вакуумметрическому давлению  $p_{\text{вак}} = |-\rho gh|$ .

Следовательно, вакуумметрическое давление всегда положительно.

Следствием основного уравнения гидростатики является закон Паскаля: давление, создаваемое в любой точке несжимаемой, покоящейся жидкости, передается одинаково всем точкам этой жидкости.

Изобразим графически изменение гидростатического давления вдоль какой-либо плоской стенки, наклоненной под некоторым углом к горизонту (рис. 2.8).

Пусть в точке  $O$ , находящейся на свободной поверхности жидкости, абсолютное давление равно  $p_0$ , тогда в точке, находящейся на глубине  $h$ , давление будет

$$p = p_0 + \rho gh.$$

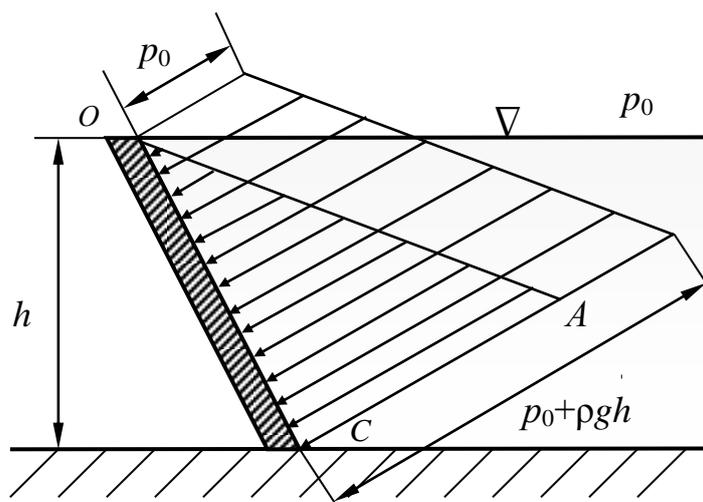


Рис. 2.8. Эпюра гидростатического давления

Давление действует по нормали к рассматриваемой стенке. Если отложить в одном масштабе величину давления  $p_0$  в точке  $O$  перпендикулярно к стенке, а у дна сосуда в точке  $C$ , находящейся на глубине  $h$ , отложить величину  $p$  также по нормали, а затем соединить концы этих линий, то получим эпюру гидростатического абсолютного давления на наклонной стенке сосуда.

В открытом сосуде на свободной поверхности действует атмосферное давление ( $p_0 = p_{ат}$ ). Поскольку с другой стороны стенки также действует атмосферное давление, то практическое значение имеет эпюра избыточного давления, представленная на рисунке треугольником  $OAC$ .

### 2.3.2. Гидростатический напор

Рассмотрим физический смысл основного уравнения гидростатики (2.7).

Величину  $\frac{p}{\rho g} + z$  называют гидростатическим напором  $H_{\text{гст}}$ .

Под напором в гидравлике и гидравлических машинах понимают полную механическую энергию одной весовой единицы жидкости.

Размерность напора:

$$\left[ \frac{p}{\rho g} \right] = \frac{\text{Н м}^3 \text{ с}^2}{\text{м}^2 \text{ кг м}} = \frac{\text{Н м}^3}{\text{м}^2 \text{ Н}} = \text{м}.$$

Гидростатический напор выражает полную удельную потенциальную энергию жидкости:

$$H_{\text{гст}} = \frac{p}{\rho g} + z,$$

где:  $\frac{p}{\rho g}$  – удельная потенциальная энергия абсолютного давления;  $z$  – удельная потенциальная энергия положения.

Рассмотрим неподвижный сосуд, наполненный жидкостью со свободной поверхностью, на которой абсолютное давление  $p_0$  больше атмосферного (рис. 2.9).

Выберем в сосуде две произвольно расположенные поверхности равного давления 1 и 2 на высоте  $z_1$  и  $z_2$  от плоскости  $xoy$  с нулевым абсолютным давлением, которую примем за плоскость сравнения. На уровнях этих поверхностей присоединим к сосуду открытые в атмосферу прозрачные трубки. Такие трубки в гидравлике называют пьезометрами. Жидкость поднимется по трубкам на некоторую высоту. Пусть в левой трубке будет высота  $h_2$ , а в правой –  $h_1$ .

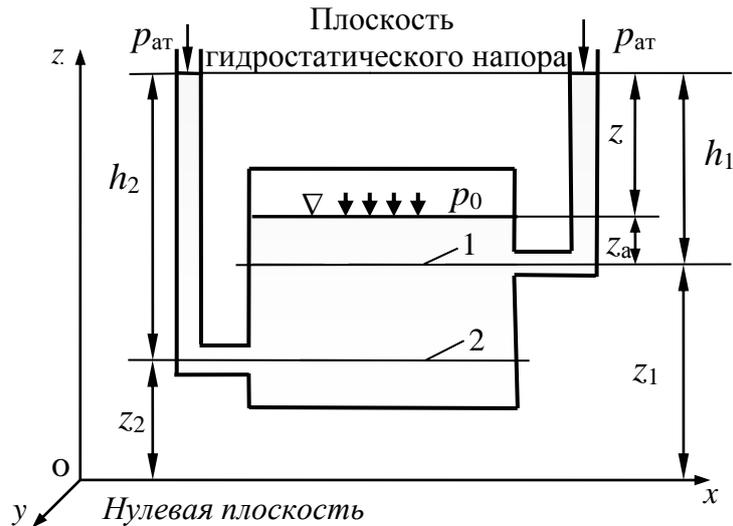


Рис. 2.9. Схема определения гидростатического напора

Выразим давления на поверхностях 1 и 2:

$$p_1 = p_{\text{ат}} + \rho g h_1 ,$$

$$p_2 = p_{\text{ат}} + \rho g h_2 .$$

Давление  $p_2$  в сосуде в соответствии с основным законом гидростатики (2.8):

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2) .$$

Подставим выражения для давлений на поверхностях 1 и 2:

$$\rho g h_2 = \rho g h_1 + \rho g (z_1 - z_2) .$$

Тогда получим

$$h_2 + z_2 = h_1 + z_1 ,$$

т. е. уровни подъема жидкости над плоскостью сравнения одинаковы. Эту плоскость называют плоскостью гидростатического напора.

Если за плоскость сравнения выбрать плоскость 1 (см. рис. 2.9), то значение гидростатического напора можно выразить двумя способами:

а) внутри закрытого сосуда со свободной поверхностью:

$$H_1 = \frac{p_0}{\rho g} + z_a;$$

б) в стеклянной трубке, открытой в атмосферу:

$$H_1 = \frac{p_{ат}}{\rho g} + h_1.$$

В условиях абсолютного покоя горизонтальная плоскость является поверхностью равного давления, следовательно

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} + h_1 = \frac{p_0}{\rho g} + z_a,$$

откуда

$$\frac{p_0 - p_{ат}}{\rho g} = h_1 - z_a = z. \quad (2.10)$$

Высоту  $z = h_1 - z_a = h$  в гидростатике называют пьезометрическим напором. Он определяет превышение удельной энергии в сосуде над удельной энергией атмосферного давления. Следовательно, пьезометрический напор выражает удельную энергию избыточного давления.

Понятие пьезометрического напора широко используется в лабораторных условиях для измерения избыточного давления. Рассмотрим закрытый сосуд, частично заполненный жидкостью со свободной поверхностью, на которой имеется избыточное давление (рис. 2.10).

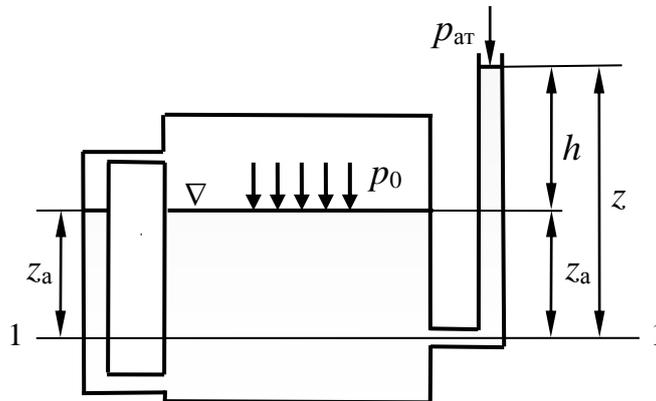


Рис.2.10. Измерение пьезометрического напора

Давление на свободной поверхности можно представить:

$$p_0 = p_{\text{ат}} + p_{\text{изб}}. \quad (2.11)$$

Выберем за плоскость сравнения поверхность 1–1, на уровне которой подсоединим стеклянную трубку и измерим высоту подъема жидкости в трубке  $z$ . Уровень жидкости  $z_a$  в сосуде также может быть измерен (например, водомерной трубкой).

Применим основной закон гидростатики (2.8) для плоскости сравнения 1–1:

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_a = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + z.$$

Выразим давление на свободной поверхности по формуле (2.11) и учтем, что  $z = h + z_a$ . После проведения преобразований, получим:

$$\frac{p_{\text{изб}}}{\rho g} = h \quad \text{или} \quad p_{\text{изб}} = \rho g h. \quad (2.12)$$

Следовательно, избыточное давление в сосуде может быть измерено высотой подъема жидкости с помощью пьезометра. Отметим, что данный способ измерения давления зависит от рода жидкости, поскольку в формуле (2.12) присутствует плотность  $\rho$  той жидкости, которая находится в пьезометре.

### ***2.3.3. Сила гидростатического давления***

На практике важно знать силу гидростатического давления, действующую на затворы, щиты, крышки цилиндров и т. д., которые представляют собой плоские поверхности. Необходимо уметь рассчитывать их на прочность, а также выбирать для них крепеж.

Сила, как любой вектор, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Сила гидростатического давления определяется произведением давления  $p$  на площадь  $S$  поверхности, на которую оно воздействует.

Определим величину силы гидростатического давления. Рассмотрим сосуд, одна из стенок которого наклонена под углом  $\alpha$ . Найдем силу давления на эту стенку. Силу давления будем определять, как равнодействующую системы элементарных сил, действующих на элементарные площадки  $dS$  (рис. 2.11).

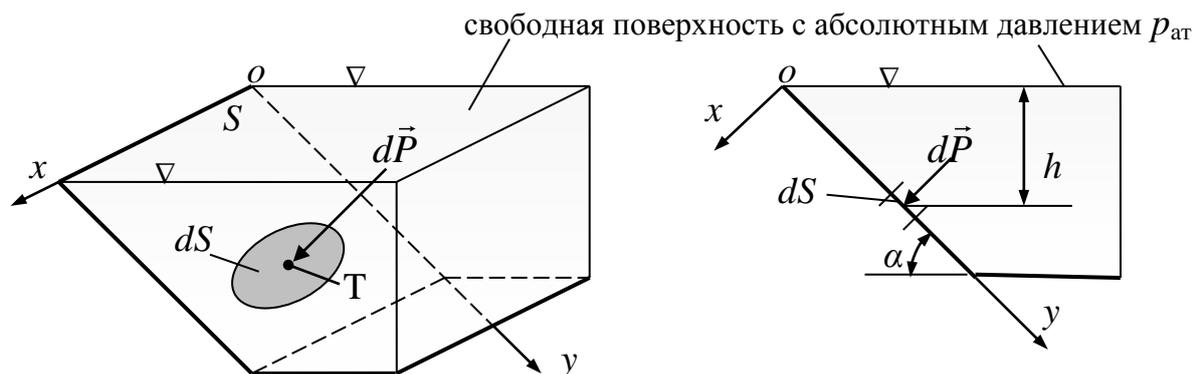


Рис. 2.11. Схема действия сил гидростатического давления

Рассмотрим одну из таких элементарных площадок. Ее центр тяжести  $T$  заглублен на величину  $h$  под уровень свободной поверхности. Абсолютное давление на свободной поверхности  $p_{ат}$ , тогда давление в центре тяжести площадки  $dS$  определяется основным законом гидростатики:

$$p = p_{ат} + \rho gh.$$

Сила гидростатического давления

$$dP = (p_{ат} + \rho gh) dS. \quad (2.13)$$

Сила, действующая на всю площадку  $S$ , определяется интегрированием:

$$P = \int_S (p_{ат} + \rho gh) dS = \int_S p_{ат} dS + \int_S \rho gh dS = p_{ат} S + \int_S \rho gh dS.$$

Интеграл в правой части при постоянных  $\rho$  и  $g$ :

$$\int_S \rho gh dS = \rho g \int_S h dS.$$

Выберем оси координат  $x$  и  $y$  так как показано на рис. 2.11. Тогда  $h = y \sin \alpha$ , где  $y$  – текущая координата по оси  $y$  при интегрировании. Отсюда следует, что:

$$\rho g \int_S h dS = \rho g \sin \alpha \int_S y dS .$$

Интеграл в правой части представляет собой статический момент площади  $S$  относительно оси  $Ox$ . Он определяется как:

$$\int_S y dS = S y_T ,$$

где  $y_T$  – координата центра тяжести площади  $S$  по оси  $y$ .

Поскольку заглубление центра тяжести:  $h_T = y_T \sin \alpha$ , окончательно интеграл можно представить как:  $\rho g \sin \alpha y_T S = \rho g h_T S$ .

Тогда сила гидростатического давления, действующая на наклонную стенку с площадью  $S$ :

$$P = p_{ат} S + \rho g h_T S = (p_{ат} + \rho g h_T) S . \quad (2.14)$$

Здесь  $\rho g h_T$  выражает избыточное гидростатическое давление, а  $P = \rho g h_T S$  – силу избыточного гидростатического давления, действующую на наклонную стенку.

Если на свободной поверхности давление  $p_{изб}$ , сила гидростатического давления определяется произведением избыточного гидростатического давления в центре тяжести площадки на ее площадь и направлена по нормали к ней:

$$P = (p_{изб} + \rho g h_T) S .$$

#### 2.3.4. Гидростатический парадокс

Формулой (2.14) можно воспользоваться и для определения силы давления на плоские днища резервуаров. В этом случае  $h_T$  – заглубление центра тяжести смоченной поверхности дна. Следствием этого является известный «гидростатический парадокс»: величина силы давления жидкости на дно резервуара не зависит от формы резервуара и количества жидкости в нем, а зависит только от  $h_T$  и  $S$ .

Действительно, сила гидростатического давления на равновеликие днища резервуаров различной формы (рис. 2.12) при одних и тех же значениях  $p_0$ ,  $h_T$  и  $\rho$  будет иметь одну и ту же величину для всех возможных форм резервуаров.

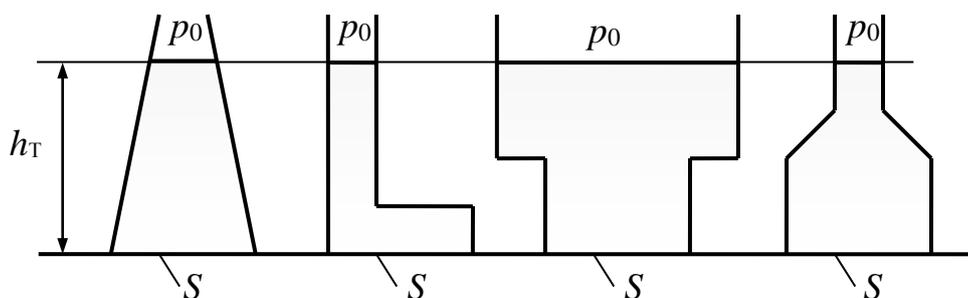


Рис. 2.12. К иллюстрации гидростатического парадокса

Впервые гидростатический парадокс был продемонстрирован французским физиком Б. Паскалем в 1648 г.

### 2.3.5. Центр гидростатического давления на плоскую поверхность

Центром гидростатического давления называется точка приложения равнодействующей сил избыточного гидростатического давления на некоторую поверхность. Для определения координат этой точки рассмотрим элементарную площадку  $dS$ , лежащую в координатной плоскости  $xoy$  (рис. 2.13).

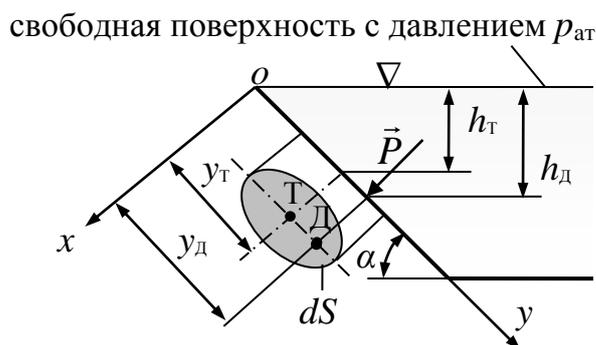


Рис. 2.13. Действие силы гидростатического давления

Центр тяжести  $T$  рассматриваемой элементарной площадки расположен на ее оси симметрии. Центр давления также будет расположен на этой же оси параллельной оси  $y$ .

В соответствии с теоремой Вариньона момент, создаваемый равнодействующей системы параллельных сил, равен сумме моментов сил, создаваемых ее составляющими. Составим уравнение моментов относительно оси  $Ox$ , рассматривая действие силы избыточного гидростатического давления:

$$P_{y_d} = \int y dP, \quad (2.15)$$

где:  $dP$  – элементарная сила гидростатического давления, действующая на элементарную площадку  $dS$ ;  $y_d$  – координата приложения силы гидростатического давления в координатной плоскости  $xoy$ .

Выразим силу избыточного гидростатического давления, полагая, что на свободной поверхности и на противоположной стороне рассматриваемой стенки давление равно атмосферному, тогда сила  $P$  определяется только избыточным давлением:

$$P = \rho g h_T S ;$$

$$dP = \rho g h dS .$$

Подставим полученные выражения в уравнение (2.15):

$$y_d \rho g h_T S = \int_S \rho g h y dS .$$

Учитывая, что  $h_T = y_T \sin \alpha$ , а текущее заглубление  $h = y \sin \alpha$ , и разделив обе части равенства на  $\rho g$ , получим:

$$y_T y_d S = \int_S y^2 dS . \quad (2.16)$$

Интеграл в правой части выражает момент инерции площади  $S$  относительно оси  $ox$ :

$$J_{ox} = \int_S y^2 dS .$$

По теореме о моментах инерции относительно параллельных осей он может быть выражен через собственный момент инерции:

$$J_{ox} = J_{Tx} + y_T^2 S,$$

где  $J_{Tx}$  – момент инерции площади  $S$  относительно оси, проходящей через ее центр тяжести и параллельной оси  $Ox$  (собственный момент инерции).

Тогда уравнение (2.16) примет вид:

$$y_T y_D S = y_T^2 S + J_{Tx}. \quad (2.17)$$

Выразим координату точки приложения силы избыточного гидростатического давления:

$$y_D = y_T + \frac{J_{Tx}}{y_T S}. \quad (2.18)$$

Отсюда следует, что центр давления расположен ниже центра тяжести поверхности. Слагаемое  $\frac{J_{Tx}}{y_T S} = \varepsilon$  имеет размерность длины и называется эксцентриситетом силы избыточного гидростатического давления, величина которого положительна, если плоскость гидростатического напора расположена выше отметки центра тяжести площадки, поскольку собственный момент инерции и площадь в этом случае положительны. Центр тяжести площадки (точка Т) и центр избыточного гидростатического давления (точка Д) совпадают, если площадка лежит в горизонтальной плоскости.

### ***2.3.6. Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность***

На каждую из элементарных площадок криволинейной поверхности действует элементарная сила, направленная по нормали к этой площадке и равная  $dP$ . В общем случае элементарные силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве. Такая система сил приводится к одной силе

$$\vec{P} = \int_S d\vec{P},$$

называемой главным вектором, который равен векторному интегралу от элементарных сил, и к одной паре сил, момент которой

$$\vec{M} = \int_S \vec{r} \times d\vec{P}$$

называется главным моментом сил давления. В частном случае силы давления могут приводиться к одной равнодействующей силе, например, в случае шаровой поверхности с постоянным радиусом кривизны.

Нас будет интересовать только величина главного вектора, которая определяется величинами проекций силы на горизонтальную и вертикальную оси

$$P = \sqrt{P_{\Gamma}^2 + P_{\text{В}}^2} . \quad (2.19)$$

Рассмотрим криволинейную цилиндрическую поверхность «*ab*» (рис. 2.14) с одной стороны которой находится жидкость с избыточным давлением  $p_{\text{изб}}$  на свободной поверхности.

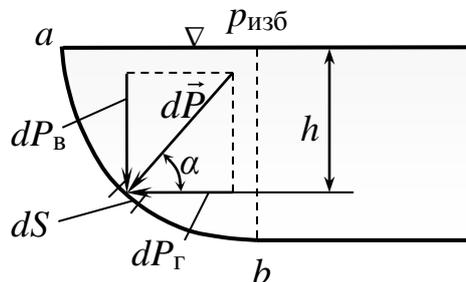


Рис. 2.14. Схема действия сил на элемент поверхности

Разобьем криволинейную поверхность на элементарные площадки  $dS$ , на каждую из которых будет действовать элементарная сила  $d\vec{P}$ .

Глубина погружения центра тяжести этой площадки относительно уровня с известным избыточным давлением  $p_{\text{изб}}$  будет равна  $h$ .

Сила избыточного гидростатического давления на площадку  $dS$ :

$$dP = (p_{\text{изб}} + \rho gh) dS ,$$

а её горизонтальная проекция:

$$dP_{\Gamma} = (p_{\text{изб}} + \rho gh) \cos \alpha dS .$$

Произведение  $dS \cos \alpha$  представляет собой проекцию элементарной площадки на вертикальную плоскость

$$dS_{\text{В}} = dS \cos \alpha .$$

Тогда

$$dP_{\Gamma} = (p_{\text{изб}} + \rho gh) dS_{\text{В}},$$

а полная сила

$$P_{\Gamma} = \int_S (p_{\text{изб}} + \rho gh) dS_{\text{В}} = p_{\text{изб}} \int_S dS_{\text{В}} + \rho g \int_S h dS_{\text{В}} ,$$

где  $\int_S dS_{\text{В}} = S_{\text{В}}$  – проекция криволинейной поверхности на вертикальную плоскость;  $\int_S h dS_{\text{В}} = h_{\Gamma} S_{\text{В}}$  – статический момент площади вертикальной проекции  $S_{\text{В}}$  относительно оси, расположенной на свободной поверхности,  $h_{\Gamma}$  – заглубление центра тяжести площади под уровень свободной поверхности. Следовательно,

$$P_{\Gamma} = (p_{\text{изб}} + \rho g h_{\Gamma}) S_{\text{В}} . \quad (2.20)$$

Таким образом, горизонтальная составляющая силы гидростатического давления, действующей на криволинейную поверхность, равна произведению давления в центре тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности на площадь этой проекции.

Аналогично определим вертикальную составляющую силы давления:

$$dP_{\text{В}} = (p_{\text{изб}} + \rho gh) \sin \alpha dS ;$$

$$dS_{\Gamma} = dS \sin \alpha ;$$

$$P_{\text{В}} = \int_S (p_{\text{изб}} + \rho gh) dS_{\Gamma} = p_{\text{изб}} S_{\Gamma} + \rho g \int_S h dS_{\Gamma} = p_{\text{изб}} S_{\Gamma} + \rho g W_{\text{т.д}} ,$$

поскольку  $\int_S h dS_{\Gamma}$  – объем, ограниченной снизу цилиндрической поверхностью, сверху – ее проекцией на плоскость свободной поверхности, а направляющими являются вертикальные поверхности. Такой

объем называют телом давления. Тело давления и вертикальная составляющая могут быть положительными и отрицательными (рис. 2.15). Если тело давления заполнено жидкостью, вертикальная составляющая силы гидростатического давления направлена вниз. Если тело давления не заполнено жидкостью, вертикальная составляющая силы гидростатического давления направлена вверх. В этом случае объем  $W_{т.д}$  называют мнимым телом давления.

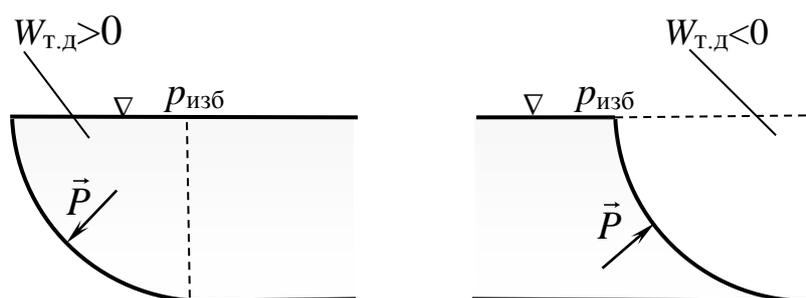


Рис. 2.15. Определение знака тела давления

Направление действия силы гидростатического давления определяется углом наклона  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_{\text{в}}}{P_{\text{г}}}.$$

#### 2.4. Относительный покой жидкости

Относительным покоем называют такое состояние жидкости, при котором все её частицы неподвижны друг относительно друга и относительно стенок сосуда, в котором они находятся, но вместе с сосудом жидкость перемещается относительно земли. В этом случае на частицы жидкости кроме силы тяжести будут действовать силы инерции переносного движения.

Для определения закона распределения давления в жидкости и формы поверхности равного давления необходимо воспользоваться дифференциальным уравнением равновесия Эйлера в форме (2.5) и выразить проекции плотности массовой силы с учетом сил инерции,

характерных для данного вида относительного движения. Рассмотрим несколько примеров относительного покоя.

### 2.4.1. Равномерное прямолинейное движение сосуда

Пусть имеется сосуд с жидкостью, движущийся равномерно и прямолинейно по направлению оси  $x$  со скоростью  $\vec{V}$  (рис. 2.16).

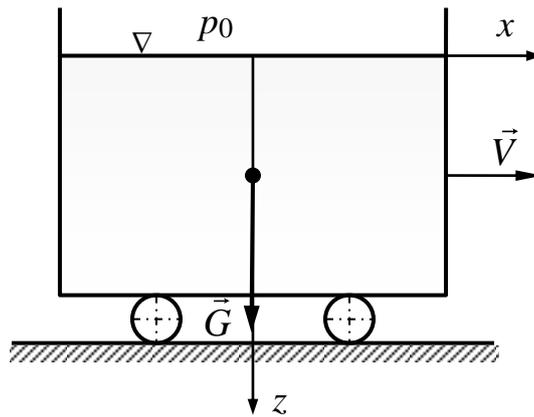


Рис. 2.16. Равномерное движение сосуда

На жидкость в этом случае действует только сила тяжести и уравнение равновесия Эйлера запишется в виде:

$$dp = \rho g dz.$$

После интегрировании, получим

$$p = \rho g z + C.$$

Определим постоянную интегрирования  $C$ . Пусть на свободной поверхности ( $z = 0$ ) давление равно атмосферному  $p_0 = p_{\text{ат}}$ , тогда  $C = p_{\text{ат}}$  и давление в произвольной точке

$$p = p_{\text{ат}} + \rho g z.$$

Уравнение поверхности равного давления:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Исходя из того, что  $X = 0; Y = 0; Z = g$ , получим

$$z = \text{const}$$

Таким образом, при равномерном движении сосуда поверхности равного давления представляют собой семейство горизонтальных плоскостей. Следовательно, здесь действуют те же законы, что и при абсолютном покое.

#### 2.4.2. Равноускоренное прямолинейное движение сосуда

Сосуд с жидкостью движется равноускоренно (рис. 2.17).

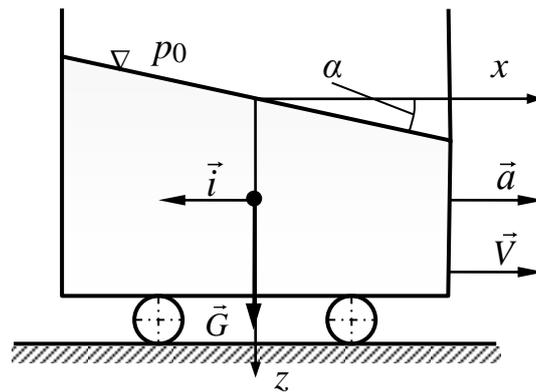


Рис. 2.17. Равноускоренное перемещение сосуда

Направление оси  $x$  совпадает с направлением скорости  $\vec{V}$ , ось  $z$  направлена вертикально вниз. Найдем вид поверхности равного давления, воспользовавшись выражением (2.6)

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

На жидкость действует сила инерции переносного движения, характеризующаяся ускорением  $i = -a$ .

Проекции плотности массовых сил для этого случая:  $X = -a$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = g$ . Тогда уравнение поверхности равного давления запишется:

$$-adx + gdz = 0 ;$$

$$dz = \frac{a}{g} dx ;$$

$$z = \frac{a}{g} x + C .$$

Это уравнение семейства наклонных поверхностей с углом наклона к горизонту  $\alpha$ , тангенс которого

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}.$$

Свободная поверхность это одна из поверхностей равного давления. Уравнение свободной поверхности можно получить, если принять

$$x = 0; \quad z = 0,$$

тогда  $C = 0$  и уравнение свободной поверхности

$$z_0 = \frac{a}{g}x, \quad (2.21)$$

где  $z_0$  – координата точки на свободной поверхности.

Если положить  $a = 0$ , то получим случай равномерного движения.

Для определения закона распределения давления в сосуде в случае равноускоренного движения (рис. 2.17) применим уравнение равновесия Эйлера в форме (2.5) и учтем, что  $X = -a$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = g$ , тогда получим

$$dp = -\rho a dx + \rho g dz.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$p = -\rho a x + \rho g z + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим рассматривая давление в точке на свободной поверхности, соответствующей началу принятой системы координат, где  $x = 0$ ;  $z = 0$ ;  $p = p_0$ , тогда

$$C = p_0.$$

Закон распределения давления примет вид:

$$p = p_0 - \rho a x + \rho g z;$$

$$p = p_0 + \rho g \left( z - \frac{a}{g} x \right).$$

С учетом того, что  $z_0 = \frac{a}{g} x$ , получим:

$$p = p_0 + \rho g(z - z_0);$$

$$z - z_0 = h;$$

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Таким образом, закон распределения давления имеет такой же вид, как и в случае абсолютного покоя, но здесь  $h$  – глубина погружения точки под свободной поверхностью. Следовательно, если зафиксировать координату  $x$ , то закон распределения давления в функции от  $z$  будет таким же, как и в случае абсолютного покоя.

При равнозамедленном движении знак  $i$  меняется, изменяется и угол наклона поверхности равного давления (рис. 2.18).

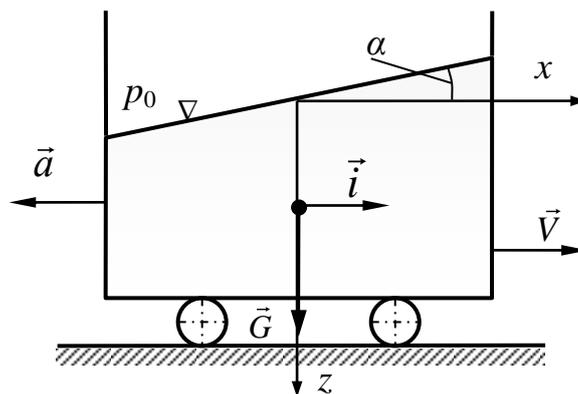


Рис. 2.18. Равнозамедленное перемещение сосуда

### 2.4.3. *Равномерное вращение сосуда вокруг вертикальной оси*

Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.19). Положим, что частицы жидкости неподвижны относительно друг друга, но весь объем жидкости вместе с сосудом совершает вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ .

Определим поверхности равного давления и закон распределения давления в сосуде.

На каждую частицу жидкости в сосуде будет действовать сила тяжести и сила инерции вращательного движения. В данном случае это центробежная сила.

Рассмотрим уравнение поверхности равного давления:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

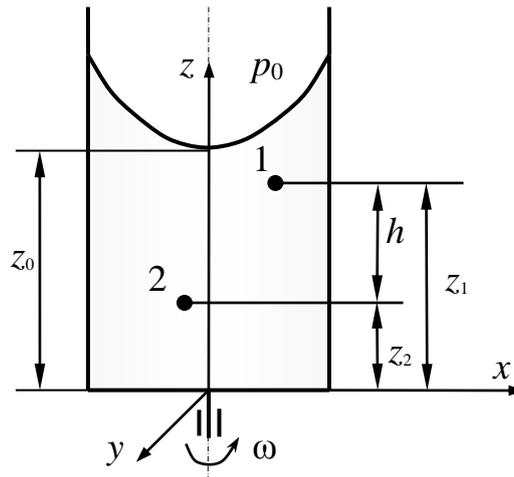


Рис. 2.19. Равномерное вращение сосуда

Проекции плотности массовых сил на оси координат для любой жидкой частицы с координатами  $x, y, z$  могут быть представлены выражениями:

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = -g.$$

Подставим проекции  $X, Y, Z$  в уравнение поверхности равного давления:

$$\omega^2 (x dx + y dy) - g dz = 0$$

и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\omega^2 [\int x dx + \int y dy] - g \int dz = 0;$$

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz = C.$$

Учтем, что  $x^2 + y^2 = r^2$ , где  $r$  – радиальная координата частицы. Следовательно:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C.$$

Найдем постоянную интегрирования  $C$ . Для этого рассмотрим точку на свободной поверхности на оси сосуда, для которой  $r = 0$ ;  $z = z_0$ , тогда

$$C = -gz_0.$$

Уравнение поверхности равного давления примет вид:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (2.22)$$

Это уравнение является уравнением параболоида вращения с вершиной, смещенной по оси  $z$  от начала координат на величину  $z_0$ .

Таким образом, при равномерном вращении сосуда вокруг вертикальной оси поверхности равного давления представляют собой семейство параболоидов вращения, смещенных вдоль вертикальной оси.

Найдем закон распределения давления. Для этого используем уравнение равновесия Эйлера:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Подставив в уравнение выражения для проекций плотности массовой силы  $X = \omega^2 x$ ;  $Y = \omega^2 y$ ;  $Z = -g$ , получим

$$dp = \left[ \rho\omega^2(xdx + ydy) - gdz \right].$$

После интегрирования последнего уравнения:

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho gz + C;$$

$$p = \rho g \left[ \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right] + C. \quad (2.23)$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим, рассматривая давление в точке на свободной поверхности, в которой  $r = 0$ ;  $z = z_0$ ;  $p = p_0$ :

$$p_0 = -\rho gz_0 + C,$$

откуда

$$C = p_0 + \rho g z_0.$$

Уравнение (2.23), определяющее закон распределения давления, с учетом выражения для постоянной  $C$  приведет к виду:

$$p = p_0 + \rho g \left[ \frac{\omega^2 r^2}{2g} + (z_0 - z) \right]. \quad (2.24)$$

Если рассмотреть две точки, имеющие одинаковый радиус, но разные координаты  $z$ , то давления в этих точках будут равны:

$$p_1 = p_0 + \rho g \left[ \frac{\omega^2 r^2}{2g} + (z_0 - z_1) \right];$$
$$p_2 = p_0 + \rho g \left[ \frac{\omega^2 r^2}{2g} + (z_0 - z_2) \right].$$

Найдем разность между давлениями  $p_2$  и  $p_1$ :

$$p_2 - p_1 = (\rho g z_0 - \rho g z_2) - (\rho g z_0 - \rho g z_1) = \rho g (z_1 - z_2).$$

Следовательно

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2),$$

или

$$p_2 = p_1 + \rho g h,$$

где  $h = (z_1 - z_2)$  – заглубление точки 2 под уровень расположения точки 1. Если точка 1 лежит на свободной поверхности, то

$$p_2 = p_0 + \rho g h,$$

так же, как и в случае абсолютного покоя. Таким образом, давление в точках, расположенных на одинаковых радиусах от оси вращения, но имеющих различное заглубление, подчиняется основному уравнению гидростатики.

#### 2.4.4. *Равномерное вращение сосуда вокруг горизонтальной оси*

Рассмотрим этот вопрос на примере вращения жидкости, расположенной между двумя дисками рабочего колеса центробежного насоса – основным и покрывающим. Вход и выход рабочего колеса ограничим плоскостью  $AB$  и цилиндрической поверхностью  $DE$  с радиусом  $r_2$  (рис. 2.20). Получим кольцевой сосуд, в котором жидкость заполняет пространство между дисками и при вращении находится в состоянии относительного покоя. Найдем закон распределения давления в выделенном объеме. Выберем оси координат  $x, y, z$ . Начало координат расположим на оси вращения.

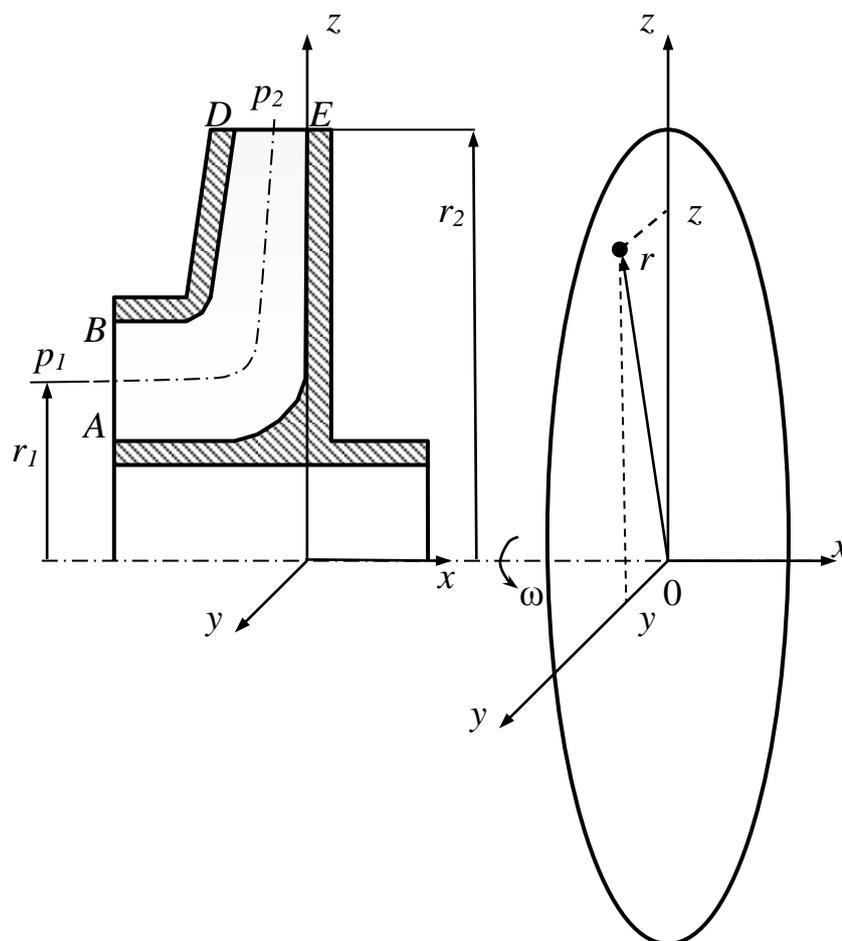


Рис. 2.20. Вращение кольцевого сосуда вокруг горизонтальной оси

Рассмотрим произвольную точку с координатами  $y$  и  $z$ . В данном случае на элементарную жидкую частицу будут действовать центробежная сила и сила тяжести, следовательно, проекции плотности массовых сил на оси координат составят:

$$X = 0; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = \omega^2 z - g,$$

а уравнение равновесия (2.5) примет вид:

$$dp = \rho \left[ \omega^2 (zdz + ydy) - g dz \right].$$

После интегрирования получим:

$$p = \rho \left[ \frac{\omega^2}{2} (z^2 + y^2) - gz \right] + C;$$

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho gz + C,$$

где  $r = z^2 + y^2$  – текущий радиус точки относительно оси вращения.

Сила тяжести жидкости в рабочем колесе центробежного насоса существенно меньше центробежной силы, поэтому ею можно пренебречь. Тогда

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + C. \quad (2.25)$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим, рассматривая точку на радиусе  $r_2$ , в которой давление равно  $p_2$ :

$$p_2 = \rho \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + C;$$

$$C = p_2 - \rho \frac{\omega^2 r_2^2}{2}.$$

Подставив это выражение в уравнение (2.25), получим закон распределения давления

$$p = p_2 - \rho \frac{\omega^2}{2} (r_2^2 - r^2),$$

откуда следует, что давление в рассматриваемой области изменяется

по параболическому закону. Эпюра распределения давления в зависимости от радиуса представлена на рис. рис. 2.21. Эпюра показывает, что давление возрастает с увеличением радиуса.

Определим вид поверхности равного давления. Дифференциальное уравнение поверхности равного давления (2.6) в данном случае имеет следующий вид

$$\omega^2 y dy + \omega^2 z dz - g dz = 0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{\omega^2}{2} (z^2 + y^2) - gz = C.$$

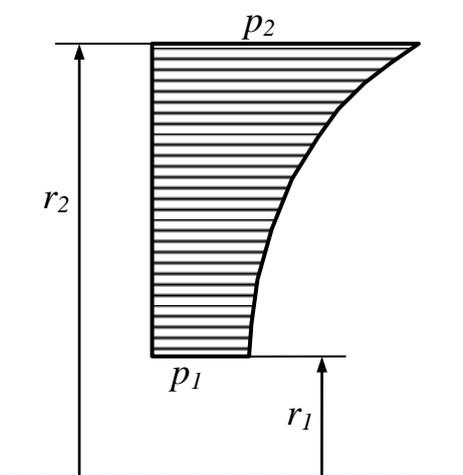


Рис. 2.21. Эпюра давления во вращающейся замкнутой области

В центробежных насосах слагаемое  $gz$ , выражающее удельную энергию положения, во много раз меньше, чем слагаемое  $\frac{\omega^2}{2} (z^2 + y^2)$ , связанное с удельной энергией переносного движения. В результате уравнение поверхности равного давления примет следующий вид:

$$\frac{\omega^2}{2} (z^2 + y^2) = \frac{\omega^2 r^2}{2} = C.$$

Это уравнение семейства цилиндрических поверхностей, ось которых совпадает с осью вращения  $x$ .

## ГЛАВА 3. ГИДРОДИНАМИКА

Раздел гидравлики, в котором изучаются законы движения жидкости, называется гидродинамикой.

### 3.1. Основные понятия и определения

Идеальная жидкость – воображаемая жидкость, в которой в отличие от реальной жидкости отсутствует внутреннее трение и касательные напряжения между соседними слоями жидкости. Модель идеальной жидкости используется при теоретическом рассмотрении задач, в которых вязкость не является определяющим фактором и ею можно пренебречь.

В гидродинамике жидкость рассматривают как совокупность жидких частиц, объем которых мал по сравнению с рассматриваемой областью движения жидкости, но значительно больше объема отдельных молекул, которых в частице содержится так много, что жидкость в ее пределах и в потоке в целом можно рассматривать как сплошную среду с непрерывным распределением параметров. В потоке жидкости скорости частиц в разных точках в общем случае неодинаковы и не постоянны во времени. Совокупность значений скоростей в разных точках потока называют полем скоростей. Гидравлика наиболее часто оперирует средними по сечению потока скоростями.

Траектория – линия, описываемая при движении одной и той же частицей жидкости. При установившемся движении траектории являются неизменными во времени. При неустановившемся движении траектории частиц могут менять форму с течением времени.

Линия тока – линия, касательные к которой в данный момент времени в каждой точке совпадают с направлением вектора скорости в этой точке (рис. 3.1).

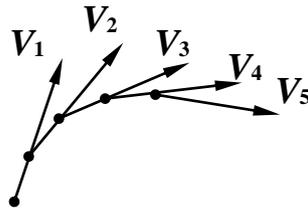


Рис. 3.1. Линия тока

Если скорости и давления в потоке жидкости зависят только от координат и не зависят от времени, то движение называют установившимся (стационарным):

$$V = f(x, y, z); \quad p = f(x, y, z).$$

Поле скоростей пространственного стационарного потока определяется проекциями вектора скорости:

$$V_x = f(x, y, z);$$

$$V_y = f(x, y, z);$$

$$V_z = f(x, y, z).$$

Установившееся (стационарное) движение может быть равномерным и неравномерным. Равномерным называют движение, при котором векторы скорости жидких частиц параллельны и не изменяются вдоль потока. Примером равномерного движения служит движение жидкости в цилиндрической трубе (рис. 3.2, а).

При неравномерном движении векторы скорости жидких частиц в общем случае не параллельны и изменяются по величине вдоль потока. Примером неравномерного движения может служить движение жидкости в конической трубе (рис. 3.2, б).

Средняя скорость в поперечном сечении канала, например, трубы площадью  $S$ , при установившемся движении может быть представлена как:

$$V_{\text{cp}} = \frac{1}{S} \int_S V dS.$$

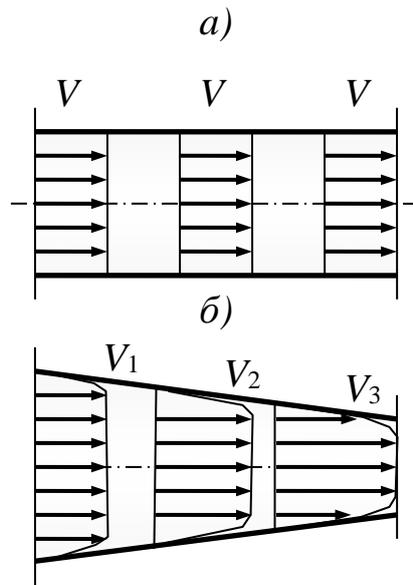


Рис. 3.2. Равномерное (а) и неравномерное (б) движение в трубах

Неустановившимся (нестационарным) называют движение, при котором скорость и давление в точках пространства изменяются во времени:

$$V = f(x, y, z, t); \quad p = f(x, y, z, t).$$

При неустановившемся движении вводят понятие осредненной по времени скорости жидкости в некоторой точке пространства (рис. 3.3).

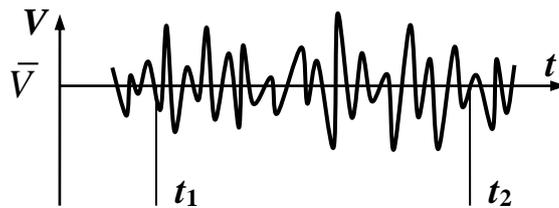


Рис. 3.3. К определению осредненной по времени скорости в точке пространства

Осредненную по времени скорость вычисляют как среднеинтегральную скорость за определенный интервал времени

$$\bar{V} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V dt .$$

Введем теперь понятие об элементарной струйке тока, поверхности тока и трубке тока. Рассмотрим линию тока 1-2 (рис. 3.4). Проведем через точку 1 плоскость, перпендикулярную вектору скорости  $\vec{V}_1$  и выделим в этой плоскости элементарный замкнутый контур  $d\ell_1$ , охватывающий площадку  $dS_1$ . Через все точки контура  $d\ell_1$  проведем линии тока, совокупность которых составит поверхность тока, ограничивающую элементарную трубку тока. В гидравлике используется струйная модель движения жидкости. Поток жидкости рассматривается как совокупность отдельных элементарных струек тока.

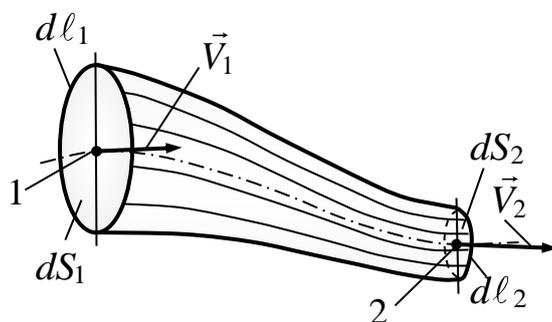


Рис. 3.4. Трубка тока

Если среда несжимаемая (жидкость обладает постоянной плотностью) и внутри трубки тока нет источников или стоков, тогда объемные секундные расходы через два любых ее сечения будут одинаковы:

$$dQ_1 = dQ_2.$$

Это уравнение называется уравнением постоянства расхода в сечениях трубки тока.

Исходя из того, что через площадку  $dS_1$  проходит расход  $V_1 dS_1$ , а через площадку  $dS_2$  – расход  $V_2 dS_2$ , можно записать:

$$V_1 dS_1 = V_2 dS_2. \quad (3.1)$$

Данное уравнение называется уравнением неразрывности для трубки тока.

Живым сечением трубки тока называют сечение, которое в каждой своей точке перпендикулярно линии тока, проходящей через эту

точку. При стремлении площади живого сечения к нулю, трубка в пределе обращается в линию тока.

В любой точке боковой поверхности трубки тока вектор скорости жидкой частицы направлен по касательной к боковой поверхности, нормальная к боковой поверхности составляющая скорости у жидкой частицы отсутствует, следовательно, перетекания жидкости в трубку или из трубки тока через боковую поверхность не происходит, т. е. боковая поверхность трубки тока для жидкости непроницаема.

### 3.2. Режимы движения жидкости

В 1880 г. английский физик О. Рейнольдс для исследования характера движения жидкости в трубах поставил следующий опыт. Установка состояла из резервуара (рис. 3.5), от которого отходила стеклянная трубка (в опытах Рейнольдса трубка была диаметром 6,15 мм). Опыт проводился на воде при  $t = 5^{\circ}\text{C}$ .

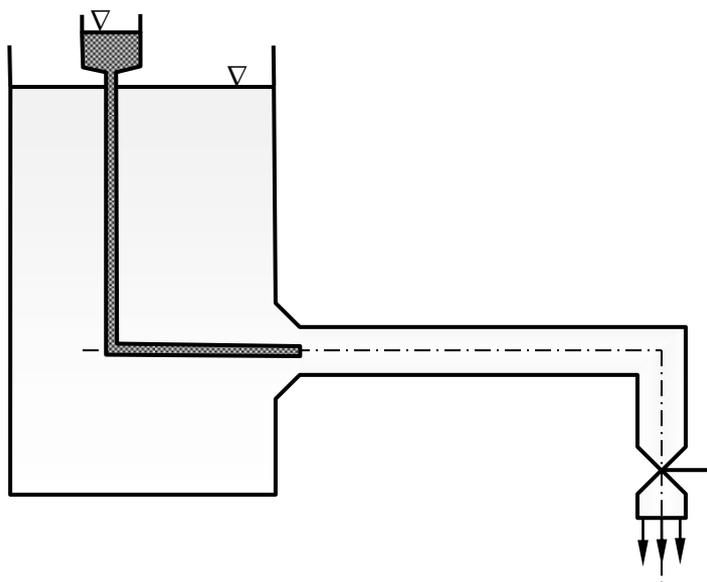


Рис. 3.5. Схема опыта Рейнольдса

От внешнего источника с помощью тонкой трубки к оси основной трубы подводилась краска тонкой струйкой. Если открыть кран на конце основной стеклянной трубы (см. рис. 3.5) и дать жидкости возможность двигаться по ней, то можно наблюдать следующее.

При малой скорости в трубе жидкость движется так, что краска в ней не смешивается с основным потоком воды и перемещается вдоль оси трубы. Жидкость в трубе движется слоями, перемешивание между которыми отсутствует. При увеличении скорости больше некоторого определенного значения краска размывается по всему сечению, и в трубе начинает двигаться равномерно окрашенная жидкость. Таким образом, наблюдаются 2 режима движения. Первый режим, когда жидкость течет слоями, называется ламинарным, второй – турбулентным. При турбулентном движении частицы жидкости совершают кроме общего осредненного движения вдоль оси трубы еще и пульсационные движения, которые и размывают струю краски. О. Рейнольдс предложил характеризовать режим движения жидкости безразмерным числом, которое было названо в его честь числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{V\ell}{\nu}. \quad (3.2)$$

Здесь  $V$  – характерная скорость (для трубы – средняя по сечению скорость жидкости),  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\ell$  – некоторый характерный для данного потока линейный размер. Например, при движении в круглой трубе в качестве характерного размера выбирают диаметр трубы  $d$ .

Переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при вполне определенном, критическом числе Рейнольдса –  $\text{Re}_{\text{кр}}$ . Для круглых труб критическое число Рейнольдса составляет  $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$ .

При  $\text{Re} < 2300$  режим движения ламинарный, при  $\text{Re} > 2300$  – турбулентный. Величина критического числа  $\text{Re}$  зависит от внешних условий движения. При благоприятных условиях оно может достигать значений  $\text{Re} \approx 12000$ . Однако, такое ламинарное движение очень неустойчиво и при малейших внешних возмущениях движение переходит в турбулентный режим.

При турбулентном режиме частицы жидкости совершают два вида движения – основное осредненное по времени движение вдоль

трубы и пульсационное движение в различных направлениях относительно осредненного. Рейнольдс предложил рассматривать мгновенные значения параметров турбулентного движения в виде суммы осредненных по времени параметров и их пульсационных составляющих. Тогда мгновенную скорость движения частицы жидкости вдоль трубы можно представить, как

$$V = \bar{V} + V',$$

где  $\bar{V} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V dt$  – осредненная по времени мгновенная скорость;

$(t_2 - t_1)$  – период осреднения;  $V'$  – пульсационная составляющая мгновенной скорости.

Аналогично могут быть представлены нормальные и касательные напряжения в жидкости при турбулентном режиме движения. Наличие пульсационных составляющих скорости указывает на нестационарный характер турбулентного потока. Установившимся осредненным турбулентным движением, называют движение, при котором осредненные мгновенные скорости  $\bar{V}$  в каждой точке пространства с течением времени остаются постоянными.

Профили скорости при установившемся движении в круглой трубе при ламинарном режиме и осредненной скорости при турбулентном представлены на рис. 3.6. При ламинарном движении изменение скорости поперек трубы подчиняется параболическому закону, при турбулентном – профиль скорости близок к степенному закону. Средняя скорость при ламинарном режиме равна половине максимальной, при турбулентном – максимальная скорость на оси трубы лишь на (10...15)% превышает среднюю скорость в трубе.

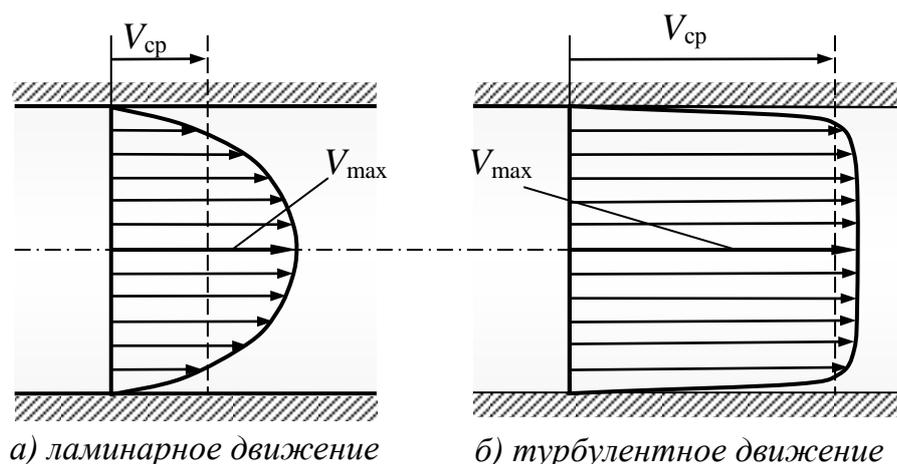


Рис. 3.6. Распределение скоростей при движении в круглой трубе

Анализ турбулентного движения в трубе круглого сечения часто выполняют на основе двухслойной модели турбулентного потока.

У стенки трубы выделяют очень тонкий слой жидкости, в котором решающую роль играют силы вязкости. Здесь преимущественно проявляется межмолекулярное взаимодействие и возникают значительные касательные напряжения. Эту область течения называют вязким подслоем. В пределах вязкого подслоя скорость линейно возрастает от нуля на стенке до  $(0,6...0,8)V_{\max}$ .

Остальная часть поперечного сечения трубы занята турбулентным ядром потока, в котором вязкие напряжения не оказывают существенного влияния на распределение осредненной скорости. В этой области происходят интенсивные турбулентные пульсации и перемешивание частиц жидкости.

### 3.3. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

Выделим в идеальной жидкости элементарный жидкий параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 3.7). На выделенный объем действуют массовые и поверхностные силы.

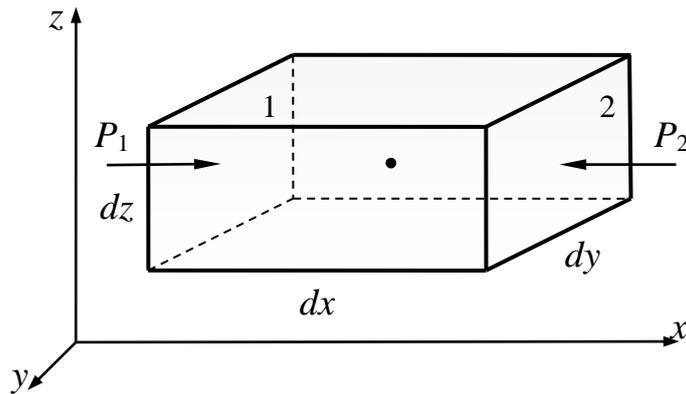


Рис. 3.7. Элементарный жидкий параллелепипед

Произведение массы элемента  $\delta M$  на ускорение его центра масс  $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$  равно геометрической сумме всех сил, действующих на выделенный элемент:

$$\delta M \frac{d\vec{V}}{dt} = \delta \vec{P} + \delta \vec{J} + \delta \vec{G}. \quad (3.3)$$

Правая часть уравнения (3.3) представляет собой сумму поверхностных сил давления  $\delta \vec{P}$ , массовых сил инерции  $\delta \vec{J}$  и сил тяжести  $\delta \vec{G}$ , действующих на выделенный элемент. Сила трения отсутствует, т. к. жидкость идеальная.

Спроектируем уравнение (3.3) на оси декартовой системы координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta M \frac{dV_x}{dt} = \delta P_x + \underbrace{\delta J_x + \delta G_x}_{X\delta M}; \\ \delta M \frac{dV_y}{dt} = \delta P_y + \underbrace{\delta J_y + \delta G_y}_{Y\delta M}; \\ \delta M \frac{dV_z}{dt} = \delta P_z + \underbrace{\delta J_z + \delta G_z}_{Z\delta M}; \end{array} \right.$$

где  $X, Y, Z$  – проекции плотности массовых сил, действующих на выделенный объем.

Элементарные массовые силы в проекции на оси координат выражаются формулами:

$$X\delta M = \delta J_x + \delta G_x;$$

$$Y\delta M = \delta J_y + \delta G_y;$$

$$Z\delta M = \delta J_z + \delta G_z.$$

Рассмотрим действие поверхностных сил. Поскольку все грани параллелепипеда представляют собой элементарные площадки, с точностью до бесконечно малых величин можно принять, что давление  $p$  на каждой из граней постоянно. Тогда на грань 1 будет действовать давление  $p_1$ , а на грань 2:

$$p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Проекция элементарной поверхностной силы  $P$  на ось  $x$  будет

$$dP_x = (p_1 - p_2) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Учитывая, что объем параллелепипеда выражается как

$$dx dy dz = \delta W = \frac{\delta M}{\rho},$$

уравнение движения в проекции на ось  $x$  может быть представлено в виде:

$$\delta M \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta M}{\rho} + X\delta M,$$

или

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X$$

С учетом того, что скорость движения есть функция координат и времени, т. е.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t),$$

запишем выражение для полной производной скорости в проекции на ось  $x$  в следующем виде:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Аналогично могут быть представлены проекции полной производной скорости на оси  $y$  и  $z$ .

Поскольку

$$\frac{dx}{dt} = V_x; \quad \frac{dy}{dt} = V_y; \quad \frac{dz}{dt} = V_z,$$

то окончательно уравнения движения идеальной жидкости запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Эта система дифференциальных уравнений была получена Л. Эйлером в 1755 году (опубликована в 1757 г.). В левой части уравнения стоит полное ускорение жидкой частицы, движущейся под действием массовых и поверхностных сил. Полное ускорение складывается из локального ускорения, характеризующего изменение поля скоростей во времени, и конвективного ускорения, характеризующего неоднородность поля скоростей в пространстве в данный момент времени.

В системе уравнений (3.4) неизвестными являются три составляющие скорости  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , и давление  $p$ , поэтому для получения решения к системе (3.4) нужно добавить уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

Для несжимаемых жидкостей плотность  $\rho = \text{const}$ , в этом случае система будет иметь 4 уравнения и 4 неизвестных.

### 3.4. Уравнения движения Эйлера в естественной системе координат

Естественной системой называется ортогональная система криволинейных координат, в которой одна координата совпадает с линией тока, а другая является нормалью к ней (рис. 3.8).

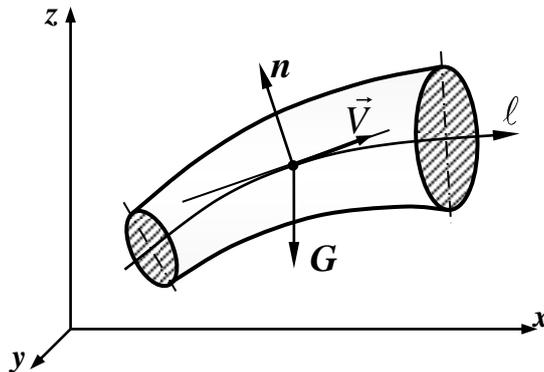


Рис. 3.8. Элементарная струйка тока в естественной системе координат

Рассмотрим движение в элементарной струйке тока. Пусть одна из осей естественной системы координат  $\ell$  – линия тока. Общий вид уравнения движения центра инерции жидкой частицы:

$$\delta M \frac{d\vec{V}}{dt} = \delta \vec{P} + \delta \vec{J} + \delta \vec{G}.$$

В проекции на направление линии тока уравнение движения примет вид

$$\delta M \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\ell} = (\delta \vec{P})_{\ell} + (\delta \vec{G} + \delta \vec{J})_{\ell} = (\delta \vec{P})_{\ell} + L \delta M,$$

где  $L$  – сумма проекций на направление линии тока плотности всех массовых сил.

Так как в проекции на направление линии тока элементарный главный вектор поверхностных сил

$$(\delta \vec{P})_{\ell} = -\frac{\partial p}{\partial \ell} \delta W,$$

то с учетом выражения для элементарного объема  $\delta W = \delta M / \rho$ , получаем

$$\delta M \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_\ell = -\frac{\partial p}{\partial \ell} \frac{\delta M}{\rho} + L \delta M,$$

откуда

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_\ell = L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell}.$$

Поскольку вектор скорости  $\vec{V}$  направлен по касательной к линии тока  $\ell$ , то скорость  $\vec{V}$  проецируется на ось  $\ell$  в натуральную величину и полная производная скорости составит:

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_\ell = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial \ell},$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial \ell} = L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell}. \quad (3.6)$$

Проекция на нормаль  $n$  к линии тока (аналогично):

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_n = N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (3.7)$$

где  $N$  – сумма проекций на ось  $n$  плотности всех массовых сил.

Нормальное ускорение  $\left( d\vec{V}/dt \right)_n$  равно:

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_n = -\frac{V^2}{r},$$

где  $r$  – радиус кривизны линии тока. Положительным направлением считается направление нормали от центра кривизны линии тока. В случае прямолинейного движения  $r \rightarrow \infty$  и  $\left( d\vec{V}/dt \right)_n = 0$ .

Интегралы уравнений Эйлера для установившегося абсолютного и установившегося относительного движения жидкости известны как уравнения Бернулли.

### 3.5. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся абсолютном движении

Уравнение Эйлера в естественной системе координат (см. раздел 3.4) в проекции на ось  $l$  (рис. 3.9):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial l} = L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}.$$

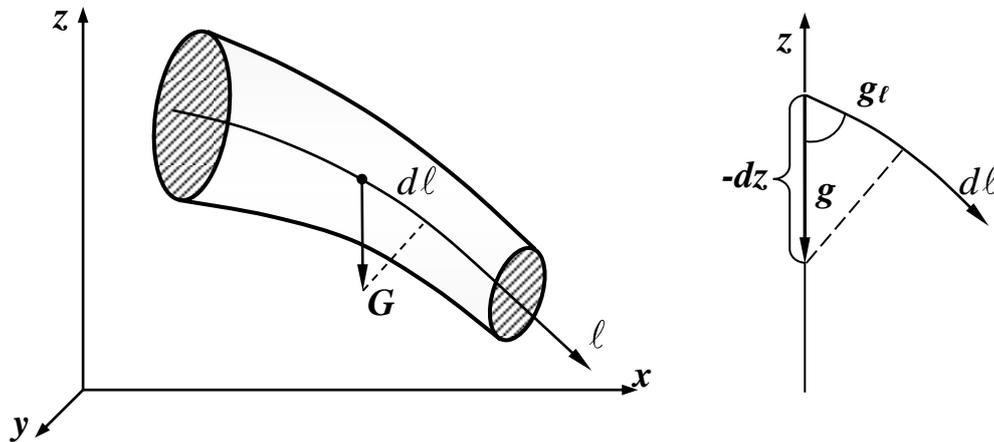


Рис. 3.9. Элементарная струйка в естественной системе координат

В рассматриваемом случае установившегося абсолютного движения слагаемое  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ . Из массовых сил проекцию на направление движения имеет только сила тяжести  $G = g\delta M$ . Тогда (см. рис. 3.9) проекция плотности массовых сил на ось  $l$ :

$$L = g_l = g \cos(g, l);$$

$$\cos(g, l) = -\frac{\partial z}{\partial l};$$

$$V \frac{\partial V}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{V^2}{2} \right).$$

Уравнение Эйлера в проекции на ось  $\ell$  запишется:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -g \frac{\partial z}{\partial \ell} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell}.$$

Объединив слагаемые и разделив обе части этого уравнения на  $g$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по  $\ell$ :

$$\int_{\ell} \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) d\ell = 0,$$

откуда:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) – уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости при установившемся движении.

Если интегрирование произвести между двумя сечениями вдоль  $\ell$ , то получим уравнение Бернулли в форме:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \quad (3.9)$$

### 3.6. Физический смысл уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли показывает, что при движении идеальной жидкости вдоль линии тока значение трехчлена

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H \quad (3.10)$$

остаётся постоянным.

Это выражение представляет собой полную удельную (отнесенную к единице веса) механическую энергию жидкости. Как уже отмечалось в разделе 2.3.2, в гидравлике удельную механическую энергию жидкости называют напором. Сумма всех слагаемых в уравнении Бернулли выражает гидродинамический или полный напор  $H$ .

При движении идеальной жидкости вдоль линии тока полная удельная механическая энергия остается постоянной. Следовательно, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости. Слагаемые и их комбинации в уравнении Бернулли означают:

$\frac{V^2}{2g}$  – скоростной напор (удельная кинетическая энергия);

$\frac{P}{\rho g}$  – удельная энергия давления;

$z$  – геометрический напор (удельная энергия положения);

$\frac{P}{\rho g} + z$  – полный гидростатический напор (полная удельная по-

тенциальная энергия).

При движении жидкости в трубке тока в соответствии с уравнением (3.10) может происходить перераспределение энергии по ее длине. Если живое сечение элементарной струйки уменьшается по направлению движения, то скорость возрастает, а давление снижается. Одновременно может измениться и геометрическая высота. Но сумма слагаемых, которая выражает гидродинамический напор, остается при этом неизменной.

Графическая интерпретация уравнения Бернулли приведена на рис. 3.10. Представленная диаграмма называется диаграммой Бернулли.

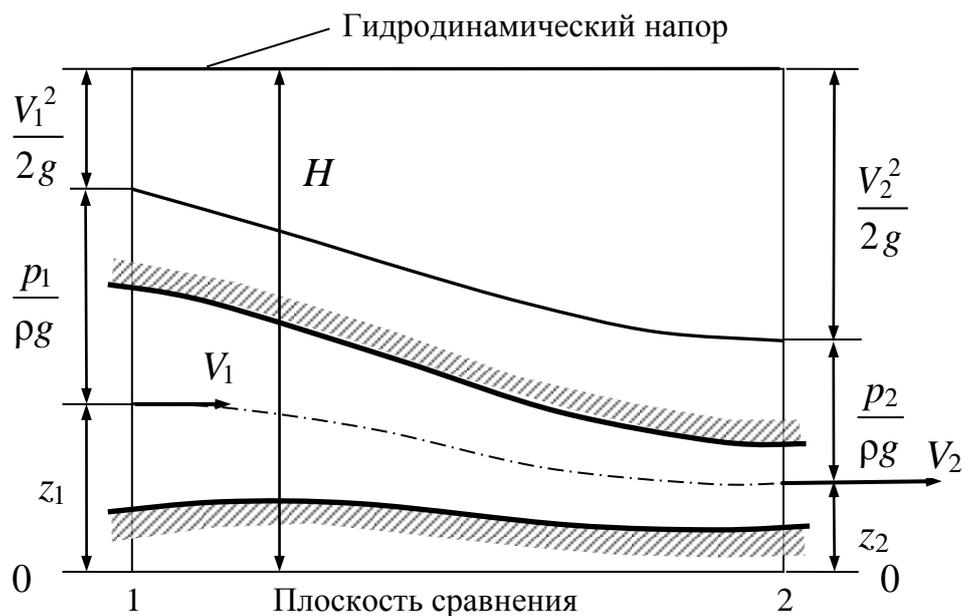


Рис. 3.10. Диаграмма Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

### 3.7. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при неустановившемся движении

Запишем уравнение движения Эйлера в абсолютном движении в естественной системе координат (из массовых сил в данном случае действует только сила тяжести):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial l} = -g \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}.$$

Перенесем все слагаемые в левую часть и разделим их на  $g$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Проинтегрируем полученное уравнение вдоль  $l$  от сечения 1 до сечения 2:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right) dl + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dl = 0;$$

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) = \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} d\ell.$$

В отличие от установившегося, при неустановившемся движении удельные энергии в сечениях 1 и 2 не равны, а отличаются на величину  $H_i = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} d\ell$ , называемую инерционным напором.

Инерционный напор представляет собой изменение механической энергии потока между сечениями 1 и 2, обусловленное локальным изменением кинетической энергии в каждой точке потока. Инерционный напор может быть как положительным, если кинетическая энергия жидкости в контрольном объеме (ограниченном сечениями 1 и 2) увеличивается во времени, так и отрицательным в противном случае. Следовательно, эта величина является дополнением к изменению энергии, обусловленному переносом (конвекцией) кинетической энергии через живое сечение.

### **3.8. Уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся относительном движении**

Рассмотрим движение жидкости в рабочем колесе гидравлической машины. Жидкость в межлопастном канале совершает сложное пространственное движение: она вращается вместе с колесом (переносное вращательное движение) и перемещается вдоль канала (относительное движение вдоль лопастей рабочего колеса) (рис. 3.11).

Суммарная скорость жидкости:

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}.$$

Относительное движение жидкости в межлопастном канале гидравлической машины при постоянной угловой скорости  $\omega = \text{const}$  будет установившимся на неизменном режиме работы.

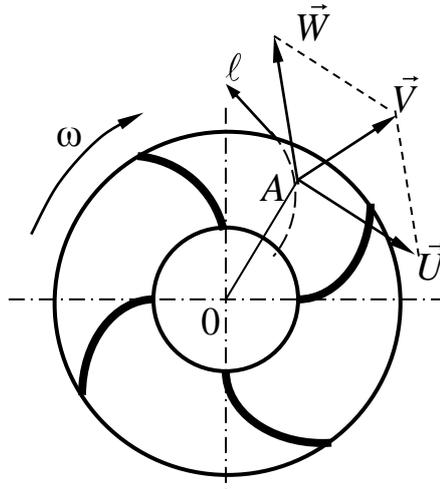


Рис. 3.11. Кинематика движения жидкости в рабочем колесе насоса

Выберем направление  $l$  вдоль средней линии межлопастного канала и рассмотрим уравнение движения Эйлера для струйки тока в естественной системе координат (см. раздел 3.4) в проекции на ось  $l$ :

$$\left( \frac{d\vec{W}}{dt} \right)_l = L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}.$$

Поскольку рассматривается установившееся относительное движение, проекция полной производной на ось  $l$ :

$$\left( \frac{d\vec{W}}{dt} \right)_l = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{W^2}{2} \right).$$

На жидкость в относительном движении действуют массовые силы: сила тяжести, сила инерции переносного движения и Кориолисова сила инерции, следовательно:

$$L = g_l + i_{\text{пер}l} + i_{\text{кор}l},$$

где:  $g_l$  – проекция ускорения свободного падения на ось  $l$ ;  $i_{\text{пер}l}$  – проекция ускорения силы инерции переносного движения на ось  $l$ ;  $i_{\text{кор}l}$  – проекция ускорения Кориолиса на ось  $l$ .

Проекция ускорения от действия силы тяжести на направление  $l$  равна (рис. 3.12):

$$g_l = g \cos(z, l);$$

$$\cos(z, \ell) = -\frac{\partial z}{\partial \ell}.$$

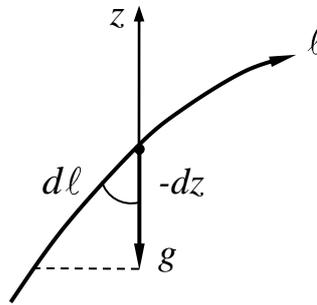


Рис. 3.12. К вычислению проекции ускорения силы тяжести

Проекция ускорения силы инерции переносного движения на направление оси  $\ell$  равна (рис. 3.13):

$$i_{\text{пер}\ell} = \omega^2 r \cos(r, \ell);$$

$$\cos(r, \ell) = \frac{\partial r}{\partial \ell};$$

$$i_{\text{пер}\ell} = \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{U^2}{2} \right).$$

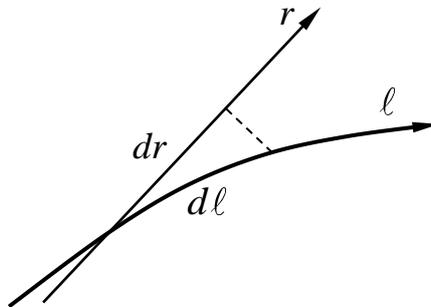


Рис. 3.13. К вычислению проекции ускорения переносного движения

Кориолисово ускорение (рис. 3.14) равно:

$$\vec{i}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega} \times \vec{W}.$$

Вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости  $(\vec{\omega}, \vec{W})$ , а ось  $\ell$  – касательная к ней, следовательно, проекция ускорения Кориолиса на направление оси  $\ell$  равна нулю.

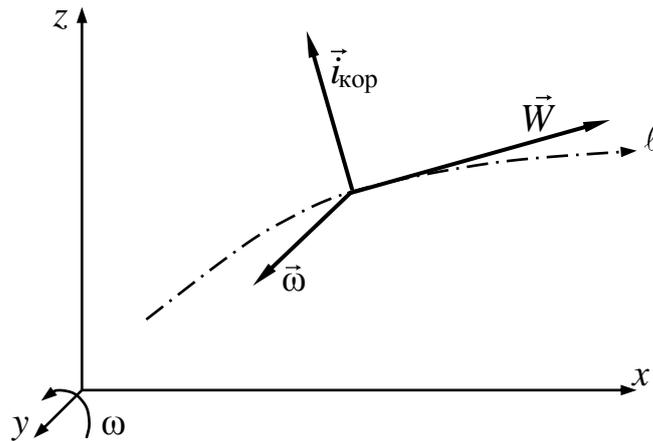


Рис. 3.14. К вычислению проекции ускорения Кориолиса

Тогда проекция плотности массовой силы на ось  $\ell$  запишется в виде:

$$L = -g \frac{\partial z}{\partial \ell} + \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{U^2}{2} \right)$$

и проекция уравнения движения Эйлера на ось  $\ell$  примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{W^2}{2} \right) = L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell}.$$

Подставив выражение для  $L$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{W^2}{2} \right) = -g \frac{\partial z}{\partial \ell} + \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{U^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell}$$

или в преобразованном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{W^2 - U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение от сечения 1 до сечения 2 (рис. 3.15), умножив обе его части на  $\partial \ell$ . Получим:

$$\frac{W_2^2 - U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{W_1^2 - U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1, \quad (3.11)$$

или

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{W^2 - U^2}{2g} = \text{const}.$$

В уравнении (3.11) перенесем слагаемые, содержащие переносные скорости, в правую часть:

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{W_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{W_2^2}{2g} + z_2 \right) = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}.$$

Левая часть полученного уравнения представляет разность полных удельных энергий элементарной струйки в установившемся относительном движении между сечениями 1 и 2.

Таким образом, при установившемся относительном движении частиц жидкости удельная энергия вдоль элементарной струйки не остается постоянной, а изменяется на величину  $\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$ .

Если  $U_1 = U_2$ , т. е.  $r_1 = r_2$ , то изменения энергии жидкости за счет увеличения переносной скорости не происходит, например, в рабочем колесе осевого насоса (рис. 3.15).

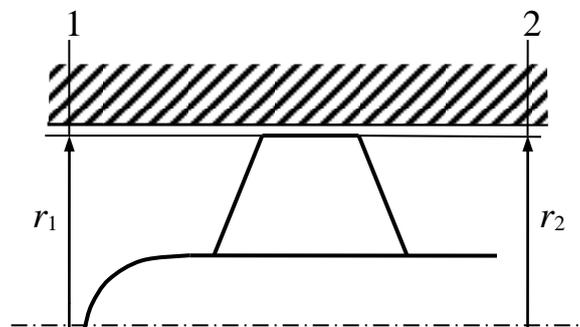


Рис. 3.15. Проточная часть осевого насоса

Если  $r_1 > r_2$ , то  $U_1 > U_2$ ,  $E_{уд1} > E_{уд2}$ , движение происходит с уменьшением энергии протекающей жидкости, как в рабочем колесе гидротурбины (рис. 3.16).

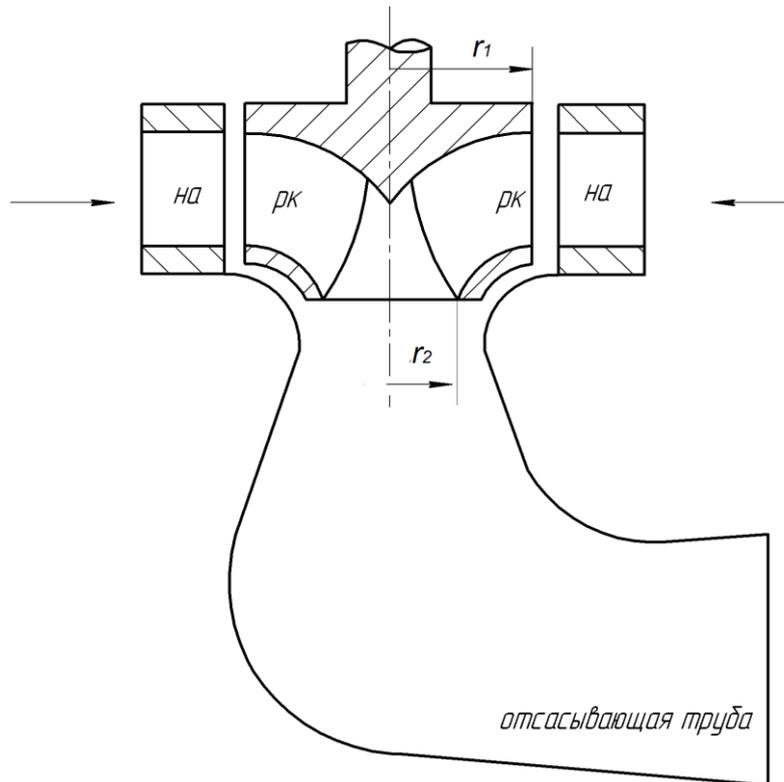


Рис. 3. 16. Проточная часть гидротурбины

Если  $r_2 > r_1$ , то  $U_2 > U_1$ ,  $E_{уд2} > E_{уд1}$ , движение жидкости происходит с увеличением энергии, например, как в рабочем колесе центробежного насоса (рис. 3.17).

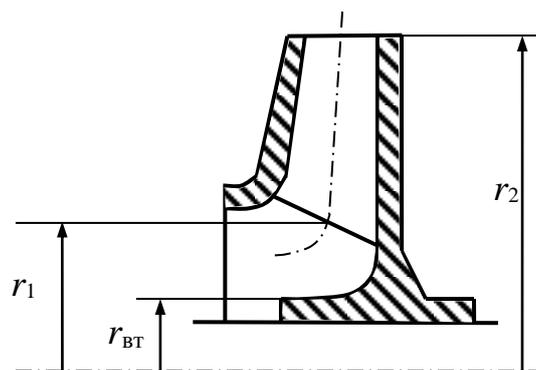


Рис. 3. 17. Проточная часть центробежного насоса

### 3.9. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

При движении вязкой жидкости возникают силы трения, на преодоление которых необходимо затратить энергию.

Обозначим затраченную на преодоление сил трения удельную (отнесенную к единице веса) энергию, через  $\Delta h$ . Ее размерность:

$$[\Delta h] = \frac{H \cdot \text{м}}{H} = \text{м}.$$

Рассмотрим уравнение Бернулли для некоторых случаев движения вязкой жидкости вдоль струйки тока.

#### 3.9.1. Установившееся абсолютное движение

Для установившегося абсолютного движения вязкой жидкости уравнение Бернулли запишется:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h,$$

где  $\Delta h$  – потери удельной энергии на преодоление сил трения.

Диаграмма Бернулли для реальной (вязкой) жидкости будет отличаться от диаграммы для идеальной жидкости, т. к. в нее будут входить потери удельной энергии  $\Delta h$  (рис. 3.18).

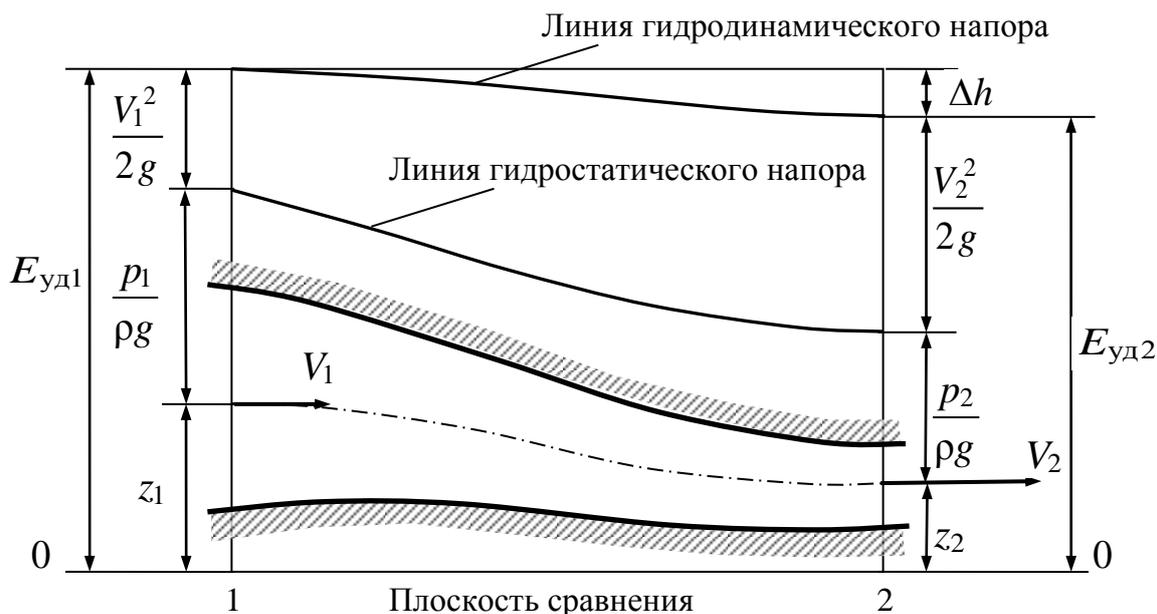


Рис. 3.18. Диаграмма Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

Линия гидродинамического напора всегда наклонная, т. к. потери вдоль линии тока увеличиваются с увеличением длины пути. По этой же причине удельная энергия  $E_{уд1}$  в сечении 1 всегда больше удельной энергии  $E_{уд2}$  в сечении 2.

### 3.9.2. Неустановившееся абсолютное движение

Уравнение Бернулли для реальной жидкости в случае неустановившегося абсолютного движения может быть представлено в виде:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) = H_i + \Delta h, \quad (3.12)$$

где  $\Delta h$  – потери удельной энергии на преодоление сил трения. Величина  $\Delta h$  всегда положительная, это приводит к уменьшению энергии в трубке тока от значения  $E_1$  на входе до значения  $E_2$  на выходе.

Инерционный напор  $H_i = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} d\ell$  в правой части уравнения

(3.12) может быть, как положительным, так и отрицательным. В зависимости от величины инерционного напора  $H_i$  и потерь  $\Delta h$  происхо-

дит либо увеличение, либо уменьшение удельной энергии  $E_2$  на выходе по сравнению с удельной энергией  $E_1$  на входе.

### 3.9.3. Установившееся относительное движение

В этом случае уравнение Бернулли для реальной жидкости:

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{W_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{W_2^2}{2g} + z_2 \right) = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \Delta h.$$

Здесь, как и в предыдущем случае,  $\Delta h$  – гидравлические потери (положительная величина). Слагаемое  $\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$  может быть положительным ( $U_1 > U_2$  – для рабочего колеса турбины) или отрицательным ( $U_1 < U_2$  – для рабочего колеса насоса).

### 3.10. Характеристики потока жидкости

Распространим интегралы Бернулли, полученные для элементарной струйки, на весь поток жидкости, который представляет собой совокупность элементарных струек с непрерывным распределением параметров по живому сечению. Поток характеризуется площадью живого сечения, расходом и средней скоростью.

**Живым сечением** потока называется поверхность, которая в каждой своей точке перпендикулярна к линии тока, проходящей через эту точку (рис. 3.19). При турбулентном движении живое сечение перпендикулярно осредненным скоростям.

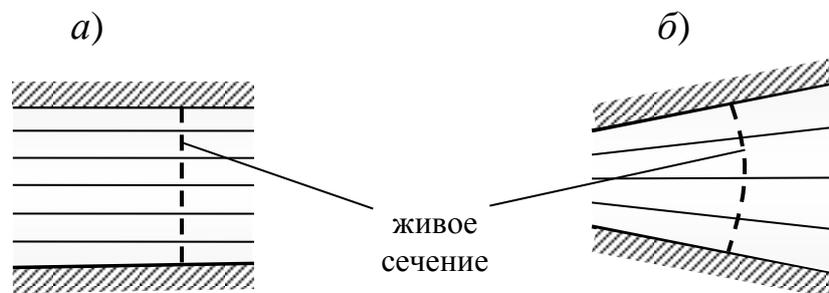


Рис. 3.19. Живое сечение при разных формах потока

Если линии тока параллельны, то живое сечение представляет собой плоскость (рис. 3.19, а). Если линии тока не параллельны, то живое сечение представляет собой криволинейную поверхность (рис. 3.19, б).

**Расход** – это объем жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени

$$Q = \frac{W}{t} = V_{\text{ср}} \cdot S.$$

**Средняя по живому сечению скорость потока** определяется как отношение расхода к площади живого сечения

$$V_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}.$$

В зависимости от характера ограничивающих поверхностей различают:

- напорные потоки – потоки в закрытых руслах и гидросистемах без свободной поверхности (например, в полностью заполненной трубе, когда стенки трубы испытывают давление со стороны потока) (рис. 3.20, а);

- безнапорные потоки – потоки со свободной поверхностью, например, течение в реках, каналах, стоках (трубах, работающих не полным сечением) (рис. 3.20, б);

- гидравлические струи – потоки, ограниченные только жидкостью или газовой средой.



Рис. 3.20. Живое сечение напорного (а) и безнапорного (б) потока

Поскольку равномерное движение жидкости во многих практических случаях обеспечить не удастся, вводится понятие **плавно из-**

**меняющегося движения.** Это установившееся, близкое к равномерному движению, когда:

- линии тока примерно параллельны, кривизна их достаточно мала;
- живые сечения можно считать плоскими и давление в плоскости живого сечения изменяется по гидростатическому закону;
- изменение формы площади живого сечения по длине потока происходит весьма плавно;
- составляющими скоростей и ускорений в плоскости живого сечения можно пренебречь.

**Гидравлический радиус** канала – это отношение площади живого сечения к смоченному периметру.

Для круглого сечения при напорном движении гидравлический радиус (рис. 3.21):

$$R_r = \frac{S}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\pi d} = \frac{d}{4}, \quad [\text{м}],$$

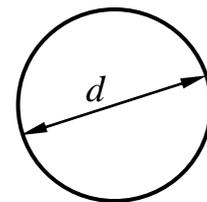


Рис. 3.21. Круглое сечение

где:  $S$  – площадь живого сечения;  $\chi$  – смоченный периметр.

Для прямоугольного сечения (рис. 3.22):

$$R_r = \frac{S}{\chi} = \frac{bh}{2(b+h)}, \quad [\text{м}].$$

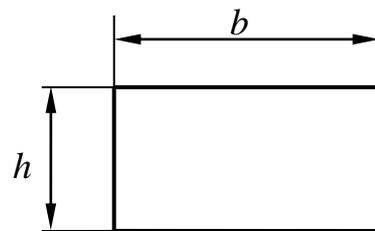


Рис. 3.22. Прямоугольное сечение

Для квадратного сечения:

$$R_r = \frac{bb}{4b} = \frac{b}{4}, \quad [\text{м}].$$

### 3.11. Уравнение неразрывности для потока жидкости

Для установившегося движения жидкости в элементарной струйке уравнение неразрывности  $V_1 dS_1 = V_2 dS_2$ .

Рассмотрим некоторый поток жидкости. Выделим два контрольных сечения 1–1 и 2–2 (рис. 3.23).

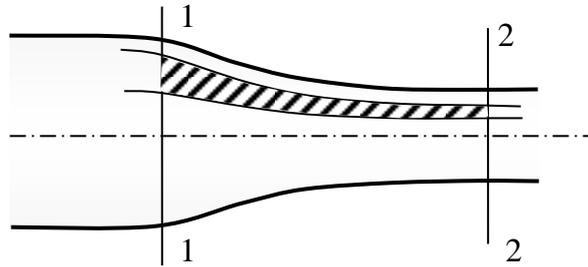


Рис. 3.23. Контрольные сечения потока

Проинтегрировав обе части равенства по площади, получим:

$$\int_{S_1} V_1 dS = \int_{S_2} V_2 dS ,$$

но  $\int_S V dS = Q$  – объемный расход, следовательно:

$$Q_1 = Q_2 = \text{const} .$$

Поскольку объемный расход несжимаемой жидкости вдоль потока при установившемся движении остается неизменным, уравнение неразрывности для потока получим в следующем виде:

$$V_{\text{cp1}} S_1 = V_{\text{cp2}} S_2 ,$$

где  $V_{\text{cp}}$  – средняя скорость по живому сечению потока.

Следовательно:

$$\frac{V_{\text{cp1}}}{V_{\text{cp2}}} = \frac{S_2}{S_1} .$$

Таким образом, средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений потока жидкости.

### 3.12. Мощность потока при установившемся движении

Мощность потока в живом сечении представляет собой полную энергию жидкости, протекающей через данное сечение в единицу времени.

Для определения мощности в живом сечении представим поток состоящим из отдельных элементарных струек. Удельная энергия частицы, принадлежащей какой-либо элементарной струйке, определится как сумма потенциальной и кинетической энергии – гидростатического и скоростного напоров:

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}.$$

Если площадь поперечного сечения элементарной струйки равна  $dS$ , то вес жидкости  $dG$ , протекающий в одну секунду через сечение струйки, т. е. весовой расход, будет равен

$$dG = \rho g V dS.$$

Энергия жидкости весом  $dG$  или мощность элементарной струйки будет равна произведению удельной энергии (напора  $H$ ) на вес  $dG$ :

$$dN = HdG = \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right) \rho g V dS.$$

Полная энергия потока жидкости, протекающего через живое сечение за одну секунду, т. е. мощность потока, будет равна сумме мощностей отдельных элементарных струек:

$$N = \int_s \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right) \rho g V dS.$$

Разобьем последний интеграл на 2 интеграла:

$$N = \int_s \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g V dS + \int_s \frac{V^2}{2g} \rho g V dS.$$

Первый интеграл для плавно изменяющихся потоков, в связи с постоянством гидростатического напора в живом сечении, можно представить:

$$\int_s \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g V dS = \rho g \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \int_s V dS = \rho g \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) V_{cp} S.$$

Второй интеграл  $\frac{\rho}{2} \int_S V^3 dS$  представляет собой полную кинетическую энергию  $T'$  секундного расхода жидкости, проходящего через живое сечение  $S$ . Покажем это.

Выразим полную кинетическую энергию  $T$ :

$$T = \int_S dT = \int_S \frac{V^2}{2} dm; \quad dm = \rho dQ \Delta t = \rho \Delta t V dS;$$

$$T = \frac{1}{2} \int_S \rho V^3 \Delta t dS = \frac{\rho \Delta t}{2} \int_S V^3 dS.$$

Кинетическая энергия потока, протекающего через живое сечение за единицу времени:

$$T' = \frac{\rho}{2} \int_S V^3 dS.$$

Кинетическая энергия секундного расхода жидкости вычисляется по скорости  $V$ , распределение которой по живому сечению в общем случае неизвестно. Если для расчета кинетической энергии использовать среднюю скорость ( $V_{cp} = Q/S$ ), то отличие кинетических энергий, рассчитанных через скорости  $V$  и  $V_{cp}$ , можно выразить через коэффициент  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\int_S V^3 dS}{V_{cp}^3 S}.$$

Коэффициент  $\alpha$  учитывает влияние неравномерности распределения скорости по живому сечению потока. Он называется коррективом кинетической энергии (коэффициентом Кориолиса). Его значение численно равно отношению кинетической энергии потока, вычисленной с учетом истинного распределения скорости, к кинетической энергии, определенной по средней в живом сечении скорости.

Отсюда можно выразить интеграл:

$$\int_S V^3 dS = \alpha V_{cp}^3 S.$$

Тогда мощность потока:

$$N = \rho g \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) V_{cp} S + \frac{\rho}{2} \alpha V_{cp}^3 S;$$

$$N = \rho g V_{cp} S \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\alpha V_{cp}^2}{2g} \right);$$

$$N = \rho g Q \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V_{cp}^2}{2g} \right).$$

### 3.13. Коэффициент Кориолиса

При выводе выражения для мощности потока в живом сечении был введен коэффициент неравномерности распределения кинетической энергии по живому сечению – коэффициент Кориолиса:

$$\alpha = \frac{\int V^3 dS}{V_{cp}^3 S}. \quad (3.13)$$

Покажем, что его величина больше единицы ( $\alpha > 1$ ).

Представим скорость в виде:

$$V = V_{cp} + V_*,$$

где  $V_*$  – отклонение скорости от среднего значения, может, как совпадать по направлению с  $V_{cp}$ , так и иметь обратное направление, т. е.  $V_*$  может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Рассмотрим числитель выражения (3.13):

$$\int_S V^3 dS = \int_S (V_{cp} + V_*)^3 dS = \int_S V_{cp}^3 dS + 3 \int_S V_{cp}^2 V_* dS + 3 \int_S V_{cp} V_*^2 dS + \int_S V_*^3 dS.$$

Вычислим первые два интеграла в правой части этого уравнения:

$$\int_S V_{cp}^3 dS = V_{cp}^3 \int_S dS = V_{cp}^3 S ;$$

$$3 \int_S V_{cp}^2 V_* dS = 3V_{cp}^2 \int_S V_* dS .$$

Для определения  $\int_S V_* dS$  рассмотрим объемный расход  $Q$ . По определению расход  $Q = \int_S V_{cp} dS$ , тогда с учетом этого равенства:

$$Q = \int_S (V_{cp} + V_*) dS = \int_S V_{cp} dS + \int_S V_* dS = V_{cp} S + \int_S V_* dS = Q + \int_S V_* dS ,$$

откуда следует, что

$$\int_S V_* dS = 0 ,$$

значит и интеграл  $V_{cp}^2 \int_S V_* dS = 0$ .

Интеграл  $\int_S V_{cp} V_*^2 dS = V_{cp} \int_S V_*^2 dS$ , независимо от знака  $V_*$ , всегда положителен, т. к. положительны  $V_*^2$  и  $dS$ .

Обозначим

$$\frac{\int_S V_*^2 dS}{V_{cp}^2 S} = \alpha_* .$$

Тогда

$$V_{cp} \int_S V_*^2 dS = \alpha_* V_{cp}^3 S .$$

Интеграл

$$\int_S V_*^3 dS \approx 0 ,$$

т. к. отклонение скорости  $V_*$  от средней величины может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Таким образом:

$$\int_S V^3 dS = V_{cp}^3 S + 0 + 3\alpha_* V_{cp}^3 S + 0 = V_{cp}^3 S (1 + 3\alpha_*) ,$$

а коэффициент Кориолиса

$$\alpha = \frac{V_{\text{cp}}^3 S (1 + 3\alpha_*)}{V_{\text{cp}}^3 S} = 1 + 3\alpha_*,$$

т. е. коэффициент Кориолиса  $\alpha > 1$ , т. к.  $\alpha_* > 0$ .

При ламинарном движении жидкости в круглой трубе коэффициент Кориолиса  $\alpha = 2$ . При турбулентном движении эпюра скоростей в поперечном сечении более заполнена, чем при ламинарном, значение коэффициента Кориолиса лежит в диапазоне  $\alpha = 1,02 \dots 1,12$ . С повышением степени турбулентности потока и числа Re коэффициент  $\alpha$  приближается к единице.

При течениях с сильной неравномерностью коэффициент  $\alpha$  может быть существенно больше. Так, при выходе из отсасывающей трубы гидротурбины на оптимальном режиме коэффициент Кориолиса  $\alpha = 1,1 \dots 1,5$ , на неоптимальных режимах  $\alpha = 7 \dots 10$ .

### 3.14. Инерционная мощность потока

В разделе 3.8 было получено выражение для инерционного напора вдоль элементарной струйки жидкости:

$$H_i = \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V}{\partial t} d\ell.$$

По аналогии с предыдущим, назовем инерционной мощностью в данном живом сечении потока величину:

$$N_i = \int_S H_i \rho g V dS.$$

Подставив выражение для инерционного напора, будем иметь:

$$N_i = \int_S \left[ \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V}{\partial t} d\ell \right] \rho g V dS.$$

Полученное выражение можно представить в виде

$$N_i = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_S \rho \frac{V^2}{2} dS \right) d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_S \rho V^2 dS \right) d\ell.$$

Интеграл  $\int \rho V^2 dS$  представляет собой количество движения, которым обладает масса жидкости, протекающая через данное сечение в единицу времени.

Действительно, величина количества движения

$$K = \int_S dK = \int_S V dm.$$

Элементарную массу  $dm$  можно представить как

$$dm = \rho dQ \Delta t = \rho V \Delta t dS.$$

Тогда количество движения будет равно

$$K = \Delta t \int_S \rho V^2 dS,$$

а количество движения в единицу времени:  $K' = \int_S \rho V^2 dS.$

Для того чтобы вычислить интеграл  $\int_S \rho V^2 dS$ , нужно знать закон распределения скорости по площади. Введем коэффициент неравномерности распределения количества движения по живому сечению (коэффициент Буссинеска):

$$\beta = \frac{\int V^2 dS}{V_{cp}^2 S}. \quad (3.14)$$

Коэффициент неравномерности количества движения показывает во сколько раз количество движения секундной массы в данном живом сечении потока жидкости, вычисленное по действительному распределению скоростей, больше, чем количество движения, вычисленное по средней скорости. При ламинарном движении  $\beta = 1,33$ , при развитом турбулентном, как показали опыты,  $\beta = 1,02 \dots 1,06$ .

Выразим интеграл в выражении для  $N_i$  (3.13) через коэффициент неравномерности количества движения (3.14)

$$\int_S \rho V^2 dS = \beta \rho V_{cp}^2 S$$

и подставим его в выражение (3.13) для инерционной мощности потока

$$N_i = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_S \rho V^2 dS \right) dl = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \beta \rho V_{cp}^2 S \right) dl = \rho \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} \beta V_{cp} S dl = \rho Q \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} \beta dl.$$

Окончательное выражение для инерционной мощности потока:

$$N_i = \rho Q \int_{\ell_1}^{\ell_2} \beta \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} dl.$$

Умножим и разделим правую часть последнего выражения на  $g$

$$N_i = \rho g Q \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \beta \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} dl.$$

Часть полученного выражения для  $N_i$  представляет собой инерционный напор  $H_i$ :

$$\frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \beta \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} dl = H_i,$$

где  $\frac{\partial V_{cp}}{\partial t}$  – изменение средней скорости в данном живом сечении по времени.

При напорном движении жидкости в трубопроводе с жесткими стенками  $\frac{\partial V_{cp}}{\partial t}$  сохраняет свою величину по длине трубы, поэтому инерционный напор в данном случае:

$$H_i = \frac{1}{g} \beta \frac{\partial V_{cp}}{\partial t} \int_{\ell_1}^{\ell_2} dl = \beta \frac{\ell_2 - \ell_1}{g} \frac{\partial V_{cp}}{\partial t};$$

$$\ell_2 - \ell_1 = l;$$

$$H_i = \beta \frac{\ell}{g} \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t}.$$

Инерционная мощность потока:

$$N_i = \rho g Q H_i = \rho g Q \beta \frac{\ell}{g} \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t} = \rho Q \beta \ell \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t}.$$

### 3.15. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

Для элементарной струйки реальной несжимаемой жидкости при неустановившемся движении имеем уравнение:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V}{\partial t} d\ell + \Delta h.$$

Распространим это уравнение на весь поток. Умножим обе части уравнения на весовой расход элементарной струйки:

$$dG = \rho g V dS$$

и проинтегрируем полученное уравнение по площади живого сечения

$$\begin{aligned} \int_S \left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) \rho g V dS &= \int_S \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) \rho g V dS + \\ &+ \int_S \frac{1}{g} \left( \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\partial V}{\partial t} d\ell \right) \rho g V dS + \int_S \Delta h \rho g V dS. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Первые два интеграла уравнения (3.15) представляют собой мощность потока жидкости в первом (начальном) и втором (конечном) живых сечениях, третий интеграл – инерционную мощность, последний – мощность, затраченную на преодоление гидравлических сопротивлений на пути от первого до второго сечения, т. е.

$$N_1 = N_2 + N_i + N_h.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение баланса мощности.

Если разделить каждое слагаемое уравнения баланса мощности на весовой расход, получим составляющие удельной энергии каждой весовой единицы жидкости:

$$\frac{N_1}{\rho g Q} = E_1 = H_1 - \text{гидродинамический напор в первом сечении;}$$

$$\frac{N_2}{\rho g Q} = E_2 = H_2 - \text{гидродинамический напор во втором сечении;}$$

$$\frac{N_i}{\rho g Q} = E_i = H_i - \text{инерционный напор;}$$

$$\frac{N_h}{\rho g Q} = E_h = \Delta h - \text{потери напора на рассматриваемом участке потока.}$$

Уравнение баланса удельной энергии запишется:

$$H_1 = H_2 + H_i + \Delta h.$$

Проинтегрируем выражение для мощности в произвольном сечении потока с учетом равенства:

$$\int_S V^3 dS = \alpha V_{cp}^3 S;$$

$$\begin{aligned} N &= \int_S \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right) \rho g V dS = \int_S \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g V dS + \int_S \frac{V^3}{2g} \rho g dS \cong \\ &\cong \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g \int_S V dS + \frac{\rho}{2} \int_S V^3 dS = \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g Q + \frac{\rho}{2} \alpha V_{cp}^3 S = \\ &= \rho g Q \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) + \rho V_{cp} S \frac{\alpha V_{cp}^2}{2} \cdot \frac{g}{g} = \rho g Q \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) + \rho g Q \frac{\alpha V_{cp}^2}{2g} = \\ &= \rho g Q \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\alpha V_{cp}^2}{2g} \right). \end{aligned}$$

Разделим полученное выражение для мощности потока  $N$  на весовой расход протекающей через выбранное живое сечение жидкости  $\rho g Q$ :

$$H = \frac{N}{\rho g Q} = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\alpha V_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

Тогда выражения гидродинамических напоров в сечениях 1 и 2 и инерционного напора запишутся:

$$H_1 = \frac{N_1}{\rho g Q} = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{\alpha V_{\text{cp}1}^2}{2g}.$$

$$H_2 = \frac{N_2}{\rho g Q} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\alpha V_{\text{cp}2}^2}{2g};$$

$$H_i = \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \beta \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t} d\ell.$$

С учетом полученных выражений для  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_i$ , уравнение Бернулли для потока при неустановившемся движении примет вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_{\text{cp}1}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_{\text{cp}2}^2}{2g} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \beta \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t} d\ell + \Delta h.$$

Уравнение Бернулли для установившегося движения  $\left( \frac{\partial V_{\text{cp}}}{\partial t} = 0 \right)$ :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_{\text{cp}1}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_{\text{cp}2}^2}{2g} + z_2 + \Delta h. \quad (3.16)$$

Из уравнения (3.16) следует, что  $E_2 < E_1$ :

$$E_1 = E_2 + \Delta h.$$

Диаграмма Бернулли (рис. 3.29) для потока имеет такой же вид, как и для струйки, но в данном случае на ней представлены скоростной напор  $\frac{\alpha V_{\text{cp}}^2}{2g}$  и потери напора  $\Delta h$  для потока в живых сечениях, а не для сечений отдельной струйки тока.

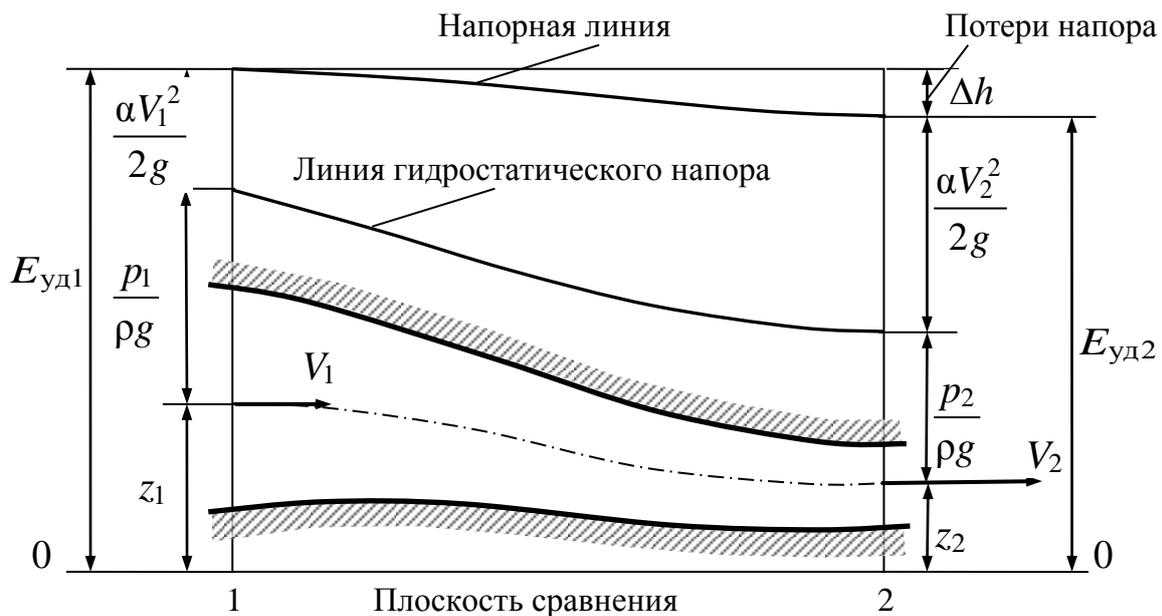


Рис. 3.24. Диаграмма Бернулли для потока реальной жидкости

Линия напора реальной жидкости на диаграмме Бернулли всегда идет вниз. Для характеристики изменения напора по длине канала вводят понятие гидравлического уклона

$$J = -\frac{d}{dl} \left( \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V_{cp}^2}{2g} + z \right) = \frac{dh}{dl}.$$

Гидравлический уклон  $J$  характеризует снижение напора на единицу длины потока, вызванное наличием гидравлических потерь.

## ГЛАВА 4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Определение потерь удельной энергии в гидравлике часто базируется на результатах экспериментальных исследований, которые проводились для разных потоков, разными экспериментаторами, на различных жидкостях. Для того, чтобы правильно обобщить результаты экспериментальных исследований и затем правильно их использовать, необходимо опираться на теорию подобия течений. Подробное изучение теории подобия входит в полный классический курс механики жидкости. Здесь же рассмотрим основы теории подобия.

## 4.1. Подобие потоков жидкости

Явления называются подобными, если в сходственных пространственно-временных координатах отношение одноименных величин есть величина постоянная. Для того, чтобы потоки были подобны, необходимо соблюдение трех видов подобия:

- геометрическое подобие;
- кинематическое подобие;
- динамическое подобие.

### 4.1.1. Геометрическое подобие

Геометрическое подобие предполагает неизменность относительных геометрических параметров, т. е. отношение сходственных геометрических размеров двух подобных потоков должно быть одинаковым:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{d_1}{d_2} = k_\ell = \text{idem},$$

где  $k_\ell$  – коэффициент пропорциональности линейных размеров, называется масштабом длины.

В геометрически подобных потоках отношение площадей и объемов также одинаково:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = k_\ell^2 = \text{idem};$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\ell_1^3}{\ell_2^3} = k_\ell^3 = \text{idem}.$$

Для обеспечения геометрического подобия также необходимо соблюдать пропорциональность шероховатостей обтекаемых поверхностей:  $\frac{\Delta_1}{\ell_1} = \frac{\Delta_2}{\ell_2} = k_\ell = \text{idem}$ , где  $\Delta$  – абсолютная шероховатость, т. е. линейное расстояние от выступа до впадины шероховатости.

### 4.1.2. Кинематическое подобие

Кинематическое подобие требует, чтобы в сходственных точках сравниваемых потоков отношение одноименных скоростей было одинаковым:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{U_1}{U_2} = k_V = \text{idem}.$$

Коэффициент  $k_V$  называется масштабом скорости.

При движении жидкости в условиях кинематического подобия в сходственных точках потока треугольники скоростей подобны (рис. 4.1).

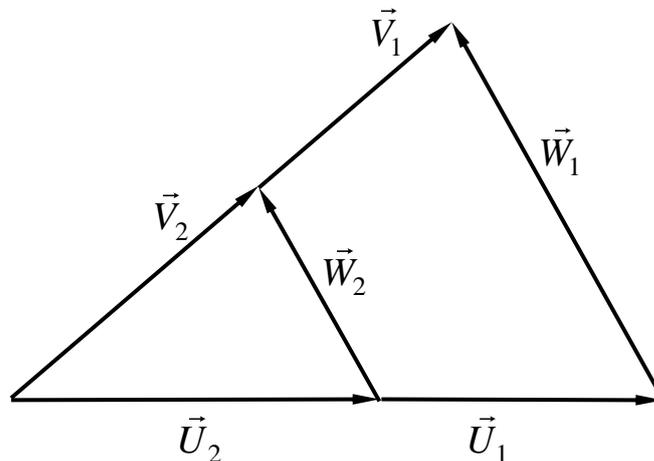


Рис. 4.1. Подобие треугольников скоростей

Выполнение требований геометрического подобия и подобия скоростей приводит к подобию ускорений:

$$\frac{a_1}{a_2} = k_a = \text{idem}.$$

Проиллюстрируем это на примере нормального ускорения  $a_n = V^2/r$  вдоль криволинейной линии тока при соблюдении условий геометрического и кинематического подобия:

$$\frac{a_{n1}}{a_{n2}} = \frac{V_1^2 r_2}{r_1 V_2^2} = \frac{k_V^2}{k_\ell} = \text{idem}.$$

### 4.1.3. Динамическое подобие

Динамическое подобие подразумевает равенство отношений одноименных сил в сходственных точках рассматриваемых потоков:

$$\frac{F_1}{F_2} = k_F = \text{idem}.$$

Рассмотрим отношение сил трения и инерции в двух динамически подобных потоках:

$$\frac{F_{\text{тр1}}}{F_{\text{тр2}}} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (4.1)$$

Сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \tau S = \mu \frac{dV}{dn} S.$$

Отношение сил трения:

$$\frac{F_{\text{тр1}}}{F_{\text{тр2}}} = \frac{\mu_1 S_1 dV_1 dn_2}{\mu_2 S_2 dV_2 dn_1} = \frac{\mu_1 k_V k_\ell^2}{\mu_2 k_\ell} = \frac{\mu_1}{\mu_2} k_\ell k_V.$$

Сила инерции:

$$I = ma.$$

Отношение сил инерции равно:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{\rho_1 W_1 a_1}{\rho_2 W_2 a_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} k_\ell^3 \frac{k_V^2}{k_\ell} = \frac{\rho_1}{\rho_2} k_\ell^2 k_V^2.$$

Подставим полученные выражения отношений сил  $F_{\text{тр1}}/F_{\text{тр2}}$  и  $I_1/I_2$  в уравнение (4.1):

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} k_\ell k_V = \frac{\rho_1}{\rho_2} k_\ell^2 k_V^2 \quad \text{или} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\rho_1 \ell_1 V_1}{\rho_2 \ell_2 V_2},$$

откуда:

$$\frac{\ell_1 V_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{\ell_2 V_2 \rho_2}{\mu_2}.$$

С учетом того, что  $\mu/\rho = \nu$  получим равенство:

$$\frac{\ell_1 V_1}{\nu_1} = \frac{\ell_2 V_2}{\nu_2}.$$

Безразмерная величина  $\ell V/\nu$  называется числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{V\ell}{\nu}.$$

Таким образом, мы получили, что при соблюдении динамического подобия потоков их числа Рейнольдса должны быть равны ( $\text{Re}_1 = \text{Re}_2$ ). Число Рейнольдса представляет собой отношение сил инерции к силам вязкости. Число Рейнольдса является критерием динамического подобия.

Критериев динамического подобия существует столько, сколько отношений сил можно рассмотреть. Например, отношение сил тяжести и сил инерции:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{I_1}{I_2};$$

$$G = g\rho W; \quad W \approx \ell^3;$$

$$\frac{\rho_1 g_1 \ell_1^3}{\rho_2 g_2 \ell_2^3} = \frac{\rho_1 \ell_1^2 V_1^2}{\rho_2 \ell_2^2 V_2^2};$$

$$\frac{V_1^2}{g_1 \ell_1} = \frac{V_2^2}{g_2 \ell_2}.$$

Число  $\frac{V^2}{g\ell}$  называют критерием Фруда:

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{g\ell}.$$

Критерий Фруда представляет собой отношение сил инерции к силам тяжести.

Равенство чисел Фруда в соответствующих точках потоков, удовлетворяющих геометрическому и кинематическому подобию, обеспечивает подобие сил тяжести.

Если рассмотреть отношение сил давления и сил инерции, то получим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2};$$

$$P = pS;$$

$$\frac{\Delta p_1 \ell_1^2}{\Delta p_2 \ell_2^2} = \frac{\rho_1 \ell_1^2 V_1^2}{\rho_2 \ell_2^2 V_2^2};$$

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 V_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 V_2^2}.$$

Отношение  $\frac{\Delta p}{\rho V^2}$  называется критерием Эйлера:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}.$$

Число Эйлера играет большую роль в исследовании явлений, связанных с кавитацией. В этом случае за величину  $\Delta p$  принимается

$$\Delta p = p - p_d,$$

где  $p_d$  – давление парообразования.

Равенство чисел Эйлера обеспечивает в динамически подобных потоках пропорциональность сил давления.

В некоторых гидравлических исследованиях рассматривают силы поверхностного натяжения. Критерием подобия сил поверхностного натяжения является число Вебера:

$$We = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma},$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Равенство всех критериев подобия называется полным гидродинамическим подобием.

Рассмотрим условия подобия по числу Re и Fr для натуре и модели:

$$\text{Re} = \frac{\rho_H V_H \ell_H}{\mu_H} = \frac{\rho_M V_M \ell_M}{\mu_M};$$

$$\text{Fr} = \frac{V_H^2}{g_H \ell_H} = \frac{V_M^2}{g_M \ell_M}.$$

Для одной и той же жидкости  $\mu_H = \mu_M$ ,  $\rho_H = \rho_M$  при равенстве  $g_H = g_M$ , условия подобия по числу Re и Fr запишутся соответственно:

$$\frac{V_H}{V_M} = \frac{\ell_M}{\ell_H} = \lambda, \quad \frac{V_H}{V_M} = \left( \frac{\ell_H}{\ell_M} \right)^{0,5} = \lambda^{-0,5}.$$

Очевидно, что оба условия вступили в конфликт друг с другом. Их одновременное выполнение невозможно. Поэтому при моделировании выделяют основные действующие силы и по ним обеспечивают подобие.

Так, при моделировании напорных течений, потоков в гидравлических машинах требуется выполнение равенства чисел Re. Равенством остальных динамических критериев обычно пренебрегают. Равенство чисел Fr должно соблюдаться при изучении волновых явлений на поверхности жидкости, например, при моделировании сопротивления воды при движении судна. Число Эйлера, как было сказано выше, играет основную роль при изучении кавитационных явлений.

## 4.2. Классификация гидравлических сопротивлений

При движении жидкости затрачивается энергия, которая рассеивается, превращаясь, в конечном счете, в тепло. Эта удельная энергия представляет собой гидравлические потери, которые являются результатом наличия вязкости жидкости.

Потери удельной энергии при движении жидкости делятся на две группы:

- потери на преодоление сил трения, которые называют потерями напора по длине или потерями на гидравлическое трение. Они

определяются работой сил трения внутри жидкости и сил трения жидкости о твердые поверхности, пропорциональные длине пути, пройденного жидкостью;

- местные потери напора – потери в местных гидравлических сопротивлениях. Эти потери определяются затратами удельной энергии на преодоление местных гидравлических сопротивлений, вызванных изменением формы потока и размеров живого сечения. Этот вид потерь возникает в местах деформации потока (рис. 4.2), величина их гораздо больше, чем потери на гидравлическое трение на той же длине.

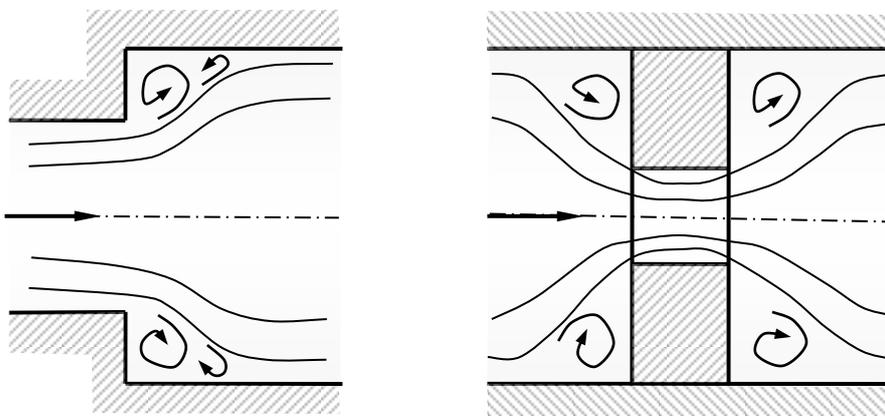


Рис. 4.2. Примеры местных потерь напора

### 4.3. Потери на трение при равномерном ламинарном движении в трубе

#### 4.3.1. Дифференциальное уравнение ламинарного движения

При ламинарном режиме жидкость движется слоями. Между движущимися слоями, вследствие наличия вязкости, возникает сила трения. Ее воздействие приводит к изменению поля скоростей по живому сечению.

Рассмотрим равномерное ламинарное движение жидкости в прямой горизонтальной бесконечно длинной трубе с радиусом  $r_0$  (рис. 4.3).

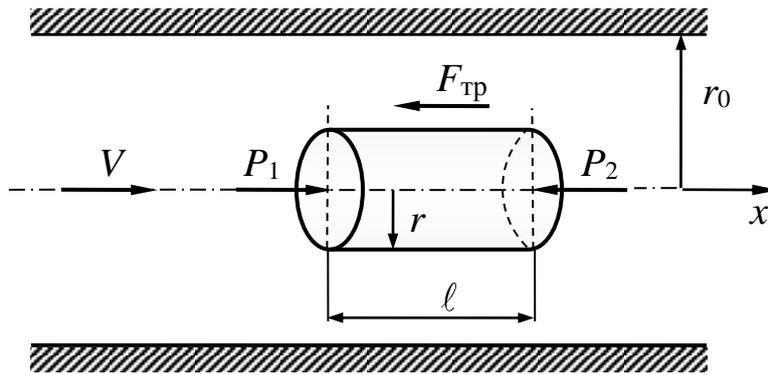


Рис. 4.3. Схема напорного течения в трубе

Выделим вдоль оси трубы некоторый объем в форме цилиндра с радиусом  $r$  и длиной  $\ell$ . На выделенный объем действуют силы:

- сила трения по образующей цилиндрической поверхности –  $F_{\text{тр}}$ ;
- сила тяжести –  $G$ ;
- силы давления на основания цилиндра –  $P_1, P_2$ .

Составим уравнение равновесия сил, действующих на цилиндр, в проекции на ось  $x$  (проекция силы тяжести на ось  $x$  равна 0):

$$P_1 - P_2 - F_{\text{тр}} = 0. \quad (4.2)$$

Предположим, что при неизменной скорости движения жидкости  $V$  давление по основаниям цилиндра распределено равномерно и равно  $p_1$ , и  $p_2$ . Тогда разность сил давления, действующих на торцы цилиндра:

$$P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pi r^2.$$

Сила внутреннего трения определяется формулой Ньютона (1.1) для ламинарного режима движения жидкости в трубе. Учитывая, что  $dV/dn = -dV/dr$ , силу трения можно выразить как:

$$F_{\text{тр}} = -\mu 2\pi r \ell \frac{dV}{dr}.$$

Подставим значения рассматриваемых сил в уравнение равновесия (4.2):

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\mu\pi\ell r \frac{dV}{dr} = 0.$$

Отсюда

$$(p_1 - p_2)r + 2\mu\ell \frac{dV}{dr} = 0. \quad (4.3)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение ламинарного движения жидкости в трубе круглого сечения.

#### 4.3.2. Закон распределения скоростей в поперечном сечении трубы

Разделим переменные в дифференциальном уравнении ламинарного движения (4.3)

$$\frac{(p_1 - p_2)}{2\mu\ell} r dr = -dV$$

и проинтегрируем его:

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu\ell} \int_r^{r_0} r dr = -\int_V^0 dV.$$

После интегрирования получим выражение для распределения скорости в поперечном сечении трубы:

$$\frac{p_1 - p_2}{4\mu\ell} (r_0^2 - r^2) = V.$$

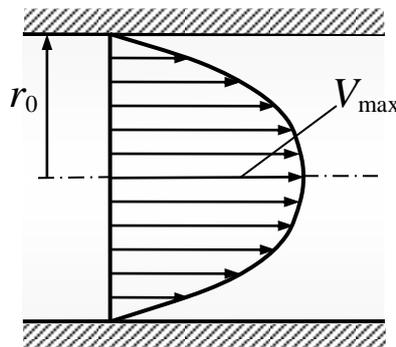


Рис. 4.4. Профиль скорости в трубе при ламинарном движении

Гидравлический уклон при движении жидкости в канале:

$$J = -\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V_{\text{cp}}^2}{2g} + z \right).$$

Для движения по горизонтальной ( $z = \text{const}$ ) трубе постоянного сечения с постоянной средней скоростью ( $V_{\text{cp}} = \text{const}$ ), гидравлический уклон  $J$  определяется только изменением давления

$$J = -\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{p}{\rho g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho g \ell}.$$

Выразим среднюю скорость в сечении трубы через гидравлический уклон:

$$V = \frac{p_1 - p_2}{\rho g 4\mu \ell} (r_0^2 - r^2) g \rho = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2);$$

$$V = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2).$$

На стенке трубы (рис. 4.4) скорость  $V = 0$ . На оси трубы скорость принимает максимальное значение  $V_{\text{max}}$ .

Эпюра скоростей равномерного ламинарного движения в любом сечении трубы представляет собой параболоид вращения с максимальной скоростью на оси (см. рис. 4.4). Параболоид носит имя Ж. Пуазейля – французского врача, который в 1840 г. исследовал движение крови в сосудах и установил эту зависимость.

Максимальное значение скорости на оси трубы:

$$V_{\text{max}} = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2. \quad (4.4)$$

### 4.3.3. Расход жидкости в круглой трубе

В круглой трубе радиуса  $r_0$  выделим кольцевой цилиндрический объем внутренним радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 4.5).

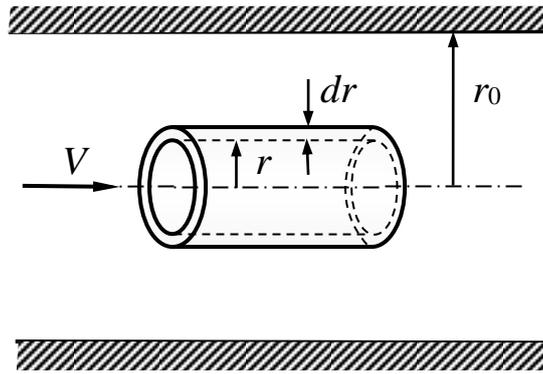


Рис. 4.5. Элементарная цилиндрическая поверхность при ламинарном движении

Расход жидкости через выделенный элементарный кольцевой цилиндр:

$$dQ = VdS ,$$

тогда

$$Q = \int_S VdS .$$

Площадь кольца с внутренним радиусом  $r$  и наружным  $r + dr$ :

$$dS = 2\pi r dr .$$

Объемный расход:

$$Q = \int_0^{r_0} \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\rho g \pi J}{2\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr = \frac{\rho g \pi J}{2\mu} \left[ \frac{r_0^2 r^2}{4} \right];$$

$$Q = \frac{\rho g J \pi}{8\mu} r_0^4 . \quad (4.5)$$

Таким образом, при ламинарном движении расход пропорционален четвертой степени радиуса трубы и перепаду давления на единицу длины.

Среднюю скорость в трубе можно выразить через расход (4.5):

$$V_{\text{cp}} = \frac{Q}{S} = \frac{\rho g J \pi}{8\mu} r_0^4 \frac{1}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g J r_0^2}{8\mu} . \quad (4.6)$$

Ранее было получено выражение для максимальной скорости (4.4). Сравнивая выражения (4.4) и (4.6), получим:

$$V_{\max} = 2V_{\text{cp}},$$

что соответствует значению коэффициента неравномерности распределения кинетической энергии по сечению (коэффициента Кориолиса)  $\alpha = 2$  при ламинарном режиме движения (см. раздел 3.14).

#### 4.3.4. Формирование равномерного ламинарного движения в трубе

Закономерности, полученные выше, относятся к равномерному ламинарному движению в бесконечно длинной трубе. Такое движение устанавливается в трубах теоретически на бесконечном расстоянии от входа. Допустим, жидкость входит в трубу из резервуара большого размера с одинаковой скоростью по всему поперечному сечению (рис. 4.6). При дальнейшем движении пристенные слои начинают тормозиться за счет действия сил трения. По мере удаления от входа толщина заторможенных слоев растет. Так как расход жидкости остается постоянным, то происходит увеличение скорости в слоях, расположенных ближе к оси трубы. В итоге на некотором расстоянии от входа устанавливается профиль скорости, который далее не изменяется. Принято считать, что формирование равномерного ламинарного движения в трубе заканчивается, когда скорость на оси трубы достигает значения  $V = V_{\max} = 2V_{\text{cp}}$ .

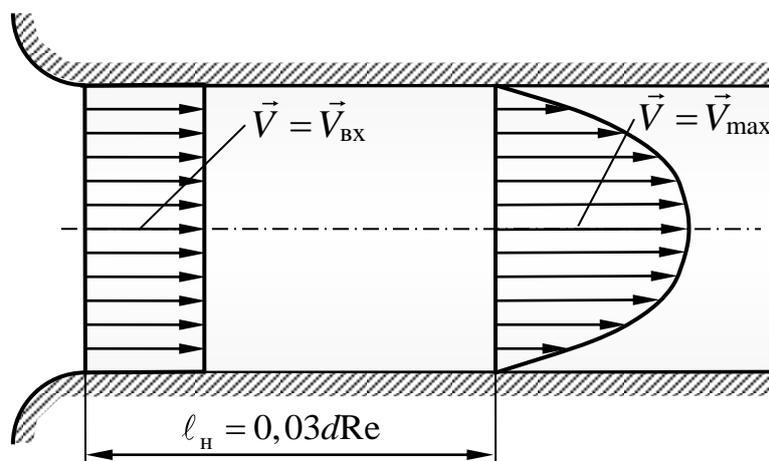


Рис. 4.6. Формирование равномерного профиля скорости

Участок трубы, на котором скорость на оси достигает значения  $V_{\max}$ , называется начальным участком, в пределах которого происходит изменение профиля скорости от прямоугольного на входе до профиля, соответствующего равномерному движению. Длина начального участка составляет  $\ell_n = 0,03dRe$ . Данная зависимость для длины начального участка получена при плавном входе в трубу (см. рис. 4.6). Острые кромки на входе вызывают значительное удлинение начального участка.

#### 4.3.5. Потери напора на гидравлическое трение

Выразим гидравлический уклон из формулы (4.6):

$$J = \frac{8\mu V_{\text{cp}}}{\rho g r_0^2}.$$

Заменим радиус  $r_0$  на диаметр  $d_0$  и учтем, что  $\mu/\rho = \nu$ , тогда:

$$J = \frac{32\nu V_{\text{cp}}}{g d_0^2}.$$

При равномерном ламинарном движении жидкости в горизонтальной трубе постоянного сечения гидравлический уклон равен пьезометрическому уклону  $J = J_{\Pi}$ .

Гидравлический уклон  $J = \frac{dh}{d\ell}$  – это потери напора на единицу длины трубы, откуда:

$$\begin{aligned} J d\ell &= dh; \\ J \int_0^{\ell} d\ell &= \int_0^h dh; \\ J\ell &= h. \end{aligned}$$

Подставив  $J$  в последнее уравнение, получим выражение для величины потерь трения в трубе:

$$h = \frac{32\nu\ell}{g d_0^2} V_{\text{cp}}. \quad (4.7)$$

Из выражения (4.7) следует, что при ламинарном движении в трубе постоянного сечения потери на трение пропорциональны первой степени средней скорости и длине трубы.

Выразим кинематический коэффициент вязкости через число Рейнольдса:

$$\nu = \frac{V_{\text{cp}} d_0}{\text{Re}}.$$

Подставим это выражение в формулу (4.7), тогда:

$$h = \frac{32\ell}{gd_0^2} V_{\text{cp}} \left( \frac{V_{\text{cp}} d_0}{\text{Re}} \right) = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d_0} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

Обозначим  $\frac{64}{\text{Re}} = \lambda$  и назовем  $\lambda$  коэффициентом гидравлического трения, тогда:

$$h = \lambda \frac{\ell}{d_0} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) называется формулой Дарси-Вейсбаха для определения потерь напора на гидравлическое трение по длине трубы диаметром  $d_0$ . Для определения потерь напора на трение в потоках любой формы используют обобщенную формулу:

$$h = \lambda \frac{\ell}{4R_r} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g},$$

где  $R_r$  – гидравлический радиус;  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси).

При ламинарном режиме движения жидкости в круглой трубе коэффициент гидравлического трения обратно пропорционален числу  $\text{Re}$  и достаточно точно определяется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) получено для ламинарного потока жидкости. Для других режимов движения жидкости коэффициент  $\lambda$  определяется другими зависимостями.

Величина потерь напора на трение по длине трубопровода, при прочих равных условиях, пропорциональна вязкости. При перекачке по трубе очень вязких жидкостей, например, нефти, мазута используют подогрев жидкости, при этом уменьшается вязкость, а значит и потери напора на трение. Однако этот способ снижения потерь можно применять только до тех пор, пока движение имеет ламинарный характер, т. е. при  $Re < Re_{кр}$ . После перехода режима движения в турбулентный, потери напора на трение увеличиваются по сравнению с ламинарным режимом.

#### **4.3.6. Ламинарное движение жидкости между двумя соосными неподвижными цилиндрами**

Рассмотрим бесконечную горизонтальную круглую кольцевую трубу с внутренним и внешним радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Выделим в ней жидкий соосный кольцевой цилиндр с внутренним радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 4.7). На него будут действовать:

- силы давления  $P_1$  и  $P_2$ ;
- силы трения  $F_{тр1}$  и  $F_{тр2}$ ;
- сила тяжести  $G$ .

Силы  $P_1$  и  $P_2$  определяются давлением и площадью торцевой грани жидкого цилиндра  $dS = 2\pi r dr$  и будут равны:

$$P_1 = p_1 2\pi r dr ;$$

$$P_2 = p_2 2\pi r dr .$$

Сила трения  $F_{тр1}$  действует на внутреннюю боковую поверхность жидкого цилиндра, а  $F_{тр2}$  – на внешнюю. Силы  $F_{тр1}$  и  $F_{тр2}$ , в соответствии с формулой Ньютона (1.1):

$$F_{тр1} = \tau S_{бок.1} = \tau 2\pi r l = \mu \frac{dV}{dr} 2\pi r l ;$$

$$F_{\text{тр}2} = \tau S_{\text{бок.2}} = \tau 2\pi(r + dr)\ell = -\mu \frac{dV}{dr} 2\pi r \ell - \mu \frac{dV}{dr} 2\pi dr \ell.$$

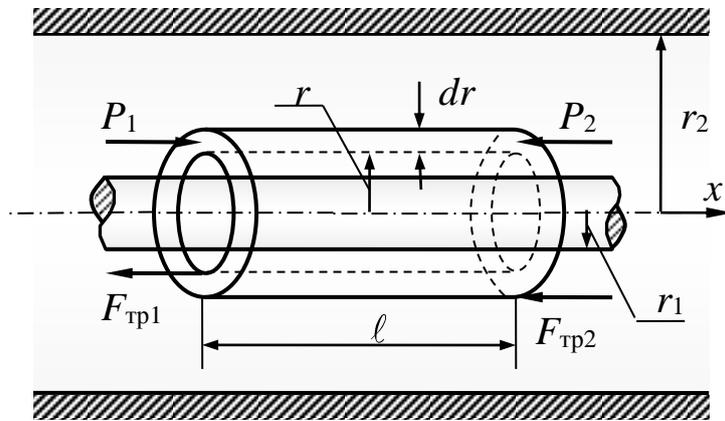


Рис. 4.7. К расчету течения в кольцевом канале

Спроектируем все действующие силы на ось  $x$ , совпадающую с осью трубы

$$P_1 - P_2 - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = 0.$$

Подставив в последнее уравнение полученные выше выражения для действующих сил

$$(p_1 - p_2)2\pi r dr - \mu 2\pi r \ell \frac{dV}{dr} + \mu 2\pi r \ell \frac{dV}{dr} + \mu \ell 2\pi \frac{dV}{dr} dr = 0,$$

получим дифференциальное уравнение ламинарного движения между соосными неподвижными цилиндрами:

$$\frac{p_1 - p_2}{\mu \ell} r dr + \frac{dV}{dr} dr = 0.$$

Разделим уравнение на  $\rho g$ , учтем, что  $(p_1 - p_2)/\rho g \ell = J$ , и проинтегрируем преобразованное уравнение:

$$-\frac{\rho g J}{2\mu} r^2 + C = r \frac{dV}{dr},$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

В полученном уравнении разделим все члены на  $r$  и затем произведем разделение переменных:

$$-\frac{\rho g J}{2\mu} r dr + \frac{C}{r} dr = dV.$$

После интегрирования получим

$$V = -\frac{\rho g J}{4\mu} r^2 + C \ln r + D,$$

где  $D$  – постоянная интегрирования.

Определим постоянные интегрирования:

$$r = r_1; \quad V = 0; \quad -\frac{\rho g J}{4\mu} r_1^2 + C \ln r_1 + D = 0; \quad (4.10)$$

$$r = r_2; \quad V = 0; \quad -\frac{\rho g J}{4\mu} r_2^2 + C \ln r_2 + D = 0; \quad (4.11)$$

Вычтем (4.11) из (4.10) и получим:

$$C \ln r_1 - \frac{\rho g J}{4\mu} r_1^2 - C \ln r_2 + \frac{\rho g J}{4\mu} r_2^2 = 0,$$

$$C \left( \ln \frac{r_1}{r_2} \right) = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_1^2 - r_2^2),$$

откуда

$$C = \frac{\rho g J}{4\mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Подставим  $C$  в выражение для скорости

$$V = -\frac{\rho g J}{4\mu} \left( r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r \right) + D.$$

Найдем постоянную  $D$ :

$$V|_{r=r_1} = -\frac{\rho g J}{4\mu} \left( r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_1 \right) + D = 0;$$

$$D = -\frac{\rho g J}{4\mu} \left( r_1^2 - \frac{r_2^2 \ln r_1 - r_1^2 \ln r_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right),$$

тогда для скорости  $V$  будем иметь выражение:

$$V = -\frac{\rho g J}{4\mu} \left( r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r + \frac{r_2^2 \ln r_1 - r_1^2 \ln r_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (4.12)$$

Расход через кольцевой канал:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} V \cdot 2\pi r dr = -2\pi \frac{\rho g J}{4\mu} \int_{r_1}^{r_2} (r^2 + C \ln r + D) r dr. \quad (4.13)$$

Вычислим интеграл  $\int r \ln r dr$ . Выполним для этого ряд преобразований:

$$d(r^2 \ln r) = (2r dr) \ln r + r^2 d \ln r = 2r \ln r dr + r dr;$$

$$d\left(\frac{1}{2} r^2 \ln r\right) - \frac{1}{2} r dr = r \ln r dr;$$

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r \ln r dr &= \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{1}{2} r^2 \ln r\right) - \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{1}{2} (r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2}\right) = \\ &= \frac{r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}; \end{aligned}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{r^4}{4} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}.$$

Тогда расход будет равен:

$$Q = -\frac{\rho g J \pi}{2\mu} \left[ \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} - C \left( \frac{r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4} \right) + D \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right]. \quad (4.14)$$

Подставив постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  в выражение для  $Q$  и выполнив несложные преобразования, получим:

$$Q = \frac{\pi \rho g J}{8\mu} \left( r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right).$$

Средняя по живому сечению скорость определится выражением:

$$V_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{\rho g J}{8\mu} \left( r_2^2 - r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (4.15)$$

Выразим гидравлический уклон через скорость  $V_{cp}$  из соотношения (4.15):

$$J = \frac{8\mu V_{cp}}{\rho g} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} = \frac{8\nu V_{cp}}{g} \frac{1}{r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

Введем в рассмотрение число Рейнольдса, приняв в качестве характерного линейного размера гидравлический диаметр:

$$D_r = 4R_r = 4 \frac{S}{\chi} = 4 \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2 + r_1)} = 2(r_2 - r_1).$$

Тогда число Рейнольдса:

$$Re = \frac{V_{cp} D_r}{\nu} = \frac{2V_{cp}(r_2 - r_1)}{\nu}.$$

Потери по длине трубы  $\ell$  определяются как:

$$h = J \cdot \ell = \frac{8\nu V_{cp}}{g} \frac{\ell}{\left( r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)} = \frac{16\nu V_{cp}}{g} \frac{16\ell}{\left( r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)} \frac{V_{cp}^2}{2g} \frac{\nu}{V_{cp} D_r} D_r =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16\ell}{\text{Re}} \frac{D_r}{\left( r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g} = \frac{16}{\text{Re}} \frac{2(r_2 - r_1)\ell}{\left( r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g} = \\
&= \frac{32}{\text{Re}} \frac{\ell}{\left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2 - r_1} - \frac{r_2 + r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}.
\end{aligned}$$

Введем вместо  $r_1$  и  $r_2$  диаметры труб  $d_1$  и  $d_2$ , тогда получим:

$$h = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} - \frac{d_2 + d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}}} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

Назовем приведенным диаметром  $d_0$  выражение

$$d_0 = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} - \frac{d_2 + d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}},$$

тогда потери напора на гидравлическое трение при ламинарном движении в цилиндрической кольцевой трубе будут определяться по формуле:

$$h = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d_0} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

#### 4.3.7. Закон изменения напряжения трения в круглой трубе

Рассмотрим дифференциальное уравнение (4.2) ламинарного движения жидкости в круглой трубе:

$$(p_1 - p_2)r + 2\mu\ell \frac{dV}{dr} = 0.$$

Касательное напряжение по формуле Ньютона ( $dV/dr < 0$ ):

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr},$$

Тогда  $(p_1 - p_2)r - 2\tau\ell = 0$ , откуда

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2\ell} r.$$

Таким образом, касательное напряжение трения в поперечном сечении трубы пропорционально радиусу (рис. 4.9).

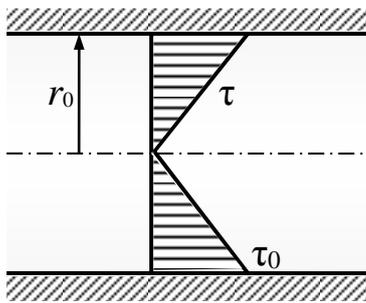


Рис. 4.9. Эпюра касательного напряжения в трубе

Касательное напряжение трения при  $r = r_0$  (на стенке)

$$\tau = \tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\ell} r_0,$$

при  $r = 0$  (на оси трубы)  $\tau = 0$ .

Из формул для  $\tau$  и  $\tau_0$  следует, что при ламинарном режиме движения напряжение трения в трубе линейно зависит от радиуса

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

#### 4.4. Потери на трение при турбулентном напорном движении в трубе

##### 4.4.1. Дифференциальное уравнение турбулентного движения

Рассмотрим условие равновесия сил, действующих на цилиндрический жидкий объем в турбулентном, равномерном потоке в круглой горизонтальной трубе (рис. 4.10).

Пусть выделенный цилиндрический объем имеет радиус  $r$ , длину  $\ell$ . Труба имеет радиус  $r_0$ . Аналогично ламинарному движению, уравнение равновесия сил при турбулентном движении в проекции на ось  $x$  будет:

$$P_1 - P_2 - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - 2\pi r\ell\tau = 0;$$

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2\ell} r.$$

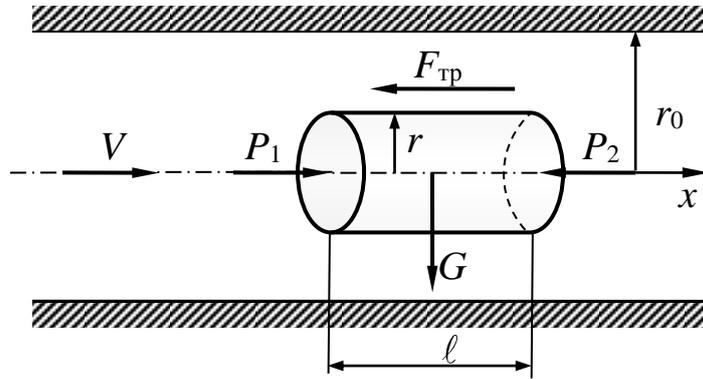


Рис. 4.10. Жидкий цилиндрический элемент в трубе

Учитывая линейную зависимость касательного напряжения от радиуса, и приняв, что при  $r = r_0$  напряжение  $\tau = \tau_0$ , получим:

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\ell} r_0,$$

или

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0};$$

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

т. е. распределение касательных напряжений в поперечном сечении трубы при турбулентном режиме движения и ламинарном – линейное.

Турбулентное движение отличается от ламинарного тем, что кроме основного перемещения вдоль оси трубы частицы жидкости совершают также беспорядочное пульсационное движение.

Для упрощения расчета обычно используется модель осредненного турбулентного движения. Поле скоростей турбулентного потока

условно разбивается на два поля: местных осредненных скоростей  $\bar{V}$  и пульсационных скоростей  $V'$ . В таком потоке проекции истинных скоростей  $V_x, V_y, V_z$  можно выразить через проекции осредненных скоростей  $\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z$  и пульсационных  $V'_x, V'_y, V'_z$ :

$$V_x = \bar{V}_x + V'_x;$$

$$V_y = \bar{V}_y + V'_y;$$

$$V_z = \bar{V}_z + V'_z.$$

В случае равномерного турбулентного движения жидкости в круглой трубе истинные скорости потока в осевом ( $x$ ) и радиальном ( $r$ ) направлениях можно представить как:

$$V_x = \bar{V}_x + V'_x;$$

$$V_r = V'_r.$$

Благодаря пульсационной составляющей скорости  $V'_r$  через боковую поверхность рассматриваемого цилиндрического объема будут втекать и вытекать частицы жидкости. Втекающие с большего радиуса частицы будут иметь осевую скорость  $V_x = \bar{V}_x + V'_x$ , меньшую, чем осевая скорость частиц, втекающих через ту же поверхность с меньшего радиуса. Частицы жидкости, переходя из одного слоя в другой, проходят некоторый путь  $\ell'$  прежде, чем их скорость сравняется со скоростью соседних частиц. Этот путь  $\ell'$  называется длиной пути смешения. При этом частицы жидкости, имевшие в начале пути скорость  $\bar{V}_x$ , в конце пути будут иметь скорость:

$$V_x = \bar{V}_x + \frac{d\bar{V}_x}{dr} \ell',$$

при этом

$$V'_x = \frac{d\bar{V}_x}{dr} \ell'.$$

Изменение скорости частиц жидкости приводит к изменению количества движения, которым они обладают. Пусть  $K_1$  – количество

движения некоторого числа частиц жидкости вне выделенного объема,  $K_2$  – количество движения этих же частиц прошедших через боковую поверхность внутрь выделенного объема. Изменение их количества движения за время  $\Delta t$  составит:

$$\Delta K = K_2 - K_1,$$

при этом  $K_1 = m\bar{V}_x$ ,  $K_2 = m(\bar{V}_x + V'_x)$ .

Масса жидкости, которая переносится через боковую поверхность выделенного объема:

$$m = \rho V_r \Delta t S.$$

Поскольку при плоском течении  $\bar{V}_r = 0$ , то перенесенная масса определяется только пульсационной составляющей скорости  $V'_r$ :

$$m = \rho V'_r \Delta t S.$$

Изменение количества движения массы жидкости, проходящей через боковую поверхность рассматриваемого цилиндра вследствие изменения ее скорости, будет равно:

$$K_2 - K_1 = \rho V'_r \Delta t S \left( \bar{V}_x + \frac{d\bar{V}_x}{dr} \ell' - \bar{V}_x \right).$$

Изменение скорости является следствием наличия касательной пульсационной составляющей силы трения ( $\tau_T \cdot S$ ). С учетом того, что изменение количества движения рассматриваемых частиц жидкости равно импульсу внешних сил, приложенных к ним (сил трения в данном случае), то  $\Delta K = \tau_T S \Delta t$  и предыдущее равенство запишется:

$$\tau_T S \Delta t = \rho V'_r S \Delta t \left( \bar{V}_x + \frac{d\bar{V}_x}{dr} \ell' - \bar{V}_x \right),$$

откуда следует, что

$$\tau_T = \rho V'_r \frac{d\bar{V}_x}{dr} \ell'.$$

Поперечная пульсационная составляющая скорости  $V'_r$  принимается пропорциональной пульсационной составляющей продольной

скорости. Тогда выражение для определения турбулентного напряжения трения запишется:

$$\tau_T = \rho(\ell')^2 \left( \frac{d\bar{V}_x}{dr} \right)^2.$$

Суммарное касательное напряжение в турбулентном потоке можно представить, как сумму напряжения сил вязкого трения, определяемого по осредненной скорости  $\bar{V}$  по формуле Ньютона  $\tau_B = -\mu \frac{d\bar{V}_x}{dr}$ , и напряжения сил трения, определяемого наличием пульсационных составляющих скорости  $V'$ :

$$\tau = \tau_B + \tau_T = -\mu \frac{d\bar{V}_x}{dr} + \rho(\ell')^2 \left( \frac{d\bar{V}_x}{dr} \right)^2 = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

Это выражение называют дифференциальным уравнением равномерного турбулентного потока жидкости. Обычно при его записи знак осреднения опускают и записывают в виде:

$$\tau_0 \frac{r}{r_0} = -\mu \frac{dV_x}{dr} + \rho(\ell')^2 \left( \frac{dV_x}{dr} \right)^2. \quad (4.16)$$

В различных областях потока влияние каждого из членов уравнения (4.16) различно. Вблизи стенок трубы в области вязкого подслоя главной составляющей является молекулярная вязкость, и основное значение имеет первое слагаемое в правой части уравнения. Для описания движения в турбулентном ядре потока основным является второе слагаемое.

#### **4.4.2. Закон распределения скоростей при турбулентном движении**

Рассмотрим размерность величины  $\sqrt{\tau_0/\rho}$ :

$$\left[ \sqrt{\tau_0/\rho} \right] = \left( \text{Н/м}^2 \cdot \text{м}^3/\text{кг} \right)^{1/2} = \left( \text{кгм/м}^2\text{с}^2 \cdot \text{м}^3/\text{кг} \right)^{1/2} = \text{м/с}.$$

Эту величину называют скоростью касательного напряжения или динамической скоростью:

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

откуда

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (V_*)^2.$$

Как было показано ранее касательное напряжение трения

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\ell} r_0,$$

откуда следует, что

$$(V_*)^2 = \frac{p_1 - p_2}{2\ell\rho} r_0 = \text{const}$$

для данного потока жидкости. Значит, величина  $V_* = \text{const}$  может служить характеристикой турбулентного потока.

Рассмотрим закон распределения скоростей в ядре потока, исключая ближайшую к стенке трубы очень тонкую область вязкого подслоя (см. раздел 3.2). В ядре потока продольная составляющая осредненной скорости  $V_x$  меняется незначительно, поэтому первым слагаемым в уравнении (4.16) можно пренебречь. Кроме того, при равномерном движении продольная составляющая скорости близка по величине к средней по живому сечению скорости. Если принять, что  $V_x = V$ , то дифференциальное уравнение равномерного турбулентного потока приведет к виду:

$$\tau_0 \frac{r}{r_0} = \rho (\ell')^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)^2.$$

Разделим обе части на плотность  $\rho$ :

$$\frac{\tau_0}{\rho} \frac{r}{r_0} = (\ell')^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)^2,$$

но, так как

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (V_*)^2,$$

то для турбулентного ядра потока:

$$(V_*)^2 \frac{r}{r_0} = (\ell')^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)^2. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17) представляет закон турбулентного трения для труб круглого сечения.

Для того, чтобы найти закон распределения скорости в ядре потока, нужно проинтегрировать уравнение турбулентного трения (4.17), но для этого необходимо знать закон изменения  $\ell'(r)$ .

Для описания закона  $\ell'(r)$  было предложено много экспериментальных зависимостей. Воспользуемся одной из них, предложенной А.А. Саткевичем [6]:

$$\frac{\ell'}{r_0} = \left[ \alpha \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right],$$

где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент ( $\alpha = 0,4$ ).

Подставим выражение для  $\ell'$  в уравнение (4.17):

$$(V_*)^2 \frac{r}{r_0} = \left[ \alpha \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right]^2 r_0^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)^2.$$

После преобразований и извлечения корня выберем знак «-», поскольку с увеличением радиуса скорость уменьшается и, следовательно, производная  $\left( \frac{dV}{dr} \right)$  отрицательна:

$$V_* = -\alpha \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) r_0 \left( \frac{dV}{dr} \right).$$

Полученное уравнение для скорости преобразуем к виду:

$$dV = -\frac{V_*}{\varepsilon \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) r_0} dr,$$

и проинтегрируем

$$\int_V^{V_{\max}} dV = -\int_r^0 \frac{V_*}{\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}} d\left(\frac{r}{r_0}\right);$$

$$\frac{V_{\max} - V}{V_*} = -\frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 - \frac{r}{r_0}\right).$$

Обозначим расстояние от стенки до рассматриваемого слоя жидкости  $y = r_0 - r$  (рис.4.11), тогда выражение в скобках

$$1 - \frac{r}{r_0} = \frac{r_0 - r}{r_0} = \frac{y}{r_0},$$

следовательно

$$\frac{V_{\max} - V}{V_*} = \frac{V_{\max}}{V_*} - \frac{V}{V_*} = -\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{y}{r_0} = -\frac{2,3}{\varepsilon} \lg \frac{y}{r_0}.$$

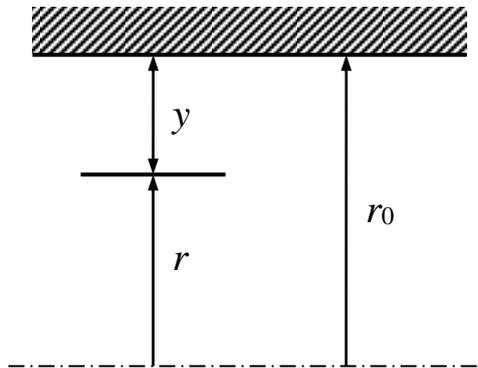


Рис. 4.11. Координаты  $r$  и  $y$  в трубе

Последнюю формулу можно представить в виде:

$$\frac{V}{V_*} = A + B \lg \frac{yV_*}{\nu}, \quad (4.18)$$

где  $V_*$ ,  $\varepsilon$ ,  $A$ ,  $B$  – постоянные.

Здесь коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  и динамическая скорость  $V_*$  введены дополнительно под знак логарифма, поскольку при такой записи  $\frac{yV_*}{\nu}$  представляет собой безразмерный комплекс, по структуре аналогичный числу Рейнольдса.

Из выражения (4.18) можно видеть, что скорость  $V$  распределяется вдоль радиуса  $r$  по логарифмическому закону во всей области движения за исключением тонкого вязкого пристеночного слоя, в котором преобладают силы вязкого трения.

Экспериментально было определено, что значения постоянных в выражении (4.18) равны:  $A = 5,5$ ;  $B = 5,75$ . Тогда уравнение для скорости  $V$  в ядре примет вид:

$$\frac{V}{V_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{yV_*}{\nu}.$$

Эта формула позволяет найти распределение скорости  $V$ , а значит определить напряжение трения в турбулентном ядре потока.

При турбулентном движении, чем больше число  $Re$ , тем большую часть сечения занимает ядро потока. Эпюра скоростей при больших числах  $Re$  будет более заполненной, т. е. наиболее приближенной к прямоугольной форме, при этом значение средней скорости  $V_{cp}$  будет приближаться к максимальной скорости  $V_{max}$  (рис. 4.12).

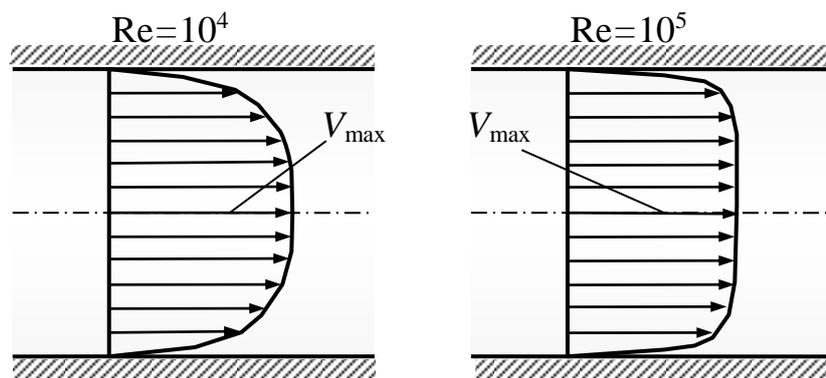


Рис. 4.12. Эпюры скоростей в трубе при разных числах  $Re$

Если записать  $V_{\max}$ , как  $V_{\max} = m V_{\text{ср}}$ , то по данным опытов:

$$m = \frac{V_{\max}}{V_{\text{ср}}} = \begin{cases} 1,230, \text{Re} = 10^4; \\ 1,145, \text{Re} = 10^6. \end{cases}$$

#### 4.4.3. Потери напора на гидравлическое трение при турбулентном движении

Потери удельной энергии на трение при ламинарном и турбулентном режимах вычисляются по одной и той же формуле

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}.$$

Разница заключается в определении коэффициента гидравлического трения  $\lambda$ . При ламинарном движении  $\lambda$  определяется теоретически –  $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ . При турбулентном режиме  $\lambda$  определяют экспериментально или по эмпирическим формулам.

Как было сказано выше, при турбулентном движении жидкости распределение скорости в ядре потока подчиняется логарифмическому закону, при ламинарном – во всем поперечном сечении эпюра скоростей имеет форму параболы (рис. 4.13).

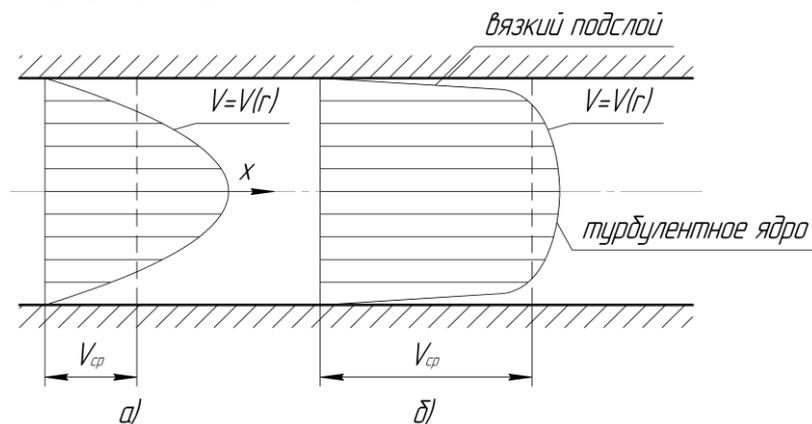


Рис. 4.13. Распределение скорости в поперечном сечении трубы при ламинарном (а) и турбулентном (б) режимах

В структуре турбулентного потока в трубе выделяют турбулентное ядро и тонкий пристеночный слой, в котором решающую

роль играют силы вязкого трения. Эту область называют вязким или ламинарным подслоем. В двухслойной модели поток в трубе или пограничный слой на обтекаемой поверхности при рассмотрении внешней задачи (например, пограничный слой на крыловом профиле) состоит из двух областей с толщиной  $\delta_v$  и  $\delta_t$ :

$$\delta = \delta_v + \delta_t.$$

Общая толщина пограничного слоя в трубе равна по величине ее радиусу (скорость, если двигаться от стенки, возрастает и достигает максимального значения на оси трубы). Чем больше средняя скорость турбулентного потока, тем тоньше вязкий подслой.

Внутренняя поверхность труб обладает шероховатостью. В качестве геометрической характеристики шероховатости обычно принимают среднюю величину абсолютного размера выступов на обтекаемой поверхности  $\Delta$ , а отношение  $\Delta/r_0$  называют относительной шероховатостью (рис. 4.14). Величину  $r_0/\Delta$ , обратную относительной шероховатости, называют относительной гладкостью.

В лабораторных условиях при исследованиях используют искусственную шероховатость, когда поверхность покрывается отсортированными зернами песка одинакового размера. Такую шероховатость называют равнозернистой.

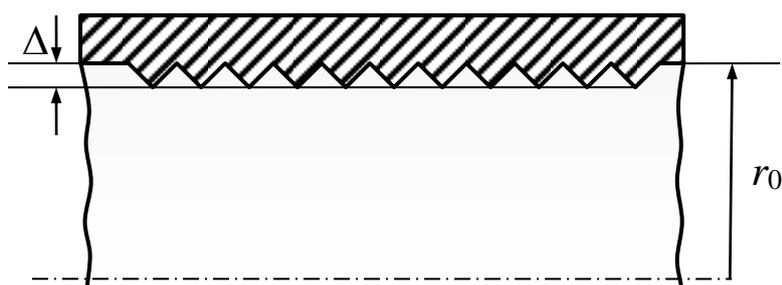


Рис. 4.14. К определению относительной шероховатости

В естественных условиях абсолютная высота выступов может быть разной. В практических расчетах используют понятие эквивалентной шероховатости  $\Delta_{\text{экв}}$ , которая представляет собой равнозернистую шероховатость, при которой потери на трение равны потерям

при реальной шероховатости. Значения  $\Delta_{\text{экв}}$  приводятся в справочниках.

Характер взаимодействия турбулентного потока с ограничивающей стенкой определяется толщиной вязкого подслоя  $\delta_v$ , которую для круглых труб можно приближенно рассчитать по формуле [6]:

$$\delta_v = \frac{34,2d}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}.$$

В зависимости от соотношения  $\Delta$  и  $\delta_v$  возможны три случая:

1. Толщина вязкого (ламинарного) подслоя  $\delta_v$  больше величины абсолютной шероховатости  $\Delta$  (рис. 4.15). В этом случае все выступы на поверхности стенки или трубы (все шероховатости) погружены внутрь вязкого подслоя и не оказывают влияния на турбулентное ядро потока. Такие трубы называют гидравлически гладкими.

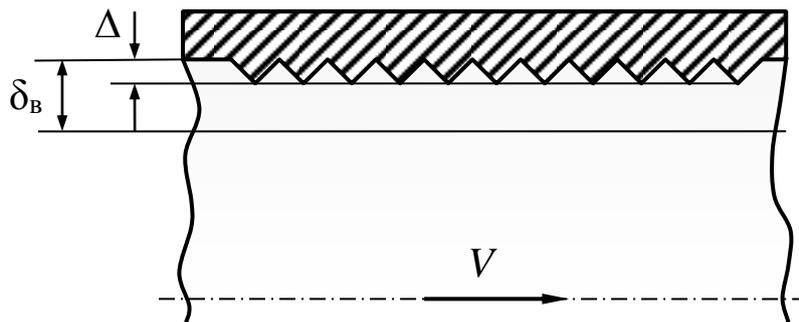


Рис. 4.15. Гидравлически гладкая труба

2. Вязкий подслоем  $\delta_v$  тоньше, чем величина абсолютной шероховатости  $\Delta$  (рис. 4.16).

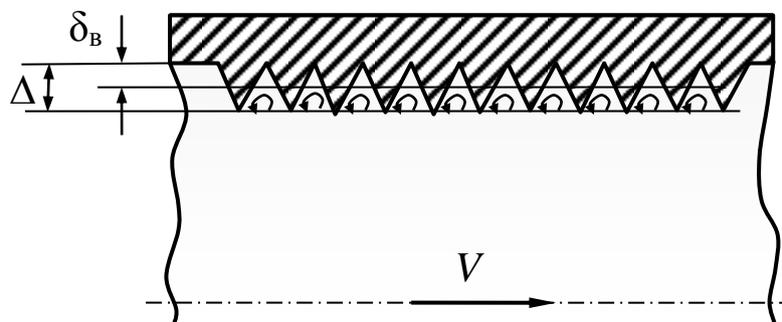


Рис. 4.16. Гидравлически шероховатая труба

В этом случае выступы шероховатости выходят в область турбулентного ядра потока. За каждым из выступов образуется вихрь. На образование и поддержание такого вихря затрачивается энергия, которая забирается из потока. Следовательно, при таком характере течения возрастают потери на трение. Такие трубы называют гидравлически шероховатыми.

3. Толщина вязкого подслоя близка к величине абсолютной шероховатости  $\delta_v \cong \Delta$ . Этот режим движения жидкости соответствует переходу от гидравлически гладкой к гидравлически шероховатой трубе.

Толщина вязкого подслоя зависит от числа  $Re$  или, для одной и той же вязкости и размеров, от средней по живому сечению скорости потока. При увеличении средней скорости  $V_{cp}$  уменьшается толщина вязкого подслоя  $\delta_v$ . Следовательно, в одной и той же трубе при одинаковой величине шероховатости  $\Delta$  возможен любой из описанных случаев турбулентного движения.

Область гидравлически гладкого движения для равнoзернистой шероховатости определяется числом  $Re$  по эмпирической формуле в диапазоне

$$2300 < Re < 27 \left( \frac{d}{\Delta} \right)^{8/7}.$$

Определим напряжение вязкого трения при движении в гидравлически гладкой трубе и найдем его связь с  $\lambda$ .

Выделим в движущемся потоке в горизонтальной трубе жидкий объем в форме цилиндра длиной  $\ell$  и радиусом  $r = d/2$  (рис. 4.17).

На жидкий объем будут действовать силы давления  $P_1, P_2$  по торцам цилиндра и сила трения  $F_{тр}$  по боковой поверхности (см. рис. 4.17). Составим уравнение баланса сил в проекции на ось  $x$ :

$$P_1 - P_2 - F_{тр} = 0;$$

$$(p_1 - p_2) \frac{\pi d^2}{4} = \tau \pi d \ell ;$$

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\ell} \frac{d}{4}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{тр}}.$$

Так как труба горизонтальная, то  $z_1 = z_2$ .

Исходя из уравнения неразрывности, для трубы постоянного сечения ( $S_1 = S_2$ ) будем иметь:

$$V_1 = V_2.$$

Тогда уравнение Бернулли упростится:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_{\text{тр}}.$$

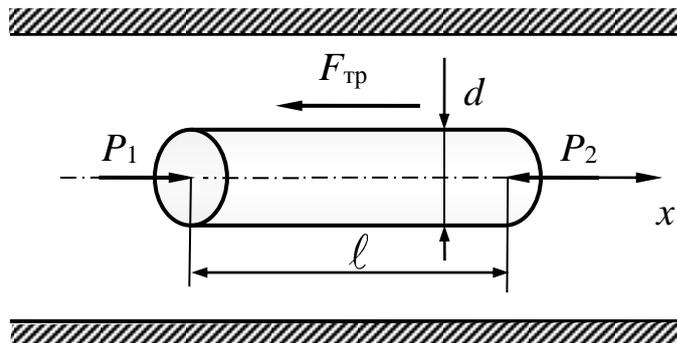


Рис. 4.17. Перемещение жидкого цилиндрического объема

Умножим обе части уравнения на  $\frac{\rho g}{\ell}$ , получим

$$\frac{p_1 - p_2}{\ell} = \frac{h_{\text{тр}} \rho g}{\ell}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (4.19) для напряжения трения

$$\tau = \frac{\rho g h_{\text{тр}}}{\ell} \frac{d}{4}.$$

Потери на трение определяются формулой Дарси-Вейсбаха

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}.$$

Тогда связь напряжения трения  $\tau$  и коэффициента гидравлического трения  $\lambda$

$$\tau = \rho g \left( \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} \right) \frac{1}{\ell} \frac{d}{4};$$

$$\tau = \lambda \rho \frac{V_{\text{ср}}^2}{8}.$$

В случае гидравлически гладкой трубы для расчета  $\lambda$  при турбулентном движении можно воспользоваться эмпирическими формулами, например, формулой Г. Блазиуса, которая верна при  $2300 \leq \text{Re} \leq 10^5$ :

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad (4.20)$$

или формулой П.К. Конакова:

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2}.$$

#### 4.4.4. График Никурадзе

Фундаментальные экспериментальные исследования по определению зависимости коэффициента гидравлического трения от числа  $\text{Re}$  и относительной шероховатости были выполнены И. Никурадзе в прямых трубах с различной равнозернистой шероховатостью. Для этого труба изнутри покрывалась песчинками строго одинакового размера. Затем песок покрывался лаком для его закрепления на стенках. Результаты опытов И. Никурадзе свел в один график (рис. 4.18).

Рассмотрим, как будет изменяться коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  в одной и той же трубе, с различной шероховатостью, в зависимости от числа  $\text{Re}$ .

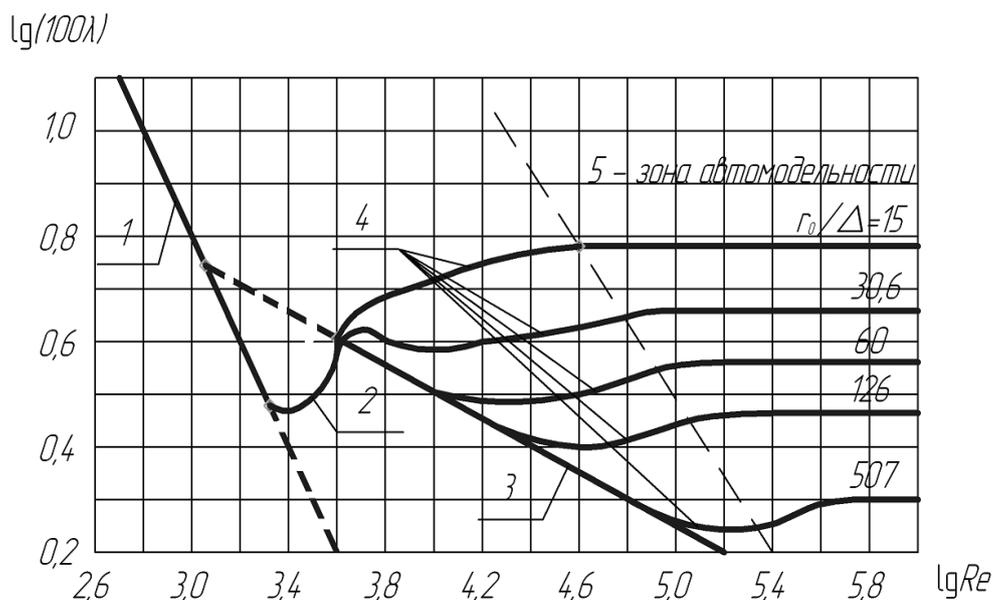


Рис. 4.18. График И. Никурадзе

Для ламинарного режима движения при  $Re < 2300$  теоретически была получена формула:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

В логарифмических координатах  $\lg(100\lambda) = 3,81 - \lg Re$  эта зависимость изображается прямой 1. Все экспериментальные значения коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  хорошо ложатся на эту прямую. При ламинарном режиме коэффициент  $\lambda$  зависит только от числа Рейнольдса и не зависит от шероховатости.

При увеличении числа  $Re$  (по мере возрастания скорости в трубе), ламинарное движение переходит в турбулентное. Этот переход отражает кривая 2 на графике. Все остальные области графика относятся к турбулентному режиму.

При относительно небольших скоростях, когда имеется значительный вязкий подслой при турбулентном движении в ядре потока, на графике имеется зона, соответствующая гидравлически гладким трубам, когда  $\delta_v > \Delta$ . Из формулы Блазиуса (4.20) следует, что в этой

зоне  $\lg(100\lambda) = 2,5 - 0,25 \lg(Re)$ . Этому уравнению соответствует прямая линия 3 на графике.

При увеличении скорости (и числа  $Re$ ) толщина пристеночного вязкого подслоя будет уменьшаться, высота выступов окажется больше его толщины. Характер турбулентного движения будет соответствовать переходу от гидравлически гладких к гидравлически шероховатым трубам. Причем при разных относительных шероховатостях этот переход будет происходить при различных скоростях, а, следовательно, и при различных числах  $Re$ . Переходная зона соответствует области 4 на графике Никурадзе (см. рис. 4.18).

При дальнейшем увеличении скорости (и числа  $Re$ ) толщина вязкого подслоя становится намного меньше высоты выступов на твердой стенке, т. е.  $\delta_v \ll \Delta$ , турбулентное движение становится соответствующим течению в гидравлически шероховатых трубах, коэффициент  $\lambda$  перестает зависеть от числа  $Re$ . Кривые  $\lambda = f(Re)$  принимают вид горизонтальных прямых, расположенных в зоне 5. Эта область называется зоной квадратичного сопротивления. Также эту зону называют зоной автомодельности, поскольку здесь автоматически соблюдается моделирование по числу  $Re$ . В этой зоне коэффициент гидравлического трения зависит только от относительной шероховатости (гладкости) трубы.

Таким образом, на графике Никурадзе можно выделить 5 зон:

1.  $Re < 2300$ ;  $\lambda = \lambda(Re)$  – ламинарное движение в трубе.
2.  $Re = 2300 \dots 4000$ ;  $\lambda = \lambda(Re)$  – зона перехода от ламинарного режима движения к турбулентному.
3.  $\lambda = \lambda(Re)$  – зона турбулентного движения в гидравлически гладких трубах.

4.  $\lambda = \lambda\left(\text{Re}; \frac{n_0}{\Delta}\right)$  – зона турбулентного движения в шероховатых

трубах, в которой на значение коэффициента  $\lambda$  оказывает влияние и число  $\text{Re}$  и шероховатость.

5.  $\lambda = \lambda\left(\frac{n_0}{\Delta}\right)$  – зона турбулентного движения в шероховатых

трубах, зона автомодельности по числу Рейнольдса.

Величина потерь напора в трубе при ламинарном движении пропорциональна первой степени скорости (как было показано выше). Потери в зоне автомодельности пропорциональны квадрату скорости, поэтому эту зону называют зоной квадратичного сопротивления. В остальных областях графика Никурадзе (области 2,3,4) происходит постепенный переход от закона  $h_{\text{тр}} \sim V_{\text{ср}}$  к закону  $h_{\text{тр}} \sim V_{\text{ср}}^2$ .

Режим турбулентного движения в трубе часто характеризуют величиной комплекса  $k_{\text{т}} = \frac{\Delta}{d} \text{Re}$  [10].

Гидравлически гладким трубам соответствует турбулентное движение при значении комплекса

$$k_{\text{т}} \leq 10.$$

В этой области коэффициент гидравлического трения определяют по формуле Блазиуса (4.20).

Переходная область турбулентного движения (доквадратичная зона) соответствует значениям комплекса

$$10 < k_{\text{т}} < 500.$$

Коэффициент гидравлического трения в этой области определяют по получившей широкое распространение эмпирической формуле А.Д. Альтшуля [10]:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}. \quad (4.21)$$

В общем случае, потери в этой области пропорциональны  $V^m$ , где  $1 \leq m \leq 2$ .

Зоне квадратичного сопротивления при турбулентном движении соответствуют значения

$$k_T \geq 500.$$

Определение  $\lambda$  в квадратичной зоне в общем виде невозможно. Для разных случаев шероховатости и форм потока разработаны свои формулы, которые приводятся в справочниках. Для течения в круглых трубах можно использовать формулу И. Никурадзе:

$$\lambda = \frac{1}{\left(21g \frac{r_0}{\Delta} + 1,74\right)^2}. \quad (4.22)$$

Часто используют формулу Б.Л. Шифринсона, которая согласуется с формулой А.Д. Альтшуля в предельном случае, когда труба гидравлически шероховатая:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25}. \quad (4.23)$$

Для труб с равнозернистой шероховатостью можно отметить следующее:

1. Относительная шероховатость  $\Delta/r_0$  не влияет на значение числа  $Re$ , при котором ламинарный режим переходит в турбулентный.

2. Чем меньше относительная шероховатость  $\Delta/r_0$ , тем в большем диапазоне чисел  $Re$  наблюдается турбулентное движение, соответствующее гидравлически гладким трубам.

3. Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  перестает зависеть от числа  $Re$  при тем меньших значениях числа  $Re$ , чем больше относительная шероховатость  $\Delta/r_0$ .

## ГЛАВА 5. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

### 5.1. Местные сопротивления и принцип наложения потерь

Местные гидравлические сопротивления обусловлены резким изменением кинематических параметров потока на участке небольшой протяженности, когда потери по длине незначительны и их обычно не учитывают. Местные потери образуются в тех местах, где происходит изменение формы и размеров живого сечения, и движение жидкости становится неравномерным: расширение, сужение, повороты, дроссели, фильтры, лабиринты и т. п.

Местные потери, как правило, происходят на небольшой длине, поэтому их называют местными, относя потери условно к тому месту, в котором поток деформируется.

Во многих случаях движение жидкости на участках деформации сопровождается отрывом потока от ограничивающих стенок и интенсивным вихреобразованием. Применительно к воде эти зоны иногда называют водоворотными. Часть удельной энергии потока, которая затрачивается на преодоление местных сопротивлений, называют местными потерями напора и определяют по формуле Вейсбаха

$$h_m = \zeta \frac{V^2}{2g}, \quad (5.1)$$

где  $\zeta$  – коэффициент потерь, зависящий главным образом от типа местного сопротивления;  $V$  – средняя по живому сечению скорость в трубе.

Принято определять потери по средней скорости за местным сопротивлением [10, 11]. В отдельных случаях, когда потери относят к скорости перед местным сопротивлением, это оговаривается.

При расчете сложных гидравлических систем исходят из принципа наложения потерь, согласно которому, потери напора в системе определяются суммой отдельных видов потерь. Такой подход спра-

ведлив только в том случае, когда между участками с местными сопротивлениями имеется достаточно длинный участок трубопровода, в котором неравномерность распределения скоростей, возникающая в местном сопротивлении, выравнивается. Это расстояние называют длиной влияния местного сопротивления  $l_{\text{вл}}$ . Ее величина зависит от геометрии местного сопротивления и числа  $Re$ . Для оценочных расчетов трубопроводов круглого сечения обычно принимают  $l_{\text{вл}} = 10d$ .

Рассмотрим, в качестве примера, потери на поворот потока в коленах разной геометрии.

В П-образном колене (рис. 5.1) при  $l > 10d$  коэффициент местных потерь  $\zeta = 2\zeta_{\text{пов}90^\circ}$ .

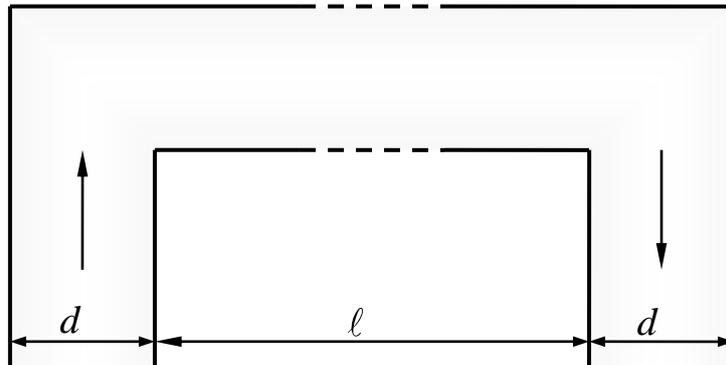


Рис. 5.1. П-образное колено при  $l > 10d$

В Z-образном колене (рис. 5.2) при  $l > 10d$  также  $\zeta = 2\zeta_{\text{пов}90^\circ}$ .

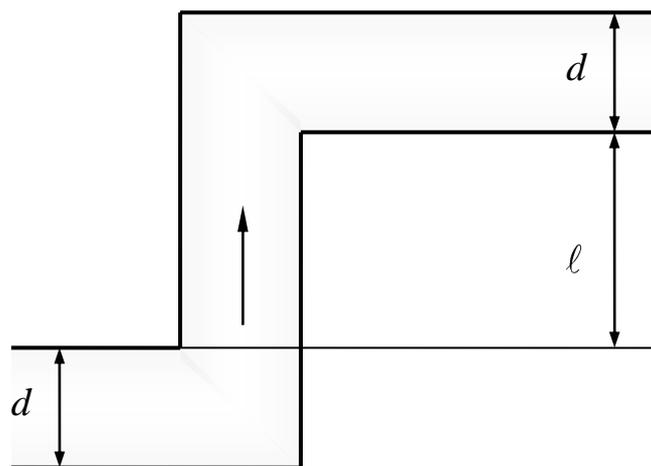


Рис. 5.2. Z-образное колено при  $l > 10d$

В П-образном колене (рис. 5.3) при  $l = d$  искривление линий тока, вызванное наличием первого поворота, сохраняется при вхождении потока во второй поворот. Поэтому потери энергии, возникающие при втором повороте, оказываются меньше чем в первом и суммарный коэффициент потерь  $\zeta < 2\zeta_{\text{пов}90^\circ}$ .

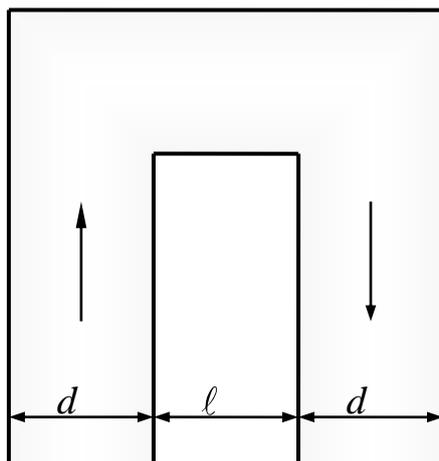


Рис. 5.3. П-образное колено при  $l = d$

Если повороты расположены очень близко (рис. 5.4), т. е.  $l < d$ , то искривление линий тока увеличивается и  $\zeta > 2\zeta_{\text{пов}90^\circ}$ .

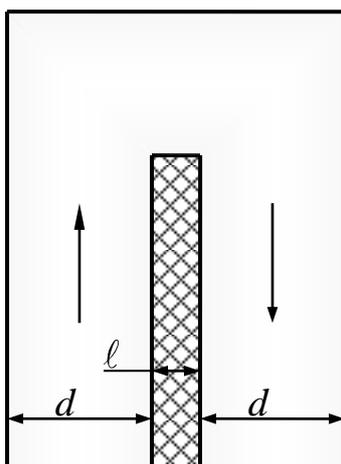


Рис. 5.4. П-образное колено при  $l < d$

Для трубопроводов, у которых  $l \geq 10d$  согласно принципу наложения потерь  $h = h_{\text{тр}} + h_{\text{м}}$ , тогда суммарные потери:

$$h = \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} \frac{V_{\text{ср}i}^2}{2g} \right) + \sum_{j=1}^m \left( \zeta_j \frac{V_{\text{ср}j}^2}{2g} \right).$$

Если между отдельными местными сопротивлениями расстояние  $\ell \leq 10d$ , то величину коэффициента местных потерь определяют экспериментально.

В общем случае коэффициент потерь  $\zeta$  зависит от следующих факторов:

1. Геометрических характеристик границ потока.
2. Режима движения жидкости и величины числа Re. Зависимость местных потерь от числа Re особенно значительна при малых числах Re, при больших числах Re эта зависимость практически отсутствует.
3. Относительной шероховатости. Увеличение шероховатости усиливает турбулизацию пристеночного слоя и влияет на коэффициент сопротивления  $\zeta$ .
4. Расстояния между отдельными последовательно установленными местными сопротивлениями в случае, если прямолинейный участок трубопровода между ними меньше длины влияния первого по потоку сопротивления.

Характер движения жидкости в местных сопротивлениях сложный. Как правило, это течение не поддается теоретическому описанию. Поэтому для определения коэффициента потерь  $\zeta$  в конкретных местных сопротивлениях проводят экспериментальные исследования, полученные результаты обобщают и приводят в справочниках по гидравлическим сопротивлениям.

Из всех местных сопротивлений только один вид позволяет теоретически определить коэффициент потерь  $\zeta$  – это случай внезапного расширения, когда площадь трубопровода круглого сечения внезапно увеличивается по направлению движения потока.

## 5.2. Потери напора при внезапном расширении

Рассмотрим напорное движение потока жидкости через сопряжение двух круглых труб разного диаметра (рис. 5.5).

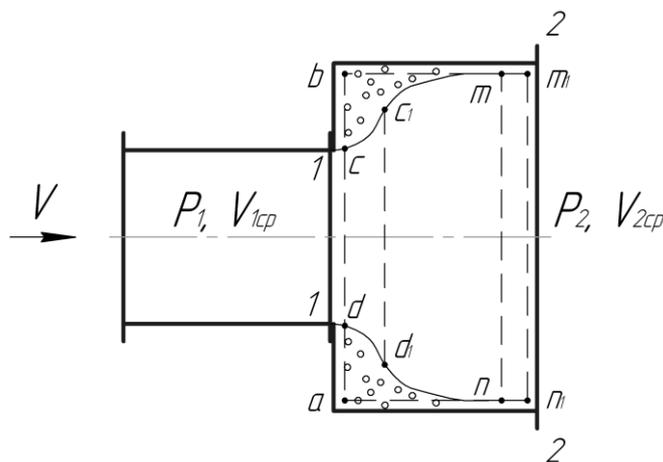


Рис. 5.5. Схема движения жидкости при внезапном расширении

Выберем контрольные сечения 1–1 и 2–2 (см. рис. 5.5). Сечения расположены достаточно близко, так, что потери трения в потоке между ними пренебрежимо малы.

В сечении 1–1 поток отрывается от стенок трубы, образуя расширяющийся транзитный поток и кольцевую область отрыва за его пределами. Эта кольцевая область заполнена жидкостью, которая находится в состоянии вихревого беспорядочного движения. Обычно принимают, что жидкость этой зоны не участвует в транзитном движении вдоль трубы. В связи с расширением транзитного потока происходит уменьшение его средней скорости от значения  $V_{1cp}$  в сечении  $cd$  до значения  $V_{2cp}$  в сечении  $mn$ .

По границе между зоной отрыва, которую часто называют водоворотной областью, и транзитным потоком происходит интенсивное вихреобразование. На создание и поддержание этих вихрей затрачивается энергия, которая безвозвратно теряется, преобразуясь, в конечном счете, в тепловую. Эти потери удельной энергии называют потерями напора на внезапное расширение  $h_{вн.р}$ .

За сечением  $mn$  движение жидкости предполагается установившимся.

Также считают, что потери на трение о стенки трубы на участке стабилизации потока от сечения  $cd$  до сечения  $mn$  невелики по сравнению с потерями, обусловленными явлениями, возникающими при внезапном расширении, и ими можно пренебречь.

Для определения величины удельной энергии, теряемой вследствие внезапного расширения, используем уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, записав его для сечений 1–1 и 2–2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_{1cp}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_{2cp}^2}{2g} + z_2 + h_{вн.р}, \quad (5.2)$$

где  $h_{вн.р}$  – потери напора на внезапное расширение;  $\alpha$  – коэффициент Кориолиса.

Рассмотрим случай горизонтальной трубы ( $z_1 = z_2$ ), тогда из уравнения (5.2) для расчета потерь напора  $h_{вн.р}$  получим выражение:

$$h_{вн.р} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_{1cp}^2 - \alpha_2 V_{2cp}^2}{2g}.$$

Выразим  $h_{вн.р}$  через скорости. Воспользуемся для этого законом изменения количества движения, согласно которому изменение проекции на ось  $x$  количества движения системы материальных точек равно сумме проекций на ту же ось импульсов всех внешних сил, действующих на систему. Выделим жидкий объем, начинающийся сразу после выхода из трубы меньшего диаметра и до того места, где в трубе большего диаметра скорость установилась (объем  $abmn$  с площадью основания  $S_1 = S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$ ).

За время  $\Delta t$  этот объем жидкости переместится в положение  $d_1c_1m_1n_1$ . Изменение количества движения в контрольном объеме  $abmn$  будет равно разности количества движения жидкости в объеме

$dcc_1d_1$  и  $nmm_1n_1$ . С учетом того, что количество движения  $dK$  элементарной массы  $dm$  равно:

$$dK = dmV = \rho(dQ\Delta t)V = \rho(dSV)V\Delta t = \rho\Delta tV^2dS,$$

изменение количества движения  $\Delta K$  жидкого объема за время  $\Delta t$  составит:

$$\Delta K = \int_{S_2} \rho V_2^2 \Delta t dS - \int_{S_1} \rho V_1^2 \Delta t dS = \rho\Delta t \left( \int_{S_2} V_2^2 dS - \int_{S_1} V_1^2 dS \right).$$

Выразим интегралы, заключенные в скобки, через средние скорости:

$$\int_S V^2 dS = \beta V_{cp}^2 S.$$

Тогда изменение количества движения жидкости в контрольном объеме составит:

$$\Delta K = (\beta_2 V_{2cp}^2 S_2 - \beta_1 V_{1cp}^2 S_1) \rho \Delta t.$$

В этих формулах коэффициенты  $\beta$  учитывают неравномерность распределения скоростей в поперечном сечении потока и являются поправкой к значению количества движения, вычисленного по средней скорости.

Теперь определим проекции на ось  $x$  импульсов внешних сил. На выделенный объем действуют следующие силы:

1. Сила тяжести  $G$ , проекция которой на ось  $x$  равна нулю:  $G_x = 0$ .

2. Силы давления  $p_1 S_1$  и  $p_2 S_2$  на торцевые поверхности выделенного жидкого объема. Так как давление в этих сечениях распределяется в соответствии с основным законом гидростатики

$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const}$ , то сила давления на торцевые поверхности равна давлению в центре тяжести, умноженному на их площади.

3. Силой трения на участке малой протяженности пренебрегаем.

Тогда сумма импульсов всех сил в проекции на ось  $x$ :

$$P\Delta t = (p_1 S_2 - p_2 S_2) \Delta t = (p_1 - p_2) S_2 \Delta t.$$

Приравнявая значение импульса внешних сил изменению количества движения жидкости, получим:

$$\Delta t S_2 (p_1 - p_2) = \rho (\beta_2 V_{2cp}^2 S_2 - \beta_1 V_{1cp}^2 S_1) \Delta t.$$

Разделим обе части уравнения на произведение  $\Delta t \cdot S_2 \rho g$ :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\beta_2 V_{2cp}^2 - \beta_1 V_{1cp}^2 \frac{S_1}{S_2}}{g}.$$

Подставив  $\frac{p_1 - p_2}{\rho g}$  в выражение для потерь  $h_{вн.р}$

$$h_{вн.р} = \frac{\beta_2 V_{2cp}^2 - \beta_1 V_{1cp}^2 \frac{S_1}{S_2}}{g} + \frac{\alpha_1 V_{1cp}^2 - \alpha_2 V_{2cp}^2}{2g},$$

окончательно получим:

$$h_{вн.р} = \frac{2\beta_2 V_{2cp}^2 - 2\beta_1 V_{1cp}^2 \frac{S_1}{S_2} + \alpha_1 V_{1cp}^2 - \alpha_2 V_{2cp}^2}{2g}. \quad (5.3)$$

### 5.3. Теорема Борда-Карно

Примем, как это можно приближенно принять при турбулентном движении (ошибка составит несколько процентов):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 \cong 1.$$

Тогда  $V_{cp1} = V_1$ ;  $V_{cp2} = V_2$ .

Из уравнения неразрывности

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1},$$

получим выражение

$$V_1^2 \frac{S_1}{S_2} = V_1 V_2,$$

которое подставим в формулу (5.3):

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{2V_2^2 - 2V_1V_2 + V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}.$$

Полученное выражение называют формулой Борда для определения потерь напора при внезапном расширении

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \quad (5.4)$$

Поскольку разность  $(V_1 - V_2)$  можно рассматривать как потерянную при расширении скорость, то получила распространение следующая формулировка теоремы Борда-Карно: потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору потерянной скорости.

Приведем формулу Борда к общему виду формул для потерь в местных гидравлических сопротивлениях:

$$h_{\text{вн.р}} = \zeta_{\text{вн.р}} \frac{V^2}{2g},$$

т. е. к выражению (5.1), по которому вычисляются местные потери.

Воспользовавшись уравнением неразрывности

$$V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2};$$

получим

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{\left(V_1 - V_1 \frac{S_1}{S_2}\right)^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g},$$

откуда следует, что коэффициент потерь местного сопротивления при внезапном расширении равен:

$$\zeta_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \quad (5.5)$$

Следовательно, при выходе потока из трубы в неограниченное пространство ( $S_2 = \infty$ ), коэффициент потерь равен  $\zeta_{\text{вн.р}} = 1$ .

Если при вычислении  $\zeta$  потери отнести к кинетической энергии потока на выходе, т. е. к энергии, сосчитанной по скорости  $V_2$ , то получим:

$$V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1};$$

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{\left( V_2 \frac{S_2}{S_1} - V_2 \right)^2}{2g} = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g};$$

$$\zeta_{\text{вн.р}} = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2.$$

Таким образом, величина коэффициента потерь  $\zeta_{\text{вн.р}}$  зависит от того, к какой кинетической энергии мы относим потери  $h_{\text{вн.р}}$  – до или после внезапного расширения.

Из формулы (5.3) можно видеть, что  $\zeta_{\text{вн.р}}$  зависит от значений коэффициентов неравномерности энергии  $\alpha$  и количества движения  $\beta$ .

Для развитого ламинарного движения  $\alpha=2$ ,  $\beta=1,33$ . Если обозначить  $\frac{S_2}{S_1} = n$ , то формула для определения  $\zeta_{\text{вн.р}}$  при расчете по  $V_1$  после подстановки  $\alpha$  и  $\beta$  примет вид:

$$\zeta_{\text{вн.р(лам)}} = 2 - \frac{2,66}{n} + \frac{0,66}{n^2}.$$

Для турбулентного движения  $\alpha=1,05 \dots 1,12$  и  $\beta=1,02 \dots 1,03$ . При  $\alpha=1,1$  и  $\beta=1,025$

$$\zeta_{\text{вн.р(турб)}} = 1,1 - \frac{2,05}{n} + \frac{0,25}{n^2}.$$

Например, при  $n=12$ ,  $\zeta_{\text{вн.р}}$  при ламинарном и турбулентном режимах:

$$\zeta_{\text{вн.р(лам)}} = 2 - 1,33 + 0,165 = 0,837;$$

$$\zeta_{\text{вн.р(турб)}} = 1,1 - 1,03 + 0,24 = 0,31.$$

По формуле Борда коэффициент местных потерь  $\zeta = 0,25$ , следовательно, расчет без учета влияния неравномерности скорости и количества движения по сечению приводит к заниженным значениям потерь на внезапное расширение.

А.Д. Альтшулем (1962 г.) была получена диаграмма зависимости коэффициента потерь на внезапное расширение от числа Рейнольдса, аналогичная графику И. Никурадзе (рис. 5.6).

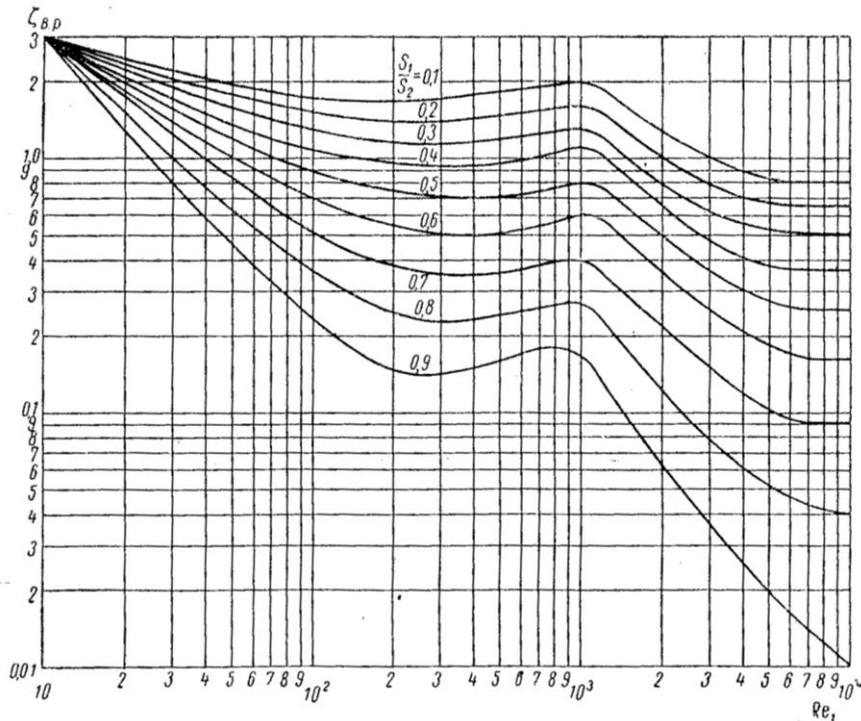


Рис. 5.6. Коэффициент потерь при внезапном расширении

Потери энергии при выходе из трубы в неограниченное пространство можно рассматривать как частный случай внезапного расширения, когда  $V_2 = 0$  и  $\zeta_{\text{вн.р}} = 1$ . Это следует из формулы (5.5), когда  $S_2 \rightarrow \infty$ . Тогда в соответствии с формулой Борда:

$$h_{\text{ВЫХ}} = \frac{V_1^2}{2g}.$$

В этом случае вся кинетическая энергия жидкости, выходящей из трубы, оказывается потерянной, т. е. потери равны скоростному напору  $\frac{V_1^2}{2g}$ .

Формула Борда (5.4) была получена из предположения об аналогии потерь на внезапное расширение с неупругим ударом твердых тел, поэтому иногда потери внезапного расширения называют еще потерями на «удар» или потерями по «Борда».

#### 5.4. Потери энергии при внезапном сужении потока

При внезапном сужении также происходит отрыв потока от твердой стенки с образованием транзитной струи, которая вначале испытывает сжатие, а затем постепенно расширяется. Сжатие струи сопровождается образованием вихревых зон. Расположенная в них жидкость не участвует в транзитном движении потока, а затраченная на вихреобразование энергия необратимо переходит в тепло под действием сил трения. Примем схему входа в трубу меньшего сечения так, как показано на рис. 5.7. В этом случае потери внезапного сужения определяются коэффициентом  $\zeta_{\text{вн.с}}$ , который при развитом турбулентном движении зависит только от отношения площадей

$$\zeta_{\text{вн.с}} = 1 - \frac{S_2}{S_1}.$$

Это выражение было получено в предположении, что труба, входящая внутрь большей трубы, имеет нулевую толщину. В действительности труба имеет стенку конечной толщины и это учитывается в выражении для определения коэффициента потерь через множитель, который называется коэффициентом смягчения  $\eta$ :

$$\zeta_{\text{вн.с}} = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) \eta.$$

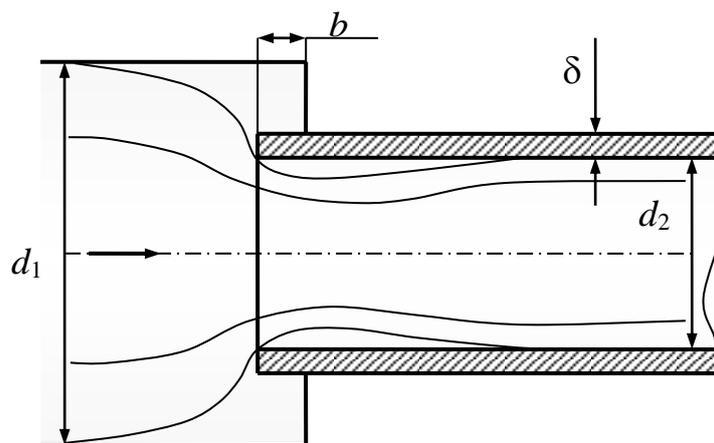


Рис. 5.7. Схема течения при внезапном сужении

С увеличением толщины стенки трубы коэффициент  $\eta$  убывает от 1 до 0,5. Такое изменение  $\eta$  наблюдается при относительной толщине трубы

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{d_2} \leq 0,05.$$

При дальнейшем росте  $\bar{\delta}$  коэффициент смягчения  $\eta$  не изменяется и остается равным 0,5.

Величина  $\zeta_{\text{вн.с}}$  увеличивается с ростом относительного расстояния  $\bar{b} = \frac{b}{d_2}$ , но только при  $0 < \bar{\delta} < 0,05$ .

В расчетах для длинных и коротких входов можно принимать:

$\eta = 1$  – для острых и длинных входных участков;

$\eta = 0,5$  – для тупых и коротких входных участков.

Предельным случаем внезапного сужения является вход в трубу из неограниченного пространства при  $S_1 = \infty$ , тогда  $\zeta_{\text{вн.с}} = \eta$ .

Величина  $\zeta_{\text{вн.с}}$  для острых входных кромок приведена в таблице 5.1.

Таблица 5.1

$S_2/S_1$	0,01	0,1	0,5	1,0
$\zeta_{\text{вн.с}}$	0,5	0,46	0,3	0

Если на входе имеются острые кромки, то обтекание их жидкостью приводит к сжатию транзитной струи в трубе (рис. 5.8).

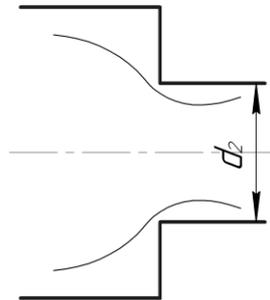


Рис. 5.8. Вход с острыми кромками

Если сделать вход хорошо обтекаемым (рис. 5.9), т. е. выполнить его по радиусу, причем с соотношением  $\frac{R}{d_2} \approx 0,2$ , то  $\zeta_{\text{вн.с}} \cong 0,03$ .

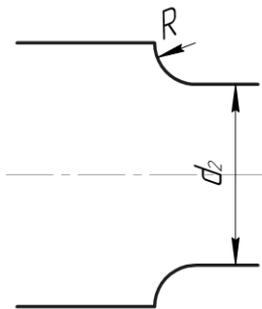


Рис. 5.9. Скругленный вход в трубу

Однако реализация подобного входа требует существенного увеличения затрат на изготовление.

Если вход в трубу конусный (рис. 5.10) и  $\ell/d_2 \approx 0,2$  то коэффициент потерь на внезапное сужение составляет  $\zeta_{\text{вн.с}} \cong 0,1$ .

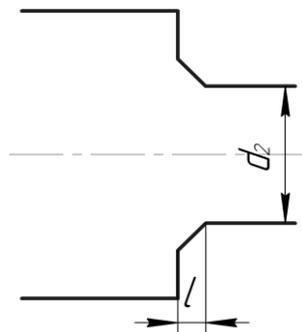


Рис. 5.10. Конусный вход в трубу

## 5.5. Потери энергии в диафрагмах

Диафрагма (рис. 5.11) представляет собой диск с отверстием диаметром  $d$ , установленный перпендикулярно направлению движения. Чаще всего ее используют как прибор для измерения расхода жидкости в трубах или в качестве дросселя для получения определенного расхода или давления в гидросистеме.

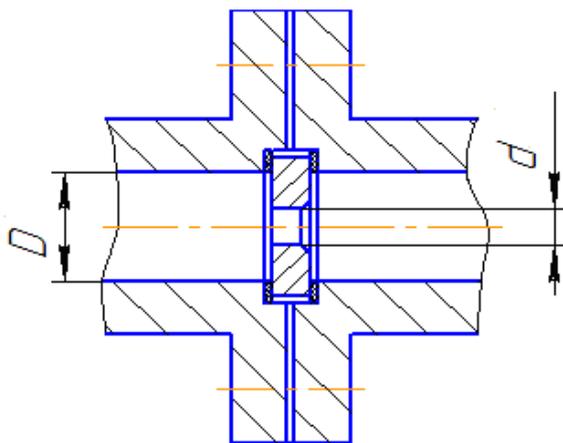


Рис. 5.11. Расходомерная диафрагма

Движение жидкости через диафрагму представляет собой пример сложного течения с внезапным сужением, сжатием транзитной струи и последующим внезапным расширением потока. Потери в диафрагме определяются формулой Вейсбаха

$$h_{\text{диафр}} = \zeta_{\text{д}} \frac{V^2}{2g}.$$

Скорость условно относят к сечению отверстия диафрагмы диаметром  $d$ . Потери в диафрагме складываются из потерь гидравлического трения, внезапного сужения и расширения:

$$h = h_{\text{тр}} + h_{\text{вн.с}} + h_{\text{вн.р}}.$$

В связи с тем, что толщина шайбы мала, потери по длине малы по сравнению с потерями внезапного сужения и внезапного расширения, т. е.

$$h_{\text{тр}} \ll h_{\text{вн.с}} + h_{\text{вн.р}}$$

Отдельно считать потери внезапного сужения и внезапного расширения, а потом их суммировать нельзя, т. к. эти два вида местных сопротивлений расположены в непосредственной близости друг от друга. Экспериментальные исследования диафрагм с острыми кромками дают следующие значения коэффициентов сопротивления (таблица 5.2):

Таблица 5.2

$d^2/D^2$	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0
$\zeta_{\text{д}}$	245	51,5	4,0	0,42	0

Диафрагма часто используется как гидравлическое дроссельное устройство для измерения расхода жидкостей и газов методом переменного перепада давления. Вместе с другими типами гидравлических сужающих устройств (расходомерное сопло, труба Вентури) ее использование регламентировано ГОСТ 8.563.1-97.

### 5.6. Постепенное расширение потока. Диффузорные потери

Потери энергии на внезапное расширение потока можно уменьшить, выполняя расширение постепенно (рис. 5.12).

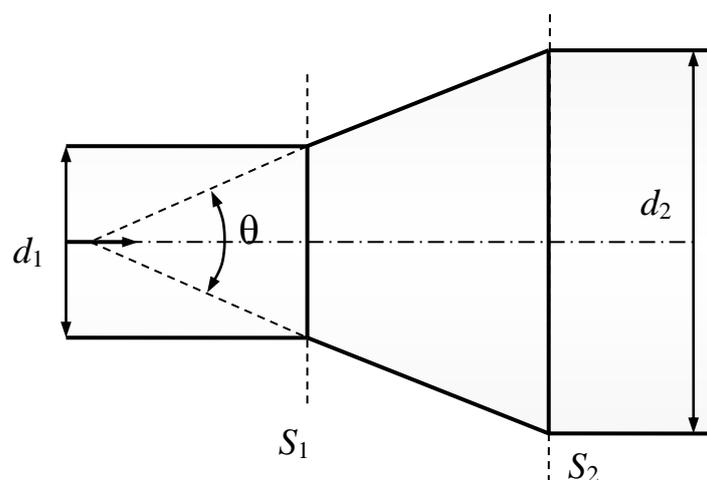


Рис. 5.12. Прямоосный диффузор

При постепенном увеличении сечения уменьшается средняя скорость движения потока и, в соответствии с уравнением Бернулли, возрастает давление.

Движение жидкости при котором уменьшается средняя скорость вдоль потока и возрастает давление называется диффузорным. Следовательно, в диффузоре происходит преобразование кинетической энергии в энергию давления. В гидромашинах этот процесс называют восстановлением давления.

Рассмотрим течение в диффузоре, когда жидкость движется в сторону возрастающего давления:  $\frac{dp}{d\ell} > 0$ . Вдоль диффузора частицы жидкости движутся против направления действия сил давления.

Это возможно за счет уменьшения их скорости и, соответственно, кинетической энергии. В пристеночном слое средние скорости меньше, чем в ядре потока и при больших градиентах давления запаса кинетической энергии частиц может не хватить для преодоления сил давления. В том месте пограничного слоя, где запас кинетической энергии жидкости будет исчерпан, скорость станет равной нулю ( $V = 0$ ). Производная скорости по нормали также станет равной нулю  $\frac{dV}{dn} = 0$ .

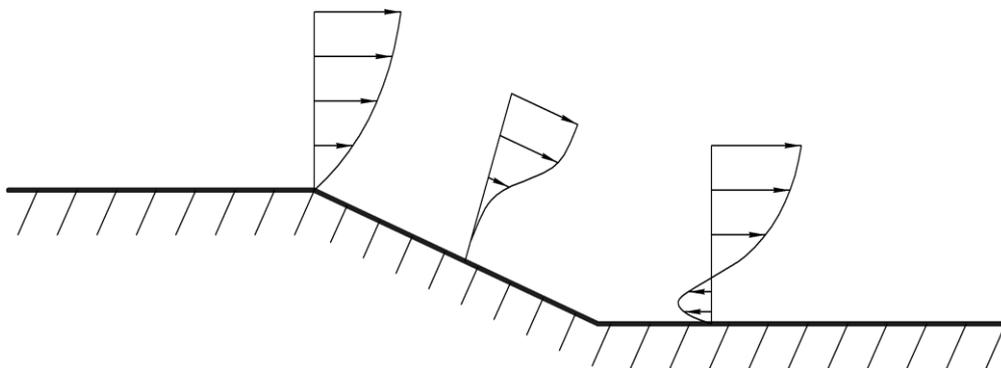


Рис. 5.13. Эпюры скоростей в пристеночной области диффузора

Далее по потоку (рис. 5.13) в пристеночной области частицы жидкости под действием сил давления начинают двигаться в сторону,

противоположному движению основного потока. Появляется зона отрыва потока от стенки диффузора. В этом месте образуется замкнутая водоворотная область жидкости, не участвующая в основном транзитном движении вдоль диффузора. Энергия потока, затраченная на вихреобразование, необратимо переходит в тепло, и представляет собой потери напора, возникающие при движении потока в диффузоре. Отрыв потока приводит к резкому возрастанию потерь. Образование и развитие зоны отрыва определяется положительным градиентом давления  $\frac{dp}{d\ell} > 0$  в направлении движения жидкости, т. е. степенью расширения диффузора, которая характеризуется углом его раскрытия  $\theta$ .

При  $\theta = 10^\circ \dots 15^\circ$  поток отрывается от одной из стенок, у которой скорость случайно оказалась меньше. Как только образовался отрыв, повышение давления в транзитном потоке прекращается, т. к. часть сечения при этом занимает водоворотная область, и увеличения давления не происходит. Вследствие этого скорость движения основного потока увеличивается и на другой стенке диффузора отрыв не образуется. Возникает несимметричность течения. Фактически – изменение скорости начинает соответствовать диффузору с большей длиной. Такое течение может быть неустановившимся. Основной поток может самопроизвольно (от случайных причин) перебрасываться от одной стенки к другой.

При  $\theta = 20^\circ \dots 25^\circ$  водоворотная область жидкости формируется уже вблизи входного сечения диффузора. При  $\theta = 50^\circ \dots 60^\circ$  (рис. 5.14) поток отрывается от обеих стенок одновременно, неравномерность скорости при таких углах раскрытия диффузора значительна и потери напора могут даже превосходить величину потерь при внезапном расширении.

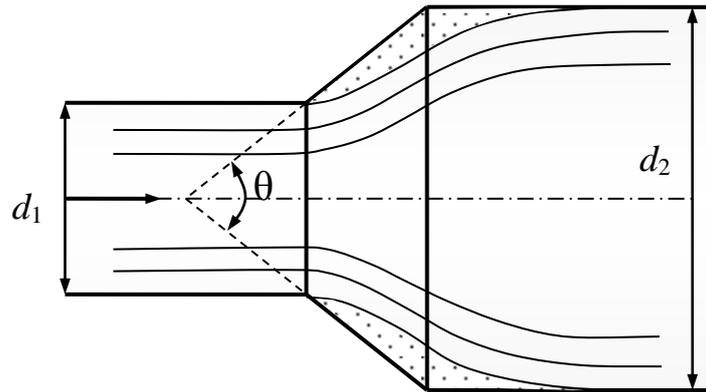


Рис. 5.14. Картина течения в диффузоре с отрывом потока

Потери в диффузоре складываются из потерь расширения потока и потерь на гидравлическое трение

$$h_{\text{диф}} = (\zeta_{\text{диф}} + \zeta_{\text{тр}}) \frac{V_{1\text{ср}}^2}{2g},$$

где  $V_{1\text{ср}}$  – средняя по живому сечению скорость на входе в диффузор.

Коэффициент потерь расширения зависит только от угла раскрытия диффузора  $\zeta_{\text{диф}} = f(\theta)$ , а коэффициент потерь на гидравлическое трение зависит еще и от длины диффузора  $\zeta_{\text{тр}} = f(\theta, \ell)$ .

Коэффициент потерь расширения можно вычислить по формуле:

$$\zeta_{\text{диф}} = m \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^2,$$

где  $m$  – опытный коэффициент, зависящий от угла раскрытия диффузора (таблица 5.3).

Таблица 5.3

$\theta$ , град.	7,5	10	20	30	40	60
$m$	0,13	0,17	0,42	0,70	1,03	1,18

Коэффициент потерь на трение по длине может быть определен по формуле:

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} \right),$$

где:  $\lambda$  – коэффициент Дарси для потока в трубе перед диффузором,  $\theta$  – угол раскрытия диффузора, град.

Если рассмотреть соотношение потерь на расширение и на гидравлическое трение, то при одном и том же отношении  $\frac{S_2}{S_1}$  с ростом

угла раскрытия потери на гидравлическое трение уменьшаются, т. к. уменьшается длина диффузора, потери расширения растут. На рис. 5.15 даны величины  $\zeta_{\text{диф}}$  и  $\zeta_{\text{тр}}$  в зависимости от угла раскрытия  $\theta$ . Из графика видно, что  $\zeta_{\text{диф}}$  может быть больше чем  $\zeta_{\text{вн.р.}}$ . Максимальные значения потерь на расширение будут при  $\theta = 50^\circ \dots 60^\circ$ , а минимум при  $\theta = 8^\circ \dots 10^\circ$ .

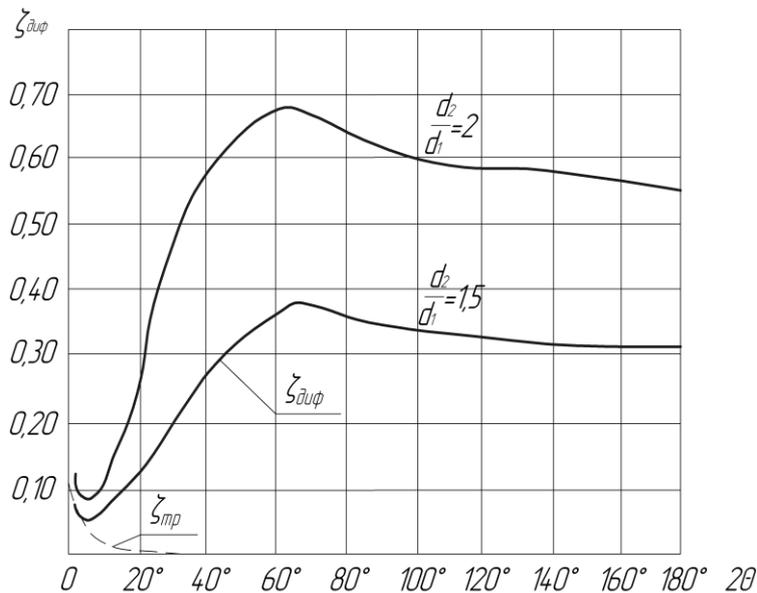


Рис. 5.15. Влияние угла раскрытия на коэффициенты потерь

Течение в диффузоре до значения угла раскрытия  $\theta = 10^\circ$  безотрывно. Исходя из этого, рекомендуется иметь угол раскрытия диффузора  $\theta = 8^\circ \dots 10^\circ$ , но не более чем  $40^\circ$ . При  $\theta > 40^\circ$  потери оказываются больше, чем при внезапном расширении до угла  $\theta = 180^\circ$ .

## 5.7. Постепенное сужение потока. Конфузорные потери

Постепенно сужающаяся труба называется конфузуром (рис. 5.16).

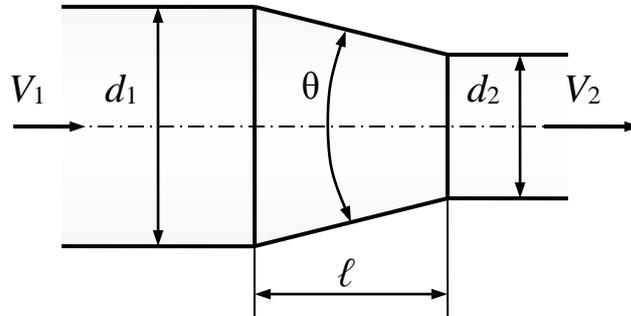


Рис. 5.16. Прямоосный конфузор

При движении жидкости в конфузуре вдоль потока средняя скорость возрастает, а давление снижается (градиент давления  $\frac{dp}{d\ell} < 0$ ).

Коэффициент сопротивления прямоосного конфузуров круглого сечения определяется формулой:

$$\zeta_{\text{конф}} = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right),$$

где  $n = d_1^2 / d_2^2$  – степень сужения конфузуров ( $n > 1$ );  $\lambda_{\text{ср}}$  – среднее значение коэффициента Дарси для подводящей и отводящей труб;  $\theta$  – угол конусности.

Для коротких конфузуров  $\left( \frac{\ell}{d_1} \leq 3 \right)$  с плавными переходами

$$\zeta = 0,05 \dots 0,005.$$

Поскольку движение жидкости в конфузуре сопровождается понижением давления, то отрыв потока, как правило, отсутствует. Однако отрыв возможен при резком изменении площади живого сечения. Так при больших углах конусности появляются потери, анало-

гичные потерям на внезапное сужение, в углах трубы возникают вихревые зоны (рис. 5.17).

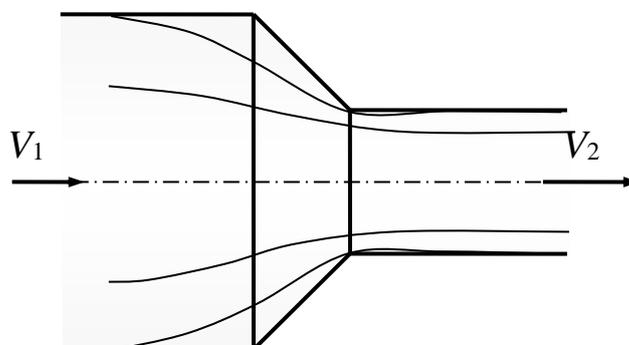


Рис. 5.17. Зоны отрыва в конфузоре

В 1965 г. Б.И. Яньшиным была экспериментально получена зависимость коэффициента потерь от угла конусности при различных отношениях диаметров для конфузоров с прямолинейными образующими. Полученные результаты показывают, что существуют три области изменения  $\zeta = f(\theta)$  (рис. 5.18).

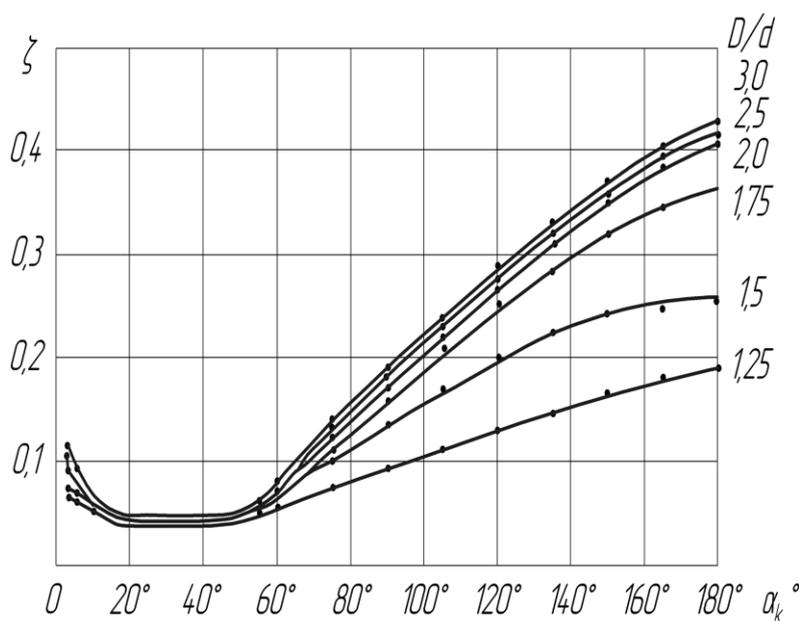


Рис. 5.18. Коэффициент потерь конических конфузоров по исследованиям Б.И. Яньшина

До значений  $\theta=15^\circ$  коэффициент потерь  $\zeta$  с ростом  $\theta$  убывает. В интервале значений  $\theta=15^\circ \dots 55^\circ$  коэффициент  $\zeta$  остается примерно постоянным. При  $\theta > 55^\circ$  коэффициент  $\zeta$  интенсивно растет по закону, близкому к линейному.

### 5.8. Потери удельной энергии при повороте потока

Поворот трубы обычно называют коленом. Поворот потока в колене сопровождается возникновением двух вихревых зон на внешней и внутренней сторонах угла (рис. 5.19).

Поворот представляет собой движение основного потока вокруг некоторого центра кривизны по закону  $V \cdot r = \text{const}$ . Таким образом скорость возрастает обратно пропорционально радиусу кривизны линии тока. Поэтому у внутренней поверхности скорость больше (давление меньше), а у внешней поверхности скорость меньше (давление больше). Следовательно, кривизна линии тока является причиной образования поперечного градиента давления в соответствии с уравнением

$$N - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dn} = \frac{V^2}{r}.$$

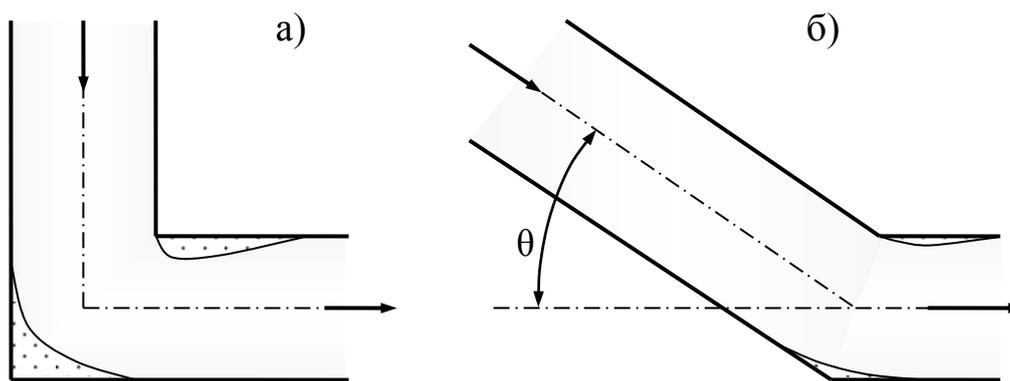


Рис. 5.19. Поворот потока в колене:  
а – резкий; б – плавный

В ядре потока центробежные силы инерции за счет кривизны линий тока уравновешиваются возникающим поперечным перепадом

давления. В пристеночном слое скорости падают до нуля на стенках за счет трения и инерционные силы в области пограничного слоя уже не уравнивают перепада давления. Вследствие этой неуравновешенности на боковых стенках колена в пристеночном слое возникает вторичное течение, которое приводит к циркуляции потока в поперечном сечении колена в целом (рис. 5.20). Такое течение называется парным вихрем. Циркуляционное движение в поперечной плоскости накладывается на основное (транзитное) движение жидкости в колене. В результате, частицы жидкости в колене движутся по сложным винтовым траекториям.

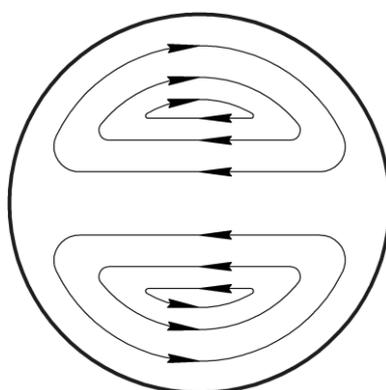


Рис. 5.20. Парный вихрь в поперечном сечении колена

Если улучшение работы колена не может быть достигнуто за счет увеличения радиуса поворота, то уменьшения потерь можно добиться установкой в колене направляющих лопаток (рис. 5.21).

Рационально подобранные лопатки полностью устраняют отрыв потока от стенок канала и обеспечивают равномерное распределение скорости за поворотом.

Действие направляющих лопаток основано на двух гидродинамических особенностях.

Во-первых, лопатки образуют гидродинамическую решетку, за которой возникает скос потока к внутренней поверхности канала, что снижает или полностью ликвидирует отрыв.

Во-вторых, лопатки делят поток на ряд зон с большими относительными радиусами поворота, что ведет к уменьшению зон отрыва и потерь.

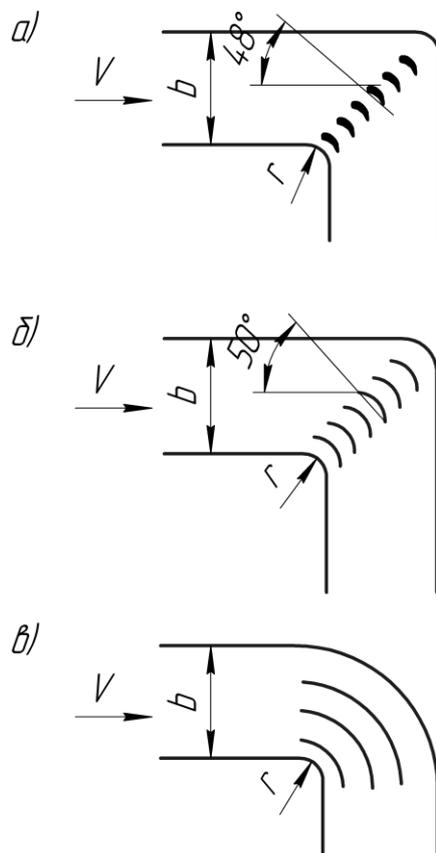


Рис. 5.21. Схемы колен и отводов с направляющими лопатками:  
*a* – профилированные; *б* – тонкие, изогнутые по цилиндрической поверхности; *в* – тонкие концентрические

Лопатки применяют как профилированные, так и тонкие, изогнутые из листового материала. Первые более сложны в изготовлении и применяются в установках, где равномерность поля скоростей играет решающую роль. Так как отрыв происходит около внутренней стенки, то лопатки в этом районе устанавливаются чаще. В колене с нулевым радиусом скругления установка лопаток дает снижение коэффициента  $\zeta$  до величины 0,3, т. е. уменьшает его примерно в четыре раза. При  $r = 0,3b$  колено с профилированными лопатками обладает минимальным коэффициентом сопротивления  $\zeta = 0,12$ , колено без лопаток при этом имеет  $\zeta = 0,35$ .

При дальнейшем увеличении  $r/b$  выигрыш от установки профилированных лопаток снижается и при  $r > 0,5b$  их установка с точки зрения уменьшения потерь нерациональна. Для колен с тонкими лопатками и скругленной внутренней кромкой  $\zeta = 0,11$ , а в колене с острой наружной кромкой и срезанной внутренней  $\zeta = 0,32$ ; при обеих срезанных кромках  $\zeta = 0,40$ .

Потери при повороте в колене рассчитываются по обычной формуле:

$$h_{\text{пов}} = \zeta_{\text{пов}} \frac{V^2}{2g}.$$

Для колен, имеющих  $\theta \geq 15^\circ$  (см. рис. 5.19,б),  $\zeta$  зависит от угла поворота  $\theta$  и радиуса поворота. Для определения коэффициента потерь колена в квадратичной зоне имеется график (рис. 5.22). При  $\theta = 90^\circ$   $\zeta = 1,25$ .

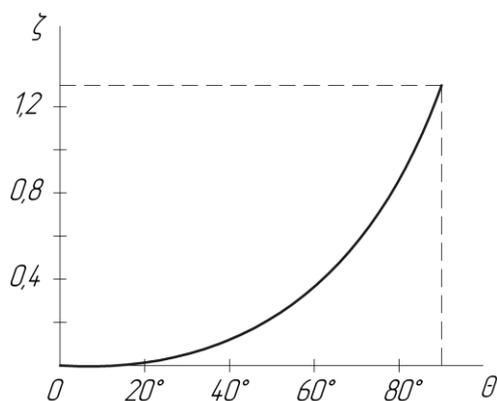


Рис. 5.22. Коэффициент потерь в колене

Для определения сопротивления круговых колен (рис. 5.23) используется формула Вейсбаха:

$$\zeta = \left[ 0,31 + 0,16 \left( \frac{d}{2} \right)^{3,5} \right] \frac{\theta}{90^\circ}.$$

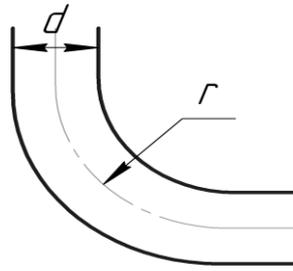


Рис. 5.23. Плавное круговое колено

Для чугунных водопроводных труб с углами поворота  $\theta=90^\circ$  в зависимости от  $r/d$  и  $d$  величины коэффициента потерь приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4

$d$ , мм	50	75	100	125	150	200	250	300	400	500
$r/d$	2,0	1,7	1,65	1,55	1,43	1,33	1,05	0,9	0,9	0,92
$\zeta$	0,15	0,16	0,165	0,17	0,18	0,20	0,28	0,38	0,38	0,35

### 5.9. Дросселирующие устройства

Дросселирующие устройства предназначены для создания больших постоянных или регулируемых сопротивлений. Первые предназначены для разделения областей с высоким и низким давлением (различные виды уплотнений). Вторые – для регулирования расхода жидкости. Это всевозможные задвижки, краны и другие запорные устройства.

Рассмотрим дросселирующие устройства, предназначенные для регулирования расхода жидкости. Их сопротивление зависит от двух факторов:

- от конструкции запорного органа, т. е. от формы проточной части;
- от величины открытия дросселирующего устройства.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы запорных устройств.

Задвижка Лудло (клинкет). При полном открытии задвижки, когда  $h = d_y$  (рис. 5.24), и режиме движения жидкости, соответствующему квадратичной области сопротивления, коэффициент потерь  $\zeta$  определяется по графику (рис. 5.25).

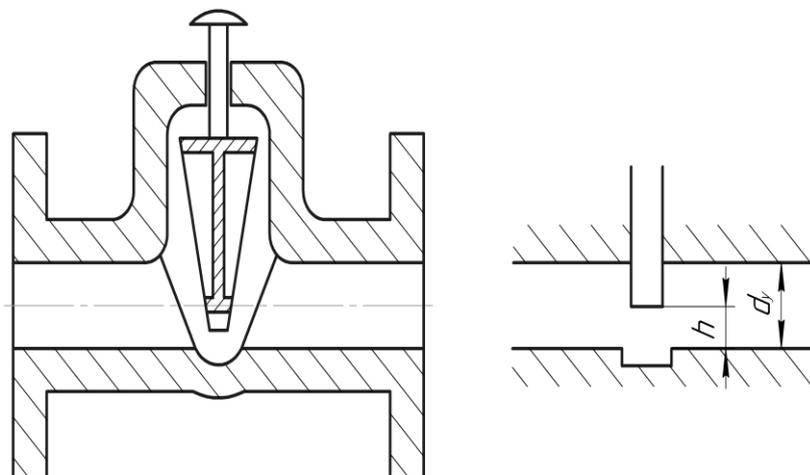


Рис. 5.24. Конструктивная схема задвижки Лудло

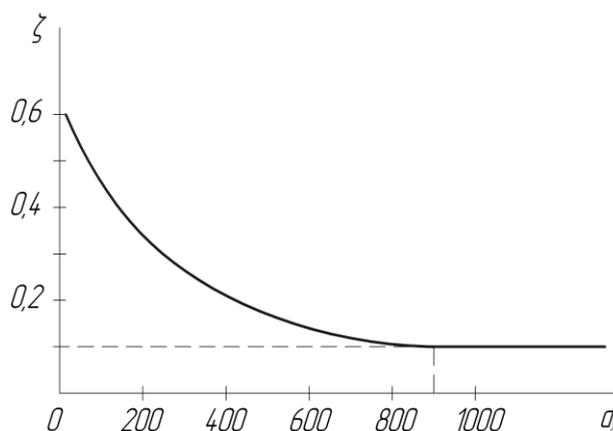


Рис. 5.25. Коэффициент потерь задвижки Лудло

При изменении степени открытия коэффициент потерь изменяется (таблица 5.5).

Таблица 5.5

$h/d$	1	0,4	0,25	0,15	0
$\zeta$	$\approx 0,15$	4	16	24	$\infty$

Для труб небольшого диаметра применяются шаровые краны (рис. 5.26).

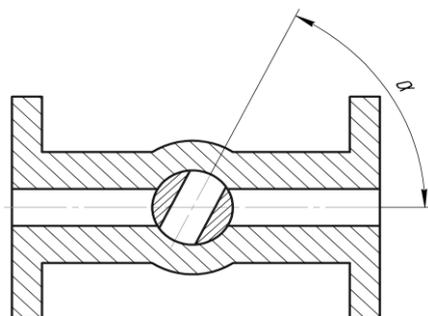


Рис. 5.26. Конструктивная схема шарового крана

Как правило, краны выполняются так, что при полном открытии, т. е. при  $\alpha=0$  коэффициент местных потерь  $\zeta=0$ . В зависимости от угла  $\alpha$  коэффициент  $\zeta$  представлен таблице 5.6.

Таблица 5.6

$\alpha$	5	10	30	50	65	82,5
$\zeta$	0,05	0,29	5,47	52,6	485	$\infty$

Для регулирования расхода жидкости часто используются вентили (рис. 5.27).

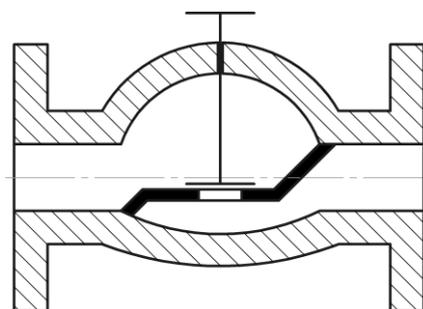


Рис. 5.27. Конструктивная схема вентиля

При полном открытии  $\zeta=9...12$  для  $d_y=25$  мм и  $\zeta=7...8$  для  $d_y=50$  мм.

В системах регулирования широко используют клапаны (рис. 5.28). Существует множество конструкций клапанов, определяемых их назначением. В зависимости от назначения коэффициент сопротивления клапана изменяется от 1 до  $\infty$ .

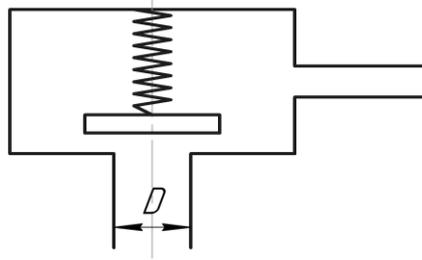


Рис. 5.28. Гидравлическая схема клапана

Часто в насосах на всасывании ставят всасывающие клапаны, состоящие из защитной сетки и обратного клапана (рис. 5.29). Клапаны стандартизованы, коэффициент потерь зависит от диаметра проходного сечения (таблица 5.7).

Таблица 5.7

$d$ , м	0,04	0,07	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75
$\zeta$	12	8,5	7,0	6,0	5,2	3,7	2,5	1,6

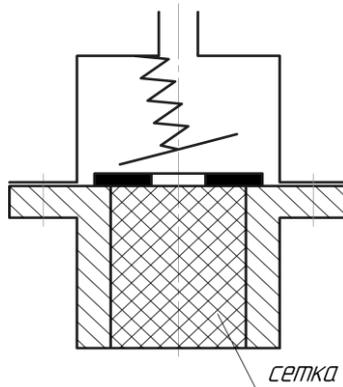


Рис. 5.29. Всасывающий клапан с сеткой

Лабиринты служат для создания наибольшего значения коэффициента сопротивления, т. к. они должны обеспечить минимальный расход при заданном давлении. Лабиринты применяют, например, в качестве уплотнений вала гидромашин (рис. 5.30).

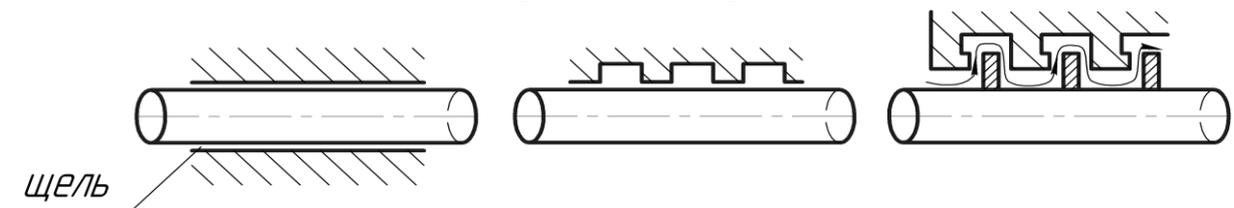


Рис. 5.30. Щелевые и лабиринтные уплотнения

Коэффициент сопротивления лабиринта складывается из суммы коэффициентов сопротивлений отдельных элементов:

$$\zeta = n(m\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}} + \zeta_{\text{тр}}),$$

где  $n$  – число элементов лабиринтного уплотнения;  $m$  – коэффициент смягчения на входе.

При конструировании лабиринтов, как было сказано выше, стремятся к получению максимально возможной величины коэффициента потерь  $\zeta$ . Поэтому все кромки лабиринта выполняют острыми. Обычно расчет лабиринтов сводят к расчету протечек (расхода) через лабиринт под действием заданного перепада давления.

Очевидно, что установится такой расход через лабиринт, при котором сумма потерь удельной энергии  $h_{\text{лаб}}$  от протечек через него будет равна заданному перепаду  $\frac{\Delta p}{\rho g}$ :

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h_{\text{лаб}} = \zeta_{\text{лаб}} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} = \zeta_{\text{лаб}} \frac{Q^2}{2gS_{\text{щели}}^2},$$

откуда

$$Q = S_{\text{щели}} \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta p}{\rho g \zeta_{\text{лаб}}}} = \mu S_{\text{щели}} \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}},$$

где  $\mu = \sqrt{\frac{1}{\zeta_{\text{лаб}}}}$  – коэффициент расхода щели.

## ГЛАВА 6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

### 6.1. Истечение через малое отверстие при постоянном напоре

При истечении жидкости через отверстие потенциальная энергия, которой обладает жидкость в резервуаре, переходит в кинетиче-

скую энергию струи. Этот процесс сопровождается гидравлическими потерями.

Рассмотрим истечение жидкости из круглого отверстия в тонкой вертикальной стенке при постоянном напоре в атмосферу (рис. 6.1). Предположим, что диаметр отверстия мал, и уровень свободной поверхности в резервуаре поддерживается постоянным. Также положим, что отверстие для истечения расположено достаточно далеко от края резервуара и от свободной поверхности, тогда стенки и свободная поверхность не влияют на подход жидкости к отверстию. Частицы жидкости приближаются к отверстию из всего близлежащего объема.

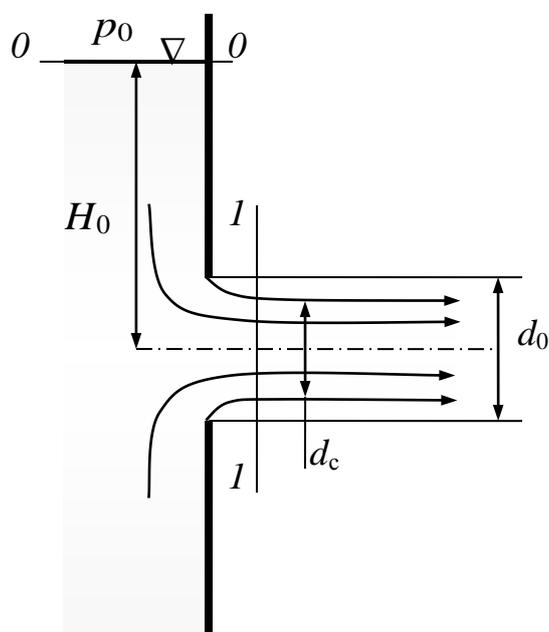


Рис. 6.1. Схема истечения через малое отверстие

На входе в отверстие образуется струя, которая отрывается от входной кромки отверстия, что приводит к сжатию струи на участке от входа в отверстие до сечения, где струя принимает цилиндрическую форму с диаметром  $d_c$ . Причиной этого служит инерционность частиц жидкости,двигающихся к отверстию из резервуара по радиальным направлениям. Стремясь сохранить по инерции направление движения, они огибают кромки отверстия и образуют струю с участком сжатия. Затем струя принимает цилиндрическую форму. Если

стенки сосуда и свободная поверхность не оказывают влияния на истечение жидкости из отверстия, то сжатие струи называют совершенным.

Пусть площадь отверстия  $S_0$ , а площадь струи –  $S_c$ . Степень сжатия струи оценивается коэффициентом сжатия (см. рис. 6.1)

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \left( \frac{d_c}{d_0} \right)^2. \quad (6.1)$$

Найдем скорость, и расход истечения при совершенном сжатии струи. Рассмотрим резервуар с отверстием в тонкой стенке, из которого происходит истечение. Пусть отверстие находится на глубине  $H_0$  от свободной поверхности, абсолютное давление на которой  $p_0$  (см. рис. 6.1).

Составим уравнение Бернулли для сечений на свободной поверхности жидкости (сечение 0–0), и в поперечном сечении струи там, где струя приняла цилиндрическую форму (сечение 1–1):

$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \zeta \frac{V_1^2}{2g}.$$

Можно принять, что  $V_0 \approx 0$ , т. к. площадь поверхности резервуара велика по сравнению с площадью отверстия, тогда:

$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} = (\zeta + \alpha_1) \frac{V_1^2}{2g}. \quad (6.2)$$

Левую часть уравнения (6.2) назовем расчетным напором истечения

$$H = H_0 + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}.$$

Выразим напор истечения из уравнения (6.2):

$$H = (\zeta + \alpha_1) \frac{V_1^2}{2g},$$

откуда скорость в сечении 1–1:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}} \sqrt{2gH}. \quad (6.3)$$

Первый множитель в формуле (6.3)

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}}$$

называют коэффициентом скорости. Этот коэффициент учитывает неравномерность распределения скоростей в сжатом сечении, а также гидравлические потери ( $\varphi < 1$ ). Если предположить, что  $\alpha_1 = 1$  и  $\zeta = 0$ , то  $\varphi = 1$  и скорость примет значение некоторой теоретической скорости

$$V_{\text{теор}} = \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, коэффициент скорости  $\varphi$  есть отношение:

$$\varphi = \frac{V_1}{V_{\text{теор}}},$$

т. е. отношение действительной скорости истечения  $V_1$  к теоретической скорости  $V_{\text{теор}}$ .

Расход истечения определяется из соотношения:

$$Q = S_c V_1 = S_0 \varepsilon \varphi \sqrt{2gH}.$$

Произведение коэффициента сжатия  $\varepsilon$  и коэффициента скорости  $\varphi$  называется коэффициентом расхода  $\mu$ . Тогда формула для расхода:

$$Q = \mu S_0 \sqrt{2gH}. \quad (6.4)$$

Поскольку при движении реальной жидкости  $\varepsilon < 1$  и  $\varphi < 1$ , то коэффициент расхода всегда меньше единицы  $\mu < 1$ .

Коэффициент расхода

$$\mu = \frac{Q}{Q_{\text{теор}}}$$

представляет собой отношение действительного расхода к теоретическому, т. е. к такому расходу, который имел бы место при отсутствии

сжатия струи и гидравлических потерь при истечении. Коэффициент  $\mu$  обычно определяется экспериментально. Его величина, также как  $\varepsilon$  и  $\varphi$ , зависит от вида отверстия и режима движения жидкости.

## 6.2. Истечение через насадки при постоянном напоре

Исследование истечения жидкости из отверстий с острой кромкой показало их малую пропускную способность. Наибольшее значение коэффициента расхода при истечении через них  $\mu = 0,65 \dots 0,7$ . С помощью фаски (рис. 6.2) его можно увеличить до  $\mu = 0,74$ .

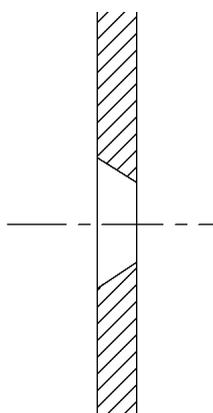


Рис. 6.2. Отверстие с фаской на входе

Еще большего увеличения коэффициента расхода можно достичь, если использовать для истечения короткие патрубки, которые называются насадками. Внешним цилиндрическим насадком (насадком Вентури) называется короткая трубка с диаметром, равным диаметру отверстия, установленная под прямым углом с внешней стороны резервуара. Длина насадка обычно составляет  $\ell = (3 \dots 4)d$ , при этом его входную кромку принимают острой (рис. 6.3). Такой же характер движения может возникать в отверстии малого диаметра в толстой стенке резервуара.

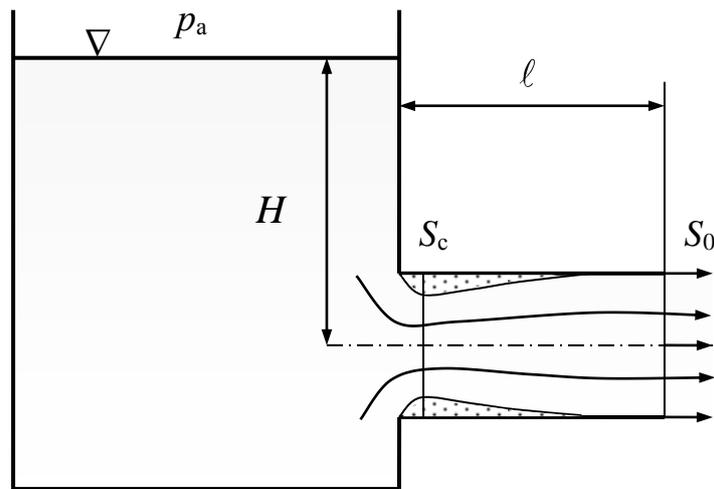


Рис. 6.3. Истечение через внешний цилиндрический насадок

Жидкость, попадая из резервуара в насадок, образует в области входа сжатую струю, сечение которой  $S_c$ , благодаря острой кромке, значительно меньше площади насадка  $S_0$ . Далее струя расширяется, заполняя все поперечное сечение насадка. На входе между транзитной струей и стенкой насадка образуется кольцевая водоворотная зона. В этой зоне давление понижается и в струе создается вакуум, который увеличивает напор истечения  $H$ . Скорость в сжатом сечении увеличивается по сравнению с истечением через отверстие с острой кромкой. Насадок как бы «подсасывает» жидкость. На выходе транзитная струя заполняет все поперечное сечение насадка, поэтому здесь  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = \varphi$ .

Длина насадка выбирается из следующих соображений. Максимальная длина должна быть такой, чтобы потери на гидравлическое трение при движении жидкости по нему были пренебрежимо малы и намного меньше потерь на входе в него. Минимальная длина насадка выбирается так, чтобы струя успела расшириться и примкнуть к стенкам, т. к. в противном случае струя минует насадок, и истечение будет происходить так же, как и истечение из отверстия в тонкой стенке. Такое явление называется срывом истечения через насадок.

Скорость и расход истечения определяются по тем же форму-

лам, что и при истечении из отверстий, т. е.

$$V = \varphi \sqrt{2gH},$$
$$Q = \mu S_0 \sqrt{2gH}.$$

Кроме цилиндрических насадков применяются внешние коноидальные, а также конические сходящиеся и конические расходящиеся насадки.

Внутренняя поверхность коноидальных насадков очерчена приблизительно по форме струи, выходящей из отверстия, благодаря этому обеспечивается безотрывность течения и параллельноструйность в выходном сечении насадка. Этот тип насадков называют соплами. Сопла имеют коэффициент расхода, близкий к 1 и очень малые потери.

В коническом сходящемся насадке (рис. 6.4) явление внутреннего сжатия сказывается меньше, чем в цилиндрическом, но появляется небольшое сжатие струи на выходе из насадка.

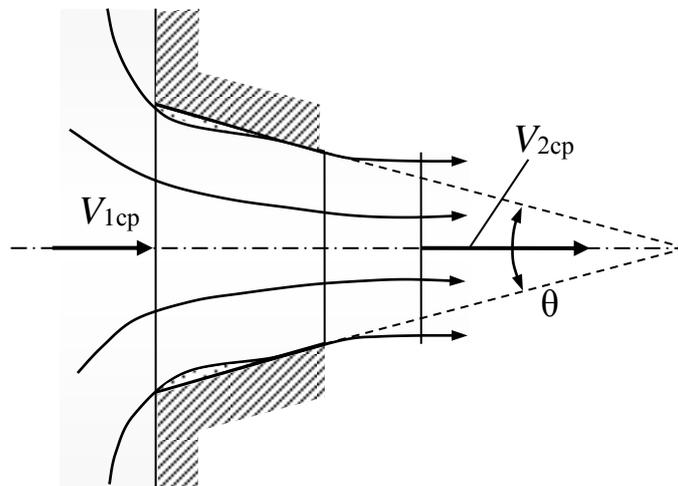


Рис. 6.4. Схема конического сходящегося насадка

При малых углах конусности коэффициент расхода сначала увеличивается, достигая максимума при угле  $\theta$  примерно  $13^\circ$ , а затем начинает снижаться.

Из конического сходящегося насадка выходит компактная струя, обладающая большой кинетической энергией. Это определило

его применение в качестве наконечника пожарного шланга (брандспойта).

В коническом расходящемся насадке (рис. 6.5) расширение струи происходит более резко, чем в цилиндрическом. Вакуум в сжатом сечении больше, чем у цилиндрического и движение жидкости имеет диффузорный характер.

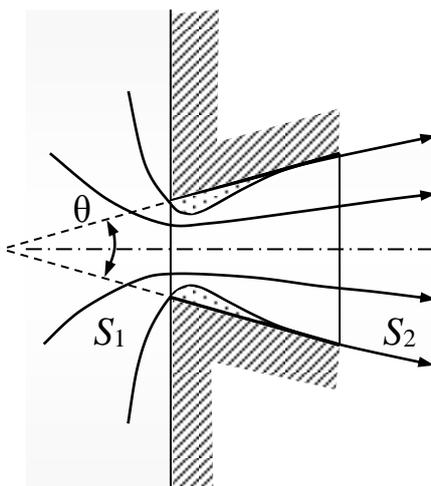


Рис. 6.5. Схема конического расходящегося насадка

Гидравлическое сопротивление расходящегося насадка больше, а коэффициент скорости  $\varphi$  меньше, чем у цилиндрического. Угол конусности  $\theta$  расходящегося насадка круглого сечения не должен превышать  $5...7^\circ$ . В противном случае наступает срыв вакуума и насадок перестает работать полным сечением.

## ГЛАВА 7. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

### 7.1. Классификация трубопроводов

Назначение трубопроводов состоит в транспортировке жидкости от источника к потребителю. Гидравлический расчет трубопроводов является одной из основных задач практической гидравлики. Движение жидкости в трубопроводах происходит под действием разности удельных энергий в питающем и приемном резервуарах. Эту разность

называют расчетным напором истечения  $H$ . Если напор истечения не изменяется во времени, то движение жидкости в трубопроводе установившееся. В зависимости от конфигурации трубопровода движение жидкости в нем может быть близким к равномерному (прямолинейные участки постоянного диаметра, выполненные из одного материала), и неравномерным (участки местных гидравлических сопротивлений и стабилизации потока). На каждом из этих участков происходят потери напора.

Трубопроводы классифицируют следующим образом:

1. По соотношению потерь на участках равномерного и неравномерного движения трубопроводы подразделяют на длинные и короткие. Длинными трубопроводами называют такие, у которых потери в местных гидравлических сопротивлениях не превышают 5% суммарных потерь на трение по длине трубопровода. При расчете таких трубопроводов определяют суммарные потери напора на гидравлическое трение, и общие потери увеличивают на (5...10)%.

Все остальные трубопроводы считают короткими. В коротких трубопроводах потери напора в местных гидравлических сопротивлениях сопоставимы с потерями трения по длине, поэтому в расчетах учитывают обе категории потерь.

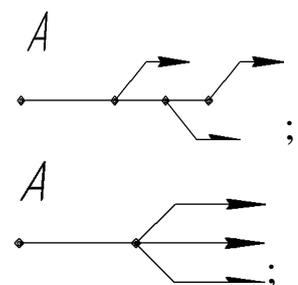
2. По гидравлической схеме трубопроводы подразделяют на:

а) простые – трубопроводы, не имеющие ответвлений, состоящие из труб (в общем случае различного диаметра), по которым проходит одинаковый расход;

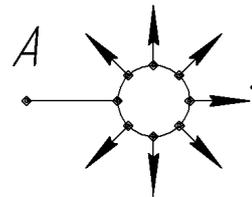
б) сложные – трубопроводы, имеющие ответвления, среди которых выделяют:

- разветвленные

- параллельные



- кольцевые с непрерывной раздачей жидкости



Трубопроводы могут работать при постоянном и переменном напоре в питающем  $A$  и приемном резервуарах. Мы будем рассматривать случаи постоянного напора истечения.

При расчете трубопроводов решают три основные задачи:

- определение расхода  $Q$  при заданном напоре истечения  $H$ , диаметре трубопровода  $d$ , абсолютной шероховатости стенок трубы  $\Delta$  и известной длине трубы  $\ell$ ;

- определение требуемого напора  $H$  при заданном расходе  $Q$ , диаметре трубопровода  $d$ , абсолютной шероховатости стенок трубы  $\Delta$  и известной длине трубы  $\ell$ ;

- определение требуемого диаметра  $d$  при заданных расходе  $Q$ , напоре истечения  $H$ , абсолютной шероховатости стенок трубы  $\Delta$  и известной длине трубы  $\ell$ .

Все эти задачи решаются при условии, что плотность  $\rho$  и кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  движущейся по трубопроводу жидкости известны. Также предполагается, что жидкость однофазная и ее движение установившееся. При решении каждой из этих задач используется уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности.

## 7.2. Расчет простого короткого трубопровода постоянного сечения

В коротких трубопроводах потери напора в местных гидравлических сопротивлениях соизмеримы с потерями на трение по длине трубопровода. При этом потери напора в местных сопротивлениях можно суммировать только в случае, когда местные сопротивления отстоят друг от друга на достаточном расстоянии ( $\ell \geq 10d$ ) и их влия-

ние друг на друга незначительно. В противном случае распределение скоростей перед следующим местным сопротивлением будет неравномерным и коэффициенты потерь, приводимые в справочниках, требуют коррекции.

Расчет простого короткого трубопровода рассмотрим на следующем примере. Пусть жидкость поступает в трубопровод из питающего резервуара большого объема, на свободной поверхности которого давление атмосферное. На выходе из трубопровода диаметром  $d$  струя жидкости истекает в атмосферу (рис. 7.1).

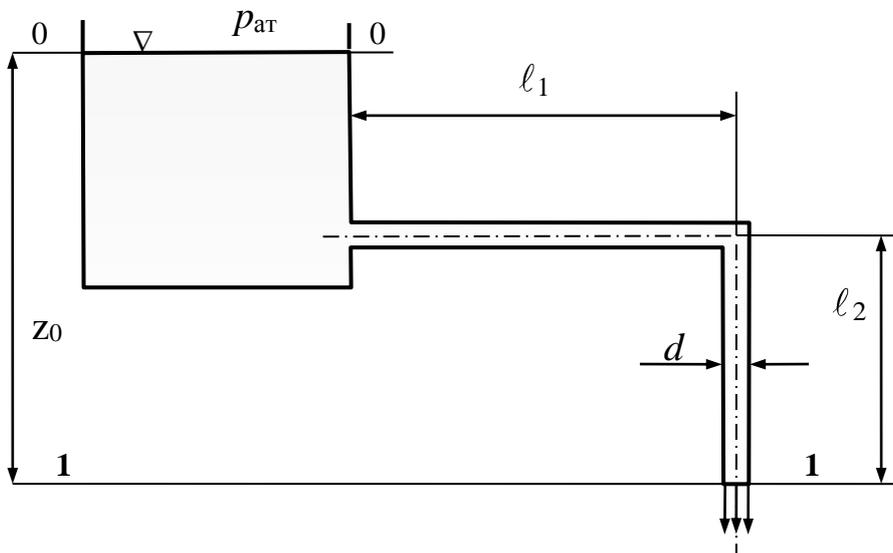


Рис. 7.1. Схема истечения через простой короткий трубопровод

Выберем два контрольных сечения 0–0 на свободной поверхности резервуара и 1–1 на срезе трубы и составим уравнение Бернулли для движения реальной жидкости между этими сечениями:

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_{0\text{ср}}^2}{2g} + z_0 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_{1\text{ср}}^2}{2g} + z_1 + \sum h.$$

Предположим, что площадь свободной поверхности жидкости в питающем резервуаре  $S_0 \gg \frac{\pi d^2}{4}$ , тогда  $V_0 = \frac{Q}{S_0} \approx 0$ .

Примем за плоскость сравнения поверхность 1-1, на которой  $z_1 = 0$ , тогда

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho g} + z_0 = \frac{\alpha_1 V_{1cp}^2}{2g} + \sum h.$$

Если давление на свободной поверхности питающего резервуара равно атмосферному и истечение происходит в атмосферу, то  $p_0 = p_1 = p_{ат}$ , и  $H = z_0$ . Тогда уравнение Бернулли примет вид

$$H = \frac{\alpha_1 V_{1cp}^2}{2g} + \sum h.$$

Следовательно, напор истечения затрачивается на создание скоростного напора на выходе и на преодоление гидравлических потерь в трубопроводе.

Потери напора в коротком трубопроводе складываются из потерь гидравлического трения по длине трубопровода и потерь в местных гидравлических сопротивлениях. Используя принцип наложения потерь, когда потери в местных гидравлических сопротивлениях не влияют друг на друга, будем иметь

$$\sum h = h_{тр} + \sum_{i=1}^n h_{мест.i}$$

где  $n$  – количество местных сопротивлений на данном участке трубопровода.

Потери гидравлического трения по длине трубопровода определяются формулой Дарси-Вейсбаха

$$h_{тр} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{1cp}^2}{2g},$$

где  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  – полная длина участка трубопровода постоянного сечения диаметром  $d$ .

Потери в местных гидравлических сопротивлениях, при условии, что между ними длина трубопровода больше, чем длина влияния местного сопротивления  $\ell_{вл}$ , складываются из потерь напора на входе  $h_{вх}$  и потерь в поворотном колене  $h_{пов}$ :

$$\sum h_{\text{мест}} = h_{\text{вх}} + h_{\text{пов}} .$$

Потери в каждом местном сопротивлении определяются формулой Вейсбаха

$$h_{\text{мест}.i} = \zeta_i \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} ,$$

где  $V_{\text{ср}}$  – средняя скорость транзитного потока в трубопроводе;  $\zeta_i$  – коэффициент потерь каждого местного сопротивления.

Определим сумму потерь в местных сопротивлениях данного трубопровода:

$$\sum h_{\text{мест}} = (\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}}) \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} .$$

Общие потери напора составят

$$\sum h = \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} .$$

Тогда для напора истечения получим выражение

$$H = \left( \alpha_1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} . \quad (7.1)$$

На основе уравнения (7.1) можно решать все 3 упомянутые выше задачи:

1. При заданном расходе  $Q$  и параметрах трубопровода  $d$ ,  $\Delta$ ,  $\ell$  – определить необходимый напор истечения  $H$ .
2. При заданном напоре  $H$  и параметрах трубопровода  $d$ ,  $\Delta$ ,  $\ell$  – определить расход  $Q$ .

Поскольку средняя скорость транзитного потока  $V_{\text{ср}} = Q/S$ , то выражение (7.1) можно привести к виду:

$$H = \left( \alpha_1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{Q^2}{2gS^2} .$$

Выразим расход из последнего уравнения:

$$Q = \frac{S\sqrt{2gH}}{\sqrt{\alpha_1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i}}.$$

Соотношение

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i}},$$

называют коэффициентом расхода и используют для расчета коротких трубопроводов. В этом случае для определения расхода используют формулу

$$Q = \mu S \sqrt{2gH}.$$

Так как в общем случае  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $\zeta$  зависят от режима работы, т. е. от числа  $Re$ , задача может быть решена только способом последовательных приближений.

Обычно расчет начинают с предположения о том, что движение жидкости турбулентное и соответствует квадратичной зоне сопротивления. Из этого условия задаются значением  $\lambda$ . Определив расход  $Q$  и среднюю скорость  $V_{cp}$ , вычисляют  $Re = \frac{V_{cp}d}{\nu}$ . Если число  $Re$  не соответствует квадратичной зоне, то делают второе приближение для полученного числа Рейнольдса и т. д.

3. При заданных  $Q$ ,  $H$ ,  $\Delta$ ,  $\ell$  – определить диаметр трубопровода  $d$ .

Выразим площадь сечения трубопровода через его диаметр, тогда для напора истечения получим

$$H = \left( \alpha_1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4}. \quad (7.2)$$

В уравнение (7.2) входит диаметр в 5-й степени. Решение такого уравнения связано с определенными трудностями. Поэтому обычно в практических расчетах задаются несколькими произвольными диа-

метрами, для которых при выбранном напоре  $H$  определяют значения расходов. Затем строят график  $Q = f(d)$ , по которому определяют требуемый диаметр. Диаметры трубопроводов стандартизованы, поэтому рассчитанный диаметр округляют до ближайшего стандартного, после чего уточняется расход.

### 7.3. Расчет простого короткого трубопровода переменного сечения

Рассмотрим трубопровод, состоящий из двух участков труб различного диаметра (рис. 7.2). Пусть на первом участке имеется  $m$ , а на втором  $n$  местных сопротивлений, допустим, что резервуар открыт, жидкость вытекает в атмосферу. Тогда  $p_1 = p_2 = p_{\text{ат}}$  и  $p_2 - p_1 = 0$ .

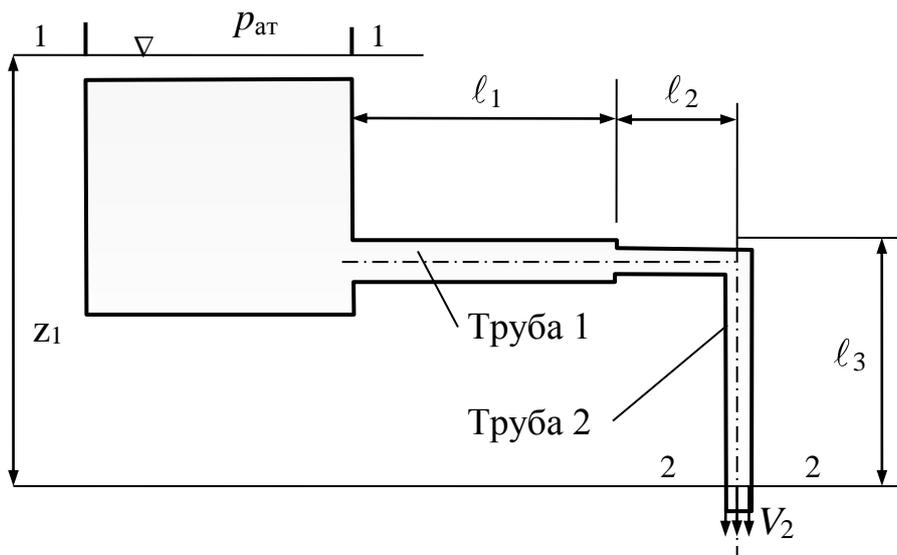


Рис. 7.2. Схема трубопровода переменного сечения

Поскольку диаметры трубопроводов разные, то средние скорости на каждом участке также различны. Режимы движения жидкости будут отличаться, поэтому потери напора на каждом участке следует считать отдельно. Если участков два, то из уравнения Бернулли получим:

$$H = \frac{\alpha_2 V_{2\text{cp}}^2}{2g} + \frac{V_{1\text{cp}}^2}{2g} \left( \lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} + \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) + \frac{V_{2\text{cp}}^2}{2g} \left( \lambda_2 \frac{\ell_2 + \ell_3}{d_2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right),$$

где:  $\frac{\alpha_2 V_{2cp}^2}{2g}$  – скоростной напор на выходе из трубы 2;

$\frac{V_{1cp}^2}{2g} \left( \lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} + \sum_{i=1}^m \zeta_i \right)$  – потери напора в трубе 1;

$\frac{V_{2cp}^2}{2g} \left( \lambda_2 \frac{\ell_2 + \ell_3}{d_2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)$  – потери напора в трубе 2.

Приведем все коэффициенты уравнения к скорости на выходе из трубы 2. В соответствии с уравнением неразрывности имеем:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2, \text{ откуда } V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1} = V_2 \frac{d_2^2}{d_1^2},$$

тогда выражение для напора истечения примет вид:

$$H = \frac{V_{2cp}^2}{2g} \left[ \alpha_2 + \left( \lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} + \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) \frac{d_2^4}{d_1^4} + \left( \lambda_2 \frac{\ell_2 + \ell_3}{d_2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \right].$$

Выражение в квадратных скобках называют приведенным коэффициентом сопротивления системы  $\zeta_{\text{сист}}$ . Тогда для напора истечения получим

$$H = \zeta_{\text{сист}} \frac{V_{2cp}^2}{2g},$$

где  $\zeta_{\text{сист}}$  – коэффициент сопротивления системы, т. е. всего трубопровода.

#### 7.4. Расчет сифонного трубопровода

Сифонным трубопроводом называют трубопровод, часть которого расположена выше уровня жидкости в питающем резервуаре (рис. 7.3). Напорное движение жидкости в сифоне происходит под действием атмосферного давления при наличии вакуума в плоскости  $n-n$ , где расположена верхняя точка сифона. Вакуум достигается предварительным заполнением жидкостью всего сифонного трубо-

провода. С этой целью перед работой сифон заполняют жидкостью или откачивают из него воздух при помощи вакуумных насосов.

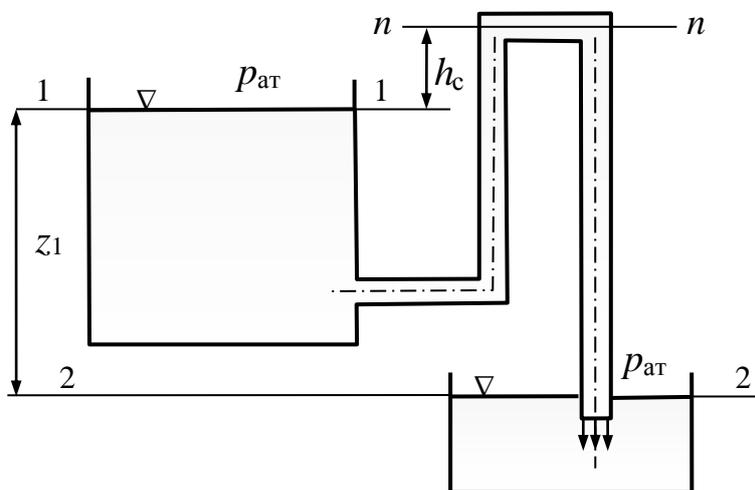


Рис. 7.3. Схема течения в сифонном трубопроводе

Расчет сифонного трубопровода состоит из двух частей:

1. Гидравлический расчет трубопровода, как и в случае простого трубопровода.

2. Определение минимального давления в трубопроводе и максимально допустимой высоты подъема жидкости  $h_c$  над свободной поверхностью в питающем резервуаре.

Первая задача решается так же, как для простого трубопровода.

Рассмотрим решение 2-й задачи. Определим минимальное давление в трубопроводе и допустимую высоту подъема жидкости в сифоне. За плоскость сравнения выберем плоскость  $n-n$  на уровне максимальной высоты подъема жидкости в сифоне. Давление в сифонном трубопроводе на этом уровне будет минимальным, т. к. он расположен выше уровня свободной поверхности питающего резервуара и до него в сифонном трубопроводе имеют место потери напора. Составим уравнение Бернулли для участка трубопровода от свободной поверхности до плоскости  $n-n$ :

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} = \frac{\alpha_n V_{нсп}^2}{2g} + \frac{p_n}{\rho g} + h_c + h_{тр} + \sum_{i=1}^n h_i, \quad (7.3)$$

где  $h_{\text{тр}}$  – потери по длине;  $\sum_{i=1}^n h_i$  – сумма потерь напора в местных гидравлических сопротивлениях на участке от свободной поверхности до плоскости  $n-n$ .

Выразим удельную энергию давления на плоскости  $n-n$ :

$$\frac{p_n}{\rho g} = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} - \frac{\alpha_n V_{n\text{ср}}^2}{2g} - h_c - h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i.$$

Давление  $p_n$  не может быть меньше давления  $p_d$  парообразования жидкости, протекающей в сифоне, при данной температуре:

$$\frac{p_n}{\rho g} = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} - \frac{\alpha_n V_{n\text{ср}}^2}{2g} - h_c - h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i \geq \frac{p_d}{\rho g}.$$

Из последнего уравнения:

$$h_c \leq \frac{p_{\text{ат}} - p_d}{\rho g} - \frac{\alpha_n V_{n\text{ср}}^2}{2g} - h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i.$$

Если абсолютное давление в плоскости  $n-n$  достигнет значения  $p_d$ , то нарушится сплошность потока, образуется паровоздушная пробка и наступит срыв работы сифона.

Для того чтобы сифон нормально работал, давление в верхней его точке не должно опускаться ниже  $p_d$  – давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. Из этого условия может быть получена максимально допустимая высота подъема жидкости  $h_{c, \text{max}}$  над свободной поверхностью в питающем резервуаре. Приняв абсолютное давление  $p_d$  за предельное, и используя уравнение (7.3) получим:

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = \frac{\alpha_n V_{n\text{ср}}^2}{2g} + \frac{p_d}{\rho g} + h_{c, \text{max}} + h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i,$$

откуда

$$h_{c, \text{max}} = \frac{p_{\text{ат}} - p_d}{\rho g} - \frac{\alpha_n V_{n\text{ср}}^2}{2g} - h_{\text{тр}} - \sum_{i=1}^n h_i.$$

## 7.5. Расчет простого трубопровода, соединяющего резервуары

Рассмотрим простой трубопровод, соединяющий питающий и приемный резервуары большого объема. Трубопровод имеет несколько местных сопротивлений. Свободные поверхности резервуаров находятся на разной высоте под атмосферным давлением (рис.7.4).

В уравнении Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 имеем:

$$p_1 = p_2 = p_{ат};$$

$$V_1 = V_2 = 0.$$

Напор истечения определяется разностью высотных отметок свободной поверхности питающего и приемного резервуаров:

$$z_1 - z_2 = H.$$

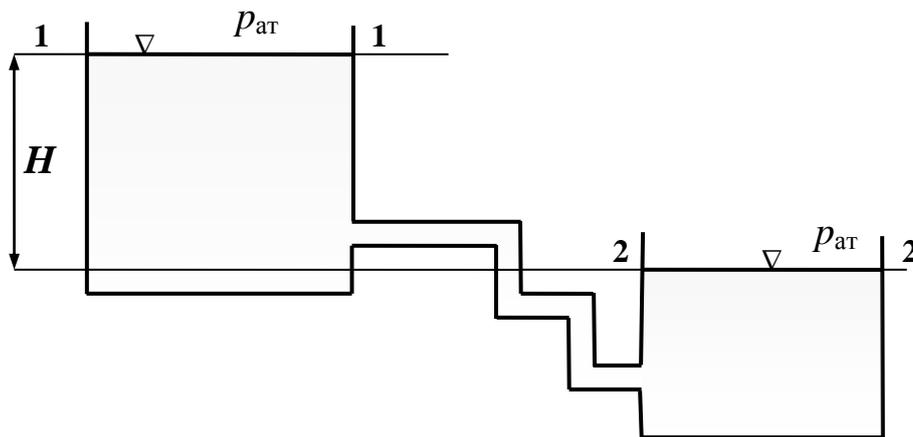


Рис. 7.4. Схема соединения резервуаров

В соответствии с (7.1), напор истечения затрачивается на преодоление потерь гидравлического трения и потерь в местных гидравлических сопротивлениях:

$$H = \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \zeta_{вх} + 4\zeta_{пов} + \zeta_{вых} \right) \frac{V_{ср}^2}{2g}.$$

Особенность работы трубопровода, соединяющего резервуары, состоит в том, что скоростной напор на выходе из трубы является потерянными напором. Его следует рассматривать как предельный слу-

чай внезапного расширения с выходом в неограниченное пространство, принимая коэффициент потерь  $\zeta_{\text{вых}} = 1$ .

### 7.6. Определение давления в произвольной точке трубопровода

Для того, чтобы определить давление в произвольно выбранном сечении  $m-m$ , составим уравнение Бернулли на участке от плоскости 0-0 на свободной поверхности в закрытом резервуаре с давлением  $p_0$  до произвольно расположенного сечения в трубопроводе  $m-m$  (рис.7.5). Предположим, что на этом участке имеется  $n$  местных сопротивлений

$$\frac{\alpha_0 V_{0\text{ср}}^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{\alpha_m V_m^2}{2g} + \frac{p_m}{\rho g} + z_m + h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i .$$

Примем  $V_{0\text{ср}} = 0$ , тогда:

$$\frac{p_m}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + (z_0 - z_m) - \frac{\alpha_m V_m^2}{2g} - h_{\text{тр}} - \sum_{i=1}^n h_i .$$

Обозначим  $z_0 - z_m = h_m$ , тогда:

$$\frac{p_m}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + h_m - \left( \frac{\alpha_m V_m^2}{2g} + h_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n h_i \right) .$$

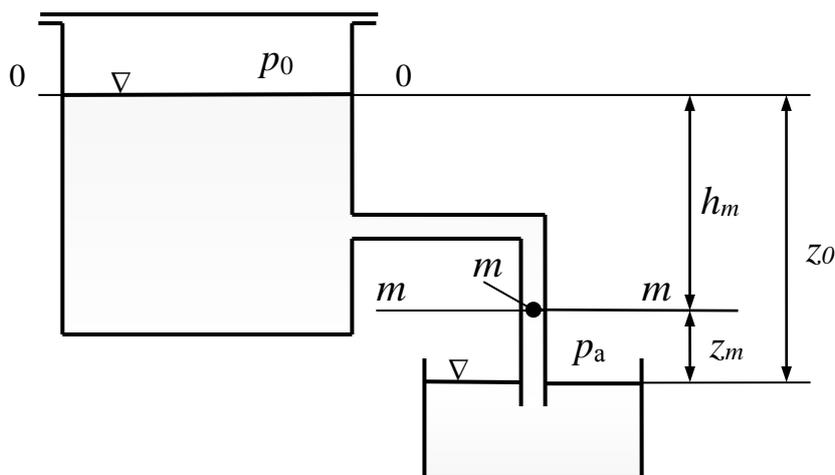


Рис. 7.5. Схема истечения из резервуара

Таким образом, если бы не было движения жидкости, то удельная энергия в точке  $m$  в соответствии с основным законом гидростатики равнялась бы  $\frac{p_m}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + h_m$ . Движение жидкости уменьшает ее на величину скоростного напора  $\frac{\alpha_m V_m^2}{2g}$  и суммарных потерь на пути от свободной поверхности до точки  $m$ .

### 7.7. Графоаналитический метод расчета простого трубопровода

Этот метод применяется в тех случаях, когда нужно определить расход  $Q$  для одного и того же трубопровода, но при переменном напоре истечения  $H = \text{var}$  и различном открытии запорного органа, то есть при  $\zeta_{\text{зав}} = \text{var}$ . Рассмотрим трубопровод схема, которого представлена на рис. 7.6. Пусть известны диаметр  $d$  и полная длина трубопровода  $\ell$ , а режим движения соответствует квадратичной области сопротивления.

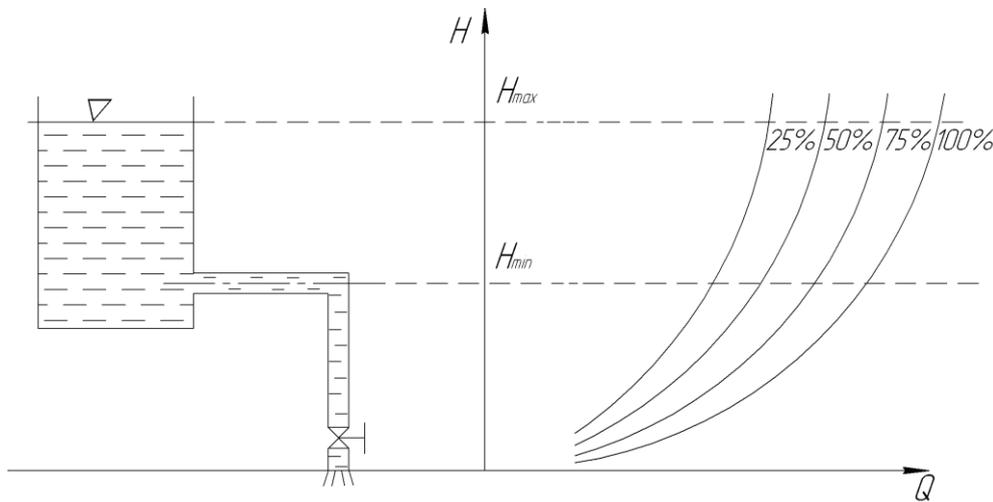


Рис. 7.6. К графоаналитическому расчету простого трубопровода

Напор истечения рассматриваемого трубопровода включает скоростной напор на выходе, потери гидравлического трения по длине и потери напора в местных гидравлических сопротивлениях:

$$H = \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} \left( \alpha + \lambda \frac{\ell}{d} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}} + \dots + \zeta_{\text{завд}} \right).$$

Как и ранее обозначим выражение в скобках коэффициентом сопротивления системы  $\zeta_{\text{сист}}$ .

Для каждого конкретного открытия задвижки имеем фиксированное значение коэффициента потерь

$$\zeta_{\text{завд}} = \text{const},$$

и поскольку  $V_{\text{ср}} = Q/S$ , то

$$H = \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} \zeta_{\text{сист}} = Q^2 \frac{1}{2gS^2} \zeta_{\text{сист}}.$$

Отсюда следует, что в общем случае характеристика трубопровода в графическом виде представляет параболу, определяемую уравнением

$$H = KQ^2,$$

где  $K$  – приведенный коэффициент сопротивления трубопровода.

Каждому коэффициенту  $K$  для данного открытия задвижки, соответствует своя парабола. Чем меньше открытие, тем больше коэффициент  $\zeta_{\text{завд}}$  и круче характеристика трубопровода. На графике представлены характеристики для различных открытий задвижки, заданных в процентах от полного ее открытия (рис. 7.6). Если уровень жидкости в питающем резервуаре будет изменяться от напора  $H_{\text{max}}$  до напора  $H_{\text{min}}$ , то при любом значении  $H$  из графика можно определить расход  $Q$  при каждом открытии задвижки.

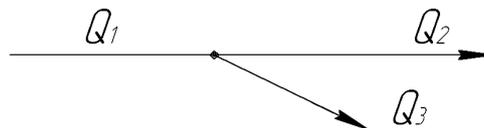
## 7.8. Расчет сложного разветвленного трубопровода

Разветвленные гидравлические сети состоят из основной магистральной линии и ответвлений, по которым жидкость поступает конечному потребителю. Точку ответвления называют узлом. Расчет

сложного трубопровода основан на использовании уравнений баланса расхода и баланса мощности.

Рассмотрим простейший случай трубопровода, с одним ответвлением (рис.7.7).

Трубопровод состоит из 3-х участков. Его расчетная схема:



Уравнение  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ , выражает баланс расходов.

Пусть известны данные трубопровода:

$$H; Q_1; d_1; d_2; d_3; \ell_1; \ell_2; \ell_3; \zeta_1; \zeta_2; \zeta_3.$$

Требуется определить расходы  $Q_2$  и  $Q_3$  за точкой ответвления.

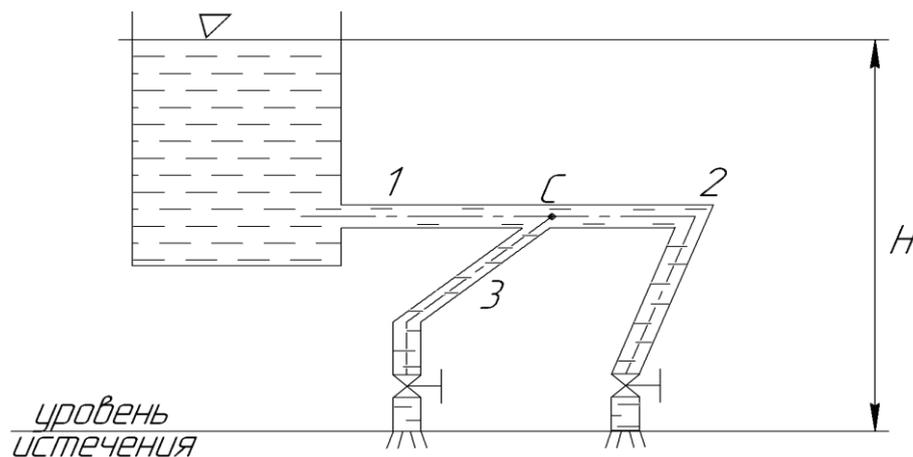


Рис. 7.7. Схема разветвленного трубопровода

Общее выражение для напора истечения:

$$H = \left( \alpha + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_{i=1}^n h_i \right) \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} = \zeta_{\text{сист}} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g},$$

тогда на каждом участке имеем напор истечения:

$$H_1 = \zeta_{\text{сист}1} \frac{V_{1\text{ср}}^2}{2g}; \quad H_2 = \zeta_{\text{сист}2} \frac{V_{2\text{ср}}^2}{2g}; \quad H_3 = \zeta_{\text{сист}3} \frac{V_{3\text{ср}}^2}{2g}.$$

В узле сети (точка C) расположено ответвление, следовательно, эта точка – общая для трубопроводов 2 и 3 (см. рис. 7.7). Для просто-

ты рассуждений примем, что трубопроводы 2 и 3 оканчиваются на одной высоте, т. е.

$$\begin{aligned}H_2 &= H_c; \\H_3 &= H_c; \\H_1 &= H - H_c.\end{aligned}$$

Ранее (см. раздел 3.13) было получено выражение для мощности потока при установившемся движении жидкости. Положим движение установившимся (неизменное положение задвижек на трубопроводах 2 и 3) и рассмотрим баланс мощностей. Мощность вытекающего потока включает в себя мощности потоков во всех трех трубопроводах, т. е.

$$\begin{aligned}N &= N_1 + N_2 + N_3; \\ \rho g Q_1 H &= \rho g Q_1 H_1 + \rho g Q_2 H_2 + \rho g Q_3 H_3;\end{aligned}$$

Поскольку  $H_2 = H_3 = H_c$ , после сокращения получим

$$Q_1 H = Q_1 H_1 + H_c (Q_2 + Q_3),$$

но по уравнению баланса расходов  $Q_2 + Q_3 = Q_1$ , тогда

$$H = H_1 + H_c. \quad (7.4)$$

Выразим напор истечения через соответствующие коэффициенты потерь каждой системы:

$$H = \zeta_{\text{сист1}} \frac{Q_1^2}{2gS_1^2} + \zeta_{\text{сист2}} \frac{Q_2^2}{2gS_2^2},$$

откуда

$$Q_2 = S_2 \sqrt{\left( H - \zeta_{\text{сист1}} \frac{Q_1^2}{2gS_1^2} \right) \frac{2g}{\zeta_{\text{сист2}}}},$$

аналогично

$$Q_3 = S_3 \sqrt{\left( H - \zeta_{\text{сист1}} \frac{Q_1^2}{2gS_1^2} \right) \frac{2g}{\zeta_{\text{сист3}}}}.$$

Следовательно, в параллельных ветвях трубопроводов расходы распределяются прямо пропорционально площади сечения трубопро-

водов и обратно пропорционально корню квадратному из коэффициентов потерь каждой системы:

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{S_2}{S_3} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{сист}3}}{\zeta_{\text{сист}2}}}.$$

### 7.9. Графоаналитический метод расчета разветвленного трубопровода

Графоаналитический способ расчета сложного трубопровода используется в том случае, когда известны общий напор истечения, диаметры труб, длины участков и коэффициенты потерь трубопроводов системы и нужно определить расходы в каждой из ветвей и общий расход системы. Пусть трубопроводы 1 и 2 работают параллельно (рис. 7.8). Последовательно с ними работает питающий трубопровод 3. Общий вид выражений для напора истечения трубопроводов 1 и 2 одинаков. Как и ранее полагаем, что режим движения жидкости на каждом участке соответствует квадратичной области сопротивления. Определение расхода в элементах рассматриваемой системы проводится графоаналитически.

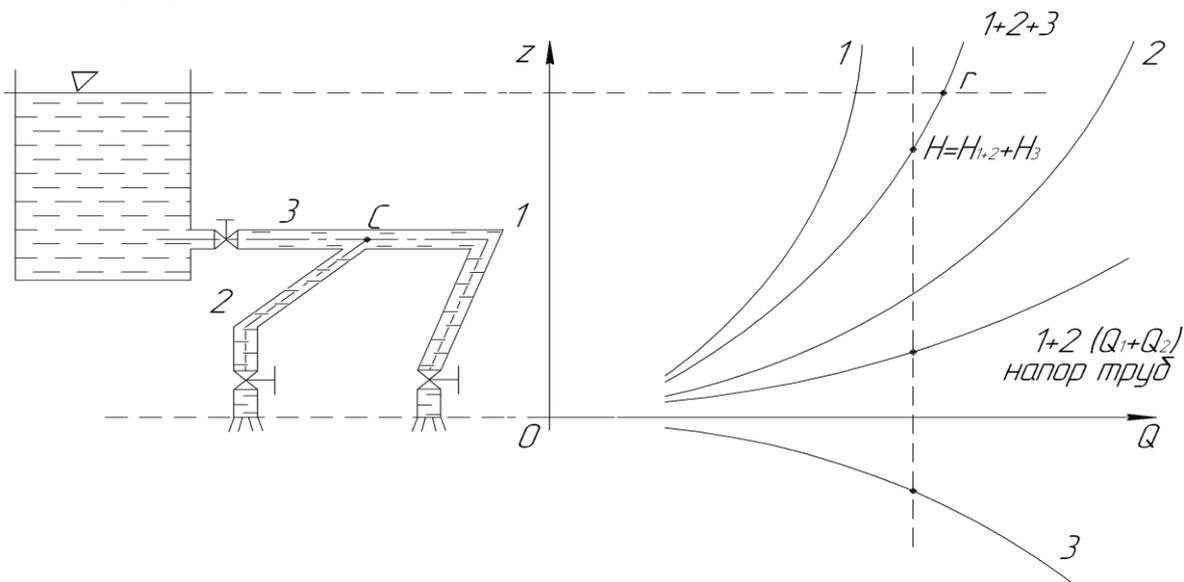


Рис. 7.8. Графоаналитический расчет сложного трубопровода

Для этого на графике  $Z-Q$  строятся характеристики каждого трубопровода по общему выражению для напора истечения, задаваясь последовательно значениями расходов:

$$H_1 = Z_1 = \left( \alpha_1 + \lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)_1 \frac{Q^2}{2gS_{\text{тр}1}^2};$$

$$H_2 = Z_2 = \left( \alpha_2 + \lambda_2 \frac{\ell_2}{d_2} + \sum_{i=1}^m \zeta_i \right)_2 \frac{Q^2}{2gS_{\text{тр}2}^2};$$

$$H_3 = Z_3 = \left( \alpha_3 + \lambda_3 \frac{\ell_3}{d_3} + \sum_{i=1}^k \zeta_i \right)_3 \frac{Q^2}{2gS_{\text{тр}3}^2}.$$

Определяем соответствующие значения  $Z$ . Значения  $Z_3$  для удобства откладываются вниз от оси расходов, величины  $Z_1$  и  $Z_2$  – вверх от оси расходов.

Суммарная характеристика двух параллельных трубопроводов 1 и 2 находится способом горизонтального сложения, когда складываются абсциссы (расходы), соответствующие одним и тем же ординатам (напорам):

$$Q_{1+2} = Q_1 + Q_2 \quad (\text{при } H = \text{const}).$$

Полученная таким образом суммарная характеристика 1+2 складывается с характеристикой последовательно работающего трубопровода 3 ( $Q = \text{idem}$ ;  $H = H_1 + H_2$ ) по способу вертикального сложения, когда складываются ординаты, соответствующие одним и тем же абсциссам (расходам) характеристик 1+2 и 3. Полученная характеристика 1+2+3 является результирующей характеристикой всей системы трубопроводов.

Точка пересечения  $r$  результирующей характеристики 1+2+3 с горизонталью, проведенной на уровне свободной поверхности, определяет расход трубопровода 3 (т. е. всей системы).

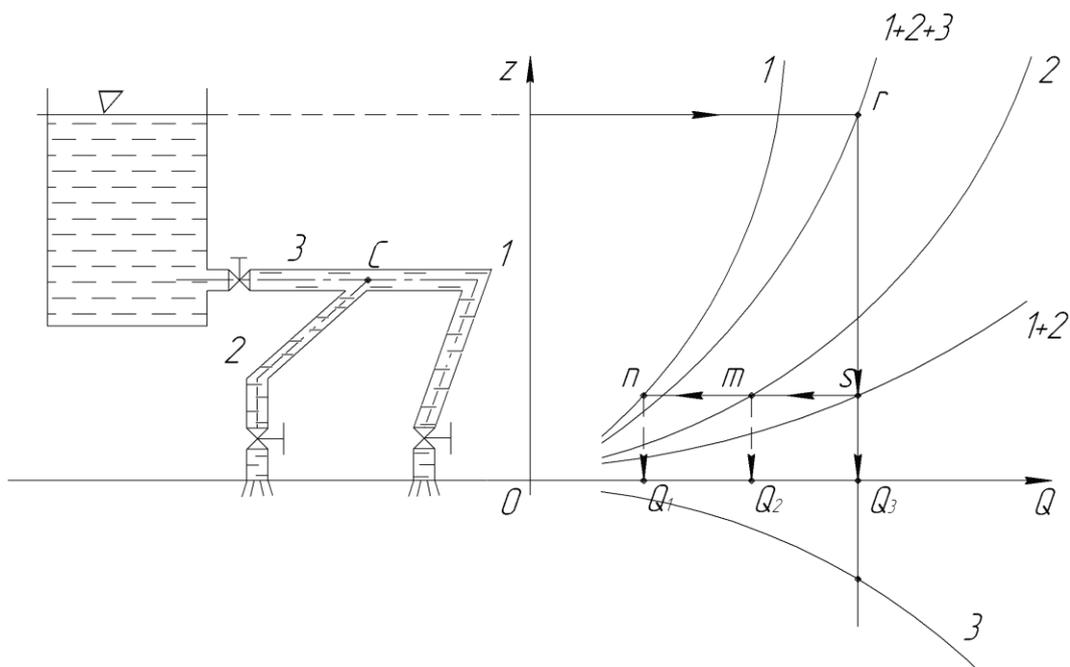


Рис. 7.9. Порядок сложения характеристик

Чтобы определить расход каждого из трубопроводов 1 и 2, необходимо через точку  $r$  провести вертикаль до пересечения ее в точке  $s$  с суммарной характеристикой трубопроводов 1+2. Из точки  $s$  провести горизонталь, которая пересечет характеристики трубопроводов 1 и 2 в точках  $m$  и  $n$  (рис. 7.9). Эти точки и определяют расход в каждом из трубопроводов.

## 7.10. Расчет длинных трубопроводов (водопроводные линии)

### 7.10.1. Основы расчета длинных трубопроводов

Водопроводом называют систему труб, служащих для транспортировки воды на большие расстояния. У водопроводов, состоящих из длинных труб, основными потерями будут потери напора на трение. Местные потери в расчете не учитываются, поскольку они составляют не более 5% от общей суммы потерь. Однако, при необходимости, на практике их учитывают, увеличивая на (5...10)% суммарные потери напора на гидравлическое трение.

Рассмотрим задачу о движении жидкости в прямом горизонтальном трубопроводе, соединяющем резервуары (рис. 7.10).

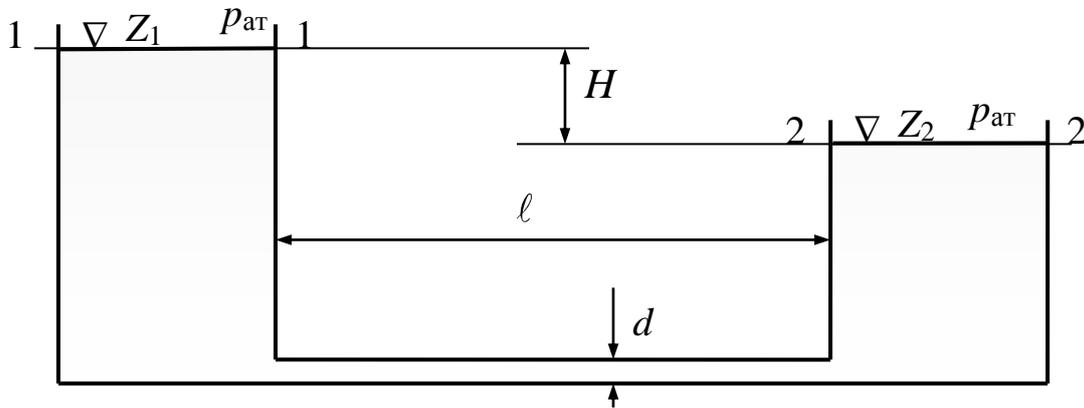


Рис. 7.10. Схема длинного трубопровода

Выберем контрольные сечения 1-1 и 2-2 на свободных поверхностях каждого резервуара, тогда уравнение Бернулли для потока движущейся жидкости примет вид:

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + Z_2 + h_{тр}.$$

Для бесконечно больших открытых резервуаров:

$$p_1 = p_2 = p_{ат}; \quad V_1 = V_2 = 0; \quad Z_1 - Z_2 = H.$$

Также можно принять  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

С учетом этого после сокращений, получим

$$H = h_{тр}.$$

Следовательно, в данном случае весь напор истечения затрачивается на преодоление потерь гидравлического трения. Величину потребного напора истечения определяют по формуле Дарси-Вейсбаха. Применительно к расчету водопроводных сетей ее еще называют – первая водопроводная формула:

$$H = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{ср}^2}{2g}.$$

Используем понятие гидравлического уклона, который представляет собой изменение удельной энергии на единицу длины пото-

ка. Так как для длинного трубопровода суммарные потери напора определяются только потерями гидравлического трения, то выражение для гидравлического уклона можно представить как

$$J = \frac{h_{\text{тр}}}{\ell} = \frac{\lambda}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g},$$

откуда квадрат средней скорости

$$V_{\text{ср}}^2 = \frac{2gJd}{\lambda}.$$

Для трубопровода круглого сечения  $d = 4R_r$ , где  $R_r$  – гидравлический радиус. Тогда для средней по живому сечению скорости получим выражение

$$V_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{R_r J}.$$

Обозначим

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}.$$

Коэффициент  $C$  называется коэффициентом Шези. Тогда средняя по живому сечению скорость:

$$V_{\text{ср}} = C \sqrt{R_r J}.$$

Эта формула называется формулой Шези. Она соответствует развитому турбулентному движению жидкости в области квадратичного сопротивления.

Используя условие сплошности, получим:

$$Q = V_{\text{ср}} S = CS \sqrt{R_r J}.$$

Произведение  $CS \sqrt{R_r}$  имеет размерность:

$$\left[ \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} S \sqrt{R_r} \right] = \frac{\text{м}^{\frac{1}{2}} \text{м}^2 \text{м}^{\frac{1}{2}}}{\text{с}} = \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

т. е. эта величина имеет размерность расхода. Ее называют модулем расхода и обозначают  $K$ :

$$K = CS\sqrt{R_r} . \quad (7.5)$$

Модуль расхода выражает величину расхода через данный трубопровод при гидравлическом уклоне, равном единице.

Окончательное выражение для расхода получим в следующем виде:

$$Q = K\sqrt{J} . \quad (7.6)$$

Формула (7.6) является основной для расчета длинных трубопроводов.

Если необходимо определить требуемый напор истечения, то учитывая, что

$$J = \frac{h_{\text{тр}}}{\ell} = \frac{H}{\ell}, \text{ а } Q^2 = \frac{K^2 H}{\ell},$$

выражают напор истечения:

$$H = \frac{Q^2 \ell}{K^2} .$$

Эту формулу называют второй водопроводной формулой.

Величина модуля расхода  $K$  зависит от коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  и диаметра трубопровода  $d$ . В свою очередь,  $\lambda$  зависит от диаметра  $d$  и абсолютной шероховатости трубы  $\Delta$ . Обычно, для расчета пользуются значениями  $K$  из таблиц, составленных с использованием различных формул для величины  $\lambda$ . В таблицах, как правило, дается значение  $K$ ,  $1/K$  или  $1/K^2$  в зависимости от диаметра  $d$  для определенного класса труб.

При требуемом расходе  $Q$  по известному значению  $1/K^2$ , можно вычислить  $H$ . Также при известном  $H$  можно определить расход  $Q$  при заданном диаметре трубопровода  $d$ . Если заданы напор истечения  $H$  и расход  $Q$ , то можно вычислить необходимый диаметр трубопровода  $d$  с использованием таблиц для модуля расхода  $K$ .

### 7.10.2. Последовательное соединение трубопроводов

Водопроводная линия в общем случае может состоять из  $i$  участков. На рис. 7.11 в качестве примера представлена схема трубопровода, состоящего из 3-х последовательно соединенных длинных участков. Диаметры трубопроводов и длины участков различны. Потери гидравлического трения на участках такого трубопровода можно выразить по второй водопроводной формуле:

$$h_{\text{тр}} = \frac{Q^2 \ell_i}{K_i^2}.$$

При отсутствии ответвлений расход жидкости на всех участках одинаков, следовательно:

$$H = Q^2 \left( \frac{\ell_1}{K_1^2} + \frac{\ell_2}{K_2^2} + \dots + \frac{\ell_i}{K_i^2} \right).$$

Отношение  $\frac{\ell}{K^2}$  называют модулем сопротивления трубы, поскольку оно численно равно величине потерь напора при расходе, равном единице.

При последовательном соединении решаются те же виды задач, что и при расчете простого трубопровода.

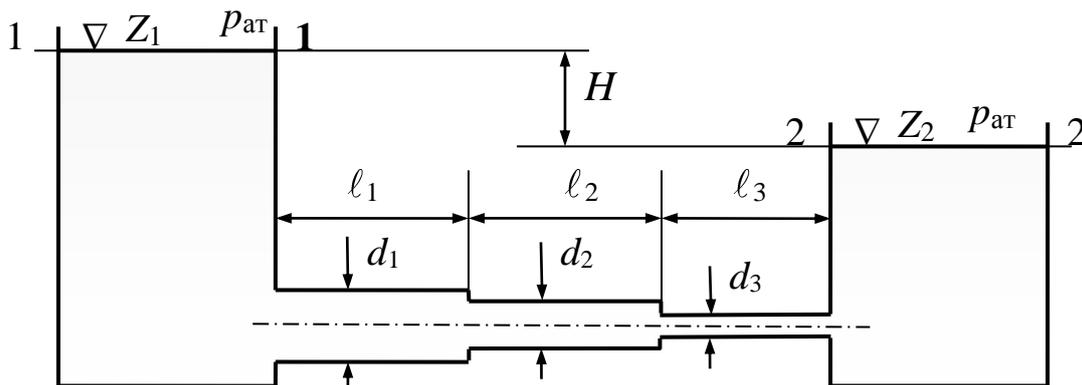


Рис. 7.11. Схема последовательного соединения трубопроводов

Первые две задачи, когда известны диаметры трубопроводов решаются с использованием вышеприведенной формулы. Зная диа-

метры трубопроводов, по таблицам определяют  $K_1, K_2 \dots K_i$  и по известной длине участков определяют  $H$  или  $Q$ .

Если значения расхода  $Q$  и напора истечения  $H$  заданы, а требуется определить диаметры участков, то задача не определена. В этом случае задачу решают методом подбора. Задаются значениями диаметров  $d_1, d_2, \dots, d_i$ . Определяют соответствующее значение  $Q$ . Если оно не соответствует требуемому расходу, выполняют следующие итерации, пока значение действительного расхода не приблизится с приемлемой точностью к заданному расходу  $Q$ . Если требуется точное совпадение действительного и заданного расхода, то после определения приемлемых значений  $d_1, d_2, \dots, d_i$  изменяют соотношение для  $H$  каких либо двух участков, оставляя их сумму постоянной, до совпадения с требуемым расходом.

### 7.10.3. Последовательно-параллельное соединение трубопроводов

Предположим, что рассчитывается система, состоящая из трубопроводов одинакового диаметра, схема которого представлена на рис. 7.12.

Имеются прямолинейные участки 1, 2, 3, 4, 5. В точке  $B$  происходит разветвление трубопровода, а в точке  $C$  трубопроводы вновь объединяются. Кроме транзитного движения в трубах 1, 2, 3, 4, 5 имеются еще отборы воды в узлах  $B$  и  $C$ , т. е. узловые расходы.

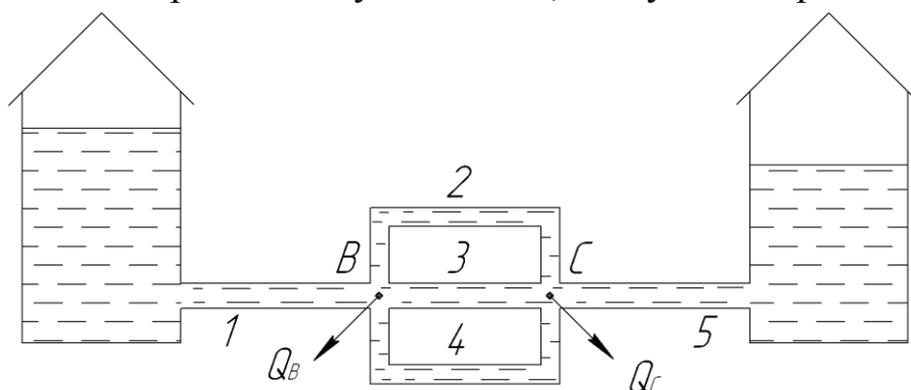


Рис. 7.12. Схема соединения трубопроводов

Рассмотрим баланс расходов.

На участке 1 проходит весь расход жидкости:

$$Q_1 = Q;$$

в параллельных ветвях 2, 3, 4:

$$Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q - Q_B;$$

на последнем участке

$$Q_5 = Q - (Q_B + Q_C).$$

Напор истечения во всех 3-х параллельных участках равен разности удельной энергии в узлах  $B$  и  $C$  и, следовательно, одинаков:

$$H_2 = H_3 = H_4,$$

откуда

$$\frac{Q_2^2}{K_2^2} \ell_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} \ell_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} \ell_4.$$

Тогда, рассматривая попарно участки, например, 2 и 3 получим уравнение, связывающее расходы каждого участка в следующем виде:

$$Q_3 = Q_2 \sqrt{\frac{K_3^2}{K_2^2}} \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_3}}.$$

Модуль расхода  $K = CS\sqrt{R_\Gamma}$  и  $K^2 = C^2 S^2 R_\Gamma$ , а  $C^2 = \frac{8g}{\lambda}$ ,

тогда получим

$$K^2 = \frac{8g}{\lambda} \frac{\pi^2 d^4}{16} \frac{d}{4} = \frac{g\pi^2}{8\lambda} d^5.$$

Выражение, связывающее расходы двух параллельных участков:

$$Q_3 = Q_2 \sqrt{\frac{d_3^5}{d_2^5}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}} \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_3}}. \quad (7.7)$$

Зная величины  $\lambda$ ,  $d$ ,  $\ell$  можно вычислить величину отношения  $Q_3/Q_2$  или, аналогично, для любой пары параллельных ветвей. Однако,  $\lambda = \lambda(\text{Re})$ , следовательно,  $\lambda = \lambda(Q)$  и уравнение (7.7) можно ре-

шить только последовательными приближениями. Обычно задача облегчается за счет того, что в большинстве практических случаев режим движения жидкости в длинных трубах соответствует области квадратичного сопротивления и коэффициент потерь  $\lambda$  не зависит от числа Рейнольдса.

Таким образом, для расчета рассматриваемого трубопровода имеются следующие уравнения:

- равенство напора истечения в параллельных ветвях:

$$\frac{Q_2^2}{K_2^2} \ell_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} \ell_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} \ell_4;$$

- баланс расходов:

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_B + Q_C;$$

- учет отборов в узлах  $B$  и  $C$ :

$$Q_5 = Q - (Q_B + Q_C);$$

- баланс напоров истечения  $H = H_1 + H_{2,3,4} + H_5$ :

$$H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \ell_1 + \frac{Q_{2,3,4}^2}{K_{2,3,4}^2} \ell_{2,3,4} + \frac{Q_5^2}{K_5^2} \ell_5.$$

Первое выражение включает два уравнения, т. е. в задаче 5 неизвестных и 5 уравнений. Эта задача также успешно решается графоаналитическим способом.

## ГЛАВА 8. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДАХ

### 8.1. Явление гидравлического удара

Гидравлическим ударом называют комплекс явлений, происходящих в жидкости при резком изменении скорости ее движения в одном из сечений, из-за чего в жидкости возникает колебательный затухающий процесс, сопровождающийся резким повышением или понижением давления. Это пример неустановившегося напорного движения жидкости, когда значения местных скоростей и давлений изменяются с течением времени.

Работа о гидравлическом ударе знаменитого российского ученого Н.Е. Жуковского была опубликована в 1899 г. Эта работа стала основополагающей для дальнейших работ и расчетов по гидравлическому удару.

Для простоты рассуждений рассмотрим явления, происходящие в длинном простом трубопроводе при напорном движении жидкости, истекающей из резервуара большого объема, на свободной поверхности которого давление атмосферное (рис. 8.1). На расстоянии  $\ell$  от резервуара имеется задвижка, которая в начальный момент времени полностью открыта.

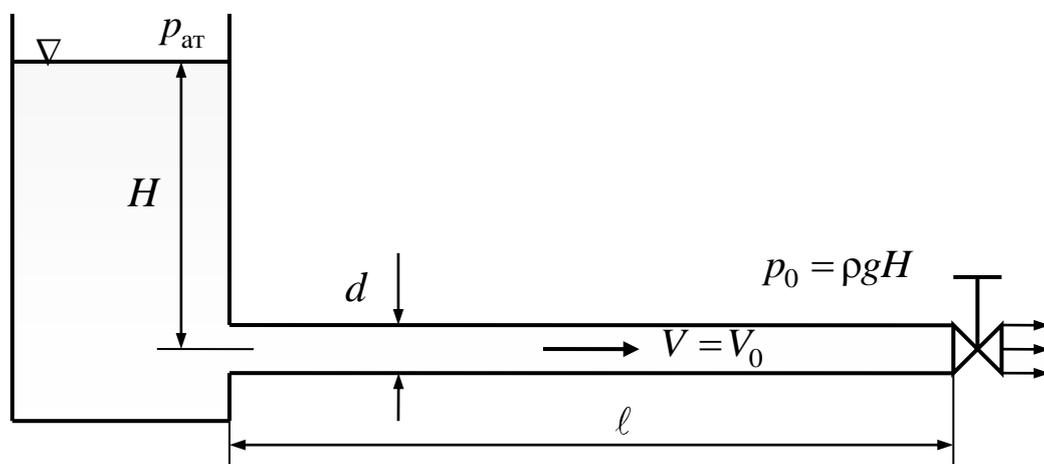


Рис. 8.1. Схема простого напорного трубопровода

Будем считать, что размеры питающего резервуара велики и уровень свободной поверхности в нем остается неизменным.

Рассмотрим процесс изменения давления жидкости внутри трубопровода после резкого закрытия задвижки (рис. 8.2).

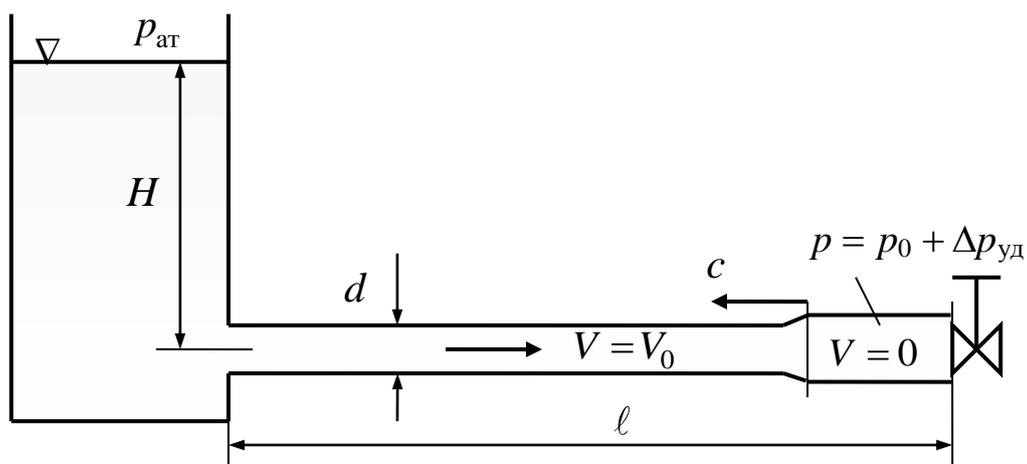


Рис 8.2. Изменение давления вблизи задвижки

Жидкость до закрытия задвижки двигалась по трубе со средней по сечению скоростью  $V_0$ . После полного закрытия задвижки частицы жидкости, прилегающие к ней, остановятся. Скорость непосредственно у задвижки станет равной нулю, а кинетическая энергия, которой обладала жидкость, перейдет в потенциальную. Давление увеличится на величину  $\Delta p_{уд}$ .

Повышение давления в трубопроводе приведет к увеличению внутреннего диаметра трубопровода на величину  $\Delta d$  и сжатию жидкости. Фронт волны повышения давления с некоторой скоростью, равной скорости звука в жидкости « $c$ » будет распространяться по трубопроводу в сторону питающего резервуара, и все новые слои жидкости будут останавливаться. Через время  $t = l/c$  волна повышения давления достигнет резервуара (рис. 8.3). При этом окажется, что жидкость в трубе остановлена ( $V = 0$ ), трубопровод деформирован, а жидкость в нем сжата, т. е. ударное повышение давления распространилось на всю трубу. Так как емкость резервуара велика, то явление гидравлического удара на резервуар не распространится. Поэтому, в момент подхода фронта волны повышения давления к резервуару создается граница, на которой соприкасаются слои жидкости, находящиеся под давлением  $p_0$  и  $p_0 + \Delta p_{уд}$ .

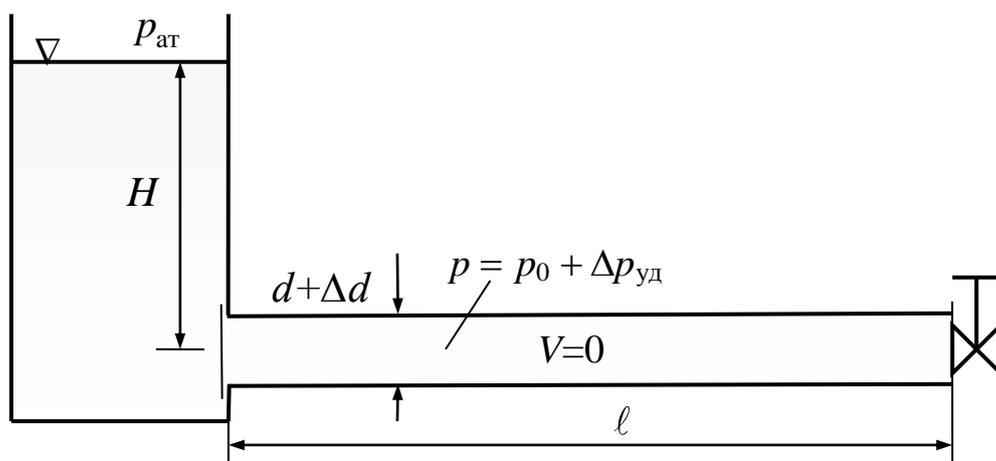


Рис. 8.3. Первая фаза гидравлического удара

Под действием перепада давления  $\Delta p_{уд}$  частицы жидкости устремятся из трубы в резервуар. Причем движение начнется со слоя, непосредственно примыкающего к резервуару. В ближайшем к питающему резервуару слое давление снизится до значения  $p_0$ , затем фронт волны понижения давления начинает движение равномерно со скоростью « $c$ » в сторону задвижки. Жидкость и упругие стенки трубы возвращаются к первоначальному состоянию. Энергия деформации полностью переходит в кинетическую энергию жидкости (рис. 8.4).

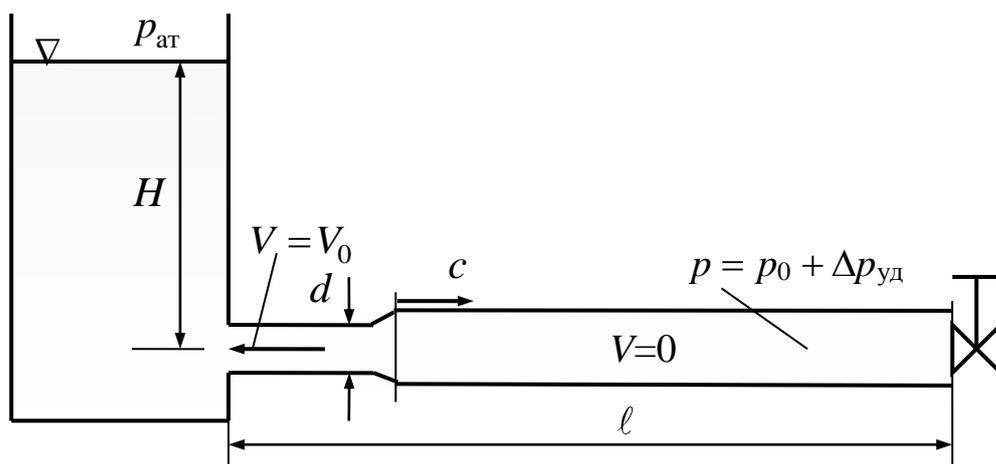


Рис. 8.4. Обратная волна гидравлического удара

За время  $t = 2l/c$  после закрытия задвижки фронт волны понижения давления дойдет до задвижки, труба вернется в прежнее состояние (рис. 8.5).

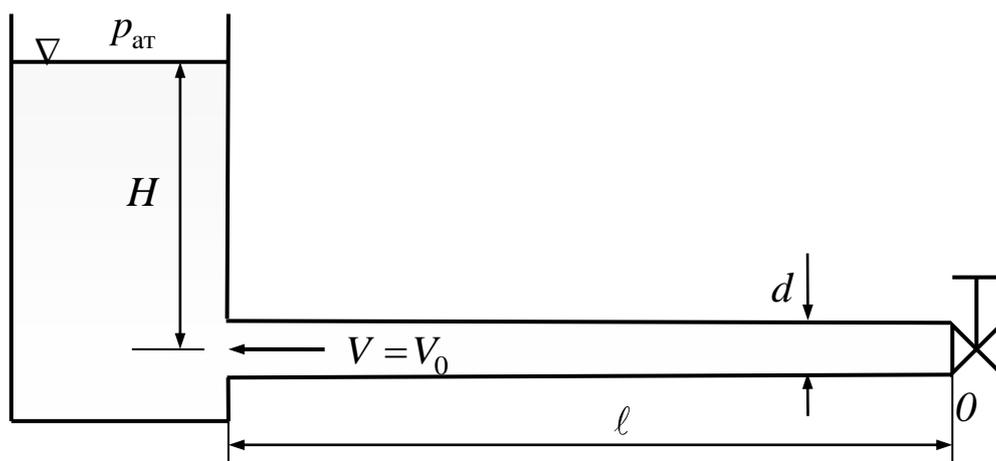


Рис. 8.5. Вторая фаза гидравлического удара

Время  $t = 2\ell / c$  называется фазой гидравлического удара. Жидкость в этот момент имеет скорость  $V_0$ , направленную в сторону резервуара. Она будет стремиться оторваться от задвижки, вследствие чего давление у задвижки станет меньше, чем оно было до начала удара на величину  $\Delta p_{\text{уд}}$ . При этом кинетическая энергия жидкости перейдет в энергию деформации, но противоположного знака. Труба сожмется, а жидкость расширится и через время  $t = 3\ell / c$ , волна понижения давления дойдет до резервуара (рис. 8.6).

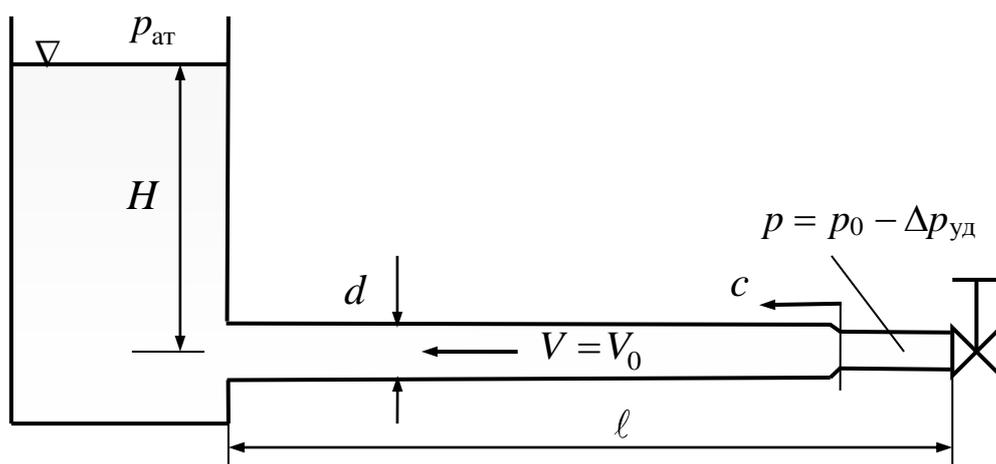


Рис. 8.6. Третья фаза гидравлического удара

При этом жидкость в трубе будет находиться под давлением  $p = p_0 - \Delta p_{\text{уд}}$ .

Поскольку давление в резервуаре  $p_0$  больше, чем давление  $p_0 - \Delta p_{уд}$  в трубопроводе, жидкость начнет перемещаться из резервуара со скоростью  $V_0$  в сторону задвижки (рис. 8.7). При этом в трубопроводе начнется процесс восстановления начального давления и начальной скорости.

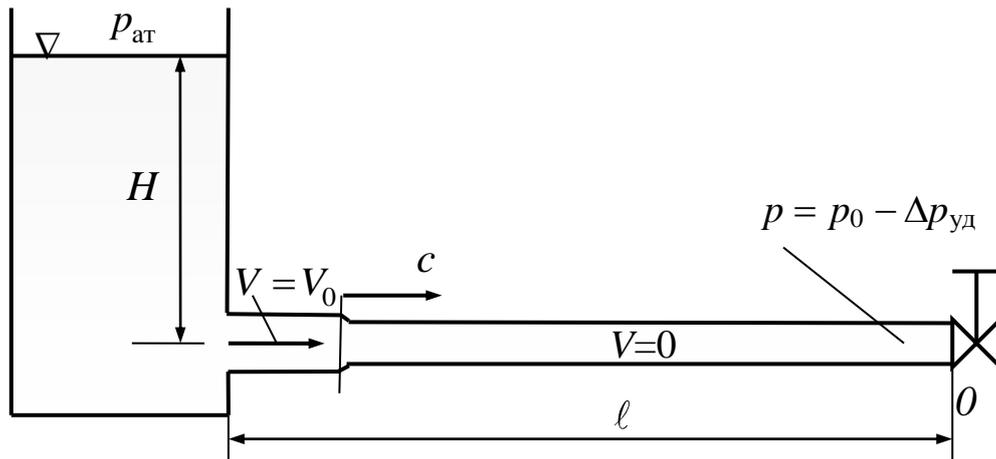


Рис. 8.7. Четвертая фаза гидравлического удара

Восстановление начального давления и начальной скорости произойдет через время  $t = 4\ell / c$ . Но поскольку задвижка остается закрытой и жидкость не может продолжить движение дальше, то у задвижки вновь повысится давление и начнется следующая волна гидравлического удара. Если пренебречь диссипацией энергии, обусловленной работой сил трения и деформацией трубопровода, картина будет повторяться и процесс будет продолжаться бесконечно долго. В реальных условиях, потери гидравлического трения приводят к рассеиванию энергии и делают процесс гидравлического удара затухающим. Опыты показывают, что возможны 10...15 повторений полных циклов изменения давления. Изменение давления перед задвижкой во времени иллюстрирует диаграмма (рис. 8.8). Пунктирными линиями показан теоретический вид эпюры давления в зависимости от времени. В реальных условиях давление изменяется резко, но не мгновенно. Сказывается объемная и тангенциальная вязкость, демпфирующее влияние упругости трубопровода и сжимаемость жидкости. Поэтому

имеет место затухание процесса с уменьшением амплитуды и колебания давления.

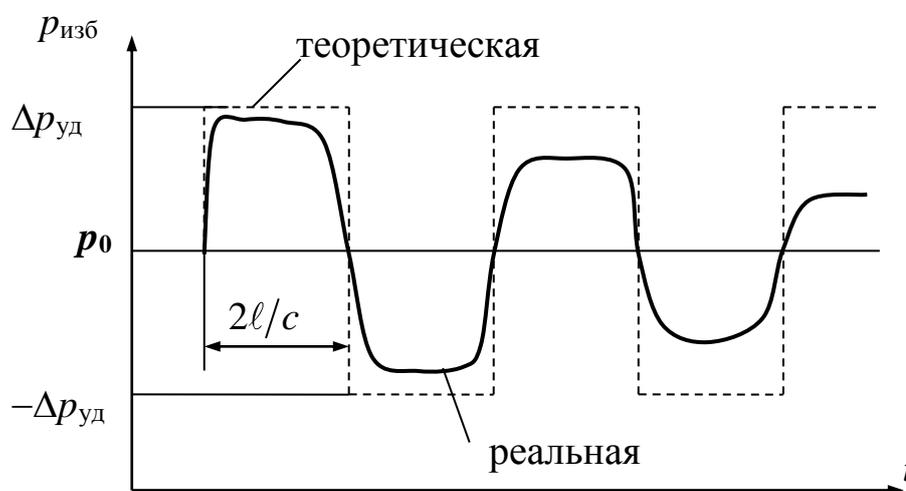


Рис. 8.8. Диаграмма изменения давления

Следует отметить, что при понижении давления  $p = p_0 - \Delta p_{уд}$ , оно может достичь давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. В этом случае произойдет нарушение сплошности потока с образованием парогазовых каверн. При этом последующее повышение давления будет сопровождаться быстрой конденсацией пара со значительным местным повышением давления. Это обстоятельство необходимо учитывать при расчете трубопроводов для горячих и специальных жидкостей.

## 8.2. Формула Н.Е. Жуковского

Найдем величину повышения давления при гидравлическом ударе.

Сделаем следующие допущения:

1. Скорость жидкости в живом сечении постоянна и равна средней скорости  $V_0$ .
2. Отсутствует рассеивание энергии.
3. Деформация жидкости и трубопровода происходит в пределах закона упругости.

Предположим также, что кинетическая энергия жидкости преобразуется в потенциальную энергию давления, которая выполняет работу деформации стенок трубы и жидкости

$$E_k = A_{\text{деф. тр}} + A_{\text{деф. ж}}. \quad (8.1)$$

Кинетическая энергия жидкости в трубе радиусом  $r$  и длиной  $\ell$  равна

$$E_k = \frac{mV_0^2}{2} = \frac{1}{2} \pi r^2 \ell \rho V_0^2.$$

Работа, затраченная на деформацию стенок трубы равна потенциальной энергии деформированного тела, т. е. представляет собой половину произведения силы на удлинение. Пусть радиус трубы увеличился на величину  $\Delta r$ , тогда:

$$A_{\text{деф. тр}} = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}} 2\pi r \ell \Delta r. \quad (8.2)$$

По закону Гука:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \sigma}{E_{\text{тр}}},$$

где  $\Delta \sigma$  – изменение нормального напряжения в материале стенки трубы, возникающее при увеличении давления в трубе на  $\Delta p_{\text{уд}}$ ;  $E_{\text{тр}}$  – модуль упругости материала стенки трубы. Из последнего выражения следует:

$$\Delta r = r \frac{\Delta \sigma}{E_{\text{тр}}}.$$

Изменение нормального напряжения в материале стенки трубы по известной котельной формуле определяется увеличением давления  $\Delta p_{\text{уд}}$  и толщиной стенки трубы  $\delta$ :

$$\Delta \sigma = \frac{\Delta p_{\text{уд}} r}{\delta}.$$

Тогда

$$\Delta r = \frac{r^2 \Delta p_{\text{уд}}}{E_{\text{тр}} \delta},$$

а работа, затраченная на деформацию стенок трубы, в соответствии с формулой (8.2) будет равна

$$A_{\text{деф.тр}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r^3 \ell}{E_{\text{тр}} \delta}.$$

Определим работу, затраченную на сжатие объема жидкости. Работу сжатия объема жидкости можно представить как работу сил давления на пути  $\Delta \ell$ , т. е.

$$A_{\text{деф.ж}} = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}} \pi r^2 \Delta \ell = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}} \Delta W,$$

где  $\Delta W$  – изменение объема жидкости при увеличении давления на величину  $\Delta p_{\text{уд}}$ . Относительное изменение объема при увеличении давления на величину  $\Delta p_{\text{уд}}$  определяется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_p$  или обратным ему по величине модулем объемной упругости  $E$ :

$$\frac{\Delta W}{W} = \beta_p \Delta p_{\text{уд}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}}{E}.$$

Тогда

$$\Delta W = \frac{W \Delta p_{\text{уд}}}{E}.$$

Выразив объем жидкости в трубе как  $W = \pi r^2 \ell$ , получим выражение для работы, затраченной на сжатие объема жидкости

$$A_{\text{деф.ж}} = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}} \frac{\pi r^2 \ell}{E}. \quad (8.3)$$

Таким образом, в соответствии с выражением (8.1) получим уравнение

$$\frac{1}{2} \pi r^2 \ell \rho V_0^2 = \frac{\Delta p_{\text{уд}} \pi r^3 \ell}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}}^2 \frac{\pi r^2 \ell}{E}.$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду:

$$\Delta p_{\text{уд}}^2 \left( \frac{r}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{1}{2E} \right) = \frac{1}{2} \rho V_0^2,$$

из которого получим выражение для  $\Delta p_{\text{уд}}$ :

$$\Delta p_{\text{уд}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2}{\frac{1}{2E} + \frac{r}{\delta E_{\text{тр}}}}} = \frac{\rho V_0}{\sqrt{\frac{\rho}{E} + \frac{2r\rho}{\delta E_{\text{тр}}}}}.$$

Множитель  $1 / \sqrt{\frac{\rho}{E} + \frac{2r\rho}{\delta E_{\text{тр}}}}$  имеет размерность скорости. Физиче-

ский смысл этой величины можно определить, если принять  $E_{\text{тр}} = \infty$ , т. е. предположить, что труба имеет абсолютно жесткие стенки. Тогда этот множитель представляет собой скорость распространения упругих деформаций в жидкости с плотностью  $\rho$  и модулем объемной упругости  $E$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E}}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = c.$$

Тогда общая формула для величины повышения давления при гидравлическом ударе может быть представлена в виде:

$$\Delta p_{\text{уд}} = \frac{\rho V_0 c}{\sqrt{1 + \frac{E}{E_{\text{тр}}} \frac{2r}{\delta}}},$$

где  $\frac{c}{\sqrt{1 + \frac{E}{E_{\text{тр}}} \frac{2r}{\delta}}} = c_{\text{пр}}$  представляет собой приведенную скорость рас-

пространения упругих деформаций в жидкости, с модулем объемной упругости  $E$ , протекающей по трубе радиусом  $r$ , толщиной  $\delta$ , и моду-

лем упругости  $E_{\text{тр}}$  материала, из которого она изготовлена. В этом случае общая формула для повышения давления может быть представлена в виде:

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 c_{\text{пр}}.$$

Для воды среднее значение скорости звука  $c = 1435$  м/с, для минеральных масел  $c = 1200 \dots 1400$  м/с, для воздуха скорость звука (при  $t = 20^\circ\text{C}$ )  $c = 335$  м/с.

В случае абсолютно жесткой (недеформируемой трубы), формула для расчета повышения давления  $\Delta p_{\text{уд}}$  принимает вид:

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 c.$$

Эта формула была получена Н.Е. Жуковским и носит его имя.

Все приведенные выше рассуждения справедливы, если перекрытие трубопровода произошло мгновенно, или время закрытия задвижки  $t_0$  меньше фазы гидроудара  $t = 2\ell / c$ , под которым понимается время пробега ударной волной двойной длины участка рассматриваемого трубопровода. В случае, если время закрытия задвижки меньше фазы гидроудара он называется прямым. В противном случае, если, время закрытия задвижки больше фазы гидроудара, т. е.  $t_0 \geq t$ , то гидроудар считается непрямым. Наибольшее повышение давления наблюдается при прямом гидравлическом ударе, при непрямом гидравлическом ударе  $\Delta p_{\text{уд}}$  снижается в отношении  $\frac{t}{t_0}$  и определяется,

как

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 c_{\text{пр}} \frac{t}{t_0}.$$

При неполном закрытии задвижки, скорость протекания жидкости в трубопроводе снижается на величину  $\Delta V = V_0 - V$ , где  $V_0$  – начальная средняя скорость в трубопроводе;  $V$  – скорость протекания

оставшейся части потока после неполного закрытия. В этом случае повышение давления составит:

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho(V_0 - V)c_{\text{пр}} = \rho\Delta Vc_{\text{пр}}.$$

Для оценки возможной величины повышения давления  $\Delta p_{\text{уд}}$  при прямом гидравлическом ударе рассмотрим участок трубопровода, по которому движется вода со скоростью  $V_0 = 5$  м/с. Если полное закрытие задвижки в конце трубопровода происходит мгновенно, то при условии, что трубопровод бесконечно жесткий ( $E_{\text{тр}} = \infty$ ), получим повышение давления

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 c = 1000 \cdot 5 \cdot 1400 = 7 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Такое повышение давления может разрушить трубопровод и обслуживаемые им устройства. Поэтому для предотвращения прямого гидравлического удара применяют специальные средства. Самым простым способом является увеличение времени закрытия задвижки  $t_0$ , определяемого из условия допускаемого повышения давления в трубопроводе. Кроме того, применяются специальные устройства, которые не допускают мгновенного уменьшения скорости движения жидкости, к ним относятся компенсаторы различной конструкции, устанавливаемые перед запорным органом. В основе их действия заложены принципы либо увеличения объема, либо поглощения энергии гидроудара упругим элементом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная

1. Штеренлихт Д. В. Гидравлика: учебник для вузов. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 656 с.
2. Моргунов К. П. Гидравлика: учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 288 с.
3. Жарковский А. А. Механика жидкости и газа. Гидромеханика: учебное пособие / А. А. Жарковский. – СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2011. – 228 с.
4. Скляревский А. Н. Гидравлический привод и средства автоматизации. Объемный гидропривод : учеб. пособие / А. Н. Скляревский . – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 252 с.
5. Гидравлика, гидромашин и гидропневмопривод : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / [Т. В. Артемьева, Т. М. Лысенко, А. Н. Румянцева, С. П. Стесин] : под ред. С. П. Стесина. – 4-е изд., стер. М. : издательский центр «Академия», 2008. – 336 с.
6. Кудинов В. А., Карташов Э. М. Гидравлика, Высшая школа, 2007, – 199с.
7. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика): учебник для вузов. – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2007. – 545 с.
8. Овсянников Н. К. Основы гидромеханики, М: Транслит, 2006 г., – 160 с.
9. Сазанов И. И. Гидравлика. Конспект лекций. Учебное пособие. – М.: ИЦМГТУ “СТАНКИН” “Янус-К”, 2005. – 192 с.
10. Шейпак А. А. и др. Гидравлика и гидропневмопривод, ч. 1. Основы механики жидкости и газа. – 4-е изд., – М. : МГИУ, 2005 г, 192 с.
11. Калекин А. А. Гидравлика и гидравлические машины ч.1., Изд. Мир, 2005 г., – 512 с.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

Дополнительная

13. Башта Т. М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. М.: Машиностроение, 1970. – 504 с.
14. Башта Т. М. Машиностроительная гидравлика. М.: Машиностроение, 1971. – 672 с.
15. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
16. Орлов Ю. М. Механика жидкости, гидравлические машины и основы гидропривода агрегатов ракетных комплексов: учебное пособие. – М.: ООО “Пресс-мастер”, 2001. – 379 с.
17. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости): учебное пособие для вузов. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
18. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1973. 559 с.
19. Френкель Н. З. Гидравлика. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 456 с.
20. Константинов Н. М. Примеры гидравлических расчетов: Учебное пособие для строительных и автомобильно-дорожных специальностей вузов. М.: Транспорт, 1987. – 440 с.
21. Задачник по гидравлике, гидромашинам и гидроприводу: учебное пособие для вузов / Б. Б. Некрасов, И. В. Фатеев, Ю. А. Беленков и др. Под ред. Б. Б. Некрасова. М.: Высшая школа. 1989. 192 с.
22. Примеры расчетов по гидравлике / А. Д. Альтшуль, В. И. Калицун, Ф. Г. Майрановский, П. П. Пальгунов. Под ред. А. Д. Альтшуля. М.: Стройиздат, 1977. – 254 с.
23. Справочник по гидравлическим расчётам /Под ред. П. Г. Киселева. М.: Энергия, 1977. – 312 с.
24. Сб. задач по машиностроительной гидравлике. Под ред. И. И. Куколевского, Л. Г. Подвидза. М.: Машиностроение, 1981. 464 с.
25. Астафичева Т. Н., Косякова Г. Н. Руководство к проведению лабораторных работ по курсу гидравлики. Л.: ЛПИ, 1960. 55 с.

*Вайсман Наталия Михайловна  
Голиков Владимир Анатольевич  
Жарковский Александр Аркадьевич*

**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА  
ГИДРАВЛИКА**

Учебное пособие

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93. т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать 05.04.2016. Формат 60×84/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14. Тираж 100. Заказ 14183б.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,  
в Типографии Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14