Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. В. АНДРЕЕВ, В. В. ЯКОВЛЕВ, Т.Ю. КОРОТКАЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург

Издательство Политехнического университета

2018

УДК 621.3.019.3

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета *Л. М. Молодкина*
Кандидат технических наук, директор ООО «Эко-Экспресс-Сервис»
В. А. Жигульский

Андреев А.В. **Теоретические основы надежности технических систем** /*учебное пособие*/ А,В. Андреев, В. В. Яковлев, Т.Ю. Короткая. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. — 164 с.

ISBN 978-5-7422-4550-6

Изложены основные теоретические положения и даны практические рекомендации по решению задач повышения безопасности в техносферной среде на основе использования методов повышения надежности технических систем, теории вероятностей, моделирования процессов с расчетными примерами в Mathcad и Matlab.

Учебное пособие предназначено для широкого круга специалистов, интересующихся теоретическими основами надежности сложных структур, студентам, магистрам и аспирантам обучающимся по программам направления «Техносферная безопасность».

ISBN 978-5-7422-4550-6

Научное издание

Андреев Андрей Викторович
Яковлев Вячеслав Владимирович
Короткая Татьяна Юрьевна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Компьютерная вёрстка:
Оконешникова К.В., Киселева О.А.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Наука о надежности технических систем относительно молодая. Ее формирование относится к середине XX века, но проблемы надежности технических систем волновали человечество с момента создания первых устройств. Середина XX века ознаменовалась новым качественным скачком в развитии техники — широким распространением больших и малых автоматизированных систем различного назначения. Создание и использование этой техники без специальных мер по обеспечению ее надежности не имело смысла. Опасность заключалась не только в том, что техника не будет работать (возникнут простои), но главным образом в том, что отказ в ее работе, в том числе и работа на непредусмотренных режимах, может привести к катастрофическим последствиям для среды обитания и человека.

Решение проблем обеспечения устойчивой безаварийной работы сложных систем, естественно, требует глубокой теоретической основы.

Становление и развитие теории надежности технических систем было бы невозможным без таких научных дисциплин как теория вероятностей, математическая статистика, теория графов, теория информатики, теория моделирования, теоретические основы испытания систем и их элементов.

В настоящее время, несмотря на обилие трудов по теоретическим основам надежности, остается много нерешенных вопросов. В этой связи настоящее пособие во многом отражает субъективную точку зрения авторов, что может неоднозначно восприниматься специалистами в области теоретических основ надежности технических систем. Вместе с тем, в рамках учебных программ подготовки бакалавров, магистров и аспирантов по направлениям предотвращения аварийных ситуаций, экологической безопасности и безопасной жизнедеятельности содержание пособия представляется достаточным по уровню, объему и значимости.

Пособие состоит из следующих основных разделов.

- теоретические основы оценки показателей надежности элементов, устройств и систем в представлении надежности как вероятности безотказной работы в течение определенного времени;

- риск как мера опасности объекта и его связь с надежностью технических систем [5];

- методы оценки надежности систем, резервированных по принципу постоянно включенного резерва, по принципу замещения и по принципу нагруженного резервирования;

- логико-вероятностные методы определения надежности сложных систем, надежностной и структурной значимости отдельных элементов;

- оценка надежности ремонтируемых технических систем.

- основы некоторых положений теории вероятности, применительно к надежности технических систем;

Все разделы содержат расчетные примеры и заканчиваются заданием на выполнение расчетно-графических работ или лабораторной работы, основная часть которых требует умения обращения с программами Excel, Mathcad, Matlab персональных компьютеров.

1. АНАЛИЗ СТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Технический прогресс первой половины XX-го века последовательно ставил все более сложные задачи обеспечения прочности строительных конструкций и машин, устойчивой передачи электроэнергии и т.д.

В это время обеспечение надежности достигалось введением запаса «прочности», что с одной стороны повышало массу системы, ее габариты и стоимость конструкций, а с другой стороны, стимулировало изучение реальных нагрузок, периодичность и причины возникновения возмущений, процессов старения или усталости элементов системы.

Перечисленное выше, в конечном счете, привело к необходимости использования методов теории вероятностей, возникшей еще в XYII веке. Определяющее значение в этом процессе имел вклад русской математической школы (труды А.А. Макарова, П.Л. Чебышева, А.М. Ляпунова, С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова).

Основные направления развития теории надежности технических систем состоят в следующем [1].

Развитие математических основ теории надежности.

Обобщение статистических материалов об отказах и разработка рекомендаций по повышению надежности объектов вызвали необходимость определять математические закономерности, которым подчиняются отказы, а также разрабатывать методы количественного определения надежности и инженерные расчеты ее показателей. В результате сформировалась математическая теория надежности. Ее возникновение — исходный пункт создания науки о надежности.

Развитие методов сбора и обработки статистических данных.

Обработка статистических материалов в области надежности потребовала развития существующих статистических методов и привела к накоплению большой статистической информации о надежности. Возникли статистические характеристики надежности и закономерности отказов.

Работы в этом направлении послужили основой формирования статистической теории надежности.

Развитие физической основы надежности.

Наука о надежности технических систем не могла и не может развиваться без исследования физико-химических процессов. Поэтому большое внимание уделяется изучению физических причин отказов, влиянию старения и прочности материалов на надежность, разнообразных внешних и внутренних воздействий на работоспособность объектов. Совокупность в области исследования физико-химических процессов, обуславливающих надежность объектов, послужила основой физической теории надежности.

Основополагающими работами по основам теории надежности стали труды А.И. Берга, Н.Г. Бруевича. Математические основы теории надежности получили свое развитие в трудах А.Н. Колмогорова, Б.В. Гнеденко, Е.С. Вентцель и др.

Все вопросы, рассматриваемые в теории надежности, можно разделить на три группы, соответствующие этапам жизненного цикла типовой технической системы:

Вопросы проектной (начальной) надежности;

Вопросы эксплуатационной надежности;

Проблемы надежности в процессе утилизации или уничтожения системы;

Отдельную группу вопросов представляют проблемы защиты среды, населения и экономики в течение всего жизненного цикла технической системы.

Вопросы проектной (начальной) надежности включают в себя разработку и проектирование устройств с заданным уровнем надежности, обеспечение необходимых значений критериев и показателей, разработку или использование методов повышения надежности в процессе проектирования и производства. Сюда же входят оценка надежности элементов сложных систем и прогнозирование надежности самих систем с учетом функциональных внутренних и внешних связей.

Эксплуатационная надежность неразрывно связана с обеспечением рассматриваемой сложной системы заявок на обслуживание, что объясняет необходимость использования при оценке эксплуатационной надежности аппарата теории массового обслуживания и теории восстановления.

Надежность утилизации. До последнего времени проблемы влияния технических систем на среду обитания по истечении срока их эксплуатации либо не изучались вообще, либо были изучены весьма слабо. Например, проблема вывода из эксплуатации реакторов атомных электростанций. До сих пор остается проблематичным вопрос о включении этих проблем в число задач, решаемых теорией надежности.

Устойчивость функционирования технической системы при различных внешних и внутренних воздействиях характеризуется ее надежностью, а степень правильности выбранного решения по управлению параметрами технической системы — риском лица, принимающего решение.

Таким образом, риск, эффективность, надежность (безотказность) и безопасность представляют собой характеристики единой комплексной оценки процесса функционирования технической системы.

В конце 20-х — начале 30-х годов прошлого века в работах М. Майера, Н.Ф. Хоциалова, Н.С. Стрелецкого был впервые четко поставлен вопрос о стохастической (статистической) природе коэффициентов запаса прочности. В этих работах впервые были сформулированы некоторые основополагающие понятия, вошедшие впоследствии в основы теории надежности:

- мера надежности,
- отказ,
- выход из строя,
- резервирование, и т.д.

В конце 30-х годов В. Вейбулл, Э. Гумбель, и др., работая над проблемой усталости материалов, заложили основы теории экстремальных значений. В 1939 году В. Вейбулл предложил распределение случайных величин, названное его именем. С развитием электрификации значительные усилия прилагались к решению проблем обеспечения надежной передачи электроэнергии и устойчивого снабжения энергией городов, районов и предприятий.

Новые трудности возникли с развитием автоматики и электроники. Стала отчетливо просматриваться закономерность: повышение эффективности технических систем вызывает повышение их сложности, рост числа элементов систем и снижение их надежности. Повышение надежности либо снижает эффективность, либо еще более повышает сложность технической системы.

Особенно ярко проявилась эта закономерность с развитием авиации и ракетной техники, когда сложные бортовые системы надо было вписывать в строго ограниченные массогабаритные характеристики летательного аппарата.

В 50-е годы получило окончательное признание новое научное направление «Надежность технических систем», в чем заслуга наших соотечественников А.И. Берга, Н.Г. Бруевича, Б.В. Гнеденко, В.И. Сифорова,…

Основные факторы, характеризующие специфику этапов этого направления, условно можно разделить на три группы.

Первая группа факторов, характеризующая актуальность развития направления, подразделяется на следующие составляющие:

уровень сложности систем;

уровень надежности элементной базы;

изменчивость условий эксплуатации;

объем производства создаваемых систем.

В первом приближении сложность системы может быть охарактеризована минимальным числом элементов, принципиально позволяющим системе выполнять все возложенные на нее функции с требуемой достоверностью.

Надежность элементов характеризуется одним или несколькими количественными показателями: безотказность (интенсивность отказов), ремонтопригодность (интенсивность восстановления), долговечность, сохраняемость.

Постоянство условий эксплуатации, «длина» серии выпускаемых узлов (систем) повышают качество их отработки, снижают вероятность отказов на начальном этапе эксплуатации.

Перечисленными факторами по существу определяется уровень начальной неопределенности, с которой встречается разработчик новой технической системы.

К факторам второй группы следует отнести организационное, техническое, информационное и методическое обеспечение.

Организационное обеспечение включает в себя установленный порядок планирования и реализации работ по обеспечению надежности, организацию служб надежности, экономические, административные и правовые отношения.

Техническое оснащение определяется оснащением современной вычислительной техникой, уровнем технологии, методологии, наличием и совершенством экспериментальной базы.

Информационное обеспечение включает средства и способы сбора, накопления, обработки и использования данных о процессах создания и эксплуатации системы на всех этапах ее жизненного цикла.

Методическое обеспечение включает научный фундамент, а также прикладную теоретическую базу анализа и прогнозирования надежности технических систем.

К факторам третьей группы относятся основные результаты развития научно-технического направления на данном этапе. С помощью этих результатов на каждом этапе формируются начальные условия для следующего этапа. Для направления «Надежность технических систем» наиболее показательным является изменение стандартов в области качества, метрологии, норм внешних и внутренних воздействий и т.д.

Отдельное направление в теории надежности технических систем занимает проблема испытаний.

Испытания технических систем на надежность предназначены для получения информации о надежности с учетом комплексного влияния всех действующих при эксплуатации факторов.

По целевой направленности испытания на надежность подразделяются на: определительные, контрольные и специальные.

Определительные — испытания, в результате которых определяются количественные значения показателей надежности системы.

Контрольные — испытания, в результате которых контролируются показатели надежности системы и по косвенным признакам с определенной степенью риска эти системы относят либо к категории годных, либо к категории бракованных (негодных).

Специальные — испытания, предназначенные для исследования некоторых явлений, процессов, связанных с оценкой надежности.

Как правило, испытания систем на надежность подразделяются на четыре этапа.

Первая стадия испытаний — математическое моделирование условий функционирования системы и теоретическая оценка ее надежности.

Вторая — испытания на микромасштабном уровне в лабораторных условиях, когда выясняется влияние на надежность системы явлений и условий, не поддающихся математическому моделированию.

Третья стадия — полунатурные испытания, где уточняются масштабные коэффициенты моделирования, уточняются константы, а также оценивается одновременное влияние нескольких воздействий на отдельные узлы системы.

Заключительным этапом являются натурные испытания, подтверждающие справедливость принятых гипотез и позволяющие оценить надежность системы при комплексном воздействии на систему в целом различных факторов в процессе эксплуатации.

1.2. Надежность технических систем и техногенный риск.

Надежность технической системы – это вероятность сохранения системой работоспособности в течение определенного времени.

Техническую систему будем представлять в виде сложной системы следующей иерархии:

- техническая система;
- устройства;
- элементы.

Техническая система — совокупность взаимосвязанных элементов (объектов, устройств), обеспечивающих выполнение конкретных практических задач.

Устройством называется законченная конструкция, которая, являясь частью системы, имеет самостоятельное целевое назначение.

Элементы — это части системы или устройства, которые выполняют в нем определенные функции и не могут иметь самостоятельного (вне связи с другими элементами или устройствами) применение.

1.2. Причины недостаточной надежности технических систем.

Основными причинами отказов технических систем являются внезапные (случайные) отказы, отказы вследствие ухудшения характеристик элементов (старение, износ), а также по вине скрытых производственных дефектов, характерных для начального периода эксплуатации, или нарушения условий эксплуатации [3].

Возрастание интенсивности отказов технических систем связано, как правило, с ужесточением условий их функционирования (эксплуатации) и с недостаточной квалификацией обслуживающего персонала.

В целом, все причины, приводящие к снижению надежности технических систем, можно разделить на следующие: конструктивные, производственные, эксплуатационные, организационные.

Конструктивные причины: низкая надежность элементной базы, неправильный выбор элементов, неудачное схемно-компоновочное решение, недостаточная унификация элементов, недостаточная отработка технологий на этапах испытаний.

Производственные причины: нарушение качества материалов, недостаточный контроль входных параметров, недостаточная отработка технологии производства и сборки устройств, общая низкая культура производства.

Эксплуатационные причины: низкая квалификация технического персонала, низкая эффективность контрольно—проверочной аппаратуры, нарушение условий эксплуатации.

Организационные причины: отсутствие требований по поддержанию заданных показателей надежности, несоответствие заводских испытаний реальным условиям эксплуатации, неритмичность эксплуатации.

1.3. Цена надежности.

Стоимость технической системы, как правило, определяется стоимостью ее создания (строительства) и стоимостью эксплуатации системы и зависит от надежности системы.

$$C_{\Sigma}(P) = C_0(P) + C_э(P)$$

где $C_{\Sigma}(P)$ — общая стоимость технической системы;

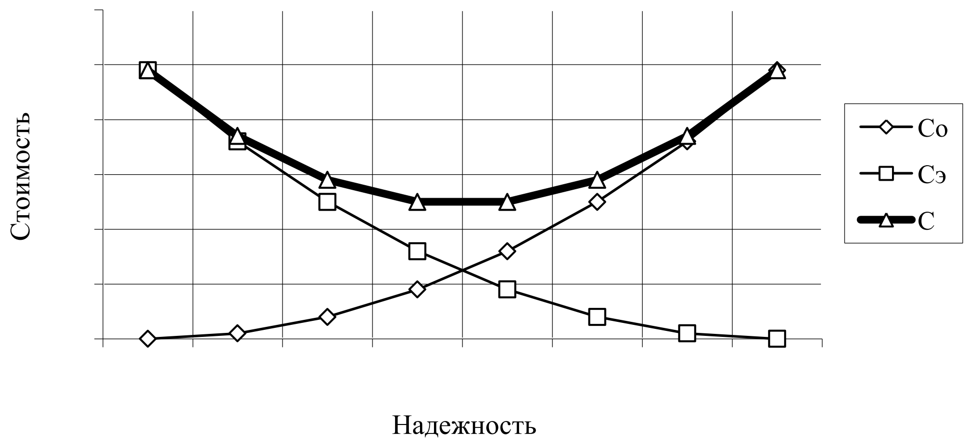
$C_0(P)$ — стоимость создания технической системы;

$C_э(P)$ — стоимость эксплуатации технической системы,

P — надежность системы.

Расходы, связанные с созданием технической системы, являются функцией требований к ее надежности. Чем выше требования к надежности системы, тем выше ее стоимость, т.е. функция C_0 (P) — неубывающая функция надежности системы (рис. 1.1).

Стоимость эксплуатации технической системы также зависит от ее надежности, но в обратной зависимости. Чем выше надежность системы, тем ниже стоимость ее эксплуатации, чем надежнее создана система, тем меньше



средств она требует на свое поддержание в исправном состоянии.

Рис. 1.1. Изменение суммарной стоимости C_Σ системы в зависимости от ее надежности Р, затрат на эксплуатацию $C_Э$ и создание системы C_0.

Рациональное распределение средств на повышение надежности технических систем на этапе проектирования, изготовления, испытания и эксплуатации может привести к существенной экономии суммарных расходов обеспечения функционирования системы. Зачастую распределение средств, выделенных на снижение негативных последствий аварий принимается за управление риском.

Анализ опасностей и оценки риска аварий на опасных производственных объектах (далее - анализ риска аварий) представляют собой совокупность научно-технических методов исследования опасностей возникновения, развития и последствий возможных аварий, включающую планирование работ, идентификацию опасностей аварий, оценку риска аварий, установление степени опасности возможных аварий, а также разработку и своевременную корректировку мероприятий по снижению риска аварий [4].

Риск аварии [5] - мера опасности, характеризующая возможность возникновения аварии на опасном производственном объекте и соответствующую ей тяжесть последствий. В анализе риска аварий в качестве основных количественных показателей опасности (показателей риска) рекомендуется использовать:

технический риск - вероятность отказа технических устройств с последствиями определенного уровня (класса) за определенный период функционирования опасного производственного объекта;

индивидуальный риск - ожидаемая частота (частота) поражения отдельного человека в результате воздействия исследуемых поражающих факторов аварии;

потенциальный территориальный риск (или потенциальный риск) – частота реализации поражающих факторов аварии в рассматриваемой точке на площадке опасного производственного объекта и прилегающей территории;

коллективный риск (или ожидаемые людские потери) - ожидаемое

количество пораженных в результате возможных аварий за определенный период времени;

социальный риск (или риск поражения группы людей) - зависимость частоты возникновения сценариев аварий F, в которых пострадало на определенном уровне не менее N человек, от этого числа N. Характеризует социальную тяжесть последствий (катастрофичность) реализации совокупности сценариев аварии и представляется в виде соответствующей F/N-кривой;

ожидаемый ущерб - математическое ожидание величины ущерба от возможной аварии за определенный период времени;

материальный риск (или риск материальных потерь) - зависимость частоты возникновения сценариев аварий F, в которых причинен ущерб на определенном уровне потерь не менее G, от количества этих потерь G. Характеризует экономическую тяжесть последствий реализации опасностей аварий и представляется в виде соответствующей F/G-кривой.

Для некоторых ситуаций определены допустимые значения риска, например, нормативные значения пожарного риска для производственных объектов [6].

Наиболее распространенной методикой количественной оценки риска является мультипликативная форма его представления [7]:

$$\boldsymbol{R(C_{\Sigma}) = W(C_a) \cdot M(C_y)}$$

где: $\boldsymbol{R(C_{\Sigma})}$- значение риска;

$\boldsymbol{W(C_a)}$ – вероятность возникновения хотя бы одной аварии за рассматриваемый период работы объекта или технической системы;

$\boldsymbol{M(C_y)}$- ожидаемый ущерб при возникновении аварии;

$С_{\boldsymbol{\Sigma}}$ – средства, выделяемые на снижение риска;

$С_{\boldsymbol{a}}$ – средства, выделяемые на снижение вероятности реализации аварии;

$\boldsymbol{C_y}$ – средства, выделяемые на снижение ожидаемого ущерба в случае возникновения аварии.

Основной принцип управления риском состоит в приоритетном максимальном снижении вероятности возникновения аварии, и во вторую очередь – забота о сокращении ожидаемого ущерба.

Возникновение аварии очевидным образом непосредственно связано с надежностью технических систем, ее устройств или элементов.

Следует заметить, что вероятность возникновения хотя бы одной аварии имеет существенное отличие от вероятности возникновения ровно одной аварии.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ.

Теория надежности в большинстве случаев оперирует случайными величинами, поэтому большая часть понятий и определений связана с понятийным аппаратом теории вероятностей.

Отказ — полная или частичная утрата работоспособности элементом, устройством или рассматриваемой технической системой.

Исправность — состояние системы, при котором она в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным в отношении как основных параметров, так и «второстепенных».

Работоспособность — состояние системы, при котором она в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным в отношении ее основных параметров.

Безотказность — свойство системы сохранять работоспособность в течение заданного интервала времени в определенных условиях эксплуатации.

Неисправность — состояние системы, при котором она в данный момент времени не соответствует хотя бы одному из требований, установленных в отношении как основных параметров, так и «второстепенных».

2.1. Основные количественные характеристики надежности и связь между ними.

Основной количественной характеристикой надежности является вероятность безотказной работы, определяемая как вероятность $P(t)$ нахождения системы в исправном состоянии в течение времени $T \geq t$, где T – – случайная величина продолжительности работы системы до отказа, t — детерминированная величина текущего времени или его конкретное значение [8]:

$$P(t) = W(T \geq t) \tag{2.1}$$

где W(T) — вероятность реализации события, заключающегося в том, что отказ системы не произойдет ранее t.

Функция P(t) обладает следующими свойствами:

$P(0) = 1$, $P(\infty) = 0$, $P(t_2) \leq P(t_1)$ при $t_2 > t_1$,

т.е. функция P(t) — невозрастающая функция времени.

Эту функцию часто называют функцией надежности или просто надежностью технической системы.

Характеристикой, противоположной надежности, является вероятность отказа Q(t), как вероятность того, что устройство или техническая система откажет в течение времени $T < t$:

$$Q(t) = W(T < t) \tag{2.2}$$

Свойства функции Q(t) : $Q(0) = 0$, $Q(\infty) = 1$, $Q(t_2) \geq Q(t_1)$ при $t_2 > t_1$.

Таким образом, функция ненадежности Q(t) представляет собой функцию распределения времени исправной работы системы F(t) (П 2.20) Приложения 2.

Очевидно: $Q(t) + P(t) = 1$; $Q(t)=1-P(t)$;

$$Q'(t) = -P'(t) \tag{2.3}$$

т.е. система может находиться либо в исправном, либо в неисправном состоянии.

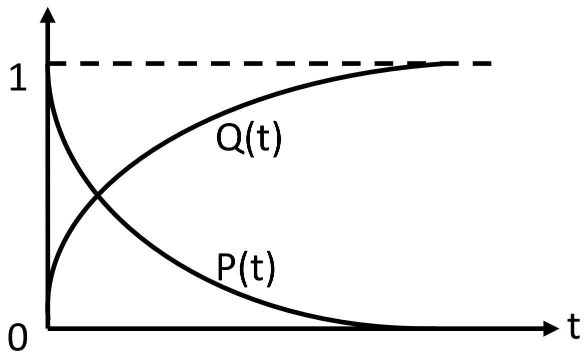


Рис. 2.1. Характер изменения функций надежности и отказов во времени.

Плотность f(t) распределения времени работы системы до отказа согласно определению плотности из классической теории вероятностей имеет вид (П 2.21) приложения 2:

$$f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(1-P(t)\right)=-\frac{dP(t)}{dt} \tag{2.4}$$

Наряду с аналитическими методами определения различных параметров надежности широко используются статистические методы, с помощью которых определяются так называемые статистические характеристики надежности систем. Эти характеристики представляют собой результаты обработки экспериментальных данных или данных прямых наблюдений.

Поскольку в эксперименте невозможно произвести наблюдения при $t\to\infty$ или на бесконечно малом временном интервале $\Delta t\to 0$, а также при бесконечно большом числе испытываемых систем, то статистические характеристики следует рассматривать как оценочные или приближенные к теоретическим. Статистическая плотность отказов $f^*(t)$ в теории надежности определяют в виде отношения:

$$f^*(t)=\frac{\Delta n(t,\,\Delta t)}{N_0\cdot\Delta t} \tag{2.5}$$

где $\Delta n(t, \Delta t)$ — число отказавших элементов на интервале Δt (от момента времени t до момента $t+\Delta t$); N_0 — общее число элементов, выставленных на испытания; Δt —интервал времени проведения испытаний или наблюдений.

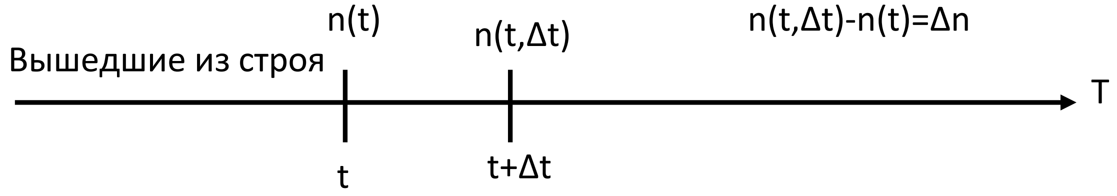


Рис. 2.2. Порядок вычисления количества отказавших элементов Δn.

Статистически функция распределения времени исправной работы $Q^*(t)$ системы оценивается как отношение числа устройств n(t), вышедших из строя за время от начала испытаний до некоторого момента t, к общему числу элементов или устройств N_0, поставленных на испытание:

$$Q^*(t) = \frac{n(t)}{N_0} \tag{2.6}$$

Величину Q*(t) называют частостью отказов, которая является оценкой функции распределения отказов или вероятности отказа.

Очевидно, что чем больше проведено число независимых испытаний, тем ближе величина частости к соответствующему значению вероятности. В теории вероятностей такой характер приближения одних величин к другим чрезвычайно употребителен и для его описания введен специальный термин — сходимость по вероятности.

Согласно первой предельной теореме (закон больших чисел), последовательность случайных величин x_n сходится по вероятности к величине ϑ, если при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ вероятность неравенства $|x_n - \vartheta| < \varepsilon$ с увеличением n неограниченно приближается к единице.

$$\lim_{n\to\infty} W\left(|x_n - \vartheta| < \varepsilon\right) = 1$$

Таким образом, можно утверждать, что с увеличением числа опытов частость события сходится к его вероятности по вероятности.

Одной из характеристик надежности технических систем является частота отказов, в дальнейшем обозначаемая a(t).

Частотой отказов $a^*(t)$ называется отношение числа отказавших образцов в единицу времени к числу образцов, первоначально установленных на испытание при условии, что отказавшие образцы не восстанавливаются и не заменяются исправными.

$$a^*(t) = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} \tag{2.7}$$

Выражение (2.9) является статистическим определением частоты отказов. Вместе с тем этой характеристике можно придать вероятностное определение.

Число отказавших образцов на интервале Δt может быть определено по формуле:

$$n(t,\,\Delta t) = -\left[N(t+\Delta t) - N(t)\right] \tag{2.8}$$

где N(t) — число образцов, исправно работающих к моменту t; N(t+Δt) — число образцов, исправно работающих к моменту t+Δt.

При достаточно большом числе образцов N_0 справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot P(t) \\ N(t+\Delta t) &= N_0 \cdot P(t+\Delta t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

где P(t)- вероятность сохранения работоспособности исследуемым элементом до момента t, т.е. надежность рассматриваемого элемента. Подставляя (2.8) в (2.9) и учитывая (2.7), получим:

$$a^*(t) = -\frac{N_0 \cdot \left[P(t+\Delta t) - P(t)\right]}{N_0 \cdot \Delta t} \tag{2.10}$$

Устремляя к нулевому пределу интервал Δt, получим с учетом определения Δn(t, Δt), принятого в (2.5):

$$a(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -P'(t) \tag{2.11}$$

или

$$a(t) = Q'(t)$$

$$a(t) = f(t) \tag{2.12}$$

Последнее равенство подтверждает идентичность (2.7), (2.10).

Из выражения (2.12) следует утверждение, что частота отказов представляет собой плотность распределения времени работы системы до ее отказа.

Наиболее употребительной в теории надежности является такая характеристика, как интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} \qquad (2.13)$$

т.е. λ(t) является условной плотностью распределения вероятности исправной работы системы, вычисленной при условии, что к моменту t система была исправна.

Статистической интерпретацией интенсивности отказов λ(t)* является отношение числа однотипных устройств Δn(Δt) , вышедших из строя в интервале времени Δt , к числу устройств N(t) из общего числа N_0 , поставленных на испытания, продолжающих к моменту времени t оставаться исправными, умноженному на длину интервала Δt, при условии, что отказавшие образцы не восстанавливаются и не заменяются исправными.

$$\lambda^*(t) = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t} \qquad (2.14)$$

Разделив числитель и знаменатель (2.14) на N_0, получим:

$$\lambda^*(t) = \frac{\Delta n(t, \Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} \cdot \frac{N_0}{N(t)}, \qquad \text{или} \qquad \lambda^*(t) = \frac{a^*(t)}{P^*(t)} \qquad (2.15)$$

Таким образом, интенсивность отказов определяется как отношение частоты отказов к статистической оценке вероятности P(t) исправной работы рассматриваемого элемента или устройства

$$\boldsymbol{\lambda(t)} = \frac{\boldsymbol{a(t)}}{\boldsymbol{P(t)}} \qquad (2.16)$$

$$P(t)=\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \qquad (2.17)$$

Типичная кривая изменения интенсивности отказов технических систем представлена на рисунке 2.3.

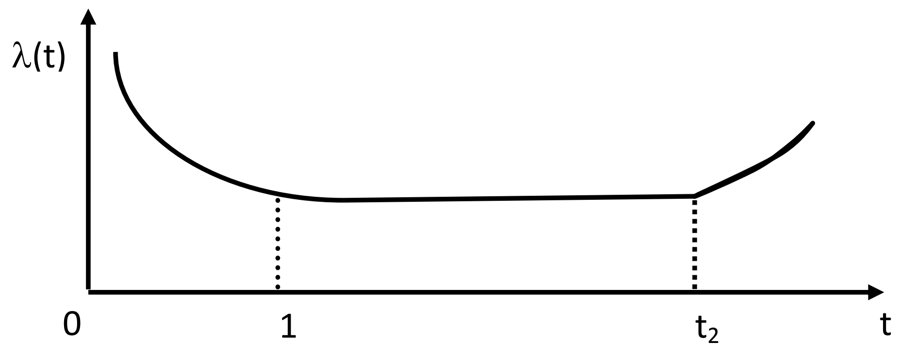


Рис. 2.3. Типовая зависимость интенсивности отказов технических систем от времени.

Как видно из рис. 2.3 кривая λ(t) имеет три характерных участка. Первый участок (от 0 до t_1) — участок приработки, второй участок (от t_1 до t_2) — участок нормальной эксплуатации системы, третий временной интервал (от t_2 и далее) — участок старения системы. Здесь уместно отметить, что в период нормальной работы системы (от t_1 до t_2), как правило, интенсивность отказов не зависит от времени, λ=const.

Выражение (2.16) с учетом (2.11) приобретает вид:

$$\boldsymbol{\lambda(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \cdot \left(\frac{1}{P(t)}\right)}$$

$$\lambda(t)dt = -\frac{dP(t)}{P(t)} = -d(\ln P(t)) \qquad (2.18)$$

Интегрируя (2.18) при начальном условии P(0) = 1, получим:

$$\int \lambda(t)dt = -\int d(\ln P(t)); \quad откуда \quad \ln P(t) = -\int \lambda(t)dt + C$$

или

$$P(t) = \left\{\exp\left[-\int \lambda(t)dt\right]\right\} \cdot C$$

Поскольку $P(0) = 1, \quad то \quad C \cdot \exp(-\int \lambda(t)dt) = C \cdot P(0) = 1,$ т.е. C=1.

Нижний предел интегрирования равен 0, т.к. отсчет времени производится от момента включения системы в работу.

Верхний предел определяется аргументом функции P(t) т.е. значением аргумента t.

Окончательно получаем:

$$P(t)=\exp\left[-\int_{0}^{t}\lambda(x)dx\right] \tag{2.19}$$

Выражение (2.19) определяет вероятность безотказной работы технических систем и является одним из основных в теории надежности.

Среднее время до отказа технической системы T_C определяется как его математическое ожидание с нижним пределом интегрирования, равным нулю, поскольку время не имеет отрицательных значений:

$$T_C=\int_{0}^{\infty} z\cdot f(z)dz \tag{2.20}$$

Статистической интерпретацией среднего времени до первого отказа является среднее арифметическое значение времени работы устройства до ее первого отказа:

$$T_C^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{N_0} t_i}{N_0}=\sum_{i=1}^{N_0} t_i\cdot R_i \tag{2.21}$$

где R_i — называют частостью времени отказов t_i; t_i — время работы i-го элемента до первого отказа; N_0 — число элементов, поставленных на испытание.

Выражение (2.20) можно представить в ином виде, подставив выражение плотности f(t) согласно (2.4):

$$\begin{gathered} T_C=\int_{0}^{\infty} x\cdot f(x)dx; \qquad f(x)=-\frac{dP(x)}{dx} \\ T_C=\int_{0}^{\infty} x\cdot\left[-\frac{dP(x)}{dx}\right]dx=-\int_{0}^{\infty} x\cdot dP(x) \end{gathered} \tag{2.22}$$

Произведем интегрирование по частям:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u = x;\ du = dx$$

$$dv = dP(x) \Rightarrow v = P(x)$$

$$T_C = -\int_0^\infty x \cdot dP(x) = -x \cdot P(x)\,|_0^\infty + \int_0^\infty P(x)dx$$

$$P(x) = \exp(-\lambda x);$$

$$\begin{cases} x \cdot \exp(-\lambda x)\ при\ x = 0 \Rightarrow 0 \\ x \cdot \exp(-\lambda x)\ при\ x = \infty \Rightarrow 0 \end{cases}$$

$$тогда$$

$$T_C = 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \exp(-\lambda x)d(\lambda x) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(-\exp(-\lambda x)\,|_0^\infty\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(-\exp(-\lambda \cdot \infty\right) + \exp(-\lambda \cdot 0)) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(0 + 1\right) = \frac{1}{\lambda} \tag{2.23}$$

Дисперсия D[T] случайного времени T безотказной работы системы:

$$D[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - T_c)^2 \cdot f(\xi)d\xi \tag{2.24}$$

где T — случайное время безотказной работы системы; T_c — математическое ожидание времени работы системы до отказа; f(ξ) — дифференциальный закон распределения случайного времени безотказной работы системы.

Для случая распределения случайной величины по закону Пуассона при постоянном значении интенсивности отказов $\lambda(t) = const = \lambda$:

$$f(\xi) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) \tag{2.25}$$

Тогда формула для вычисления дисперсии D[T] может быть выведена на основании следующих преобразований с учетом того, что время не может быть отрицательным, т.е. в (2.22) нижний предел интегрирования равен нулю:

$$\begin{gathered}
D[T] = \int_0^{+\infty} (\xi - T_c)^2 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \left(\xi^2 - 2\xi T_c + T_c^2\right) \times \\
\times \lambda \cdot \exp\left(-\lambda\xi\right) d\xi = \\
= \lambda \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \xi^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi - 2 \cdot T_c \int_0^{\infty} \xi \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi + \\ + T_c^2 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{2.26}$$

Для вычисления этих интегралов вводятся обозначения:

$$\xi^2 = u; \quad du = 2\xi, \quad \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi = dv, v = -\frac{1}{\lambda} \exp\left(-\lambda \cdot \xi\right),$$

тогда, пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем:

$$\begin{gathered}
\int_0^{+\infty} \xi^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi = -\frac{\xi^2}{\lambda} \exp(-\lambda \cdot \xi) \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \times \\
\times \left[\int_0^{+\infty} \xi \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi \right] = \\
= 2 \cdot T_c \cdot \int_0^{+\infty} \xi \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi
\end{gathered}$$

Подставляя это выражение в (2.24), получим:

$$D[T] = \lambda \cdot T_c^2 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda \cdot \xi) d\xi =$$

$$\lambda \cdot T_c^2 \times \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\lambda \cdot T_c^2}{\lambda} = T_c^2 \tag{2.27}$$

2.2. Характеристики надежности технических систем.

Коэффициент стабильности надежности $К_{ст}$ — отношение значений вероятностей исправной работы устройства для двух произвольных периодов времени;

$$К_{ст}(t, \tau) = \frac{P(t+\tau)}{P(t)} \tag{2.28}$$

Если коэффициент стабильности равен единице, то надежность системы на участке τ остается неизменной.

На практике часто используется показатель изменения надежности:

$$\delta P(t, \tau) = \frac{P(t) - P(t+\tau)}{P(t)} \tag{2.29}$$

P(t) — вероятность нахождения системы в исправном состоянии в течение времени $T \geq t$.

Коэффициент стоимости эксплуатации $К_{сэ}$ — отношение стоимости одного года эксплуатации системы $C_э$ к стоимости изготовления системы C_0:

$$K_{сэ} = \frac{C_э}{C_0} \tag{2.30}$$

В корректной постановке $C_э$=$C_э$(t) и чем больше срок эксплуатации системы, тем выше износ ее элементов и тем выше значение стоимости эксплуатации. Однако зачастую в инженерной практике принимают $C_э$=const

Особого внимания заслуживает коэффициент эффективности системы.

$$K_f(t) = \frac{P(t)\cdot\int_0^t Cp(x)dx}{C_0 + \int_0^t m(x)dx + \left[1 - P(t))\right]\cdot\int_0^t C_Э(x)dx} \qquad (2.31)$$

где C_0 — стоимость разработки (создания) системы; P(t) — надежность технической системы; Cp(x) — мгновенное значение прибыли; m(x) — мгновенное значение платы за аренду (за загрязнение окружающей среды); Cэ(x) — мгновенное значение расходов на эксплуатацию (ремонт) системы.

Рассмотрим расчетный пример

Пример 2.1.

Для расчетного примера приняты следующие значения величин: Интенсивность отказов λ=0.05 (1/год); стоимость C_0=150 (усл. ед.); польза Cp(x)=40 (усл.ед.); амортизация m(x)=3 (усл. ед.); эксплуатация $C_Э(x) = C_Э + K_Э \cdot x$, где $C_Э$=1(усл. ед.), $K_Э$=0.5 (усл. ед.), что после интегрирования приводит к выражению:

$$C_Э(t) = C_Э \cdot t + \left(K_Э \cdot t^2\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t)$$

Результаты расчетов по программе в Matlab:

```
%Вычисление рационального срока эксплуатации системы

t=0:0.1:30;
c0=150;L=0.05;cp=40.*t;m=3.*t;ce=t+0.25.*t.^2;
p=exp(-L.*t);
A=p.*cp;
B=c0+m+(1-p).*ce;
Kf=A./B;
plot(t,Kf);
K1=1;
```

```
plot(t,Kf,'k-',t,K1,'k+','LineWidth',3)
xlabel('t')
ylabel('Kf')
grid on
title('Kf')
```

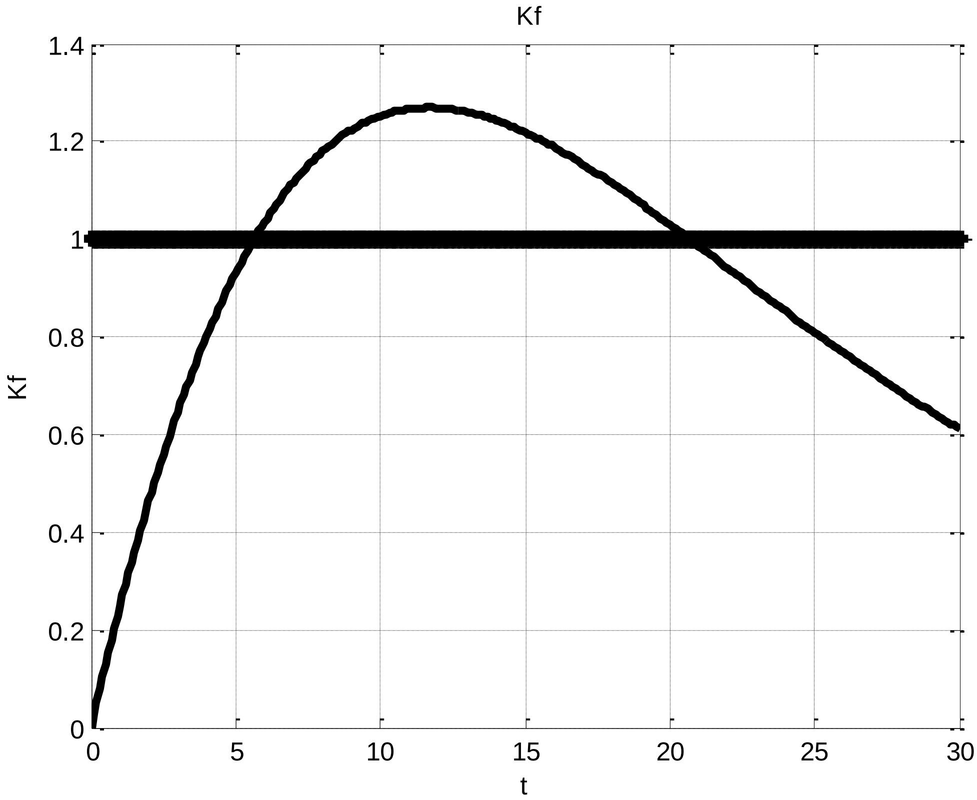


Рис. 2.4. Изменение коэффициента эффективности системы и ее надежности.

Как видно из графиков рис. 2.4 срок рентабельности технической системы находится в пределах от 6 лет до 20 лет, т.е. определяется тем временем, в пределах которого числитель (2.31) превышает знаменатель или «прибыль» системы выше расходов на ее создание и эксплуатацию.

Вопросы для самоконтроля.

Дайте определение технической системы, устройства и элемента. Что называется надежностью технической системы.

Назовите основные причины недостаточной надежности систем.

Что такое цена надежности? Как изменяется стоимость технической системы в зависимости от ее надежности?

Дайте определение основных понятий теории надежности.

Назовите основные количественные характеристики надежности технической системы.

Напишите выражения для плотности распределения времени безотказной работы системы, частоты отказов, интенсивности отказов и частости отказов технической системы.

Выведете среднее значение времени работы системы до отказа.

3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ НЕРЕЗЕРВИРОВАННЫХ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ.

3.1. Сложные технические системы и определение их надежности.

Обычные методы количественной оценки критериев надежности сложных систем базируются на том, что отказы системы образуют простейший поток событий.

Все системы условно можно разделить на два класса:

системы без избыточности,

системы с избыточностью.

Под системами без избыточности будем понимать такие системы, у которых выход из строя любого элемента приводит к выходу из строя всей системы. Системы с избыточностью способны продолжать свое функционирование в случае выхода из строя некоторых ее элементов.

Системы без избыточности, отказ которых не всегда происходит одновременно с отказами отдельных элементов, называются последовательными системами с накоплением нарушений или просто системами с накоплением нарушений.

Таким образом, системы, не имеющие избыточности, (последовательные системы) можно в свою очередь разбить на два класса:

последовательные системы без накопления нарушений (системы, у которых появление нарушений в работе элементов связано с одновременным отказом системы);

последовательные системы с накоплением нарушений, когда нарушение в смысле постепенного ухода параметров элементов по тем или иным причинам понимается как постепенный отказ.

Далее рассматриваются системы без избыточности и без накопления нарушений.

Система без избыточности с точки зрения надежности рассматривается как совокупность последовательно соединенных элементов. Это означает, что выход из стоя любого элемента выводит из строя всю систему. При таком подходе в ряде случаев для реальных систем значения критериев надежности получаются заниженными, т.к. в большинстве сложных технических систем отказ многих элементов не приводит к одновременному отказу всей системы.

Вполне естественно предположить, что функциональное усложнение системы может привести как к повышению, так и к снижению надежности. Чем больше число элементов в системе, тем, в общем случае, ниже ее надежность при прочих равных условиях.

Все это обуславливает необходимость разработки таких методов оценки надежности, которые отражали бы структурные (функциональные) особенности системы.

Важнейшее значение при оценке надежности играет понятие состояния системы.

Под состоянием системы в момент времени τ понимается множество количественных значений параметров элементов системы, которые в этот момент полностью определяют ее функциональные возможности.

Под функцией качества чаще всего понимают или совокупность параметров выходного сигнала системы, или совокупность параметров, характеризующих свойство продукта, производимого данной (технической) системой.

Надежностью системы будем называть вероятность того, что случайное время отказа системы (T) будет не меньше требуемого значения (t) и система выполнит до момента (t) любое из требований, для которых она создана.

При таком определении надежность представляет собой некую усредненную интегральную характеристику и можно представить две системы надежные на рассматриваемом интервале времени (согласно определению), но неравно надежные в сравнении.

Решая задачу по определению надежности, во многих случаях можно рассматривать только изменения состояния системы в результате внезапных отказов ее элементов, полагая, что постепенные отказы отсутствуют. Такой подход справедлив для интервалов времени, не включающих границы ресурсов элементов по долговечности. Естественно, можно решать и задачу определения надежности технической системы с учетом как внезапных отказов, так и отказов элементов по причине старения.

При таких предположениях, если система состоит из n элементов (каждый из которых может находиться лишь в одном из двух состояний: исправен или неисправен), система может иметь 2^n состояния

Напомним, что интенсивностью отказов называется отношение числа отказавших образцов аппаратуры (устройств, элементов, систем) в единицу времени к среднему числу образцов, исправно работающих в данный отрезок времени при условии, что отказавшие образцы не восстанавливаются и не заменяются исправными.

Напомним так же, что интенсивность внезапных отказов элементов в процессе эксплуатации, (когда фазой приработки и фазой старения можно пренебречь) сохраняет постоянное во времени значение.

Предполагается, что вероятность самостоятельного перехода любого элемента системы из неисправного состояния в исправное равна нулю, т.е. неисправное состояние является поглощающим, или иначе, рассматриваются невосстанавливаемые системы.

Для последовательных систем без накопления нарушений, принимая, что времена отказов элементов являются независимыми случайными величинами, в силу условий отсутствия последействия и ординарности потока отказов надежность системы можно выразить через надежность каждого элемента:

$$P(t) = \prod_{j=1}^{n} p_j(t) \qquad (3.1)$$

где P(t) — надежность системы на момент t; $p_j(t)$ —надежность j-го элемента системы.

Откуда следует, что надежность технической системы без избыточности зависит от надежности всех элементов и становится равной нулю в случае равенства нулю надежности хотя бы одного из них.

По определению плотность распределения отказов системы равна отношению:

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$$, тогда, с учетом (3.1), имеем: (3.2)

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i(t)}{p_j(t)} \qquad (3.3)$$

где $f_j(t) = -\dfrac{dp_j}{dt}$ — плотность распределения отказов j–го элемента системы.

Вспомним, что производная произведения имеет вид: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Докажем справедливость (3.3). Пусть для простоты n=3, тогда:

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{dp_1(t)}{dt} \cdot p_2(t) \cdot p_3(t) - \\ &- \frac{dp_2(t)}{dt} \cdot p_1(t) \cdot p_3(t) - \frac{dp_3(t)}{dt} \cdot p_1(t) \cdot p_2(t) = \\ &\frac{dp_1(t)}{dt} \cdot \frac{p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot p_3(t)}{p_1(t)} - \\ &- \frac{dp_2(t)}{dt} \cdot \frac{p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot p_3(t)}{p_2(t)} - \frac{dp_3(t)}{dt} \cdot \frac{p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot p_3(t)}{p_3(t)} = \\ &\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \cdot \frac{1}{p_i(t)} \cdot \prod_{j=1}^{n} p_j(t) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Поскольку интенсивность отказов системы $\lambda_C(t) = \dfrac{f(t)}{P(t)}$, с учетом (3.1) и (3.4) получим:

$$\lambda_C(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t)}{p_i(t)} \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i(t) \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} p_i(t)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \qquad (3.5)$$

т.е. интенсивность отказов $\lambda_C(t)$ последовательной системы без избыточности равна сумме интенсивностей отказов, входящих в эту систему элементов.

Еще раз напомним, что полученные зависимости справедливы в пределах принятых ранее допущений:

- выход из строя элемента приводит к выходу из строя всей системы;

- моменты выхода элементов из строя представляют собой независимые случайные величины.

Таким образом, приведенные расчетные соотношения справедливы для сложных технических систем (для оценки времени их безотказной работы) одноразового действия.

3.2. Оценка надежности последовательных систем без накопления нарушений при наличии только внезапных отказов элементов.

Полученная в предыдущем параграфе формула для оценки надежности системы, опирается на надежность ее элементов:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) \tag{3.6}$$

В общем виде надежность одного элемента определяется соотношением:

$$p_i(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(u) du \right] \tag{3.7}$$

После подстановки (3.7) в (3.6), получим:

$$P(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \lambda_i(u) du \right] \tag{3.8}$$

В случае, когда поток отказов элементов является простейшим, т.е. ординарным, стационарным (λ_i не зависит от времени t) и не обладает последействием, что характерно для потоков внезапных отказов элементов, надежность (вероятность безотказной работы) i-го элемента определяется по формуле:

$$p_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t) \tag{3.9}$$

Надежность системы в этом случае определится соотношением:

$$P(t) = \exp(-t \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) \tag{3.10}$$

используя обозначение $\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, можно записать:

$$P(t) = \exp(-\lambda_C \cdot t) \tag{3.11}$$

В предположении о стационарности потока отказов, λ_i=const, (интенсивности отказов элементов не зависят от времени) среднее время T_C безотказной работы системы и функция частоты отказов $a_C(t)$ могут быть вычислены по формулам:

$$T_C = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{3.12}$$

$a(t) = -P'(t)$,

или $a(t) = Q'(t)$,

или $a(t) = f(t)$,

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt},$$

тогда:

$$a_C(t) = \lambda_C \cdot \exp(-\lambda_C \cdot t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \tag{3.13}$$

Оценим границы изменения надежности системы при учете только внезапных отказов ее элементов.

Верхнюю границу значений надежности определим в предположении о том, что система состоит всего из двух условных элементов: один условный элемент представляет собой объединение n-1 элемента, интенсивности отказов которых принимаем равными нулю, т.е. первый условный элемент абсолютно надежен, а второй условный элемент системы представляет собой реальный элемент с максимальным значением интенсивности отказов λ_{max} среди всех n элементов системы.

Тогда верхнее значение надежности системы $\overline{P}(t)$ будет равно:

$$\overline{P}(t) = \exp(-\lambda_{\max} \cdot t) \tag{3.14}$$

Нижнюю границу значений надежности технической системы $\underline{P}(t)$, определим в предположении о том, что все n элементов системы имеют одинаковые интенсивности отказов, равные интенсивности отказов самого ненадежного элемента, т.е. максимальную интенсивность отказов среди всех n элементов:

$$\underline{P}(t) = \exp(-n \cdot \lambda_{\max} \cdot t) \tag{3.15}$$

Тогда интервал возможных значений технической системы по внезапным отказам определится соотношением:

$$\underline{P}(t) \le P(t) \le \overline{P}(t) \tag{3.16}$$

3.3. Оценка надежности последовательных сложных систем без накопления нарушений с учетом старения (износа) элементов.

В реальных условиях на работу технической системы будут оказывать влияние не только аварийные отказы элементов, но и отказы по причине старения.

Будем полагать, что аварийные отказы и отказы по причине износа независимы и введем обозначения:

$Q_1(t)$, $Q_2(t)$, …, $Q_n(t)$ — вероятности выхода из строя элементов в результате внезапных отказов,

$Q_1^{(1)}(t),\ Q_2^{(1)}(t), \ldots, Q_n^{(1)}(t)$ — вероятности выхода элементов из строя в результате старения,

$p_1(t)$, $p_2(t)$,…,$p_n(t)$ — вероятности безотказной работы элемента по аварийности,

$p_1^{(1)}(t), p_2^{(1)}(t), \dots, p_n^{(1)}(t)$ — вероятности безотказной работы элементов по износу.

Тогда вероятность $P_i(t)$ безотказной работы i-го элемента определится соотношением:

$$p_i(t) = p_i(t) \cdot p_i^{(1)}(t) \tag{3.17}$$

С учетом принятых ранее допущений для системы в целом имеем:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{(1)}(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) \tag{3.18}$$

Поскольку было принято, что надежность i-го элемента по внезапным отказам $p_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$, уравнение для оценки надежности системы с учетом внезапных отказов и отказов вследствие старения элементов принимает вид:

$$P(t) = \exp(-\lambda_C \cdot t) \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{(1)}(t), \quad \text{где} \quad \lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3.19}$$

Пусть надежность i-го элемента по старению определяется вместо нормального закона распределения, выражением:

$$p_i^{(1)}(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_i^{(1)}(u)du \right] \tag{3.20}$$

Тогда формула для оценки надежности системы с учетом внезапных отказов элементов и отказов по причине их старения принимает вид:

$$P(t) = \exp\left[-\lambda_C \cdot t - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \lambda_i^{(1)}(u)du \right] \tag{3.21}$$

Откуда следует, что функция интенсивности отказов системы $\lambda_C(t)$ при наличии аварийных отказов и отказов по старению, в предположении, что эти отказы, а так же и отказы элементов, являются независимыми событиями, определяется уравнением:

$$\lambda_C(t) = \lambda_C + \lambda_C^{(1)}(t) = \lambda_C + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(1)}(t) \qquad (3.22)$$

где $\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ — интенсивность отказов системы только по причине внезапных отказов элементов.

Суммарная интенсивность аварийных отказов и отказов по старению для одного i-го элемента определяется уравнением:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i + \lambda_i^{(1)}(t) \qquad (3.23)$$

Надежность одного элемента с учетом аварийных отказов и отказов по старению можно вычислить по формуле:

$$p_i(t) = \exp\left[-\lambda_i \cdot t - \int_0^t \lambda_i^{(1)}(u)du\right] \qquad (3.24)$$

Найдем верхнюю $\overline{P}^{(1)}(t)$ и нижнюю $\underline{P}^{(1)}(t)$ границы надежности с учетом эффекта старения элементов.

Максимальная величина надежности (вероятности безотказной работы системы в течение времени t с момента ее включения) $\overline{P}^{(1)}(t)$ будет определяться надежностью системы, рассчитанной в предположении о наличии только внезапных отказов и надежностью самого ненадежного элемента по старению $p_{\min}^{(1)}(t)$, т.е.

$$\overline{P}^{(1)}(t) = \exp(-\lambda_C \cdot t) \cdot \left[p_{\min}^{(1)}(t)\right] \qquad (3.25)$$

Нижняя граница надежности системы $\underline{P}^{(1)}(t)$ определяется в предположении, что все n элементов по старению имеют надежность, равную надежности наименее надежного элемента, а по внезапным отказам надежность определяется по прежним методикам:

$$\underline{P}^{(1)}(t) = \exp(-\lambda_C \cdot t) \cdot \left[p_{\min}^{(1)}(t)\right]^n \qquad (3.26)$$

следовательно,

$$\underline{P}^{(1)}(t) \le P(t) \le \overline{P}^{(1)}(t) \qquad (3.27)$$

или

$$\left[p_{\min}^{(1)}(t)\right]^n \le P(t) \cdot \exp(-\lambda_C \cdot t) \le p_{\min}^{(1)}(t) \qquad (3.28)$$

Абсолютный интервал возможных значений надежности технической системы, рассчитанный с учетом внезапных отказов элементов и их отказов по старению определяется на основании объединения (3.16) и (3.27):

$$\underline{P}(t) \cdot \underline{P}^{(1)}(t) \le P(t) \le \overline{P}(t) \cdot \overline{P}^{(1)}(t) \qquad (3.29)$$

3.4. Расчетно-графическая работа № 3.1.

Исследование надежности нерезервированной технической системы в период нормальной эксплуатации (без учета старения элементов).

Основными показателями надежности нерезервированных невосстанавливаемых систем являются:

$P_c(t)$ — вероятность безотказной работы системы в течение времени t;

T_C — среднее время безотказной работы системы.

При постоянных значениях (неизменяемых во времени) интенсивностей отказов элементов, имеем:

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_C \cdot t) \qquad T_C = \frac{1}{\lambda_C},$$

где λ_C — интенсивность отказов системы, λ_i - интенсивность элемента.

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Исходные данные для выполнения лабораторной работы:

число элементов системы n=9; время T непрерывной работы системы; интенсивности λ_i отказов каждого элемента (табл. 3.1).

Требуется:

определить интенсивность отказов системы; определить ожидаемое время безотказной работы системы; построить функцию изменения вероятности безотказной работы системы; вычислить вероятность нахождения системы в рабочем состоянии в течение времени ее непрерывной работы; определить верхнюю и нижнюю границы вероятности безотказной работы системы в течение времени ее непрерывной работы.

Значения интенсивностей отказов элементов $\lambda_i \cdot 10^{-5}$ 1/час и времени непрерывной работы (час) для выполнения расчетной работы № 3.1.

Таблица 3.1

Вар-нт / Эл-т	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i=1	2.4	0.3	5.5	0.4	3.5	0.7	0.7	3.1	4.4	1.0	4.3	0.5	7.1	1.8
i=2	1.7	0.7	4.8	0.5	4.8	0.5	0.4	2.0	2.0	1.4	4.2	0.1	7.2	1.4
i=3	3.3	1.1	3.9	0.9	8.7	0.4	9.3	1.5	2.4	1.2	3.6	0.4	7.0	1.9
i=4	0.8	0.2	2.7	0.5	5.5	1.9	4.2	2.2	2.6	1.6	2.8	6.6	6.5	1.2
i=5	0.3	0.8	8.1	0.3	4.9	1.7	5.3	0.3	2.5	1.8	9.1	3.1	3.3	1.1
i=6	1.4	0.4	0.5	0.2	6.6	0.7	1.1	0.4	2.1	1.9	1.0	0.2	4.3	0.3
i=7	2.6	1.5	0.3	0.7	6.9	6.1	1.5	2.6	2.0	1.4	0.2	0.1	0.1	0.2
i=8	5.1	1.2	4.6	0.4	4.2	1.2	3.2	1.1	2.3	1.2	0.1	0.7	0.2	4.0
i=9	2.9	2.0	5.3	1.3	8.7	0.1	2.7	1.7	0.1	1.1	0.3	4.5	3.3	1.1

Пример 3.1. Расчет изменения во времени верхней и нижней границ надежности технической системы в среде Matlab [9, 10].

```
n=9;t=0:1000;
k=unifrnd(1,10,1,n);L=k*10^-4;LM=max(L);LS=sum(L);
PM=exp(-LM.*t);P=exp(-LS.*t);Pm=exp(-n*LM.*t);
plot(t,PM,'k+',t,P,'k+',t,Pm,'ko')
grid on
```

xlabel('t')

ylabel('nadegnoct')

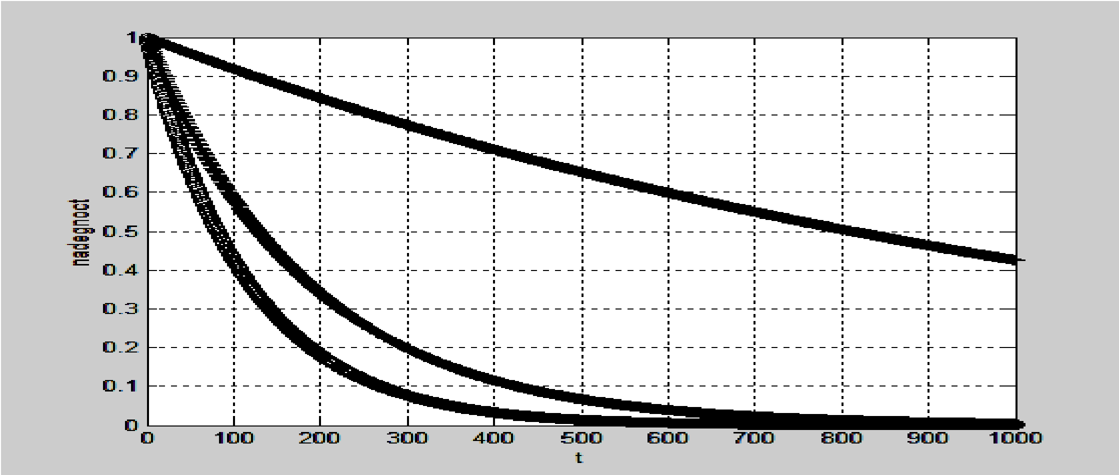


Рис.3.1. Изменение надежности P(t), верхней границы $\overline{P}(t)$=PM и нижней границы $\underline{P}(t) = P_m$ нерезервированной системы с учетом только внезапных отказов.

3.3. Марковские процессы, потоки событий.

Говорят, что в физической системе происходит случайный процесс, если она с течением времени может под влиянием случайных факторов переходить из состояния в состояние.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Плотностью (интенсивностью) потока называется среднее число событий в единицу времени.

Большое значение имеют процессы, для которых состояние системы изменяется в случайные моменты времени. Особую роль играют такого рода процессы, для которых выполнены три условия:

стационарность,

отсутствие последействия,

ординарность.

Процессы, удовлетворяющие всем этим условиям, называются простейшими или однородными процессами Пуассона.

В перечисленные условия вкладывается следующий смысл.

Стационарность означает, что для любой группы из конечного числа непересекающихся промежутков времени вероятность наступления определенного числа событий на протяжении каждого из них зависит от этих чисел и от длительности промежутков времени, но не зависит от сдвига всех временных отрезков на одну и ту же величину. В частности, вероятность появления m событий в течение промежутка от t до t +Δt не зависит от t и является функцией только аргументов m, Δt.

Отсутствие последействия означает, что вероятность наступления m событий в течение интервала времени (t, t+Δt) не зависит от того, сколько раз и как появились события ранее. Это предположение означает, что условная вероятность появления m событий на промежутке (t, t+Δt) при любом предположении о наступлении событий до момента t совпадает с безусловной вероятностью. Отсутствие последействия означает взаимную независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся моменты времени.

Ординарность выражает собой требование практической невозможности появления двух и более событий за малый промежуток времени Δt. Точнее, это означает следующее: обозначим через $P_{>1}(\Delta t)$ вероятность появления более, чем одного события за этот малый промежуток времени. Тогда условие ординарности состоит в следующем:

$$P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$$

Если $P_k(t)$ — вероятность появления ровно k событий за время t:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda \cdot t)\,,\; k = 0,1,2,...$$

то $P_0(t)$ — можно интерпретировать как вероятность того, что длительность промежутка времени между двумя последовательными появлениями событий окажется большей t.

Если события образуют пуассоновский поток, то число m событий, попадающих на любой интервал времени (t_0, $t_0+\tau$) распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot \exp(-a) \tag{3.30}$$

где a — математическое ожидание числа событий, попадающих на этот участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt \tag{3.31}$$

$\lambda(t)$ — плотность (интенсивность) потока.

Если $\lambda(t)=const$, пуассоновский поток называется стационарным пуассоновским или простейшим потоком.

Расстояние (временной интервал) T между двумя соседними событиями в простейшем потоке есть непрерывная величина, распределенная по показательному закону с плотностью:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & при \quad t < 0 \\ f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t) & при \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Для случайной величины T, распределенной по показательному закону, справедливы характеристики:

$$M[T] = \frac{1}{\lambda}; \qquad D[T] = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3.33}$$

В физической системе Σ происходит случайный процесс, если она с течением времени может под влиянием случайных факторов изменять свое состояние.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется процессом с дискретным временем, если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени t_1, t_2,…t_n,… Если переходы возможны в любые произвольные моменты времени, процесс называется процессом с непрерывном временем.

Случайный процесс с дискретным состоянием называется марковским, если все вероятностные характеристики в будущем зависят только от того, в каком состоянии находится этот процесс в настоящее время и не зависят от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом. Будущее зависит от прошлого только через настоящее. Если процесс марковский, то все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими.

При анализе случайных процессов с дискретным состоянием удобно пользоваться геометрической схемой, называемой графом состояний, который изображает возможные состояния системы и возможные переходы из состояния в состояние.

Каждое состояние системы обозначается квадратом или кружком, а возможные переходы системы из состояния в состояние — стрелками, соединяющими квадраты или кружки. Заметим (рис. 3.5), что стрелками отмечаются только непосредственные переходы системы из состояния в состояние.

Например, если система из состояния S_0 может перейти в состояние S_3 только через состояние S_1 или S_2 , то стрелками отмечаются только переходы из S_0 в S_1 и из S_0 в S_2, а не из состояния S_0 в S_3.

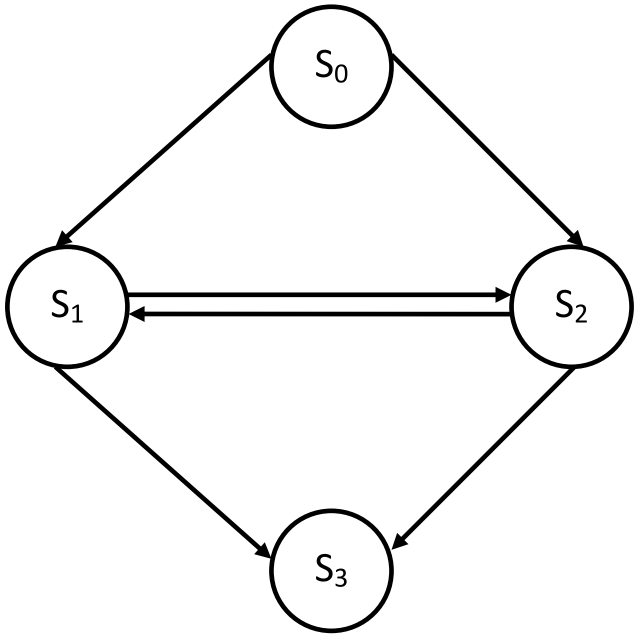


Рис. 3.5. Граф состояний системы.

В теории надежности чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят в случайные моменты времени, которые заранее предсказать невозможно. Для описания таких процессов в ряде случаев может быть применена схема марковского процесса с дискретным состоянием и непрерывным временем.

Система Σ называется системой с дискретным состоянием, если она имеет счетное множество возможных состояний (число состояний можно перенумеровать) S_1, S_2,…,S_n,… и переход из одного состояния в другое осуществляется скачком. В дальнейшем рассматриваются только системы с дискретным состоянием.

Состояние системы называется «состоянием без выхода», если из него невозможен переход ни в какое другое состояние.

Для описания случайного процесса, протекающего в системе, зачастую пользуются вероятностями состояний:

$p_1(t)$, $p_2(t)$,…,$p_n(t)$,

где $p_k(t)$ — вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $S_к$.

Вероятности $p_k(t)$ удовлетворяют условию:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(t) = 1$$

Введем в рассмотрение плотность λ_{ij} вероятностей перехода системы из состояния S_i в состояние S_j.

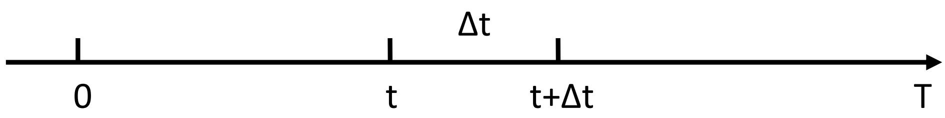


Рис. 3.6. Представление режима работы системы во времени.

Пусть система (рис.3.5) в момент t находится в состоянии S_i. Рассмотрим элементарный участок Δt, примыкающий к моменту t.

Назовем плотностью вероятностей (или интенсивностью) перехода из состояния S_i в состояние S_j величину λ_{ij} как предел отношения вероятности перехода от состояния S_i в состояние S_j за время Δt к продолжительности этого промежутка времени Δt:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \tag{3.34}$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i , за время Δt перейдет в состояние S_j (справедливо только для $i \neq j$).

При малом значении временного интервала Δt вероятность $P_{ij}(\Delta t)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости равна:

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t \tag{3.35}$$

Если все интенсивности перехода λ_{ij} не зависят от времени, марковский процесс называют однородным, в противном случае — процесс называется неоднородным.

Пусть нам известны все λ_{ij} для всех пар (S_i, S_j) . Построим граф состояний системы и против каждой стрелки поставим соответствующую плотность вероятности перехода (рис. 3.7). Такой граф называется размеченным графом состояний.

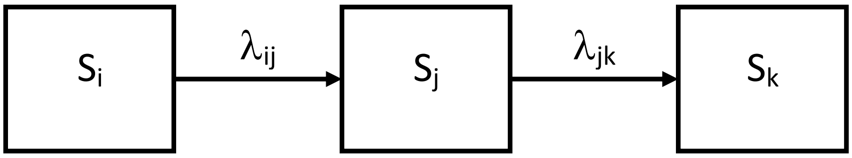


Рис.3.7 Пример построения размеченного графа.

При наличии размеченного графа состояний системы, можно определить вероятности состояний $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$…как функции времени, а именно, эти вероятности удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова.

Продемонстрируем методику вывода системы дифференциальных уравнений Колмогорова на конкретном примере (рис.3.8).

Пусть система имеет пять состояний S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. Поставим задачу найти одну из вероятностей состояния, например, $P_0(t)$. Это есть вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_0.

Придадим моменту t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_0.

Реализация такого события возможна двумя путями:

а) система не изменит своего состояния за промежуток времени Δt;

б) система, находясь в момент t в состоянии S_3, перейдет за Δt в состояние S_0.

Вариант а) реализуется, если в момент t система с вероятностью $P_0(t)$ находилась в состоянии S_0 и не перешла из состояния S_0 в состояние S_1. Вероятность последнего события может быть вычислена (для малых значений Δt) по формуле:

$$P_0(t) \cdot (1 - \lambda_{01} \cdot \Delta t),$$

где $P_0(t)$ — вероятность нахождения системы в момент t в состоянии S_0, $\lambda_{01}\cdot\Delta t$ — вероятность перехода системы за промежуток времени Δt из состояния S_0 в состояние S_1, $(1-\lambda_{01}\cdot\Delta t)$ — вероятность неперехода системы за интервал времени Δt из состояния S_0 в состояние S_1.

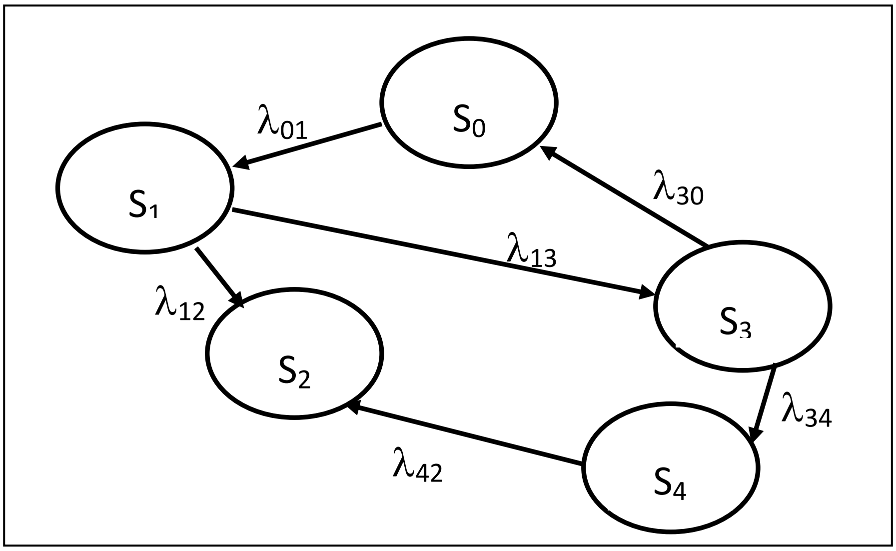


Рис. 3.8. Фрагмент размеченного графа технической системы.

Вариант б) реализуется в том случае, если система в момент t находилась с вероятностью $P_3(t)$ в состоянии S_3 и за интервал времени Δt перешла в состояние S_0:

$$P_3(t)\cdot\lambda_{30}\cdot\Delta t,$$

где $\lambda_{30}\cdot\Delta t$ — вероятность перехода за малый интервал времени Δt системы из состояния S_3 в состояние S_0.

Поскольку система в момент $t+\Delta t$ могла находиться в состоянии P_0 только или первым или вторым способом, то получаем:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot(1-\lambda_{01}\cdot\Delta t)+P_3(t)\cdot\lambda_{30}\cdot\Delta t$$

откуда:

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda_{01}+P_3(t)\cdot\lambda_{30} \qquad (3.36)$$

или:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t) \cdot \lambda_{01} + P_3(t) \cdot \lambda_{30} \tag{3.37}$$

Рассмотрим состояние S_1 и выведем уравнение для определения вероятности $P_1(t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1.

Реализация такого состояния возможна, если:

- система находилась в момент t в состоянии S_0 и за время Δt перешла в состояние S_1. Вероятность такого перехода определяется произведением соответствующих вероятностей:

$$P_0(t) \cdot \lambda_{01} \cdot \Delta t$$

- система в момент t находилась в состоянии S_1 и за интервал Δt своего состояния не изменила, т.е. не перешла ни в состояние S_2, ни в состояние S_3. Оценим вероятность осуществления этого варианта.

Вероятность того, что система, находясь в состоянии S_1, перейдет за время Δt в состояние S_2 или S_3:

$$P_1(t) \cdot \left(\lambda_{12} \cdot \Delta t + \lambda_{13} \cdot \Delta t\right)$$

Вероятность неперехода системы из состояния S_1 ни в одно из этих состояний:

$$P_1(t) \cdot \left[1 - \left(\lambda_{12} \cdot \Delta t + \lambda_{13} \cdot \Delta t\right)\right]$$

Окончательно получим:

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) \cdot \left[1 - \left(\lambda_{12} \cdot \Delta t + \lambda_{13} \cdot \Delta t\right)\right] + P_0(t) \cdot \lambda_{01} \cdot \Delta t$$

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -P_1(t) \cdot \lambda_{12} - P_1(t) \cdot \lambda_{13} + P_0 \cdot \lambda_{01}$$

Или, при стремлении Δt к нулю, имеем окончательно:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -P_1(t) \cdot \lambda_{12} - P_1(t) \cdot \lambda_{13} + P_0(t) \cdot \lambda_{01} \tag{3.38}$$

Аналогичным образом могут быть получены зависимости системы дифференциальных уравнений Колмогорова для всех остальных состояний рассматриваемой системы.

В итоге получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} \cdot P_0(t) + \lambda_{30} \cdot P_3(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{13} \cdot P_1(t) - \lambda_{12} \cdot P_1(t) + \lambda_{01} \cdot P_0(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{42} \cdot P_4(t) + \lambda_{12} \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{30} \cdot P_3(t) + \lambda_{13} \cdot P_1(t) - \lambda_{34} \cdot P_3(t) \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_{34} \cdot P_3(t) - \lambda_{42} \cdot P_4(t) \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases} \qquad (3.39)$$

Интегрирование этой системы дифференциальных уравнений при начальных, условиях, например,

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$$

дает искомые функции вероятностей состояний: $P_0(t),\ P_1(t),\ P_2(t),\ P_3(t), P_4(t)$.

Все уравнения (3.39) построены по определенному правилу, зная которое можно выписывать систему для размеченного графа почти автоматически:

- в левой части каждого уравнения стоит производная $\dfrac{dp_k(t)}{dt}$,
- в правой части содержится столько членов, сколько стрелок связано непосредственно с данным k — м состоянием,
- член правой части уравнения имеет знак плюс, если стрелка ведет в данное состояние и знак минус, если стрелка выходит из данного состояния,

- каждый член правой части уравнения равен плотности потока событий, переводящего систему по данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Эти правила составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова справедливы для любой непрерывной марковской цепи.

Например.

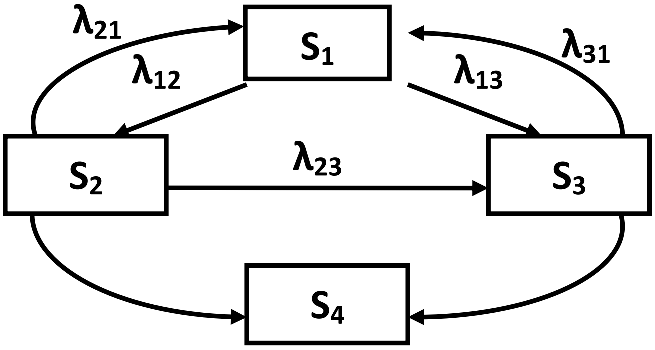


Рис. 3.9. Размеченный граф системы с дискретным состоянием и непрерывным временем.

Система дифференциальных уравнений такой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) - \lambda_{21} \cdot p_2(t) - \lambda_{23} \cdot p_2(t) - \lambda_{24} \cdot p_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) - \lambda_{31} \cdot p_3(t) - \lambda_{34} \cdot p_3(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{24} \cdot p_2(t) + \lambda_{34} \cdot p_3(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Начальные условия для интегрирования такой системы отражают состояние системы в начальный момент времени. Так, если в момент t=0 система была в состоянии S_k , то полагают:

$$p_k(0) = 1; \quad p_i(0) = 0 \quad при \quad i \neq k$$

Число уравнений в системе может быть уменьшено на единицу, если учесть условие, что для любого t (для рассматриваемой системы):

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$$

3.4. Предельные вероятности состояний.

Пусть имеется техническая система с дискретными состояниями, в которой протекают марковские случайные процессы с непрерывным временем. Предположим, что все интенсивности потоков событий, переводящие систему из состояния в состояние постоянны, т.е. все потоки событий — простейшие (стационарные пуассоновские).

Сформулируем следующую задачу: что будет происходить с системой при стремлении $t \to \infty$? Если функции $P_i(t)$ будут стремиться к каким-либо пределам, то будем их называть предельными вероятностями состояний.

Можно доказать следующее общее положение.

Если число состояний системы конечно и из каждого состояния за конечное число шагов можно перейти в любое другое (замкнутая система, рис.2.10), то предельные вероятности состояний существуют и они не зависят ни от времени, ни от начального состояния системы.

При этом, естественно, сохраняется условие:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{3.41}$$

Для разомкнутых систем (рис. 3.11) предельных состояний не существует.

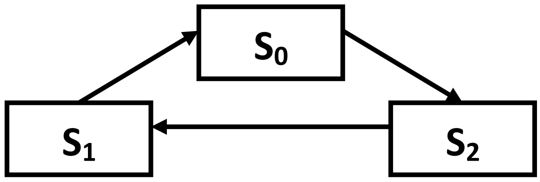


Рис. 3.10

а) граф замкнутой системы

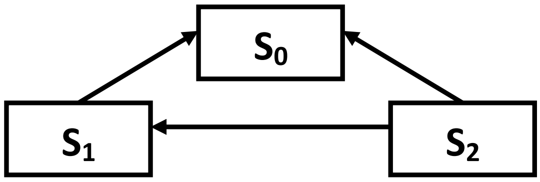


Рис. 3.11

б) граф разомкнутой системы

Таким образом, при $t \to \infty$ в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим, который состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени: каждое из состояний реализуется с некоторой постоянной вероятностью P_i.

При этом предельная вероятность P_i представляет собой среднее относительное время пребывания системы в данном i-м состоянии, т.е. после перехода системы в установившийся режим работы она будет находиться в состоянии S_i в течение времени, пропорциональном P_i.

Например, если система имеет состояния S_0, S_1, S_2 и предельные вероятности равны 0.4, 0.1, 0.5, то после перехода в установившийся режим 40% времени система будет находиться в состоянии S_0, 10% — в состоянии S_1 и 50% — в состоянии S_2.

Для вычисления предельных вероятностей в системе дифференциальных уравнений Колмогорова необходимо левые части уравнений положить равными нулю (как производные от постоянных, поскольку теперь вероятности состояний не зависят от времени). Тогда исходная система дифференциальных уравнений трансформируется в систему линейных алгебраических уравнений, решение которых совместно с (3.41) дает возможность определить предельные вероятности P_i.

Размеченный граф замкнутой системы имеет следующий вид.

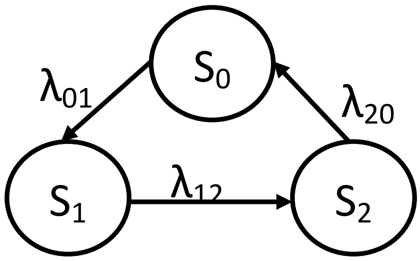


Рис. 3.12. Размеченный граф замкнутой системы.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} \cdot P_0(t) + \lambda_{20} \cdot P_2(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot P_1(t) + \lambda_{01} \cdot P_0(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{20} \cdot P_2(t) + \lambda_{12} \cdot P_1(t) \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1 \end{cases} \qquad (3.42)$$

Учитывая независимость предельных вероятностей от времени, получим соответствующую линейную систему алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot P_0 - \lambda_{20} \cdot P_2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{01} \cdot P_0 = 0}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{20} \cdot P_2 - \lambda_{12} \cdot P_1 = 0} \qquad (3.43)$$

$$\boldsymbol{P_0 + P_1 + P_2 = 1}$$

Для решения этой системы воспользуемся пакетом Matlab. В целях исключения нижних символов введем обозначения:

$\boldsymbol{a = \lambda_{01}; b = \lambda_{20}; c = \lambda_{12}};$

Решение:

syms p0 p1 p2;

```
[p0 p1 p2]=solve('a*p0-b*p2=0','c*p1-a*p0=0',
'b*p2-c*p1=0','p0+p1+p2=1',p0,p1,p2)
p0 = c*b/(c*b+a*b+a*c)
p1 = a*b/(c*b+a*b+a*c)
p2 = c*a/(c*b+a*b+a*c)
```

Таким образом, расчетные зависимости предельных вероятностей рассматриваемой системы принимают вид:

$$\boldsymbol{p0} = \frac{\boldsymbol{\lambda_{20} \cdot \lambda_{12}}}{\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot \lambda_{20} + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} + \lambda_{20} \cdot \lambda_{12}}}$$

$$\boldsymbol{p1} = \frac{\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot \lambda_{20}}}{\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot \lambda_{20} + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} + \lambda_{20} \cdot \lambda_{12}}}$$

$$\boldsymbol{p2} = \frac{\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot \lambda_{12}}}{\boldsymbol{\lambda_{01} \cdot \lambda_{20} + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} + \lambda_{20} \cdot \lambda_{12}}}$$

Численное значение предельной вероятности соответствует относительному времени пребывания системы в данном состоянии.

Например, если для рассматриваемой системы получены значения предельных вероятностей: P0=0.4, P1=0.2, P2=0.5, это означает, что система будет 40% времени находиться в состоянии S0, 20% времени в состоянии S1 и 50% времени в состоянии S2.

Пример 3.2. Определение сроков замены оборудования.

Рассматривается транспортерная лента, которая может выходить из строя в рабочее время, при этом учитываются расходы на замену ленты и расходы за счет простоя рабочей смены. Если предусмотреть замену ленты в нерабочее время, то расходы будут определяться только стоимостью замены ленты. Предполагается, что известны вероятности (y) выхода ленты из строя в зависимости от числа рабочих смен (x). Стоимость замены ленты R=500, стоимость выпускаемой продукции за одну смену C1=12, в случае обрыва ленты в рабочее время теряется одна восьмая часть дневной выручки (A1).

```
r=500; C1=12; A=r*C1/8; S=500; N=100;
n=[10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25];
Q=[0 0.04 0.09 0.14 0.19 0.26 0.33 0.40 0.47 0.54 0.61 0.68 0.76 0.84 0.92 1.0];
n1=10:0.01:25;
y=-6.6*10^-5.*n1.^3+0.0047.*n1.^2-0.033.*n1-0.077;
L=(N./n1).*(S.*(1-y)+(A+S).*y);
```

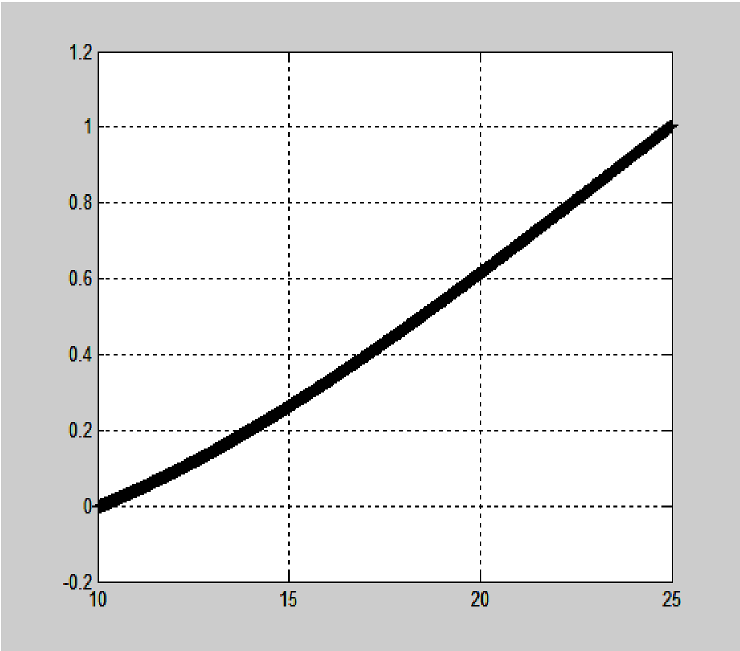


Рис. 3.13. Изменение вероятности обрыва ленты в зависимости от числа рабочих смен

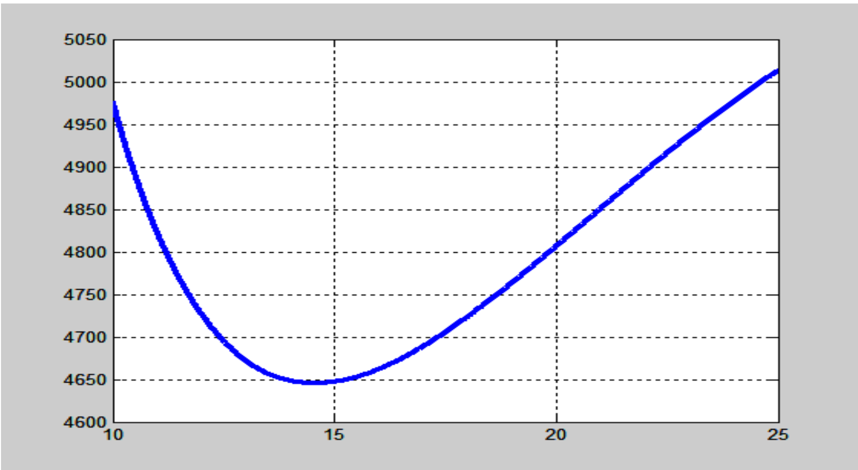


Рис. 3.14. Изменение целевой функции в зависимости от числа рабочих смен эксплуатации ленты.

Изменение целевой функции L(x) от числа рабочих смен x, через которые производится замена ленты транспортера представлено на рис. 3.14 .

Как видно из графика, рациональный срок замены составляет 15 рабочих смен. При этом предполагается, что замена ленты производится в нерабочее время.

Техническая система, которая рассматривалась до сих пор отличалась тем, что ее устройства (элементы) выходили из строя согласно пороговому закону изменения надежности (рис. 3.15). Достаточно реальная ситуация складывается несколько сложнее. Один из элементов системы не мгновенно выходит из строя, а некоторое время продолжает выполнять свою задачу, но с потерей эффективности. Например, агрегат повышения давления магистрального газопровода или генератор электроэнергии теряет часть мощности, но продолжает работать. Снижение эффективности работы элемента удобно представлять снижением его надежности, что не противоречит методам решения задачи о надежности технической системы с последовательным функционированием ее устройств или элементов.

Рассматривается следующая последовательность работы технической системы. В состоянии S_0

Система находится в исправном состоянии и обеспечивает заданную эффективность. В момент t_1 происходит снижение эффективности работы системы и она уже не выполняет полностью свои функции, продолжая тем не менее работать до момента t_0 , когда произойдет отказ. Но в течение времени от момента t_1 происходит диагностика состояния системы и в результате, после обнаружения неисправности, принимается одно из двух решений: либо неисправный элемент системы (возможно, и системы в целом) ремонтировать, либо неисправный элемент заменить на новый. В обоих случаях нормальная работа системы восстанавливается и она входит в запланированный режим работы.

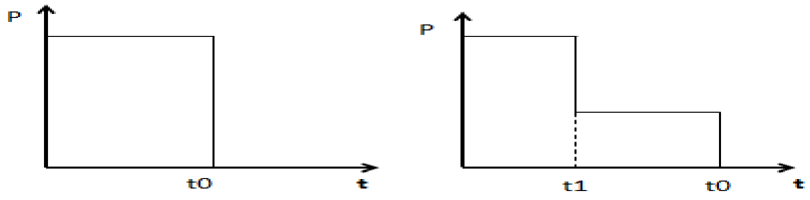


Рисунок 3.15 . Пороговый и ступенчатый режимы работы технической системы.

Предполагая, что поток отказов устройства простейший, можно без затруднений составить размеченный граф его функционирования (рис. 3.16).

Как видно, Исследуемый элемент в момент t в состоянии S_0 находился в исправном состоянии, в момент t_1 элемент переходит с интенсивностью L_{01} в состояние S_1. С интенсивностью L_{12} обнаруживается дефект устройства и элемент переходит в состояние S_2 принятия решения о его ремонте или замене. С интенсивностью L_{23} бракованный элемент поступает в ремонт, состояние S_3 или с интенсивностью L_{24} заменяется на новый (состояние S_4), после чего он с интенсивностью L_{40} или с интенсивностью L_{30} возвращается в рабочее состояние S_0.

Размеченный граф функционирования такого устройства (системы) представлен на рис. 3.16.

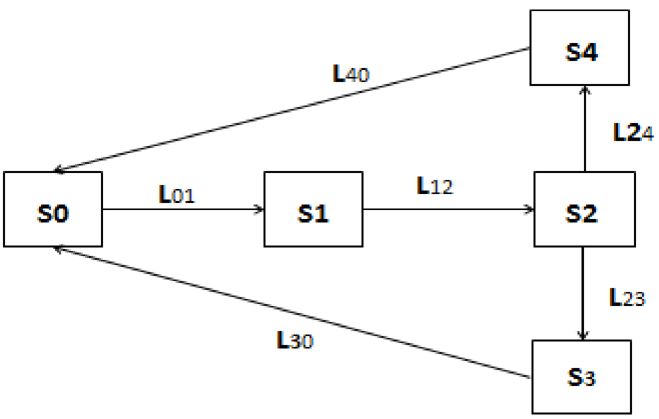


Рисунок 3.16. Размеченный граф работы технической системы при ее ступенчатом отказе.

Для исследования технической системы в таком режиме работы необходимо найти распределение вероятностей ее состояния для любого момента времени на основе марковского процесса с дискретным состоянием.

Пользуясь изложенным выше алгоритмом, составим систему дифференциальных уравнения Колмогорова:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -L_{01} \cdot P_0(t) + L_{40} \cdot P_4(t) + L_{30} \cdot P_3(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -L_{12} \cdot P_1(t) + L_{01} \cdot P_0(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -L_{23} \cdot P_2(t) - L_{24} \cdot P_2(t) + L_{12} \cdot P_1(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -L_{30} \cdot P_3(t) + L_{23} \cdot P_2(t)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -L_{40} \cdot P_4(t) + L_{24} \cdot P_2(t)$$

$$P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)=1$$

Для решения системы уравнений Колмогорова, воспользуемся пакетом Mathcad, задав предварительно значения интенсивностей перехода системы из одного состояния в другое.

L_{01} =0.051/год; L_{12} =0.04 1/год; L_{23} =0.001 1/год; L_{24} =0.0001 1/год;

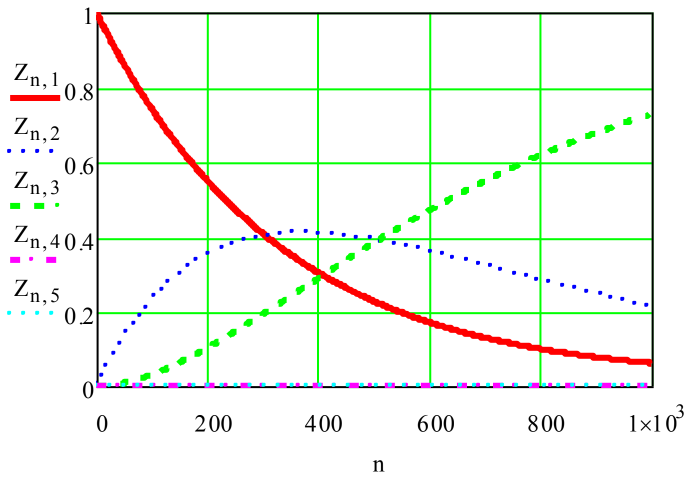
L_{30} =3 1/год; L_{40} =2 1/год.

Для облегчения программирования, избавимся от нижних индексов и обозначим:

L_{01}=a; L_{12}=b; L_{23}=c; L_{24}=d; L_{30}=f; L_{40}=h;

$P_0(t)$=x0; $P_1(t)$=x1; $P_2(t)$=x2; $P_3(t)$=x3; $P_4(t)$=x4;

Решение системы уравнений, определяющее вероятности нахождения системы в данный момент времени в каждом из рассмотренных состояний производится с применением функции rkfixed. В результате получаем графики:



Учитывая, что в расчетном примере рассматривается интервал времени 10 лет и этот интервал разделен на 1000 промежутков, для нахождения времени пребывания системы в конкретном состоянии следует перевести число промежутков в годы:

$$\boldsymbol{t = n\frac{10}{1000}}$$

Например, время нахождения системы в состоянии работы с неисправным, но функционирующим элементом равно четырем годам.

Для проверки решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость необходимо применить функцию eigenvals(S) пакета Mathcad, где S – матрица коэффициентов переменных системы дифференциальных уравнений.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{-0.051} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0.051} & \mathbf{-0.04} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.04} & \mathbf{-0.0011} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0.001 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

$$\mathrm{eigenvals}(S)=\begin{pmatrix}0.225\\-0.156+0.239i\\-0.156-0.239i\\-2.005\\-3\end{pmatrix}\qquad(3.45)$$

Согласно теореме об устойчивости решений систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения матрицы S не должны иметь положительных действительных частей. В решаемой задаче это условие не выполняется, следовательно, предельные вероятности в такой системе не существуют.

Вопросы для самоконтроля.

Выведите формулу определения интенсивности отказов невосстанавливаемой нерезервированной системы. Какие гипотезы положены в основу определения выражений для оценки надежности технической системы при учете только внезапных отказов элементов.

Приведите формулы расчета надежности, ожидаемого времени безотказной работы системы, интенсивности и частоты ее отказов.

Объясните принцип определения границ изменения вероятности безотказной работы нерезервированной технической системы. Докажите, что кривая надежности технической системы всегда находится в пределах верхнего и нижнего значений надежности.

Сформулируйте основные отличительные особенности марковских процессов.

Дайте определение стационарности, отсутствия последействия и ординарности случайных процессов.

Объясните алгоритм составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова для размеченного графа функционирования технической системы.

Каким образом определяется устойчивость решения системы линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТОЯННО ВКЛЮЧЕННОМ РЕЗЕРВЕ («ГОРЯЧЕЕ» РЕЗЕРВИРОВАНИЕ).

4.1. Количественные показатели надежности резервированной системы с постоянно включенным резервом.

Будем исследовать надежность технической системы, состоящей из одного основного и m резервных устройств, т.е. содержащей m+1 устройство. При этом принимаются следующие допущения:

- все устройства (основное и резервные) системы постоянно включены в работу и эксплуатируются в абсолютно одинаковых условиях нагружения;

- отказ любого устройства не влияет на работу остальных работоспособных устройств;

- отказ системы происходит в момент отказа последнего из (m+1) устройств;

- в момент включения системы в работу (t=0) все устройства работоспособны;

- все устройства (основное и резервные) абсолютно идентичны по показателям надежности;

- отказы устройств представляют собой простейший поток случайных событий;

- ремонт рассматриваемой технической системы невозможен.

Принятые допущения почти никогда не реализуются в практике, но они удобны для выводов основных показателей надежности технической системы, резервированной по способу постоянно включенного резерва.

Предполагая, что каждое устройство системы состоит из n элементов, отказы которых являются случайными и независимыми событиями, вероятность $p_j(t)$ безотказной работы любого из (m+1) устройства можно принять равной произведению вероятностей безотказной работы его отдельных элементов:

$$P_j(t) = p_{1j}(t) \cdot p_{2j}(t) \cdots p_{nj}(t) = \prod_{i=1}^{nj} p_{ij}(t)$$

$$P_i(t) = \exp(-\lambda_i \cdot t) \tag{4.1}$$

где $p_{ij}(t)$ — вероятность безотказной работы i-го элемента j-го устройства в течение времени t; n_j — число элементов в j-м устройстве.

Учитывая принятую гипотезу об идеальности коммутаторов, вероятность отказа $Q_C(t)$ технической системы будет равна:

$$Q_C(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdots Q_m(t) \cdot Q_{m+1}(t) \tag{4.2}$$

Если рассматривается система с однотипными устройствами, то все $Q_j(t)$ равны между собой и можно принять обозначение:

$$Q_j(t) = Q(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, m+1 \tag{4.3}$$

тогда вероятность отказа системы в течение времени t может быть определена выражением:

$$Q_C(t) = Q^{m+1}(t)$$

$$Q_C(t) = \left(1 - p(t)\right)^{m+1} \tag{4.4}$$

где p(t) — надежность одного (любого) устройства технической системы.

С учетом (4.1) можно записать:

$$P_C(t) = 1 - \left[1 - p_j(t)\right]^{(m+1)} = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{(m+1)} \tag{4.5}$$

Формулы (4.2)…(4.5) просты и удобны при вычислении различных показателей надежности резервированной системы. Так, если задана надежность p(t) резервирующих устройств (включая основное), то можно найти необходимую кратность резервирования, чтобы обеспечить требуемую надежность P_{mp} системы в целом:

из неравенства

$$(1-p(t))^{m+1} = Q(t)^{m+1} \le Q_{mp} = (1-P_{mp}) \tag{4.6}$$

получим

$$m \ge \frac{\ln\left(1-P_{mp}\right)}{\ln\left(1-P_j\right)} - 1 \tag{4.7}$$

Пример 4.1

Для достижения требуемой надежности системы $P_{тр}$= 0.99 или 0.95 к заданному моменту времени t при известных значениях надежности одного устройства $p_j(t) \in [0.1\ ,\ 0.8]$, необходимо определить требуемое число резервных устройств m (при общем их числе m+1) с использованием пакета Matlab.

О п р е д е л е н и е т р е б у е м о й к р а т н о с т и р е з е р в и р о в а н и я

```
pj=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7];PTR=0.95;
n=1:7;
m1=log(1-PTR)./log(1-pj(n));m2=m1-1;
m=ceil(m2)
m =   28   13    8    5    4    3    2
```

Результаты решения можно свести в таблицу.

Таблица 4.1.

Требуемая кратность резервирования

Надежность резервных PJ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
m ($P_{тр1}$=0,99)	43	20	12	9	6	5	3	2
m ($P_{тр}$=0,95)	28	13	8	5	4	3	2	1

В свете принятой гипотезы о простейшем потоке отказов, выражение для определения надежности $p_i(t)$ i-го элемента, входящего в состав одного из резервирующих устройств технической системы будет иметь вид:

$$p_i(t) = \exp(-\lambda_i t) \qquad (4.8)$$

где λ_i — интенсивность отказов i-го элемента устройства.

$$\prod_{i=1}^{n} p_i(t) = \exp(-\lambda_j t) \qquad (4.9)$$

где λ_j — интенсивность отказов устройства (любого)

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (4.10)$$

С учетом выражений (4.8)…(4.10) надежность $P_C(t)$ и ненадежность $Q_C(t)$ системы, резервированной по способу «горячего» резерва и состоящей из одного основного и m резервных однотипных устройств могут быть вычислены по формулам:

$$P_C(t) = 1 - \left[1 - \exp(-\lambda_j t)\right]^{m+1} \qquad (4.11)$$

$$Q_C(t) = \left[1 - \exp(-\lambda_j t)\right]^{m+1} \qquad (4.12)$$

Среднее время T_C безотказной работы системы определим из следующих рассуждений. В общем виде среднее время определяется как математическое ожидание случайной величины, имеющей плотность распределения f(t).

$$T_C = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx \qquad (4.13)$$

$$f(x) = -\frac{dP(x)}{dx} \qquad (4.14)$$

$$T_C = \int_0^{\infty} x \cdot \left[-\frac{dP(x)}{dx} \right] dx = \int_0^{\infty} - x \cdot dP(x)$$

Введем обозначения

$$u = x; \quad \Rightarrow \; du = dx;$$

$$dv = dP(x); \quad \Rightarrow \; v = P(x)$$

и применяем интегрирование по частям

$$T_C = -\int_0^{\infty} x \cdot dP(x) = -x \cdot P(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(x) dx$$

Поскольку $P(x) = \exp(-\lambda x)$ убывает при x $\rightarrow$ ∞ быстрее, чем возрастает x, следовательно,

$$- x \cdot P(x) \Big|_0^{\infty} = 0 \tag{4.15}$$

Окончательно получаем

$$T_C = \int_0^{\infty} P(x) dx \tag{4.16}$$

С учетом (4.11), получаем:

$$T_C = \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - \exp(-\lambda_j t) \right)^{m+1} \right] dt \tag{4.17}$$

Введем обозначение: $\exp(-\lambda_j t) = 1 - z_j$

тогда после дифференцирования получим $dz = \lambda_j \cdot \exp(-\lambda_j t) dt$

откуда $dt = \dfrac{dz}{\lambda_j \cdot \exp\left(-\lambda_j t\right)} = \dfrac{dz}{\lambda_j \cdot \left(1 - z_j\right)}$

при этом происходит изменение пределов интегрирования. При t=0 z_j=0. При t=∞ z_j=1, и выражение (4.17) с учетом выкладок Приложения 1 приобретает вид:

$$T_C = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \int_0^1 \frac{1 - z_j^{\,m+1}}{1 - z_j} dz = \\ = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \int_0^1 \left(1 + z_j + z_j^{\,2} + z_j^{\,3} + \cdots + z_j^{\,m}\right) dz \tag{4.18}$$

Далее

$$T_C = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} z_j^{\,k} dz = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \times \\ \times \sum_{k=0}^{m} \int_0^1 z_j^{\,k} dz = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \cdot z_j^{\,k+1} \Big|_0^1 \tag{4.19}$$

Подставив пределы интегрирования, получим окончательное выражение для среднего времени безотказной работы системы, при «горячем» резервировании:

$$T_C = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m+1}\right) \tag{4.20}$$

Пример 4.2.

Определения T_C с пакетом Matlab.

Зададимся исходными данными:

интенсивность отказов одного устройства (любого) L=10^(-3) 1/час;

введем вспомогательную величину h=0;

for m=1:5; изменение числа резервных устройств;

```
for k=1:m;
   r=1./(1+k);
   h1=h+r;
   h=h1;
end
rr(m)=h;
T(m)=(1/L).*rr(m);
end
m=1:5;
```

```
plot(m,T(m),'k-','LineWidth',3);
grid on
```

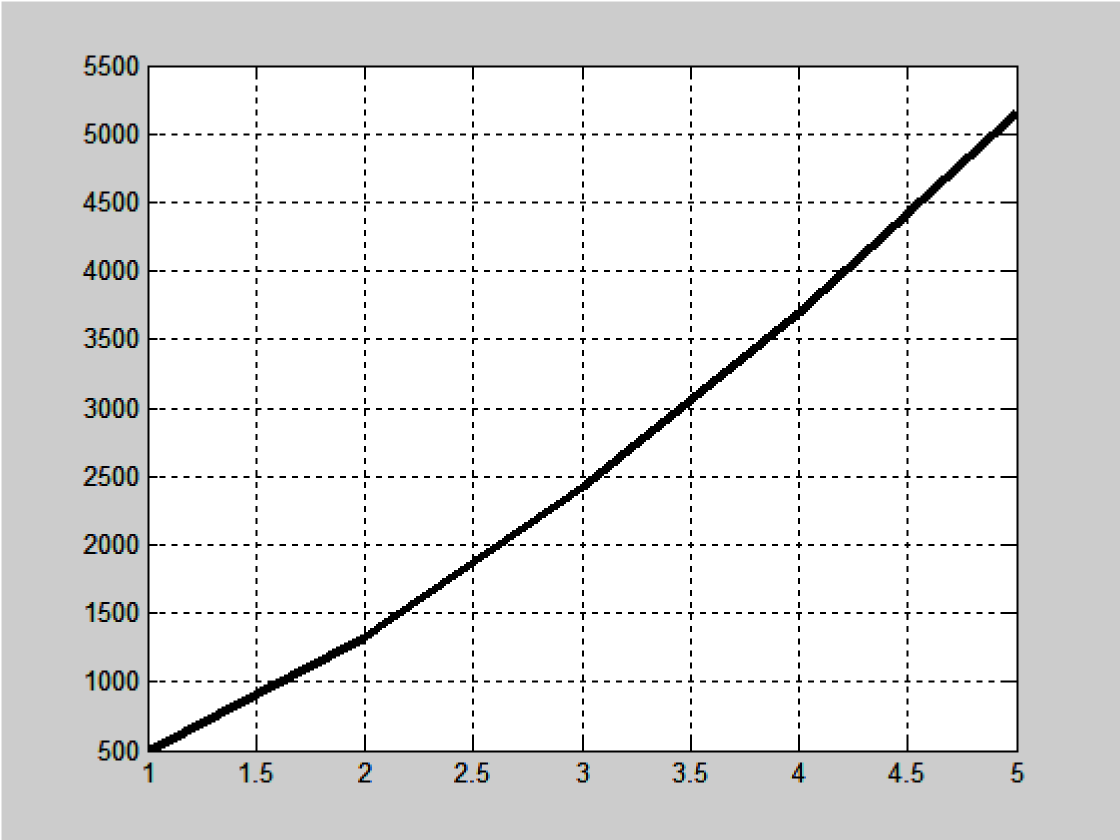


Рис. 4.1. Изменение ожидаемого времени работы системы до отказа в зависимости от числа резервных устройств.

Размерность ожидаемого времени работы системы до отказа определяется размерностью интенсивности отказов устройств L, т.е. часы.

Частота и интенсивность отказов резервированной системы вычисляется на основе выражений:

$$a_C(t) = Q'_C(t), \qquad \lambda_C(t) = \frac{a_C(t)}{P_C(t)} \tag{4.21}$$

Используя (4.11), (4.12), получим:

$$a_C(t) = \lambda_j \cdot [m+1] \cdot \exp(-\lambda_j t) \cdot [1 - \exp(-\lambda_j t)]^m \tag{4.22}$$

$$\lambda_C(t) = \frac{\lambda_j \cdot (m+1) \cdot \exp(-\lambda_j t) \cdot \left[1 - \exp(-\lambda_j t)\right]^m}{1 - \left[1 - \exp(-\lambda_j t)\right]^{m+1}} \qquad (4.23)$$

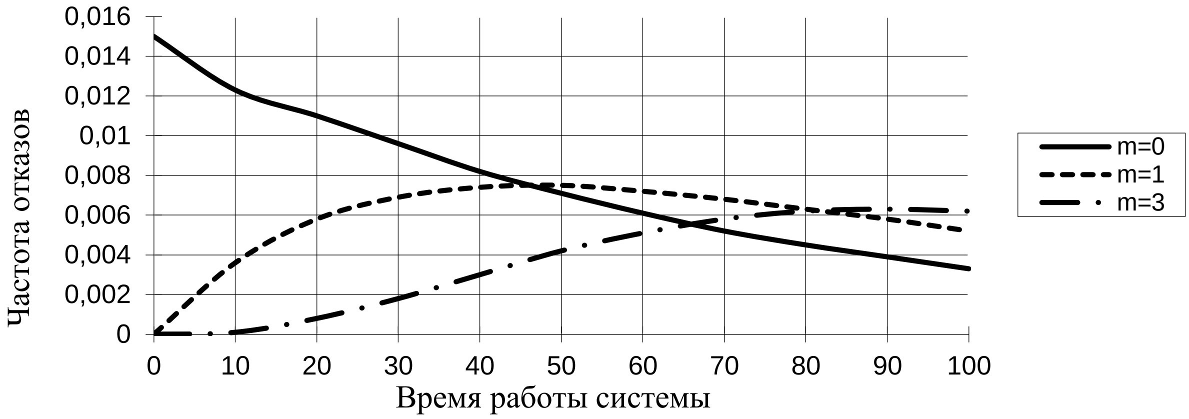


Рис. 4.2. Изменение частоты отказов в течение времени эксплуатации системы при различной кратности резервирования и интенсивности отказов устройств λ_j=0.015 1/час.

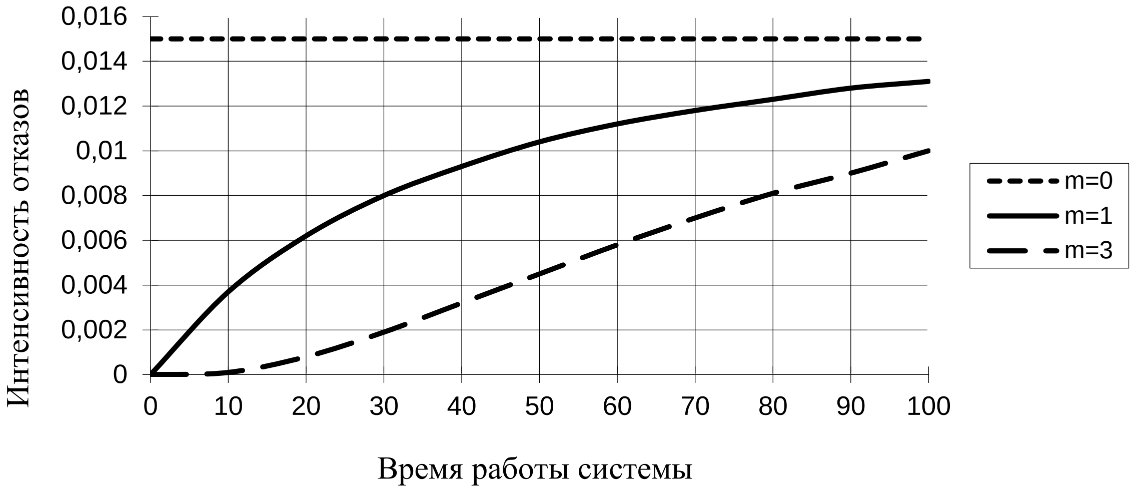


Рис. 4.3. Изменение интенсивности отказов системы в течение времени ее эксплуатации при различной кратности резервирования и интенсивности отказов устройств λ_j=0.015 1/час.

Пример 4.3.

Рассматривается система, состоящая из четырех последовательно функционирующих блоков обеспечения безопасности. Известны вероятности отказа Q каждого блока и их масса x.

По требованиям эксплуатации системы общая масса системы безопасности не должна превышать заданного значения MM.

Требуется определить, какие блоки следует резервировать для получения максимальной надежности системы при ограничении на общую массу.

Решение примера 4.3 в среде Matlab [16]

```
MM=25;  допустимый максимальный вес системы обеспечения  безопасности
x=[2.5 2.0 3.5 1.5]; веса устройств системы обеспечения безопасности
Q=[0.03  0.1  0.04  0.02];  ненадежность устройств системы обеспечения безопасности
p1=0;
for m1=1:5
   for m2=1:5
      for m3=1:5
         for m4=1:5
            if m1*x(1)+m2*x(2)+m3*x(3)+m4*x(4)<MM
               p=(1-Q(1)^m1)*(1-Q(2)^m2)*(1-Q(3)^m3)*(1-Q(4)^m4);
            end
             if p>p1
               p1=p;ma1=m1;ma2=m2;ma3=m3;ma4=m4;
             end
         end
      end
   end
end
```

```
m=[ma1 ma2 ma3 ma4]
MA=[ma1*x(1) ma2*x(2) ma3*x(3) ma4*x(4)]
MMA=sum(MA)
p1
p0=(1-Q(1))*(1-Q(2))*(1-Q(3))*(1-Q(4))
mm=[ma1-1 ma2-1 ma3-1 ma4-1]
```

m =   2   3   3   2   общее число устройств в каждом блоке

MA =   5.0000   6.0000   10.5000   3.0000

MMA =   24.5000 общая масса системы безопасности

p1 =   0.9976   надежность системы после резервирования

p0 =   0.8213   надежность системы до резервирования

mm =   1   2   2   1   число резервных устройств для каждого блока

Подводя итог раздела, можно констатировать:

- «горячее» резервирование повышает вероятность безотказной работы системы в сравнении с надежностью нерезервированной системы, причем с увеличением кратности резервирования надежность технической системы повышается;
- среднее время безотказной работы резервированной системы с увеличением кратности резервирования растет медленно;
- частота отказов резервированной системы вне зависимости от кратности резервирования имеет нулевое значение в начальный момент времени работы системы, имеет максимум и стремится к частоте отказов нерезервированной системы при достаточно больших значениях $\lambda_j t$; максимум функции $a_C(\lambda_j t)$ находится в точке $\lambda_j t = \ln(m+1)$;
- интенсивность отказов резервированной системы также равна нулю в момент включения системы в работу и асимптотически приближается к

интенсивности отказов нерезервированной системы при больших значениях $\lambda_j t$.

Из приведенных выводов становится очевидным, что времена возникновения отказов резервированной системы нельзя отнести к стационарным потокам, хотя времена отказов резервных устройств являются простейшим потоком случайных событий. Это означает, что в общем случае среднее время безотказной работы и интенсивность отказов системы не равны соответственно среднему времени между соседними отказами и средней частоте отказов системы. Поэтому оценивать надежность резервированной системы с помощью среднего времени безотказной работы и интенсивности отказов системы можно только до первого ее отказа. Оценивать надежность резервированных систем длительного использования, работающих в режиме замены отказавших устройств следует на основе вычислений среднего времени между соседними отказами и средней частоты отказов, несмотря на то, что времена отказов резервных устройств удовлетворяют условиям простейшего потока случайных событий.

Вопросы для самоконтроля.

Приведите вывод функции изменения вероятности безотказной работы технической системы, резервированной по принципу постоянно включенного резерва для случая, когда основное и резервные устройства одинаковы и для случая, когда все они различны.

Объясните, каким образом можно рассчитать требуемую кратность резервирования технической системы при постоянно включенном резерве.

По каким критериям можно оценить эффективность «горячего» резервирования в сравнении с однотипной нерезервированной системой?

В чем преимущества и недостатки резервирования при постоянно включенном резерве?

5. НАГРУЗОЧНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ.

5.1. Теоретические предпосылки решения задачи расчета надежности технической системы, резервированной по принципу нагруженного или «теплого» резерва.

До сих пор мы рассматривали системы, надежность дублирующих устройств которых не зависела от момента включения этих устройств в работу. Гораздо сложнее выглядит расчет надежности реальной системы, резервное устройство которой может отказывать до включения в работу с меньшей плотностью отказов, чем при включении в активное замещение отказавшего устройства.

Существенное повышение надежности может достигаться путем применения так называемого нагрузочного или «теплого» резервирования. В процессе проектирования сложных технических систем конструктор может во многих случаях уменьшить нагрузку на отдельные (резервные) устройства или элементы системы более чем в 10 раз по сравнению с нормальной. При этом интенсивность отказов резервных устройств остается постоянной во времени и, как правило, линейно убывает с уменьшением коэффициента нагрузки.

Сравнение показателей надежности систем, резервированных различными способами, показывает, что нагрузочное резервирование может быть более эффективным в системах, предназначенных для длительной работы в относительно стабильных условиях.

Допустим, что техническая система состоит из одного основного и одного резервного устройства, работающих «параллельно». Интенсивность отказов основного устройства обозначим через $\lambda_0(t)$. При отказе основного устройства происходит мгновенное безотказное автоматическое переключение работы на второе (резервное) устройство. Интенсивность потока отказов резервного устройства до его включения в работу обозначим через $\lambda_1(t)$. После включения резервного устройства в работу интенсивность потока его отказов мгновенно подскакивает (рис.5.1) до значения $\tilde{\lambda}_1$, которую естественно полагать зависящей не только от текущего момента времени t, но и от того срока t_0, в течение которого элемент работал в облегченном режиме:

$$\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1(t/t_0) \qquad (5.1)$$

Рассмотрим совокупность двух случайных величин:

T_0 — случайный момент отказа основного устройства;

T_1 — случайный момент отказа резервного устройства.

Пусть событие А — безотказная работа технической системы до момента времени t — состоит в том, что хотя бы одна из величин (T_0, T_1) примет значение, превышающее t (одно из устройств сохранит к этому моменту времени свою работоспособность). Т.е. вероятность $Q(t) = P(\overline{A})$ того, что в момент t рассматриваемая система откажет будет соответствовать вероятности того, что случайные величины T_0 и T_1 примут значения меньше величины t:

$$Q(t) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = W(T_0 < t, T_1 < t) \qquad (5.2)$$

Пусть t_0 — фиксированный момент отказа основного устройства системы; t_1 — фиксированный момент отказа резервного устройства.

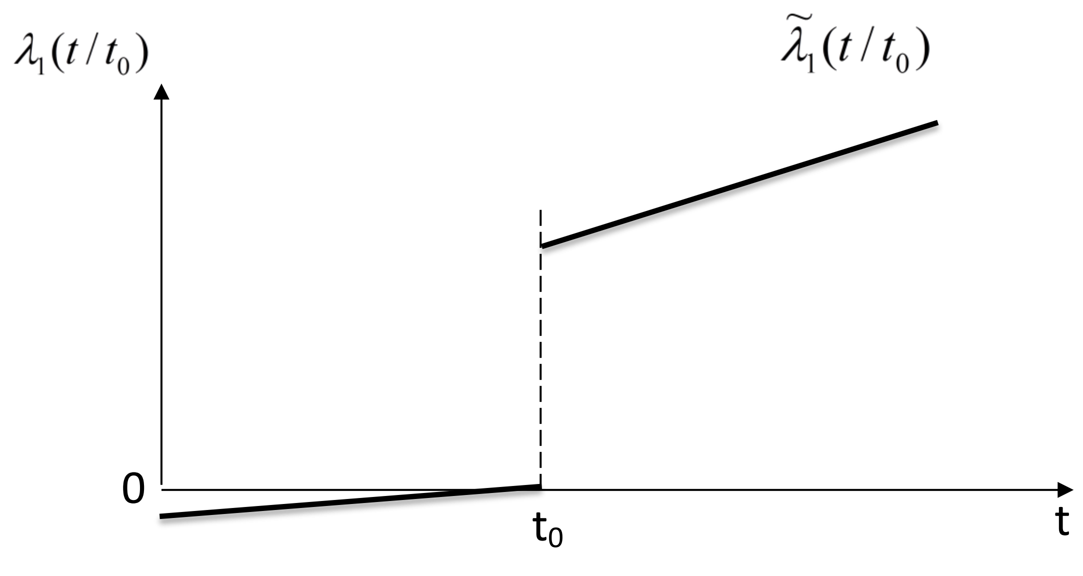


Рис. 5.1. Общее представление характера изменения интенсивности отказов резервного устройства

Найдем совместную плотность $f(t_0, t_1)$ распределения случайных величин T_0 , T_1. Поскольку эти случайные величины зависимы, то:

$$f(t_0, t_1) = f_0(t_0) \cdot f(t_1 / t_0) \tag{5.3}$$

где $f_0(t_0)$ — безусловная плотность распределения случайной величины T_0; $f(t_1 / t_0)$ — условная плотность распределения величины T_1 (при условии, что случайная величина T_0 приняла значение t_0).

Как было определено ранее, плотность распределения случайного времени отказа (в общем случае) можно выразить через интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}$$

Следовательно, плотность распределения времени отказа основного устройства:

$$f_0(t_0) = \lambda_0(t_0) \cdot P_0(t_0) \tag{5.4}$$

где $P_0(t_0)$ — надежность основного устройства технической системы, в общем случае равная:

$$P_0(t_0) = \exp\left\{-\int_0^{t_0} \lambda_0(x)dx\right\} \tag{5.5}$$

Тогда:

$$f_0(t_0) = \lambda_0(t_0) \cdot \exp\left\{-\int_0^{t_0} \lambda_0(x)dx\right\} \tag{5.6}$$

Условная интенсивность отказов резервного устройства при условии, что случайная величина T_0 принимает значение t_0 определяется зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t_1/t_0) &= \lambda_1(t_1) \qquad \textit{при} \quad t_1 < t_0 \\ \lambda_1(t_1/t_0) &= \widetilde{\lambda}_1(t_1/t_0) \qquad \textit{при} \quad t_1 > t_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Вероятность безотказной работы резервного устройства при $t_1 < t_0$ (резервное устройство отказывает раньше выхода из строя основного, не успев включиться в активный режим работы и не изменив интенсивности $\lambda_1(t)$ отказов) равна:

$$P_1(t_1) = \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda_1(x)dx\right)$$

В случае отказа резервного устройства после его включения в активный режим работы (после отказа основного устройства), т.е. в случае $t_1 > t_0$ эта вероятность определится соотношением:

$$P_1(t_1) = P_1(t_0) \cdot P_1(t_1/t_0) =$$

$$= \exp\left(-\int_0^{t_0} \lambda_1(x)dx\right) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{\lambda}_1(x/t_0)dx\right)$$

Теперь может быть определена условная плотность $f(t_1/t_0)$ распределения времени безотказной работы резервного устройства:

$$f(t_1/t_0) =$$

$$= \lambda_1(t_1) \cdot \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda_1(x)dx\right) \quad \textit{при} \quad t_1 < t_0 \tag{5.8}$$

$$f(t_1/t_0)=\widetilde{\lambda}_1(t_1/t_0)\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{t_0}\lambda_1(x)dx-\int\limits_{t_0}^{t_1}\widetilde{\lambda}_1(x/t_0)dx\right)\quad npu\quad t_1>t_0 \tag{5.9}$$

Таким образом, совместная плотность распределения случайных величин T_0 и T_1 может быть определена с помощью зависимостей:

$$\begin{cases} f(t_0,t_1)=f_0(t_0)\cdot f(t_1/t_0)= \\ =\lambda_0(t_0)\cdot\lambda_1(t_1)\times \\ \times\exp\left(-\int\limits_0^{t_0}\lambda_0(x)dx-\int\limits_0^{t_1}\lambda_1(x)dx\right)\quad npu\quad t_1<t_0 \\ f(t_0,t_1)=\widetilde{\lambda}_1(t_1/t_0)\cdot P(t/t_0)\cdot P(t/t_1)= \\ =\lambda_0(t_0)\cdot\widetilde{\lambda}_1(t_1/t_0)\times \\ \times\exp\left(-\int\limits_0^{t_0}\lambda_0(x)dx-\int\limits_0^{t_1}\lambda_1(x)dx-\int\limits_{t_0}^{t_1}\widetilde{\lambda}_1(x/t_0)dx\right) \\ \quad npu\, t_1>t_0 \end{cases} \tag{5.10}$$

Зная эту совместную плотность, можно найти вероятность отказа системы до интересующего момента t:

$$Q(t)=P\left(T_0<t,T_1<t\right)=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^{t_1}f(x,y)dxdy \tag{5.11}$$

Следовательно, надежность технической системы (вероятность ее безотказной работы в течение времени t) определится уравнением:

$$P(t) = 1 - \int_0^{t_0}\int_0^{t_1} f(x,y)dxdy \qquad (5.12)$$

При вычислениях по формулам (5.10), (5.11), (5.12) необходимо иметь в виду, что плотность $f(t_0,t_1)$ имеет различные выражения по разные стороны биссектрисы первого координатного угла или прямой $t_0=t_1$ (рис. 5.2).

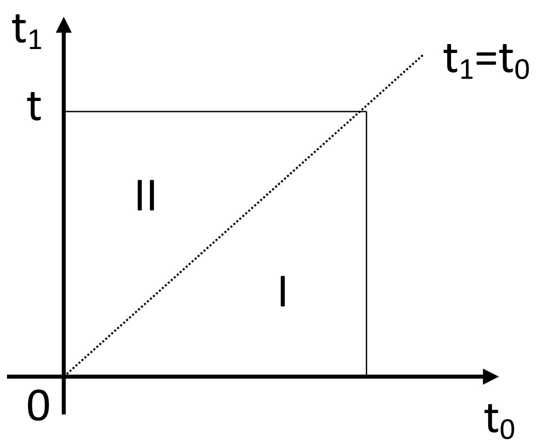


Рис. 5.2. Области интегрирования для вычислении надежности технической системы при нагрузочном резервировании

В области I выражение для плотности определяется первой зависимостью в формуле (5.10), т.е. при $t_1<t_0$. В области II — второй зависимостью в той же формуле (при $t_1>t_0$). Следовательно:

$$P(t)=1-\left\langle \begin{aligned} &\iint\limits_{I} \lambda_0(t_0)\cdot\lambda_1(t_1)\cdot\exp\left\{-\int\limits_0^{t_0}\lambda_0(t)dt-\int\limits_0^{t_1}\lambda_1(t)dt\right\}dt_0dt_1+ \\ &+\iint\limits_{II} \lambda_0(t_0)\cdot\tilde{\lambda}_1(t_1/t_0)\cdot\exp\left\{-\int\limits_0^{t_0}\lambda_0(t)dt-\int\limits_0^{t_1}\lambda_1(t)dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\tilde{\lambda}_1(t/t_0)dt\right\}dt_0dt_1 \end{aligned} \right\rangle \quad (5.13)$$

Если вид функций $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\tilde{\lambda}_1(t/t_0)$ известен, то интеграл (5.13) может быть вычислен, в простейших случаях аналитически, чаще – численно.

Приведенные выше рассуждения свидетельствуют о том, что даже в случае одного резервного устройства, работающего в облегченном или нагрузочном режиме, задача вычисления надежности технической системы довольно сложна. Если же число резервных устройств будет более одного, то решение усложняется весьма существенно.

Однако задача может быть значительно упрощена, если предположить, что потоки неисправностей, действующие на все устройства (основное и резервные), представляют собой простейшие потоки, интенсивность отказов каждого из которых постоянна, что равносильно тому, что закон надежности каждого устройства экспоненциальный, и включение устройства в работу меняет только параметр этого закона.

При таком допущении надежность технической системы может быть найдена путем решения системы дифференциальных уравнений для вероятностей ее состояний.

Пример 5.1.

Рассматривается система с нагрузочным резервированием и простейшим потоком отказов.

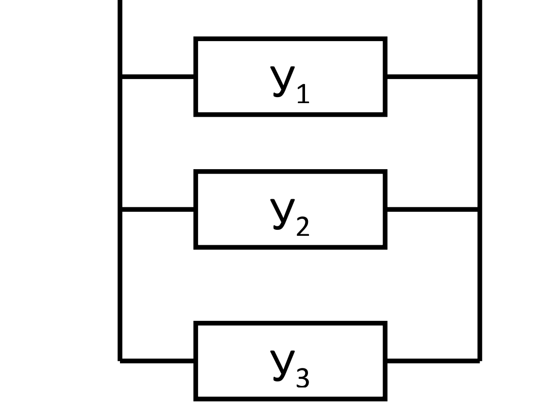


Рис. 5.3. Вид технической системы с нагрузочным резервированием, состоящей из одного основного и трех резервных устройств.

Техническая система состоит из одного основного и трех одинаковых с основным резервных устройств (рис.5.3). Основное устройство подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_0. Каждое из резервных устройств до своего включения в работу на полную нагрузку подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_1 и после включения в работу эта интенсивность для соответствующего устройства мгновенно подскакивает до значения $\tilde{\lambda}_1$.

Система функционирует по алгоритму: после отказа основного устройства включается в работу устройство $У_1$, затем $У_2$ и т.д. Отказ системы адекватен отказу последнего из всех устройств. Переключающее устройство принимается идеальным.

Требуется определить надежность технической системы.

Состояние системы будем нумеровать двумя индексами. Первый индекс будем считать равным единице, если основное устройство находится в работоспособном состоянии, и равным нулю, если основное устройство отказало. Второй индекс будем принимать равным числу исправных резервных устройств. Тогда состояния системы принимают следующие обозначения:

S_{13} — в исправном состоянии находятся все четыре устройства технической системы (основное и три резервных);

S_{12} — исправно основное устройство, из трех резервных устройств одно отказало, два находятся в исправном состоянии;

S_{11} — основное устройство исправно и исправно одно резервное;

S_{10} — исправно только основное устройство, все три резервных отказали;

S_{03} — основное устройство отказало, все три резервных исправны;

S_{02} — основное устройство отказало, исправны два резервных устройства;

S_{01} — основное устройство отказало, работает только одно из резервных;

S_{00} — отказали все четыре устройства (произошел отказ системы).

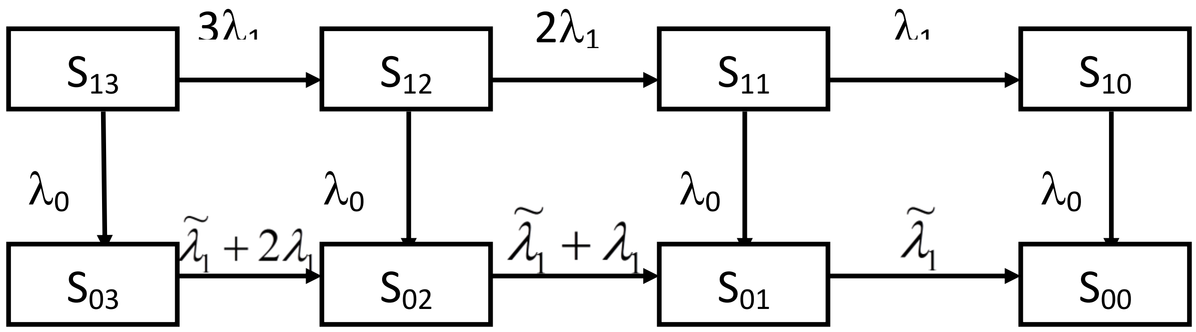


Рис. 5.4. Размеченный граф состояний технической системы с «нагруженным» резервированием

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{dP_{13}(t)}{dt} = -(3\lambda_1 + \lambda_0) \cdot P_{13}(t) \\
\dfrac{dP_{12}(t)}{dt} = -(2\lambda_1 + \lambda_0) \cdot P_{12}(t) + 3\lambda_1 \cdot P_{13}(t) \\
\dfrac{dP_{11}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_0) \cdot P_{11}(t) + 2\lambda_1 \cdot P_{12}(t) \\
\dfrac{dP_{10}(t)}{dt} = -\lambda_0 \cdot P_{10}(t) + \lambda_1 \cdot P_{11}(t) \\
\dfrac{dP_{03}(t)}{dt} = -(\widetilde{\lambda}_1 + 2\lambda_1) \cdot P_{03}(t) + \lambda_0 \cdot P_{13}(t) \\
\dfrac{dP_{02}(t)}{dt} = -(\widetilde{\lambda}_1 + \lambda_1) \cdot P_{02}(t) + \lambda_0 \cdot P_{12}(t) + (\widetilde{\lambda}_1 + 2\lambda_1) \cdot P_{03}(t) \\
\dfrac{dP_{01}(t)}{dt} = -\widetilde{\lambda}_1 \cdot P_{01}(t) + \lambda_0 \cdot P_{11}(t) + (\widetilde{\lambda}_1 + \lambda_1) \cdot P_{02}(t) \\
\dfrac{dP_{00}(t)}{dt} = \lambda_0 \cdot P_{10}(t) + \widetilde{\lambda}_1 \cdot P_{01}(t)
\end{cases} \qquad (5.14)$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие:

$$\begin{aligned} &P_{13}(t) + P_{12}(t) + P_{11}(t) + P_{10}(t) + \\ &+ P_{03}(t) + P_{02}(t) + P_{01}(t) + P_{00}(t) = 1 \end{aligned} \qquad (5.15)$$

которое позволяет исключить одно (любое) из уравнений Колмогорова.

Интегрирование системы уравнений (5.14) может быть осуществлено в следующей последовательности: из первого уравнения находится функция $P_{13}(t)$, равная

$$P_{13}(t) = \exp\left[-\left(3\lambda_1 + \lambda_0\right) \cdot t\right] \qquad (5.16)$$

Это выражение подставляется во второе уравнение, которое теперь содержит только одну неизвестную функцию $P_{12}(t)$, которую достаточно легко можно определить и подставить в третье уравнение, и т.д. На каждом шаге такого процесса новые выражения функций мы находим через уже известные, пока не доходим до функции $P_{00}(t)$, которую выражаем через все остальные:

$$P_{00}(t) = 1 - \begin{pmatrix} P_{13}(t) + P_{12}(t) + P_{11}(t) + \\ + P_{10}(t) + P_{03}(t) + P_{02}(t) + P_{01}(t) \end{pmatrix} \qquad (5.17)$$

Теперь можно определить надежность P(t) рассматриваемой технической системы:

$$P(t) = 1 - P_{00}(t) \qquad (5.18)$$

Пример изменения вероятностей нахождения системы в перечисленных выше состояниях, рассчитанных с помощью пакета Mathcad, приведен на рис. 5.5.

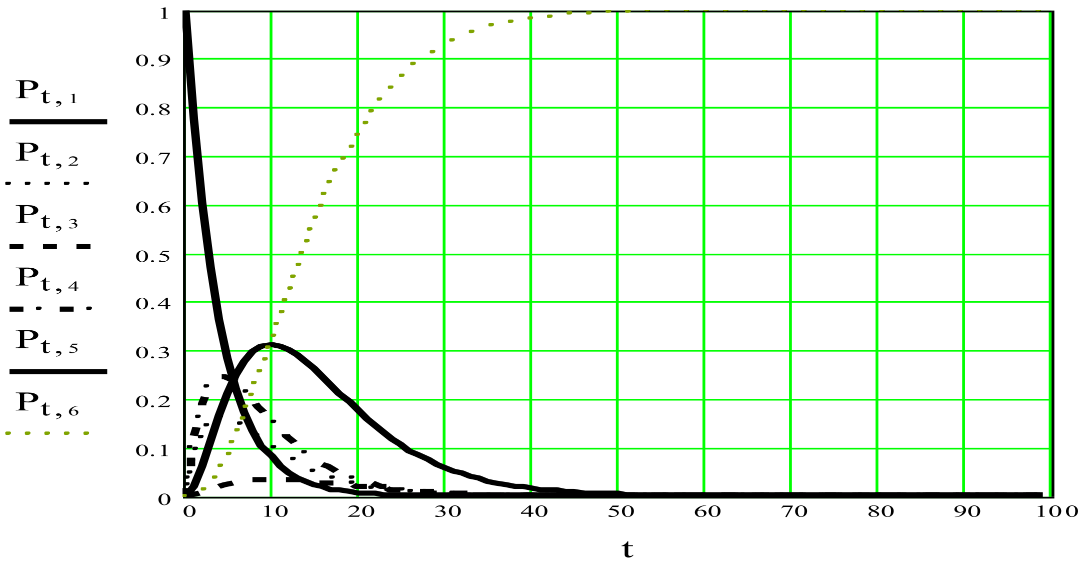


Рис. 5.5 Изменение вероятностей состояния системы, где введены обозначения:

$P_{13}=P_{t,1}$, $P_{12}=P_{t,2}$, $P_{11}=P_{t,3}$, $P_{10}=P_{t,4}$, $P_{03}=P_{t,5}$, $P_{02}=P_{t,6}$, $P_{01}=P_{t,7}$, $P_{00}=P_{t,8}$.

n - число шагов интегрирования в функции rkfixed пакета Mathcad.

Расчеты проводились при $\lambda_1=5\ ^1/_{год}$, $\lambda_0=20\ ^1/_{год}$, $\tilde{\lambda}_1=10\ ^1/_{год}$, n=100.

Несколько упростим задачу и примем следующие допущения:

отказы всех устройств технической системы представляют собой простейшие потоки случайных событий;

переключающие элементы абсолютно надежны и срабатывают мгновенно.

Первое допущение означает, что интенсивности отказов устройств не изменяются во времени и их распределение подчинено экспоненциальному закону. Кроме того, в силу идентичности устройств, интенсивности отказов устройств, находящихся в резервном режиме работы, равны между собой.

Пусть t_0 — момент отказа основного устройства технической системы или резервного устройства, работавшего с полной нагрузкой. Обозначим через λ_A интенсивность отказов устройства, работающего в активном (с полной нагрузкой) режиме, а через λ_P — интенсивность отказов устройства, находящегося в резерве (в облегченном режиме нагружения). Изменение интенсивности отказов любого из резервных устройств происходит скачкообразно в момент перехода устройства в активный режим работы (рис.5.6).

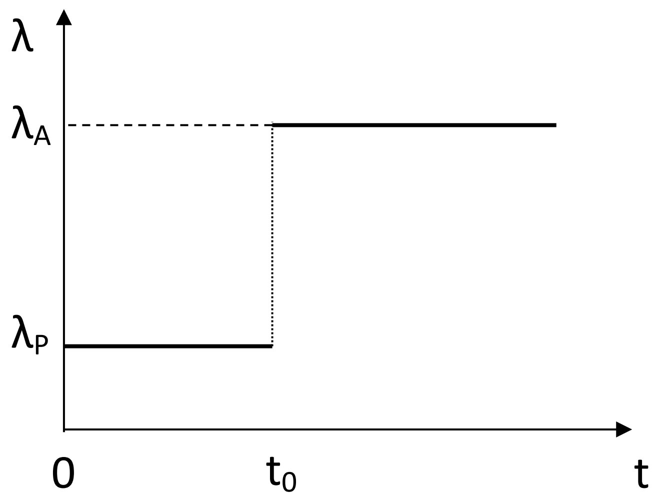


Рис.5.6. Изменение интенсивности отказов резервных устройств.

Основное устройство технической системы имеет с момента включения технической системы интенсивность отказов, равную λ_A.

Вывод основных показателей надежности технической системы, резервированной по принципу «теплого» резервирования, базируется на следующих рекуррентных соотношениях:

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P_1(\tau) \cdot P_0(t-\tau) \cdot a_m(\tau) d\tau \tag{5.19}$$

$$Q_{m+1}(t) = \int_0^t \left[1 - P_1(\tau) \cdot P_0(t-\tau)\right] \cdot a_m(\tau) d\tau \tag{5.20}$$

где $P_1(\tau)$ — вероятность безотказной работы резервного устройства до момента его включения в активную (полную) нагрузку; $P_0(t-\tau)$ — вероятность безотказной работы резервного устройства от момента τ включения его в работу до момента времени t; $a_m(\tau)$ — частота отказов резервного устройства после его включения в активный режим работы.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения для вероятности безотказной работы технической системы при различной кратности резервирования в режиме «облегченного» резерва.

При m=1 (одно резервное устройство, т.е. всего в системе 2 устройства):

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \exp(-\lambda_A t) + \lambda_A \cdot \exp(-\lambda_A t) \cdot \int_0^t \exp(-\lambda_P \tau) d\tau = \\ &= \exp(-\lambda_A t)\left[1 + \frac{\lambda_A}{\lambda_P} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.21}$$

При m=2 (два резервных устройства и одно основное):

$$P_3(t) = \exp(-\lambda_A t) \times$$
$$\times \left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{\lambda_A}{\lambda_P} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t\right) + \\ + \dfrac{1}{2} \dfrac{\lambda_A}{\lambda_P} \cdot \left(1 + \dfrac{\lambda_A}{\lambda_P}\right) \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^2 \end{array} \right] \quad (5.22)$$

Анализ представленных зависимостей и их аналогов для m=3 дает основание для установления закономерности, позволяющей записать выражение для вероятности безотказной работы $P_C(t)$ технической системы при произвольной кратности резервирования (общее число устройств равно m+1):

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_A t) \cdot \left\lfloor 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^i \right\rfloor \quad (5.23)$$

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_A}{\lambda_P} \right) \quad (5.24)$$

Из выражения (5.23) видно, что вероятность безотказной работы m-кратно резервированной технической системы может быть вычислена так же с помощью рекуррентного соотношения:

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \frac{a_m}{m!} \cdot \exp(-\lambda_A t) \cdot \left[1 - \exp(-\lambda_P t)\right]^m \quad (5.25)$$

$$a_m = \prod_{j=0}^{m-1} \left(j + \frac{\lambda_A}{\lambda_P} \right) \quad (5.26)$$

Интегрирование (5.25) позволяет найти выражение для расчета среднего времени T_C безотказной работы технической системы:

$$T_C = \int_0^{\infty} P_{m+1}(t)dt = \cdots =$$

$$= \frac{1}{\lambda_A} + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!} \times \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \times C_i^j \cdot \exp\left[-(\lambda_A + j\lambda_P)t\right] \right) dt \qquad (5.27)$$

В окончательном виде после интегрирования (5.27):

$$T_C = \frac{1}{\lambda_A} + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \cdot C_i^j \cdot \frac{1}{\lambda_A + j \cdot \lambda_P} \qquad (5.28)$$

Частота отказов системы:

$$a_C(t) = \lambda_A \cdot \exp(-\lambda_A t) \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^i - \\ - \frac{\lambda_P}{\lambda_A} \cdot \exp(-\lambda_P t) \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{a_i}{(i-1)!} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^{i-1} \end{array} \right] \qquad (5.29)$$

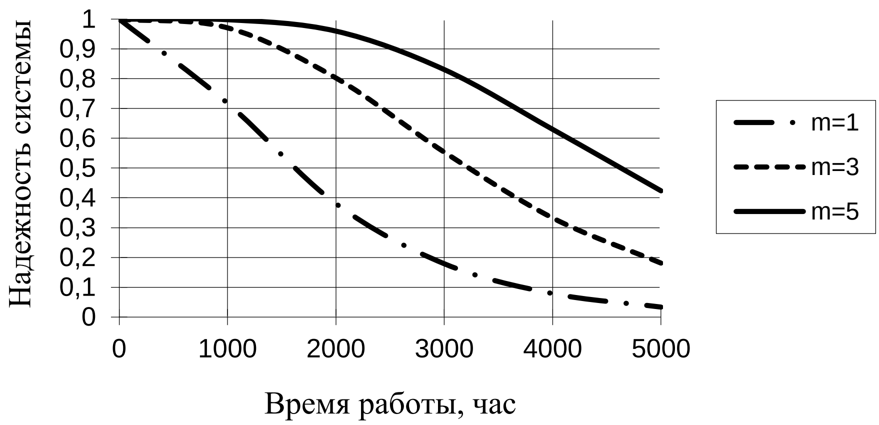


Рис. 5.7. Изменение вероятности безотказной работы системы

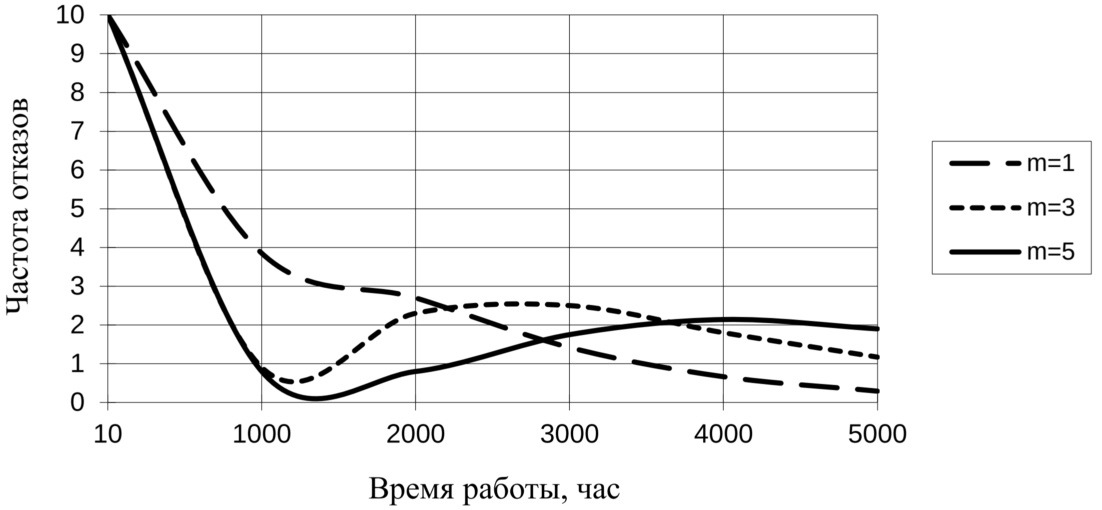
Интенсивность отказов технической системы:

$$\lambda_C(t) = \frac{a_C(t)}{P_C(t)} =$$

$$= \lambda_A \cdot \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\lambda_P}{\lambda_A} \cdot \exp(-\lambda_P t) \times \\ \times \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{a_i}{(1-i)!} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^{i-1}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{a_i}{i!} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_P t)\right)^{i}} \end{array} \right] \tag{5.30}$$

Изменение надежности системы при различном числе m резервных устройств и при значениях интенсивностей отказов $\lambda_A = 10^{-3}$ 1/час, $\lambda_P = 10^{-4}$ 1/час приведено на рис.5.7.

Изменение частоты отказов технической системы с теми же



параметрами представлено на рис.5.8.

Рис.5.8. Изменение частоты отказов $a_c \cdot 10^{-4}$ технической системы, рассчитанной по формуле (5.29) при λ_A=0.001 1/час, λ_P=0.0001 1/час

На рис.5.9 приведены графики изменения интенсивности отказов технической системы в тех же условиях.

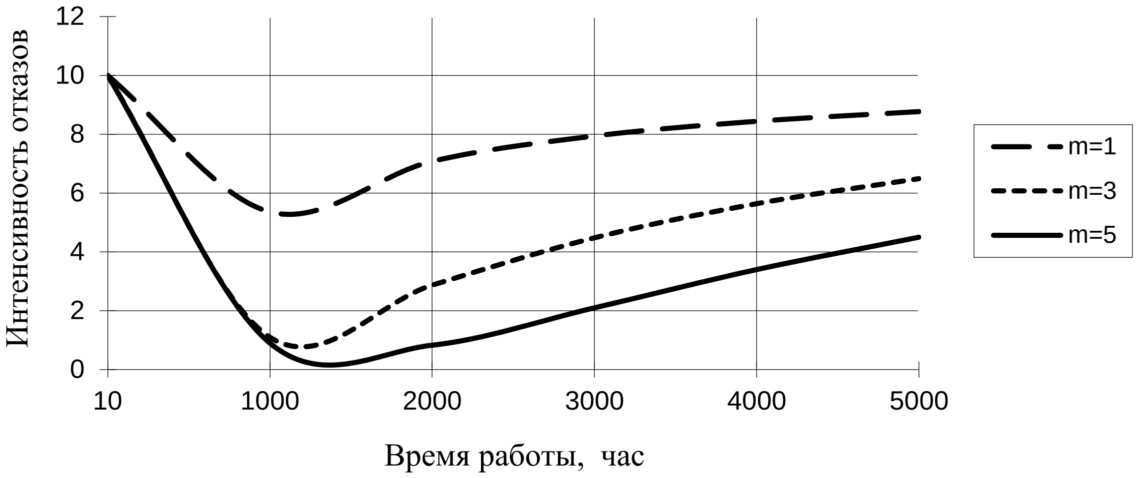


Рис.5.9. Изменение интенсивности отказов $\lambda_C \cdot 10^{-4}$ (1/час) технической системы, рассчитанной по формуле (5.30) при исходных данных, совпадающих с данными рис. 5.8

Анализ кривых, представленных на рис. 5.8, рис. 5.9 показывает, что локальное снижение интенсивности и частоты отказов объясняется достаточным количеством резервных устройств, находящихся в исправном состоянии. Снижение частоты отказов на конечном этапе эксплуатации системы объясняется уменьшением общего числа работоспособных устройств.

5.2. Расчетно-графическая работа № 5.1.

Дана техническая система, резервированная по принципу «нагруженного» резерва. Система состоит из одного основного и m резервных однотипных с основным устройств. Все резервные устройства находятся в нагруженном состоянии, но значительно более слабом в сравнении с работающим устройством.

После выхода из строя основного устройства, оно заменяется резервным, после отказа которого происходит его замещение следующим резервным и т.д. Интенсивность отказов устройств до включения в активный режим равна λ_P, после включения в активный режим работы — λ_A.

Варианты характеристик технических систем представлены в табл.5.1.

Требуется:

построить размеченный граф состояний системы;

составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

определить функцию $P_C(t)$ надежности технической системы;

определить функцию $a_c(t)$ частоты отказов технической системы;

определить функцию интенсивности отказов $\lambda_C(t)$ системы;

найти значение T_C среднего времени безотказной работы системы;

выбрать интервал изменения времени работы системы, построить графики изменения перечисленных выше функций и произвести их анализ.

объяснить причину выбора соответствующих расчетных зависимостей.

Таблица 5.1.

Варианты значений показателей технической системы.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	3	2	3	4	3	4	3	3	4	3	2	4	4	2	3
$\lambda_P \cdot 10^{-4}$	0.2	1.1	0.8	1.5	0.7	1.3	0.4	1.2	1.7	0.9	0.6	0.3	1.2	0.8	0.5
$\lambda_A \cdot 10^{-3}$	1.3	2.2	2.4	3.6	1.8	3.1	3.3	2.8	1.9	1.1	3.0	2.6	3.7	2.1	1.9

Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	2	3	2	2	4	3	2	4	3	3	32	3	3	3	4
$\lambda_P \cdot 10^{-4}$	0.3	0.1	0.7	1.2	0.8	1.1	0.9	1.0	1.5	0.8	0.5	0.4	1.3	0.7	0.6
$\lambda_A \cdot 10^{-3}$	1.2	1.8	1.7	2.3	1.9	2.0	2.5	3.1	1.7	1.8	2.4	2.7	2.3	1.8	2.9

Н а д е ж н о с т ь с и с т е м ы п р и

кратности резервирования m=3,5

Расчет надежности системы с нагруженным резервированием в среде Mathcad

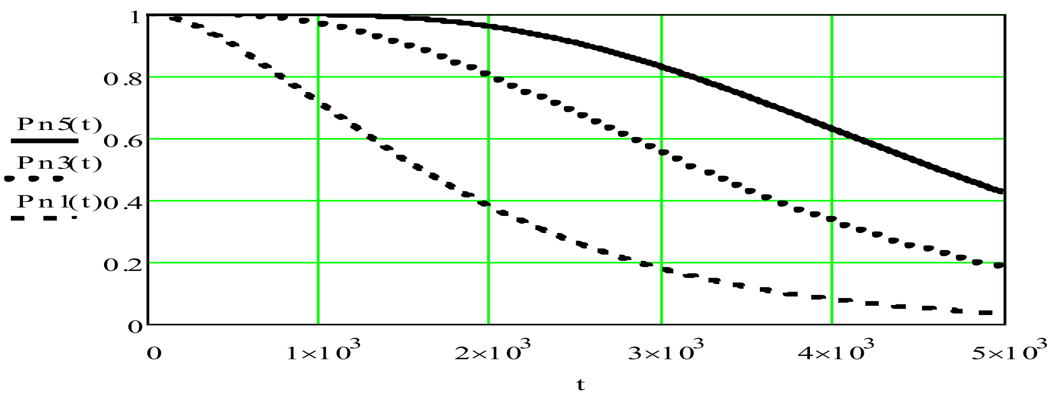
$b := 1\cdot 10^{-3}$ $\quad a := 1\cdot 10^{-4}$

$t := 0..5000$ $\quad i := 1..m$

$$z(i) := \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{b}{a}\right) \qquad Pn5(t) := e^{(-b\cdot t)}\cdot\left[1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{z(i)\cdot\left[1 - e^{(-a\cdot t)}\right]^{i}}{i!}\right]$$

Результаты расчета надежности технической системы

m=1 (Pn1), m=3 (Pn3), m=5 (Pn5).



Вопросы для самоконтроля.

Объясните существо отличия «теплого» резервирования от «горячего» резервирования.

Объясните характер изменения интенсивности отказов технической системы при нагрузочном резервировании.

Раскройте смысл условной плотности распределения времени безотказной работы резервных устройств.

Каким образом (при каких допущениях) может быть упрощена задача определения надежности технической системы при нагрузочном резервировании.

Составьте размеченный граф и систему дифференциальных уравнений функционирования технической системы, состоящей из одного основного и одного резервного устройства, работающего по принципу нагрузочного резервирования.

6. ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕЗЕРВИРОВАНИИ ЗАМЕЩЕНИЕМ («ХОЛОДНОЕ» РЕЗЕРВИРОВАНИЕ).

Отличительной особенностью резервирования замещением является активная работа основного устройства системы, включенного на полную нагрузку, и «отдыхающий» или ждущий режим остальных (резервных) устройств, ожидающих своей очереди включения в активный режим в случае выхода основного или работающего резервного устройства.

При таком способе резервирования принимается, что все резервные устройства находятся в исправном состоянии, они поочередно включаются в активный режим работы по мере выхода из строя предыдущего работающего устройства и система приходит в неисправное состояние при выходе из строя последнего резервного устройства.

Включение резервных устройств в работу осуществляется с помощью коммутирующих элементов, которые, в общем случае также способны к отказам:

- могут не включить в нужное время в работу очередное резервное устройство;

- включить резервное устройство при исправной работе основного устройства (преждевременное включение);

- исказить алгоритм замены работающего устройства резервными.

6.1. Расчетные соотношения для случая резервирования при идеальных переключающих устройствах (коммутаторах).

В общем виде основные показатели надежности технической системы, при резервировании замещением могут быть вычислены по следующим, уже известным формулам.

Математическое ожидание времени работы системы до отказа:

$$T_c = \int_0^{\infty} P_c(t)dt \tag{6.1}$$

Частота отказов системы:

$$a(t) = -P_c'(t) \tag{6.2}$$

Интенсивность отказов системы:

$$\lambda_c(t) = -\frac{P_c'(t)}{P_c(t)} \tag{6.3}$$

Здесь $P_C(t)$ — функция надежности технической системы.

Вероятность безотказной работы системы при «холодном» резервировании будем вычислять при следующих допущениях:

все резервные устройства до момента замещения основной системы равнонадежны;

переключающие устройства в смысле надежности идеальны;

ремонт резервированной системы в процессе ее работы невозможен.

Пусть первоначально техническая система состоит из одного рабочего и одного резервного устройства. Основное устройство обозначим через А, резервное — через В.

С учетом принятых допущений отказ системы в течение времени t будет отсутствовать в случае: а) устройство А в течение времени t не отказало; б) устройство А отказало в момент времени τ, а устройство Б, будучи исправным до момента замещения τ, осталось исправным и в течение времени (t-τ)

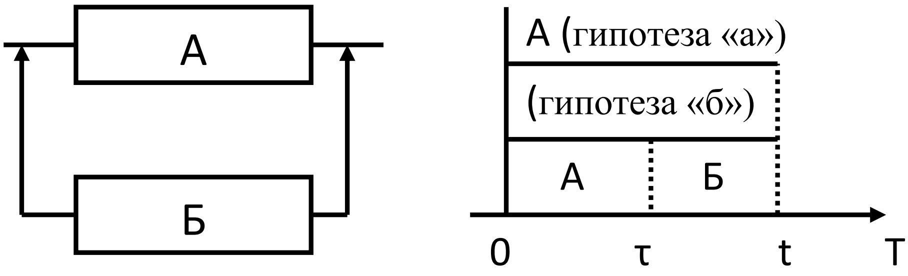


Рис. 6.1. Представление процесса функционирования дублированной системы при «холодном» резервировании

На основании формулы полной вероятности вероятность $P_c(t)$ безотказной работы резервированной системы в течение времени t может быть представлена в виде:

$$P_c(t) = P_A(t) + P_{Б/A}(t,\tau) \tag{6.4}$$

где $P_A(t)$ — вероятность безотказной работы устройства А в течение времени t;

$P_{Б/A}(t,\tau)$ — вероятность безотказной работы устройства Б в течение времени t при условии, что отказ системы А произошел в момент τ.

Определим вероятность $P_{Б/A}(t,\tau)$.

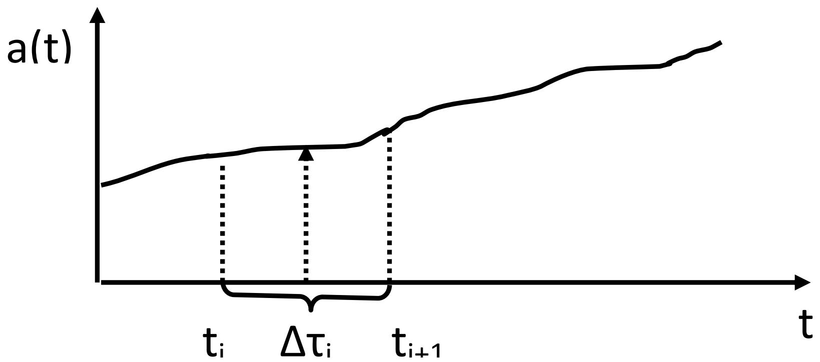


Рис. 6.2. Распределение частоты отказов системы А

Момент времени τ замещения основного устройства является величиной случайной. Пусть функция распределения времени повреждения устройства А (частота отказов устройства А) имеет вид, представленный на рис. 6.2.

Разобьем ось времени на равные интервалы:

$$\Delta\tau_i = t_{i+1} - t_i \tag{6.5}$$

Тогда вероятность возникновения отказа системы в течение произвольно выбранного промежутка $\Delta\tau_i$ можно записать в виде:

$$Q_A(t_{i+1} - t_i) = \int\limits_0^{t_{i+1}} a(t)dt - \int\limits_0^{t_i} a(t)dt \tag{6.6}$$

При малом значении $\Delta\tau_i$ эта вероятность будет пропорциональна длине интервала:

$$Q_A(t_{i+1} - t_i) = a(t_i) \cdot \Delta\tau_i \tag{6.7}$$

Вероятность безотказной работы резервного устройства до момента t запишется в виде:

$$P_{Б/А}(t, t_i) = a(t_i) \cdot \Delta\tau_i \cdot P_Б(t, t_i) \tag{6.8}$$

где: $P_{Б/А}(t, t_i)$ — вероятность безотказной работы резервного устройства на интервале $t - t_i$ при условии, что до момента t_i устройство Б было исправно; первые два сомножителя определяют вероятность отказа устройства А до момента t_i согласно (6.7); $P_Б(t, t_i)$— вероятность исправной работы устройства Б технической системы на интервале (t, t_i).

Вероятность возникновения отказа в промежутках времени $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$, …, $\Delta\tau_n$, очевидно, будет соответствовать $a(t_1) \cdot\Delta\tau_1$, $a(t_2) \cdot\Delta\tau_2$,…, $a(t_n)\cdot\Delta\tau_n$.

Тогда, принимая отказы устройства А в любой промежуток времени $\Delta\tau$ в качестве гипотез, на основании формулы полной вероятности можно найти вероятность безотказной работы резервированной системы:

$$P_{Б/А}(t,\tau) = \sum_{i}^{\frac{t}{\Delta\tau_i}} a(t_i)\cdot\Delta\tau_i \cdot P_Б(t,t_i) \tag{6.9}$$

Уменьшая промежуток $\Delta\tau_i$ и переходя к пределу, получим:

$$P_{Б/А}(t,\tau) = \int_0^t P_Б(t,\tau)\cdot a(\tau)d\tau \tag{6.10}$$

Подставляя это выражение в формулу полной вероятности, имеем:

$$P_C(t) = P_A(t) + \int_0^t P_Б(t,\tau)\cdot a(\tau)d\tau \tag{6.11}$$

где τ — случайный момент замещения отказавшего устройства.

Это выражение позволяет получить общую формулу вероятности безотказной работы системы с любой кратностью резервирования.

Система с кратностью резервирования m может быть представлена системой, имеющей кратность резервирования m-1 и одного резервного устройства. Тогда, повторяя приведенные выше рассуждения, получим следующее выражение для вероятности безотказной работы системы с кратностью резервирования m:

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P(t,\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.12}$$

где $P_m(t)$ — вероятность безотказной работы системы с m-1 резервным устройством (всего в системе m устройств) в течение времени t; $P(t,\tau)$ — вероятность безотказной работы одного резервного устройства в течение времени $(t-\tau)$, при условии, что до момента τ оно было исправно; $a_{m-1}(\tau)$ — функция распределения времени повреждения системы с кратностью резервирования (m-1), или, что то же самое, частота отказов.

Поскольку

$$P(t,\tau)=1-Q(t,\tau) \tag{6.13}$$

получим:

$$P_{m+1}(t)=P_m(t)+\int_0^t a_m(\tau)d\tau-\int_0^t Q(t,\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.14}$$

Учитывая, что:

$$\int_0^t a_m(\tau)d\tau=Q_m(t) \tag{6.15}$$

имеем:

$$P_{m+1}(t)=1-\int_0^t Q(t,\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.16}$$

или

$$Q_{m+1}(t)=\int_0^t Q(t,\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.17}$$

В рамках принятых допущений, считая, что условия и режимы работы резервных устройств облегчены настолько, что практически они начинают терять надежность только с момента замещения отказавшего устройства, т.е. отказ резервной системы до момента τ произойти не может, справедливы соотношения:

$$P(t,\tau)=P(t-\tau),$$

$$Q(t,\tau)=Q(t-\tau)$$

тогда рекуррентное уравнение (6.12) с учетом (6.15) принимает вид:

$$P_{m+1}(t)=P_m(t)+$$

$$+\int_0^t P(t-\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.18}$$

$$Q_{m+1}(t) = \int_0^t Q(t-\tau)\cdot a_m(\tau)d\tau$$

Приведенные формулы не всегда удобны для практического использования, поскольку для вычисления вероятности безотказной работы и вероятности отказа системы, резервированной m раз, необходимо вычислять частоту отказов системы, резервированной m-1 раз. Эти зависимости могут быть существенно упрощены.

Используем интегрирование по частям, для чего обозначим:

$$P(t-\tau) = u, \quad a_m(\tau)d\tau = dv$$

Тогда:

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + P(t-\tau)\cdot Q_m(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t Q_m(t)dP(t-\tau) =$$
$$= P_m(t) + Q_m(t) - \int_0^t Q_m(\tau)dP(t-\tau) = 1 - \int_0^t Q_m(\tau)dP(t-\tau) \tag{6.19}$$

Или

$$P_{m+1}(t) = 1 - \int_0^t [1 - P_m(\tau)]dP(t-\tau) = 1 - \int_0^t dP(t-\tau) + \int_0^t P_m(\tau)dP(t-\tau) =$$
$$= 1 - P(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t P_m(\tau)dP(t-\tau) = P(t) + \int_0^t P_m(\tau)dP(t-\tau)$$

Окончательно имеем:

$$P_{m+1}(t) = P(t) + \int_0^t a_m(t-\tau)\cdot P_m(\tau)d\tau \tag{6.20}$$

$$Q_{m+1}(t) = Q(t) - \int_0^t a_m(t-\tau)\cdot P_m(\tau)d\tau \tag{6.21}$$

где P(t), Q(t) — вероятность безотказной работы и вероятность отказа резервного устройства с момента его включения и до момента t.

Из этих формул видно, что для вычисления $P_{m+1}(t)$ *и* $Q_{m+1}(t)$ нет необходимости рассчитывать частоту отказов резервированной системы. Эти формулы весьма удобны для вычисления вероятности безотказной работы и отказа, если известно аналитическое выражение $P_m(\tau)$.

Однако на практике чаще встречаются задачи, когда требуется по известной вероятности безотказной работы нерезервированной системы вычислить вероятность безотказной работы системы с m-кратным резервированием. Для решения этой задачи по формулам (6.20), (6.21) необходимо вначале вычислить вероятность безотказной работы дублированной системы (m=1), затем, используя полученный результат, вычислить вероятность безотказной работы резервированной системы при m=2 и т.д. Таким образом, задача фактически сводится к отысканию m-кратного интеграла.При экспоненциальном законе распределения отказов в системе с «холодным» резервированием частоты отказов основного устройства (индекс 0) и резервных устройств будут иметь вид:

$$\begin{cases} a_1(t) = 0 & \text{при } t \le \tau_0 \\ a_1(t) = \lambda_0 \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) & \text{при } \tau_0 < t < \tau_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2(t) = 0 & \text{при } t < \tau_1 \\ a_2(t) = \lambda_0 \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) & \text{при } \tau_1 < t < \tau_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m+1}(t) = 0 & \text{при } t \le \tau_m \\ a_{m+1}(t) = \lambda_0 \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) & \text{при } \tau_m < t < \tau_{m+1} \end{cases}$$

$$a_0(t) = \lambda_0 \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) \quad \text{при } t < \tau_0$$

где λ_0 — интенсивность отказов основного или любого резервного устройства; τ_i — время отказа i-го устройства, отсчитанное от момента включения всей резервированной системы.

Вычислим вероятность безотказной работы системы, пользуясь формулой (6.20).

При m=1:

$$P_2(t) = P(t) +$$

$$+\int_0^t a_1(t-\tau)\cdot P_1(\tau)d\tau =$$

$$= \exp(-\lambda_0 t) + \int_0^t \lambda_0 \exp\left[-\lambda_0 \cdot (t-\tau)\right]\cdot \exp(-\lambda_0 \tau)d\tau$$

$$= \exp(-\lambda_0 t)\cdot(1+\lambda_0 t)$$

При m=2:

$$P_3(t) = \cdots = \exp(-\lambda_0 t)\cdot\left(1+\lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2\cdot t^2}{2}\right)$$

При m=3:

$$P_4(t) = \cdots = \exp(-\lambda_0 t)\cdot\left(1+\lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2\cdot t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3\cdot t^3}{2\cdot 3}\right)$$

При произвольной кратности резервирования m:

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_0 t)\cdot\left(1+\lambda_0 t + \frac{(\lambda_0 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_0 t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda_0 t)^m}{m!}\right) =$$

$$= \exp(-\lambda_0 t)\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$$

Или

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \frac{(\lambda_0 t)^m}{m!}\cdot\exp(-\lambda_0 t) \qquad (6.22)$$

Выражение для времени безотказной работы системы имеет вид:

$$T_C = \int_0^{+\infty}\exp(-\lambda_0 t)\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}dt = \sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda_0^i}{i!}\cdot\int_0^{+\infty}t^i\cdot\exp(-\lambda_0 t)dt,$$

где интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^i \cdot \exp(-\lambda_0 t)dt$ — эйлеров интеграл второго рода.

Известно, что (см. Приложение 1):

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(-rx) \cdot x^{s-1} dx = r^{-s} \cdot \Gamma(s),$$

тогда:

$$T_C = \sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda_0^i}{i!} \cdot \frac{\Gamma(i+1)}{\lambda_0^{i+1}} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \sum_{1=0}^{m} \frac{\Gamma(i+1)}{i!}$$

Используя свойства гамма-функции (см. Приложение 1):

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x); \qquad \Gamma(x) = (x-1)! \quad \textit{для} \quad x = 0, 1, 2...$$

Выражение для среднего времени безотказной работы системы с m-кратным «холодным» резервированием может быть представлено в следующем простом виде:

$$T_C = \frac{m+1}{\lambda_0} \tag{6.23}$$

Дисперсия времени возникновения отказов системы в этом случае может быть вычислена по формуле:

$$D[T] = \frac{m+1}{\lambda_0^2} = T_C \cdot T_0 \tag{6.24}$$

Среднее квадратическое отклонение времени возникновения отказов:

$$\sigma[T] = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \sqrt{T_C \cdot T_0} \tag{6.25}$$

Функция интенсивности отказов системы при m-кратном «холодном» резервировании определяется соотношением:

$$\lambda_C(t) = \frac{\lambda_0^{m+1} \cdot t^m}{m! \cdot \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 \cdot t)^i}{i!}} \qquad (6.26)$$

Функция частоты отказов системы в этом случае имеет вид:

$$a_C(t) = \frac{\lambda_0^{m+1}}{m!} \cdot t^m \cdot \exp(-\lambda_0 t) \qquad (6.27)$$

6.2. Влияние переключающих устройств (коммутаторов) на качество резервирования замещением (на качество «холодного» резервирования).

Реальные системы с общим резервированием замещением используют переключающие устройства, которые, в свою очередь, имеют способность отказывать, т.е. обладают конечной надежностью, влияющей на вероятность безотказной работы резервированной системы. Отказы коммутаторов могут быть двух видов: не выполнение включения резервного устройства в нужный момент времени и преждевременное включение в работу резервного устройства. В дальнейшем будем полагать, что любой из этих случаев считается отказом переключающего устройства, а интенсивность его отказов является их обобщением.

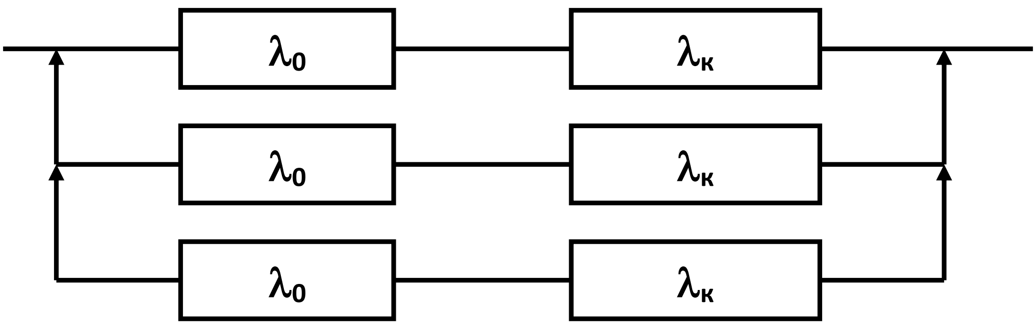


Рис. 6.3. Схема функционирования системы с резервированием замещением при реальных коммутирующих устройствах, включенных в цепи основного и резервных устройств.

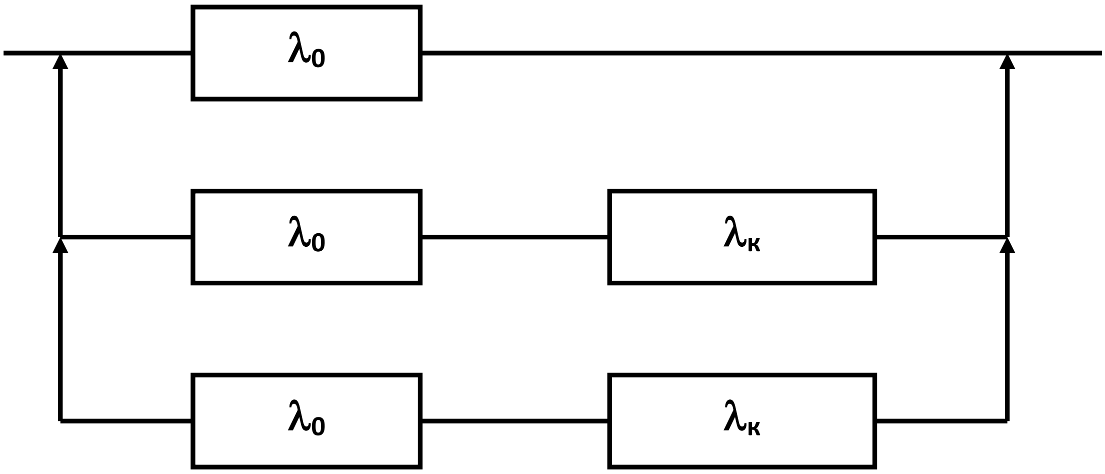


Рис. 6.4. Схема функционирования системы с резервированием замещением при реальных коммутирующих устройствах, включенных только в цепи резервных устройств.

Среди различных вариантов использования коммутаторов в дальнейшем будем рассматривать модели систем, схемы которых изображены на рис. 6.3 и рис.6.4.

Из рис. 6.3 видно, что как основное, так и любое резервное устройства в смысле надежности равнозначны, вследствие чего такую систему можно рассматривать как резервированную m раз систему, интенсивность отказов каждого устройства которой равна:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) + \lambda_k(t) \tag{6.28}$$

где $\lambda_0(t)$ — интенсивность отказов основного или любого резервного устройства; $\lambda_k(t)$ — интенсивность отказов коммутатора.

Система, изображенная на рис. 6.4, отличается тем, что основное устройство не имеет коммутатора, тогда как все резервные устройства оснащены коммутирующими устройствами, включающими резерв в случае выхода из строя основного устройства или очередного замещающего. Заметим, что в данном случае все резервные устройства равнонадежны между собой и интенсивность их отказов определяется (6.28), а интенсивность отказов основного устройства равна $\lambda_0(t)$.

Становится ясным, что общие формулы, выведенные для оценки вероятности безотказной работы и вероятности отказов системы, резервированной по способу замещений («холодное» резервирование), пригодны для определения надежности системы с учетом влияния возможных отказов коммутаторов.

Методика вычислений не отличается от методики для случая идеального коммутатора. Отличие будет состоять лишь в том, что условная вероятность $P(t,\tau)$ безотказной работы одной резервной системы в течение времени $(t-\tau)$ и функция $a_0(t)$ распределения времени повреждения (частота отказов) системы будут иметь несколько иной вид.

В целом работа резервированной системы представляется следующей моделью. При включении системы вступает в работу основное устройство и все переключатели, а резервные устройства находятся в ждущем режиме. При этом переключатели находятся в облегченном режиме нагрузки до момента выхода из строя предыдущего устройства и перехода резервной системы в активный режим функционирования.

В этом случае, как и прежде вероятность безотказной работы системы будет определяться выражением (6.18). При этом вероятность $P(t-\tau)$ будет представлять собой вероятность безотказной работы одного резервного устройства в течение времени $(t-\tau)$, вычисленную при условии, что переключатель не отказал в течении времени t.

Эта вероятность равна:

$$P(t,\tau) = P_0(t-\tau) \cdot P_k(\tau) \cdot P_k(t-\tau) \qquad (6.29)$$

где τ — момент включения в работу очередного резервного устройства; $P_0(t-\tau)$ — безотказность работы резервного устройства от момента замещения до момента t; $P_k(\tau)$ — вероятность безотказной работы коммутатора до момента включения в работу резервной системы, в состав которой он входит; $P_k(t-\tau)$ – – вероятность безотказной работы коммутатора от момента включения в работу соответствующей резервной системы до момента t.

Введем обозначение:

$$P_{0,k}(t-\tau)=P_0(t-\tau)\cdot P_k(t-\tau) \tag{6.30}$$

которое представляет собой вероятность безотказной работы соединения, образуемого устройством и переключателем. Тогда, подставив (6.30) и (6.29) в (6.18), получим:

$$P_{m+1}(t)=P_m(t)+\int_0^t P_k(\tau)\cdot P_{0,k}(t-\tau)\cdot a_{m-1}(\tau)d\tau \tag{6.31}$$

Из (6.31) видно, что коммутаторы оказывают на надежность резервированной системы такое же влияние, как состояние резервных устройств до момента замещения ими отказавшего устройства.

Полагая, что справедлив экспоненциальный закон надежности для устройств и переключателей, будем иметь.

Для системы, изображенной на рис. 6.3:

$$\begin{aligned} &P_k(\tau)=\exp(-\lambda_k\tau) \\ &P_{0,k}(t-\tau)=\exp\left[-(\lambda_0+\lambda_{k2})\cdot(t-\tau)\right] \\ &a_k(\tau)=(\lambda_0+\lambda_{k2})\cdot\exp\left[-(\lambda_0+\lambda_{k2})\cdot\tau\right] \end{aligned} \tag{6.32}$$

Для системы, изображенной на рис. 6.4:

$$\begin{aligned} &P_k(\tau)=\exp(-\lambda_k\tau) \\ &P_{0,k}(t-\tau)=\exp\left[-(\lambda_0+\lambda_{k2})\cdot(t-\tau)\right] \\ &a_k(\tau)=\lambda_0\cdot\exp(-\lambda_0 t) \end{aligned} \tag{6.33}$$

где λ_k — интенсивность отказов переключателя до момента включения резервного устройства; λ_{k2} — интенсивность отказов переключателя после момента включения резервного устройства.

В дальнейшем будем полагать, что интенсивность отказов коммутаторов не зависит от момента их включения, т.е.

$$\lambda_k=\lambda_{k2}$$

Основные показатели надежности системы, изображенной на рис. 6.3, с учетом принятых допущений будут иметь вид:

$$P_C(t) = \exp\left[-(\lambda_0 + \lambda_k)\cdot t\right]\cdot\left\lfloor 1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\cdot\left[1 - \exp\left(-\left(\lambda_0 + \lambda_k\right)\cdot t\right)\right]^i \right\rfloor \tag{6.34}$$

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_k} + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\cdot C_i^j\cdot\frac{1}{\lambda_0 + (j+1)\cdot\lambda_k} \tag{6.35}$$

$$a_C(t) = (\lambda_0 + \lambda_k)\cdot\exp\left[-(\lambda_0 + \lambda_k)\cdot t\right]\times$$

$$\times\left[1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\left(1 - \exp(-\lambda_k t)\right)^i - \frac{\lambda_k}{\lambda_0 + \lambda_k}\cdot\exp(-\lambda_k t)\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(i-1)!}\cdot\left(1 - \exp(-\lambda_k t)\right)^{(i-1)}\right]$$

$$\lambda_{\tilde{N}}(t) = (\lambda_0 + \lambda_k)\times$$

$$\times\left\{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_0 + \lambda_k}\cdot\exp(-\lambda_k t)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(i-1)!}\cdot\left(1 - \exp(-\lambda_k t)\right)^{(i-1)}}{1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\cdot\left[1 - \exp(-\lambda_k t)\right]^i}\right\} \tag{6.36}$$

где

$$a_i = \prod_{j=0}^{i}\left(j + 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right) \tag{6.37}$$

Приведенные выше зависимости непригодны для систем, изображенных на рис. 6.4, поскольку в этом случае основное устройство не содержит коммутатора. Для этой системы вывод расчетных формул можно осуществить на основе рекуррентного соотношения (6.31) и формул (6.33). В результате эти зависимости принимают вид:

для m=1

$$P_2(t) = \exp(-\lambda_0 t)\cdot\left[1 + P_k(t)\cdot\lambda_0 t\right] \tag{6.38}$$

для m=2

$$P_3(t) = \exp(-\lambda_0 t) \times$$
$$\times \left\{ 1 + P_k(t) \cdot \left[2 - P_k(t) \right] \cdot \lambda_0 t + P_k(t) \cdot \frac{\lambda_0^2 t^2}{2!} \right\} \quad (6.39)$$

для m=3

$$P_4(t) = \exp(-\lambda_0 t) \times \left\{ \begin{array}{l} 1 + P_k(t) \cdot \left[3 - 3P_k(t) + P_k^2(t) \right] \cdot \lambda_0 t + \\ + P_k^2(t) \cdot \left[3 - 2P_k(t) \right] \cdot \frac{\lambda_0^2 t^2}{2!} + P_k^3(t) \frac{\lambda_0^3 t^3}{3!} \end{array} \right\}$$

где

$$P_k(t) = \exp(-\lambda_k t) \quad (6.40)$$

Среднее время безотказной работы системы, функциональная схема которой представлена на рис. 6.4, как интеграл от $P_{m+1}(t)$, вычисленный в пределах от 0 до ∞, будет иметь следующий вид:

для m=1

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^2} \right] \quad (6.41)$$

для m=2

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0} \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^2} - \frac{1}{\left(1 + 2\frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^2} + \frac{1}{\left(1 + 2\frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^3} \right] \quad (6.42)$$

для m=3 (6.43)

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0}\left[1 + \frac{3}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} - \frac{3}{\left(1+2\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+3\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} + \frac{3}{\left(1+2\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^3} - \frac{2}{\left(1+3\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^3} + \frac{1}{\left(1+3\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^4}\right]$$

Представленные выражения дают возможность оценить выигрыш резервированной системы (при «холодном» резервировании и схеме функционирования, изображенной на рис. 6.4) по среднему времени безотказной работы в сравнении с нерезервированной системой (отношение среднего времени безотказной работы резервированной системы к среднему времени безотказной работы нерезервированной системы):

$$G_T = \frac{T_{C\,P}}{T_{C\,HP}}$$

для m=1

$$G_T = 1 + \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} \tag{6.44}$$

для m=2

$$G_T = 1 + \frac{2}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} - \frac{2\cdot\frac{\lambda_k}{\lambda_0}}{\left(1+2\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^3} \tag{6.45}$$

для m=3

$$G_T = 1 + \frac{3}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2} - \frac{6\cdot\frac{\lambda_k}{\lambda_0}}{\left(1+2\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^3} + \frac{9\cdot\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^2}{\left(1+3\frac{\lambda_k}{\lambda_0}\right)^4} \tag{6.46}$$

Зависимости критерия G_T от кратности резервирования m приведены на рис. 6.5.

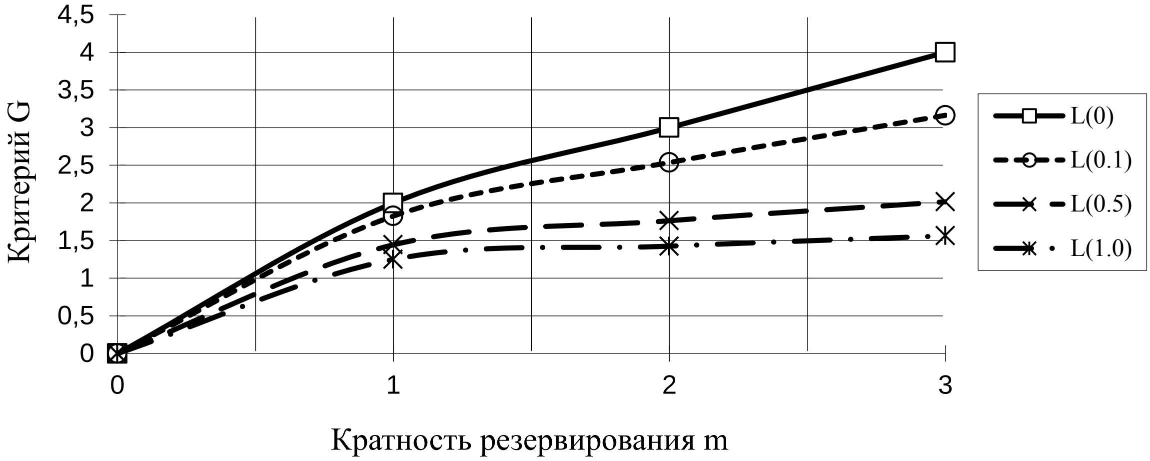


Рис. 6.5. Зависимость выигрыша надежности резервированной системы (схема рис. 6.4) по критерию среднего времени безотказной работы

На рис. 6.5 принято: L(0) соответствует $\frac{\lambda_k}{\lambda_0}=0$, L(0.1) соответствует $\frac{\lambda_k}{\lambda_0}=0.1$, L(0.5) соответствует $\frac{\lambda_k}{\lambda_0}=0.5$, L(1.0) соответствует $\frac{\lambda_k}{\lambda_0}=1$.

Анализ зависимостей, представленных на рис. 6.5 показывает, что существенный выигрыш надежности по критерию среднего времени безотказной работы системы при «холодном» резервировании возможен только в случае использования высоконадежных переключающих устройств. В противном случае «холодное» резервирование может быть мало эффективно.

Наиболее целесообразным с позиций увеличения среднего времени безотказной работы является простое дублирование.

При низкой надежности коммутаторов «холодное» резервирование может уступать по эффективности «горячему».

Определенный интерес представляет оценка выигрыша «холодного» резервирования по критерию вероятности отказа резервированной системы в сравнении с нерезервированной.

Отношение вероятности отказа резервированной замещением (по схеме, изображенной на рис. 6.4) и нерезервированной систем при учете только внезапных отказов:

при m=1

$$G_Q(t) = 1 - \frac{\lambda_0 t}{1 - \exp(-\lambda_0 t)} \cdot \exp\left[-\lambda_0 \cdot (1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0}) \cdot t \right] \tag{6.47}$$

при m=2 (6.48)

$$G_Q(t) = 1 - \frac{\lambda_0 t}{1 - \exp(-\lambda_0 t)} \times$$
$$\times \left[2 \cdot \exp\left[-\lambda_0 \cdot (1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0}) \cdot t \right] - \exp\left[-\lambda_0 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right) \cdot t \right] - \frac{\lambda_0 t}{2} \cdot \exp\left[-\lambda_0 \cdot (1 + 2 \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_0}) \cdot t \right] \right]$$

при m=3 (6.49)

$$G_Q(t) = 1 - \frac{\lambda_0 t \cdot \exp\left[-\lambda_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right) \cdot t \right]}{1 - \exp(-\lambda_0 t)} \times$$
$$\times \left\{ \begin{aligned} & 3 - 3 \cdot \exp[-\lambda_k \cdot t] + \exp[-2 \cdot \lambda_k t] + \\ & + 1.5 \cdot \lambda_0 t \cdot \exp[-\lambda_k t] - \lambda_0 t \cdot \exp(-2\lambda_k t) + \frac{(\lambda_0 t)^2}{6} \cdot \exp(-2\lambda_k t) \end{aligned} \right\}$$

Анализ приведенных выражений показывает, что при небольших значениях произведения $\lambda_0 t$ принцип «холодного» резервирования дает значительный выигрыш по надежности в сравнении с нерезервированной системой даже при малонадежных коммутаторах. Этот выигрыш уменьшается с ростом $\lambda_0 t$. Введем $K = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$.

Следовательно, если система состоит из высоконадежных устройств или она предназначена для кратковременного периода работы, то метод «холодного» резервирования способен существенно повысить надежность системы.

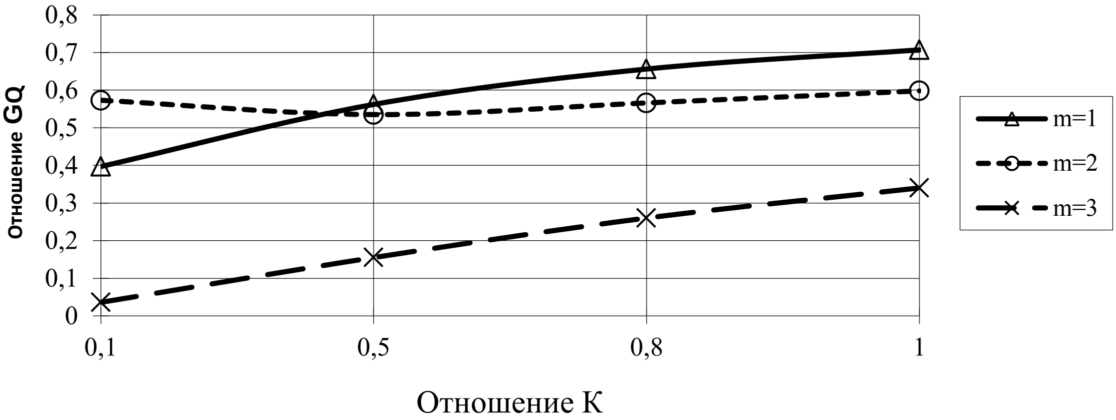


Рис. 6.6. Сравнение резервированной системы («холодное» резервирование по схеме рис. 6.4) с нерезервированной при $\lambda_0 t = 0.8$ по отношению G_Q вероятности отказа резервированной системы к вероятности отказа нерезервированной системы при различных значениях и различной кратности резервирования m, (общее число устройств системы равно m+1)

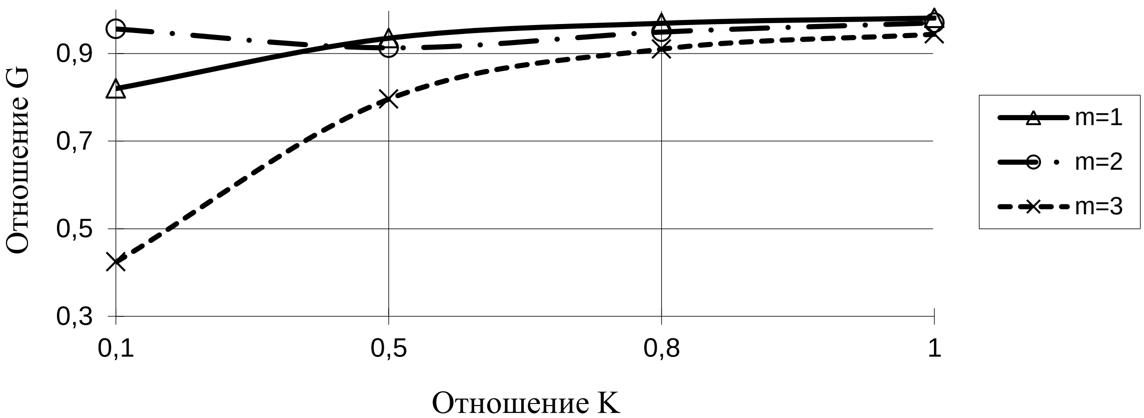


Рис. 6.7. Отношение вероятности отказа резервированной (по схеме рис. 6.4) и нерезервированной систем при $\lambda_0 t = 2.5$ и прочих условиях, совпадающих с рис. 6.6.

При использовании высоконадежных коммутаторов выигрыш надежности за счет «холодного» резервирования получается весьма ощутимым при больших значениях $\lambda_0 t$. Например, при кратности резервирования m=3 и К=0.1 вероятность отказа резервированной системы при $\lambda_0 t = 1$ уменьшается почти в 15 раз.

6.3. Расчетно-графическая работа № 6.1.

Исследование надежности системы при резервировании замещением (при «холодном» резервировании).

Дано.

Техническая система, состоящая из одного основного и m резервных устройств. Каждое устройство состоит из n элементов с интенсивностями отказов λ_i , i = 1, 2, … n.

Определить: функцию надежности системы $\mathrm{P}_C(t)$,

среднее время безотказной работы системы $T_{C;}$

функцию интенсивности отказов системы $\lambda_C(t)$.

Исследовать:

эффективность «холодного» резервирования в сравнении

а) с нерезервированной системой;

в) с системой, резервированной по способу «горячего» резервирования при сохранении кратности резервных устройств и числа элементов в каждом устройстве.

эффективность «холодного» резервирования по критерию среднего времени безотказной работы:

с) в сравнении с нерезервированной системой;

d) в сравнении с той же системой, но при постоянно включенном резерве.

1. Система с идеальным коммутатором.

Расчетные зависимости для вычисления надежности системы, среднего времени ее безотказной работы и интенсивности отказов системы приведены выше (6.22),…,(6.27).

Эффективность «холодного» резервирования в сравнении с системой без резервирования по критерию отказа может быть оценена отношением:

$$G_Q(t) = \frac{Q_0(t)}{Q_x(t)} = \frac{1-\exp(-\lambda_0 t)}{1-\exp(-\lambda_0 t)\cdot\sum\limits_{i=0}^{m+1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}} \qquad (6.50)$$

Эффективность «холодного» резервирования по критерию отказа в сравнении с «горячим» резервированием для идентичных систем определяется формулой:

$$G_Q(t) = \frac{Q_\Gamma(t)}{Q_X(t)} = \frac{\left[1-\exp(-\lambda_0 t)\right]^{m+1}}{1-\exp(-\lambda_0 t)\cdot\sum\limits_{i=0}^{m+1}\frac{\left(\lambda_0 t\right)^i}{i!}} \qquad (6.51)$$

В выражениях (6.50), (6.51) приняты следующие обозначения:

$G_Q(t)$ — критерий сравнения эффективности систем по отказу;

$Q_0(t)$, $Q_X(t)$, $Q_\Gamma(t)$ — функции изменения вероятности отказа нерезервированной системы, системы при «холодном» и «горячем» резервировании соответственно;

$\lambda_0 = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ — интенсивность отказов основного или любого из резервных устройств системы, n — число элементов основного или любого из резервных устройств.

2. Система с реальным коммутатором с интенсивностью отказов (коммутатора) λ_K.

Расчетные зависимости для сравнения технических систем, модель которых изображена на рис. 6.3 с нерезервированными системами по соотношению среднего времени наработки на отказ могут быть получены на основе выражений (6.35), (6.34)…(6.37). Для моделей, изображенных на рис. 6.4 используются выражения (6.44)…(6.46).

Для проведения аналогичных сравнений по критерию вероятности отказа систем, модель которых изображена на рис. 6.3, используются зависимости (6.34), (6.37), а для модели, изображенной на рис.6.4— зависимости (6.47)…(6.49).

Соотношения критериев эффективности резервирования технических систем по способу замещения как фрагменты решений настоящей расчетной работы приведены графиками на рис. 6.5, рис. 6.6, рис. 6.7.

Исходные данные для выполнения расчетов по работе №6.1.

Вариант Элемент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i=1	2.4	0.3	5.5	0.4	3.5	0.7	0.7	3.1	4.4	1.0	4.3	0.5	7.1	1.8
i=2	1.7	0.7	4.8	0.5	4.8	0.5	0.4	2.0	2.0	1.4	4.2	0.1	7.2	1.4
i=3	3.3	1.1	3.9	0.9	8.7	0.4	9.3	1.5	2.4	1.2	3.6	0.4	7.0	1.9
i=4	0.8	0.2	2.7	0.5	5.5	1.9	4.2	2.2	2.6	1.6	2.8	6.6	6.5	1.2
i=5	0.3	0.8	8.1	0.3	4.9	1.7	5.3	0.3	2.5	1.8	9.1	3.1	3.3	1.1
i=6	1.4	0.4	0.5	0.2	6.6	0.7	1.1	0.4	2.1	1.9	1.0	0.2	4.3	0.3
i=7	2.	1.	0.	0.	6.	6.	1.	2.	2.	1.	0.	0.	0.	0.

Вариант Элемент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	6	5	3	7	9	1	5	6	0	4	2	1	1	2
m	3	2	2	3	3	3	2	3	3	2	2	1	3	3
λ_k	0.1	0.2	0.5	0.8	0.1	0.2	0.7	0.8	0.4	1.0	1.2	2.0	0.9	1.1

Вариант Элемент	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
i=1	2.4	0.7	4.5	0.2	2.5	1.7	1.1	2.1	3.4	1.5	3.3	0.5	5.1	3.8
i=2	1.8	0.7	4.2	0.6	4.0	0.5	0.4	1.0	1.0	1.4	3.2	1.1	7.2	0.4
i=3	3.2	1.0	3.0	0.8	4.7	0.4	7.3	1.5	2.4	1.3	4.6	0.4	5.0	0.9
i=4	0.9	1.2	2.4	1.5	5.3	6.1	4.2	2.2	2.5	1.6	2.8	4.6	6.5	0.2
i=5	0.5	0.8	6.1	0.3	5.9	1.7	4.3	0.3	2.4	1.8	7.1	3.1	3.3	1.1
i=6	1.4	0.4	2.5	0.4	6.6	0.7	1.1	2.1	1.8	1.7	1.2	1.2	2.3	2.3
i=7	2.	1.	0.	0.	7.	0.	0.	1.	2.	1.	0.	0.	2.	0.

Вариант Элемент	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	3	0	3	3	0	1	5	5	0	4	2	1	1	2
m	3	2	2	3	2	3	2	3	2	2	2	2	3	2
λ_k	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2	0.7	0.6	0.5	1.1	1.0	1.7	0.2	0.8

В верхней части таблицы приведены значения интенсивностей λ_i отказов элементов устройств системы (1/час). В нижней части таблицы приведены значения кратности резервирования (число резервных устройств) системы и интенсивности λ_k отказов коммутатора.

Вопросы для самоконтроля.

Дайте определение «холодного» резервирования.

Перечислите основные модели технических систем при использовании резервирования замещением.

Объясните принципиальную значимость надежности коммутаторов при «холодном» резервировании.

Дайте объяснение причин отличий выражений (6.18), (6.34), (6.40).

Каковы резервирования технических систем по способу замещения.

7. ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Наиболее сложными задачами в исследовательских работах признаются такие, решения которых строятся на границе раздела двух и более сред. Одной из таких проблем является объединение логического анализа условий функционирования систем и математических методов расчета их параметров.

Логико-вероятностные методы (ЛВМ) — особый раздел математики, связанный с логическими и математическими исчислениями. Привлекательность ЛВМ заключается в их четкости и больших возможностях выявления значимости отдельных элементов в общей структуре сложных технических систем.

История ЛВМ и их фундаментальные основы изложены в трудах профессора Рябинина И.А. [12,13]. Оценивая роль логико-вероятностных методов с позиций современности, можно выделить три периода их развития:

- период прямого замещения логических переменных вероятностями, а логических операций соответствующими арифметическими операциями, что было допустимо только для простых структур;
- период разработки специализированных алгоритмов, позволяющих переходить от функций алгебры логики произвольного вида (с повторным составом элементов, наличием отрицаний некоторых аргументов) к форме перехода к полному замещению;
- период автоматизированного логико-вероятностного моделирования структурно-сложных технических систем большой размерности.

7.1. Некоторые сведения из основ алгебры логики.

Алгебра логики — это раздел математической логики, изучающий логические операции над высказываниями. Ее основоположником является Джордж Буль, впервые применивший алгебраические методы для решения традиционных логических задач.

Логические операции позволяют из нескольких высказываний образовывать новые высказывания. В алгебре логики, где интересуются только истинностным значением высказываний, исследуется вопрос об истинностном значении сложного высказывания в зависимости от истинности значений составляющих его простых высказываний.

В алгебре логики принято истину обозначать числом 1, а ложь — числом 0.

Каждой логической операции соответствует функция, принимающая значения 0 или 1, аргументы которой также принимают значения только 0 или 1. Такие функции называются логическими функциями (или булевыми функциями, или функциями алгебры логики).

Алгебра логики строится на нескольких простых операциях:

- конъюнкция (логическое умножение), обозначается знаком $\wedge$;
- дизъюнкция (логическое сложение), обозначается знаком $\vee$;
- отрицание, обозначается знаком - ;
- эквивалентность, обозначается знаком ~;
- импликация, обозначается знаком $\rightarrow$.

Перечисленные операции могут быть представлены таблицей

Таблица 7.1

Истинностная таблица функций алгебры логики.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\bar{x}$	$x \sim y$	$x \rightarrow y$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

С помощью уравнений алгебры логики можно описать условия работоспособности или опасности системы. Уравнения ФАЛ показывают, из каких элементов (инициирующих условий) и какими соединениями можно обеспечить выполнение заданного технической системе назначения, а также оценить причины перехода системы в опасное состояние.

7.2. Основные логические операции.

Конъюнкция двух высказываний А и В обозначается $A \wedge B$ (читается: А и В). Иногда вместо знака логического умножения используют символ «•» или между перемножаемыми высказываниями знак вообще отсутствует.

Конъюнкция $A \wedge B$ двух высказываний представляет собой сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания А и В.

Значение истинности логического произведения $A \wedge B$ определяется следующими соотношениями:

$$0 \wedge 0 = 0;\ 0 \wedge 1 = 0;\ 1 \wedge 0 = 0;\ 1 \wedge 1 = 1. \tag{7.1}$$

Дизъюнкция двух высказываний А и В обозначается $A \vee B$ (читается А или В). Часто применяется матричная форма обозначения дизъюнкции:

$$A \vee B = \left|\frac{A}{B}\right| \tag{7.2}$$

Значение истинности логического сложения $A \vee B$ определяется следующими соотношениями:

$$0 \vee 0 = 0;\ 0 \vee 1 = 1;\ 1 \vee 0 = 1;\ 1 \vee 1 = 1 \tag{7.3}$$

Дизъюнкция двух высказываний является сложным высказыванием, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Отрицание высказываний А обозначается A' (иногда $\overline{A}$) читается: не А. Значение истинности высказывания А определяется соотношениями:

$$1'=0;\ 0'=1 \tag{7.4}$$

Таким образом, отрицанием высказывания А является сложное высказывание A', которое ложно, когда А истинно, и истинно, когда А ложно.

Приведенные выше логические операции могут быть выражены друг через друга. Преобразование логических выражений выполняется по определенным правилам.

Правила для одной переменной.

$A \wedge 1 = A$;

$A \wedge 0 = 0$;

$A \wedge A = A$;

$A \wedge A' = 0$;

$A \vee 1 = 1$;

$A \vee 0 = A$;

$A \vee A = A$;

$A \vee A' =1$;

$A'' = A$;

$A'''= A'$;

Приведенные выше правила легко доказываются подстановкой вместо А единицы или нуля. Следствием является закон тавтологии:

$A\wedge A\wedge\ldots A = A$;

$A\vee A\vee\ldots A = A$.

В отличие от обычной алгебры в алгебре логики умножение переменной самой на себя или приведение подобных членов осуществляется согласно перечисленным правилам без появления показателей степени или коэффициентов.

Для двух и трех переменных функции конъюнкции и дизъюнкции обладают свойствами, аналогичными свойствам операций умножения и сложения. Можно убедиться, что для этих функций действует сочетательный (или ассоциативный) закон, а также переместительный (или коммутативный) закон:

$$A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C=A\wedge B\wedge C \qquad (7.5)$$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$ (7.6)

$A \wedge B = B \wedge A$ (7.7)

$A \vee B = B \vee A$ (7.8)

Для логического умножения и логического сложения сочетательного и переместительного законов выражения, в которые входят конъюнкции и дизъюнкции, можно писать без скобок. При этом связь посредством знака $\wedge$ считается более тесной, нежели связь посредством знака $\vee$. Тем самым в алгебре логики «старшие» действия выполняются раньше «младших», что позволяет вместо $(A \wedge B) \vee C$ иметь более упрощенную запись $A \wedge B \vee C$. В алгебре логики имеет место распределительный (или дистрибутивный) закон конъюнкции относительно дизъюнкции, а также распределительный закон дизъюнкции относительно конъюнкции:

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (7.9)

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (7.10)

Заметим, что в обычной алгебре последнее правило не имеет места:

$$a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot (a + c) \quad (7.11)$$

Заметим также, что все отмеченные законы обладают свойством «симметрии». Закон двойственности в алгебре логики позволяет заменять отрицание конъюнкции дизъюнкцией отрицаний.

Приведем несколько полезных определений, [2].

Кратчайший путь опасного (безопасного) функционирования представляет собой такую конъюнкцию инициирующих событий, ни одну из компонент которых нельзя изъять, не нарушив опасного (безопасного) функционирования системы.

Минимальное сечение предотвращения опасности представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний инициирующих событий, ни одну из компонент которой нельзя изъять, не нарушив условия безопасного функционирования системы.

7.3. Значимость элемента в системе.

В 1969 г. проф. Бирнбаум определил надежностную значимость $B\left(i/P\right)$ элемента x_i в системе с монотонной структурой как частную производную:

$$B\left(i/P\right)=\frac{\partial P_C}{\partial P_i} \tag{7.12}$$

где P_C — вероятность безотказной работы системы, зависящая, в частности, от надежности i-го элемента P_i.

В том случае, когда значения P_i равнозначны, вычисляется так называемая структурная значимость B(i) i-го элемента:

$$B(i)=\frac{\partial P_C}{\partial P_i}\bigg|_{P_1=P_2=\ldots=P_m=0.5} \tag{7.13}$$

т.е.

$$B(i)=B\left(i/P\right) \tag{7.14}$$

с вероятностями безотказной работы всех элементов, равными 0.5.

Легко заметить, что надежностная значимость элемента соответствует скорости изменения надежности системы в зависимости от надежности данного элемента.

Структурная значимость элемента указывает на изменение надежности системы в случае замены данного элемента новым.

Рациональность использования логико-вероятностных методов можно продемонстрировать на следующем простом примере.

Пример 7.1.

Дана сложная структурная система (участок магистрального трубопровода), состоящая из пяти элементов x1, x2,..., x5, представленная схематично на рис. 7.1.

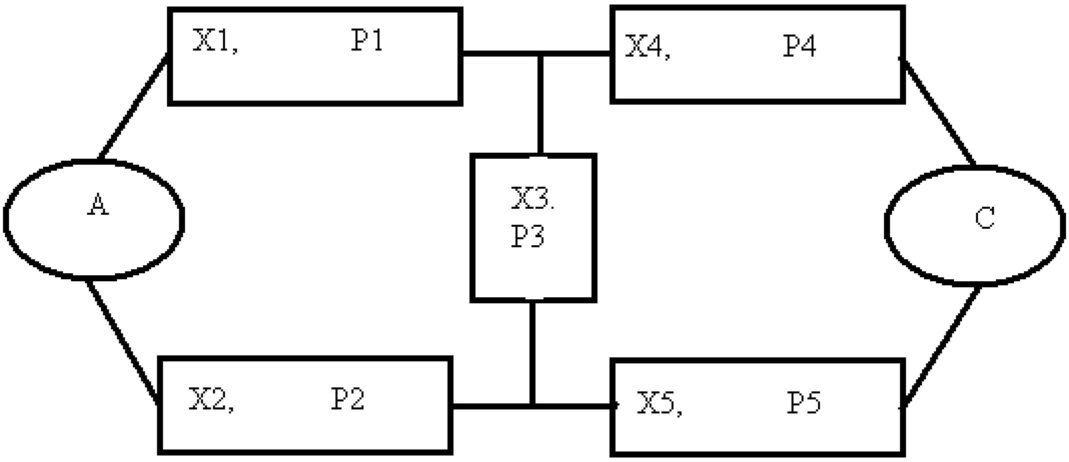


Рис. 7.1. Блок-схема развязки лупингов трубопроводной системы

Требуется определить надежность P_C участка магистрального трубопровода от узла А до узла С, если известны вероятности безотказной работы (надежность) отдельных участков (P1=0.8, P2=0.85, P3=0.9, P4=0.75, P5=0.7).

Решение.

Минимальные пути, сохраняющие работоспособность системы:

$$x1\wedge x4, \quad x2\wedge x5, \quad x1\wedge x3\wedge x5, \quad x2\wedge x3\wedge x4 \tag{7.15}$$

Следовательно, трубопроводная система сохраняет работоспособность при выполнении следующей логики:

$$(x1\wedge x4)\vee(x2\wedge x5)\vee(x1\wedge x3\wedge x5)\vee(x2\wedge x3\wedge x4) \tag{7.16}$$

Тогда надежность системы, с учетом исходных значений вероятностей безотказной работы отдельных участков принимает вид:

$$P_C = 1-(1-P1\cdot P4)\cdot(1-P2\cdot P5)\cdot(1-P1\cdot P3\cdot P5)\cdot(1-P2\cdot P3\cdot P4) \tag{7.17}$$

P_C = 0.96575.

При отсутствии элемента x3 итоговая надежность участка была бы равна:

$$P_C = 1-(1-P1\cdot P4)\cdot(1-P2\cdot P5)=0.838 \tag{7.18}$$

Определим значимость элементов, например, x1 и x3.

Надежностная значимость элемента x1:

$$\frac{\partial P_C}{\partial P1} = (1 - P2 \cdot P5) \cdot (1 - P2 \cdot P3 \cdot P4) \cdot P3 \cdot P5 +$$
$$+ (1 - P2 \cdot P5) \cdot (1 - P2 \cdot P3 \cdot P4) \cdot P4 -$$
$$- 2 \cdot (1 - P2 \cdot P5) \cdot (1 - P2 \cdot P3 \cdot P4) \cdot P3 \cdot P5 \cdot P4 \cdot P1 \quad (7.19)$$

Надежностная значимость элемента x_3:

$$\frac{\partial P_C}{\partial P3} = (1 - P1 \cdot P4) \cdot (1 - P2 \cdot P5) \cdot P1 \cdot P5 +$$
$$+ (1 - P1 \cdot P4) \cdot (1 - P2 \cdot P5) \cdot P2 \cdot P4 -$$
$$- 2 \cdot (1 - P1 \cdot P4) \cdot (1 - P2 \cdot P5) \cdot P2 \cdot P4 \cdot P1 \cdot P5 \cdot P3 \quad (7.20)$$

После подстановки исходных данных по значениям надежности отдельных элементов, получим:

- надежностная значимость элемента x1 = 0.1077;
- надежностная значимость элемента x3 = 0.0898.

Для определения структурной значимости элементов подставим в полученные выражения значения вероятностей всех элементов, равные 0.5, получим структурную значимость элемента x1, равную 0.41016; структурную значимость элемента x3, равную 0.2461.

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что в надежности системы элемент x3 в сравнении с элементом x1 играет при данных значениях надежности остальных элементов не столь существенную роль, а в структурной значимости элементов системы роль элемента x3 существенно менее значима в сравнении с элементом x1.

Аналогичные расчеты по оценке значимости можно произвести для всех элементов рассматриваемой системы.

Решение примера 7.1 в системе Matlab.

```
PC=(1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4))
syms P1 P2 P3 P4 P5;  Символьное дифференцирование.
PC1=diff((1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)),P1)
```

PC2=diff((1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)),P2)

PC3=diff((1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)),P3)

PC4=diff((1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)),P4)

PC5=diff((1-(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)),P5)

Определение надежностной значимости элементов системы.

P1=0.8;P2=0.85;P3=0.9;P4=0.75;P5=0.7; Исходные данные.

PC11 =P4*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P3*P5*(1-P2*P3*P4);

PC12 =(1-P1*P4)*P5*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P3*P4;

PC13 =(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P5*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P4;

PC14 =P1*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P3;

PC15 =(1-P1*P4)*P2*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P3*(1-P2*P3*P4);

Определение структурной значимости элементов системы.

P1=0.5;P2=0.5;P3=0.5;P4=0.5;P5=0.5; Новые значения надежности элементов.

PC21 =P4*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P3*P5*(1-P2*P3*P4)

PC22 =(1-P1*P4)*P5*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P3*P4

PC23 =(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P5*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P4

PC24 =P1*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P3

PC25 =(1-P1*P4)*P2*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P3*(1-P2*P3*P4)

Результаты расчетов.

PC = 0.9657 Надежность рассматриваемой системы.

Результаты дифференцирования

PC1 =

P4*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P3*P5*(1-P2*P3*P4)

PC2 =

(1-P1*P4)*P5*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P3*P4

PC3 =

(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P5*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P4

PC4 =

P1*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*(1-P1*P3*P5)*P2*P3

PC5 =

(1-P1*P4)*P2*(1-P1*P3*P5)*(1-P2*P3*P4)+(1-P1*P4)*(1-P2*P5)*P1*P3*(1-P2*P3*P4)

Надежностная значимость элементов.

PC11 = 0.1077

PC12 = 0.1134

PC13 = 0.0899

PC14 = 0.1300

PC15 = 0.1216

Структурная значимость элементов.

PC21 = 0.4102

PC22 = 0.4102

PC23 = 0.2461

PC24 = 0.4102

PC25 = 0.4102

Вопросы для самоконтроля.

Дайте определение конъюнкции и дизъюнкции. Объясните их различие в процессе расчета надежности технической системы.

Дайте определение кратчайшего пути.

Приведите пример использования минимального сечения в определении надежности сложной технической системы.

Что определяют значения надежностной и структурной значимости элементов.

В чем преимущества и недостатки логико-вероятностного метода оценки надежности технической системы.

8. НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ.

8.1. Оценка надежности технических систем при мгновенном восстановлении устройств.

Решения задач определения надежности технических систем, рассмотренные в предыдущих разделах, были построены на том, что отказавшие устройства выходили из строя окончательно, без рассмотрения возможности их восстановления или ремонта. Таким образом, все процессы, связанные с надежностью систем, которые исследовались до сих пор, были существенно нестационарными, поскольку при отсутствии восстановления в случае $t \to \infty$ надежность системы стремилась к нулю, и «предельным режимом» работы системы был отказ, т.е. система не работала.

В задачах с восстановлением нас будут интересовать не только переходные процессы в технической системе, но и ее работа в установившемся режиме при $t \to \infty$.

Рассмотрим задачу, представляющую некоторый переход от задач оценки надежности резервированных систем к задачам определения надежности технических систем с восстановлением.

Пусть работает простая система, состоящая из одного основного устройства, которое подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. При отказе это устройство мгновенно заменяется новым с такими же характеристиками. Пусть имеется m запасных устройств (система состоит из одного основного и m резервных устройств, т.е. всего m+1 устройство).

Требуется определить вероятность того, что этого числа m запасных устройств будет достаточно для обеспечения работы системы в течение времени t, т.е. требуется определить надежность P(t) системы с восстановлением.

Нетрудно заметить, что поставленная задача адекватна задаче оценки надежности резервированной технической системы с m резервными устройствами, работающими в режиме «холодного» резерва с идеальными коммутаторами. Однако, для решения этой задачи воспользуемся несколько иным и более простым методом.

Рассмотрим на оси “0-t” «поток восстановлений», или последовательность моментов времени, в которые выходят из строя и мгновенно восстанавливаются устройства системы (рис. 8.1). Очевидно, рассматриваемый поток относится к простейшим с интенсивностью λ.

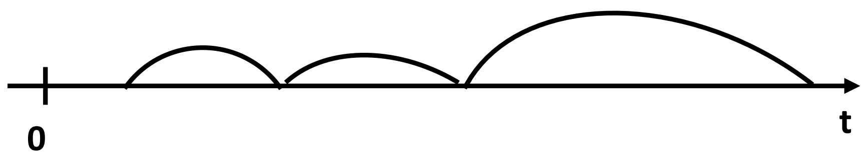


Рис. 8.1. Представление потока восстановления простейшей системы

Надежность P(t) технической системы есть вероятность того, что к моменту t система будет находиться в рабочем состоянии. Для этого необходимо, чтобы на участке (0, t) отказало не более m устройств из общего числа (m+1), т.е. должно остаться в работе хоть одно устройство.

Как известно, число событий n простейшего потока, попадающих на участок продолжительностью t, распределено по закону Пуассона. При этом вероятность попадания ровно n событий на рассматриваемый временной интервал определяется зависимостью:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \exp(-\lambda t) \tag{8.1}$$

где n = 0, 1, 2,…, m,….

Найдем вероятность того, что число точек (событий замены отказавших устройств), попадающих на участок (0, t), будет не больше числа m+1, т.е. всего может отказать m устройств. Эта вероятность для несовместных событий и будет надежностью рассматриваемой технической системы:

$$P(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_m(t) \tag{8.2}$$

или короче:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{m} P_n(t) \tag{8.3}$$

где $P_n(t)$ раскрыта с помощью (8.1).

В выражении (8.2) правая часть определяет, что произойдет или ни одного события (P_0), или одно событие (P_1), или два события (P_2) и т.д. или m событий замены отказавших устройств (P_m), что соответствует нахождению в рабочем состоянии хотя бы одного устройства, что и есть «не более m+1» отказа.

Подставив в (8.3) выражение (8.1), получим:

$$P(t) = \exp(-\lambda t) \cdot \sum_{n=0}^{m} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{8.4}$$

Пример 8.1.

Рассматривается работа технической системы с восстановлением. Интенсивность потока отказов $\lambda = 2$, 1/год (два отказа в год). Имеется 5 запасных устройств (всего устройств в системе m+1 = 6). Максимальное время работы системы t = 5 лет.

Определить функцию надежности системы P(t).

Решение.

Разобьем рассматриваемый временной интервал на равные промежутки времени с шагом 1 год и вычислим по формуле (8.4) соответствующие значения надежности системы.

Результаты расчетов представлены в табл.8.1 и на рис.8.2.

Таблица 8.1

Результаты решения примера 8.1

t, год	0	1	2	3	4	5
P(t)	1	0.995	0.889	0.606	0.313	0.130

Рассмотрим еще одну задачу.

Пусть техническая система состоит из нескольких устройств, среди которых: m_1+1 устройства типа 1, m_2+1 устройства типа 2,..., m_k+1 устройства типа k.

Решение этой задачи строится на представлении системы в виде последовательно функционирующих элементов, каждый из которых представляет собой устройство конкретного типа. Тогда надежность системы будет равна произведению надежностей всех групп (всех типов) устройств.

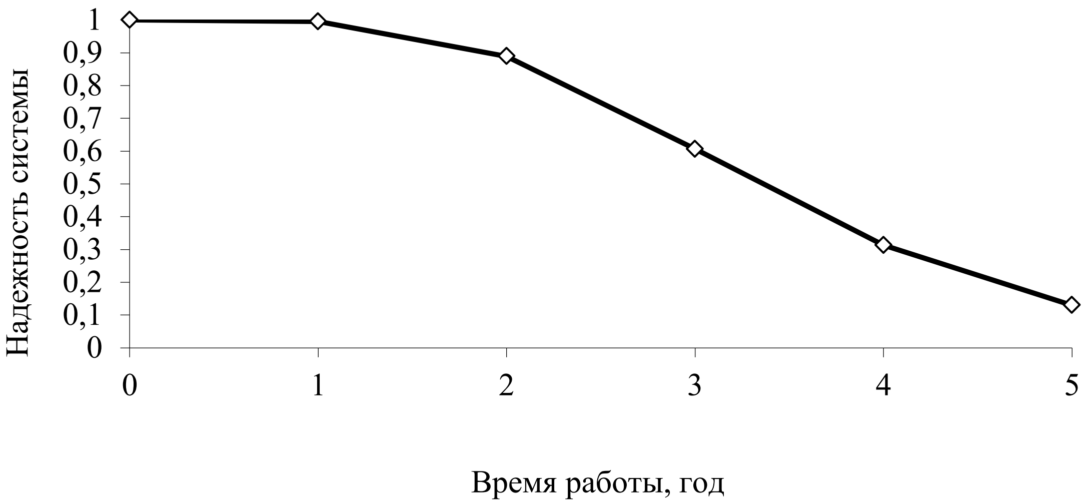


Рис. 8.2. Вид функции надежности технической системы

Устройство каждого типа, независимо от других, может выходить из строя с соответствующими интенсивностями λ_1, λ_2,…,λ_k. Все потоки отказов устройств — простейшие. Отказавшее устройство немедленно заменяется новым. В резерве имеется m_1, m_2,…,m_k запасных устройств соответствующего типа. При этом отсутствие запасного устройства при очередном отказе означает отказ системы.

Требуется определить надежность технической системы на интервале (0, t). Надежность i-й группы определяется согласно (8.4):

$$P_i(t) = \exp\left(-\lambda_i \cdot t\right) \cdot \sum_{n=0}^{m_i} \frac{\left(\lambda_i \cdot t\right)^n}{n!} \tag{8.5}$$

Перемножая эти вероятности, получим формулу для расчета надежности технической системы:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{k} P_i(t) \tag{8.6}$$

Заметим, что, пользуясь приведенными выше формулами, можно не только оценивать надежность системы при заданном числе m запасных устройств, но и определить, сколько запасных устройств необходимо иметь для того, чтобы обеспечить заданное значение надежности на требуемом временном интервале.

Пример 8.2.

Определить число запасных элементов m, которое надо иметь в распоряжении для того, чтобы система, состоящая из одного основного и m запасных устройств при интенсивности отказов λ = 0.5, 1/год имела при t = 8 лет надежность не меньше 0.95.

Решение.

Воспользуемся формулой (8.4) для различных значений общего числа устройств (m+1) и построим функцию изменения надежности P(t, m+1) в зависимости от общего числа элементов (m+1) при конкретном значении времени работы системы t = 8 лет. Результаты расчетов сведены в табл. 8.2. и представлены диаграммой на рис. 8.3.

Таблица 8.2

Значения вероятностей безотказной работы технической системы при различном числе ее устройств

m+1	4	5	6	7	8	9
P(t, m+1)	0,6288	0,7851	0,8893	0,9488	0,9786	0,9919

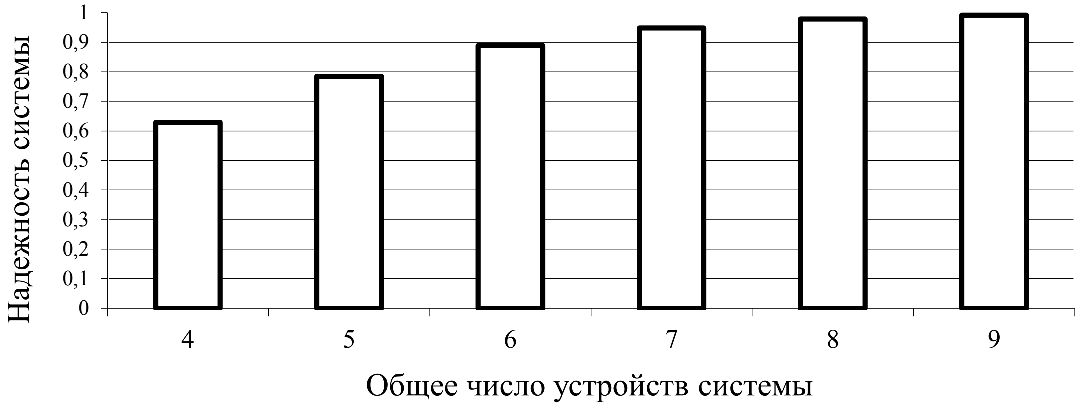


Рис. 8.3. Изменение надежности системы на момент t=8 лет при различных значениях общего (m+1) числа устройств.

Как видно из данных табл.8.2 и рис. 8.3 требуемое значение надежности системы 0.95 обеспечивается при числе устройств не менее 8, т.е. при одном основном и семи запасных устройствах. Таким образом, для обеспечения заданной надежности технической системы в течение определенного времени требуется иметь в запасе семь устройств, способных мгновенно заменять основное или очередное вышедшее из строя устройство.

8.2. Надежность системы с задержанным восстановлением.

Рассмотрим более общий и более реальный случай, когда на ремонт или восстановление отказавшего устройства требуется конечное время.

Допустим, что техническая система состоит из одного устройства, находящегося под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ. Отказавшее устройство немедленно начинает восстанавливаться (ремонтироваться). Поток восстановлений тоже простейший с интенсивностью μ. Запас средств или деталей для ремонта считается неограниченным.

Требуется определить:

надежность системы как вероятность $P_0(t)$ того, что в момент t система будет находиться в работающем состоянии;

предельное значение надежности P системы как вероятность того, что в произвольный достаточно удаленный от начала работы системы момент времени система будет работать;

вероятность $P(t)$ того, что до определенного момента времени t система будет работать безотказно, т.е. не будет иметь ни одного перерыва на выполнение ремонта.

Для ответа на поставленные вопросы рассмотрим размеченный граф состояний системы, представленный на рис. 8.4 и составленный по правилам, изложенным во втором разделе настоящего пособия.

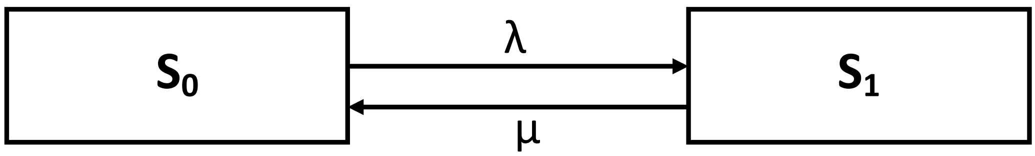


Рис. 8.4. Размеченный граф состояний ремонтируемой системы

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \exp\left(-\left(\lambda+\mu\right)\cdot t\right) \\ P_1(t) = 1 - P_0(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \left[1 - \exp\left(-t\cdot\left(\lambda+\mu\right)\right)\right] \end{cases} \quad (8.7)$$

где $P_0(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_0 (рабочее состояние); $P_1(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_1 (состояние ремонта).

Вероятность того, что рассматриваемая техническая система будет работать в произвольный момент t (надежность системы) равна:

$$P(t) = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \exp\left[-t\cdot\left(\lambda+\mu\right)\right] \quad (8.8)$$

При стремлении t к бесконечности эта надежность стремится к предельному значению:

$$P = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{8.10}$$

т.е. она равна относительной доле интенсивности потока восстановлений в суммарной интенсивности потоков восстановлений и отказов.

Вероятность $\tilde{p}_0(t)$ того, что до момента t не произойдет ни одного отказа, определим следующим образом. Предположим, что ремонта отказавшего устройства нет, т.е. граф состояний имеет вид, изображенный на рис.8.5.

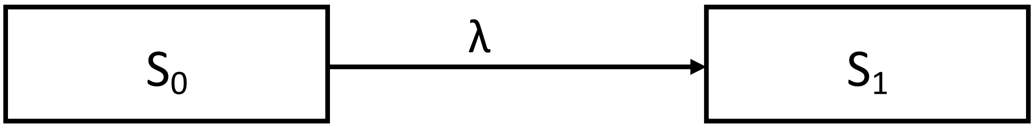


Рис. 8.5. Граф состояний системы без восстановлений

Искомая вероятность $\tilde{p}_0(t)$ будет равна вероятности того, что система (рис. 8.5) к моменту t будет находиться в состоянии S_0. Эта вероятность может быть получена решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d\tilde{p}_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot \tilde{p}_0(t) \tag{8.11}$$

$$\int \frac{d\tilde{p}_0(t)}{\tilde{p}_0(t)} = \int -\lambda dt$$

Откуда:

$$\tilde{p}_0(t) = \exp(-\lambda \cdot t) \tag{8.12}$$

Таким образом вероятность $P(t)$ равна:

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t) \tag{8.13}$$

Ответы на поставленные выше вопросы получены на базе аппарата теории систем массового обслуживания, изложенного во втором разделе.

Продолжаем усложнение задачи и допустим, что техническая система состоит из нескольких устройств общим числом m+1. Каждое устройство находится под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ.

При отказе любого устройства система останавливается и начинает ремонтироваться. Во время восстановления системы отказы устройств происходить не могут. Интенсивность потока восстановлений равна μ. Все потоки простейшие.

Требуется определить:

надежность P(t) системы как вероятность того, что в момент t система будет в рабочем состоянии;

предельную надежность p системы;

вероятность $\hat{P}(t)$ того, что до момента t отказов вообще не будет.

Для ответа на поставленные вопросы обратимся к размеченному графу состояний системы, изображенному на рис. 8.6.

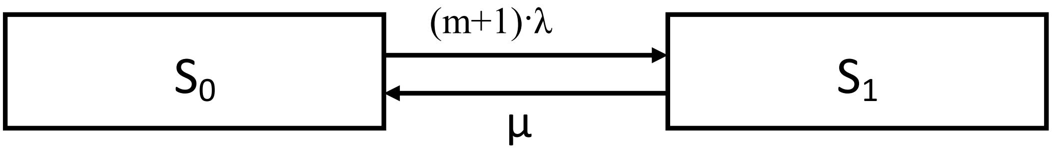


Рис. 8.6. Размеченный граф состояний системы с несколькими однотипными восстанавливаемыми устройствами при отказе системы равносильном отказу одного (любого) устройства

Решение поставленной задачи базируется на том обстоятельстве, что система может находиться только в двух состояниях: рабочем (S_0) или нерабочем (S_1). Граф состояний системы, изображенный на рис. 8.6. отличается только тем, что интенсивность потока отказов составляет (m+1)·λ. Отсюда, на основании решения предыдущей задачи, имеем:

-вероятность того, что в момент времени t система находится в рабочем состоянии:

$$P(t)=\frac{\mu}{(m+1)\cdot\lambda+\mu}+\frac{(m+1)\cdot\lambda}{(m+1)\cdot\lambda+\mu}\times \\ \times\exp\left[-t\cdot\left((m+1)\cdot\lambda+\mu\right)\right] \tag{8.14}$$

-предельная вероятность нахождения системы в рабочем состоянии:

$$p = \frac{\mu}{(m+1)\cdot\lambda + \mu} \tag{8.15}$$

-вероятность того, что до момента времени t не произойдет ни одного отказа системы:

$$P(t) = \exp\left(-(m+1)\cdot\lambda\cdot t\right) \tag{8.16}$$

Если предположить, что в сложной технической системе при отказе одного устройства остальные продолжают работать и система при отказе одного устройства не прекращает своего функционирования, то картина будет иной и более сложной.

8.3. Определение надежности сложной восстанавливаемой системы.

Для сокращения записи будем считать, что система состоит из общего числа m устройств (ранее всегда было (m+1)), каждое из которых находится под действием потока отказов (неисправностей) с интенсивностью λ. При отказе устройства оно немедленно начинает восстанавливаться, остальные устройства при этом продолжают работать, обеспечивая рабочее состояние системы. Интенсивность потока восстановлений устройства (независимо от числа одновременно восстанавливаемых устройств) равна μ.

Требуется определить:

вероятность P(t) того, что в момент времени t все устройства будут исправными;

предельную вероятность того же события;

среднее число исправных устройств при $t \to \infty$.

Решение поставленной задачи требует составления размеченного графа состояний (рис. 8.7).

Состояния системы будем нумеровать по числу неисправных устройств:

S_0 — все устройства исправны;

S_1 — одно устройство ремонтируется, остальные исправны;

………………………………………………………………………..

S_k — k устройств ремонтируются, m-k — исправны;

………………………………………………………………………..

S_m — все m устройств находятся в ремонте.

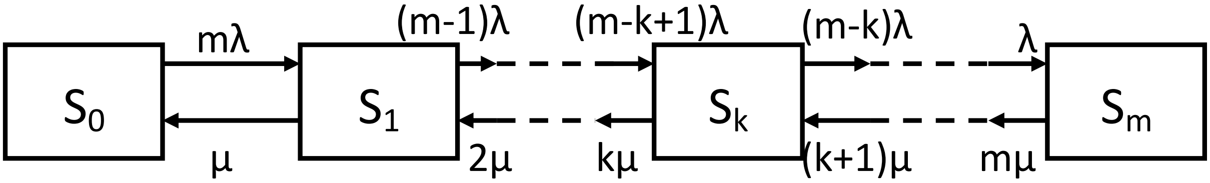


Рис. 8.7. Размеченный граф сложной технической системы

Для рассматриваемого графа система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -[(m-1)\cdot\lambda + \mu]\cdot P_1(t) + m\cdot\lambda\cdot P_0(t) + 2\cdot\mu\cdot P_2(t)$$

…………

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -[(m-k)\lambda + k\mu]\cdot P_k(t) + (m-k+1)\cdot\lambda\cdot P_{k-1}(t) + (k+1)\cdot\mu\cdot P_{k+1}(t)$$

……….

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -m\cdot\mu\cdot P_m(t) + \lambda\cdot P_{m-1}(t) \qquad (8.17)$$

Плюс условие полной группы событий:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_m(t) = 1 \qquad (8.18)$$

Вероятность P(t) того, что все элементы в момент t будут исправны, есть не что иное, как вероятность $P_0(t)$, которую получим, интегрируя представленную систему дифференциальных уравнений при следующих начальных условиях:

При t = 0, $P_1(0)=P_2(0)=\ldots=P_m(0)=0$; $P_0(0)=1$.

Предельные вероятности состояний находим по аналогии с решением, приведенным в разделе 2 (системы массового обслуживания), полагая $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$:

$$P_0=\frac{1}{1+\frac{m}{1!}\rho+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1}{k!}\rho^k+\frac{m(m-1)\cdots2\cdot1}{m!}\rho^m}=$$
$$=\frac{1}{1+C_m^1\cdot\rho+C_m^2\cdot\rho^2+\cdots+C_m^k\cdot\rho^k+\cdots C_m^m\cdot\rho^m}=\frac{1}{(1+\rho)^m} \tag{8.19}$$

Искомая предельная вероятность того, что в установившемся режиме при стремлении величины t к бесконечности все устройства сохранят работоспособность, и будет определяться выражением (8.19), т.е. $P=P_0$.

Среднее число $\overline{m}$ исправно работающих устройств будет равно числу устройств m, умноженному на вероятность того, что отдельно взятое устройство исправно. Эта вероятность $\vec{P}$ (при $t\to\infty$) равна:

$$\vec{P}=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{8.20}$$

откуда, среднее число исправно работающих устройств равно:

$$\overline{m}=\frac{m\cdot\mu}{\lambda+\mu}=\frac{m}{1+\rho} \tag{8.21}$$

Рассмотренные задачи и примеры показывают, что аппарат, применяемый для анализа надежности технических систем весьма совпадает с аппаратом теории массового обслуживания, и исследование процессов, протекающих в системах с отказывающими устройствами, при определенных условиях может быть проведено методами непрерывных марковских цепей. Для этого необходимо, чтобы потоки событий, переводящие устройства из состояния в состояние, были хотя бы приближенно пуассоновскими. Эти потоки не обязательно должны быть стационарными, но такими, чтобы интенсивности потоков событий не зависели от случайных моментов переходов системы из одного состояния в другое.

На этом основании разработаны практические алгоритмы оценки различных технических систем с восстановлением [8].

8.4. Практические аспекты исследования надежности восстанавливаемых технических систем.

8.4.1. Показатели надежности восстанавливаемых нерезервированных систем.

Дано:

n — число элементов нерезервированной системы;

λ_i , μ_i — соответствующие интенсивности отказов и восстановления элемента i-го типа, i=1,2,…,n;

T_C — общее (планируемое) время работы системы.

Требуется определить:

Т — наработку системы на отказ;

$К_Г(t)$, $К_Г$ — функцию и коэффициент готовности системы, где $К_Г(t)=P_0(t)$, а $К_Г=P$.

Теоретические основы. Основными показателями надежности восстанавливаемых технических систем являются: наработка на отказ Т как ожидаемое время до отказа системы; функция готовности $К_Г(t)$; коэффициент готовности $К_Г$.

В общем случае эти показатели зависят от интенсивностей отказов и восстановления элементов системы, времени ее непрерывной работы, вида и кратности резервирования.

$$K_Г(t) \cong \frac{\mu_C}{\lambda_C + \mu_C} + \frac{\lambda_C}{\lambda_C + \mu_C} \cdot \exp[-t \cdot (\lambda_C + \mu_C)] \qquad (8.22)$$

$$K_Г = \lim_{t \to \infty} K_Г(t) = \frac{\mu_C}{\lambda_C + \mu_C} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \qquad (8.23)$$

$$T = \frac{1}{\lambda_C} \qquad (8.24)$$

где $\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ — интенсивность отказов системы;

μ_c — интенсивность восстановления системы:

$$\mu_C = \frac{\lambda_C}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \qquad (8.25)$$

Приведенные зависимости свидетельствуют о том, что коэффициент и функция готовности тем выше, чем меньше отношение $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

Варианты расчетно-графических работ.

Вариант 1.

Время работы системы 10 лет.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/год)	0.05	0.08	0.09	0.1	0,02	0,04	0.07	0.03
μ_i (1/год)	0.5	0.1	0.2	0.09	0.3	0.5	0.7	0.2

Вариант 2.

Требуемое время работы системы 0.3 часа.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/час)	1.3	1.7	1.4	1.5	1.2	1.4	1.3	1.8
μ_i (1/час)	3.3	3.2	3.6	2.8	2.7	3.0	3.5	3.4

Вариант 3.

Требуемое время работы системы 1 год.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/год)	0.3	0.7	0.4	0.5	0.5	0.2	0.4	0.4
μ_i (1/год)	0.1	0.1	0.3	0.2	0.1	0.7	0.8	0.4

Вариант 4.

Время жизни системы 1.5 года.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/год)	0.3	0.7	0.4	0.5	0.5	0.2	0.4	0.4
μ_i (1/год)	1.1	1.1	1.3	1.2	1.1	1.7	1.8	1.4

Вариант 5.

Время эксплуатации системы 2 года.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/год)	0.03	0.07	0.05	0.05	0.02	0.04	0.04	0.01
μ_i (1/год)	1.2	1.1	1.3	1.1	1.1	1.7	1.8	1.4

Пример выполнения расчетно-графической работы.

Дано:

время жизни системы 7 лет, система состоит из одного основного и семи запасных элементов (n=8).

Интенсивности отказов и восстановлений элементов системы приведены в табл. 8.3

Таблица 8.3

Значения интенсивностей отказов элементов системы и интенсивностей их восстановления

i	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_i (1/год)	0.01	0.03	0.04	0.01	0.02	0.03	0.07	0.07
μ_i (1/год)	0.7	0.9	0.2	0.2	0.7	0.7	0.9	0.3

Решение.

Пользуясь соотношениями (8.23), (8.24), вычисляем значения коэффициента готовности $К_Г$ и ожидаемого времени работы системы до первого отказа Т:

$К_Г = 0.5952$,

Т = 3.571 года.

Жизненный цикл системы разбиваем на равные временные интервалы и, пользуясь формулой (8.22), находим значения коэффициента готовности для каждого конкретного момента времени (табл. 8.4), что позволяет построить функцию изменения коэффициента готовности за время эксплуатации системы (рис. 8.8).

Таблица 8.4

Результаты расчета значений функции готовности системы.

Время, год	0	1	2	3	4	5	6	7
K(t)	1	0.798	0.697	0.646	0.621	0.608	0.601	0.598

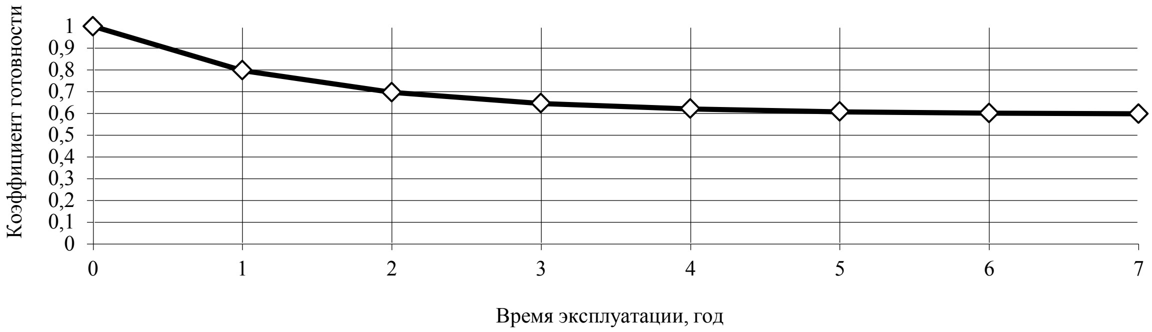


Рис. 8.8. Изменение коэффициента готовности системы за время ее жизненного цикла.

8.4.2. Показатели надежности резервированных восстанавливаемых систем

Постановка задачи.

Дано: техническая система, имеющая следующие показатели:

T_C — срок службы системы;

t — время непрерывной работы, ч;

λ — интенсивность отказов, 1/ч;

μ — интенсивность восстановления, 1/ч;

m — кратность резервирования.

Требуется определить;

показатели надежности исходной нерезервированной системы;

показатели надежности резервированной системы с заданной кратностью резервирования m (всего m+1) элемент.

Теоретические основы.

Основными показателями надежности восстанавливаемых систем являются:

T — наработка на отказ;

$K_г(t)$ — функция готовности;

$K_г$ — коэффициент готовности.

Для повышения надежности технических систем применяются, как правило, два вида резервирования:

с постоянным включением резерва;

по методу замещения.

Структурное резервирование с возможностью восстановления отказавших элементов в процессе функционирования системы является наиболее эффективным способом обеспечения и повышения надежности техники и снижения техногенного риска. Однако применение резервирования повышает затраты на создание системы и ее эксплуатацию. Поэтому кратность резервирования ограничивается в большинстве случаев одной системой m = 1, т.е. применяется дублирование. Как правило, кратность резервирования не превышает четырех, т.е. m ≤ 4.

Наработка на отказ и коэффициент готовности резервированных систем вычисляются по следующим формулам.

Система с постоянно включенным резервом при одной обслуживающей бригаде:

$$T = T_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(i+1)! \cdot \rho^i}; \qquad K_\Gamma = \frac{T}{T + \frac{1}{\mu}} \tag{8.26}$$

Резервированная система замещением при одной бригаде обслуживания:

$$T = T_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\rho^i}; \qquad K_\Gamma = \frac{T}{T + \frac{1}{\mu}} \tag{8.27}$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad T_0 = \frac{1}{\lambda} \tag{8.28}$$

Показатели надежности Т и $К_г$ зависят от числа обслуживающих бригад. (Формулы для любого числа бригад легко получить топологическими методами расчета надежности).

В случае двух бригад обслуживания.

Система с постоянно включенным резервом:

$$T = T_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{\,i}}{(i+1)! \cdot \rho^{\,i}} + \frac{2^{\,m-1}}{(m+1)! \cdot \rho^{\,m}} \right), \qquad K_{\Gamma} = \frac{T}{T + \frac{1}{2 \cdot \mu}} \tag{8.29}$$

Система, резервированная по способу замещения:

$$T = T_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{\,i}}{\rho^{\,i}} + \frac{2^{\,m-1}}{\rho^{\,m}} \right), \quad K_{\Gamma} = \frac{T}{T + \frac{1}{2 \cdot \mu}} \tag{8.30}$$

Исследование свойств структурного резервирования показывает, что для случая высоконадежных систем, когда $\rho \le 0.001$, дисциплина обслуживания не оказывает существенного влияния на показатели надежности резервированных восстанавливаемых систем.

Выполнение расчетной работы.

Расчеты, выполненные по формулам (8.26)…(8.30) для двух систем, отличающихся интенсивностью восстановления μ, следовательно и ρ, представлены в табл. 8.5, табл. 8.6.

Таблица 8.5

Значения показателей надежности восстанавливаемых систем при значении интенсивности отказов устройств λ=0.3, 1/год, интенсивности восстановления μ=0.15, 1/год (ρ=2) и кратности резервирования m=3.

Параметр	Одна бригада ремонтников		Две бригады ремонтников	
	«Горячее» резервирование	«Холодное» резервирование	«Горячее» резервирование	«Холодное» резервирование
Коэффициент готовности	0.393	0.484	0.464	0.692

$К_Г$				
Наработка на отказ Т, год	4.32	6.25	5.76	15

Таблица 8.6

Значения показателей надежности восстанавливаемых систем при значении интенсивности отказов устройств λ=0.3, 1/год, интенсивности восстановления μ=0.3, 1/год, и кратности резервирования m=3.

Параметр	Одна бригада ремонтников		Две бригады ремонтников	
	«Горячее» резервирование	«Холодное» резервирование	«Горячее» резервирование	«Холодное» резервирование
Коэффициент готовности $К_Г$	0.63	0.80	0.76	0.95
Наработка на отказ Т, год	5.69	13.3	10.55	63.3

Расчетные формулы для случая дублированной системы (m=1) имеют следующий вид.

Дублированная система с постоянно включенным резервом.

Одна обслуживающая бригада:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \rho}\right), \qquad K_\Gamma = \frac{1 + 2 \cdot \rho}{1 + 2 \cdot \rho + 2 \cdot \rho^2} \tag{8.31}$$

Две обслуживающие бригады:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \rho}\right), \qquad K_\Gamma = \frac{1 + 2 \cdot \rho}{1 + 2 \cdot \rho + \rho^2} \tag{8.32}$$

Системы, дублированные по способу замещения.

Одна обслуживающая бригада:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho}\right), \qquad K_\Gamma = \frac{1 + \rho}{1 + \rho + \rho^2} \tag{8.33}$$

Две обслуживающие бригады:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho}\right), \qquad K_\Gamma = \frac{1 + \rho}{1 + \rho + \frac{1}{2} \cdot \rho^2} \tag{8.34}$$

Для нерезервированной системы:

$$T = T_1 = T_0 = \frac{1}{\lambda}, \qquad K_\Gamma = \frac{1}{1 + \rho} \tag{8.35}$$

Из приведенных формул видно, что наработка на отказ и коэффициент готовности дублированной системы являются функциями $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

8.4.3. Вероятность безотказной работы резервированных восстанавливаемых систем.

Для определения вероятности безотказной работы резервированной системы необходимо составить и решить систему дифференциальных уравнений ее функционирования.

Для системы с постоянно включенным резервом:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2 \cdot \lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2 \cdot \lambda \cdot p_0(t) - (\lambda + \mu) \cdot p_1(t) \end{cases} \tag{8.36}$$

Для системы с резервированием замещением:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda \cdot p_0(t) - (\lambda + \mu) \cdot p_1(t) \end{cases} \tag{8.37}$$

При начальных условиях: $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0$.

Неремонтируемая резервированная система.

Вероятность безотказной работы системы при постоянно включенном резерве:

$$P_C(t) = 1 - \left(1 - \exp(-\lambda_0 \cdot t)\right)^{m+1} \tag{8.38}$$

Средняя наработка до отказа:

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i+1} \tag{8.39}$$

Вероятность безотказной работы резервированной системы замещением:

$$P_C(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{{\lambda_0}^k \cdot t^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda_0 \cdot t) \tag{8.40}$$

Средняя наработка на отказ:

$$T_C = \frac{m+1}{\lambda_0} \tag{8.41}$$

где m — число резервных элементов; λ_0 — интенсивность отказов каждого из элементов системы, включая основной.

Пример результатов расчетов среднего времени наработки на отказ резервированных неремонтируемых систем при различном числе резервных элементов представлен в табл. 8.7.

Таблица 8.7

Среднее значение времени наработки на отказ резервированных невосстанавливаемых систем при интенсивности отказов одного устройства (как основного, так и резервных) λ_0=0.03 1/час.

Наработка на отказ	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
T_C (горячее), час	33.3	50	61.1	69.4	76.1
T_C (холодное), час	33.3	66.7	100	133.3	166.7

Ремонтируемая резервированная система.

Определение вероятности безотказной работы ремонтируемой резервированной системы является весьма сложной задачей.

Далее рассматриваются только дублированные системы.

Вероятность безотказной работы ремонтируемой системы при постоянно включенном резерве определяется соотношением:

$$P_C(t) = \frac{z_1 + \mu + 3 \cdot \lambda}{z_1 - z_2} \cdot \exp(z_1 \cdot t) - \frac{z_2 + \mu + 3 \cdot \lambda}{z_1 - z_2} \cdot \exp(z_2 \cdot t) \qquad (8.42)$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 3 \cdot \lambda) \pm \sqrt{(\mu + 3 \cdot \lambda)^2 - 8 \cdot \lambda^2}}{2} \qquad (8.43)$$

Средняя наработка до отказа:

$$T_C = \frac{\mu + 2 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda^2} \qquad (8.44)$$

Вероятность безотказной работы дублированной ремонтируемой системы, резервированной замещением:

$$P_C(t) = \frac{z_1 + \mu + 2 \cdot \lambda}{z_1 - z_2} \cdot \exp(z_1 \cdot t) - \frac{z_2 + \mu + 2 \cdot \lambda}{z_1 - z_2} \cdot \exp(z_2 \cdot t) \tag{8.45}$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 2 \cdot \lambda) \pm \sqrt{(\mu + 2 \cdot \lambda)^2 - 4 \cdot \lambda^2}}{2} \tag{8.46}$$

Средняя наработка на отказ:

$$T_C = \frac{\mu + \lambda}{\lambda^2} \tag{8.47}$$

В формулах (8.42)…(8.47): λ — интенсивность отказов, а μ — интенсивность восстановлений каждого устройства рассматриваемой дублированной системы.

Пример 8.3.

Расчет надежности дублированных восстанавливаемых технических систем.

Даны технические системы дублированные по способу постоянно включенного резерва (горячее резервирование) и по способу замещения (холодное резервирование). Интенсивность отказов устройств $\lambda = 0.03$ (1/час), интенсивность восстановления $\mu = 0.1$ (1/час).

Требуется определить изменение надежности систем в течение 100 часов работы. Определить среднее время работы систем до отказа.

Расчеты выполняются по формулам (8.42)…(8.47).

Время наработки на отказ при «горячем» резервировании T_C=88.9 час.

Время наработки на отказ при «холодном» резервировании T_C=144.4 час.

Изменение вероятности безотказной работы систем во времени представлены в табл. 8.8.

Таблица 8.8.

Надежность дублированных восстанавливаемых систем.

Время работы системы, час	Надежность при «горячем» резервировании	Надежность при «холодном» резервировании
0	1	1
20	0.8653	0.9230
40	0.7097	0.8228
60	0.5810	0.7322
80	0.4758	0.6516
100	0.3895	0.5797

Выигрыш в среднем времени наработки на отказ дублированной системы за счет восстановления для постоянно включенного резерва и резерва замещением равен соответственно:

$$\frac{\mu + 2\lambda}{3\lambda} \quad и \quad \frac{\mu + \lambda}{2\lambda} \tag{8.48}$$

Зависимости (8.48) получены делением ожидаемого времени наработки на отказ восстанавливаемой (8.44), (8.47) системы на ожидаемое время наработки на отказ (8.39), (8.41) соответствующей системы без восстановления.

Вероятность безотказной работы Д У Б Л И Р О В А Н Н Ы Х

ремонтируемых систем при интенсивности отказов 0.39 (1/год)

Резервирование с постоянно включенным резервом

$$PGC(t) := \left[\frac{(Z1 + \mu + 3\cdot\lambda c)}{(Z1 - Z2)}\right]\cdot\left[e^{(Z1\cdot t)}\right] - \left[\frac{Z2 + \mu + 3\cdot\lambda c}{(Z1 - Z2)}\right]\cdot e^{(Z2\cdot t)}$$

$t := 0..15$

$$Z2 := \frac{-(\mu + 3\cdot\lambda c) - \sqrt{(\mu + 3\cdot\lambda c)^2 - 8\cdot\lambda c^2}}{2}$$

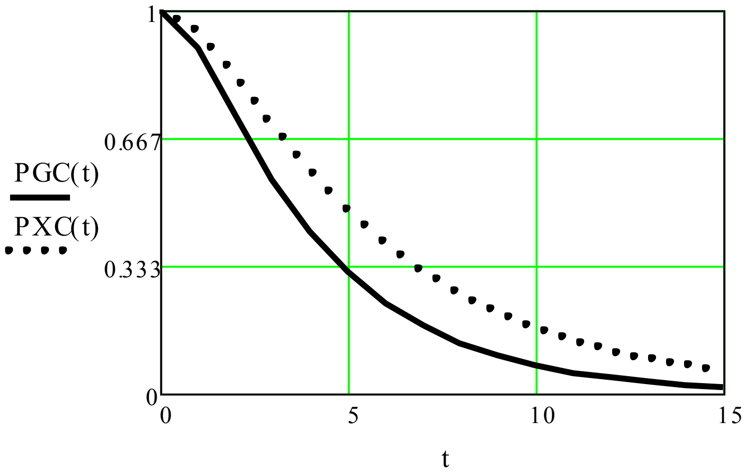
Резервирование замещением

$$PXC(t) := \left[\frac{(Z11 + \mu + 2\cdot\lambda c)}{(Z11 - Z22)}\right]\cdot\left[e^{(Z11\cdot t)}\right] - \left[\frac{Z22 + \mu + 2\cdot\lambda c}{(Z11 - Z22)}\right]\cdot e^{(Z22\cdot t)}$$

Результат решения, выполненный в среде Mathcad

$$Z22 := \frac{-(\mu + 2\cdot\lambda c) - \sqrt{(\mu + 2\cdot\lambda c)^2 - 4\cdot\lambda c^2}}{2}$$

$$Z11 := \frac{-(\mu + 2\cdot\lambda c) + \sqrt{(\mu + 2\cdot\lambda c)^2 - 4\cdot\lambda c^2}}{2}$$



Кривые изменения надежности рассматриваемых технических систем свидетельствуют о преимуществах (только по показателям надежности) резервирования замещением перед резервированием с постоянно включенным резервом.

Пример 8.4.

Рассмотрим систему, у которой один из элементов может восстанавливаться (ремонтироваться) [13].

Размеченный граф такой системы представлен на рис. 8.9.

Система состоит из двух элементов. Состояние S_0 (вероятность нахождения системы в момент t в этом состоянии $P_0(t)$) соответствует сохранению работоспособности обоих элементов. Состояние S_1 ($P_1(t)$) – отказ одного первого элемента, но сохранение работоспособности системы за счет работы второго элемента. Состояние S_2 ($P_2(t)$) - отказ второго элемента и поступление его в ремонт. Если в нерабочем состоянии находятся оба элемента, то наступает состояние S_3 ($P_3(t)$) – система выходит из строя.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_2(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01} \cdot P_0(t) - \lambda_{13} \cdot P_1(t)$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot P_1(t) - \lambda_{32} \cdot P_3(t)$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{32} \cdot P_3(t) - \mu \cdot P_3(t) + \lambda_{03} \cdot P_0(t)$$

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$$

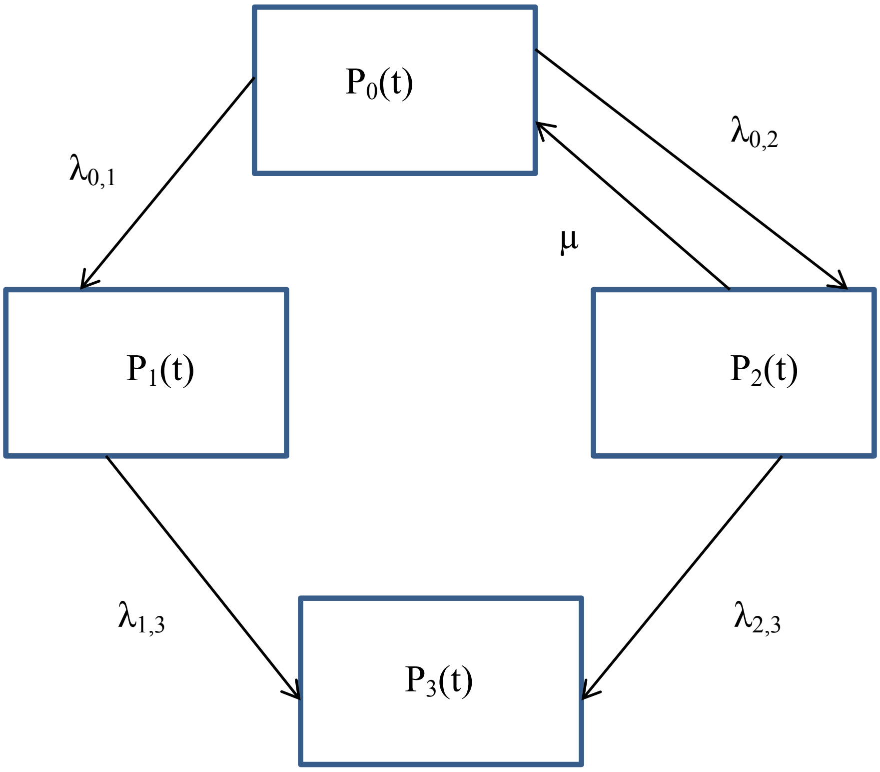


Рис. 8.9. Размеченный граф функционирования системы с одним восстанавливаемым элементом

Расчет в системе Mathcad надежности технической системы с одним ремонтируемым элементом. При этом введены новые обозначения интенсивностей отказов.

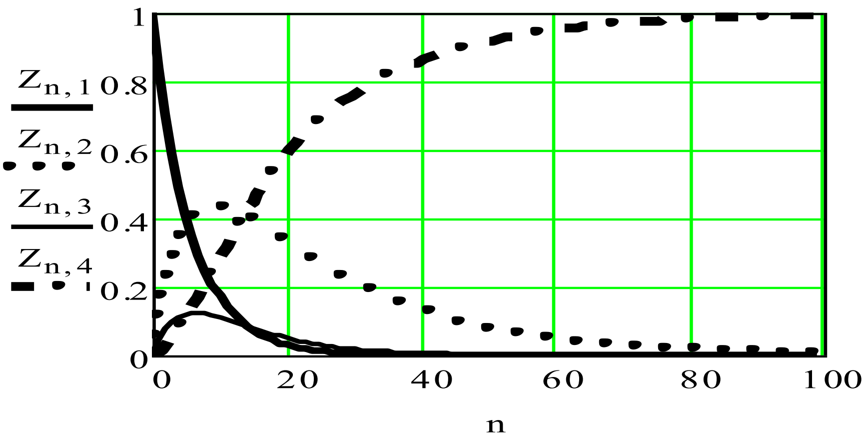
$a := 10^{-3}$ $\quad b := (2\cdot 10)^{-2}$ $\quad c := 10^{-3}$ $\quad d := 5\cdot 10^{-3}$ $\quad \mu := 2\cdot 10^{-5}$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} -(a + b)\cdot x_0 + \mu\cdot x_2 \\ b\cdot x_0 - a\cdot x_1 \\ a\cdot x_0 - (b + \mu)\cdot x_2 \\ a\cdot x_1 + b\cdot x_2 \end{bmatrix} \qquad n := 0..100$$

Z:=rkfixed(x,0,5000,99,D)

Интенсивности отказов элементов: $\lambda_{0,2}=10^{-3}$, $\lambda_{0,1}=10^{-3}$, $\lambda_{1,3}=2\cdot10^{-2}$, $\lambda_{2,3}=5\cdot10^{-3}$, интенсивность восстановления второго элемента $\mu=2\cdot10^{-5}$. Учитывая, что



расчетный интервал времени выбран в пределах (0…5000 час) и число интервалов дробления равно 100, получим возможность определить вероятность отказа системы через время t(час) [15]:

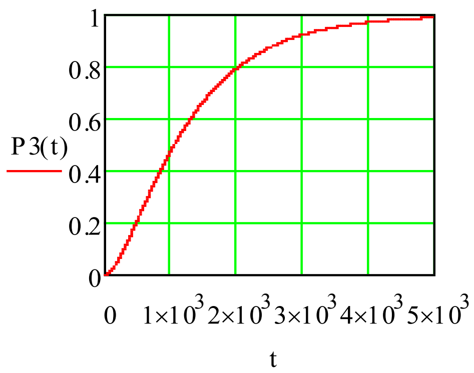
$$t = \frac{n \cdot 5000}{100}$$

В частности, вероятность отказа рассматриваемой системы Q(t)=0.9 наступит через t=2700 часов.

Ниже представлен результат решения примера 8.4. по нахождению вероятности P3(t) попадания системы в нерабочее состояние (в состояние S3).

$$t := 0..5000$$

$$P3(t) := 1 - \left[\frac{a\cdot(a-b+\mu)\cdot e^{(-b\cdot t)}}{(a-b)\cdot(a+\mu)}\right] - \left[\frac{b\cdot(a-b-\mu)\cdot e^{(-a\cdot t)}}{(a-b)\cdot(b+\mu)}\right] + \left[\frac{a\cdot b\cdot e^{-[(a+b+\mu)\cdot t]}}{(b+\mu)\cdot(a+\mu)}\right]$$



Пример 8.5.

Для снабжения энергией поселка требуется мощность 1000 кВт, что обеспечивается работой четырех агрегатов (n=4) по 100 кВт каждый с коэффициентом простоя qn=0.04 и трех (m=3) агрегатов по 200 кВт каждый с коэффициентом простоя qm-0.05.

Коэффициент простоя отождествляется с коэффициентом неготовности системы, т.е. например, $\mathrm{qn} = 1 - \mathrm{kn}$, где kn – коэффициент готовности.

Требуется определить ожидаемый недоотпуск энергии.

Решение примера 8.5 в среде Matlab.

```
n=4;m=3;Mn=100;Mm=200;
 qn=0.04;qm=0.05;
 Qn=1-(1-qn)^n; Вероятность отказа хоть одного агрегата из группы «n»
 Qm=1-(1-qm)^m; Вероятность отказа хоть одного агрегата из группы «m»
 M1=Qn*Mn;  Вероятный недоотпуск энергии группой «n»
M2=Qm*Mm; Вероятный недоотпуск энергии группой «m»
 Q=Qn*Qm; Вероятность одновременного простоя по одному агрегату из обеих групп
MM=Q*(Mn+Mm); Ожидаемый недоотпуск энергии в случае одновременного простоя по одному агрегату из обеих групп
 [Qn,Qm,Q,M1,M2,MM]
```

Результат решения

```
ans =  0.1507    0.1426    0.0215   15.0653   28.5250    6.4461
```

Анализ результатов решения примера 8.5. может вызвать удивление. Недоотпуск энергии при простое агрегатов из обеих групп меньше, чем при простое агрегатов из одной группы. Ответ очень прост: вероятность простоя хотя бы одного агрегата из одной группы больше, чем вероятность простоя хотя бы одного агрегата из обеих групп одновременно, а в итоге рассчитывается ожидаемый (вероятный) недоотпуск энергии.

Подобные задачи распространены на этапах проектирования для определения предполагаемых штрафных санкций.

Вопросы для самоконтроля.

Объясните значение коэффициента готовности технической системы.

Объясните значение функции готовности технической системы.

Дайте пример использования коэффициента готовности технической системы.

Какой вид резервирования восстанавливаемых технических систем наиболее эффективен по показателям надежности.

Приложение 1.

Определения и свойства факториалов, перестановок, сочетаний.

Факториалом целого положительного числа n называется произведение:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n \qquad (П1.1)$$

По определению 0! = 1.

Свойства факториалов:

$$\frac{n!}{(n-1)!}=n; \qquad \frac{(2n)!}{(2n-2)!}=(2n-1)\cdot 2n; \qquad \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=2n \qquad (П1.2)$$

при возрастании n факториал n! растет очень быстро:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n!}=n, \qquad (П1.3)$$

где k – любое натуральное число

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, \qquad где\ a - любое\ положительное\ число. \qquad (П1.4)$$

Факториалы больших чисел можно приближенно оценить по формуле Стирлинга:

$$n!\cong\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\exp\left(\frac{\theta}{12\cdot n}\right), \qquad где \quad \theta\in(0,1) \qquad (П1.5)$$

Перестановками из n элементов называют их группировки, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Например, перестановки из трех элементов a,b,c:

a,b,c; a,c,b; c,a,b; b,a,c; b,c,a; c,b,a.

Число всех различных перестановок из n различных элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n = n! \qquad (П1.6)$$

Сочетаниями из данных n элементов называют их всевозможные группировки по m элементов в каждой, отличающимися друг от друга хотя бы одним элементом.

Например, сочетания из четырех элементов a,b,c,d, по два элемента:

ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m:

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{П1.7}$$

Например,

$$C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = \frac{20}{2} = 10$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^1 = n; \quad C_n^0 = C_n^n = 1 \tag{П1.8}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad m = 0,1,2,\ldots,n \tag{П1.9}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \tag{П1.10}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n\cdot C_n^n = 0 \tag{П1.11}$$

Разложение функций в ряд Тейлора.

Функция f(x) называется аналитической в точке x_0, если для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<r$ (r>0), f(x) есть сумма некоторого степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$$

Если функция f(x) аналитична в точке x_0 , то в некоторой окрестности x_0 она дифференцируема любое число раз и:

$$f^{(k)}(x) = k!\cdot\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k\cdot a_{n+k}\cdot(x-x_0)^n$$, тогда

$$f^{(k)}(x_0) = k!\cdot a_k \tag{П1.12}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \qquad (П1.13)$$

Разложение функций в ряд Тейлора позволяет получать удобные для вычисления формулы, например:

$$\exp(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} \qquad (П1.14)$$

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!\cdot x^i} \qquad (П1.15)$$

$$\exp\left(-x^2\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{2i}}{i!} \qquad (П1.16)$$

$$\exp(-x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^i}{i!} \qquad (П1.17)$$

$$\int_0^x \exp(-t^2)dt=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)\cdot i!},\ \text{для } |x|<\infty \qquad (П1.18)$$

Разложение функций в ряд Тейлора можно использовать для оценки погрешности. Например, если система состоит из n элементов и ее надежность определяется произведением надежностей p_i каждого элемента, то абсолютная погрешность вычисления надежности P_C системы может быть оценена по формуле (ограничиваясь первыми членами разложения):

$$\Delta P_C(p_i) \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_C}{\partial p_i}\right)\cdot \Delta p_i \quad i=1,2,3,\ldots,n \tag{П1.19}$$

где Δp_i — может быть принята равной величине абсолютной погрешности числового значения p_i.

Некоторые свойства интегралов, зависящих от параметра.

Бета-функция (Эйлеров интеграл 1-го рода).

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt \tag{П1.20}$$

Интеграл (П1.20) сходится при x>0, y>0 и расходится, если нарушается хоть одно из этих неравенств.

Свойства бета-функции.

$$B(x,y)=B(y,x)$$

$$B(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}\cdot B(x,y-1)$$

$$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+n-1)}$$ при n = 1,2,…

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

$$B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin(x\cdot n)}$$ при 0 < x < 1

Гамма-функция (Эйлеров интеграл 2-го рода).

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}dt \tag{П1.21}$$

Этот несобственный интеграл сходится при x>0 и расходится

при x ≤ 0.

Подстановкой $u = e^{-t}$ и $u = \ln t$, получим соответственно:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln(\frac{1}{u}) \right]^{x-1} du; \qquad \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x \cdot u} \cdot e^{-e^u} du \qquad (П1.22)$$

Свойства гамма-функции.

При x>0 гамма-функция непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot (\ln t)^n dt$$

Представление Гаусса (в виде произведения):

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} n^x \cdot \frac{(n-1)!}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+n-1)},$$

при x>0.

Функциональное равенство:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

$\Gamma(n+1) = n!$ при n=0, 1, 2, ….

Связь с бета-функцией:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Закон дополнения:

$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(x \cdot n)}$ при 0<x<1

Закон удвоения Лагранжа:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(x + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x)$$

теорема умножения

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{2nx-1}{2}}}\cdot\Gamma(n\cdot x)$$

Формула Раабе:

$$\int_x^{x+1}\ln\Gamma(u)du=x\cdot(\ln x-1)+\ln\sqrt{2\pi}$$

Формула Гаусса:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+C=\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt\ ,$$

где С— постоянная Эйлера, С=0.577 215 664 901 532…

Формула Коши:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\int_0^{+\infty}\left[e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^x}\right]\cdot\frac{dt}{t}$$

Использование гамма-распределения.

11.Интенсивность отказов

$$\lambda=\frac{f(t)}{P(t)} \tag{П1.23}$$

12. Плотность гамма-распределения

$$\begin{aligned}f(r,\,\lambda t)&=\frac{\lambda^r\cdot t^{r-1}}{\Gamma(r)}\cdot\exp(-\lambda t)=\\&=\lambda\cdot\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\exp(-\lambda t)=\\&=\lambda\cdot P(r-1,\,\lambda t)\end{aligned} \tag{П1.24}$$

откуда вероятность того, что на интервале (0, t) не произойдет (r-1) отказ

$$P(r-1,\,\lambda t)=\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\exp(-\lambda t) \qquad (\text{П}1.25)$$

или

$$P(r,\,\lambda t)=\frac{(\lambda t)^{r}}{r!}\cdot\exp(-\lambda t) \qquad (\text{П}1.26)$$

Некоторые полезные соотношения.

Вероятность того, что на интервале (0, t) произойдет ровно r отказов

$$Q(\le r,\,\lambda t)=1-P(r,\,\lambda t) \qquad (\text{П}1.27)$$

Вероятность того, что на интервале (0, t) произойдет не более r отказов

$$P(k,\,\lambda t)=$$

$$Q(r,\,\lambda t)=1-\sum_{k=0}^{r-1}1-\exp(-\lambda t)\cdot\left[1+\frac{\lambda t}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

Вывод многих выражений для нормального закона распределения требует использования следующих интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi=\sqrt{2\cdot\pi};\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\xi\cdot\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi=0 \qquad (\text{П}1.28)$$

Некоторые простые, но полезные преобразования

$$\frac{1-z^{m+1}}{1-z}=\left(1+z+z^2+\cdots+z^m\right) \qquad (\text{П}1.29)$$

$$\sum_{i=0}^{m}(i+1)=\frac{(m+1)\cdot(m+2)}{2} \qquad (\text{П}1.30)$$

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{\Gamma(i+1)}{i!}=\sum_{i=0}^{m}\frac{i!}{i!}=m+1 \qquad (\text{П}1.31)$$

$$\int \exp(-ax)dx = -\frac{1}{a} \cdot \int \exp(-ax)d(-ax) = -\frac{1}{a} \cdot \exp(-ax) \tag{П1.32}$$

$$\left(\exp(ax)\right)' = a \cdot \exp(ax) \tag{П1.33}$$

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\left(a-b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-1} \cdot b^k$$

$$\left[1-\exp(-\lambda t)\right]^m =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \cdot C_m^j \cdot \left[\exp(-\lambda t)\right]^j = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \cdot C_m^j \times \exp(-j \cdot \lambda \cdot t)$$

(П1.34)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left[1-\exp(-xt)\right]^i}{x^i} = t^i \tag{П1.34}$$

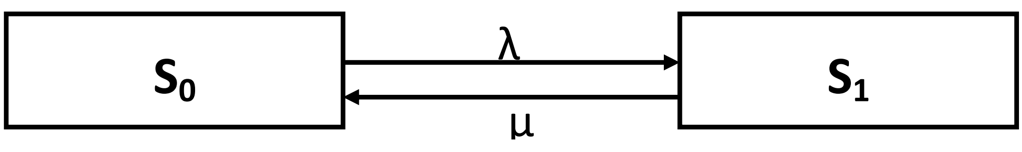
Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений.

Ниже приводится один из методов решения системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему, состоящую из одного ремонтируемого элемента и имеющую два состояния:

$S_0(t)$ — система в момент t находится в рабочем состоянии;

$S_1(t)$ — система в момент t находится в ремонте (не работает).



Система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ &\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) \end{aligned} \tag{П1.35}$$

Найдем интеграл этой системы уравнений, для чего введем обозначения $P_0(t)=y$, $P_1(t)=z$.

Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = -\lambda \cdot y + \mu \cdot z \\ &\frac{dz}{dt} = -\mu \cdot z + \lambda \cdot y \end{aligned} \tag{П1.36}$$

Дифференцируем первое уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + \mu \cdot \frac{dz}{dt} \tag{П1.37}$$

Из первого же уравнения находим z:

$$z = \frac{1}{\mu} \cdot (\frac{dy}{dt} + \lambda \cdot y) \tag{П1.38}$$

Из второго уравнения системы после подстановки найденного выражения для z имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\mu}{\mu}(\frac{dy}{dt} + \lambda \cdot y) + \lambda \cdot y; \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{dy}{dt} \tag{П1.39}$$

Подставляем полученное выражение производной (П1.39) в уравнение (П1.37), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda \cdot \frac{dy}{dt} - \mu \cdot \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -(\lambda + \mu) \cdot \frac{dy}{dt}; \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda + \mu) \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{П1.40}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + (\lambda + \mu) \cdot k = 0 \tag{П1.41}$$

Решение характеристического уравнения дает корни:

$$k_{1,2} = -\frac{(\lambda + \mu)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)^2}{4}}$$, откуда

k_1=0, k_2=-(λ+μ) (П1.42)

Общее решение системы однородных дифференциальных уравнений при вещественных и неравных корнях имеет вид:

$$y = C_1 \cdot \exp(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \exp(k_2 \cdot t), \tag{П1.43}$$

$$y = C_1 \cdot \exp(0) + C_2 \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] = C_1 + C_2 \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] \tag{П2.10}$$

Учитывая начальные условия

y(0)=1 z(0)=0 (П1.44)

получим:

$$1 = C_1 + C_2 \tag{П1.45}$$

Тогда

$$y = 1 - C_2 + C_2 \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] \tag{П1.46}$$

Дифференцируем (П2.10):

$$\frac{dy}{dt} = -C_2 \cdot (\lambda + \mu) \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] \tag{П1.47}$$

Подставляя в (П2.4) выражения (П2.13) и (П2.14), получим:

$$z = -C_2 \cdot (\frac{\lambda + \mu}{\mu}) \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \cdot C_2 \cdot \exp[-(\lambda + \mu) \cdot t] \tag{П1.48}$$

При подстановке начального условия z(0) = 0, получим уравнение:

$$0 = -C_2 \cdot (\frac{\lambda + \mu}{\mu}) + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \cdot C_2 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot C_2,$$

откуда

$$C_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \quad C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{П1.49}$$

Подставляя (П2.16) в (П2.10) и (П2.15), получим окончательно:

$$y = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \exp\left[-(\lambda + \mu) \cdot t\right] = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \left\{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \exp\left[-(\lambda + \mu) \cdot t\right]\right\}$$

(П1.50)

$$z = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \exp\left[-(\lambda + \mu) \cdot t\right] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \{1 - \exp\left[-(\lambda + \mu) \cdot t\right]\} \qquad \text{(П1.51)}$$

Кроме рассмотренного метода, могут использоваться и другие, например, с помощью преобразований Лапласа.

Заметим, что с пакетами Mathcad или Matlab системы дифференциальных уравнений интегрируются проще [16, 17, 18}.

Приложение 2.

Некоторые характеристики случайных величин, событий, процессов в оценках надежности технических систем

П 2.1. Основные понятия, непосредственный подсчет вероятностей.

Если в результате опыта из общего числа случаев n число благоприятных для события A случаев составляет m, то вероятность реализации события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (П2.1)$$

В теории надежности большую роль играет так называемая схема Бернулли. Предположим, что производится последовательно n испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью p. Спрашивается, чему равна вероятность того, что событие A реализуется при m испытаниях, а при n-m испытаниях — событие не произойдет.

Если обозначить эту вероятность через P_n^m, и принять q=1-p, то имеет место формула Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad (П2.2)$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Наряду с формулой Бернулли значительную роль играет схема, именуемая схемой невозвращенного шара. Если имеется N предметов, среди которых M обладают определенным отличием A, а остальные этим свойством не обладают, то при выборе n единиц наудачу из N предметов, вероятность того, что среди выбранных n предметов m будут отличаться свойством A, определяется формулой:

$$P_n^m(N,M) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (П2.3)$$

Задача П 2.1.

Среди поставленных на испытания элементов имеются a=10 с интенсивностью отказов $\lambda=10^{-4}$ 1/час и b=6 с интенсивностью отказов $\lambda=10^{-2}$ 1/час. Эти элементы объединяются в последовательную цепь работы. Найти в среде Matlab надежность системы, собранной из этих элементов, за 2 часа работы.

```
L1=10^-4;L2=10^-2;t=2;a=10;b=6;

L=a*L1+b*L2;

P=exp(-L*t)

P = 0.8851
```

Задача П 2.2.

В партии, состоящей из 77 изделий, имеется 9 дефектных. Выбирается для контроля 10 изделий. Найти в среде Mathcad вероятность того, что ровно 7 изделий будут с дефектами.

$k := 77 \qquad S := 7 \qquad R := 10 \qquad L := 9$

$$W := \frac{\mathrm{combin}(L, S)\cdot \mathrm{combin}(k - L, R - S)}{\mathrm{combin}(k, R)} \qquad W = 1.645\times 10^{-6}$$

Задача П 2.3.

В составе партии, состоящей из 110 изделий, имеется 10% дефектных. Выбирается для контроля 8 изделий. Найти в среде Matlab вероятность того, что ровно 4 изделия будут с дефектами.

```
k=110;L=110*0.1;r=8;s=4;

PKR=(nchoosek(L,s)*nchoosek(k-L,r-s))/nchoosek(k,r)

PKR = 0.0030;  L=11;
```

П 2.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Для несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{П2.4}$$

Для совместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{П2.5}$$

где P(AB) — вероятность появления событий A и B одновременно.

Полной группой нескольких событий называется счетное множество событий, одно из которых непременно произойдет и не существует событий, выходящих за пределы рассматриваемого множества.

Если события A_1…..A_n несовместны и образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1 \tag{П2.6}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{П2.7}$$

где $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A.

Условной вероятностью события A при наличии события B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $P(A/B)$.

События A и B называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятность появления другого.

Для независимых событий

$$P(A/B)=P(A); \qquad P(B/A)=P(B) \tag{П2.8}$$

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \quad или$$
$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (П2.9)$$

Для независимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (П2.10)$$

Задача П 2.5.

Партия изделий состоит из a исправных и b неисправных. Выбирается одно изделие, проверяется на исправность и возвращается в эксперимент. После этого из партии берется еще одно изделие.

Найти вероятность того, что оба изделия будут исправными.

Ответ.

$$P = P_1 \cdot P_2 = \left(\frac{a}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

Задача П 2.6.

Над изготовлением одного изделия последовательно работают 3 рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0.05, второй – 0.08, третий – 0.03.

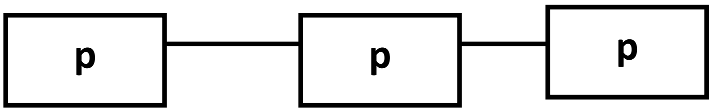
Найти в среде Mathcad вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

$q1 := 0.08$ $\qquad q2 := 0.05$ $\qquad q3 := 0.03$ $\qquad Q = 0.152$

$$Q := 1 - (1 - q1) \cdot (1 - q2) \cdot (1 - q3)$$

Задача П 2.7.

Прибор состоит из n=3 последовательно соединенных блоков. Выход из строя любого блока означает выход из строя прибора. Блоки выходят из



строя независимо друг от друга.

Интенсивность отказов каждого блока равна $\lambda=10^{-2}$ 1/сутки.

Найти в среде Mathcad надежность прибора за t=110 суток работы.

Какова должна быть надежность каждого блока для обеспечения заданного уровня надежности прибора pp= 0.99.

Решение.

$\lambda := 10^{-2}$ $\quad t := 110$ $\quad PTR := 0.99$ $\quad n := 3$

$P1 := e^{-t\cdot\lambda}$

$P1 = 0.333$ $\quad \lambda C := n\cdot\lambda$ $\quad WC := e^{-t\cdot\lambda C}$ $\quad WC = 0.037$

$PP := \sqrt[n]{PTR}$ $\quad PP = 0.997$

Задача П 2.8.

Для повышения надежности прибора он резервируется еще тремя точно такими же приборами, включенными «параллельно». Интенсивность отказов каждого прибора 10^{-3} 1/час. Определить в среде Matlab надежность системы за 150 часов работы.

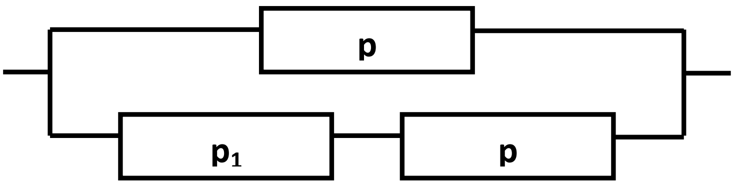
```
L1=10^-3;t=150;m=3;
P1=exp(-L1*t);
Pt=1-(1-P1)^(m+1)
Pt=0.9996
```

Задача П 2.9.

Для повышения надежности системы применена схема дублирования. Дублирующее устройство включается в работу в случае отказа основного с помощью коммутатора. Надежность основного устройства P_0 =0.85, дублирующего устройства равна $p_д$ =0.7, надежность коммутатора $p_к$ =0.55. Определить в среде Mathcad вероятность безотказной работы системы.

$PD := 0.7$ $\quad PK := 0.55$ $\quad W := 1 - (1 - P0)\cdot(1 - PD\cdot PK)$

$P0 := 0.85$ $\quad W = 0.908$



Задача П 2.10.

Для повышения надежности прибора он резервируется m другими точно такими же приборами по способу постоянно включенного резерва. Надежность каждого прибора равна p=0.7. Определить в среде Mathcad, сколько надо включить приборов (каково число m), чтобы обеспечить заданную надежность $P_{тр}$ =0.995 системы в целом.

$P := 0.7$ $\quad Pt := 0.995$ $\quad m := \left(\frac{\ln(1 - Pt)}{\ln(1 - P)}\right) - 1$

$m = 3.401$ m=3

Задача П 2.11.

В условиях задачи П2.10 для каждого дублирующего элемента применяется устройство переключения с одинаковой надежностью p_1.

А. Определить надежность системы.

Б. Найти требуемое число дублирующих элементов при заданной (требуемой) общей надежности системы P_{tr} .

Ответ:

$$A:\ P = 1-(1-p)\cdot(1-p_1\cdot p)^m$$

$$Б:\ m^* \geq \frac{\ln(1-P_{tr})-\ln(1-p)}{\ln(1-p_1\cdot p)}$$

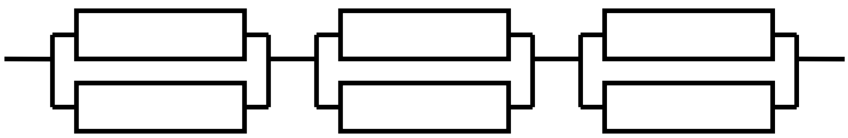
Задача П 2.12.

Техническая система состоит из n блоков, надежность каждого из которых равна p. Выход из строя хотя бы одного блока влечет за собой выход из строя всей системы.

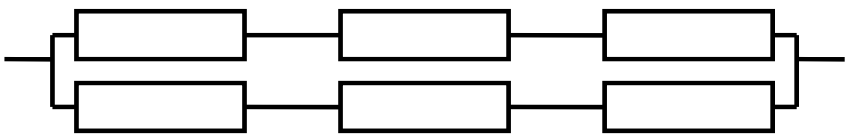
С целью повышения надежности системы производится дублирование, для чего выделено еще n таких же блоков. Надежность переключающих устройств равна единице.

Определить, какой способ дублирования дает более высокую надежность системы:

а) дублирование каждого блока



б) дублирование всей системы



Решение [8].

Надежность P_A системы, дублированной по способу а), определяется по формуле:

$$P_A = [1-(1-p)^2]^n.$$

Надежность $P_Б$ системы, дублированной по способу б), имеет вид:

$$P_Б = 1-(1-p^n)^2$$

Покажем, что при любом n и $0 < p < 1$ выполняется неравенство $P_A > P_Б$

Поскольку:

$$P_A = [1-(1-p)^2]^n = [1-1+2\cdot p - p^2]^n = p^n \cdot (2-p)^n,$$

$$P_Б = 1-(1-p^n)^2 = 1-1+2\cdot p^n - p^{2\cdot n} = p^n \cdot (2-p^n),$$

то достаточно доказать неравенство:

$$(2-p)^n > 2-p^n$$

Положим $q=1-p,\ q>0$, тогда исследуемое неравенство примет вид:

$$(2-1+q)^n > 2-(1-q)^n \quad или$$

$$(1+q)^n + (1-q)^n > 2$$

Применяя формулу бинома, и замечая, что все отрицательные члены разложения взаимно уничтожаются, получим:

$$(1+q)^n + (1-q)^n =$$

$$= \left[1+n\cdot q+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot q^2+\ldots\right]+$$

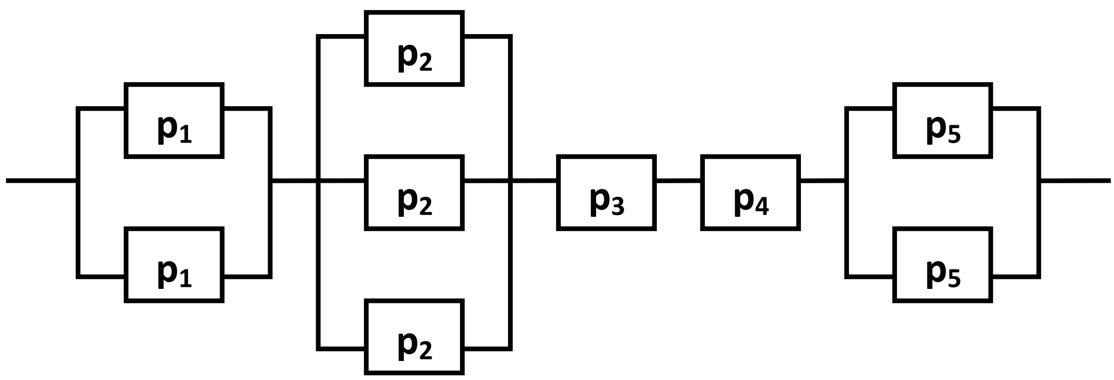
$$+\left[1-n\cdot q+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot q^2-\ldots\right]=$$

$$= 2+n\cdot(n-1)\cdot q^2+\ldots>2$$

Что и доказывает справедливость неравенства, а вместе с ним и заключение о более высокой надежности системы при дублировании каждого элемента в сравнении с дублированием всей системы.

Задача П 2.13.

В технической системе дублируются не все элементы, а только наименее надежные. Надежности отдельных узлов представлены на схеме.



Определить надежность всей системы.

$$P=\left[1-(1-p_1)^2\right]\cdot\left[1-(1-p_2)^3\right]\cdot p_3\cdot p_4\cdot\left[1-(1-p_5)^2\right]$$

Задача П 2.14.

Прибор состоит из трех блоков. В первом блоке n_1 элементов, во втором n_2 и в третьем n_3 . Для работы прибора безусловно необходим первый узел, два других узла дублируют друг друга. Надежность всех составляющих элементов одинакова и равна р. Выход из строя одного элемента адекватен выходу из строя соответствующего блока. Элементы выходят из строя независимо друг от друга.

Определить надежность прибора.

Решение.

Надежность первого блока $p_1 = p^{n_1}$

Надежность второго блока $p_2 = p^{n_2}$

Надежность третьего блока $p_3 = p^{n_3}$

Надежность дублированной системы, состоящей из второго и третьего блоков:

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p^{n_2}) \cdot (1 - p^{n_3})$$

Надежность прибора:

$$P = p^{n_1} \cdot \left[1 - (1 - p^{n_2}) \cdot (1 - p^{n_3})\right]$$

П 2.3. Формула полной вероятности

Если до проведения опыта вероятности реализации гипотез H_1, H_2,…, H_n были $P(H_1)$, $P(H_2)$,…, $P(H_n)$, и в результате опыта появилось событие А, то с учетом этого факта «новые», т.е. условные вероятности гипотез вычисляются по формуле Бейеса, которая дает возможность «пересмотреть» априорные вероятности гипотез с учетом результата проведенного опыта:

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)} \qquad (П2.11)$$

Если об обстановке опыта можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) H_1, H_2, …, H_n и если событие A может появиться только при одной из этих гипотез, то вероятность реализации события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right) \qquad (П2.12)$$

Если после опыта, закончившегося появлением события A, производится еще один опыт, в котором может появиться или не появиться событие B, то вероятность (условная) появления этого события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез {P(H_i)}, а новые {$P\left(H_i/A\right)$}:

$$P\left(B/A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i/A\right)\cdot P\left(B/H_iA\right) \qquad (П2.13)$$

Задача П 2.15.

Прибор контроля концентрации водорода в воздухе аккумуляторного цеха может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 70% всех случаев работы прибора за время t, аварийный режим – в 30%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0.001, в аварийном режиме – 0.08. Найти в среде Matlab безусловную вероятность P выхода прибора из строя за время t.

```
HN=0.7;HA=0.3;QN=0.001;QA=0.08;
Q=HN*QN+HA*QA
Q= 0.0247
```

Задача П 2.16.

По железнодорожному мосту следуют грузовые и пассажирские поезда. При следовании пассажирского поезда вероятность поломки моста равна 0.001, при следовании грузового поезда — 0.007. Пассажирские поезда следуют в 80%, грузовые — 20%.

Найти безусловную вероятность поломки моста.

Ответ.

$$P = 0.8 \cdot 0.001 + 0.2 \cdot 0.007 = 0.0022$$

Задача П 2.17.

Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе имеются три контролера и каждое изделие осматривается одним из контролеров, который с вероятностью p_i (i=1, 2, 3) обнаруживает дефект, если он имеется. С цеха изделия поставляются в отдел технического контроля (ОТК) завода, где проверяются все изделия и дефект (если он имеется) обнаруживается с вероятностью p_0.

Определить:

вероятность того, что изделие будет забраковано (событие A);

вероятность того, что изделие будет забраковано контролером в цехе (событие B);

вероятность того, что изделие будет забраковано в ОТК завода (событие C).

Решение [8].

События B и C несовместны и событие A может наступить только в случае реализации события B или события C (изделие может быть забраковано либо контролером, либо в ОТК), т.е. A = B + C, следовательно:

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

Находим вероятность того, что изделие будет забраковано одним из контролеров в цехе. Для этого необходимо, чтобы во-первых изделие было неисправным, и, во-вторых, чтобы этот дефект был обнаружен контролером.

Вероятность того, что данное изделие попадет к данному контролеру равна 1/3, т.е. вероятности $P(H_i) = 1/3$. Вероятность того, что изделие будет забраковано одним из контролеров (при условии, что данное изделие неисправно):

$$P\left(B/H_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \cdot p_i$$

Безусловная вероятность того, что изделие неисправно и будет забраковано контролерами в цехе:

$$P(B) = P \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$$

где Р — вероятность того, что изделие неисправно.

Аналогично:

$$P(C) = P \cdot \left(1 - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \right) \cdot P_0$$

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

Пусть даны числовые значения:

$P=0.001$, $P_1 = 0.8$, $P_2 = 0.7$, $P_3 = 0.9$, $P_0 = 0.8$.

Тогда

$$P(B) = 0.001 \cdot \frac{0.8 + 0.7 + 0.9}{3} = 0.0008$$

$$P(C) = 0.001 \cdot 0.8 \cdot \left(1 - \frac{0.8 + 0.7 + 0.9}{3} \right) = 0.00016$$

Задача П 2.18.

Приборы одного наименования (однотипные приборы) изготавливаются двумя предприятиями. Первое предприятие производит 2/3 всех приборов, поступающих на рынок, второе — 1/3. Надежность (вероятность безотказной работы) приборов первого предприятия равна P_1, второго — P_2.

Определить надежность приборов, приобретаемых на рынке.

Ответ.

$$P = \frac{2}{3} \cdot P_1 + \frac{1}{3} \cdot P_2$$

Задача П 2.19.

Имеется две партии однотипных изделий. Первая партия состоит из N изделий, среди которых n дефектных. Вторая партия состоит из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берется случайным образом K изделий, из второй партии берется L (K<N, L<M). Эти K+L изделий смешиваются и образуется новая партия, из которой наугад берется одно изделие.

Найти вероятность того, что это изделие будет дефектным.

Решение.

Пусть событие A состоит в том, что выбрано дефектное изделие.

Гипотеза H_1 — изделие принадлежало первой партии,

Гипотеза H_2 — изделие принадлежало второй партии.

$$P(H_1) = \frac{K}{K+L}, \qquad P(H_2) = \frac{L}{K+L}$$

$$P(A) = \frac{n}{N} \cdot \frac{K}{(K+L)} + \frac{m}{M} \cdot \frac{L}{(K+L)}$$

Задача П 2.20.

Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов. Прибор работает в воде и в воздухе. Надежность прибора при работе в воздухе равна p_1, при работе в воде — p_2.

Вероятность того, что прибор будет работать в воздухе равна W, вероятность того, что прибор будет работать в воде равна (1-W).

Примечание. W может быть заменена отношением числа включений прибора в воздухе к общему числу включений прибора.

Требуется определить надежность прибора.

Ответ.

$$P = W\left[1-(1-p_1)^2\right] + (1-W)\cdot\left[1-(1-p_2)^2\right]$$

Задача П 2.21.

Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора. Надежность (вероятность безотказной работы прибора в течение времени t) первого узла равна p_1, второго — p_2. Прибор испытывается в течение времени t, в результате испытания прибор отказал.

Требуется определить вероятность того, что отказал первый узел, а второй остался исправным.

Решение [8].

До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 — исправны оба узла;

H_1 — отказал первый узел, второй — исправен;

H_2 — отказал второй узел, первый — исправен;

H_3 — отказали оба узла.

Вероятности реализации гипотез:

$$P(H_0) = p_1 \cdot p_2 \quad \textit{исправны оба узла}$$
$$P(H_1) = (1-p_1)\cdot p_2 \quad \textit{первый узел отказал, второй} - \textit{исправен}$$
$$P(H_2) = p_1 \cdot (1-p_2) \quad \textit{первый узел исправен, второй} - \textit{отказал}$$
$$P(H_3) = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\ \textit{отказали оба узла}$$

Вероятность того, что наблюдалось событие А — прибор отказал:

$$P\left(A/H_0\right) = 0,$$

$$P\left(A/H_1\right) = P\left(A/H_2\right) = P\left(A/H_3\right) = 1$$

Формула Бейеса:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{(1-p_1)\cdot p_2}{(1-p_1)\cdot p_2+p_1\cdot(1-p_2)+(1-p_1)\cdot(1-p_2)}=$$

$$=\frac{(1-p_1)\cdot p_2}{1-p_1\cdot p_2}$$

Задача П 2.22.

Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй — с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает в отдел технического контроля завода (ОТК), где изделие, если оно имеет дефект, бракуется с вероятностью p_0.

Директору предприятия приносят бракованное изделие. Директор дает команду рассчитать вероятность того, что изделие забраковано:

1) первым контролером,

2) вторым контролером,

3) ОТК завода.

Решение [8].

До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 — дефектное изделие не забраковано;

H_1 — изделие забраковано первым контролером;

H_2 — изделие забраковано вторым контролером;

H_3 — изделие забраковано ОТК завода.

Вероятность реализации события A состоит в том, что изделие забраковано $P\left(A/H_0\right)=0$

Поскольку изделие в цехе осматривается первым или вторым контролером с вероятностью ½, то априорные вероятности реализации гипотез:

$$P(H_1)=\frac{p_1\cdot p}{2};$$

$$P(H_2)=\frac{p\cdot p_2}{2};$$

$$P(H_3)=p\cdot\left(1-\frac{p_1+p_2}{2}\right)\cdot p_0$$

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)}{P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)}=$$

$$=\frac{p_1}{2\cdot p_0+(p_1+p_2)\cdot(1-p_0)}$$

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{p_2}{2\cdot p_0+(p_1+p_2)\cdot(1-p_0)}$$

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{p_0\cdot[2-(p_1+p_2)]}{2\cdot p_0+(p_1+p_2)\cdot(1-p_0)}$$

П 2.4. Повторение опытов.

Частная теорема о повторении опытов.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них событие А появляется с вероятностью p, то вероятность P_n^m того, что событие А реализуется в этих n опытах ровно m раз, выражается биномиальным распределением вероятностей:

$$P_n^m=C_n^m\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m} \tag{П2.14}$$

где C_n^m - число сочетаний из n элементов по m.

Часто можно встретить эту формулу с использованием равенства $1-p=q$.

Вероятность того, что в этих n опытах событие А произойдет хотя бы один раз определяется формулой:

$$P_n^{\geq 1}=1-q^n=1-(1-p)^n \tag{П2.15}$$

Общая теорема о повторении опытов.

Если производится n независимых опытов в различных условиях, причем вероятность события А в i–м опыте равна p_i (i=1,2,…,n), то вероятность P_n^m того, что событие А появится в этих опытах ровно m раз, равна коэффициенту при z^m в разложении по степеням z производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i \cdot z)\,, \quad где \quad q_i = 1 - p_i \tag{П2.16}$$

Вероятность хотя бы одного появления события А при n независимых опытах в различных условиях равна:

$$P_n^{\geq 1} = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \tag{П2.17}$$

Для любых условий (одинаковых и различных) выполняется условие:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1 \tag{П2.18}$$

Вероятность $P_n^{\geq k}$ того, что при n опытах событие А появится не менее k раз, выражается формулой:

$$P_n^{\geq K} = \sum_{m=K}^{n} P_n^m\,, \qquad P_n^{\geq K} = 1 - \sum_{m=0}^{K-1} P_n^m \tag{П2.19}$$

где P_n^m определяется по формуле (П2.14).

Задача П 2.23.

Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла одинакова и равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого.

Найти вероятность того, что за время t :

а) не откажет хотя бы один узел;

в) не откажет ровно один узел;

с) не откажет ровно два узла;

d) не откажет не менее двух узлов.

Решение [8]

а) $P_{10}^{\geq 1} = 1 - q^{10}$

в) $P_{10}^{1} = C_{10}^{1} \cdot p \cdot q^{9} = 10 \cdot p \cdot q^{9}$

с) $P_{10}^{2} = C_{10}^{2} \cdot p^{2} \cdot q^{8} = 45 \cdot p^{2} \cdot q^{8}$

d) $P_{10}^{\geq 2} = 1 - q^{10} - 10 \cdot p \cdot q^{9} = 1 - q^{9} \cdot (q + 10 \cdot p)$

Задача П 2.24.

Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре изделия дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p. Для контроля из продукции завода выбирается n изделий.

Определить вероятности реализации следующих событий:

A — ни в одном изделии не будет обнаружен дефект;

B — среди n изделий ровно в двух будет обнаружен дефект;

C - среди n изделий не менее чем в двух будет обнаружен дефект.

Решение [8]

Вероятность того, что в одном наугад выбранном изделии будет обнаружен дефект равна произведению (p·r), тогда:

$$P(A) = P_n^0 = (1 - p \cdot r)^n$$

$$P(B) = P_n^2 = C_n^2 \cdot (p \cdot r)^2 \cdot (1 - p \cdot r)^{n-2}$$

$$P(C) = 1 - P_n^0 - P_n^1 = 1 - (1 - p \cdot r)^{n-1} \cdot \left[(1 - p \cdot r) + n \cdot p \cdot r\right]$$

Задача П 2.25.

В течение времени t эксплуатируется N приборов. Каждый прибор имеет надежность p и выходит из строя независимо от других. Найти вероятность P(A) того, что мастер, вызванный по окончании времени t для ремонта неисправных приборов, не справится со своей задачей за время τ, если на ремонт каждого прибора мастеру требуется время τ_0.

Решение.

$$P(A)=\sum_{m=l+1}^{N} C_N^m \cdot (1-p)^m \cdot p^{(N-m)},$$

$$где\, l = \left]\frac{\tau}{\tau_0}\right[наибольшее\, целое\;\; число$$

Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x), выражающая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем константа x:

$$F(a)=P(X<a) \tag{П2.20}$$

Функция F (x) есть неубывающая функция, F (- ∞) = 0, F (+ ∞) = 1.

Плотностью распределения случайной величины называется функция

$$f(a)=F'(a) \tag{П2.21}$$

Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна:

$$f(a)\ge 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi = 1 \tag{П2.22}$$

График плотности f(a) называется кривой распределения.

Элементом вероятности для случайной величины X называется величина f(a)da, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок da, примыкающий к этой точке.

Функция распределения случайной величины F(a) выражается через плотность распределения формулой:

$$F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(\xi)\, d\xi \qquad (П2.23)$$

Вероятность W попадания случайной величины X на участок, протяженностью от α до β, включая α, выражается формулой:

$$W(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \qquad (П2.24)$$

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$$M[X] = \sum_i \xi_i \cdot p_i \qquad (П2.25)$$

для дискретных случайных величин,

где ξ_i — значение случайной величины,

p_i — вероятность реализации значения ξ_I .

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot f(\xi) d\xi \qquad (П2.26)$$

для непрерывных случайных величин

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Для дискретных случайных величин:

$$D[X] = \sum_i \left(\xi_i - M[X]\right)^2 \cdot p_i \qquad (П2.27)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\xi - M[X])^2 \cdot f(\xi) d\xi \qquad (П2.28)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} \tag{П2.29}$$

Центрированной случайной величиной $\dot{X}$ называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием m_x:

$$\dot{X} = X - M(X) \tag{П2.30}$$

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k[X] = M[X^k] \tag{П2.31}$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины:

$$\mu_k[X] = M[\dot{X}^k] = M[(X - m_x)^k] \tag{П2.32}$$

Биномиальный закон распределения числа n появления события А в n независимых опытах.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если она может принимать значения 0,1,2,…n, а вероятность того, что X = m < n выражается формулой:

$$P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m} \tag{П2.33}$$

где P_n^m — вероятность появления m событий при проведении n испытаний,

C_n^m — число сочетаний из n по m,

p — вероятность появления события А в одном испытании;

q = 1-p — вероятность непоявления события А.

Биномиальное распределение отличается следующими свойствами:

математическое ожидание числа событий (при проведении n испытаний) равно M[X] = n·p;

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \tag{П2.34}$$

При увеличении числа испытаний биномиальное распределение приближается к нормальному со средним значением:

$$M[X] = \frac{m}{n} \tag{П2.35}$$

и дисперсией

$$D[X] = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \tag{П2.36}$$

Закон Пуассона.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона, если ее возможные значения 0, 1, 2,…, n,…, а вероятность того, что X=n выражается зависимостью:

$$P(X = n) = P_n = \frac{a^n}{n!} \cdot \exp(-a) \tag{П2.37}$$

где a > 0 — параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, вычисляются по формулам:

$$M[X] = a, \qquad D[X] = a \tag{П2.38}$$

$$a(t) = \int_0^t \lambda(\xi) d\xi \tag{П2.39}$$

где $\lambda(\xi)$ — функция интенсивности появления случайного события.

Вероятность числа n реализаций за время t случайных событий, распределенных по закону Пуассона, при $\lambda(t)$ = const = λ вычисляется по формуле:

$$P_n(\lambda \cdot t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \qquad (П2.40)$$

где λ — интенсивность появления случайного события, равная среднему числу реализации событий в единицу времени;

$\lambda \cdot t = a$ — среднее число событий, реализовавшихся за время t.

Характерным признаком распределения Пуассона является равенство математического ожидания и дисперсии

($M[X] = \lambda \cdot t$, $D[X] = \lambda \cdot t$).

Функция вида:

$$\begin{aligned} &f_S(x) = a \cdot x^S \cdot \exp(-\varphi^2 \cdot x^2) \qquad &при \quad x > 0, \\ &f_S(x) = 0 &при \quad x < 0 \end{aligned} \qquad (П2.41)$$

где $a>0$, $\varphi>0$ — некоторые постоянные,

S — натуральное число

обладает свойствами плотности распределения. Некоторые из законов распределения случайных величин типа $f_S(x)$ имеют определенные названия, например:

$f_1(x)$ — называется законом Релея,

$f_2(x)$ — называется законом Максвелла.

Для закона Релея:

$$\begin{aligned} &f_1(x) = a \cdot x \cdot \exp\left(-\varphi^2 \cdot x^2\right) \qquad &при \quad x > 0 \\ &f_1(x) = 0 &при \quad x < 0 \end{aligned} \qquad (П2.42)$$

$$\varphi = \frac{1}{M[X]} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$a = 2 \cdot \varphi^2 = \frac{\pi}{2 \cdot M^2[X]}; \qquad (\Pi 2.43)$$

$$D_x = M^2[X] \cdot \left[\frac{4}{\pi} - 1\right]$$

Для закона Максвелла:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a \cdot x^2 \cdot \exp(-\varphi^2 \cdot x^2) \qquad \text{при} \quad x > 0 \\ f_2(x) &= 0 \qquad \text{при} \quad x < 0 \end{aligned} \qquad (\Pi 2.44)$$

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{2}{M[X] \cdot \sqrt{\pi}}; \quad a = \frac{4 \cdot \varphi^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 \cdot M^3[X]}; \\ &D[X] = M^3[X] \cdot \left(\frac{3 \cdot \pi}{8} - 1\right) \end{aligned} \qquad (\Pi 2.45)$$

Все законы вида:

$$\begin{aligned} f_S(x) &= a \cdot x^S \cdot \exp(-\varphi^2 \cdot x^2) \qquad \text{при} \quad x > 0, \\ f_S(x) &= 0 \qquad \text{при} \quad x < 0 \end{aligned} \qquad (\Pi 2.46)$$

являются однопараметрическими, т.е. зависят только от одного параметра, в качестве которого можно задать, например, математическое ожидание или дисперсию.

Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины.

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной в интервале (α, β), если ее плотность распределения на этом интервале постоянна:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \quad при \quad x \in (\alpha, \beta) \\ f(x) = 0 \;\; в \;\; противном \; случае \end{cases} \tag{П2.47}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины при ее равномерном распределении соответственно равны:

$$M[X] = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad D[X] = \frac{(a-b)^2}{12} \tag{П2.48}$$

Вывод формулы (2.48).

По определению:

дисперсия $D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)\,dx$

$$D[X] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\beta - \alpha} dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{2 \cdot x \cdot (\beta + \alpha)}{2} dx +$$

$$+ \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{(\beta + \alpha)^2}{4} \cdot \frac{dx}{(\beta - \alpha)} =$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^3}{3 \cdot (\beta - \alpha)} - \frac{(\beta + \alpha) \cdot (\beta - \alpha)^2}{2 \cdot (\beta - \alpha)} +$$

$$+ \frac{(\beta + \alpha)^2 \cdot (\beta - \alpha)}{4 \cdot (\beta - \alpha)} =$$

Поскольку случайная величина распределена равномерно на интервале (α, β), то:

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{3} - \frac{\beta^2-\alpha^2}{2} + \frac{(\beta+\alpha)^2}{4} =$$

$$= \frac{4\cdot(\beta-\alpha)^2 - 6\cdot(\beta^2+\alpha^2) + 3\cdot(\beta+\alpha)^2}{12} =$$

$$= \frac{4\cdot\beta^2 - 8\cdot\alpha\cdot\beta + 4\cdot\alpha^2 - 6\cdot\alpha^2 + 3\cdot\beta^2 + 6\cdot\alpha\cdot\beta + 3\cdot\alpha^2}{12} =$$

$$= \frac{\beta^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \alpha^2}{12} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Нормальный закон распределения случайных величин.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если плотность ее распределения подчинена зависимости:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-M[X])^2}{2\cdot\sigma^2}\right] \tag{П2.49}$$

где: m — математическое ожидание случайной величины;

$D = \sigma^2$ — ее дисперсия.

Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервале (α, β) выражается формулой:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi^*(z1) - \Phi^*(z2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{z1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt - \int_{-\infty}^{z2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right] \tag{П2.50}$$

$$z1 = \frac{\beta - m}{\sigma} \tag{П2.51}$$

$$z2 = \frac{\alpha - m}{\sigma} \tag{П2.52}$$

$$\boldsymbol{\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt} \tag{П2.53}$$

Функция Ф*(x) — табулированная функция Лапласа.

На практике бывает удобнее пользоваться аппроксимацией координатного закона поражения Ф.А. Евстифеевым.

$$W(-\infty < X < x) = F_0(|y|) \pm 0.5 \quad (П2.54)$$

$$F_0(|y|) = 0.5 \cdot \left[1 - \exp\left(-0.37 \cdot y^2 - 0.8 \cdot |y|\right)\right] \quad (П2.55)$$

где $y = \dfrac{x - m}{\sigma}$ — нормированное отклонение случайной величины X.

В (2.54) принимается знак (-), если величина «y» отрицательна и (+) в противном случае.

Распределение Вейбулла.

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{c}{b} \cdot \left[\frac{x-\theta}{b}\right]^{(c-1)} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-\theta}{b}\right)^c\right] \quad (П2.56)$$

где $\theta < x,\ b > 0,\ c > 0$

Функция распределения (функция отказов или ненадежности):

$$F(x) = 1 - \exp\left|-\left(\frac{x-\theta}{b}\right)^c\right| \quad (П2.57)$$

Функция надежности:

$$P(x) = 1 - F(x)$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{c \cdot (t-\theta)^{(c-1)}}{b^c} \quad (П2.58)$$

Для начального этапа эксплуатации технических систем распределение Вейбулла используется для расчета вероятности безотказной работы системы в течение времени t. Для этих целей можно принять значения:

$\theta = 0,\ b \geq 1,\ c \cong 0.5,\ t \in [0, t_1]$

где t_1 — окончание этапа приработки технической системы.

Ниже приведен пример изменения интенсивности отказов (рис. П2.1), подчиненных распределению Вейбулла с определенными выше значениями констант.

$$c := 0.5 \qquad b := 1 \qquad t := 0..5 \qquad l(t) := c \cdot \frac{t^{(c-1)}}{b^c}$$

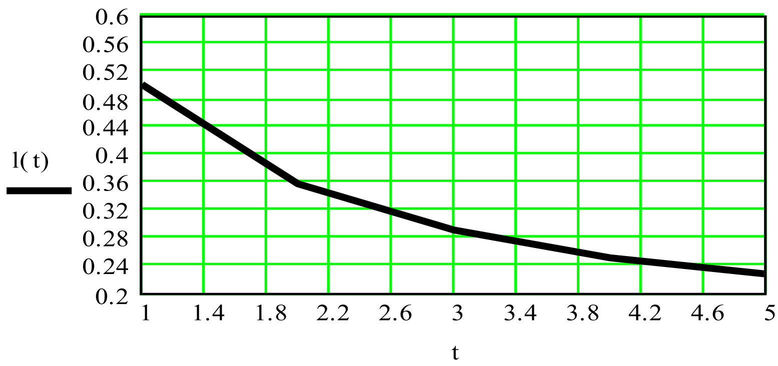


Рис. П 2.1. Изменение интенсивности отказов на начальном этапе эксплуатации системы.

Задача П 2.26.

Производится три независимых испытаний приборов, в каждом из которых неисправность (событие A) появляется с вероятностью 0.4. Рассматривается случайная величина X — число выявленных неисправностей в трех опытах.

Необходимо построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти ее математическое ожидание M[X], дисперсию D[X], среднее квадратическое отклонение σ_x и третий центральный момент $\mu_3[X]$.

Решение [8].

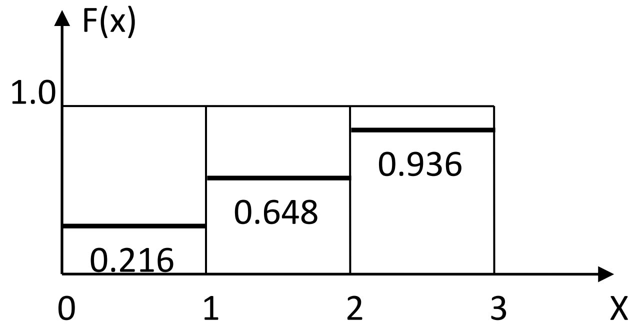
Введем обозначения:

x_i — число неисправностей, обнаруженных в трех испытаниях;

p_i — вероятность того, что в результате трех испытаний будет обнаружено ровно x_i неисправностей.

Эта вероятность рассчитывается по формуле (П2.33) биномиального закона распределения дискретных случайных величин. Тогда ряд распределения дискретной случайной величины и функция распределения имеют вид:

x_i	0	1	2	3
0.4^{X_i}	1	0.4	0.16	0.064
$\tilde{N}_3^{X_i}$	1	3	3	1
$(1-0{,}4)^{(3-X_i)}$	0.216	0.36	0.6	1
p_i	0.216	0.432	0.288	0.064
F(x)	0	0+0.216=0.216	0.216+0.432= 0.648	0.648+0.288= 0.936



Математическое ожидание

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1.2$$

Дисперсия

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[X])^2 \cdot p_i = 0.72;$$

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = 0.85$$

Третий центральный момент

$$\mu_3[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[X])^3 \cdot p_i = 0.144$$

Задача П 2.27.

Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A. Рассматривается случайная величина λ — частота появления события A в n опытах, т.е. отношение числа появления события A к общему числу n произведенных опытов.

Найти ряд распределения случайной величины λ, найти ее математическое ожидание, дисперсию.

Решение.

Пусть q = 1 - p;

Тогда M[λ]= p; $D[\lambda] = \frac{p \cdot q}{n}$,

Ряд распределения случайной величины имеет вид:

λ	0	1/n	…	m/n	…	1
p_λ	q^n	$C_m^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	…	$C_m^n \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	…	p^n

Задача П 2.28.

При работе ЭВМ иногда возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1.5.

Определить вероятности следующих событий:

A — за двое суток не произойдет ни одного сбоя;

B — в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

C — за неделю (7 суток) работы ЭВМ произойдет не менее трех сбоев.

Решение.

Вероятность возникновения N сбоев за время T определяется по закону Пуассона выражением:

$$Q(N, \lambda \cdot T) = \frac{(\lambda \cdot T)^N}{N!} \cdot \exp(-\lambda \cdot T)$$

$$Q(A) = Q(N = 0, \lambda \cdot 2) = \exp(-1.5 \cdot 2) = 0.04978$$
$$Q(B) = 1 - Q(0, \lambda \cdot 1) = 1 - \exp(-1.5 \cdot 1) =$$
$$= 1 - 0.2231 = 0.7768$$
$$Q(C) = 1 - [Q(N = 0, \lambda \cdot 7) + Q(N = 1, \lambda \cdot 7) + Q(N = 2, \lambda \cdot 7)] =$$
$$= 1 - 1.8336 \cdot 10^{-3} = 0.99817$$

Задача П 2.29.

Электронная лампа работает исправно в течение случайного значения времени Т, распределенного по показательному закону:

f(t) = 0 при t < 0

$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ при t > 0.

По истечении времени Т лампа выходит из строя, после чего она немедленно заменяется на новую.

Определить вероятности того, что за время τ

лампу придется менять не менее трех раз.

Решение.

Отказы ламп образуют простейший поток с плотностью λ. Математическое ожидание числа отказов а за время τ равно $a = \lambda \cdot \tau$.

$$P_0 = \exp(-\lambda \cdot \tau),$$

$$P(N = 3) = \left(\frac{[\lambda \cdot \tau]^3}{3!} \right) \cdot \exp(-\lambda \cdot \tau),$$

$$P(N \geq 3) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) ==$$
$$1 - \exp(-\lambda \cdot \tau) \cdot \left[1 - \lambda \cdot \tau - \frac{(\lambda \cdot \tau)^2}{1 \cdot 2} \right]$$

Задача П 2.30.

Техническое устройство состоит из трех узлов. В первом узле работает n_1 элементов, во втором — n_2, в третьем — n_3.

Первый узел безусловно необходим для работы устройства, второй и третий — дублируют друг друга. Время работы каждого элемента распределено по показательному закону. Среднее время работы элемента, входящего в первый узел равно t_{1CP},среднее время работы элементов, входящих во второй и третий узлы — t_{2CP}.

Первый узел выходит из строя, если в нем отказало не менее двух элементов, второй (третий) — при выходе из строя хотя бы одного элемента.

Для выхода из строя устройства в целом достаточно, чтобы отказал первый узел или второй и третий вместе.

Найти вероятность того, что за время τ техническое устройство выйдет из строя.

Решение.

Пусть Q — вероятность выхода из строя устройства,

Q_1 — вероятность выхода из строя первого узла,

Q_2 — вероятность выхода из строя второго узла,

Q_3 — вероятность выхода из строя третьего узла;

q_1, q_2, q_3 — вероятности выхода из строя одного элемента соответствующего i-го узла.

Тогда вероятность выхода из строя устройства равна:

$$Q = Q_1 + (1 - Q_1) \cdot Q_2 \cdot Q_3$$

Вероятность выхода из строя первого узла за время τ:

$$Q_1 = 1 - (1 - q_1)^{n_1} - n_1 \cdot q_1 \cdot (1 - q_1)^{n_1 - 1}$$

Вероятность выхода из строя одного элемента соответствующего узла за время τ:

$$q_1 = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{t_{1CP}}\right); \qquad q_2 = q_3 = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{t_{2CP}}\right)$$

Вероятности Q_2, Q_3 выхода из строя второго и третьего узлов рассчитываются по формулам:

$$Q_2 = 1 - (1 - q_2)^{n_2}; \qquad Q_3 = 1 - (1 - q_3)^{n_3}.$$

Ниже приведено решение этой задачи в Matlab

T1cp=7000;T2cp=10000;T3cp=8000; n1=4;n2=2;n3=1; t=1000;

q1=1-exp(-t/T1cp); ненадежность одного элемента из первой группы

q2=1-exp(-t/T2cp);); ненадежность одного элемента из второй группы

q3=1-exp(-t/T3cp);); ненадежность одного элемента из третьей группы

Q2=1-(1-q2)^n2;вероятность отказа второго устройства

Q3=1-(1-q3)^n3; вероятность отказа третьего устройства

Q1=1-(1-q1)^n1-n1*q1*(1-q1)^(n1-1);вероятность отказа первого устройства

[Q1 Q2 Q3] вероятности отказов первого, второго и третьего устройств

QC=Q1+(Q1)*Q2*Q3вероятность отказа системы

ans =0.0884   0.1813   0.1175

QC = 0.0903

Задача П 2.31[14].

Автомашина проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время осмотра, распределено по закону Пуассона с параметром a. Если неисправность не обнаружена, осмотр машины продолжается в среднем 2 часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится еще полчаса. Если обнаружено более двух неисправностей, машина ставится на ремонт, где она находится в среднем 4 часа.

Определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта машины, определить его математическое ожидание.

Решение.

Индекс i	0	1	2	3
Число неисправностей	0	1	2	Более 2 ^{x}

T_i	2	2.5	3	6
p_i	exp(-a)	$a \cdot \exp(-a)$	$\frac{a^2}{2} \cdot \exp(-a)$	$1-\exp(-a) \cdot \left(1+a+\frac{a^2}{2}\right) = 1-\sum_{i=0}^{2} p_i$

Математическое ожидание времени ремонта и обслуживания:

$$M[T] = \sum_{i=0}^{3} T_i \cdot p_i$$

$$M[T] = \exp(-a) \cdot \left(2 + a \cdot 2.5 + \frac{a^2}{2} \cdot 3\right) +$$

$$+ 6 \cdot \left(1 - \exp(-a) \cdot \left[1 + a + \frac{a^2}{2}\right]\right) =$$

$$= 6 - \exp(-a) \cdot \left(4 + 3.5 \cdot a + 1.5 \cdot a^2\right)$$

Числовые характеристики функций случайных величин.

Если X — дискретная случайная величина с рядом распределения

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

и величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание случайной величины Y равно:

$$m_y = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i \,, \tag{П2.59}$$

при этом дисперсия выражается любой из двух следующих формул:

$$D_y = D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_y]^2 \cdot p_i$$

$$\text{или} \quad D_y = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 \cdot p_i - m_y^2 \tag{П2.60}$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения f(x), а Y=φ(X), то математическое ожидание величины Y равно:

$$m_y = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta) \cdot f(\zeta)\, d\zeta \qquad (\Pi 2.61)$$

Дисперсия определяется с помощью одной из следующих двух формул:

$$D_y = D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(\zeta) - m_y\right]^2 \cdot f(\zeta)\, d\zeta,$$

$$или \quad D_y = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\zeta)]^2 \cdot f(\zeta) d\zeta - m_y^2$$

Теорема сложения математических ожиданий.

Математическое ожидание суммы случайных величин определяется по формуле:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] \qquad (\Pi 2.62)$$

Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин:

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b$, где a_i и b — не случайные коэффициенты, равно той же линейной функции от их (случайных величин линейной функции) математических ожиданий:

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot M[X_i] + b, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (\Pi 2.63)$$

Теорема умножения математических ожиданий.

Математическое ожидание произведения двух коррелированных случайных величин X, Y выражается формулой:

$$M\left[X \cdot Y\right] = M\left[X\right] \cdot M\left[Y\right] + K_{XY}, \qquad (\Pi 2.64)$$

где K_{XY} — корреляционный момент величин X, Y.

Эту формулу можно записать в ином виде:

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y] \tag{П2.65}$$

Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин X, Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] \tag{П2.66}$$

Если X_1, X_2, …, X_n — независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i] \tag{П2.67}$$

Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2 \cdot K_{XY} \tag{П2.68}$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D_{X_i} + 2 \cdot \sum_{i<j} K_{X_i X_j} \tag{П2.69}$$

где K_{xy} — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j.

Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин X_i равна сумме их дисперсий:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] \tag{П2.70}$$

Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b$$

где a_i, b — не случайные величины, выражается формулой:

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot D[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} a_i \cdot a_j \cdot K_{X_i X_j} \tag{П2.71}$$

В случае, когда X_1 , X_2 , …, X_n не коррелированы,

$$D_Y = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot D[X_i] \tag{П2.72}$$

При сложении некоррелированных случайных векторов их корреляционные моменты складываются, т.е. если

$$\begin{aligned} &X = X_1 + X_2; \\ &Y = Y_1 + Y_2; \\ &K_{X_1 Y_2} = K_{Y_1 Y_2} = K_{Y_1 X_2} = 0, \quad \text{то} \\ &K_{XY} = K_{X_1 Y_1} + K_{X_2 Y_2} \end{aligned} \tag{П2.73}$$

Задача П2.32.

Тело взвешивается на аналитических весах. Истинное (неизвестное нам) значение веса равно а. Вследствие ошибок результат каждого взвешивания случаен и взвешенное значение распределено по нормальному закону с параметрами а, σ.

Для уменьшения ошибок пользуются следующим приемом: взвешивают тело n раз и в качестве приближенного значения веса берут среднее арифметическое:

$$Y^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

а) Найти характеристики случайной величины $Y^{(n)}$ (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение).

б) Сколько нужно сделать взвешиваний, чтобы уменьшить среднюю квадратическую ошибку веса в десять раз.

Решение[8]

а) $M\left[Y^{(n)}\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}[X_i]$

Поскольку все взвешивания производятся в одинаковых условиях, то $M[X_i]=a$ при любом i,

$$M\left[Y^{(n)}\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a=\frac{n\cdot a}{n}=a$$

Считая ошибки отдельных взвешиваний независимыми, находим дисперсию величины $Y^{(n)}$:

$$D\left[Y^{(n)}\right]=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D[X_i]=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=$$

$$=\frac{n\cdot\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

Число взвешиваний n находим из условия:

$$\sigma\left[Y^{(n)}\right]=\sqrt{D\left[Y^{(n)}\right]}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Для уменьшения среднеквадратической ошибки в десять раз необходимо выбрать значение n = 100 ($\sqrt{100}=10$).

Задача П 2.33.

При работе прибора возникают случайные неисправности. Среднее число неисправностей, возникающих в единицу времени работы прибора, равно λ. Число неисправностей за время τ работы прибора — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $a=\lambda\cdot\tau$. Для ликвидации возникшей неисправности (ремонта) требуется случайное время $T_{рем}$. Это время ремонта распределено по показательному закону:

$$f(t)=\mu\cdot\exp(-\mu\cdot t) \qquad при \quad t>0$$
$$f(t)=0 \qquad при \quad t<0$$

Времена устранения неисправностей неизвестны.

Найти:

а) среднюю долю времени, которую прибор будет исправно работать, и среднюю долю времени, которую он будет находиться в ремонте;

б) средний интервал времени между двумя последовательными неисправностями.

Решение.

Среднее время исправной работы (математическое ожидание времени, которое проработает прибор после пуска до остановки для ремонта) равно:

$$\bar{t}_{исп} = \frac{1}{\lambda}$$

Среднее время ремонта:

$$\bar{t}_{рем} = \frac{1}{\mu}$$

Средняя доля α времени, которую прибор будет работать исправно:

$$\alpha = \frac{\bar{t}_{исп}}{\bar{t}_{исп} + \bar{t}_{рем}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Средняя доля β времени, которую прибор будет находиться в ремонте:

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Средний интервал времени $\bar{t}$ между двумя последовательными неисправностями определяется по теореме сложения математических ожиданий (математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий):

$$\bar{t} = \bar{t}_{исп} + \bar{t}_{рем} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \cdot \mu}$$

Задача П 2.34.

В партии выпущенных изделий оказались смешанными а исправных и в неисправных изделий. Со склада без дополнительной проверки выбирается (берется сразу) k ≤ (a + b) изделий.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа исправных изделий в составе выбранной партии.

Решение.

Пусть X — число выбранных исправных изделий

$$X = \sum_{i=1}^{k} x_i ,$$

где x_i — число исправных изделий, появившихся при i-м изъятии со склада.

$$P(x_i = 0) = \frac{b}{a+b}; \qquad P(x_i = 1) = \frac{a}{a+b};$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{k} M[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \frac{a}{a+b} = \frac{k \cdot a}{a+b}$$

Для нахождения дисперсии D[X] найдем выражения для $D[X_i]$ и $K_{xi,}$

$$D[X_i] = \left\lfloor \frac{a}{a+b} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{b}{a+b} \right\rfloor = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2}$$

Напомним основные соотношения:

$$K_{Xi,Xj} = M[X_i \cdot X_j] - m_{Xi} \cdot m_{Xj}$$

$$D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} K_{Xi,Xj}$$

Построим таблицу распределения вероятностей для пары случайных величин X_i , X_j .

X_j X_i	0	1
0	$\frac{b \cdot (b-1)}{(a+b) \cdot (a+b-1)}$	$\frac{a \cdot b}{(a+b) \cdot (a+b-1)}$

1	$\frac{a \cdot b}{(a+b)\cdot(a+b-1)}$	$\frac{a\cdot(a-1)}{(a+b)\cdot(a+b-1)}$

Имеем:

$$M[X_i \cdot X_j] = 1 \cdot P(X_i = 1) \cdot P(X_j = 1) = \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{(a-1)}{(a+b-1)}$$

$$K_{Xi,Xj} = \frac{a\cdot(a-1)}{(a+b)\cdot(a+b-1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} =$$

$$= -\frac{a \cdot b}{(a+b)^2 \cdot (a+b-1)}$$

Далее можно найти дисперсию случайной величины X:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{k} D[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} K_{Xi,Xj}$$

Поскольку дисперсии $D[X_i]$ и корреляционные моменты $K_{Xi,Xj}$ все одинаковы, то:

$$D[X] = k \cdot D[X_i] + 2 \cdot C_k^2 \cdot K_{Xi,Xj} =$$

$$= \frac{k \cdot a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a+b-k)}{(a+b-1)}$$

В частном случае, когда выбираются все изделия (k = a + b), получим естественный результат:

$$m_X = k \cdot \frac{a}{(a+b)} = \frac{(a+b)\cdot a}{(a+b)} = a; \qquad D[X] = 0.$$

Задача П 2.35.

Техническое устройство состоит из n узлов. Каждый узел может выходить из строя независимо от других. Узлы выходят из строя только последовательно, по одному. Время исправной работы i-го узла распределено по показательному закону с параметром λ_i :

$$f_i(t) = \lambda_i \cdot \exp(-\lambda_i \cdot t) \qquad \text{при} \quad t > 0$$
$$f_i(t) = 0 \qquad \text{при} \quad t < 0$$

Каждый узел, оказавшийся неисправным, немедленно заменяется новым и поступает в ремонт. Ремонт узлов производится последовательно, по одному. Ремонт i-го узла продолжается случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ_i:

$$\varphi_i(t) = \mu_i \cdot \exp(-\mu_i \cdot t) \qquad \text{при} \quad t > 0$$
$$\varphi_i(t) = 0 \qquad \text{при} \quad t < 0$$

Устройство работает в течение времени τ.

Требуется определить:

а. Математическое ожидание и дисперсию числа узлов, подлежащих замене.

б. Математическое ожидание суммарного времени T, которое будет затрачено на ремонт вышедших из строя узлов.

Решение[8]

а. Обозначим через X_i число узлов i-го типа, вышедших из строя за время τ. Очевидно, что эта случайная величина распределена по закону Пуассона и имеет:

математическое ожидание $m_{Xi} = \lambda_i \cdot \tau$

дисперсию $D[X_i] = \lambda_i \cdot t$.

Обозначим через X общее число узлов, вышедших из строя за время τ. Тогда имеем:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \tau \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Поскольку величины X_i независимы, то:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \tau \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

б. Обозначим через T_i общее время, затраченное на ремонт всех вышедших из строя за время τ узлов i-го типа. Оно представляет собой сумму времен, затраченных на ремонт каждого из узлов. Поскольку число вышедших из строя узлов i-го типа равно X_i , имеем:

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \cdots + T_i^{(Xi)} = \sum_{k=1}^{X_i} T_i^{(k)} ,$$

где $T_i^{(k)}$— случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром μ_i.

Величины $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \ldots, T_i^{(Xi)}$ — независимы.

Найдем математическое ожидание величины T_i. Для этого вначале предположим, что случайная величина X_i приняла определенной значение, тогда:

$$m_{ti}(m) = \sum_{k=1}^{m} M[T_i^{(k)}] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\mu_i} = \frac{m}{\mu_i}$$

Умножив это условное математическое ожидание на вероятность P_m того, что случайная величина X_i приняла значение m, и просуммировав все эти произведения, мы найдем полное (безусловное) математическое ожидание величины T_i:

$$m_{ti} = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cdot \frac{m}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P_m = \frac{1}{\mu_i} M[X_i] = \frac{\lambda_i \cdot \tau}{\mu_i}$$

Применяя далее теорему сложения математических ожиданий, получим:

$$M[T] = \tau \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Замечание.

Тот же результат можно получить путем следующих (не вполне строгих) рассуждений. Среднее число выходов из строя узлов i-го типа за время τ равно $\lambda_i \cdot \tau$. Среднее время ремонта одного узла i-го типа равно $1/\mu_i$, а среднее время, которое будет затрачено на ремонт всех вышедших за время τ узлов i-го типа равно $\frac{\lambda_i \cdot \tau}{\mu_i}$.

Тогда среднее время, которое будет затрачено на ремонт узлов всех типов будет равно:

$$\tau \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие составлено по материалам последних публикаций по теории надежности технических систем, в прикладном ее аспекте.

В отличие от предыдущего издания (2010 г.) в пособии исключены материалы, не вошедшие в курс лекций ни на факультете безопасности, ни на инженерно-строительном факультете Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сокращено число задач, относящихся к проверке знаний по теории вероятностей, исключены задачи, связанные с расчетами параметров случайных функций.

Вместе с тем в пособие добавлен раздел логико-вероятностных методов оценки надежности, без которых определение надежности систем сложных структур было бы весьма затруднительной, добавлены расчетные примеры оценки надежностной и структурной значимости элементов, входящих в состав сложных систем, изменена структура пособия, добавлен раздел оценки риска и влияния надежности системы на безопасность.

Решение многих примеров изменено с целью использования современных вычислительных средств персональных компьютеров, с помощью Mathcad, Matlab.

Перечисленные выше изменения проведены с целью адаптации пособия к современным вычислительным средствам и приближения теории надежности технических систем к практическим задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куличкин Ю.В., Яковлев В.В. Практические рекомендации по применению надежности технических систем. СПб, ВВМ, 2010, 208с.
2. Яковлев В.В. Прикладные аспекты надежности технических систем. СПбГПУ, 2000, 178с.
3. Чусов А.Н., Яковлев В.В. Управление безопасностью природно-технических систем. СПбГПУ, 2011, 227с.
4. Приказ Ростехнадзора от 11.04.2016г. №144. Методическое руководство по проведению анализа опасности и оценки риска аварий на опасных производственных объектах.
5. Приказ Ростехнадзора от 13.05.2015г. №188. Методическое руководство по проведению анализа опасности и оценки риска аварий на опасных производственных объектах.
6. Закон РФ от 22.07.2008 123-ФЗ «Технический регламент о требованиях пожарной безопасности».
7. Федоров М.П., Чусов А.Н., Яковлев В.В. Модели управления безопасностью природно-технических систем. СПбГПУ, 2011, 261с.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. «Наука», М.: 1973 г., 364с.
9. Потемкин В.Г. Введение в MATLAB.Диалог-Мифи, М.:200, 247с.
10. Мещеряков В.В. Задачи по статистике и регрессионному анализу с MATLAB. Диалог-Мифи, М.: 2009448с.
11. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе MATHCAD, СПб, «БХВ-Петербург», 2005, 450с.
12. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем.СПб, 2000, 248с.
13. Гаенко В.П. Безопасность технических систем. СПб, «СВЕН», 2014, 167с.
14. Малкин В.С. надежность технических систем и техногенный риск. Ростов – на- Дону. Феникс, 2010, 429с.

15. Яковлев В.В. Риск в природно-технической среде. СПбГПУ, 2015, 508с.
16. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. Matlab 6.x: программирование численных методов.СПб «БХВ», 2004, 662с.
17. Гук Ю.Б., Карпов В.В. Теория надежности в электроэнергетике. СПбГПУ, 1999, 81с.
18. Ануфриев И.Е. Информатика. Пакет Matlab. СПбГПУ, 2010, 65с.