Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Е.С. Единова

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2019

УДК

Рецензент:
Доктор технических наук, профессор СПбПУ *В.И. Антонов*

Автор:
доцент Е.С. Единова

Единова Е.С. **Неопределенный интеграл:** учебное пособие (практикум) / Е.С. Единова – СПб, 2019. – 79 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов СПбПУ очной и заочной форм обучения.

Пособие закрепляет знания, полученные студентами по теме «Неопределенный интеграл», предусмотренные учебной программой по высшей математике в соответствии с содержанием Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 занятий с примерами и ответами к ним. Детально разобраны типовые задачи, приведено большое количество разнообразных заданий различных уровней сложности для самостоятельного решения. Во второй части пособия даны задания к типовому расчету по теме.

Введение

Студенты, приступающие к изучению раздела «Неопределенный интеграл», должны уметь свободно находить производные и дифференциалы первого порядка от функций одной переменной.

Если для всех x, принадлежащих отрезку $[a, b]$, выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной для функции*** $f(x)$.

Можно показать, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет первообразную $F(x)$, то она на этом отрезке имеет бесчисленное множество $F(x)+C$ первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную C.

Интегрированием называется действие, обратное дифференцированию, в котором по данной функции находят совокупность всех ее первообразных.

Запишем таблицу основных формул интегрирования:

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$ 2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ 4) $\int e^u du = e^u + C$

5) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$ 6) $\int \cos u\, du = \sin u + C$

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ 8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

9) $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$ 10) $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$

11) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ 12) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$

13) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$ 14) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

15) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ 16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

17) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

18) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$

19) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$

Справедливость любой из этих формул можно доказать дифференцированием правой части.

§1 **Непосредственное интегрирование**

<u>Занятие 1.</u>

Непосредственным интегрированием называется интегрирование приведением данного интеграла к одному из интегралов из вышеприведенной таблицы. Следует учесть, что все формулы этой таблицы верны только в том случае, если аргумент подынтегральной функции и переменная, стоящая под знаком дифференциала, одинаковы.

Примеры:

1. Найти неопределенный интеграл $\int \cos 3x\, dx$.

Решение: Здесь $3x$ - аргумент подынтегральной функции, а под знаком дифференциала стоит переменная x. Поэтому, чтобы применить формулу (6) из таблицы интегралов, под знаком дифференциала следует переменную x умножить и разделить на 3, затем постоянный множитель $\frac{1}{3}$ вывести за знак дифференциала, а потом и за знак интеграла. Множитель $\frac{1}{3}$ является поправочным множителем.

$$\int \cos 3x\, dx = \int \cos 3x\, d\left(\frac{1}{3}\cdot 3x\right) = \int \cos 3x \cdot \frac{1}{3} d(3x) =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}(\sin 3x + c_1) = \frac{1}{3}\sin 3x + c.$$

Или, короче: $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\, \overbrace{d(3x)}^{3dx} = \frac{1}{3}\sin 3x + c.$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\sin 3x + c\right)' = \frac{1}{3}(\sin 3x)' + c' = \frac{1}{3}\cdot 3\cos 3x + 0 = \cos 3x$$

или $$d\left(\frac{1}{3}\sin 3x + c\right)' = \left(\frac{1}{3}\sin 3x + c\right)' dx = \cos 3x dx.$$

2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2(x-5)}$.

Решение:

Приводим интеграл в соответствие с формулой (8) таблицы основных формул, полагая $u = x - 5$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x-5)} = \int \frac{\overbrace{d(x-5)}^{dx}}{\sin^2(x-5)} = -\operatorname{ctg}(x-5) + c.$$

Так как $d(x-5) = dx$, то поправочный множитель в этом случае равен 1.

3. Найти неопределенный интеграл $\int e^{2-x}dx$.

Решение:

Приводим интеграл в соответствие с формулой (4) таблицы основных формул, полагая $u = 2 - x$.

$$\int e^{2-x}dx = -\int e^{2-x}\overbrace{d(2-x)}^{-1\cdot dx} = -e^{2-x} + c.$$

Поправочный множитель равен –1.

4. Найти неопределенный интеграл $\int 6x\left(1+3x^2\right)^7 dx$.

Решение:

Приводим интеграл в соответствие с формулой (1) таблицы основных формул, полагая $u = 1 + 3x^2$, $n = 7$.

Так как $d\left(1+3x^2\right) = 6xdx$, то

$$\int 6x\left(1+3x^2\right)^7 dx = \int \left(1+3x^2\right)^7 \overbrace{d\left(1+3x^2\right)}^{6xdx} = \frac{\left(1+3x^2\right)^8}{8} + c.$$

Поправочный множитель равен 1.

5. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$.

Решение:

Приводим интеграл в соответствие с формулой (2) таблицы основных формул, полагая $u = 3 - 2x^2$. Так как $d\left(3-2x^2\right) = -4xdx$, то

$$\int \frac{xdx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{d\left(3-2x^2\right)}^{-4xdx}}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right| + c = c - \frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|.$$

Поправочный множитель равен $-\frac{1}{4}$.

6. Найти неопределенный интеграл $\int 2x^2 e^{x^3+4}dx$.

Решение:

Выносим постоянный множитель 2 за знак интеграла и приводим интеграл в соответствии с формулой (4), полагая $u = x^3 + 4$. Так как $d\left(x^3+4\right) = 3x^2dx$, то

$$\int 2x^2e^{x^3+4}dx = 2\int x^2e^{x^3+4}dx = 2\cdot\frac{1}{3}\int e^{x^3+4}\overbrace{d\left(x^3+4\right)}^{3x^2dx} = \frac{2}{3}\cdot e^{x^3+4}+c.$$

7. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение:

Интеграл можно привести в соответствии с формулой (1), полагая $u = \ln x$. Так как $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$, то

$$\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx = \int (\ln x)^{-3}\overbrace{d(\ln x)}^{\frac{1}{x}\cdot dx} = \frac{(\ln x)^{-2}}{-2}+c = c-\frac{1}{2\ln^2 x}.$$

8. Найти неопределенный интеграл $\int \left(\dfrac{2}{x\sqrt[3]{x}} - 5x^2 + 3\right)dx$.

Решение:

Применяем свойства неопределенных интегралов:

$$\int \left(\frac{2}{x\sqrt[3]{x}} - 5x^2 + 3\right)dx = \int \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}dx - \int 5x^2dx + \int 3dx =$$

$$= 2\int x^{-4/3}dx - 5\int x^2dx + 3\int dx = 2\frac{x^{-1/3}}{-1/3} - 5\frac{x^3}{3} + 3x + c = c - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{3}x^3 + 3x.$$

Заметим, что при интегрировании каждого слагаемого появляются произвольные постоянные c_1, c_2 и c_3, сумма которых $c_1 + c_2 + c_3 = c$ – произвольная постоянная.

9. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

Решение:

Деля почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель, представляем данный интеграл в виде суммы двух интегралов, каждый из которых вычисляется по формуле (1):

$$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \ln x\,\overbrace{d(\ln x)}^{\frac{1}{x}dx} =$$

$$=\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\frac{(\ln x)^2}{2}+c=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x+c\cdot$$

10. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

Решение: Приводим интеграл в соответствии с формулой (10), полагая $u=\frac{1}{x}$.

Так как $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}dx$, то

$$\int \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}{x^2}dx=-\int \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x}\right)\overbrace{d\left(\frac{1}{x}\right)}^{-\frac{1}{x^2}dx}=-\ln\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|+c=c-\ln\left|\sin\frac{1}{x}\right|.$$

11. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^t dt}{4-3e^t}$.

Решение: Приводим интеграл в соответствии с формулой (2), полагая $u=4-3e^t$. Так как $d\left(4-3e^t\right)=-3e^t dt$, то

$$\int \frac{e^t dt}{4-3e^t}=-\frac{1}{3}\int\frac{\overbrace{d\left(4-3e^t\right)}^{-3e^t dt}}{4-3e^t}=-\frac{1}{3}\ln\left|4-3e^t\right|+c=c-\ln\left|\sqrt[3]{4-3e^t}\right|.$$

12. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{xdx}{\sin^2\left(x^2\right)}$.

Решение. Интеграл можно привести в соответствие с формулой (8), полагая $u=x^2$. Так как $d\left(x^2\right)=2xdx$, то

$$\int \frac{xdx}{\sin^2\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{d\left(x^2\right)}^{2xdx}}{\sin^2\left(x^2\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x^2\right)+c=c-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x^2\right).$$

13. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{2-3x^5}}$.

Решение: Приводим интеграл в соответствии с формулой (1), полагая $u=2-3x^5$, $n=-\frac{1}{3}$. Так как $d\left(2-3x^5\right)=-15x^4dx$, то

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{2-3x^5}}=-\frac{1}{15}\int\left(2-3x^5\right)^{-\frac{1}{3}}\overbrace{d\left(2-3x^5\right)}^{-15x^4dx}=-\frac{1}{15}\frac{\left(2-3x^5\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=$$

$$=c-\frac{\sqrt[3]{\left(2-3x^5\right)^2}}{10}.$$

14. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{\cos\frac{x}{2}dx}{3+\sin\frac{x}{2}}$.

Решение: Приводим интеграл в соответствии с формулой (2), полагая $u=3+\sin\frac{x}{2}$. Так как $d\left(3+\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, то

$$\int\frac{\cos\frac{x}{2}dx}{3+\sin\frac{x}{2}}=2\int\frac{\overbrace{d\left(3+\sin\frac{x}{2}\right)}^{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx}}{3+\sin\frac{x}{2}}=2\ln\left|3+\sin\frac{x}{2}\right|+c\cdot$$

15. Найти неопределенный интеграл $\int 4^{\cos 2x}\cdot\sin 2x\,dx$.

Решение: Приводим интеграл в соответствии с формулой (3), полагая $u=\cos 2x,\ a=4$. Так как $d(\cos 2x)=-2\sin 2xdx$, то

$$\int 4^{\cos 2x}\cdot\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int 4^{\cos 2x}\cdot\overbrace{d(\cos 2x)}^{-2\sin 2xdx}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4^{\cos 2x}}{\ln 4}+c=c-\frac{4^{\cos 2x}}{\ln 16}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

16. $\int tg\frac{x}{3}dx$ Ответ: $c-3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|$.

17. $\int\cos(2-x)dx$ Ответ: $c-\sin(2-x)$.

18. $\int\frac{dx}{\cos^2(3+2x)}$ Ответ: $\frac{1}{2}\mathrm{tg}(3+2x)+c$.

19. $\int e^{\sin 2x}\cdot\cos 2xdx$ Ответ: $\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+c$.

20. $\int \frac{dx}{7-3x}$ Ответ: $c-\ln\left|\sqrt[3]{7-3x}\right|$.

21. $\int \frac{3x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ Ответ: $c-\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}$.

22. $\int \sqrt{1-5x}\,dx$ Ответ: $c-\frac{2\sqrt{(1-5x)^3}}{15}$.

23. $\int \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$ Ответ: $c-\frac{1}{2e^{x^2}}$.

24. $\int \frac{dx}{x\ln x}$ Ответ: $\ln|\ln x|+c$.

25. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$ Ответ: $c-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}$.

26. $\int \frac{4dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}$ Ответ: $4\ln|1+\operatorname{tg} x|+c$.

27. $\int \frac{2^{\arcsin\frac{x}{3}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dx$ Ответ: $\frac{3}{\ln 2}\cdot 2^{\arcsin\frac{x}{3}}+c$.

28. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2}dx$ Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}^4 2x}{8}+c$.

29. $\int 5x\cdot\sqrt[3]{3-4x^2}\,dx$ Ответ: $c-\frac{15}{32}\cdot\sqrt[3]{\left(3-4x^2\right)^4}$.

30. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$ Ответ: $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+c$.

31. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ Ответ: $c-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3}$.

32. $\int \operatorname{ctg}(5x-7)dx$ Ответ: $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x-7)|+c$.

33. $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}dx$ Ответ: $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+c$.

34. $\int \frac{2^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$ Ответ: $c-\frac{2^{ctgx}}{\ln 2}$.

35. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x^2+3}+c$.

36. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{3\operatorname{tg} x + 1}}$ Ответ: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3\operatorname{tg} x + 1} + c$.

37. $\int \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}} dx$ Ответ: $\frac{1}{2} \ln\left(2 + e^{2x}\right) + c$.

38. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Ответ: $2\sin\sqrt{x} + c$.

Результаты, полученные при решении задач 39-42, проверить дифференцированием:

39. $\int \frac{e^{2x}}{\sin^2\left(e^{2x}\right)} dx$.

40. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x\sqrt{3 + \operatorname{ctg} 2x}}$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x}$.

42. $\int \frac{3 + \ln x}{x} dx$.

Вместо предложенных для самостоятельного решения задач можно решить задачи:
Б.: 1686, 1710, 1713, 1714, 1726, 1738, 1752, 1756, 1707, 1712, 1717, 1721, 1723, 1731, 1747, 1749, 1755, 1911, 1912, 1913, 1919, 1923, 1925,
где Б. – означает: Берман Г.Н. «Сборник задач по курсу математического анализа».

Занятие 2.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

43. $\int \frac{dx}{\sin(2x + 3)}$.

Решение. Приводим интеграл в соответствии с формулой (12), полагая $u = 2x + 3$. Так как $d(2x + 3) = 2dx$, то

$$\int \frac{dx}{\sin(2x + 3)} = \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{d(2x + 3)}^{2dx}}{\sin(2x + 3)} = \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{2x + 3}{2}\right| + c.$$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$.

Решение. Преобразовав подкоренное выражение, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{5}\right)^2}}.$$

Приводим интеграл в соответствии с формулой (16), полагая $u = x\sqrt{5}$, $a = \sqrt{3}$. Так как $d\left(x\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}dx$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\overbrace{d\left(x\sqrt{5}\right)}^{\sqrt{5}\,dx}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{5}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot x + c.$$

45. $\int \frac{2dx}{3-8x^2}$.

Решение. Так как $\int \frac{2dx}{3-8x^2} = 2\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{8}\right)^2}$, то приводим интеграл в соответствии с формулой (14), полагая $u = x\sqrt{8}$, $a = \sqrt{3}$.

$$du = d\left(x\sqrt{8}\right) = \sqrt{8}\,dx.$$

$$\int \frac{2dx}{3-8x^2} = 2\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{8}\right)^2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{\overbrace{d\left(x\sqrt{8}\right)}^{\sqrt{8}dx}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(x\sqrt{8}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3} + x\sqrt{8}}{\sqrt{3} - x\sqrt{8}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}x}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}x}\right| + c.$$

46. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{(2x)^2 + 3^2}$, то приводим интеграл в соответствии с формулой (13), полагая $u = 2x$, $a = 3$, $d(2x) = 2dx$.

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{d(2x)}^{2dx}}{(2x)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} x + c.$$

47. $\int \frac{tdt}{\sqrt{4t^4 - 9}}$.

Решение. Так как $\int \frac{tdt}{\sqrt{4t^4-9}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{\left(2t^2\right)^2-3^2}}$, то приводим интеграл в соответствии с формулой (17), полагая $u=2t^2$, $a=3$, $du=d\left(2t^2\right)=4tdt$.

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{4t^4-9}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{\left(2t^2\right)^2-3^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{d\left(2t^2\right)}^{4tdt}}{\sqrt{\left(2t^2\right)^2-3^2}} = \frac{1}{4}\ln\left|2t^2+\sqrt{4t^4-9}\right|+c.$$

48. $\int x\sqrt{5-3x^2}dx$.

Решение. Приводим интеграл в соответствии с формулой (1), полагая

$$u=5-3x^2,\ n=\frac{1}{2},\ d\left(5-3x^2\right)=-6xdx.$$

$$\int x\sqrt{5-3x^2}dx = -\frac{1}{6}\int \left(5-3x^2\right)^{1/2}\overbrace{d\left(5-3x^2\right)}^{-6xdx}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{\left(5-3x^2\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=c-\frac{\left(5-3x^2\right)\sqrt{5-3x^2}}{9}.$$

49. $\int \sqrt{5-3x^2}dx$.

Решение. Так как $\int \sqrt{5-3x^2}dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}dx$, то приводим интеграл в соответствии с формулой (18), полагая

$$u=x\sqrt{3},\ à=\sqrt{5},\ d\left(x\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}dx.$$

$$\int \sqrt{5-3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}\cdot\overbrace{d\left(x\sqrt{3}\right)}^{\sqrt{3}dx}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{5-3x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right]+c=\frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}x+c.$$

50. $\int e^x\sqrt{5+e^{2x}}dx$.

Решение. Так как $\int e^x\sqrt{5+e^{2x}}dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(e^x\right)^2}\cdot e^xdx$, то приводим интеграл в соответствии с формулой (19), полагая

$$u=e^x,\ à=\sqrt{5},\ du=d\left(e^x\right)=e^xdx.$$

$$\int e^x\sqrt{5+e^{2x}}dx=\int\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(e^x\right)^2}\,\overbrace{d\left(e^x\right)}^{e^x dx}=\frac{e^x}{2}\cdot\sqrt{5+e^{2x}}+\frac{5}{2}\ln\left|e^x+\sqrt{5+e^{2x}}\right|+c.$$

Рассмотрим теперь наиболее простые примеры из класса интегралов, приводящихся к табличным путем простейших преобразований.

51. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+9}}dx.$

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=3\int\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$$

Первый из полученных интегралов приводим в соответствии с формулой (1), а второй – с формулой (17). Так как $d\left(4x^2+9\right)=8xdx$, а $d(2x)=2dx$, то

$$\int\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=3\int\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}=$$

$$=3\cdot\frac{1}{8}\int\left(4x^2+9\right)^{-1/2}\overbrace{d\left(4x^2+9\right)}^{8xdx}+\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}=\frac{3}{8}\frac{\left(4x^2+9\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+c=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9}+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+c.$$

52. $\int\frac{2x-5}{3x^2-7}dx.$

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов, первый из которых приводится в соответствии с формулой (2), а второй – с формулой (15).

$$\int\frac{2x-5}{3x^2-7}dx=2\int\frac{xdx}{3x^2-7}-5\int\frac{dx}{3x^2-7}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\int\frac{\overbrace{d\left(3x^2-7\right)}^{6xdx}}{3x^2-7}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{\overbrace{d\left(x\sqrt{3}\right)}^{\sqrt{3}dx}}{\left(x\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-7\right|-\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{7}}{x\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-7\right|-\frac{5}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{7}}{x\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right|+c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

53. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5-7x^2}}$ Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}}\arcsin\sqrt{\frac{7}{5}}x+c$.

54. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4+9x^2}}$ Ответ: $\ln\left|3x+\sqrt{4+9x^2}\right|+c$.

55. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{4+9x^2}}$ Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{4+9x^2}+c$.

56. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$ Ответ: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+c$.

57. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$ Ответ: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+c$.

58. $\int \frac{2dt}{3+8t^2}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{8}{3}}t+c$.

59. $\int \frac{e^x dx}{\cos e^x}$ Ответ: $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{e^x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$.

60. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c$.

61. $\int \frac{\cos t\,dt}{4-\sin^2 t}$ Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin t}{2-\sin t}\right|+c$.

62. $\int \frac{2tdt}{\sqrt{6t^4+7}}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{6}\,t^2+\sqrt{6t^4+7}\right|+c$.

63. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ Ответ: $2\arcsin\left(x^2\right)+c$.

64. $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$ Ответ: $\arcsin\frac{x^3}{2}+c$.

65. $\int \frac{3^x}{4+3^{2x}}dx$ Ответ: $\frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+c$.

66. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$ Ответ: $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+c$.

67. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ Ответ: $\arcsin(\ln x)+c$.

68. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$ Ответ: $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right|+c$.

69. $\int \sqrt{4x^2-9}\,dx$ Ответ: $\frac{x}{2}\sqrt{4x^2-9}-\frac{9}{4}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+c$

70. $\int \frac{2x+5}{3x^2+7}dx$ Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left(3x^2+7\right)+\frac{5}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{7}}\,x+c$.

71. $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+c$.

72. $\int \frac{6x-1}{1-9x^2}dx$ Ответ: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|1-9x^2\right|+c$.

73. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}}dx$ Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1}+\frac{5}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+1}\right|+c$.

74. $\int \frac{(\arccos 3x)^2+x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ Ответ: $c-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right]$

75. $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+c$.

Вместо предложенных для самостоятельного решения задач можно решить следующие задачи:
Б. 1759, 1762, 1773, 1774, 1763, 1964, 1965, 1766, 1767, 1768, 1769, 1775, 1776, 1777, 1779, 1780, 1920, 1922, 1924.

§2. Интегралы, приводящиеся к табличным путем простейших преобразований.

<u>Занятие 3.</u>

1. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен:

а) интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ *приводятся к табличным интегралам, если квадратный трехчлен* x^2+px+q *представить в виде суммы или разности квадратов.*

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

76. $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$.

Решение. Выделяем из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, полный квадрат:

$x^2+3x-4=x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4=\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{25}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$ Так как знаменатель подынтегрального выражения представлен в виде разности квадратов и $d\left(x+\frac{3}{2}\right)=dx$, то данный интеграл можно привести в соответствии с формулой (15), считая $u=x+\frac{3}{2}$, $a=\frac{5}{2}$.

$$\int\frac{dx}{x^2+3x-4}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\right|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+c.$$

77. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$.

Решение.

Так как $\sqrt{2-3x-4x^2}=\sqrt{4\left(-x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{-\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)}=$

$$=2\sqrt{-\left(x^2+2\cdot\frac{3}{8}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{-\left[\left(x^2+2\cdot\frac{3}{8}x+\frac{9}{64}\right)-\frac{41}{64}\right]}=$$

$$=2\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}\quad\text{и}\quad d\left(x+\frac{3}{8}\right)=dx,$$

то данный интеграл приводим в соответствии с формулой (16), полагая $u=x+\frac{3}{8}$, $a=\frac{\sqrt{41}}{8}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{8}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+c=\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+c\cdot$$

б) интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$ *приводятся к табличным интегралам путем двух простейших преобразований:*

1) в числителе выделяется производная квадратного трехчлена;

2) интеграл представляется в виде суммы двух интегралов.

78. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

Решение. Так как $\left(x^2-x+1\right)' = 2x-1$, то числитель подынтегральной функции можно представить в виде:

$$3x-1=\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}-1=\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}.$$

Тогда данный интеграл легко представляется в виде суммы двух интегралов, один из которых приводится в соответствии с формулой (2), а другой относится к интегралам, рассмотренным в пункте а).

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\overbrace{d\left(x^2-x+1\right)}^{(2x-1)dx}}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}^{dx}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

79. $\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx.$

Решение. Так как $\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{5x-2}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}dx$, и $\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)'=2x+\frac{9}{4}$, то числитель подынтегральной функции можно представить в виде

$$5x-2=\frac{5}{2}\left(2x+\frac{9}{4}\right)-\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{4}-2=\frac{5}{2}\left(2x+\frac{9}{4}\right)-\frac{61}{8}.$$

Тогда

$$\int\frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{5x-2}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{5}{2}\left(2x+\frac{9}{4}\right)-\frac{61}{8}}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{2x+\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}dx-\frac{61}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{5}{4}\int\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)^{-1/2}\overbrace{d\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)}^{\left(2x+\frac{9}{4}\right)dx}-\frac{61}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2\cdot\frac{9}{8}x+\frac{81}{64}\right)-\frac{81}{64}+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}-\frac{61}{16}\int\frac{\overbrace{d\left(x+\frac{9}{8}\right)}^{dx}}{\sqrt{\left(x^2+\frac{9}{8}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{65}}{8}\right)^2}}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}-\frac{61}{16}\ln\left|x+\frac{9}{8}+\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}\right|+c_1=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}-\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|+\frac{61}{16}\ln 8+c_1=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}-\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|+c,\ \text{ где }\ c=\frac{61}{16}\ln 8+c_1.$$

Первый из слагаемых интегралов приведен в соответствии с формулой (1): $u=x^2+\frac{9}{4}x+1,\ n=-\frac{1}{2}$, второй – с формулой (17): $u=x+\frac{9}{8},\ a=\frac{\sqrt{65}}{8}$.

Замечание. Разобранные в данном параграфе примеры можно решать, не делая приведенным квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе. В частности, в примере 79, так как $\left(4x^2+9x+1\right)'=8x+9$, то

$$\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{8}(8x+9)-\frac{5}{6}\cdot 9-2}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx =$$

$$=\frac{5}{8}\int \frac{8x+9}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx - \frac{61}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} =$$

$$=\frac{5}{8}\int \left(4x^2+9x+1\right)^{-1/2} \overbrace{d\left(4x^2+9x+1\right)}^{(8x+9)dx} - \frac{61}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\left[(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{9}{4}+\frac{81}{16}\right]-\frac{81}{16}+1}} =$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{\left(4x^2+9x+1\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{61}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}}} =$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\sqrt{4x^2+9x+1} - \frac{61}{16}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{d\left(2x+\frac{9}{4}\right)}^{2dx}}{\sqrt{\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{65}}{4}\right)^2}} =$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} - \frac{61}{16}\ln\left|2x+\frac{9}{4}+\sqrt{4x^2+9x+1}\right| + c_1 =$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} - \frac{61}{16}\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right| + c.$$

2. Некоторые интегралы от рациональных дробей

Рассмотрим интегралы от рациональных дробей, знаменатели которых – многочлены степени не выше второй. Если степень многочлена, стоящего в числителе, выше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе, то следует числитель разделить на знаменатель по правилу деления многочленов.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

80. $\int \frac{x^4+5}{x^2-3}dx.$

Решение. Так как

$$\frac{x^4+5}{x^2-3} = \frac{\left(x^4-9\right)+9+5}{x^2-3} = \frac{\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)+14}{x^2-3} =$$

$$=\frac{\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)}{x^2-3} + \frac{14}{x^2-3} = x^2+3+\frac{14}{x^2-3},$$ то

$$\int \frac{x^4+5}{x^2-3}dx=\int\left(x^2+3+\frac{14}{x^2-3}\right)dx=\int x^2dx+3\int dx+14\int\frac{dx}{x^2-3}=$$
$$=\frac{x^3}{3}+3x+\frac{14}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c=\frac{x^3}{3}+3x+\frac{7}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c.$$

81. $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$.

Решение. Так как

$$\frac{x+2}{2x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{2x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)+1+4}{2x-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{5}{2x-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{5}{2x-1}\right),$$

то

$$\int\frac{x+2}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{5}{2x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{2x-1}=$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

82. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+c$.

83. $\int \frac{dx}{9x^2-6x-8}$ Ответ: $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+2}\right|+c$.

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$ Ответ: $\arcsin\frac{x-1}{4}+c$.

85. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+c$.

86. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$ Ответ: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+10\right|+8\operatorname{arctg}(x-3)+c$.

87. $\int \frac{1-x}{4x^2-4x-3}dx$ Ответ: $\frac{1}{8}\ln\left|4x^2-4x-\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+c$.

88. $\int \frac{xdx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$ Ответ: $-\sqrt{27+6x-x^2}+3\arcsin\frac{x-3}{6}+c$.

89. $\int \frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ Ответ: $2\arcsin\frac{2x-1}{3}+c$.

90. $\int \dfrac{3x-2}{1-6x-9x^2}dx$ Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\dfrac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right|-\dfrac{1}{6}\ln\left|1-6x-9x^2\right|+c$.

91. $\int \dfrac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}dx$ Ответ: $\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{2x-3}{2}-2\sqrt{12x-4x^2-5}+c$.

92. $\int \dfrac{2x-1}{2x+3}dx$ Ответ: $x-2\ln|2x+3|+c$.

93. $\int \dfrac{x}{x+4}dx$ Ответ: $x-4\ln|x+4|+c$.

94. $\int \dfrac{x^4}{1-x}dx$ Ответ: $c-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|$.

95. $\int \dfrac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

Ответ: $\dfrac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\dfrac{13}{9}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right|+c$.

Вместо предложенных задач для самостоятельного решения можно решить задачи:

Б. 1781, 1782, 1784, 1785, 1788, 1789, 1796, 1803, 1806, 1943, 1946, 1953.

Занятие 4.

§3. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

1. *Интегралы вида* $\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$, *где, по крайней мере, один из показателей степени* m *или* n *- нечетное положительное число, приводятся к табличным. При этом используется основное тригонометрическое тождество* $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

96. $\int \sin^2 2x\cdot\cos^3 2x dx$.

Решение. Так как $d(\sin 2x)=2\cos 2x dx$ и $\cos^2 2x=1-\sin^2 2x$, то

$$\int \sin^2 2x\cdot\cos^3 2x dx=\int\sin^2 2x\cdot\cos^2 2x\cdot\underbrace{\cos 2x dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin^2 2x\left(1-\sin^2 2x\right)\overbrace{d(\sin 2x)}^{2\cos 2x dx}=\frac{1}{2}\int\left(\sin^2 2x-\sin^4 2x\right)d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)-\frac{1}{2}\int \sin^4 2x\, d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{1}{2}\frac{\sin^5 2x}{5}+c=\frac{\sin^3 2x}{6}-\frac{\sin^5 2x}{10}+c.$$

97. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 3x}{\sqrt{\cos 3x}}\,dx.$

Решение. Так как $d(\cos 3x)=-3\sin 3x\,dx$ и $\sin^2 3x=1-\cos^2 3x$, то

$$\int \frac{\sin^3 3x}{\sqrt{\cos 3x}}\,dx=\int \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{\cos 3x}}\sin 3x\,dx=\int \sin^2 3x(\cos 3x)^{-1/2}\sin 3x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\int \left(1-\cos^2 3x\right)\cdot(\cos 3x)^{-1/2}\overbrace{d(\cos 3x)}^{-3\sin 3x dx}=-\frac{1}{3}\int \left[(\cos 3x)^{-1/2}-(\cos 3x)^{3/2}\right]d(\cos 3x)=$$

$$=-\frac{1}{3}\int (\cos 3x)^{-1/2}d(\cos 3x)+\frac{1}{3}\int (\cos 3x)^{3/2}d(\cos 3x)=$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{(\cos 3x)^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{(\cos 3x)^{5/2}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{15}\cos^{5/2}3x-\frac{2}{3}\cos^{1/2}3x+c=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\cos 3x}\left(\frac{\cos^2 3x}{5}-1\right)+c.$$

98. $\displaystyle\int \cos^3\frac{x}{2}\,dx.$

Решение. Так как $d\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$ и $\cos^2\frac{x}{2}=1-\sin^2\frac{x}{2}$, то

$$\int \cos^3\frac{x}{2}\,dx=\int \cos^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx=2\int \left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)\overbrace{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}^{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx}=$$

$$=2\int d\left(\sin\frac{x}{2}\right)-2\int \sin^2\frac{x}{2}\,d\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}-2\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{3}+c=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2}+c.$$

2. *Интегралы вида* $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$, *где оба показателя степени* m *и* n *- четные положительные числа, приводятся к табличным с помощью формул*

$$2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

99. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x dx.$

Решение. Так как

$$\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x = (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^4 4x$$

и $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$, то

$$\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x dx = \int (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 \cdot \cos^2 2x dx =$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 4x \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 4x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 4x \cdot \cos 4x dx.$$

Так как $d(\sin 4x) = 4\cos 4x dx$, то второй из полученных интегралов приводится в соответствии с формулой (1), а первый интеграл относится к интегралам рассматриваемого вида, то есть, может быть приведен к табличным с помощью формулы $\sin^2 4x = \dfrac{1-\cos 8x}{2}$.

Итак, $= \int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x dx = \dfrac{1}{8}\int \sin^2 4x dx + \dfrac{1}{8}\int \sin^2 4x \cdot \cos 4x dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 8x}{2} dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int \sin^2 4x \overbrace{d(\sin 4x)}^{4\cos 4x dx} =$$
$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 8x dx + \frac{1}{32}\int \sin^2 4x\, d(\sin 4x) =$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}\int \cos 8x \overbrace{d(8x)}^{8dx} + \frac{1}{96}\sin^3 4x + c = \frac{1}{16}x - \frac{1}{128}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin^3 4x + c.$$

100. $\int \sin^4 x\, dx.$

Решение. Так как $\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2$ и $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, то

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x \overbrace{d(2x)}^{2dx} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x \overbrace{d(4x)}^{4dx} =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

3. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$, *где* m *- целое положительное число, приводятся к табличным с помощью формул тригонометрии* $tg^2 x = \sec^2 x - 1$, $\mathrm{ctg}^2 x = \mathrm{cosec}^2 x - 1$ *соответственно, так как*

$$d(\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x\,dx, \quad d(\mathrm{ctg}\,x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cosec}^2 x\,dx.$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

101. $\int tg^3 \dfrac{x}{2}dx$.

Решение.

Так как $d\left(tg\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}dx = \dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}dx$, а $tg^2\dfrac{x}{2} = \sec^2\dfrac{x}{2} - 1$, то

$$\int tg^3\frac{x}{2}dx = \int tg\frac{x}{2}dx\cdot tg^2\frac{x}{2}dx = \int tg\frac{x}{2}\cdot\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx =$$

$$= \int\left(tg\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2}\right)dx = \int tg\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}dx - \int tg\frac{x}{2}dx =$$

$$= 2\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\overbrace{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}^{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx} - 2\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\overbrace{d\left(\frac{x}{2}\right)}^{\frac{1}{2}dx} =$$

$$=2\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+c=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+c.$$

При нахождении слагаемых интегралов были применены формулы (1) и (9) соответственно.

102. $\int \operatorname{ctg}^4 2x dx.$

Решение. Так как

$d(\operatorname{ctg} 2x)=-\frac{2}{\sin^2 2x}dx=-2\operatorname{cosec}^2 2x\,dx$, а $\operatorname{ctg}^2 2x=\operatorname{cosec}^2 2x-1$, то

$$\int \operatorname{ctg}^4 2x dx=\int \operatorname{ctg}^2 2x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x dx=\int \operatorname{ctg}^2 2x\left(\operatorname{cosec}^2 2x-1\right)dx=$$

$$=\int \operatorname{ctg}^2 2x\cdot\operatorname{cosec}^2 2x dx-\int \operatorname{ctg}^2 2x dx.$$

Первый из полученных интегралов приводится в соответствие с формулой (1), второй – относится к интегралам рассматриваемого вида, то есть, может быть приведен к табличным с помощью формулы $\operatorname{ctg}^2 2x=\operatorname{cosec}^2 2x-1.$

Итак,

$$\int \operatorname{ctg}^4 2x dx=\int \operatorname{ctg}^2 2x\left(\operatorname{cosec}^2 2x-1\right)dx=$$

$$=\int \operatorname{ctg}^2 2x\cdot\operatorname{cosec}^2 2x dx-\int \operatorname{ctg}^2 2x dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \operatorname{ctg}^2 2x d(\operatorname{ctg} 2x)-\int\left(\operatorname{cosec}^2 2x-1\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^3 2x}{3}-\int\frac{1}{\sin^2 2x}dx+\int dx-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3 2x-\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}+\int dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3 2x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x+x+c=x-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3 2x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x+c.$$

4. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\cdot\sec^n x\,dx$, $\int ctg^m x\cdot\operatorname{cosec}^n x\,dx$, *где* n *- четное положительное число, приводятся к табличным с помощью формул* $\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x$ *соответственно.*

При этом следует учитывать, что

$$d(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x\,dx,$$

$$d(\operatorname{ctg} x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cosec}^2 x\,dx.$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

103. $\int \operatorname{tg}^8 3x \cdot \sec^4 3x dx.$

Решение. Так как

$$d(\operatorname{tg} 3x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} dx = 3\sec^2 3x\, dx, \quad \text{а} \quad \sec^2 3x = 1 + \operatorname{tg}^2 3x, \text{ то}$$

$$\int \operatorname{tg}^8 3x \cdot \sec^4 3x\, dx = \int \operatorname{tg}^8 3x \cdot \sec^2 3x \cdot \sec^2 3x\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \operatorname{tg}^8 3x \left(1 + \operatorname{tg}^2 3x\right) \overbrace{d(\operatorname{tg} 3x)}^{3\sec^2 3x dx} = \frac{1}{3} \int \left(\operatorname{tg}^8 3x + \operatorname{tg}^{10} 3x\right) d(\operatorname{tg} 3x) =$$

$$= \frac{1}{3} \int \operatorname{tg}^8 3x\, d(\operatorname{tg} 3x) + \frac{1}{3} \int \operatorname{tg}^{10} 3x\, d(\operatorname{tg} 3x) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^9 3x}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^{11} 3x}{11} + c = \frac{\operatorname{tg}^{11} 3x}{33} + \frac{\operatorname{tg}^9 3x}{27} + c.$$

104. $\int \sec^4 x dx.$

Решение. Так как

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \text{и} \quad d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x\, dx, \text{ то}$$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \overbrace{d(\operatorname{tg} x)}^{\sec^2 x dx} =$$

$$\int d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c.$$

5. *Интегралы вида*

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx\, dx, \int \sin mx \cdot \sin nx\, dx$$

приводятся к табличным с помощью формул

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

соответственно.

Пример. Найти неопределенный интеграл:

105. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\, dx.$

Решение. Так как

$$\sin 3x\cdot\sin 5x=\frac{1}{2}\left[\cos(3-5)x-\cos(3+5)x\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(-2x)-\cos 8x\right]=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x),\ \text{то}$$

$$\int\sin 3x\cdot\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos 8x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2x\,\overbrace{d(2x)}^{2dx}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int\cos 8x\,\overbrace{d(8x)}^{8dx}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c\,.$$

Задачи для самостоятельного решения.

106. $\int\sin^5 x\,dx$ Ответ: $c-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$.

107. $\int\frac{\sin^3 x}{\sin^4 x}dx$ Ответ: $\operatorname{cosec} x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+c$.

108. $\int\frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ Ответ: $c-2\sqrt{\cos x}\left(1-\frac{2}{5}\cos^2 x+\frac{1}{9}\cos^4 x\right)$.

109. $\int\cos^4 x\cdot\sin^3 x\,dx$ Ответ: $c-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x$.

110. $\int\cos^4 2x\,dx$ Ответ: $\frac{3}{8}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}+c$.

111. $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$ Ответ: $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+c$.

112. $\int\sin^4 t\cdot\cos^4 t\,dt$ Ответ: $\frac{1}{128}\left(3t-\sin 4t+\frac{1}{8}\sin 8t\right)+c$.

113. $\int\operatorname{ctg}^4\frac{x}{3}dx$ Ответ: $c-\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}+3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+x$.

114. $\int\operatorname{tg}^5 x\,dx$ Ответ: $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+c$.

115. $\int\sec^6 2x\,dx$ Ответ: $\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 2x}{10}+c$.

116. $\int\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\cdot\sec^4\frac{x}{2}dx$ Ответ: $\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\operatorname{tg}^5\frac{x}{2}+c$.

117. $\int\operatorname{tg}^{3/2} x\cdot\sec^4 x\,dx$ Ответ: $\frac{2}{5}\operatorname{tg}^{5/2} x+\frac{2}{9}\operatorname{tg}^{9/2} x+c$.

118. $\int\sin 5x\cdot\cos 3x\,dx$ Ответ: $c-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x$.

119. $\int \cos 2x \cdot \cos 3x\, dx$ Ответ: $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{\sin x}{2} + c$.

120. $\int \sin^2 3x\, dx$ Ответ: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + c$.

121. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx$ Ответ: $c - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x|$.

122. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{3} \cdot \operatorname{cosec}^4 \frac{x}{3}\, dx$ Ответ: $c - \frac{\operatorname{ctg}^6 \frac{x}{3}}{2} - \frac{3}{8}\operatorname{ctg}^8 \frac{x}{3}$.

Вместо предложенных задач для самостоятельного решения можно решить задачи:
Б. 1808, 1814, 1816, 1817, 1823, 1825, 1826, 1828, 1829, 1830, 1930, 1931, 2090, 2091, 2100.

§4. Методы интегрирования

Занятие 5.

1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *- непрерывная, имеющая непрерывную производную, функция новой переменной* t. *В этом случае:*

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt;$$

2) $u = \psi(t)$, *где* u *- новая переменная. В этом случае:*

$$\int f[\psi(x)] \cdot \psi'(x)dx = \int f(u)du.$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

123. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Применим метод замены переменной с помощью подстановки вида 1). Функцию $\varphi(t)$ следует подбирать так, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид.

Полагаем $x + 4 = t^2$, т.е. $x = t^2 - 4$. Тогда $dx = 2tdt$ и

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt{x+4}} = \int \frac{2(t^2-4) \cdot 2tdt}{t} = \int 4(t^2-4)dt =$$

$$=4\int t^2dt-16\int dt=4\frac{t^3}{3}-16t+c.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, $t=\sqrt{x+4}$, получаем

$$\int\frac{2xdx}{\sqrt{x+4}}=\frac{4}{3}(x+4)^{3/2}-16(x+4)^{1/2}+c\cdot$$

124. $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

Решение.

Полагаем $e^x+1=t^4$, то есть $e^x=t^4-1$. Тогда $e^xdx=4t^3dt$ и

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\int\frac{e^x\cdot e^xdx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\int\frac{\left(t^4-1\right)\cdot 4t^3dt}{t}=4\int\left(t^6-t^2\right)dt=4\frac{t^7}{7}-4\frac{t^3}{3}+c.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, $t=\sqrt[4]{e^x+1}$, получаем

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\frac{4}{7}\left(e^x+1\right)^{7/4}-\frac{4}{3}\left(e^x+1\right)^{3/4}+c.$$

Применяя в этом примере метод замены переменной, мы полагали $e^x+1=t^4$, т.е. $e^x=t^4-1$, что равносильно подстановке $x=\ln\left(t^4-1\right)$.

125. $\int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}$.

Решение. Данный интеграл может быть приведен к табличному (формула 7), однако, для его отыскания можно применить и метод замены переменной с помощью подстановки вида 2).

Полагаем $u=x^2$, тогда $du=2xdx$, т.е. $xdx=\frac{du}{2}$ и

$$\int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\cos^2 u}=\frac{1}{2}tgu+c.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получаем

$$\int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}tgu+c=\frac{1}{2}tgx^2+c.$$

126. $\int\frac{\ln x\,dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}$.

Решение.

Применим метод замены переменной с помощью подстановки вида 2).

Полагаем $u = 1 - \ln^2 x$, тогда $du = -2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$, т.е. $\frac{\ln x}{x} dx = -\frac{1}{2} du$ и

$$\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)} = \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + c.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получаем

$$\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)} = c - \frac{1}{2} \ln\left|1 - \ln^2 x\right|.$$

Следует заметить, что все интегралы, рассмотренные в § 1, могут быть найдены методом замены переменной с помощью подстановки 2).

2. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ.

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Применение данной формулы имеет смысл, если интеграл, стоящий в правой части формулы проще (по крайней мере, не сложнее) интеграла, стоящего в левой части.

За u*, вообще говоря, принимается функция, которая упрощается при дифференцировании, а за* dv *- та часть подынтегрального выражения, содержащая* dx*, интеграл от которой известен или легко может быть найден.*

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

127. $\int x \cos 3x dx$.

Решение. Так как при дифференцировании множитель x упрощается, а интеграл $\int \cos 3x\, dx$ приводится к табличному (формула 6), то полагаем $u = x$, $dv = \cos 3x dx$, тогда $du = dx$,

$$v = \int dv = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int x \cos 3x dx = \int u dv = uv - \int v du = \left\{ \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c.$$

Замечание: При определении функции v по ее дифференциалу мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный ответ она не входит.

В этом легко убедиться, если в формулу $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ вместо v подставить выражение $v + c$. Удобно считать эту постоянную равной нулю.

128. $\int x^3 \ln x dx.$

Решение. Оба множителя подынтегральной функции упрощаются при дифференцировании, однако $\int \ln x dx$ не является табличным, а $\int x^3 dx$ - табличный. Поэтому здесь следует положить $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$.

Тогда $\quad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \int dv = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$

$$\int x^3 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c = \frac{x^4}{16}(4 \ln x - 1) + c.$$

129. $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx.$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{dx}{1 + x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1 + x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c.$$

Замечание. Из трансцендентных функций за u обычно принимаются $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

130. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$

Решение. При дифференцировании упрощается первый множитель подынтегральной функции, но $\int e^{-x^2}dx$ не приводится к табличному, более того, не выражается конечным числом элементарных функций.

Однако подынтегральное выражение можно представить в виде

$$x^2 \cdot x \cdot e^{-x^2}dx \text{ и положить } u = x^2,\ dv = xe^{-x^2}dx.$$

Тогда

$$du = 2xdx,\ v = \int dv = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\overbrace{d\left(-x^2\right)}^{-2xdx} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \text{ и}$$

$$\int x^3e^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = xe^{-x^2} & v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \frac{1}{2}\cdot 2\int xe^{-x^2}dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c = c - \frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^2+1\right).$$

131. $\int \left(x^2-3\right)\sin 2x\,dx.$

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям, полагая $u = x^2 - 3$, $dv = \sin 2xdx$. Тогда $du = 2xdx$,

$$v = \int dv = \int \sin 2xdx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \text{ и}$$

$$\int \left(x^2-3\right)\sin 2xdx = \left\{\begin{array}{l|l} u = x^2 - 3 & du = 2xdx \\ dv = \sin 2xdx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2-3\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot 2\int x\cos 2xdx.$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, является более простым по сравнению с данным, однако для его нахождения следует еще раз применить метод интегрирования по частям.

Полагаем

$$u = x,\ dv = \cos 2xdx, \text{ тогда } du = dx,\ v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \text{ и}$$

$$\int x\cos 2xdx = \left\{\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2xdx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$$

Итак,

$$\int\left(x^2-3\right)\sin 2x dx=\left\{\begin{array}{l|l} u=x^2-3 & du=2xdx \\ dv=\sin 2xdx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-3\right)\cos 2x+\int x\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\left(x^2-3\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c=$$

$$=\frac{3-x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c.$$

132. $\int e^{2x}\cos 3xdx.$

Решение. Оба множителя подынтегральной функции при дифференцировании не упрощаются, а интегралы $\int e^{2x}dx$ и $\int \cos 3xdx$ легко приводятся к табличным, поэтому можно применить метод интегрирования по частям, принимая за u любой из сомножителей.

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\left\{\begin{array}{l|l} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos 3xdx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right\}=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx.$$

Заметим, что если к полученному интегралу применить еще раз метод интегрирования по частям, полагая $u=e^{2x}$, $dv=\sin 3xdx$, то получим выражение, содержащее интеграл, совпадающий с данным.

$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\left\{\begin{array}{l|l} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin 3xdx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right\}=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

Итак,

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right],$$

или $\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx.$

Откуда

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\cdot\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x+c_1,$$

$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{13}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{13}e^{2x}\cos 3x+c$, где $c=\frac{9}{13}c_1.$

Окончательно получаем

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

133. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ (подстановка $x-2=t^2$)

Ответ: $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c$.

134. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ (подстановка $1+\ln x=t^2$)

Ответ: $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+c$.

135. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{t}$). Ответ: $c-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$.

136. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (подстановка $u=\sqrt{x}$). Ответ: $2e^{\sqrt{x}}+c$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

137. $\int x\cdot e^{5x}dx$. Ответ: $\frac{x}{5}e^{5x}-\frac{1}{25}e^{5x}+c$.

138. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$. Ответ: $c-\frac{2\ln x+1}{4x^2}$.

139. $\int x\sin 2x dx$. Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+c$.

140. $\int x^2\cdot e^{3x}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)+c$.

141. $\int \ln(1-x)dx$. Ответ: $c-x-(1-x)\ln|1-x|$.

142. $\int x^5\cdot e^{x^3}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}e^{x^3}\left(x^3-1\right)+c$.

143. $\int \arccos x dx$. Ответ: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$.

144. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ответ: $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+c$.

145. $\int e^{3x}\sin 2x dx$. Ответ: $\frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x+c$.

146. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}\,x-x\right]+c$.

147. $\int x\cdot 3^x\,dx$. Ответ: $\dfrac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+c$.

148. $\int x\cos^2 x\,dx$. Ответ: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+c$.

149. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. Ответ: $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{x-1}+c$.

Вместо предложенных задач для самостоятельного решения можно решить задачи:
Б. 1832, 1835, 1837, 1838, 1839, 1840, 1844, 1846, 1849, 1850, 1860, 1884, 1885, 1890, 1912.

§5. Интегрирование рациональных дробей

Занятие 6.

Рациональной дробью называется дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$, в противном случае дробь называется неправильной.

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ следует:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель, т.е. представить дробь в виде
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$
где $M(x)$ - многочлен, $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;

2) представить интеграл от данной дроби в виде суммы двух интегралов – интеграла от многочлена $M(x)$ и интеграла от правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ (нам уже известно, как интегрируются многочлены);

3) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители:
$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)^{\gamma}\ldots,$$
где трехчлен x^2+px+q имеет комплексные сопряженные корни;

4) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{x-b}+$$

$$+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\gamma}}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{C_{\gamma}x+D_{\gamma}}{x^2+px+q}+\ldots;$$

5) вычислить неопределенные коэффициенты

$$A_1, A_2,\ldots, A_{\alpha}, B_1, B_2,\ldots, B_{\gamma}, C_1, D_1, C_2, D_2,\ldots, C_{\gamma}, D_{\gamma},\ldots$$

либо методом «частных значений», либо методом «неопределенных коэффициентов», либо комбинируя оба этих метода;

6) найти интегралы от многочлена и от полученных простейших рациональных дробей.

При интегрирования рациональных дробей возможны 4 случая:

(1). Знаменатель дроби имеет только вещественные различные корни, т.е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.

150. $\displaystyle\int \frac{2x^4+7x^3-14x^2+8x-2}{x^3+4x^2-5x}dx$.

Решение: Так как подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, то выделяем целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^4+7x^3-14x^2+8x-2 & x^3+4x^2-5x \\ \cline{2-2} 2x^4+8x^3-10x^2 \qquad\quad & 2x-1 \\ \cline{1-1} -x^3-4x^2+8x-2 & \\ -x^3-4x^2+5x \quad & \\ \cline{1-1} 3x-2 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{2x^4+7x^3-14x^2+8x-2}{x^3+4x^2-5x}=2x-1+\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^4+7x^3-14x^2+8x-2}{x^3+4x^2-5x}dx=\int\left(2x-1+\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}\right)dx=$$

$$=2\int xdx-\int dx+\int\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}dx=x^2-x+\int\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}dx.$$

Под знаком интеграла, стоящего в правой части равенства, правильная рациональная дробь. Разлагаем знаменатель этой дроби на множители:

$$x^3+4x^2-5x=x\left(x^2+4x-5\right)=x(x-1)(x+5).$$

Тогда $\qquad\displaystyle\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}=\frac{3x-2}{x(x-1)(x+5)}.$

Представляем эту дробь в виде суммы двух дробей:

$$\frac{3x-2}{x(x-1)(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+5}.$$

После приведения к общему знаменателю дробей, стоящих в правой части, получаем две равные дроби, знаменатели которых равны

$$\frac{3x-2}{x(x-1)(x+5)}=\frac{A(x-1)(x+5)+Bx(x+5)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+5)}.$$

Тогда равны и числители этих дробей

$$3x-2=A(x-1)(x+5)+Bx(x+5)+Cx(x-1).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов применяем метод «частных значений».

Полагая $x=0$, получаем $-2=-5A$, $A=\frac{2}{5}$.

Полагая $x=1$, получаем $1=6B$, $B=\frac{1}{6}$.

Полагая $x=-5$, получаем $-17=30C$, $C=-\frac{17}{30}$.

Тогда $$\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}=\frac{\frac{2}{5}}{x}+\frac{\frac{1}{6}}{x-1}+\frac{-\frac{17}{30}}{x+5}.$$

$$\int\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}dx=\int\left(\frac{\frac{2}{5}}{x}+\frac{\frac{1}{6}}{x-1}-\frac{\frac{17}{30}}{x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{17}{30}\int\frac{dx}{x+5}=\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{17}{30}\ln|x+5|+c.$$

Окончательно получаем

$$\int\frac{2x^4+7x^3-14x^2+8x-2}{x^3+4x^2-5x}dx=x^2-x+\int\frac{3x-2}{x^3+4x^2-5x}dx=$$

$$=x^2-x+\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{17}{30}\ln|x+5|+c.$$

(2). Знаменатель дроби имеет вещественные корни, причем, некоторые из них – кратные, то есть, знаменатель разлагается на множители первой степени, некоторые из которых повторяются.

151. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$

Решение: Под знаком интеграла – правильная рациональная дробь, знаменатель которой разложен на множители. Множителю x соответствует одна простейшая дробь $\frac{A}{x}$, а множителю $(x-1)^3$ соответствуют три простейшие дроби

$$\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

После приведения к общему знаменателю дробей, стоящих в правой части, получаем две равные дроби, знаменатели которых равны. Тогда равны и числители

$$\left(x^3+1\right)=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2 \qquad (*)$$

или

$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+D-B-C)x-A \qquad (**)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов применяем метод «неопределенных коэффициентов». Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества (**).

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 1=A+D \\ x^2 & 0=-3A+C-2D \\ x & 0=3A+D-B-C \\ x^0 & 1=-A \end{array}$$

Решая систему $\begin{cases} A+D-1, \\ -3A+C-2D=0, \\ 3A+D-B-C=0, \\ -A=1 \end{cases}$

находим $A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=2.$

Итак,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

Неизвестные $A,\ B,\ C,\ D$ в разложении можно было определить и методом «частных значений», придавая x в равенстве (*) столько частных значений, сколько неизвестных коэффициентов.

Особенно удобно придавать x значения, являющиеся вещественными корнями знаменателя.

Полагая в равенстве (*) $x=0$, получаем $1=-A$

при $x=1$, получаем $2=B$,

при $x=-1$, получаем $0=-8A-B+2C-4D$,

при $x=2$, получаем $9=A+2B+2C+2D$.

Решая полученную систему, находим

$$A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=2.$$

Часто бывает удобно комбинировать оба способа нахождения неизвестных коэффициентов.

В рассматриваемом примере действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1. Полагая в равенстве (*) $x=0$ и $x=1$, получаем $A=-1,\quad B=2.$

Для нахождения C и D приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (**), например, при x^3 и x^2:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=A+D, \\ x^2 & 0=-3A+C-2D \end{array}$$

Так как $A=-1$, то $D=2$ и $C=1.$

В результате,

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=\int\left[\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}\right]dx=$$

$$=-\int \frac{dx}{x}+2\int(x-1)^{-3}d(x-1)+\int(x-1)^{-2}d(x-1)+2\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+c=c-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}.$$

(3). Среди корней знаменателя имеются комплексные неповторяющиеся корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся сомножители.

152. $\displaystyle\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx.$

Решение: Разлагаем знаменатель подынтегральной функции на множители:
$x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^3-1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1),$

где множитель x^2+x+1 имеет комплексные сопряженные корни.

Тогда

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1}=\frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Откуда получаем

$$12=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)\qquad (*)$$

или

$$12=(A+B+C)x^3+(2B+D)x^2+(2B-C)x+(B-A-D)\qquad (**)$$

Комбинируем оба способа нахождения неизвестных коэффициентов $A, B, C, D.$

При $x=-1$ из равенства (*) получаем $12=-2A,\ \ A=-6.$

При $x=1$ получаем $12=6B,\ \ B=2.$

Приравнивая коэффициенты при x^2 и x в левой и правой частях равенства (**), получаем

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0 = 2B + D, \\ x & 0 = 2B - C, \end{array}$$

Откуда $C = 4$ и $D = -4$.

Итак

$$\int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \int \left(\frac{-6}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x-4}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= -6 \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= -6 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + 4 \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} - 1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2}{(x+1)^6} + 4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 4 \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2}{(x+1)^6} + 2 \int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} - 6 \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2}{(x+1)^6} + 2 \ln\left|x^2 + x + 1\right| - 6 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2 \left(x^2+x+1\right)^2}{(x+1)^6} - 4 \cdot \sqrt{3}\, arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \ln \frac{\left(x^3 - 1\right)^2}{(x+1)^6} - 4 \cdot \sqrt{3}\, arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

(4). Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные сомножители.

153. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x - 1}{\left(x^2+2\right)^2} dx$.

Решение: Так как под знаком интеграла правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет кратные комплексные корни:

$\left(x^2+2\right)^2=0$, $x^2+2=0$, $x^2=-2$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{-2}=\pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$,

то $$\frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Откуда

$$x^3+x-1=Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+2\right) \qquad (*)$$

или

$$x^3+x-1=Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+(B+2D) \qquad (**)$$

Применяя метод «неопределенных коэффициентов», из равенства (**) получаем

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 1=C \\ x^2 & 0=D \\ x & 1=A+2C \\ x^0 & -1=B+2D \end{array}$$

Откуда находим

$$C=1,\ D=0,\ A=-1,\ B=-1.$$

Таким образом

$$\int\frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx=\int\left(\frac{-x-1}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{x}{x^2+2}\right)dx=-\int\frac{x+1}{\left(x^2+2\right)^2}dx+\int\frac{xdx}{x^2+2}=$$

$$=-\int\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}dx+\int\frac{x}{x^2+2}dx-\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(x^2+2\right)^{-2}d\left(x^2+2\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2}-\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2\right)^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\left(x^2+2\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Интеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}$ можно найти с помощью рекуррентной формулы

$$\boxed{\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\left[\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}\right].}$$

Считая $n=2$, $a^2=2$, $u=x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{1}{2(2-1)\cdot 2}\cdot\left[\frac{x}{\left(x^2+2\right)^{2-1}} + (2\cdot 2-3)\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^{2-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \frac{1}{2\left(x^2+2\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) - \int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\left(x^2+2\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{2}} + c =$$

$$= \frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

154. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$ Ответ. $\displaystyle\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} + c.$

155. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx.$ Ответ. $\displaystyle\ln\frac{x^2}{|x+1|} + \frac{6}{x+1} + c.$

156. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x\right)}.$ Ответ. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{2}\, arctgx + c.$

157. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$ Ответ. $\displaystyle\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1+3x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{2}\, arctgx + c.$

158. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)\left(x^2+8x+15\right)}.$ Ответ. $\displaystyle\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{\left|(x+1)(x+5)^5\right|} + c.$

159. $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx.$ Ответ. $\displaystyle\frac{3}{x-2} + \ln\frac{(x-2)^2}{x^2} + c.$

160. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3-1}.$ Ответ. $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

161. $\displaystyle\int \frac{2xdx}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}.$ Ответ. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)} + c.$

Вместо предложенных задач для самостоятельного решения можно решить задачи: Б. 2016, 2022, 2025, 2038, 2040, 2041, 2048.

§6. Интегрирование иррациональных функций

Занятие 7.

В отличие от интегралов от рациональных функций интегралы от иррациональных функций далеко не всегда выражаются конечным числом элементарных функций. Одним из основных методов интегрирования иррациональных функций является так называемый «метод рационализации». С помощью надлежащей подстановки интеграл от иррациональной функции приводится к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим некоторые частные типы иррациональных функций, интегрирующихся в конечном виде.

1. *Интеграл вида* $\int R\left(x, x^{\frac{m}{k}}, x^{\frac{l}{p}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, *где* $m, k, l, p, \ldots, r, s$ *- целые числа, а символ* R *обозначает рациональную функцию от тех переменных, которые стоят под знаком функции. Это значит, что над переменными, стоящими под знаком* R, *произведены только действия сложения, вычитания, умножения и деления.*

Подстановка $x = z^n$, *где* n *- общий знаменатель дробей* $\frac{m}{k}, \frac{l}{p}, \ldots, \frac{r}{s}$, *является рационализирующей, т.е. преобразует указанный интеграл в интеграл от рациональной функции.*

162. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3} - \sqrt[4]{x^5}}$.

Решение. Преобразуем интеграл $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3} - \sqrt[4]{x^5}} = \int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/2} - x^{5/4}}$.

Так как общим знаменателем дробей $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$ является 4, то делаем подстановку $x = z^4$, $dx = 4z^3 dz$.

Тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3} - \sqrt[4]{x^5}} = \int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/2} - x^{5/4}} = \int \frac{z^2 \cdot 4z^3\,dz}{x^6 - z^5} =$$

$$= 4\int \frac{z^5\,dz}{z^5(z-1)} = 4\int \frac{dz}{z-1} = 4\ln|z-1| + c.$$

Возвращаемся к старой переменной. Так как $z = \sqrt[4]{x}$, то

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x^5}} = 4\ln\left|z-1\right| + c = 4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + c.$$

2. *Интегралы вида* $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/k}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right]dx$,

где $m, k, \ldots, r, s$ *- целые числа, а* R *- рациональная функция.*

Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$, *где* n *- общий знаменатель дробей* $\frac{m}{k}, \ldots, \frac{r}{s}$, *является рационализирующей.*

163. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$

Решение.

Применяем подстановку $x-2=z^2$, тогда $x=z^2+2$, $dx=2zdz$ и

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{(z^2+2+1)\cdot 2zdz}{(z^2+2)z} = 2\int \frac{(z^2+2+1)}{z^2+2}dz =$$

$$= 2\int dz + 2\int \frac{dz}{z^2+2} = 2z + \frac{2}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{z}{\sqrt{2}} + c.$$

Возвращаемся к старой переменной. Так как $x-2=z^2$, то $z=\sqrt{x-2}$ и

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = 2z + \frac{2}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{z}{\sqrt{2}} + c = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\,arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + c.$$

164. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx.$

Решение. Применяем подстановку $\frac{x-2}{x} = z^2$,

тогда $x = \frac{2}{1-z^2}$, $dx = \frac{4z}{(1-z^2)^2}dz$ и

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx = \int \frac{1-z^2}{2}\cdot z\cdot\frac{4z}{(1-z^2)^2}dz = 2\int \frac{z^2}{1-z^2}dz = -2\int \frac{z^2}{z^2-1}dz =$$

$$= -2\int \frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz = -2\int dz - 2\int \frac{dz}{z^2-1} = -2z - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c.$$

Возвращаемся к старой переменной. Так как $\frac{x-2}{x} = z^2$, то $z = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ и

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx = -2z - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = c - 2z - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| =$$

$$= c - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1}\right| = c - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right|.$$

3. *Интегралы от дифференциальных биномов* $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$,

где m, n, p *- рациональные числа.*

П.Л.Чебышев доказал, что интегралы от дифференциальных биномов выражаются через конечное число элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) p *- целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Если* m *и* n *- дробные числа, то подстановка* $x = z^k$, *где* k *- общий знаменатель дробей* m *и* n *является рационализирующей, то есть приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.*

2) $\dfrac{m+1}{n}$ *- целое число (положительное, отрицательное или равное нулю), то подстановка* $a+bx^n = z^s$, *где* s *- знаменатель дроби* p $\left(p = \dfrac{r}{s}\right)$, *приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.*

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ *- целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). В этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки* $a+bx^n = x^n z^s$, *где* s *- знаменатель дроби* $p = \dfrac{r}{s}$.

165. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\left(3+2x^2\right)^{3/2}}$.

Решение. Представим интеграл в виде

$$\int \frac{x^3dx}{\left(3+2x^2\right)^{3/2}} = \int x^3\left(3+2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Здесь $p = -\dfrac{3}{2}$, $m = 3$, $n = 2$.

Так как $p = -\dfrac{3}{2}$ не является целым, а $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{3+1}{2} = 2$ - целое, то применяем подстановку $3+2x^2 = z^2$.

Тогда $x=\frac{\left(z^2-3\right)^{1/2}}{\sqrt{2}}$, $dx=\frac{zdz}{\sqrt{2}\sqrt{z^2-3}}$ и

$$\int\frac{x^3dx}{\left(3+2x^2\right)^{3/2}}=\int\frac{\frac{\left(x^2-3\right)^{3/2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{zdz}{\sqrt{2}\left(z^2-3\right)^{1/2}}}{z^3}=\frac{1}{4}\int\frac{z^2-3}{z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-3z^{-2}\right)dz=\frac{1}{4}\left(z+\frac{3}{2}\right)+c=\frac{1}{4}\left(\frac{z^2+3}{z}+c\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3+2x^2+3}{\sqrt{3+2x^2}}+c=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+x^2}{\sqrt{3+2x^2}}+c.$$

166. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение. Преобразуем интеграл к виду

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Так как $p=-\frac{3}{2}$ не является целым, $\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$ также не является целым, а $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$ - целое, то применяем подстановку $1+x^2=x^2z^2$.

Тогда

$$x^2=\frac{1}{z^2-1},\quad 1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1},\quad x=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^{1/2}},\quad x=-\frac{zdz}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}$$

и

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int\frac{-\frac{2dz}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}}{\frac{1}{z^2-1}\cdot\frac{z^3}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}}=-\int\frac{z^2-1}{z^2}dz=$$

$$=-\int dz+\int\frac{dz}{z^2}=-z-\frac{1}{z}+c=c-\frac{z^2+1}{z}.$$

Возвращаемся к старой переменной. Так как $1+x^2=x^2z^2$, то

$$z^2 = \frac{1+x^2}{x^2}, \quad z = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \tilde{n} - \frac{z^2+1}{z} = c - \frac{\frac{1+x^2}{x^2}+1}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = c - \frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

167. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

Решение. Представим интеграл в виде

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}dx.$$

Здесь $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$. Так как p не является целым, а $\frac{m+1}{n} = 1$ - целое, то применяем подстановку $1 + x^{1/3} = z^2$.

Тогда $x = \left(z^2-1\right)^3$, $dx = 6z\left(z^2-1\right)^2 dz$ и

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{z}{\left(z^2-1\right)^2}6z\left(z^2-1\right)^2 dz = 6\int z^2 dz =$$

$$= 6\cdot\frac{z^3}{3} + c = 2\left(1+x^{1/3}\right)^{3/2} + c = 2\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

168. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$ Ответ. $\frac{3}{2}x^{2/3} + 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + c.$

169. $\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}.$ Ответ. $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{1+x} + c.$

170. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x}\,dx}{(1-x)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}.$ Ответ. $\frac{3}{8}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{4/3} + c.$

171. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$ Ответ. $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right| + c.$

172. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx.$ Ответ. $\frac{1}{5}\left(1+x^2\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} + c.$

173. $\int \dfrac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$. Ответ. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{x^3}+c$.

174. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. Ответ. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} z+c$, где $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$

175. $\int \dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$. Ответ. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$.

Вместо предложенных задач для самостоятельного решения можно решить задачи: Б. 1992, 2068, 2070, 2071, 2076, 2078, 2082, 2087.

§7. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций. Тригонометрические подстановки.

Занятие 8.

1. ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x,\cos x)dx$, *где* R - *рациональная функция относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$, *приводятся к интегралам от рациональных функций относительно* z *с помощью так называемой универсальной подстановки*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z. \qquad (*)$$

При этом

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg} z,\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

176. Найти интеграл $\int \dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

Решение. Так как под интегралом стоит функция, рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$, применяем подстановку (*).
Тогда

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx=\frac{2dz}{1+z^2} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\cdot\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}\cdot\frac{2dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{1+z^2+2z}{z\cdot\left(1+z^2+1-z^2\right)}dz = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}+z+2\right)dz = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{z^2}{4}+z+c.$$

Так как $z = tg\frac{x}{2}$, то, возвращаясь к старой переменной, получаем

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{z^2}{4}+z+c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2}+c.$$

177. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Решение.

Полагаем $tg\frac{x}{2} = z$, тогда $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ и

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2\cdot\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int\frac{2dz}{z^2+4z-1} =$$

$$= 2\int\frac{d(z+2)}{(z+2)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}}\right|+c = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+c\cdot$$

2. ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *где* $R(\sin x, \cos x)$ - *рациональная относительно* $\sin x$, $\cos x$ *функция, не изменяющаяся при замене* $\sin x$ *и* $\cos x$ *соответственно на* $-\sin x$, $-\cos x$, *приводятся к интегралам от рациональной функции аргумента* z *с помощью подстановки* $tgx = z$ *(или* $ctgx = z$*).*

При этом

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg}\, z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

К этому же классу относятся интегралы вида

$$\int R(\operatorname{tg} x)dx \quad \textit{(или} \int R(\operatorname{ctg} x)dx\textit{)}.$$

178. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x}$.

Решение. Так как подынтегральная функция

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x} \quad \text{и}$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^2}{(-\sin x)^2 + 4(-\sin x)\cdot(-\cos x)} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x} = R(\sin x, \cos x),$$

т.е. эта функция не изменяется при замене $\sin x$ и $\cos x$ на $-\sin x$, $-\cos x$, то применяем подстановку $\operatorname{ctg} x = z$.

Тогда

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$x = \operatorname{arcctg} z, \quad dx = -\frac{1}{1+z^2}dz \quad \text{и}$$

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x} = -\int \frac{\dfrac{z^2}{1+z^2}\cdot\dfrac{1}{1+z^2}dz}{\dfrac{1}{1+z^2} + 4\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}} = -\int \frac{z^2}{(1+4z)(1+z^2)}dz$$

.

Под знаком полученного интеграла правильная рациональная дробь. В силу §4 (3) получаем

$$\frac{z^2}{(1+4z)(1+z^2)} = \frac{A}{1+4z} + \frac{Bz+C}{1+z^2}.$$

Откуда получаем

$$z^2 = A(1+z^2) + (Bz+C)(1+4z) \qquad (*)$$

или

$$z^2 = (A+4B)z^2 + (B+4C)z + (A+C) \qquad (**)$$

При $z = -\dfrac{1}{4}$ из равенства (*) получаем $\dfrac{1}{16} = \dfrac{17}{16}A$, $A = \dfrac{1}{17}$.

Приравнивая коэффициенты при z^1 и z^0 в левой и правой частях равенства (**), получаем

$$\begin{array}{c|l} z & B+4C=0, \\ z^0 & A=C=0, \end{array} \qquad \text{откуда } C=-\frac{1}{17} \text{ и } B=\frac{4}{17}.$$

Таким образом

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}=-\int \frac{z^2}{(1+4z)\left(1+z^2\right)}dz=$$

$$=-\int\left(\frac{\frac{1}{17}}{1+4z}+\frac{\frac{4}{17}z-\frac{1}{17}}{1+z^2}\right)dz=-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{d(1+4z)}{1+4z}-\frac{4}{17}\int\frac{z}{1+z^2}dz+\frac{1}{17}\int\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln|1+4z|-\frac{4}{17}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)-\frac{1}{17}\operatorname{arcctg} z+c.$$

Так как $z=\operatorname{ctg} x$, то $\operatorname{arcctg} z=x$, $1+z^2=1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}=\sin^{-2} x$,

$$1+4z=1+4\operatorname{ctg} x=\frac{\sin x+4\cos x}{\sin x} \text{ и}$$

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}=-\frac{1}{68}\ln|1+4z|-\frac{2}{17}\ln\left(1+z^2\right)-\frac{1}{17}\operatorname{arcctg} z+c=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln\left|\frac{\sin x+4\cos x}{\sin x}\right|-\frac{2}{17}\ln\sin^{-2} x-\frac{1}{17}x+c=$$

$$=-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+\frac{1}{68}\ln|\sin x|+\frac{4}{17}\ln|\sin x|-\frac{1}{17}x+c=$$

$$=c-\frac{1}{17}x+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|.$$

179. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1-\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение.

Полагаем $\operatorname{tg} x=z$, тогда $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}=\dfrac{1}{z}$, $x=\operatorname{arctg} z$, $dx=\dfrac{dz}{1+z^2}$

$$\text{и} \quad \int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}dx=\int\frac{z\cdot\frac{dz}{1+z^2}}{1-\frac{1}{z^2}}=\int\frac{z^3dz}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}=\int\frac{z^3dz}{z^4-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(z^4-1\right)}{z^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left|z^4-1\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}^4\,x-1\right|+c.$$

3. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \qquad (1)$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \qquad (2)$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \qquad (3)$$

приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin z$ *и* $\cos z$ *функции при помощи соответствующей тригонометрической подстановки:*

для интеграла (1) $x=a\sin z$ $\left(x=a\cos z\right)$,

для интеграла (2) $x=a\,tgz$ $\left(x=a\,ctg\,z\right)$,

для интеграла (3) $x=a\sec z$ $\left(x=a\,\mathrm{cosec}\,z\right)$.

180. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Так как интеграл относится к виду (1) и $a=3$, применяем подстановку $x=3\sin z$. Тогда

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 z}=3\sqrt{1-\sin^2 z}=3\cos z$, $dx=3\cos z\,dz$ и

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{9\sin^2 z\cdot 3\cos z\,dz}{3\cos z}=9\int\sin^2 z\,dz=9\int\frac{1-\cos 2z}{2}dz=$$

$$=\frac{9}{2}\int dz-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos(2z)\,d(2z)=\frac{9}{2}z-\frac{9}{4}\sin 2z+c.$$

Так как $x=3\sin z$, то $\sin z=\frac{x}{3}$, $z=\arcsin\frac{x}{3}$,

$$\sin 2z=2\sin z\cdot\cos z=2\sin z\cdot\sqrt{1-\sin^2 z}=2\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}.$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9}{2}z-\frac{9}{4}\sin 2z+c=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}+c=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{9-x^2}+c.$$

181. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Так как интеграл относится к виду (2) и $a=2$, применяем подстановку $x=2tgz$. Тогда

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4tg^2z+4}=2\sqrt{1+tg^2z}=2\sec z=\dfrac{2}{\cos z}$, $dx=\dfrac{2\,dz}{\cos^2 z}$ и

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int \frac{\frac{2dz}{\cos^2 z}}{4\,\mathrm{tg}^2 z\cdot\frac{2}{\cos z}}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos z}{\sin^2 z}dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^{-2} z\, d(\sin z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^{-1} z}{-1}+c=c-\frac{1}{4\sin z}.$$

Так как $x=2\,\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{tg}\, z=\dfrac{x}{2}$, $\mathrm{ctg}\, z=\dfrac{2}{x}$,

$$\frac{1}{\sin^2 z}=1+\mathrm{ctg}^2 z=1+\frac{4}{x^2}=\frac{x^2+4}{x^2},\qquad \frac{1}{\sin z}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$

и $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=c-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin z}=c-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}.$$

182. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

Решение. Так как интеграл относится к виду (3) и $a=2$, применяем подстановку $x=2\sec z=\dfrac{2}{\cos z}$. Тогда

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\sec^2 z-4}=2\sqrt{\sec^2 z-1}=2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}-1}=2\,\mathrm{tg}\, z,$$

$dx=-\dfrac{2}{\cos^2 z}\cdot(-\sin z)dz=2\dfrac{\sin z}{\cos^2 z}dz$ и

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=\int\frac{2\,\mathrm{tg}\, z}{\frac{2}{\cos z}}\cdot 2\frac{\sin z}{\cos^2 z}dz=2\int\mathrm{tg}^2 z\, dz=$$

$$=2\int\left(\frac{1}{\cos^2 z}-1\right)dz=2\,\mathrm{tg}\, z-2z+c.$$

Так как $x=\dfrac{2}{\cos z}$, то $\cos z=\dfrac{2}{x}$, $z=\arccos\dfrac{2}{x}$,

$$tg^2 z=\frac{1}{\cos^2 z}-1=\frac{x^2}{4}-1,\quad \operatorname{tg} z=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=2tgz-2z+c=\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

183. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$. Ответ. $\displaystyle c-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}-4}{2tg\frac{x}{2}+1}\right|$.

184. $\displaystyle\int\frac{dx}{5-3\cos x}$. Ответ. $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c$.

185. $\displaystyle\int\frac{dx}{4+\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x}$.

Ответ. $\displaystyle\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\sin x+2\cos x|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}+c$.

186. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x}$.

Ответ. $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}x+1+\sqrt{2}}\right|+c$.

187. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}$. Ответ. $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$.

188. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$. Ответ. $\displaystyle\frac{1}{6}\arccos\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}+c$.

189. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. Ответ. $\displaystyle c-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}$.

§8. Расчетные задания по теме «Неопределенный интеграл»

Задача 1.

Найти неопределенные интегралы:

1.1. а) $\int \frac{3-5x}{\sqrt{7x^2+8}}dx$ 1.2. а) $\int \frac{4+3x}{5x^2-2}dx$

б) $\int \frac{2-3x}{5x^2+7}dx$ б) $\int \frac{3x+8}{\sqrt{5-7x^2}}dx$

1.3. а) $\int \frac{3-7x}{\sqrt{3x^2+8}}dx$ 1.4. а) $\int \frac{1-2x}{2x^2-3}dx$

б) $\int \frac{4-5x}{2x^2+3}dx$ б) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

1.5. а) $\int \frac{2+5x}{\sqrt{5x^2+6}}dx$ 1.6. а) $\int \frac{3+5x}{7x^2-2}dx$

б) $\int \frac{5-3x}{2x^2+7}dx$ б) $\int \frac{x-3}{\sqrt{7+2x^2}}dx$

1.7. а) $\int \frac{3+8x}{\sqrt{3x^2+5}}dx$ 1.8. а) $\int \frac{3x-4}{9-7x^2}dx$

б) $\int \frac{4-3x}{2x^2+5}dx$ б) $\int \frac{4+2x}{3x^2-1}dx$

1.9. а) $\int \frac{4+3x}{5x^2+3}dx$ 1.10. а) $\int \frac{1-7x}{\sqrt{2x^2-1}}dx$

б) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{3+2x^2}}dx$ б) $\int \frac{1-x}{2+5x^2}dx$

1.11. а) $\int \frac{3x+8}{5+7x^2}dx$ 1.12. а) $\int \frac{2x+1}{3+4x^2}dx$

б) $\int \frac{x-7}{\sqrt{8+9x^2}}dx$ б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3-2x^2}}dx$

1.13. а) $\int \frac{2x+3}{2x^2+9}dx$ 1.14. а) $\int \frac{x+3}{3x^2-4}dx$

б) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{3x^2-1}}dx$ б) $\int \frac{2x-7}{\sqrt{2-3x^2}}dx$

1.15. а) $\int \frac{1-8x}{7+3x^2}dx$ 1.16. а) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{2-5x^2}}dx$

б) $\int \frac{x-8}{\sqrt{5x^2-4}}dx$ б) $\int \frac{7-3x}{2-3x^2}dx$

1.17. а) $\int \frac{4+5x}{\sqrt{6-2x^2}}dx$ 1.18. а) $\int \frac{2-7x}{8+5x^2}dx$

б) $\int \frac{5x-7}{7x^2+4}dx$ б) $\int \frac{6x-3}{\sqrt{7x^2+5}}dx$

1.19. а) $\int \frac{3-5x}{5x^2+9}dx$ 1.20. а) $\int \frac{7x-3}{5x^2-6}dx$

б) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{7x^2+8}}dx$ б) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{8-3x^2}}dx$

1.21. а) $\int \frac{3x+7}{\sqrt{2-4x^2}}dx$ 1.22. а) $\int \frac{x-1}{8+3x^2}dx$

б) $\int \frac{3x-7}{5x^2-3}dx$ б) $\int \frac{3-5x}{\sqrt{4x^2+7}}dx$

1.23. а) $\int \frac{7x-3}{3x^2+1}dx$ 1.24. а) $\int \frac{7x-5}{10-3x^2}dx$

б) $\int \frac{5x+8}{\sqrt{9x^2-4}}dx$ б) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{7x^2+3}}dx$

1.25. а) $\int \frac{8x-1}{\sqrt{7-3x^2}}dx$ 1.26. а) $\int \frac{3x-1}{5x^2+13}dx$

б) $\int \frac{4-2x}{3-7x^2}dx$ б) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x^2-10}}dx$

1.27. а) $\int \frac{3-2x}{9x^2+8}dx$ 1.28. а) $\int \frac{4-5x}{\sqrt{8-5x^2}}dx$

б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-7}}dx$ б) $\int \frac{2-4x}{10x^2+3}dx$

1.29. а) $\int \frac{1-x}{\sqrt{7-5x^2}}dx$ 1.30. а) $\int \frac{4-x}{3+7x^2}dx$

б) $\int \frac{x-2}{3x^2+10}dx$ б) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{5-2x^2}}dx$

Задача 2.

Найти неопределенные интегралы:

2.1. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ 2.2. а) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

б) $\int \frac{(\operatorname{arctg} 2x)^2}{1+4x^2}dx$ б) $\int e^{3\sin 2x} \cdot \cos 2x\, dx$

в) $\int x\cos\left(x^2\right)dx$ в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

2.3. а) $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$ 2.4. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}}dx$

б) $\int \frac{x}{\sin^2\left(3x^2\right)}dx$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$

в) $\int \frac{\sqrt{x}+3\ln x}{x}dx$ в) $\int e^x \sin\left(2e^x\right)dx$

2.5. а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$

б) $\int \frac{(\sin x-\cos x)}{(\cos x+\sin x)^7}dx$

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$

2.6. а) $\int \frac{e^t}{\sqrt{1-4e^{2t}}}dt$

б) $\int x^2\cdot\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x\sqrt{1+tg2x}}$

2.7. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

б) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$

в) $\int e^x\cdot \mathrm{tg}\left(e^x\right)dx$

2.8. а) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

б) $\int \frac{x}{1+4x^4}dx$

в) $\int x^2\,\mathrm{ctg}\left(x^3\right)dx$

2.9. а) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

б) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-3x^{10}}}dx$

в) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-9}dx$

2.10. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}dx$

б) $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}$

в) $\int x^2\cdot \mathrm{tg}\left(x^3\right)dx$

2.11. а) $\int x^3e^{x^4}\,dx$

б) $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^4}}dx$

в) $\int \frac{x^2}{\sin^2\left(x^3\right)}dx$

2.12. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^6}}dx$

б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\mathrm{ctg}\,x}}$

в) $\int \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)\cdot \mathrm{arcctg}\,2x}$

2.13. а) $\int e^{2x}\sin\left(e^{2x}\right)dx$

2.14. а) $\int x\cdot\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$

б) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

в) $\int \frac{dx}{(\arcsin 3x)^2 \sqrt{1-9x^2}}$

б) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$

в) $\int \frac{\ln x \, dx}{x}$

2.15. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5-x^8}} dx$

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5 \ln x + 2}}$

в) $\int e^{-(x^2+1)} x \, dx$

2.16. а) $\int x^3 \sin\left(x^4\right) dx$

б) $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

в) $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6 - 2} \, dx$

2.17. а) $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{3-2x^5}} dx$

б) $\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, 3x}}{\cos^2(3x)} dx$

в) $\int \frac{dx}{x \cdot (7 \ln x + 3)}$

2.18. а) $\int e^{\cos\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$

б) $\int \frac{x^3}{2x^4 - 7} dx$

в) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right) \cdot \sqrt{\mathrm{arctg}\, 3x}}$

2.19. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-5x^8}}$

в) $\int \frac{\sqrt{5 \ln x + 3}}{x} dx$

2.20. а) $\int \frac{3x - (\mathrm{arctg}\, 2x)^4}{1+4x^2} dx$

б) $\int x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{3}} dx$

в) $\int \frac{x \, dx}{2x^4 + 7}$

2.21. а) $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{4+x^5}} dx$

б) $\int \frac{\mathrm{e}^{3 \,\mathrm{arctg}\, 2x}}{1+4x^2} dx$

2.22. а) $\int \frac{x^3}{\sin^2\left(x^4\right)} dx$

б) $\int \frac{\left(x^2+1\right)}{\left(x^3+3x+1\right)^5} dx$

в) $\int \frac{5\ln^3 x+3}{x}dx$

в) $\int \frac{4\arcsin 3x-5}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

2.23. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}(2x+1)}}{\sin^2(2x+1)}dx$

в) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5-2x^8}}dx$

2.24. а) $\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$

б) $\int \frac{e^x}{9e^{2x}+4}dx$

в) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$

2.25. а) $\int \frac{e^{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

б) $\int \frac{x^2}{4x^6+9}dx$

в) $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{2x^5-3}}dx$

2.26. а) $\int \frac{e^{tg\frac{x}{3}}}{\cos^2\frac{x}{3}}dx$

б) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-3^{2x}}}dx$

в) $\int x^3\cdot\sqrt[4]{5x^4+7}\;dx$

2.27. а) $\int \frac{\sqrt[5]{1+3\ln x}}{x}dx$

б) $\int \frac{e^{2t}}{\sqrt{4-e^{4t}}}dt$

в) $\int \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2.28. а) $\int e^{2x}\mathrm{ctg}\left(e^{2x}\right)dx$

б) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3}{\cos^2\left(x^4\right)}dx$

2.29. а) $\int \frac{e^{\mathrm{arcctg} 3x}}{1+9x^2}dx$

2.30. а) $\int \frac{e^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$

б) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{2x^4-1}}dx$

б) $\int \frac{\mathrm{tg}(\ln x)}{x}dx$

в) $\int \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

в) $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{4x^6-3}\,dx$

Задача 3.

Найти неопределенные интегралы:

3.1. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

3.2. $\int \frac{1-x}{x^2-x+1}dx$

3.3. $\int \frac{1-x}{x^2+3x-10}dx$

3.4. $\int \frac{1-x}{x^2+2x+3}dx$

3.5. $\int \frac{x}{4x^2+4x+5}dx$

3.6. $\int \frac{1-x}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx$

3.7. $\int \frac{2+3x}{\sqrt{2-6x-9x^2}}dx$

3.8. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$

3.9. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$

3.10. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

3.11. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

3.12. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$

3.13. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

3.14. $\int \frac{3+4x}{2x^2-3x+1}dx$

3.15. $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18}dx$

3.16. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$

3.17. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$

3.18. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$

3.19. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

3.20. $\int \frac{3x+6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

3.21. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

3.22. $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$

3.23. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$

3.24. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$

3.25. $\int \frac{x-1}{x^2+3x+4}dx$

3.26. $\int \frac{x}{x^2-6x+10}dx$

3.27. $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

3.28. $\int \frac{x-2}{\sqrt{9x^2+4x+1}}dx$

3.29. $\int \frac{2x+1}{3x^2-3x+2}dx$

3.30. $\int \frac{3-x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

Задача 4.

Найти неопределенные интегралы:

4.1. а) $\int \sin^3 2x\,dx$

б) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x\,dx$

в) $\int \mathrm{ctg}^2 3x\left(1+\mathrm{ctg}^3 3x\right)dx$

4.2. а) $\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt{\sin 3x}}dx$

б) $\int \sin^6 x\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^4 \frac{x}{2}}$

4.3. а) $\int \sin^3 \frac{x}{2}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}\,dx$

б) $\int \cos^6 x\,dx$

в) $\int \mathrm{tg}^2 2x\left(1+\mathrm{tg}^3 2x\right)dx$

4.4. а) $\int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\sin\frac{x}{2}}}dx$

б) $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x\,dx$

в) $\int \mathrm{tg}^5 3x\,dx$

4.5. а) $\int \cos^3 \frac{x}{3}\,dx$

б) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x\,dx$

в) $\int \mathrm{tg}^5 3x \cdot \sec^4 3x\,dx$

4.6. а) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^4 2x\,dx$

б) $\int \sin^4 \frac{x}{2}\cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$

4.7. а) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^4 2x}\,dx$

б) $\int \sin^6 3x\,dx$

в) $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}\right)dx$

4.8. а) $\int \sin^3\frac{x}{3}\cdot\cos^5\frac{x}{3}\,dx$

б) $\int \cos^6 2x\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\cos^6 3x}$

4.9. а) $\int \sin^3 3x\,dx$

б) $\int \sin^4 5x\cdot\cos^2 5x\,dx$

в) $\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\right)dx$

4.10. а) $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x}\,dx$

б) $\int \sin^2 3x\cdot\cos^4 3x\,dx$

в) $\int \operatorname{ctg}^5\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cosec}^4\frac{x}{2}\,dx$

4.11. а) $\int \cos^3\frac{x}{2}\sqrt{\sin\frac{x}{2}}\,dx$

б) $\int \sin^4 2x\cdot\cos^4 2x\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\sin^6 3x}$

4.12. а) $\int \cos^3 2x\,dx$

б) $\int \sin^6 5x\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\cos^4\frac{x}{2}}$

4.13. а) $\int \sin^3 3x\sqrt{\cos^3 3x}\,dx$

б) $\int \cos^4 2x\,dx$

в) $\int \operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\,dx$

4.14. а) $\int \cos^3 2x\cdot\sin^4 2x\,dx$

б) $\int \sin^4\frac{x}{2}\,dx$

в) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 3x}$

4.15. а) $\int \cos^3\frac{x}{2}\,dx$

б) $\int \sin^4 3x\cdot\cos^4 3x\,dx$

в) $\int \operatorname{ctg}^3 2x(2+\operatorname{ctg}2x)\,dx$

4.16. а) $\int \frac{\sin^5\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}\,dx$

б) $\int \left(1+2\sin^4 x\right)\cdot\cos^4 x\,dx$

в) $\int \operatorname{tg}^3 2x\cdot\left(2+\sec^4 2x\right)dx$

4.17. а) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^6 2x}\, dx$

б) $\int \cos^6 \frac{x}{2}\, dx$

в) $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{2}\left(3 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) dx$

4.18. а) $\int \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\sqrt[4]{\cos\frac{x}{2}}}\, dx$

б) $\int \sin^4 3x \cdot \left(1 - 2\cos^2 3x\right) dx$

в) $\int \sqrt{\mathrm{ctg}^3 2x} \cdot \mathrm{cosec}^4 2x\, dx$

4.19. а) $\int \cos^3 3x\, dx$

б) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\left(1 + \sin^4 \frac{x}{2}\right) dx$

в) $\int \sqrt[3]{\mathrm{tg}^7 2x} \cdot \sec^4 2x\, dx$

4.20. а) $\int \frac{\sin^5 2x}{\cos^4 2x}\, dx$

б) $\int \sin^2 3x \cdot \left(1 + \cos^4 3x\right) dx$

в) $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^4 \frac{x}{2}}$

4.21. а) $\int \sin^3 \frac{x}{2}\, dx$

б) $\int \cos^4 2x \cdot (1 - 2\sin^2 2x)\, dx$

в) $\int \mathrm{tg}\, 3x \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^3 3x\right) dx$

4.22. а) $\int \cos^3 2x \cdot \sqrt{\sin^3 2x}\, dx$

б) $\int \sin^4 3x \cdot \left(2\cos^2 3x - 1\right) dx$

в) $\int \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^3 \frac{x}{2}\right) dx$

4.23. а) $\int \sin^3 2x \cdot \sqrt[4]{\cos 2x}\, dx$

б) $\int \left(1 + \cos^2 x\right) \cdot \sin^4 x\, dx$

в) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^5 3x}$

4.24. а) $\int \cos^3 3x \cdot \sin^2 3x\, dx$

б) $\int \sin^2 2x \cdot \left(1 - \cos^4 2x\right) dx$

в) $\int \mathrm{tg}^5 \frac{x}{3}\, dx$

4.25. а) $\int \sin^3 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}\, dx$

б) $\int \left(1 + \sin^2 x\right) \cdot \cos^4 x\, dx$

4.26. а) $\int \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\cos^6 \frac{x}{2}}\, dx$

б) $\int \left(2 - \cos^2 x\right) \cdot \sin^4 x\, dx$

в) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 2x}$

в) $\int \operatorname{tg}^{3/2} 3x \cdot \sec^4 3x \, dx$

4.27. а) $\int \sin^3 \frac{x}{3} dx$

б) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\left(1+\sin^4 \frac{x}{2}\right) dx$

в) $\int \operatorname{tg}^2 2x \cdot \sec^4 2x \, dx$

4.28. а) $\int \frac{\sin^3 3x}{\sqrt{\cos 3x}} dx$

б) $\int \cos^6 \frac{x}{4} dx$

в) $\int \operatorname{ctg} 2x \cdot \left(1+\operatorname{ctg}^3 2x\right) dx$

4.29. а) $\int \cos^3 \frac{x}{4} \cdot \sin^2 \frac{x}{4} dx$

б) $\int \sin^6 \frac{x}{2} dx$

в) $\int \operatorname{ctg}^{5/2} 2x \cdot \operatorname{cosec}^4 2x \, dx$

4.30. а) $\int \cos^3 \frac{x}{3} \cdot \sin^5 \frac{x}{3} dx$

б) $\int \left(1-2\cos^2 2x\right) \cdot \sin^4 2x \, dx$

в) $\int \operatorname{ctg}^3 3x \cdot \operatorname{cosec}^4 3x \, dx$

Задача 5.

Найти неопределенные интегралы:

5.1. а) $\int (2x+3) \cdot \sin 2x \, dx$

б) $\int \arccos \frac{x}{2} dx$

в) $\int \ln(x+1) dx$

г) $\int x^3 \sin\left(x^2\right) dx$

5.2. а) $\int (x+4) \cdot e^{-2x} dx$

б) $\int x \cdot \operatorname{arctg} 2x \, dx$

в) $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$

г) $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx$

5.3. а) $\int (3x-2) \cdot e^{-5x} dx$

б) $\int \operatorname{arctg} 2x \, dx$

в) $\int x \cdot \cos^2 x \, dx$

5.4. а) $\int (3x-2) \cdot \cos 3x \, dx$

б) $\int \arcsin \frac{x}{2} dx$

в) $\int x \cdot \ln(x+1) dx$

г) $\int \ln\left(4x^2+1\right)dx$

г) $\int \frac{x^3}{\sin^2\left(x^2\right)}dx$

5.5. а) $\int (5-x)\cdot \sin\frac{x}{2}dx$

б) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

в) $\int \left(3x^2+2\right)\cdot \ln x\,dx$

г) $\int x^3\cdot e^{x^2}\,dx$

5.6. а) $\int (2x-5)\cdot e^{-3x}\,dx$

б) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$

в) $\int x^2\cdot \ln(x+1)dx$

г) $\int x\cdot \sin^2 x\,dx$

5.7. а) $\int (2x-1)\cdot \cos\frac{x}{2}dx$

б) $\int \arccos 2x\,dx$

в) $\int \ln(x+2)dx$

г) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

5.8. а) $\int (3-x)\cdot \sin 5x\,dx$

б) $\int \operatorname{arcctg} 2x\,dx$

в) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

5.9. а) $\int (2-x)\cdot e^{3x}\,dx$

б) $\int x\cdot \operatorname{arcctg} x\,dx$

в) $\int \ln\left(9x^2+1\right)dx$

г) $\int x\cdot \sin^2 3x\,dx$

5.10 а) $\int (1-x)\cdot \cos 3x\,dx$

б) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$

в) $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$

г) $\int x^3\cdot e^{3x^2}\,dx$

5.11. а) $\int (5x-3)\cdot \sin\frac{x}{2}dx$

б) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$

в) $\int x\cdot \ln(x+2)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

5.12 а) $\int (x-5)\cdot e^{-2x}\,dx$

б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$

в) $\int x^2\cdot \ln(x-1)dx$

г) $\int x\cdot \cos^2 2x\,dx$

5.13. а) $\int x\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+e^{2x}\right)dx$

б) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

в) $\int\left(7-x^{10}\right)\cdot\ln x\,dx$

г) $\int x\cdot\operatorname{ctg}^2 x\,dx$

5.14. а) $\int(3x-4)\cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$

б) $\int\arccos 3x\,dx$

в) $\int\ln\left(x^2+9\right)dx$

г) $\int\frac{x^3}{\cos^2\left(x^2\right)}dx$

5.15. а) $\int(3-x)\cdot e^{3x}\,dx$

б) $\int\operatorname{arcctg}3x\,dx$

в) $\int\ln\left(16x^2+1\right)dx$

г) $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

5.16. а) $\int(x+3)\cdot e^{-\frac{x}{3}}\,dx$

б) $\int\operatorname{arcctg}x\,dx$

в) $\int x\cdot\ln(2-x)dx$

г) $\int\frac{x}{\sin^2 3x}dx$

5.17. а) $\int x\cdot\left(\cos 2x-e^{\frac{x}{2}}\right)dx$

б) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}dx$

в) $\int\left(3x^2+7\right)\cdot\ln 2x\,dx$

г) $\int x^3\cdot\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$

5.18. а) $\int(2-3x)\cdot\sin 2x\,dx$

б) $\int\arcsin 2x\,dx$

в) $\int x^2\cdot\ln(x+2)dx$

г) $\int x^3\cos\left(x^2\right)dx$

5.19. а) $\int(3x-1)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

б) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

в) $\int\ln(1-x)dx$

г) $\int x\cdot\operatorname{tg}^2 2x\,dx$

5.20. а) $\int(5x-2)\cdot\sin 3x\,dx$

б) $\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-2x}}dx$

в) $\int\ln\left(x^2+16\right)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{-2x^2}\,dx$

5.21. а) $\int x\cdot\left(\sin 2x+e^{-3x}\right)dx$

б) $\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

в) $\int \left(1-x^3\right)\cdot \ln 3x\,dx$

г) $\int \frac{x}{\cos^2 2x}dx$

5.22. а) $\int e^x \sin 3x\,dx$

б) $\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1+2x}}dx$

в) $\int x^2\cdot \ln(2-x)dx$

г) $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$

5.23. а) $\int (3x+1)\cdot \cos 4x\,dx$

б) $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+2x}}dx$

в) $\int \ln(x-2)dx$

г) $\int \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$

5.24. а) $\int (1-2x)\cdot e^{-3x}\,dx$

б) $\int \operatorname{arctg} 3x\,dx$

в) $\int x^2\cdot \ln(x-2)dx$

г) $\int \frac{x^3}{\cos^2\left(3x^2\right)}dx$

5.25. а) $\int (5-x)\cdot \cos\frac{x}{3}dx$

б) $\int x\cdot \operatorname{arcctg}\frac{x}{2}dx$

в) $\int \ln(2-x)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx$

5.26. а) $\int (3x-1)\cdot e^{-x}\,dx$

б) $\int x\cdot \arccos\frac{x}{3}dx$

в) $\int \ln\left(x^2+25\right)dx$

г) $\int x^3 \cos\left(3x^2\right)dx$

5.27. а) $\int e^{2x}\cos x\;dx$

б) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx$

в) $\int \ln\left(3x^2-1\right)dx$

г) $\int \frac{x^3}{\sin^2\left(2x^2\right)}dx$

5.28. а) $\int (2+3x)\cdot \sin 2\,dx$

б) $\int x\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$

в) $\int x\cdot \ln(1-x)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{2x^2}\,dx$

5.29. а) $\int (7x+1)\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx$

б) $\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-2x}}\,dx$

в) $\int \ln\left(25x^2+1\right)dx$

г) $\int x^3\cdot e^{\frac{x^2}{3}}\,dx$

5.30. а) $\int (2-x)\cdot e^{4x}\,dx$

б) $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$

в) $\int x^2\cdot\ln(x+3)\,dx$

г) $\int x\cdot\operatorname{ctg}^2 3x\,dx$

Задача 6.

Найти неопределенные интегралы:

6.1. а) $\int \frac{2x^2+7x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

б) $\int \frac{x^4+2x^2+x+1}{x^4+x^2}\,dx$

в) $\int \frac{5x^2-4x+12}{x^3-8}\,dx$

6.2. а) $\int \frac{2x^2+4x-8}{x^3-4x}\,dx$

б) $\int \frac{x^3-x^2-2x-2}{(x-1)\cdot(x+1)^2}\,dx$

в) $\int \frac{3-2x+x^2-x^3}{x^4+x^2}\,dx$

6.3. а) $\int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-x}\,dx$

б) $\int \frac{x^3+7x^2+7x-4}{x^3+4x^2}\,dx$

в) $\int \frac{2-4x-x^2}{x^3-x^2+x}\,dx$

6.4. а) $\int \frac{3x^2+2x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx$

б) $\int \frac{2-3x+4x^2-x^3}{2x^2-x^3}\,dx$

в) $\int \frac{2x^3+4x^2-4x+6}{x^4-1}\,dx$

6.5. а) $\int \frac{x^2-14x-3}{(x-5)\cdot\left(x^2-1\right)}\,dx$

б) $\int \frac{x^4-4x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$

в) $\int \frac{8x^2-2x+4}{(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx$

6.6. а) $\int \frac{27-8x-x^2}{(x-4)\cdot\left(x^2-9\right)}\,dx$

б) $\int \frac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x^3+x^2}\,dx$

в) $\int \frac{2x-6x^2-1}{x^3+1}\,dx$

6.7. а) $\int \frac{2x^2+7x-40}{x^3-x^2-20x}dx$

б) $\int \frac{5x^3-11x^2+6x-1}{x^3-2x^2+x}dx$

в) $\int \frac{6x^3+9x+6}{x^4+3x^2}dx$

6.8. а) $\int \frac{2x^2+6x-30}{(x-2)\cdot(x^2-9)}dx$

б) $\int \frac{x^5+x^4+x^2-x-1}{x^3+x^2}dx$

в) $\int \frac{x^2-4x-3}{x^3+x^2+x}dx$

6.9. а) $\int \frac{4x^2-24x-10}{x^3-4x^2-5x}dx$

б) $\int \frac{x^3+2x^2-x-1}{x^3+x^2}dx$

в) $\int \frac{7x^3+6x^2+4x+8}{x^4-16}dx$

6.10. а) $\int \frac{36-10x}{x^3+4x^2-12x}dx$

б) $\int \frac{4x+4x^2-x^3}{(x^2-4)^2}dx$

в) $\int \frac{4x^4+18x^2-x+3}{4x^3+x}dx$

6.11. а) $\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+x^2-2x}dx$

б) $\int \frac{2x^3-x^4+x^2+x-2}{2x^2-x^3}dx$

в) $\int \frac{2x^2+4x+9}{x^3-1}dx$

6.12. а) $\int \frac{x^2+x+6}{x^3-4x}dx$

б) $\int \frac{x^4-x^3+3x^2+3x-2}{x^3-x^2+x}dx$

в) $\int \frac{x^3+2x^2-8x+4}{x^4+4x^2}dx$

6.13. а) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}dx$

б) $\int \frac{7x^3+30x^2+3x-4}{x^3+4x^2}dx$

в) $\int \frac{2x^2-6x-4}{x^3+2x^2+4x}dx$

6.14. а) $\int \frac{4x^2+5x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$

б) $\int \frac{9x^2-2x^3+x-5}{5x^2-x^3}dx$

в) $\int \frac{8x^2-18x+90}{x^4-81}dx$

6.15. а) $\int \frac{8x-16}{(x-5)\cdot(x^2-1)}dx$

б) $\int \frac{4-2x-2x^2-4x^3-x^5}{x^3+4x}dx$

в) $\int \frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^4-x^3+x^2}dx$

6.16. а) $\int \frac{x^2-9x+6}{(x-4)\cdot(x^2-9)}dx$

б) $\int \frac{3x^3+13x^2-x-4}{x^3+4x^2}dx$

в) $\int \frac{16-10x}{x^3+8}dx$

6.17. а) $\int \frac{4x^2+18x-70}{(x-1)\cdot(x^2-25)}dx$

б) $\int \frac{2x^4-x^2+x-1}{2x^3+x}dx$

в) $\int \frac{x^3-10x+5}{x^4+5x^2}dx$

6.18. а) $\int \frac{x^2+20x-80}{(x-2)\cdot(x^2-16)}dx$

б) $\int \frac{3x^3-5x^2-2x+6}{x^3-3x^2}dx$

в) $\int \frac{6x^2-8x+12}{x^3-2x^2+4x}dx$

6.19. а) $\int \frac{2x^2+15x+7}{(x+1)\cdot(x^2+x-6)}dx$

б) $\int \frac{2x^5+4x^4+6x^3-4x^2+8}{x^4+2x^3+4x^2}dx$

в) $\int \frac{5x^3-7x^2+48x-144}{x^4-256}dx$

6.20. а) $\int \frac{9x-12}{x^3-5x^2-6x}dx$

б) $\int \frac{2x^3+2x^2-13x+9}{(x-2)^2\cdot(x^2+x+1)}dx$

в) $\int \frac{6-4x+3x^2-x^3}{x^3+3x}dx$

6.21. а) $\int \frac{2x^2-9x-11}{(x+2)\cdot(x^2-4x+3)}dx$

б) $\int \frac{x^5+5x^3+6x^2-3x+6}{x^4+3x^2}dx$

в) $\int \frac{7x^2+7x+24}{x^3-27}dx$

6.22. а) $\int \frac{3x^3-12x-60}{x^3-x^2-20x}dx$

б) $\int \frac{x^5-x^4+x^3+4x^2-4x+3}{x^3-x^2+x}dx$

в) $\int \frac{2x^3-9x+18}{x^4+9x^2}dx$

6.23. а) $\int \frac{2x^2-15x-33}{(x+1)\cdot(x^2-x-6)}dx$

б) $\int \frac{2x^4+2x^2-3}{2x^4+3x^2}dx$

в) $\int \frac{36-13x-x^2}{x^3-3x^2+9x}dx$

6.24. а) $\int \frac{4x^2-11x-48}{x^3-x^2-12x}dx$

б) $\int \frac{x^4+6x^3+17x^2+21x+16}{(x+1)^2\cdot(x^2+3x+9)}dx$

в) $\int \frac{1+x+27x^2-9x^3}{81x^4-1}dx$

6.25. а) $\int \frac{4x^2-6x-16}{x^3+2x^2-8x}dx$

б) $\int \frac{2x^3+x^2+2x+1}{x^4+x^3+x^2}dx$

в) $\int \frac{6x^3-8x^2-3}{3x^3+x}dx$

6.26. а) $\int \frac{7x+3}{3x+2x^3-x^3}dx$

б) $\int \frac{2x^5+2x^3-1}{x^4+x^2}dx$

в) $\int \frac{3x^2-17x+57}{x^3+27}dx$

6.27. а) $\int \frac{4x^2-9x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$

б) $\int \frac{x^4+7x^3+7x^2-4x-3}{x^4+4x^3+3x^2}dx$

в) $\int \frac{x^2-2x-18}{x^3+3x^2+9x}dx$

6.28. а) $\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3-x^2-2x}dx$

б) $\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+8}{x^3+2x^2+4x}dx$

в) $\int \frac{8+x^2+3x^3}{x^4+4x^2}dx$

6.29. а) $\int \frac{x+12}{x^3-x^2-6x}dx$

б) $\int \frac{2x^4-6x^3+12x^2-10x+12}{x^4-2x^3+4x^2}dx$

в) $\int \frac{6-5x+8x^2-12x^3}{16x^4-1}dx$

6.30. а) $\int \frac{14x-20}{x^3+x^2-20x}dx$

б) $\int \frac{x^5+2x^4+3x^3+7x^2+8}{x^4+2x^3+4x^2}dx$

в) $\int \frac{x^2-3x+16}{(x+1)\cdot(x^2+9)}dx$

Задача 7.

Найти неопределенные интегралы:

7.1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

7.2. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{4+\sqrt{x+1}}dx$

б) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+9}}$

7.3. а) $\int \frac{x+1+\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt{x-2}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

7.4. а) $\int \frac{4x+3+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx$

7.5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$

б) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

7.6. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}dx$

б) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

7.7. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x-2}}{3+\sqrt{x-2}}dx$

б) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+4}}$

7.8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

7.9. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

7.10. а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$

б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$

7.11. а) $\int \frac{x+2+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$

7.12. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)^3}}$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}}$

7.13. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{9+\sqrt{x+3}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx$

7.14. а) $\int \frac{2x-1+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$

б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}$

7.15. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\cdot\sqrt[3]{x}}$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

7.16. а) $\int \frac{2x-3+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$

7.17. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$

7.18. а) $\int \frac{3\sqrt{x}}{x\cdot\left(\sqrt[4]{x}+5\right)}dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-25\right)^3}}$

7.19. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$

б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

7.20. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$

7.21. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25+x^2}}$

7.22. а) $\int \frac{2\sqrt{x}}{x\cdot\left(\sqrt[4]{x}-2\right)}dx$

б) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

7.23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

7.24. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

7.25. а) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}{x^6}dx$

7.26. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x+2}}{4+\sqrt{x+2}}dx$

б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

7.27. а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$

7.28. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-16\right)^3}}$

7.29. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}\cdot\left(1+\sqrt[3]{3-x}\right)}$

б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

7.30. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}-\sqrt[3]{3x-1}}$

б) $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

Задача 8.

Найти неопределенные интегралы:

8.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot (1-\cos x)}$

8.2. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

8.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot (1+\cos x)}$

8.4. $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^3}$

8.5. $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$

8.6. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot (1+\cos x)}$

8.7. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot (1-\sin x)}$

8.8. $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$

8.9. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x \cdot (1+\cos x)} dx$

8.10. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$

8.11. $\int \frac{1+\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2} dx$

8.12. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x+\sin x)^2} dx$

8.13. $\int \frac{1+\cos x}{(1+\cos x-\sin x)^2} dx$

8.14. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x-\sin x)^2} dx$

8.15. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$

8.16. $\int \frac{\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2} dx$

8.17. $\int \frac{\cos x}{(1+\cos x-\sin x)^2} dx$

8.18. $\int \frac{\cos x}{(1+\cos x)\cdot(1-\sin x)} dx$

8.19. $\int \frac{\cos^2 x}{(1+\cos x+\sin x)^3} dx$

8.20. $\int \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\cos x+\sin x)^3} dx$

8.21. $\int \frac{\cos^2 x}{(1+\cos x-\sin x)^3} dx$

8.22. $\int \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\cos x-\sin x)^3} dx$

8.23. $\int \frac{dx}{1-\sin x-\cos x}$

8.24. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot(1+\sin x)}$

8.25. $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

8.26. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x\cdot(1+\cos x)}dx$

8.27. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$

8.28. $\int \frac{dx}{1+\cos x-\sin x}$

8.29. $\int \frac{1-\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

8.30. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2}$

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977 – 416с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. – М.: Высшая школа, 2006 – 304с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. /Под ред. Демидовича В.П. М.: Наука, 1997. – 512с.
4. Сборник задач по математике для ВТУЗов.Ч.2. /Под ред. Ефимова А.В. и др. М.: Наука, 2002. – 432с.

Содержание