

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт энергетики и транспортных систем

Кафедра «Турбины, гидромашины и авиационные двигатели»

А.С. Донской

**Расчет волновых процессов
в пневматических линиях.
Решение волнового уравнения.**
Учебное пособие

Санкт-Петербург

2019

УДК 621.86.01:62–525

ББК 32.965.2

Дон 67

Рецензент:

доктор технических наук, профессор
Балтийского государственного технического университета
«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
В.А. Королев

Донской А.С. Расчет волновых процессов в пневматических линиях. Решение волнового уравнения: Учеб. пособие. – СПб.: 2019. –65 с.

В учебном пособии описан авторский метод решения волнового уравнения (метод «состыковки решений»), который позволяет получить аналитические решения волнового уравнения для расчета переходных процессов в пневматических линиях любых типов при любых законах изменения давлений на концах линии.

Пособие предназначено для научных и инженерно-технических работников, занимающихся исследованием и проектированием пневматических систем, для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Пособие может быть полезно также и специалистам, занимающимся расчетом колебаний упругих одномерных тел (нитей, тросов, балок и т.п.) и электрических линий, динамика которых описывается тем же классом дифференциальных уравнений в частных производных, что и динамика пневматических линий.

© Донской А.С., 2019

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ	5
2. МЕТОД «СОСТЫКОВКИ РЕШЕНИЙ». АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.....	11
2.1. Выявление закономерности изменения математических выражений для волн давления.....	13
2.2. Формирование решения в виде конечной аналитической зависимости	23
2.3. Применение общего решения при расчетах переходных процессов для различных условий.....	38
2.3.1 Одновременное изменение давлений на концах линии	39
2.3.2. Изменение давления на входе в линию при постоянном давлении на выходе.....	40
2.3.3. Расчет процессов в линии при скачкообразном изменении давления на входе	41
2.4. Расчет динамики линии с учетом потерь давления на трение по длине линии	55
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	65

ВВЕДЕНИЕ

Для исследований пневматических линий связи (ЛС) как систем с распределенными параметрами требуется применение дифференциальных уравнений в частных производных. К сожалению, известные классические методы не позволяют получить аналитическое решение для типовых практических задач.

Рассматривается разработанный автором метод аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, описывающих переходные процессы в пневматических ЛС при ламинарном течении газа – метод «состыковки решений» [5, 6, 7].

Этот метод, в отличие от классических, позволяет получить единое решение в виде одной конечной аналитической зависимости для любых начальных и граничных условий.

1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Вопросам моделирования процессов в пневматических ЛС посвящено множество работ [2, 8, 9, 10, 13]. Создание быстродействующих пневматических систем современных машин требует выполнения тщательных расчетов с учетом динамики пневматических линий. Поэтому проблема разработки или выбора математической модели ЛС является весьма важной при расчетах многих пневматических систем.

При расчетах пневматических ЛС обычно рассматривается одномерное течение газа. Для того чтобы наиболее полно описать газодинамические процессы в ЛС, необходимо установить взаимосвязь следующих параметров газа: скорости газа v , давления P , плотности ρ и вязкости \mathcal{G} . Для этого используются следующие уравнения [8].

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости в общем случае имеют вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mathcal{G}}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathcal{G} \nabla v_x, \quad (1.1)$$

где X – проекция ускорения, определяемая действием сил гидростатического давления, пропорциональных массе частиц;

$\theta = \operatorname{div} \vec{V}$ – дивергенция вектора скорости, которая для одномерного течения вычисляется по формуле:

$$\theta = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Членом $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x})$ учитывается действие динамических

сил давления. Членом $\frac{g}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + g \nabla v_x$ учитывается влияние вязкости.

Движение сплошной среды характеризуется уравнением неразрывности потока, которое для одномерного движения имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Известно [10], что плотность газа связана с давлением следующим соотношением:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t},$$

где c – скорость звука в газе.

Тогда уравнение (1.2) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая переходный процесс в ЛС, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + g \nabla v_x, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}, \\ \theta &= \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Полученная система может быть решена численным методом конечных разностей, который состоит в замене непрерывной среды некоторой ее дискретной моделью. При этом дифференциальные уравнения в частных производных аппроксимируются системой алгебраических уравнений, описывающих динамику ЛС в каждой расчетной точке разностной сетки. Расчетные сетки могут содержать сотни расчетных точек. Поэтому для расчета переходных процессов в линиях по описанной системе требуется численно интегрировать сотни уравнений. Если же стоит вопрос о многократном численном моделировании, то становится очевидной трудоемкость расчетов численными методами [4]. Поэтому на практике идут по пути дальнейшего упрощения уравнений [8, 13].

Опуская промежуточные выкладки, покажем конечный результат. В итоге получим следующую систему уравнений, которая известна в теории дифференциальных уравнений как уравнения телеграфных линий [8, 10]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{8\pi g}{f} (\rho v) + \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Эти уравнения могут быть решены численными методами, а также для определенных начальных и граничных условий – аналитическими методами: методом Фурье, методом операционного исчисления, методом Даламбера и др.

Существенное упрощение исходных уравнений приводит к ограничению области их применения. Так, полученная система уравнений (1.5) оказывается справедливой лишь для малых возмущений.

При этом в литературе известны лишь решения, полученные для пневматических линий с незадресселированным входом с дросселем на выходе или с заглушенным выходом. На практике же любая ЛС имеет сопротивление на входе и выходе. Даже если линия имеет полностью открытый вход, то практически всегда имеются потери механической энергии потока на входе.

В качестве примера приведем известное решение уравнения (1.5) относительно давления без учета потерь давления по длине ($\mathcal{G} = 0$) [8] (рис. 1.3)

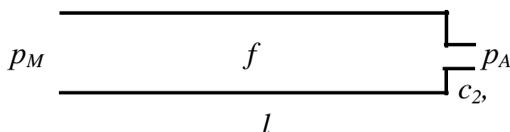


Рис. 1.3. Схема пневматической линии

Система уравнений (1.5) имеет три решения в зависимости от соотношения величины коэффициента расходной характеристики дросселя на выходе линии c_2 и коэффициента K , который характеризует расходную характеристику самой линии ($K = f/c$).

1). Для случая $c_2 > K$ решение имеет вид:

$$p = p_M \left\{ 1 + e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s(t+x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s(t-x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)^2}} \right] \right\},$$

где

$$\omega_s = \frac{(2s+1)c}{2l} \pi; \quad \operatorname{tg} \varphi_s = \frac{2s+1}{\alpha_2} \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \varphi_s \leq \frac{\pi}{2}); \quad \operatorname{th}(\alpha_2) = \frac{K}{c_2}.$$

2). Для $c_2 < K$ получается следующее решение:

$$p = p_M \left\{ 1 - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} - e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}}}{2\alpha_2} e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} + e^{-\alpha_2 \frac{ct}{l}} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega(t+x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega(t-x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} \right] \right\},$$

где $\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{s\pi}{\alpha_2}$, $(0 \leq \varphi_s \leq \pi/2)$; $\omega = \pi c/l$; $\operatorname{th}(\alpha_2) = K/c_2$.

3). Для $c_2 = K$ отраженная волна отсутствует, и решение имеет вид:

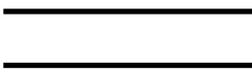
$$p = p_M.$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1.5), получаемые известными методами, представляют собой сумму членов бесконечного ряда. Поэтому являются достаточно трудными для практического применения, так как неизвестно, какое количество членов ряда даст удовлетворительный результат.

К тому же, если необходимо учесть взаимодействие ЛС с другими объектами, то полученные решения становятся неприемлемыми. В табл. 1.1 дана характеристика математической модели (1.5). В ней знаками «+» отмечены условия (граничные условия, давление на входе (p_M) и выходе (p_A) линии), при которых возможно получить аналитическое решение известными классическими методами

Характеристика модели в частных производных

Таблица 1.1

№	Тип линий связи	Наличие решения	
		$p_M = const,$ $p_A = const,$	$p_M = var,$ $p_A = var$
1		+	—
2		+	—
3		+	—
4		—	—
5		—	—

2. МЕТОД «СОСТЫКОВКИ РЕШЕНИЙ». АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Далее приводится разработанный автором метод решения волнового уравнения – метод «состыковки решений», который представляет собой развитие метода Даламбера.

Предложенный метод в отличие от известных классических методов (метода операционного исчисления, метода Даламбера и метода Фурье) позволяет получить аналитическое решения для любых начальных и граничных условий. Причем полученное решение является единым для любых параметров.

Создание математической модели ЛС с учетом влияния распределенных по длине параметров газа на изменение давлений и расходов на концах на базе обыкновенных дифференциальных уравнений невозможно без анализа закономерностей распределенных по длине линии процессов. Для этого требуется получить решения дифференциальных уравнений в частных производных для всех типов линий как при постоянном, так и при переменном давлении питания и выполнить их анализ. Использование системы дифференциальных уравнений в частных производных для пневмосистем высокого давления с турбулентным течением газа делает поставленную задачу практически неразрешимой.

Задачу можно существенно упростить, получив решение более простой системы дифференциальных уравнений для систем низкого давления, имея в виду, что закономерности протекания процессов в обоих случаях имеют качественно одинаковый характер. При этом целесообразно получить аналитические решения.

В качестве базовой модели рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа [13]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{8\pi g}{f}(\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

В литературе известны аналитические решения системы (2.1) [1,8, 13] лишь для частных случаев ЛС, которые не характерны для большинства пневмосистем – для линий с незадрозселированным входом, на который подается постоянное давление. Практически же на концах любой линии всегда имеется сопротивление (пневмоклапан, штуцер и т.п.). Кроме того, даже в открытой линии имеется так называемое сопротивление входа и выхода. В опубликованных работах отсутствуют рекомендации по решению системы для наиболее характерного случая, когда на концах линии имеется сопротивление, а давление на входе и выходе изменяется по произвольному закону.

Известные аналитические решения представляют собой сумму членов бесконечного ряда. На практике же необходимо принимать во внимание конечное число слагаемых этого ряда, которое с требуемой точностью описывает переходный процесс в линии. Однако неизвестно, какое число слагаемых даст заданную точность.

Таким образом, требуется получить решение системы дифференциальных уравнений гиперболического типа (2.1) в виде конечной аналитической зависимости для любых типов линий при любых законах изменения давлений на концах линии.

В разделе рассматривается метод решения системы

дифференциальных уравнений (2.1), описывающий динамику ЛС, - метод «состыковки решений» [5, 6, 7]. Этот метод позволяет получить аналитическое решение системы (2.1), единое для всех типов линий при любых законах изменения давлений на входе и выходе.

Точное аналитическое решение получено для случая, когда потери давления по длине линии пренебрежимо малы по сравнению с потерями на входе и выходе ЛС.

Предложена методика приближенного расчета процессов на концах линии с учетом потерь давления по ее длине.

На основании полученных решений установлены закономерности изменения давлений на концах ЛС. Наличие таких закономерностей позволило описать процессы на концах ЛС обыкновенными дифференциальными уравнениями. В результате известные математические модели пневматических линий стали частным случаем обобщенной математической модели пневматической ЛС [6,7].

2.1. Выявление закономерности изменения математических выражений для волн давления

Наиболее удобной для исследования волновых процессов в ЛС является система дифференциальных уравнений в частных производных (2.1), которая может быть решена аналитически.

Для некоторых начальных и граничных условий система дифференциальных уравнений может быть решена различными классическими методами: методом операционного исчисления, методом разделения переменных (метод Фурье) и др. [1, 8, 13].

Для частных случаев известны методы решения уравнений типа (2.1) с помощью рекуррентных соотношений [1, 10]. Суть этих методов заключается в том, что для вычисления

функции при определенных значениях аргумента требуется выполнение серии предварительных расчетов для предыдущих значений аргумента, т. е. расчетные данные, полученные на очередном шаге, являются исходными данными для вычисления функции на следующем шаге. Таким образом, чем больше значение аргумента, тем большее количество расчетов требуется выполнить. Поэтому при больших значениях аргумента применение таких методов затруднительно.

Предлагаемый ниже подход к решению системы дифференциальных уравнений позволяет получить аналитическое решение для всех указанных ранее случаев и представляет собой дальнейшее развитие рекуррентной конечно-разностной схемы решения уравнения типа (2.1). При этом решение получается в виде конечных аналитических выражений, которые позволяют вычислять значение функции сразу для любого значения аргумента без предварительных расчетов.

Решим систему уравнений (2.1) относительно давления $P(x,t)$ сначала для случаев, когда потерями давления по длине линии по сравнению с потерями на входе и выходе из линии можно пренебречь (короткие или сильно задресселированные линии, рабочие полости пневматических устройств).

В этом случае, имея в виду, что величина $\rho u f$ представляет собой массовый расход G , запишем дифференциальные уравнения системы (2.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial G}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{f}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Решение дифференциальных уравнений в частных производных типа (2.2) заключается в отыскании общего и частного решений [1]. Общее решение содержит произвольные дифференцируемые функции. Для того чтобы определить эти произвольные функции, т. е. выделить частное решение, необходимо на искомые функции G и P наложить дополнительные ограничения, т. е. задать начальные и граничные условия.

Решим систему (2.2) относительно давления $P(x, t)$.

Общее решение системы уравнений имеет вид [1, 10]:

$$P(x, t) = P_{\varphi}(t - x/c) + P_{\psi}(t + x/c); \quad (2.3)$$

$$G(x, t) = G_{\varphi}(t - x/c) + G_{\psi}(t + x/c), \quad (2.4)$$

где функции $P_{\varphi}(t-x/c)$ и $G_{\varphi}(t-x/c)$, $P_{\psi}(t+x/c)$ и $G_{\psi}(t+x/c)$ дважды дифференцируемы и представляют собой соответственно прямые и отраженные волны давления и массового расхода.

Найдем зависимость между функциями $P_{\varphi}(t-x/c)$ и $G_{\varphi}(t-x/c)$, а также между $P_{\psi}(t+x/c)$ и $G_{\psi}(t+x/c)$. Подставим в уравнение (2.2) значения функций $P_{\varphi}(t-x/c)$ и $P_{\psi}(t+x/c)$ из (2.3) и (2.4). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{c}(-P'_{\varphi} + P'_{\psi}) + \frac{1}{f}(G'_{\varphi} + G'_{\psi}) = 0,$$

$$\frac{1}{c}(-G'_{\varphi} + G'_{\psi}) + \frac{f}{c^2}(P'_{\varphi} + P'_{\psi}) = 0.$$

Умножим первое уравнение на f/c . Вычитая и складывая левые и правые части обоих уравнений, после несложных преобразований соответственно получим:

$$G_{\varphi}(t - x/c) = KP_{\varphi}(t - x/c), \quad (2.5)$$

$$G_{\psi}(t + x/c) = -KP_{\psi}(t + x/c), \quad (2.6)$$

где

$$K = \frac{f}{c} \quad (2.7)$$

Определим неизвестные функции $P_{\phi}(t-x/c)$ и $P_{\psi}(t+x/c)$, пользуясь начальными и граничными условиями.

Начальные условия запишем следующим образом:

$$P(x/c, 0) = P_H;$$

$$G(x/c, 0) = G_H.$$

Заметим, что начальные значения давления в линии P_H и расхода G_H при заданных значениях коэффициентов c_1 и c_2 и давлений снаружи линии P_{MH} и P_{AH} в начальный момент времени определяются из уравнений расходов:

$$P_H = \frac{c_1 P_{MH} + c_2 P_{AH}}{c_1 + c_2},$$

$$G_H = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (P_{MH} - P_{AH}).$$

Из первого начального условия получим следующую связь между функциями $P_{\phi}(t - x/c)$ и $P_{\psi}(t + x/c)$:

$$P_{\phi}(-x/c) + P_{\psi}(x/c) = P_H, \quad \frac{l}{c} \geq \frac{x}{c} \geq 0 \quad (2.8)$$

Из второго условия получим уравнение:

$$G_{\varphi}(-x/c) + G_{\psi}(x/c) = G_H. \quad \frac{l}{c} \geq \frac{x}{c} \geq 0 \quad (2.9)$$

Решая совместно (2.8) и (2.9) с учетом (2.5) и (2.6), находим функции $P_{\varphi}(-x/c)$ и $P_{\psi}(x/c)$.

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(-x/c) &= \frac{l}{2K} (KP_H + G_H), & \frac{l}{c} \geq \frac{x}{c} \geq 0; \\ P_{\psi}(x/c) &= \frac{l}{2K} (KP_H - G_H), & \frac{l}{c} \geq \frac{x}{c} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для упрощения восприятия дальнейших выводов каждую из функций $P_{\varphi}(t-x/c)$ и $P_{\psi}(t+x/c)$ будем рассматривать как функцию одного аргумента. Действительно, характер изменения функций P_{φ} и P_{ψ} не зависит от того, за счет какой части аргумента происходит это изменение - за счет t , x/c или $-x/c$. Поэтому, если известен закон изменения функции P_{φ} или P_{ψ} за счет одной из частей аргумента t , x/c или $-x/c$, то полученный результат можно распространить и для общего случая, т.е. для полных аргументов $(t - x/c)$ и $(t + x/c)$. При этом следует лишь учитывать допустимый диапазон изменения аргумента, в котором справедлива та или иная зависимость. Так, например, если получено решение для $P_{\varphi}(x/c)$ для диапазона изменения аргумента $0 \geq x/c \geq l/c$, то это же решение справедливо и для функции $P_{\varphi}(t-x/c)$, у которой полный аргумент $(t - x/c)$ изменяется в том же диапазоне, т.е. $0 \geq t - x/c \geq l/c$.

Тогда, представляя функции P_{φ} и P_{ψ} как функции одного аргумента t , полученные зависимости можем записать следующим образом:

$$P_{\varphi}(t) = \frac{l}{2K} (KP_H + G_H) = A, \quad 0 \geq t \geq -\frac{l}{c}; \quad (2.11)$$

$$P_{\psi}(t) = \frac{I}{2K} (KP_H - G_H) = B, \quad \frac{I}{c} \geq t \geq 0. \quad (2.12)$$

Таким образом, из начальных условий определили значения функций $P_{\phi}(t)$ и $P_{\psi}(t)$ для ограниченного диапазона изменения аргумента t .

Для того чтобы определить функции $P_{\phi}(t)$ и $P_{\psi}(t)$ для всего диапазона изменения аргумента t от $-l/c$ до ∞ , воспользуемся граничными условиями.

Рассмотрим общий случай граничных условий, когда на входе и выходе линии подключается пневмоаппаратура с коэффициентами расходной характеристики соответственно c_1 и c_2 , а давления на входе и выходе $P_M(t)$ и $P_A(t)$ изменяются во времени.

Граничные условия определяются уравнениями расхода.

На входе:

$$G(0,t) = c_1 [P_M(t) - P(0,t)]. \quad (2.13)$$

Где $P_M(t)$ – давление на входе (снаружи) линии, изменяющееся по произвольному закону

На выходе:

$$G(l,t) = c_2 [P(l,t) - P_A(t)]. \quad (2.14)$$

Где $P_A(t)$ – давление на выходе (снаружи) линии, изменяющееся по произвольному закону

Выразим расход G через функции P_{ϕ} и P_{ψ} . Для этого, имея в виду зависимости (2.3) и (2.4), запишем граничные условия следующим образом.

На входе:

$$G(0,t) = G_{\phi}(0,t) + G_{\psi}(0,t) = c_1 [P_M(t) - P_{\phi}(0,t) - P_{\psi}(0,t)]. \quad (2.15)$$

На выходе:

$$\begin{aligned} G(l,t) &= G_\varphi(t - l/c) + G_\psi(t + l/c) = \\ &= c_2[P_\varphi(t - l/c) + P_\psi(t + l/c) - P_A(t)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда с учетом зависимостей (2.5) и (2.6) между функциями G_φ , P_φ , G_ψ и P_ψ граничные условия (2.15) и (2.16) можем записать следующим образом. На входе:

$$P_\varphi(t) = \frac{c_1}{K + c_1} P_M(t) + \frac{K - c_1}{K + c_1} P_\psi(t), \quad t \geq 0; \quad (2.17)$$

На выходе:

$$P_\psi(t + l/c) = \frac{K - c_2}{K + c_2} P_\varphi(t - l/c) + \frac{c_2}{K + c_2} P_A(t), \quad t \geq 0. \quad (2.18)$$

Найдем из уравнения (2.18) зависимость для вычисления функции $P_\psi(t)$ и подставим ее в уравнение (2.17).

Для этого выражение (2.18) запишем для аргумента $t \geq l/c$:

$$P_\psi(t) = \frac{K - c_2}{K + c_2} P_\varphi(t - 2l/c) + \frac{c_2}{K + c_2} P_A(t - l/c), \quad t \geq l/c. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в выражение (2.17), для $t \geq l/c$ получим:

$$\begin{aligned} P_\varphi(t) &= \frac{c_1}{K + c_1} P_M(t) + \frac{(K - c_1)(K - c_2)}{(K + c_1)(K + c_2)} P_\varphi(t - 2l/c) + \\ &\quad \frac{(K - c_1)c_2}{(K + c_1)(K + c_2)} P_A(t - l/c). \end{aligned} \quad t \geq l/c,$$

Обозначим

$$P_0(t) = \frac{c_1}{(K + c_1)} P_M(t), \quad (2.20)$$

$$P_L(t-l/c) = \frac{c_2(K-c_1)}{(K+c_1)(K+c_2)} P_A(t-l/c), \quad (2.21)$$

$$\frac{(K-c_1)(K-c_2)}{(K+c_1)(K+c_2)} = \alpha, \quad (2.22)$$

$$\frac{c_2(K-c_1)}{(K+c_1)(K+c_2)} = \beta, \quad (2.23)$$

$$P_L(t-l/c) = \beta P_A(t-l/c). \quad (2.24)$$

Тогда для аргументов $t \geq l/c$ можно записать:

$$P_\phi(t) = P_0(t) + P_L(t-l/c) + \alpha P_\phi(t-2l/c), \quad t \geq l/c. \quad (2.25)$$

Таким образом, зависимости (2.11), (2.12), (2.17), (2.19) и (2.25) позволяют определить значения функций $P_\phi(t)$ и $P_\psi(t)$ при различных значениях аргумента t :

$$P_\phi(t) = A, \quad 0 \geq t \geq -\frac{l}{c}; \quad (2.26)$$

$$P_\phi(t) = \frac{c_1}{K+c_1} P_M(t) + \frac{K-c_1}{K+c_1} P_\psi(t), \quad t \geq 0; \quad (2.27)$$

$$P_\phi(t) = P_0(t) + P_L(t-l/c) + \alpha P_\phi(t-2l/c), \quad t \geq l/c, \quad (2.28)$$

$$P_\psi(t) = B, \quad \frac{l}{c} \geq t \geq 0, \quad (2.29)$$

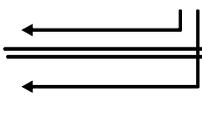
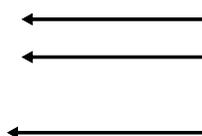
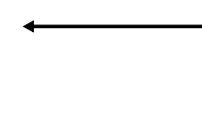
$$P_\psi(t) = \frac{K-c_2}{K+c_2} P_\phi(t-2l/c) + \frac{c_2}{K+c_2} P_A(t-l/c), \quad t \geq l/c. \quad (2.30)$$

Выясним, существует ли закономерность вычисления функций $P_\phi(t)$ и $P_\psi(t)$.

Рассмотрим последовательно всю числовую ось t и отметим связь между функциями $P_\phi(t)$ и $P_\psi(t)$ и по каким формулам они определяются на каждом участке аргумента длиной l/c .

Результаты представим в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Интервал изменения аргумента t	Какие функции определены на этом интервале, их связь с функциями на других интервалах аргумента t	Номера формул для расчета функций
$0 \geq t \geq -l/c$	$P_\varphi(t)$ 	(2.26)
$l/c \geq t \geq 0$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.27) (2.30)
$2l/c \geq t \geq l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)
$3l/c \geq t \geq 2l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)
$4l/c \geq t \geq 3l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)
.....
..... $(n-2)l/c \geq t \geq (n-3)l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)
$(n-1)l/c \geq t \geq (n-2)l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)
$nl/c \geq t \geq (n-1)l/c$	$P_\varphi(t)$ $P_\psi(t)$ 	(2.28) (2.30)

Как следует из таблицы, обе функции определены на всей числовой оси. Заметим, что для значений аргумента $l/c \geq t \geq -l/c$ обе функции P_φ и P_ψ определяются точно из начальных и граничных условий по формулам (2.26), (2.27) и (2.29), а на последующих интервалах аргумента t длиной l/c могут быть определены по уже известным предыдущим значениям функции P_φ по формулам (2.28) и (2.30). Более подробно связь между функциями на интервалах l/c аргумента t показана в подразделе 2.2 (рис. 2.1).

Рассмотрим физический смысл формулы (2.28). Возможность определения функции $P_\varphi(t)$ по известному значению этой же функции $P_\varphi(t-2l/c)$ обусловлена тем, что для прохождения волны от одного конца ЛС до другого требуется время, равное l/c . Поэтому можно определить величину $P_\varphi(t)$ в некоторый момент времени t , например, в начале линии, по значению отраженной волны $P_\psi(t_1)$ в конце линии в момент времени t_1 , предшествующий данному и смещенный относительно него на время l/c :

$$t_1 = t - l/c.$$

Но точно так же можно определить значение $P_\psi(t_1)$ в конце ЛС в момент времени t_1 по величине прямой волны $P_\varphi(t_2)$ в начале линии в момент времени t_2 , смещенный относительно t_1 на l/c :

$$t_2 = t_1 - l/c = t - 2l/c.$$

Таким образом, давление прямой волны P_φ в любой момент времени t может быть вычислено по величине прямой волны, которая была в момент времени $t - 2l/c$, т.е. по формуле (2.28).

Аналогично объясняется формула (2.30).

Таким образом, если известны начальные значения функций P_φ и P_ψ , то при последовательном переходе от одного момента времени к другому, смещенному на время прохождения волны по ЛС и равному l/c , можно вычислить функции для любого значения времени, а, следовательно, - любого значения полного аргумента функций P_φ и P_ψ .

Следовательно, по формуле (2.3) можно вычислить давление в ЛС в любой момент времени и в любой точке по длине линии. Такая методика позволяет получить точное решение уравнения (2.2). Однако при больших значениях аргумента, чтобы вычислить величину давления, необходимо выполнить много предварительных расчетов для всех предыдущих значений аргумента с шагом $2l/t$, что вызывает определенные трудности. Поэтому попытаемся найти функциональную зависимость между значениями P_φ и P_ψ на всей числовой оси t , так чтобы можно было сразу без предварительных расчетов вычислять значения этих функций при любом значении аргумента.

2.2. Формирование решения в виде конечной аналитической зависимости

Сформируем решение на основе полученных условий (2.26)–(2.30). Как видно из уравнений (2.29) и (2.30), значение функции P_ψ при любом значении аргумента t может быть определено, если известна функция P_φ . Поэтому достаточно установить закономерность изменения функции P_φ и с учетом (2.29) и (2.30) вычислить P_ψ .

Для определения закономерности изменения каждой функции P_φ и P_ψ примем следующую схему формирования решения :

1) разобьем весь диапазон изменения аргументов функций P_φ и P_ψ на участки длиной $2l/c$, присвоив каждому участку соответствующий порядковый номер; найдем зависимость функций P_φ и P_ψ для каждого участка от его номера и от значения локального аргумента, изменяющегося на каждом участке в диапазоне $[0 \div 2l/c]$;

2) выразим значения локальных аргументов функций P_φ и P_ψ через текущие значения их полных аргументов;

3) определим зависимость номера участка каждой функции P_φ и P_ψ от текущего значения ее аргумента и найдем окончательное решение для вычисления каждой функции.

Определим закономерность изменения функции $P_\varphi(t-x/c)$.

Рассмотрим выполнение первого пункта схемы формирования решения. Сначала найдем закономерность изменения функции P_φ при переходе с одного интервала аргумента t длиной l/c к следующему. Для этого рассмотрим последовательно все участки, начиная с отрицательного значения аргумента $-l/c$.

При этом на каждом участке рассматриваем изменение аргумента t от 0 до l/c . Для этого введем в рассмотрение локальный аргумент $\tau_l : l/c \geq \tau_l \geq 0$.

С учетом (2.26) - (2.29) запишем для каждого интервала $[l/c]$ аргумента t зависимости для P_φ :

Для интервала $[-l/c]$ из (2.26) имеем:

$$P_{\varphi_{-l/c}}(\tau_l) = A.$$

На участке $[l/c]$ значение P_φ найдем из уравнения (2.27) с учетом (2.29):

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) &= \frac{c_1}{K+c_1} P_{Ml/c}(\tau_1) + \frac{K-c_1}{K+c_1} P_{\psi_{l/c}}(\tau_1) = \\
&= \frac{c_1}{K+c_1} P_{Ml/c}(\tau_1) + \frac{K-c_1}{K+c_1} B
\end{aligned} \quad . (2.31)$$

Для того чтобы получить для вычисления функции $P_{\varphi(t-x/c)}$ единое для всех участков выражение, что будет понятно из нижеследующих выкладок, представим полученное уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) &= \frac{c_1}{K+c_1} P_{M(l/c)}(\tau_1) + \frac{K-c_1}{K+c_1} B = \\
&= \frac{c_1}{K+c_1} P_{M(l/c)}(\tau_1) + \beta P_{A(-l/c)}(\tau_1) - \beta P_{A(-l/c)}(\tau_1) + \frac{K-c_1}{K+c_1} B.
\end{aligned}$$

В соответствии с (2.20) и (2.24) получим:

$$\frac{c_1}{K+c_1} P_{M(l/c)}(\tau_1) + \beta P_{A(-l/c)}(\tau_1) = P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1) .$$

Тогда уравнение (2.31) будет иметь вид:

$$P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) = P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1) - \beta P_{A(-l/c)}(\tau_1) + \frac{K-c_1}{K+c_1} B. \quad (2.32)$$

Имея в виду, что на интервале $[-l/c]$ можем записать:

$$P_{A(-l/c)}(\tau_1) = P_{AH} ,$$

после некоторых преобразований с учетом (2.12) и (2.22) урав-

нение (2.32) для участка l/c может быть представлено следующим образом:

$$P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) = P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1) + \alpha A,$$

где в дальнейших преобразованиях будем иметь в виду (2.24):

$$P_{L(-l/c)}(\tau_1) = \beta P_{2H}. \quad (2.33)$$

Для последующих участков функцию P_φ определим из уравнения (2.28).

Таким образом, для всех участков получим следующие зависимости:

$$P_{\varphi_{-l/c}}(\tau_1) = A.$$

$$P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) = P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1) + \alpha A,$$

$$\begin{aligned} P_{\varphi_{2l/c}}(\tau_1) &= P_{0(2l/c)}(\tau_1) + P_{L(l/c)}(\tau_1) + \alpha P_{\varphi_{-l/c}}(\tau_1) = \\ &= P_{0(2l/c)}(\tau_1) + P_{L(l/c)}(\tau_1) + \alpha A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\varphi_{3l/c}}(\tau_1) &= P_{03l/c}(\tau_1) + P_{L2l/c}(\tau_1) + \alpha P_{\varphi_{l/c}}(\tau_1) = \\ &= P_{03l/c}(\tau_1) + P_{L2l/c}(\tau_1) + \alpha [P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1)] + \alpha^2 A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\varphi_{4l/c}}(\tau_1) &= P_{04l/c}(\tau_1) + P_{L3l/c}(\tau_1) + \alpha P_{\varphi_{2l/c}}(\tau_1) = \\ &= P_{04l/c}(\tau_1) + P_{L3l/c}(\tau_1) + \alpha [P_{02l/c}(\tau_1) + P_{Ll/c}(\tau_1)] + \alpha^2 A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\varphi_{5l/c}}(\tau_1) &= P_{05l/c}(\tau_1) + P_{L4l/c}(\tau_1) + \alpha P_{\varphi_{3l/c}}(\tau_1) = \\ &= P_{05l/c}(\tau_1) + P_{L4l/c}(\tau_1) + \alpha [P_{03l/c}(\tau_1) + P_{L2l/c}(\tau_1)] + \\ &\quad + \alpha^2 [P_{0l/c}(\tau_1) + P_{L(-l/c)}(\tau_1)] + \alpha^3 A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_{6l/c}}(\tau_1) &= P_{0_{6l/c}}(\tau_1) + P_{L_{5l/c}}(\tau_1) + \alpha P_{\varphi_{4l/c}}(\tau_1) = \\
&= P_{0_{6l/c}}(\tau_1) + P_{L_{5l/c}}(\tau_1) + \alpha [P_{0_{4l/c}}(\tau_1) + P_{L_{3l/c}}(\tau_1)] + \\
&\quad + \alpha^2 [P_{0_{2l/c}}(\tau_1) + P_{L_{l/c}}(\tau_1)] + \alpha^3 A
\end{aligned}$$

и т.д.

Или в общем виде можем записать:

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_{2(n-1)l/c}}(\tau) &= P_{0_{2(n-1)l/c}}(\tau) + \alpha P_{\varphi_{2(n-2)l/c}}(\tau) = \\
P_{0_{2(n-1)l/c}}(\tau) &+ \alpha P_{0_{2(n-2)l/c}}(\tau) + \alpha^2 P_{0_{2(n-3)l/c}}(\tau) + \dots + \alpha^{n-1} P_{0_{l/c}}(\tau) \cdot
\end{aligned}$$

Полученные зависимости надо понимать следующим образом. Для того чтобы вычислить функцию P_{φ} на каком-то участке, нужно вычислить P_0 и P_L на определенных участках при значениях их полных аргументов, соответствующих одному и тому же значению локального аргумента τ_l на этих участках.

Заметим, что функции $P_{\varphi}(\tau_l)$ на двух соседних интервалах, начиная с положительного участка (l/c) выражаются одинаковыми математическими зависимостями, которые включают одинаковые слагаемые P_0 , P_L и A .

$$\begin{aligned}
&P_{\varphi_{l/c}}(\tau) \text{ и } P_{\varphi_{2l/c}}(\tau), \\
&P_{\varphi_{3l/c}}(\tau) \text{ и } P_{\varphi_{4l/c}}(\tau) \\
&\dots\dots\dots \\
&P_{\varphi_{(2n-1)l/c}}(\tau) \text{ и } P_{\varphi_{2nl/c}}(\tau).
\end{aligned}$$

Поэтому можно объединить попарно функции P_{φ} на двух соседних интервалах l/c и описать их одной математиче-

ской зависимостью. Объединим функции P_φ на каждой паре соседних интервалов длиной l/c в единую функцию, описывающую интервал $2l/c$. При этом на каждом интервале длиной $2l/c$ будем рассматривать новый локальный аргумент τ : $2l/c \geq \tau \geq 0$.

Введем следующие обозначения (рис. 2.1). Участок на интервале $[-2l/c; 0]$ обозначим номером "0". Соответственно функцию P_φ на этом участке обозначим с индексом "0".

На рис. 2.1 показаны графики изменения функций P_φ и P_ψ для случая постоянного давления на выходе. Для нулевого участка запишем:

$$P_{\varphi 0}(\tau) = A.$$

На самом деле, как видно из условия (2.11), для решения нас интересует функция $P_{\varphi 0}(\tau)$ лишь на второй половине нулевого интервала, т.е. на интервале $[-l/c; 0]$. Расширение участка до $-2l/c$ не влияет на решение, но позволяет формализовать результат. Действительно, при переходе к полному аргументу введенный участок $[-2l/c; -l/c]$ автоматически выбывает из рассмотрения, поскольку полный аргумент $(t - x/c)$ функции $P_{\varphi 0}$ не может быть меньше $(-l/c)$.

Первым будем считать участок на интервале $[0; 2l/c]$, вторым – участок на интервале $[2l/c; 4l/c]$ и т.д. Участок с номером n будет на интервале $[2nl/c; 2(n+1)l/c]$. Соответственно функцию P_φ обозначим (рис. 2.1): $P_{\varphi 1}$ – на первом участке, $P_{\varphi 2}$ – на втором, $P_{\varphi n}$ – на участке с номером n .

Соответственно принимаем и нумерацию слагаемых $P_0(\tau)$ и $P_L(\tau)$.

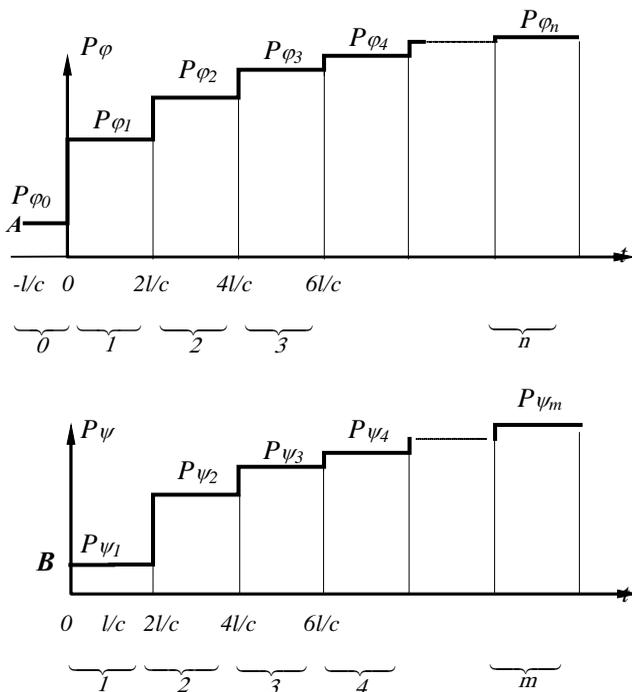


Рис. 2.1. Графики изменения прямой и отраженной волн давления

Заметим, что функции $P_L(\tau)$ смещены относительно функций $P_0(\tau)$ на величину l/c . Поэтому нумерацию функции $P_L(\tau)$ можем принять такой же, но при этом вычислять ее будем для аргумента $(\tau - l/c)$.

Тогда выражение для расчета функции $P_\varphi(t)$ на каждом участке будет иметь вид:

$$P_{\varphi_0}(\tau) = A,$$

$$\begin{aligned} P_{\varphi_1}(\tau) &= [P_{0l/c}(\tau) + P_{02l/c}(\tau)] + [P_{L-l/c}(\tau) + P_{Ll/c}(\tau)] + \alpha A = \\ &= P_{0l}(\tau) + P_{Ll}(\tau - l/c) + \alpha A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_2}(\tau) &= [P_{0_{3l/c}}(\tau) + P_{0_{4l/c}}(\tau)] + [P_{L_{2l/c}}(\tau) + P_{L_{3l/c}}(\tau)] + \\
&+ \alpha\{[P_{0_{l/c}}(\tau) + P_{0_{2l/c}}(\tau)] + [P_{L_{-l/c}}(\tau) + P_{L_{l/c}}(\tau)] + \alpha A\} = \\
&= P_{0_2}(\tau) + P_{L_2}(\tau - l/c) + \alpha[P_{0_1}(\tau) + P_{L_1}(\tau - l/c)] + \alpha^2 A,
\end{aligned}$$

и т.д.

Окончательно для участков с номерами $n \geq 1$ получим следующее уравнение для расчета функции $P_{\varphi_n}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_n}(\tau) &= P_{0_n}(\tau) + P_{L_n}(\tau - l/c) + \alpha[P_{0_{n-1}}(\tau) + P_{L_{n-1}}(\tau - l/c)] + \\
&+ \alpha^2 [P_{0_{n-2}}(\tau) + P_{L_{n-2}}(\tau - l/c)] + \dots \\
&+ \alpha^{n-1} [P_{0_1}(\tau) + P_{L_1}(\tau - l/c)] + \alpha^n A.
\end{aligned}$$

Полученные зависимости надо понимать следующим образом. Значение функции $P_{\varphi}(\tau)$ на любом участке при некотором значении аргумента τ равно сумме ряда, в котором каждое слагаемое вычисляется при таком же значении аргумента τ , но на соответствующем участке. Таким образом, функция $P_{\varphi}(\tau)$ на участке n представляет собой сумму ряда с общим членом

$$u_i = [P_{0_{n-i}}(\tau) + P_{L_{n-i}}(\tau - l/c)]\alpha^i + \alpha^n A, \quad (i \in \{0 \div n-1\}).$$

Для того чтобы учесть участок с номером $n = 0$, введем функцию Хэвисайда $H(n)$ [3]:

$$H(n) = \begin{cases} 1, & n > 0; \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

Тогда для любого участка с учетом (2.33) можем записать:

$$P_{\varphi_n}(\tau) = H(n) \sum_{i=0}^{i=n-1} [P_{0_{n-i}}(\tau) + P_{L_{n-i}}(\tau - l/c)] \alpha^i + \alpha^n A, \quad (2.34)$$

$$P_{L_i}(\tau - l/c) = \begin{cases} \beta P_{AH}, & \tau \leq l/c, \\ \beta P_A(\tau - l/c), & \tau > l/c. \end{cases}$$

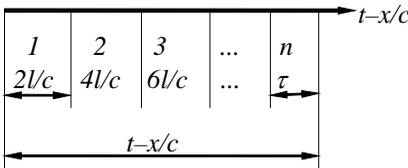
Рассмотрим второй пункт схемы формирования решения. Выразим локальный аргумент τ через полный. Из рис. 2.2 понятно, что такая связь может быть описана следующим выражением

$$\tau = (t - \frac{x}{c}) - (n-1) \frac{2l}{c}. \quad (2.35)$$

Выразим функции $P_{0_{n-i}}(\tau)$ и $P_{L_{n-i}}(\tau)$ в решении (2.34) через номер участка. Для этого выявим закономерность изменения полного аргумента t с изменением номера участка.

На первом участке полный аргумент равен локальному:

$$t = \tau. \text{ Тогда}$$



$$P_{0_1}(\tau) = P_0(t) = P_0(\tau),$$

Рис. 2.2. К расчету полного аргумента

на втором участке получим соответственно:

$$t = \tau + 2l/c; \quad P_{0_2}(\tau) = P_0(t) = P_0(\tau + 2l/c),$$

на $n-i$ участке:

$$t = \tau + 2l/c(n-i-1);$$

$$P_{0_{n-i}}(\tau) = P_0(t) = P_0(\tau + 2l(n-i-1)/c).$$

Для функций $P_{\varphi_n}(\tau)$ и $P_{L_{n-i}}(\tau - l/c)$ соответственно получим:

$$t = \tau + 2l/c(n-1);$$

$$P_{\varphi_n}(\tau) = P_{\varphi}(t) = P_{\varphi}(\tau + 2l(n-1)/c),$$

$$t = \tau + 2l/c(n-i-1) - l/c; \quad P_{L_{n-i}}(\tau - l/c) = P_L(t) = P_L(\tau + 2l(n-i-1)/c - l/c).$$

Тогда с учетом (2.35) получим следующие выражения для вычисления функций $P_{\varphi_n}(\tau)$, $P_{0_{n-i}}(\tau)$ и $P_{L_{n-i}}(\tau)$ на любом участке $n \geq 1$:

$$P_{\varphi_n}(\tau) = P_{\varphi}(t - \frac{x}{c}).$$

$$P_{0_{n-i}}(\tau) = P_0(t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i).$$

$$P_{L_{n-i}}(\tau - \frac{l}{c}) = P_L(t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i - \frac{l}{c}).$$

Перейдем к выполнению третьего пункта схемы формирования решения – найдем зависимость номера участка от величины аргумента.

Найдем связь между номером участка n и аргументом $(t-l/c)$ функции P_{φ} . Для этого используем функцию $E(t)$, которая определяет наибольшее целое число, не превышающее t . Нетрудно убедиться (рис. 2.2), что связь между номером участка n и аргументом $(t-l/c)$ функции P_{φ} можно вычислить по формуле

$$n = E\left(\frac{t - x/c}{2l/c}\right) + 1. \quad (2.36)$$

Действительно, по формуле (2.36) получим:

$$\text{при } 0 \geq \frac{t - x/c}{2l/c} \geq 1/c \quad n = 0,$$

$$\text{при } 2l/c \geq \frac{t - x/c}{2l/c} \geq 0 \quad n = 1,$$

$$\text{при } 4l/c \geq \frac{t - x/c}{2l/c} \geq 2l/c \quad n = 2$$

и т.д., что соответствует принятой нумерации (рис.2.1).

Окончательно с учетом полученных зависимостей уравнение (2.34) будет иметь вид:

$$P_\varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) = H(n) \sum_{i=0}^{i=n-1} \left\{ P_0\left(t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i\right) + P_L\left(t - \frac{x}{c} - \frac{l}{c} - \frac{2l}{c}i\right) \right\} \alpha^i + \alpha^n A. \quad (2.37)$$

$$P_L\left(t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i - \frac{l}{c}\right) = \begin{cases} \beta P_{AH}, & t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i \leq \frac{l}{c}, \\ \beta P_A\left(t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i - \frac{l}{c}\right), & t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i > \frac{l}{c}. \end{cases}$$

Определим закономерность изменения функции $P_\psi(t + x/c)$.

В соответствии с принятой в начале подраздела 2.2 схемой формирования решения рассмотрим выполнение ее первого пункта. Найдем характер изменения функции $P_\psi(t)$. Нумеровать участки для функции $P_\psi(t)$ будем индексом m (рис.2.1), чтобы подчеркнуть, что функция $P_\psi(t)$ на том же участке ($m = n$) при

переходе к полному аргументу зависит от аргумента $t + x/c$.

Тогда в соответствии с формулой (2.30) на каждом участке

$m = n$ длиной $2l/c$ значение функции $P_{\psi_m}(\tau)$ для $t \geq l/c$ можно вычислить следующим образом:

$$P_{\psi_m}(\tau) = \frac{K - c_2}{K + c_2} P_{\varphi_{n-1}}(\tau) + \frac{c_2}{K + c_2} P_{Am}(\tau - l/c), \quad (2.38)$$

где

$$P_{Am}(\tau - l/c) = \begin{cases} P_{AH}, & \tau \leq l/c, \\ P_{Am}(\tau - l/c), & \tau > l/c. \end{cases}$$

Уравнение (2.38) для первого участка ($m=1$) согласно (2.30) справедливо лишь на его второй половине. Докажем, что это уравнение можно применять и для первой половине участка, т.е. при $l/c \geq t \geq 0$. Для этого вычислим слагаемые уравнения (2.38) и покажем, что при $l/c \geq t \geq 0$ выражение (2.38) преобразуется к виду (2.29).

Как показано выше, для нулевого участка $P_{\varphi_0} = A$. Тогда в первом слагаемом при $n=1$ на всем участке имеем:

$$P_{\varphi_{n-1}}(\tau) = P_{\varphi_0}(\tau) = A.$$

Для второго слагаемого уравнения (2.38) при $m=1$ для участка $l/c \geq t \geq 0$ можем записать

$$P_{Am}(\tau - l/c) = P_{AH}.$$

Тогда после преобразований из уравнения (2.38) для

участка $l/c \geq t \geq 0$ получим:

$$P_{\psi_1}(\tau) = \frac{KP_H - G_H}{2K} = B,$$

что соответствует условию (2.29).

Таким образом, уравнение (2.38) справедливо для любого значения аргумента $t \geq 0$, т.е. для всех участков с номером $m \geq 1$.

Из уравнения (2.34) найдем:

$$P_{\varphi_{n-1}}(\tau) = H(n-1) \sum_{i=0}^{i=n-2} [P_{0_{n-i-1}}(\tau)\alpha^i + P_{L_{n-i-1}}(\tau-l/c)]\alpha^i + \alpha^{n-1}A.$$

Тогда с учетом этой зависимости из (2.38) получим выражение для определения $P_{\psi_m}(t)$:

$$P_{\psi_m}(\tau) = \frac{K-c_2}{K+c_2} \left\{ H(m-1) \sum_{i=0}^{i=m-2} [P_{0_{m-i-1}}(\tau) + P_{L_{m-i-1}}(\tau-l/c)]\alpha^i + \right. \\ \left. + \alpha^{m-1}A \right\} + \frac{c_2}{K+c_2} P_{Am}(\tau-l/c). \quad (2.39)$$

Рассмотрим выполнение второго пункта принятой схемы формирования решения.

Для определения давления по формуле (2.3) выразим аргумент τ в уравнении (2.39) через текущее значение полного аргумента $(t+x/c)$ функции $P_{\psi}(t+x/c)$. Аналогично определению аргумента τ для аргумента $(t-x/c)$ (рис. 2.2) можем записать

$$\tau = t + \frac{x}{c} - (m-1)\frac{2l}{c}. \quad (2.40)$$

Выразим функцию $P_{0_{m-i-1}}(\tau)$ через номер соответствующего участка. Для этого выявим закономерность изменения полного аргумента t с изменением номера участка.

На первом участке полный аргумент равен локальному: $t = \tau$. Тогда

$$P_{0_1}(\tau) = P_0(t) = P_0(\tau).$$

На втором участке получим соответственно:

$$t = \tau + \frac{2l}{c}, \quad P_{0_2}(\tau) = P_0(t) = P_0\left(\tau + \frac{2l}{c}\right),$$

на участке с номером $m-i-1$:

$$t = \tau + \frac{2l}{c}(m-i-2),$$

$$P_{0_{m-i-1}}(\tau) = P_0\left(\tau + \frac{2l(m-i-2)}{c}\right).$$

Таким образом, с учетом (2.40) функцию $P_{0_{m-i-1}}(\tau)$ на любом участке $m \geq 2$ можем вычислить следующим образом:

$$P_{0_{m-i-1}}(\tau) = P_0\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i-1)\right).$$

Аналогично для функций $P_{\psi_m}(\tau)$, $P_{L_{m-i-1}}(\tau - l/c)$ и $P_{Am}(\tau - l/c)$ получим:

$$P_{\psi_m}(\tau) = P_{\psi}\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

$$P_{L_{m-i-1}}(\tau - l/c) = P_L\left[t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c} - \frac{2l}{c}(i-1)\right],$$

$$P_{Am}(\tau - l/c) = P_A\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right).$$

Тогда с учетом полученных зависимостей и выражения (2.39) уравнение для определения функции P_ψ для полного аргумента $(t + x/c)$ будет иметь вид:

$$P_\psi\left(t + \frac{x}{c}\right) = \frac{K - c_2}{K + c_2} \left\{ H(m-1) \sum_{i=0}^{i=m-2} \left[P_0\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1)\right) + P_L\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) - \frac{l}{c}\right) \right] \alpha^i + \alpha^{m-1} A \right\} + R\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right), \quad (2.41)$$

$$P_L\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) - \frac{l}{c}\right) = \begin{cases} \beta P_{AH}, & t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) \leq \frac{l}{c}, \\ \beta P_A\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) - \frac{l}{c}\right), & t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) > \frac{l}{c} \end{cases}$$

$$R\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right) = \begin{cases} \frac{c_2}{K + c_2} P_{AH}, & t + \frac{x}{c} \leq \frac{l}{c}, \\ \frac{c_2}{K + c_2} P_A\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right), & t + \frac{x}{c} > \frac{l}{c}. \end{cases}$$

Рассмотрим выполнение третьего пункта принятой схемы формирования решения. Найдем связь между номером участка m и аргументом $(t+l/c)$ функции P_ψ . Как и при выводе зависимости (2.36), исходя из рис. 2.2, получим

$$m = E\left(\frac{t + x/c}{2l/c}\right) + 1. \quad (2.42)$$

На основании общего решения (2.3) с учетом полученных зависимостей (2.37) и (2.41) окончательно получаем решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.2), описывающих изменение давления в линии для произвольных законов изменения давлений на ее концах:

$$\begin{aligned}
P(t, x) &= H(n) \sum_{i=0}^{i=n-1} [P_0(t_\phi) + P_L(t_\phi - \frac{l}{c})] \alpha^i + \alpha^n A + \\
&+ \frac{K-c_2}{K+c_2} \left\{ H(m-1) \sum_{i=0}^{i=m-2} \left[P_0(t_\psi) + P_L\left(t_\psi - \frac{l}{c}\right) \right] \alpha^i + \alpha^{m-1} A \right\} + R\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right), \\
n &= E\left(\frac{t-x/c}{2l/c}\right) + 1, m = E\left(\frac{t+x/c}{2l/c}\right) + 1. \\
P_0(t_{\phi,\psi}) &= \frac{c_1}{(K+c_1)} P_M(t_{\phi,\psi}), t_\phi = t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}i, t_\psi = t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}(i+1) \\
R\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right) &= \begin{cases} \frac{c_2}{K+c_2} P_{AH}, & t + \frac{x}{c} \leq \frac{l}{c}, \\ \frac{c_2}{K+c_2} P_A\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right), & t + \frac{x}{c} > \frac{l}{c}, \end{cases} \\
P_L\left(t_{\phi,\psi} - \frac{l}{c}\right) &= \begin{cases} \beta P_{AH}, & t_{\phi,\psi} \leq l/c, \\ \beta P_A(t_{\phi,\psi}), & t_{\phi,\psi} > l/c \end{cases} \\
A &= \frac{1}{2K}(Kp_H + G_H), \quad n = E\left(\frac{t-x/c}{2l/c}\right) + 1, \quad m = E\left(\frac{t+x/c}{2l/c}\right) + 1, \\
P_H &= \frac{c_1 P_{MH} + c_2 P_{AH}}{c_1 + c_2}, \quad G_H = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (P_{MH} - P_{AH}). \\
K &= \frac{f}{c}, \quad \alpha = \frac{(K-c_1)(K-c_2)}{(K+c_1)(K+c_2)}, \quad \beta = \frac{c_2(K-c_1)}{(K+c_1)(K+c_2)},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

где $p_0(t)$ и $p_l(t)$ – законы изменения давлений перед входом и на выходе из линии соответственно, $H(n)$ – функция Хэвисайда: $H(n) = 1$ при $n > 0$, $H(n) = 0$ при $n \leq 0$; $E(t, x)$ – целая часть числа, c – скорость звука, c_1 и c_2 – коэффициенты расходных характеристик на входе и выходе линии; индексы обозначают: H – начальный параметр внутри линии, M и A – параметры за входом в линию и перед выходом соответственно.

2.3. Применение общего решения при расчетах переходных процессов для различных условий

2.3.1 Одновременное изменение давлений на концах линии

Как уже отмечалось ранее, классические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных не позволяют найти аналитические решения для многих практических задач, например, для случая одновременного изменения давлений на концах линии. На рис. 2.3 представлены графики изменения давления по длине линии при изменении давления на входе по экспоненциальному, а на выходе – по синусоидальному закону в разные моменты времени, построенные по полученному решению (2.43).

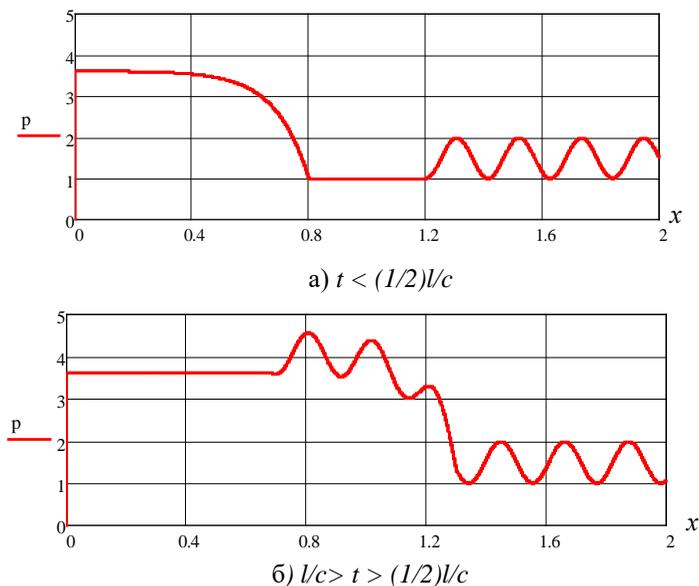


Рис. 2.3. Изменение давления по длине линии при заданных законах изменения давлений на ее концах

2.3.2. Изменение давления на входе в линию при постоянном давлении на выходе

Рассмотрим, например, решение для случая, когда давление на входе в линию изменяется по произвольному закону $P_M(t)$, а давление на выходе постоянно при нулевом начальном расходе.

В этом случае решение можно упростить, рассматривая избыточное давление в линии по сравнению с начальным давлением, равным давлению на выходе P_A .

Тогда для рассматриваемых условий в системе уравнений (2.43) принимаем:

$$P_H = P_A = P_{AH} = 0, P_L = 0, G_H = 0, A = 0.$$

В результате получим следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} P(t, x) &= H(n) \sum_{i=0}^{i=n-1} P_0(t_\varphi) \alpha^i + H(m) \frac{K - c_2}{K + c_2} \sum_{i=0}^{i=m-2} P_0(t_\psi) \alpha^i, \\ t_\varphi &= t - \frac{x}{c} - \frac{2l}{c} i, \quad t_\psi = t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c} (i+1), \\ P_0(t_{\varphi, \psi}) &= \frac{c_1}{(K + c_1)} P_M(t_{\varphi, \psi}), \\ n &= E\left(\frac{t - x/c}{2l/c}\right) + 1, \\ m &= E\left(\frac{t + x/c}{2l/c}\right) + 1, \end{aligned} \right\} (2.44)$$

где

$$\alpha = \frac{(K - c_1)(K - c_2)}{(K + c_1)(K + c_2)}.$$

В качестве иллюстрации на рис. 2.4 показаны графики

изменения давления на концах линии (кривая 1 – в начале линии, кривая 2 – на конце линии), построенные по уравнениям (2.44) для случая экспоненциального закона изменения давления на входе:

$$P_M = P_{max}(1 - e^{-\alpha t}).$$

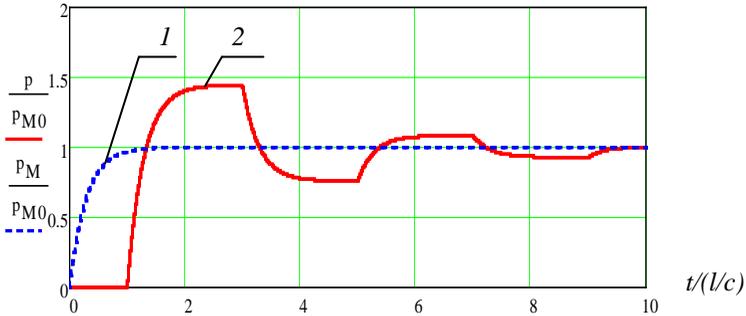


Рис.2.4. Процессы на конце линии при экспоненциальном законе изменения давления газа на входе

2.3.3. Расчет процессов в линии при скачкообразном изменении давления на входе

Рассмотрим наиболее характерные для пневматических систем случаи передачи пневматических сигналов, когда в начале линии стоит пневматическое устройство (пневмораспределитель), в результате срабатывания которого давление на входе линии изменяется скачкообразно. При этом на выходе линии находятся элементы управления непроточного типа (камеры управления мембранных клапанов, золотниковых пневмораспределителей и т.п.), объем которых пренебрежимо мал по сравнению с объемом линии, или проточного типа (струйные элементы). Найдем решение для случаев, когда давление на вы-

ходе линии остается постоянным (за проточными элементами) и равным начальному давлению в линии.

Если давление на входе изменяется скачкообразно и остается постоянным на протяжении всего рассматриваемого интервала времени, тогда для всех участков в выражениях (2.34) и (2.39) можем записать:

$$P_{0_1}(t) = P_{0_2}(t) = P_{0_3}(t) = \dots = P_{0_n}(t) = P_0 .$$

Вынесем в уравнениях (2.34) и (2.39) величину P_0 из-под знака суммы. В результате получим:

$$P_{\varphi_n}(\tau) = H(n)P_0 \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^i, \quad (2.45)$$

$$P_{\psi_m}(t) = H(m-1) \frac{K - c_2}{K + c_2} P_0 \sum_{i=0}^{i=m-2} \alpha^i. \quad (2.46)$$

Сумма в правой части каждого уравнения представляет собой сумму геометрической прогрессии $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ ($i \in \{1 \div k\}$) со знаменателем α .

Следовательно, для каждого из уравнений (2.45) и (2.46) можем записать [3]:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^i = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}; \quad (2.47)$$

$$\sum_{i=0}^{i=m-2} \alpha^i = \frac{\alpha^{m-1} - 1}{\alpha - 1}. \quad (2.48)$$

Тогда уравнение (2.45) для вычисления функции $P_{\varphi_n}(t)$

на любом из участков от $n = 1$ до ∞ с учетом (2.47) будет иметь вид:

$$P_{\varphi_n}(t) = P_{\varphi}(t) = P_0 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}. \quad (2.49)$$

Однако полученное уравнение (2.49) справедливо и для участка с номером "0". Действительно, считая этот участок нулевым, для $n = 0$ получим:

$$P_{\varphi_0}(t) = 0,$$

что соответствует полученному условию (2.11) (для рассматриваемого случая $A = 0$). Таким образом, полученное уравнение описывает все участки, начиная с интервала " l/c ".

Для функции $P_{\psi}(t)$ из уравнения (2.46) с учетом (2.48) для $m \geq 2$ получим:

$$P_{\psi_m}(t) = P_{\psi}(t) = \frac{K - c_2}{K + c_2} P_0 \frac{\alpha^{m-1} - 1}{\alpha - 1}. \quad (2.50)$$

Полученная зависимость в соответствии с уравнением (2.30) справедлива для расчета функции $P_{\psi}(t)$ при $t \geq l/c$, т.е. для $m \geq 2$ (см. рис.2.1). Однако диапазон применения этой формулы можно расширить и на интервал $l/c \geq t \geq 0$.

Действительно, на участке $m = 1$, т.е. на интервале $2l/c \geq t \geq 0$, получим $P_{\psi}(t) = 0$, что совпадает с уравнением (2.12).

Таким образом, с учетом (2.49) и (2.50) уравнение изменения давления на каждом рассматриваемом участке будет иметь следующий вид:

$$P_n(t) = \frac{P_0}{\alpha - 1} \left[(\alpha^n - 1) + \frac{K - c_2}{K + c_2} (\alpha^{m-1} - 1) \right]. \quad (2.51)$$

Подставляя значения n и m из (2.36) и (2.42) и P_φ из (2.20) в уравнение (2.51), после преобразований получим следующее уравнение, описывающее изменение давления в линии:

$$P(t, x) = \frac{P_M c_1}{(c_1 + c_2)} \left[1 - \frac{K + c_2}{2K} \alpha^{E \left(\frac{t-x/c}{2l/c} \right) + 1} - \frac{K - c_2}{2K} \alpha^{E \left(\frac{t+x/c}{2l/c} \right)} \right], \quad (2.52)$$

где в соответствии с (2.7) и (2.22):

$$K = \frac{f}{c},$$

$$\alpha = \frac{(K - c_1)(K - c_2)}{(K + c_1)(K + c_2)}.$$

Выведем уравнение изменения расхода в линии. В соответствии с уравнением (2.3) имеем:

$$G(x, t) = G_\varphi(t - x/c) + G_\psi(t + x/c).$$

Отсюда, имея в виду (2.5) и (2.6), т.е. $G_\varphi(t - x/c) = KP_\varphi(t - x/c)$ и $G_\psi(t + x/c) = -KP_\psi(t + x/c)$, получим:

$$G(x, t) = K[P_\varphi(t - x/c) - P_\psi(t + x/c)].$$

Тогда для произвольного участка $m = n$ можем записать:

$$G(x,t) = K[P\varphi_n(t - x/c) - P\psi_m(t + x/c)].$$

Подставим значения функций $KP\varphi_n(t - x/c)$ и $KP\psi_m(t + x/c)$ из уравнений (2.49) и (2.50) в полученное уравнение:

$$G(x,t) = \frac{P_0 K}{(\alpha - 1)} \left[(\alpha^n - 1) - \frac{K - c_2}{K + c_2} (\alpha^{m-1} - 1) \right].$$

Окончательно после постановки значений n и m из уравнений (2.36) и (2.42) и несложных преобразований получим уравнение изменения расхода в линии:

$$G(t,x) = \frac{P_M c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \left[1 - \frac{K + c_2}{2c_2} \alpha^{\left[E\left(\frac{t-x/c}{2l/c}\right) + 1 \right]} + \frac{K - c_2}{2c_2} \alpha^{E\left(\frac{t+x/c}{2l/c}\right)} \right]. \quad (2.53)$$

Выполним анализ полученного уравнения изменения давления в линии (2.52). Для этого убедимся, что оно удовлетворяет уравнению (2.2) и соответствует начальным и граничным условиям.

Так как уравнение (2.52) в соответствии с (2.3) есть сумма функций, то дифференцируя последовательно уравнение (2.3) по t и x , нетрудно убедиться, оно, а следовательно и решение (2.52) является решением уравнения (2.2).

Покажем, что полученное решение (2.52) удовлетворяет начальным условиям.

Рассмотрим момент времени $t = 0$. Подставляя в уравнение (2.52) $t = 0$, получим:

$$P(0,x) = \frac{P_M c_1}{(c_1 + c_2)} \left[1 - \frac{K + c_2}{2K} \alpha^{\left[E\left(\frac{-x}{2l}\right) + 1 \right]} - \frac{K - c_2}{2K} \alpha^{E\left(\frac{x}{2l}\right)} \right]. \quad (2.54)$$

При изменении координаты x от 0 до l/c показатели при α равны 0:

$$E\left(\frac{-x}{2l}\right) + 1 = 0,$$

$$E\left(\frac{x}{2l}\right) = 0.$$

Подставив значения показателей в уравнение (2.54), после преобразований получим:

$$P(0, x) = 0,$$

что соответствует начальному условию (2.8).

Проверим второе начальное условие (2.9), которое для рассматриваемого случая имеет вид:

$$G_{\varphi}(-x/c) + G_{\varphi}(x/c) = 0 \quad (2.55)$$

В этом случае уравнение (2.53) будет иметь вид

$$G(t, x) = \frac{P_M c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \left[1 - \frac{K + c_2}{2c_2} \alpha^{[E\left(\frac{-x/c}{2l/c}\right) + 1]} + \frac{K - c_2}{2c_2} \alpha^{E\left(\frac{x/c}{2l/c}\right)} \right]$$

При изменении координаты x от 0 до l/c показатели при α равны 0:

$$E\left(\frac{-x}{2l}\right) + 1 = 0,$$

$$E\left(\frac{x}{2l}\right) = 0.$$

Окончательно после преобразований получим:

$$G(0, x) = \frac{P_M c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \left[1 - \frac{K + c_2}{2c_2} \alpha^0 + \frac{K - c_2}{2c_2} \alpha^0 \right] = 0,$$

что соответствует второму начальному условию (2.9).

Таким образом, решение (2.52) удовлетворяет начальным условиям.

Проверим, соответствуют ли полученные решения (2.49) и (2.50) граничным условиям:

$$P_\varphi(t) = \frac{c_1}{K + c_1} P_M(t) + \frac{K - c_1}{K + c_1} P_\psi(t), \quad t \geq 0,$$

$$P_\psi(t) = \frac{K - c_2}{K + c_2} P_\varphi(t - 2l/c), \quad t \geq 0.$$

Подставив значения функций $P_\varphi(t)$ и $P_\psi(t)$ из (2.49) и (2.50) в представленные уравнения, нетрудно убедиться в том, что они обращаются в тождества, т.е. решения (2.49) и (2.50) удовлетворяют и граничным условиям.

Рассмотрим частные случаи пневматических линий.

а) Заглушенная линия с незадрроселированным входом

Для незадрроселированной на входе линии с заглушенным выходом можем записать: $c_1 = \infty$, $c_2 = 0$. После несложных преобразований из уравнения (2.52) получим:

$$P(t, x) = P_M + \frac{P_M}{2} \left[(-1)^{\left\lfloor \frac{t-x/c}{2l/c} \right\rfloor} E^{\left(\frac{t-x/c}{2l/c} \right)} - (-1)^{\left\lfloor \frac{t+x/c}{2l/c} \right\rfloor} E^{\left(\frac{t+x/c}{2l/c} \right)} \right]. \quad (2.56)$$

Найдем закон изменения давления на конце линии. Для этого подставим в полученное уравнение (2.56) значение $x = l$. После преобразований получим:

$$P(t, l) = P_M \left[1 - (-1)^{\left\lfloor \frac{t+l/c}{2l/c} \right\rfloor} \right]. \quad (2.57)$$

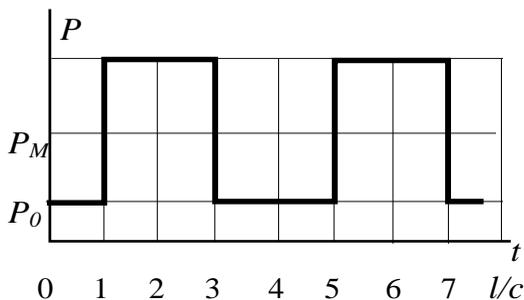


Рис. 2.5. Изменение давления на конце заглушенной линии

График изменения давления на конце линии, построенный по формуле (2.57), представлен на рис. 2.5.

На рис. 2.6 представлены графики изменения давления по длине линии в разные моменты времени. На рис. 2.6,а показано прохождение прямой волны в течение времени l/c , на рис. 2.6,б появляется отраженная волна.

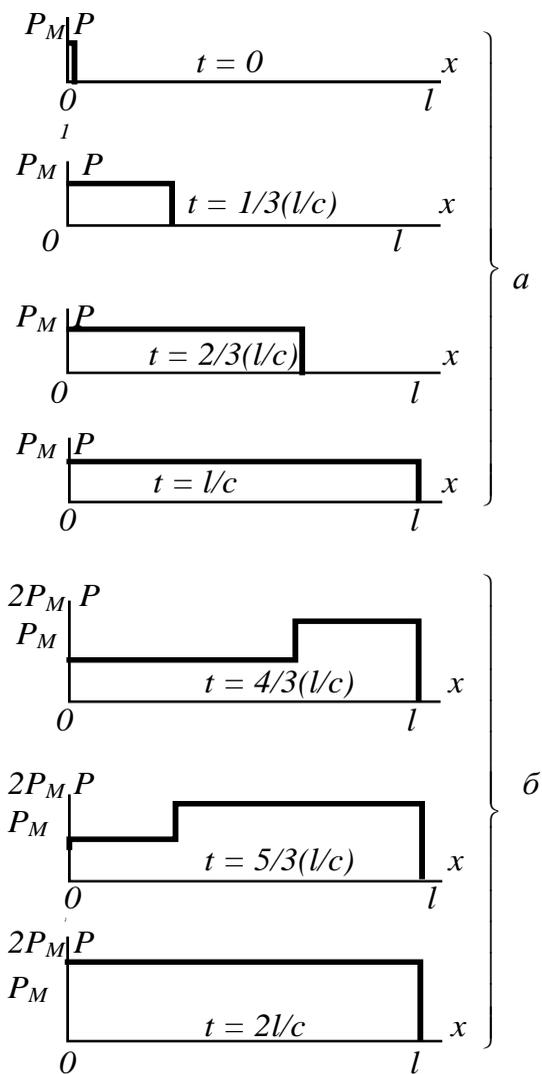


Рис.2.6. Изменение давления по длине линии

б) Открытая линия с дросселем на выходе

Для открытой линии с дросселем на выходе имеем $c_1 = \infty$. В этом случае из (2.52) после несложных преобразований получим следующее уравнение изменения давления в линии:

$$P(t, x) = P_M \left[1 - \frac{K + c_2}{2K} \alpha \left[E \left(\frac{t - x/c}{2l/c} \right) + 1 \right] - \frac{K - c_2}{2K} \alpha E \left(\frac{t + x/c}{2l/c} \right) \right],$$

где

$$\alpha = - \frac{K - c_2}{K + c_2}.$$

Для расчета давления на конце линии полученное уравнение принимает вид:

$$P(t, l) = P_M \left[1 - \alpha E \left(\frac{t + l/c}{2l/c} \right) \right]. \quad (2.58)$$

На рис. 2.7 показан график изменения давления на конце ЛС при различных соотношениях параметров линии K и дросселя на выходе c_2 .

Полученное уравнение (2.52) является единым для любых сочетаний параметров линии и дросселя. Классический подход позволяет найти решение для этого частного случая, однако при этом получаются три различных решения в зависимости от параметров ЛС.

Ниже приводятся три решения для рассмотренного случая открытой линии с дросселем на выходе, полученные методом операционного исчисления [8] для различных соотношений между параметрами c_2 и K .

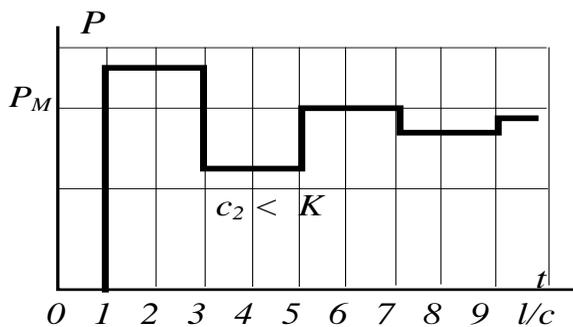
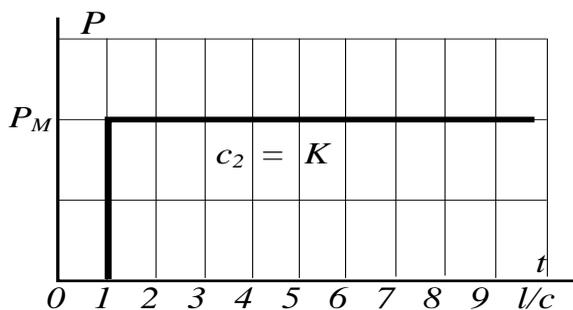
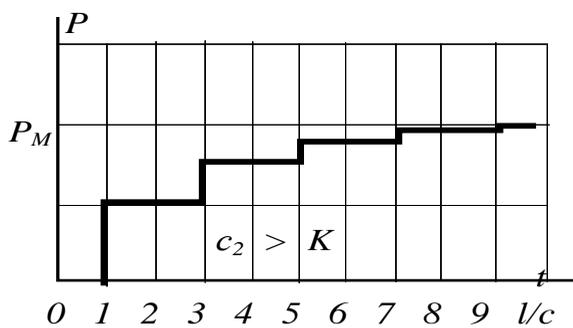


Рис.2.7. Изменение давления на конце линии

1). Для случая $c_2 > K$ решение имеет вид:

$$P = P_M \left\{ 1 + e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s(t + x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s(t - x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)^2}} \right] \right\},$$

где

$$\omega_s = \frac{(2s+1)c}{2l} \pi; \quad \operatorname{tg} \varphi_s = \frac{2s+1}{\alpha_2} \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \varphi_s \leq \frac{\pi}{2}); \quad \operatorname{th}(\alpha_2) = \frac{K}{c_2}.$$

2). Для $c_2 < K$ получается следующее решение:

$$P = P_M \left\{ 1 - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} - e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}}}{2\alpha_2} e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} + e^{-\alpha_2 \frac{ct}{l}} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega(t + x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega(t - x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} \right] \right\},$$

где $\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{s\pi}{\alpha_2}$, $(0 \leq \varphi_s \leq \pi/2)$; $\omega = \pi c/l$; $\operatorname{th}(\alpha_2) = K/c_2$.

3). Для $c_2 = K$ отраженная волна отсутствует, и решение имеет вид:

$$P = P_M.$$

в) Заглушенная линия с дросселем на входе

Рассмотрим решение (2.52) применительно к заглушенной линии с дросселем на входе.

В этом случае можем записать $c_2 = 0$.

Тогда из уравнения (2.52) после несложных преобразований получим следующее решение:

$$P(t, x) = P_M \left[1 - \frac{1}{2} \alpha \left[E\left(\frac{t-x/c}{2l/c}\right) + 1 \right] - \frac{1}{2} \alpha E\left(\frac{t+x/c}{2l/c}\right) \right],$$

где

$$\alpha = \frac{K - c_1}{K + c_1}.$$

В зависимости от соотношения сопротивлений линии и дросселя на входе изменяется и характер переходного процесса в линии.

Влияние параметров дросселя на входе на переходный процесс в конце линии показано на рис. 2.8.

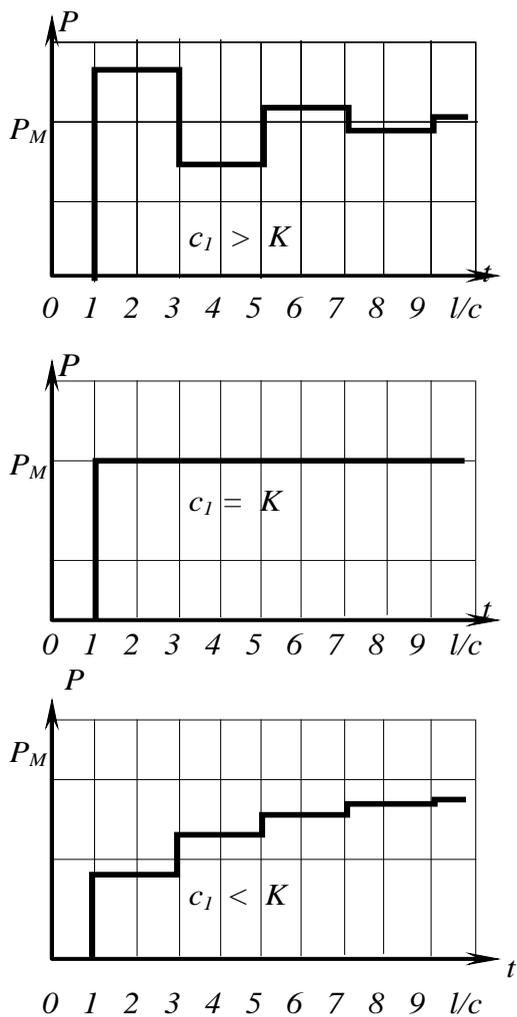


Рис.2.8. Изменение давления на конце линии

2.4. Расчет динамики линии с учетом потерь давления на трение по длине линии

Изложенный выше метод точного аналитического решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.1) получен для случаев, когда потерями давления по длине линии можно пренебречь.

В настоящем подразделе изложена методика приближенного расчета давлений P_1 и P_2 на концах линии с учетом сопротивления самой линии.

Рассмотрим линию, на входе и выходе которой стоят дроссели с коэффициентами расходных характеристик c_1 и c_2 ,

Сосредоточим распределенное по длине сопротивление линии на ее концах в

виде сопротивлений дополнительно стоящих по краям ЛС двух условных дросселей с коэффициентами расходных характеристик $c_{1\Sigma}$ (рис. 2.9,а). Один из этих условных дросселей стоит за входным дросселем линии, а второй – перед выходным дросселем. Суммарное сопротивление двух условных дросселей равно сопротивлению линии, а сопротивление каждого из них равно половине сопротивления линии. Тогда внутри такой линии на ее концах будут условные давления P_{1Y} и P_{2Y} , а фактические давления P_1 и P_2 будут определяться давлениями в сечении между

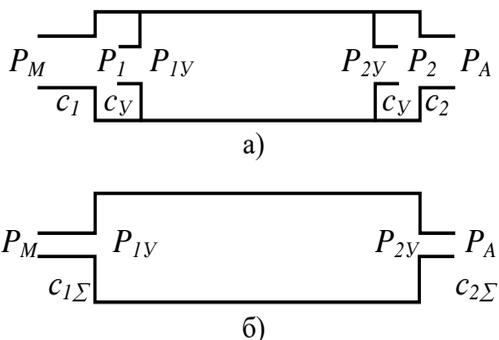


Рис. 2.9. Схема для расчета давлений на концах линии с учетом потерь давления по длине

условными и фактически стоящими дросселями на входе и выходе (рис. 2.9,а).

В результате получили расчетную схему линии (рис. 2.9,б), внутреннее сопротивление которой равно нулю, а на входе и выходе стоят дроссели с коэффициентами расходных характеристик $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$ соответственно, учитывающие сопротивление реальных дросселей и распределенное по длине сопротивление линии.

Таким образом, для расчета давлений P_1 и P_2 на концах ЛС с учетом потерь давления по длине линии следует:

1) вычислить значения суммарных коэффициентов $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$;

2) определить условные давления на концах линии P_{1V} и P_{2V} , используя решение, полученное ранее для соответствующих начальных и граничных условий без учета внутреннего сопротивления линии. Для этого необходимо в используемом решении заменить коэффициенты расходных характеристик c_1 и c_2 на соответствующие суммарные коэффициенты $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$ и найти значения P_{1V} и P_{2V} (рис. 2.9,б).

3) вычислить фактические значения давлений P_1 и P_2 в соответствии с расчетной схемой на рис.2.9,а.

Рассмотрим выполнение 1 и 3 пунктов предложенной схемы расчета.

Определим суммарные коэффициенты расходных характеристик $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$, определяемые расходными характеристиками фактических и условных дросселей на входе и выходе. Для этого найдем сначала коэффициенты расходных характеристик c_V условных дросселей, выразив их через коэффициент расходной характеристики линии c_L . Имея в виду, что коэффициент расходной характеристики обратно пропорционален сопротивлению, в соответствии с расчетной схемой получим:

$$c_y = 2c_L.$$

Коэффициент расходной характеристики линии c_L определяется по формуле [10]:

$$c_o = \frac{f^2}{8\pi gI}.$$

Тогда коэффициенты расходных характеристик условных дросселей будут равны:

$$c_y = \frac{f^2}{4\pi gI}. \quad (2.59)$$

Суммарные коэффициенты расходных характеристик $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$ на входе и выходе линии найдем из уравнения равенства давлений (рис.2.9,а):

$$\begin{aligned} P_M - P_{1Y} &= (P_M - P_1) + (P_1 - P_{1Y}), \\ P_{2Y} - P_A &= (P_{2Y} - P_2) + (P_2 - P_A). \end{aligned}$$

Выразим каждую разность давлений в этих уравнениях через соответствующий расход и коэффициент расходной характеристики:

$$\begin{aligned} P_M - P_{1Y} &= G_1 / c_{1\Sigma}, \\ P_M - P_1 &= G_1 / c_1, \\ P_1 - P_{1Y} &= G_1 / c_y, \\ P_{2Y} - P_A &= G_2 / c_{2\Sigma}, \\ P_{2Y} - P_2 &= G_2 / c_y, \\ P_2 - P_A &= G_2 / c_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим:

$$\frac{G_1}{c_{1\Sigma}} = \frac{G_1}{c_1} + \frac{G_1}{c_Y},$$

$$\frac{G_2}{c_{2\Sigma}} = \frac{G_2}{c_2} + \frac{G_2}{c_Y}.$$

Отсюда найдем суммарные расходные характеристики дросселей на входе и выходе из линии, которые учитывают сопротивление пневмоаппаратуры на входе и выходе, а также потери по длине линии:

$$c_{1\Sigma} = \frac{2c_{\mathcal{L}}c_1}{2c_{\mathcal{L}} + c_1}, \quad (2.60)$$

$$c_{2\Sigma} = \frac{2c_{\mathcal{L}}c_2}{2c_{\mathcal{L}} + c_2}. \quad (2.61)$$

Выведем расчетные зависимости для выполнения 3 пункта расчета – для вычисления давлений P_1 и P_2 .

Запишем уравнения расходов на концах линии. На входе ЛС имеем:

$$G_1 = c_1 (P_M - P_1) = c_Y (P_1 - P_{1Y}).$$

Отсюда найдем давление в начале линии:

$$P_1 = \frac{c_1 P_M + c_Y P_{1Y}}{c_1 + c_Y}.$$

Окончательно с учетом (2.59) получим:

$$P_1 = \frac{P_{1Y} + (4\pi g l c_1 / f^2) P_M}{1 + 4\pi g l c_1 / f^2}. \quad (2.62)$$

Для выхода из линии можем записать:

$$G_2 = c_Y(P_{2Y} - P_2) = c_2(P_2 - P_A).$$

Отсюда с учетом аналогичных подстановок получим:

$$P_2 = \frac{P_{2Y} + (4\pi g l c_2 / f^2) P_A}{1 + 4\pi g l c_2 / f^2}. \quad (2.63)$$

В качестве примера найдем изменение избыточного давления P_2 на конце проточной линии с учетом потерь давления по длине для следующих условий. Давление на входе изменяется скачкообразно. Давление на выходе постоянно. Начальный расход в линии равен нулю, начальное давление равно давлению на выходе P_A .

По формулам (2.60) и (2.61) определяем коэффициенты $c_{1\Sigma}$ и $c_{2\Sigma}$

Для заданных условий используем полученное ранее решение (2.52), из которого найдем давление P_{2Y} . Предварительно преобразуем это уравнение, сделав следующие очевидные преобразования:

$$E\left(\frac{t-l/c}{2l/c}\right) + 1 = E\left(\frac{t-l/c}{2l/c} + 1\right) = E\left(\frac{t+l/c}{2l/c}\right).$$

В результате уравнение (2.52) будет иметь вид:

$$P_{2y} = P_M \frac{c_{1\Sigma}}{(c_{1\Sigma} + c_{2\Sigma})} \left[1 - \alpha^{E\left(\frac{t+l/c}{2l/c}\right)} \right], \quad (2.64)$$

$$\alpha = \frac{(K - c_{1\Sigma})(K - c_{2\Sigma})}{(K + c_{1\Sigma})(K + c_{2\Sigma})}, \quad K = \frac{f}{c}.$$

Найдем фактическое давление P_2 на конце линии, подставив выражение (2.64) в (2.63). При этом, для случая расчета избыточного давления в уравнении (2.63) принимаем $P_A = 0$.

Окончательно после несложных преобразований получим уравнение, описывающее изменение давления на конце линии с учетом потерь давления по ее длине:

$$P_2 = P_M \frac{c_{1\Sigma} c_{2\Sigma}}{(c_{1\Sigma} + c_{2\Sigma})c_2} \left[1 - \alpha^{E\left(\frac{t+l/c}{2l/c}\right)} \right]. \quad (2.65)$$

Подтвердим правомерность предложенного метода расчета динамики ЛС на ее концах с учетом потерь давления по длине ЛС. Для этого покажем, что результаты расчетов по разработанной методике:

- соответствуют реальным результатам при расчете переходных процессов при предельных значениях параметров линии и газа;

- соответствуют известному в классической теории газовой динамики точному решению [13] при вычислении давления фронта головной волны;

- соответствуют реальным процессам при расчете установившихся режимов при предельных значениях параметров линии и газа;

- совпадают с известным решением [8], полученным для заглушенной на конце линии с открытым входом.

Покажем, что при расчете переходных процессов для предельных значений параметров линии и подсоединенных дросселей полученное уравнение (2.65) дает очевидные результаты, соответствующие физике процесса:

– при увеличении длины линии ($l \rightarrow \infty$) или уменьшении ее проходного сечения ($f \rightarrow 0$) в соответствии с физикой процесса вследствие потерь давления внутри линии избыточное давление на ее конце должно быть равно нулю. Действительно, как следует из уравнений (2.59) – (2.61), суммарные коэффициенты $c_{1\Sigma} \rightarrow 0$ и $c_{2\Sigma} \rightarrow 0$, поэтому $\alpha \rightarrow 1$ и, как следует из уравнения (2.65), $P_2 \rightarrow 0$;

– при отсутствии дросселя на выходе, т.е. при $c_2 \rightarrow \infty$, из уравнения (2.65) получим очевидный результат: $P_2 \rightarrow 0$.

Покажем, что с помощью выведенного уравнения (2.65) практически без погрешности можно вычислить давление фронта головной волны. Как уже отмечалось в подразделе 2.1, для открытой на входе линии известно аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (2.1) с учетом трения газа внутри линии. При этом давление фронта головной волны в конце ЛС с заглушенным выходом определяется по формуле [13]:

$$P = 2P_M e^{-\frac{4\pi g l}{f c}}$$

Разложив множитель $e^{-\frac{4\pi g l}{f c}}$ в ряд Тейлора, для промышленных систем с ЛС длиной от 0 до 10 м и диаметром 0,0025 – 0,01 м с погрешностью $\ll 1\%$ получим:

$$P = 2P_M e^{-\frac{4\pi g l}{f c}} \approx 2P_M \left(1 - \frac{4\pi g l}{f c} \right). \quad (2.66)$$

В соответствии с разработанной методикой давление

фронта головной волны на конце линии можем определить по формуле (2.65), подставив значение $t = l/c$:

$$P = 2P_M \frac{1}{1 + \frac{4\pi g l}{fc}}$$

Полученное выражение при разложении в ряд Тейлора с погрешностью $\ll 1\%$ дает результат, совпадающий с классическим решением (2.66), еще раз подтверждающий справедливость разработанной методики:

$$P = 2P_M \frac{1}{1 + \frac{4\pi g l}{fc}} \approx 2P_M \left(1 - \frac{4\pi g l}{fc} \right).$$

Выполним анализ решения (2.65) для установившегося давления в конце ЛС, которое после несложных преобразований приведем к виду:

$$P_{2Y} = \frac{P_M}{\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{f^2 + 8\pi g l c_2}{f^2} \right)} \quad (2.67)$$

Нетрудно убедиться, что для предельных значений всех параметров ЛС получим очевидные результаты, которые соответствуют физике газодинамических процессов:

- при полностью задресселированном выходе ($c_2 = 0$):
 $P_{2Y} = P_M$;
- при незадресселированном выходе из ЛС ($c_2 = \infty$):
 $P_{2Y} = 0$;
- при заглушенном входе ($c_1 = 0$): $P_{2Y} = 0$;
- для бесконечно длинной линии ($l \rightarrow \infty$): $P_{2Y} \rightarrow 0$;
- при увеличении вязкости газа ($g \rightarrow \infty$): $P_{2Y} \rightarrow 0$;

– при уменьшении вязкости газа ($\mathcal{G} \rightarrow 0$) величина установившегося давления не будет зависеть от длины ЛС и определяется только коэффициентами расходных характеристик дросселей

c_1 и c_2 ;

– в случае предельно малого проходного сечения ЛС, т.е. при $f \rightarrow 0$, $P_{2V} \rightarrow 0$;

– для случая, когда параметры ЛС близки к параметрам камеры, т.е. когда $l/f(c_1 + c_2) \rightarrow 0$, получим

$$P_{2Y} = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)} P_M,$$

что соответствует давлению в проточной камере при установившемся режиме течения и полностью совпадает с решением известного уравнения (1.8) [10], написанного для избыточных давлений.

Таким образом, разработанная математическая модель адекватно отражает реальные физические процессы и на статических режимах для любых значений геометрических параметров ЛС.

В дополнение к обоснованию правомерности разработанной методики расчета линий с учетом трения внутри ЛС сравним полученное решение (2.65) с известным в литературе [8] решением, которое получено методом операционного исчисления для случая незадросселированной на входе линии с заглушенным выходом и имеет вид:

$$P = P_M \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} e^{-\beta t} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^s}{(2s-1)} \frac{\cos(\xi_s t - \theta_s)}{\sqrt{1 - \frac{2\beta l}{(2s-1)c\pi}}} \right] \right\} \quad (2.68)$$

где

$$\beta = \frac{4\pi\vartheta}{f}; \quad \xi_s = \sqrt{c^2 \left(\frac{2s-1}{2l} \pi \right)^2 - \beta^2}; \quad \operatorname{tg}(\theta_s) = \frac{\beta}{\xi_s}.$$

На рис. 2.10 представлены графики переходного процесса на конце линии, построенные по полученной зависимости (2.65) (кривая 1) и по приведенной формуле (2.68) (кривая 2) для линии длиной 2 м и диаметром 0,006 м (кривые практически совпадают).

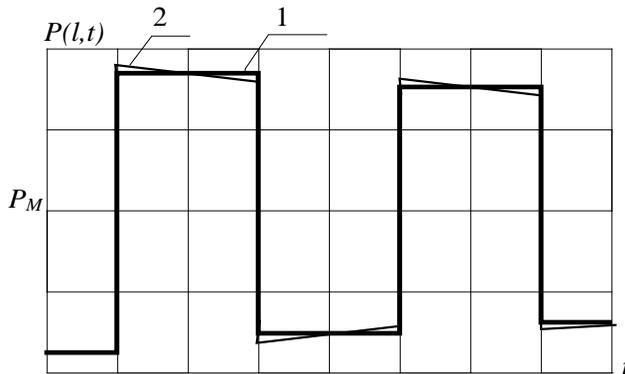


Рис. 2.10. Изменение давления на конце линии с учетом потерь давления по длине

Как следует из графиков, результаты решений, полученные по разработанной методике достаточно близки к точному решению.

Таким образом, полученные уравнения можно рекомендовать для проведения дальнейших исследований и для практического применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1969. - 288 с.
2. Браун Ф. Переходные процессы в линиях передачи жидкости или газа //Техническая механика, т. 84, серия Д. - № 4. 1962. - С.163-171.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев И.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. - 544 с.
4. Гогричиани Г.В., Шипилин А.В. Переходные процессы в пневматических системах. - М.: Машиностроение, 1986. 160 с.
5. Донской А.С., Климов В.А. Аналитический метод расчета волновых процессов в пневматических объектах. /Технология текстильной промышленности. Изв. вузов. - 1997. - № 2. - С.93-95.
6. Донской А.С. Моделирование переходных процессов в пневматических системах. – СПб.: СПГУТД, 1998. – 204 с.
7. Донской А.С. Обобщенные математические модели элементов пневмосистем. – СПб.: СПГУТД, 2001. – 215 с.
8. Елимелех И.М., Сидоркин Ю.Г. Струйная автоматика (пневмоника). -Л.: Лениздат, 1972. - 212 с.
9. Жуковский Н.И. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах: Избранные сочинения. - М.: Гостехиздат. 1948. Т 11.
10. Залманзон Л.А. Теория элементов пневмоники. - М.: Наука, 1969. - 507 с.
11. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. - М.: Советское радио, 1975. -320 с.
12. Кэнтла Р. Переходные процессы в гидравлических линиях, включая частотно-модулированные входные сигналы //Теоретические основы инженерных расчетов. - М.: Мир.- № 2. - 1971, - С.168-177.
13. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. - М.: Недра, 1975. - 296 с.