

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций
Кафедра экспериментальной физики

Васильев А.Э.

ФИЗИКА

Текст лекций
Версия 2.0

Издание 2-ое, дополненное

Санкт – Петербург
2020

Введение

Физика - есть наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, и законы ее движения.

Основной метод изучения природы - экспериментальный. Это значит, что ученый выявляет с помощью *измерений* связь между различными физическими величинами, которые мы вводим для описания окружающей нас среды. Затем ученые переводят все это на язык математики: формируется математическая модель данного физического явления. Кроме этого метода, существует еще два - теоретический и получивший в последнее время широкое распространение метод компьютерного моделирования. Все они дополняют друг друга.

Поэтому задача физики состоит в том, чтобы создать в нашем сознании такую картину физического мира, которая наиболее полно отражает свойства его и обеспечивает такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира.

Итак, физика создает модель окружающего нас мира и изучает ее свойства. Но любая модель является ограниченной. При создании моделей того или иного явления принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. В этом и заключается искусство ученого - из всего многообразия выбрать главное. Приведем примеры физических моделей:

- 1) Три школьных этапа изучения физики: природоведение (описательная модель); подготовительная (5-8 кл.); модели с их мат. выражением (9-11 кл.)
- 2) II закон Ньютона - модель применимая в классической физике и в инерциальных системах отсчета (ИСО)
- 3) Законы Кеплера - модель движения планет как материальных точек без учета светового давления и законов общей теории относительности (ОТО)

Физические модели являются математическими, но не математика является их основой. Количественные соотношения между физическими величинами выясняются в результате измерений, наблюдений и экспериментальных исследований и лишь выражаются на языке математики. Однако другого языка для построения физических теорий не существует.

Курс общей (или экспериментальной) физики рассчитан на три семестра и состоит из 6 разделов:

МЕХАНИКА	II семестр
ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТ. ФИЗИКА	
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	III семестр
ВОЛНЫ	
ОПТИКА	IV семестр
АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	

Основные учебники: Савельев И.В. Курс общей физики т.1-3. Курс физики т.1-3

Дополнительный: Яворский, Детлаф Курс физики

Задачник: Иродов И.Е. Задачи по общей физике

ЧАСТЬ I. МЕХАНИКА

Итак, переходим к механике, которая состоит из 4 тем:

- 1) Кинематика
- 2) Динамика и статика
- 3) Законы сохранения
- 4) Колебания

Тема 1. Кинематика

I.1 Механическое движение.

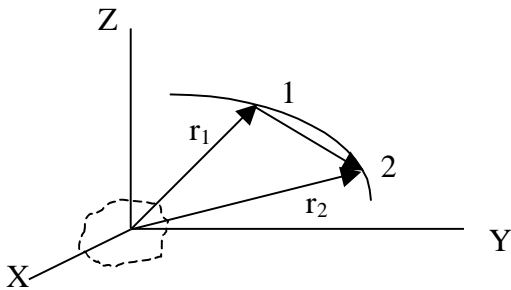
Движением в широком смысле слова называется всякое изменение вообще. Простейшей формой движения является механическое движение, которое заключается в изменении с течением времени положения тел или их частей друг относительно друга. В этой части курса будет изучаться движение двух модельных объектов - материальной точки и абсолютно твердого тела

(АТТ). Это делается для того, чтобы выявить наиболее общие закономерности механического движения.

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел в данной задаче. Примерами такого объекта могут быть Земля при ее движении вокруг Солнца (но не для человека, находящегося на ее поверхности); молекула в разреженном газе.

Абсолютно твердое тело — это тело, деформациями которого (но не размерами) можно пренебречь в условиях данной задачи.

Как ясно из определения механического движения, необходимо определить тело отсчета, то есть то тело, относительно которого изучается движение. Кроме того, должна быть определена система координат, связанная с этим телом, и прибор для измерения времени. Все это вместе называется системой отсчета. Примером такой системы отсчета может быть декартова система координат с началом в некоторой точке и секундомер. Иногда в качестве системы координат выбирают сферическую или цилиндрическую.



Теперь мы можем однозначно определить положение тела в пространстве. Пусть материальная точка находилась в положении 1 и переместилась в положение 2. Линия, соединяющая точки, через которые проходило тело, называется траекторией, а ее длина характеризует пройденный путь. Так как путь — это длина, то она не может быть отрицательной.

По характеру траектории движение можно разделить на два простейших вида, которые мы и будем изучать: прямолинейное и движение по окружности. Из этих движений можно составить любое, даже очень сложное движение. Отрезок *прямой*, проведенный из одной точки траектории в другую, называется перемещением. Перемещение характеризуется не только длиной отрезка l_2 , но и его направлением, поэтому перемещение — это отрезок со стрелкой, то есть **вектор**. Законы сложения таких величин сложнее, чем чисел. Вектора складываются или вычитаются геометрически.

Вспомним основные свойства векторов.

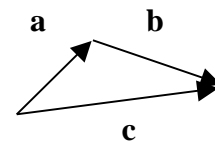
1). Сложение и вычитание векторов (в дальнейшем вектора будут везде в *этом параграфе* выделены жирным шрифтом - вместо стрелочки над буквой).

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ - свойство коммутативности

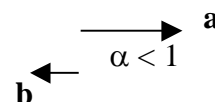
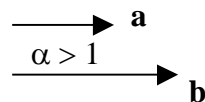
$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ - модуль суммы



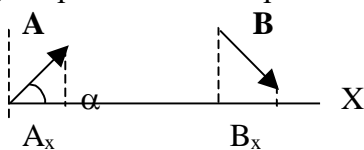
2). Умножение вектора на число

$$\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{b}| = |\alpha \mathbf{a}|$$



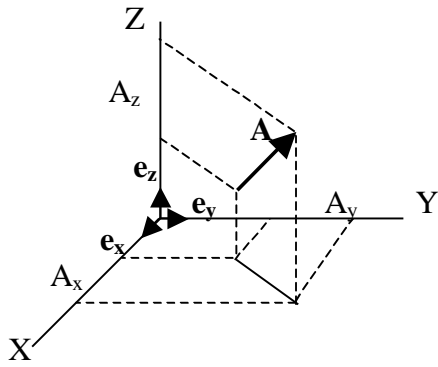
3). Проекция вектора на ось — это



прямой, отсекаемый на оси двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора
 $A_x = |\mathbf{A}| \cos \alpha$

$$c_x = a_x + b_x \text{ если } \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

4). Представление вектора в проекциях на оси.



Вектор полностью определяется заданием трех значений: $\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$

$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - орты (единичные вектора) соответствующей оси:

$$|\mathbf{e}_x| = |\mathbf{e}_y| = |\mathbf{e}_z| = 1$$

5). Скалярное произведение векторов.

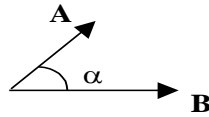
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. В результате получается скаляр.

Выполняются условия:

коммутативности - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

ассоциативности - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$= 0$,



Отметим, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, если $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

то есть вектора взаимно перпендикулярны.

б). Модуль вектора \mathbf{A} .

Для определения модуля вектора через его проекции на оси воспользуемся формулой скалярного произведения для одного вектора

$$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{(A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z)^2} = \sqrt{(A_x^2 \vec{e}_x^2 + A_y^2 \vec{e}_y^2 + A_z^2 \vec{e}_z^2 + A_x A_y \vec{e}_x \vec{e}_y + \dots)}$$

Так как $\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1$, а $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z = 0$, имеем в результате

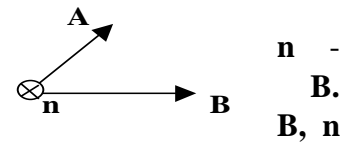
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

7). Векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} — это вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$ или $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и определяемый формулой: $[\mathbf{A}\mathbf{B}] = AB \sin \alpha \mathbf{n}$, где

A и B - модули перемножаемых векторов, α - угол между векторами,

единичный вектор нормали к плоскости в которой лежат векторы \mathbf{A} и \mathbf{B}

Направление \mathbf{n} выбирается так, чтобы последовательность векторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n}$



если смотреть вдоль вектора \mathbf{n} , то поворот по кратчайшему пути

от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке. Отметим, что векторное произведение параллельных векторов равно нулю.

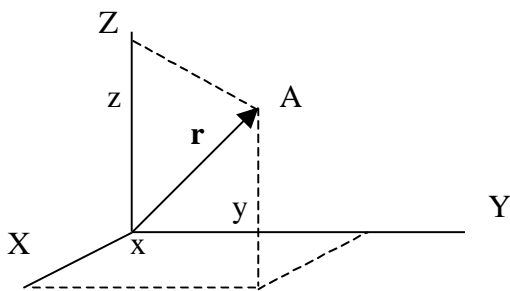
8). Радиус - вектор - вектор, проведенный из начала координат в точку,

в которой находится в данный момент движущееся тело. Его можно выразить в проекциях на оси:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z;$$

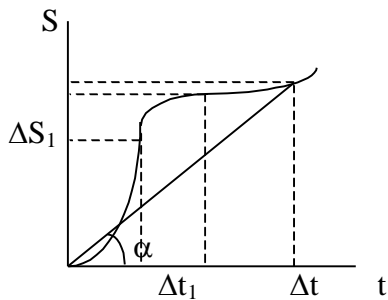
$$(\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}).$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



I.2 Скорость: линейная и угловая скорости.

Кроме координат, перемещения и пути, важной величиной является время движения и связанная с ними скорость. Если тело за любые равные промежутки времени проходит равные пути, то движение называется равномерным; тогда величина $v = S / \Delta t$ будет определять скорость движения в любой момент времени. Если же движение в течении этого времени было неравномерным, то эта величина будет так называемой средней скоростью $\langle v \rangle = S / \Delta t$. Хотя в



каждый момент времени скорость может быть и не равна средней скорости, но средняя скорость характеризует движение за этот промежуток времени в целом. Чтобы перейти к мгновенной скорости, нарисуем график зависимости пройденного пути от времени. Отметим, что $\text{tg} \alpha = S / \Delta t$. Теперь будем уменьшать промежуток времени Δt . Получим $v_1 = \Delta S_1 / \Delta t_1$ - средняя скорость на промежутке времени Δt_1 . Тогда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$ - мгновенная скорость или просто скорость. Это

так называемая путевая скорость, то есть скорость увеличения пути. Эта величина, однако, не

характеризует направления движения. Величина же $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

называется вектором скорости и лишена этого недостатка. Иначе это можно записать $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ - производная от радиуса - вектора по времени. В проекциях на оси координат скорость можно записать так:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k},$$

где

$$v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, v_z = dz/dt.$$

Зная зависимость радиус - вектора $\vec{r}(t)$, можно определить скорость тела в любой момент времени. Но часто встречается и другая задача: известна зависимость $v(t)$ и надо определить пройденный путь. В этом случае поступают

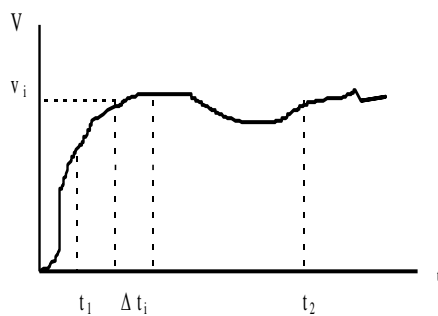
следующим образом. Выбирают такой промежуток времени, чтобы $\Delta t_i \ll 1$ (одной секунды). Тогда движение в этот промежуток времени можно считать равномерным и пройденный путь $\Delta S_i = v_i \Delta t_i$ (на рисунке это площадь заштрихованного прямоугольника).

Весь же путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2 ,

будет равен $S \cong \sum_{i=1}^N \Delta S_i = \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i$. Чем меньше

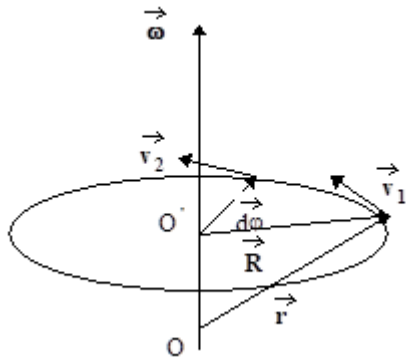
промежуток времени Δt_i , тем точнее мы можем определить пройденный путь. Таким образом, $S =$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ вычисляется как определенный интеграл от модуля скорости. На графике



зависимости скорости от времени пройденный путь численно равен площади под кривой, ограниченной моментами времени t_1 и t_2 .

Теперь дадим определение еще одной величине, описывающей движение материальной точки - угловой скорости. Для этого рассмотрим вращение малого шарика А на веревке вокруг некоторой точки. Линия, перпендикулярная плоскости вращения, проходящая через точку О, называется



осью вращения. За некоторое время dt точка A повернулась на угол $d\varphi$. Тогда можно ввести понятие угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Но это определение не отражает направление вращения шарика. Чтобы все было определено однозначно, вводят так называемый *аксиальный* вектор $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}$. Это вектора перпендикулярные плоскости вращения и связанные с направлением вращения шарика правилом правого винта. Итак, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

Найдем связь между векторами линейной и угловой скорости. Длина дуги, опирающаяся на угол $d\varphi$ равна, с одной стороны $v dt = R d\varphi$, тогда $v = R d\varphi/dt = \omega R$. Направления этих трех векторов связаны правилом правого винта (векторное произведение векторов), тогда $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{OO}' + \vec{R}) = \vec{\omega} \times \vec{OO}' + \vec{\omega} \times \vec{R}$, так как линия OO' параллельна $\vec{\omega}$.

1.3 Ускорение.

Если скорость тела постоянна, то движение называется равномерным. Если же она меняется, то используется для описания изменения скорости другая величина - ускорение. Оно определяется так: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, или $\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)$. Представим \vec{a} проекциях на оси: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$,

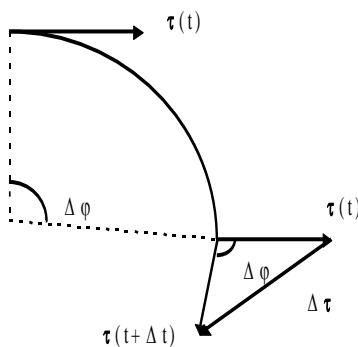
где $a_x = \frac{dv_x}{dx}$; $a_y = \frac{dv_y}{dy}$; $a_z = \frac{dv_z}{dz}$. Для того, чтобы понять, из-за чего возникает ускорение,

представим вектор скорости в виде произведения модуля скорости на единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением скорости тела $\vec{e}_v = \vec{v}/v = \vec{\tau}$ (иначе этот вектор называют тангенциальным): $\vec{v} = v \vec{\tau}$. Тогда ускорение можно записать так

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Рассмотрим, как ведет себя это выражение в двух простых случаях.

1). Прямолинейное движение: при этом направление скорости не меняется и $\vec{\tau} = \text{Const}$ и $\vec{a} = dv/dt \vec{\tau}$.



2). Равномерное движение по окружности: при этом $a = dv/dt = 0$ и $v = \text{Const}$, тогда $\vec{a} = v d\vec{\tau}/dt$.

Вычислим производную от единичного вектора $\vec{\tau}$ и определим ее направление:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \vec{n}^*}{\Delta t} = \omega \vec{n} = \frac{v}{R} \vec{n}.$$

В этих вычислениях использовано подобие треугольников и также то, что $|\vec{\tau}(t)| = |\vec{\tau}(t+\Delta t)| = 1$. Таким образом, в этом случае ускорение направлено перпендикулярно скорости и называется центростремительным: $\vec{a} = v^2/R \vec{n}$.

Получим общее выражение для ускорения, записанное в так называемой естественной системе координат: в проекциях на тангенциальное и нормальное направления по отношению к траектории движения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

При этом $\vec{\tau} \vec{n} = 0$ и $a_\tau = \frac{dv}{dt}$; $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.

1.4 Роль начальных условий

Итак, если известна зависимость $\vec{r}(t)$, то можно однозначно найти зависимость скорости и ускорения от времени. Однако, при решении обратной задачи механики (известна зависимость ускорения от времени и надо найти скорость и радиус-вектор) возникают существенные особенности. Знания $\vec{a}(t)$ недостаточно, необходимо еще знать так называемые начальные условия, а именно: начальное положение тела \vec{r}_0 и начальную скорость \vec{v}_0 .

Убедимся в этом:

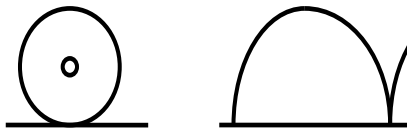
так как $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, то $d\vec{v} = \vec{a} dt$ и $\vec{v} = \int \vec{a} dt + \vec{C}_1$. Возникает эта константа потому, что при обратном дифференцировании она исчезает - $d\vec{C}_1/dt = 0$. И определить ее можно только зная значение скорости в начальный момент времени $\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0$. Далее, зная, что $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, получаем $\vec{r} = \int \vec{v} dt + \vec{C}_2$.

Окончательно $\vec{r}(t) = \iint \vec{a} dt dt' + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$. Это общее решение обратной задачи механики. И опять необходимо знать вектор $\vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_0$, что бы определить частное решение, соответствующее данному случаю. В качестве примера рассмотрим движение тела в поле силы тяжести (об этом понятии чуть позднее) с ускорением \vec{g} : $\vec{a} = \vec{g} = \text{Const}$. Тогда $\vec{v} = \int \vec{g} dt + \vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \vec{g} t$ и $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2/2$.

Тема 2. Динамика и статика.

1.5 Инерциальные системы отсчета, I закон Ньютона.

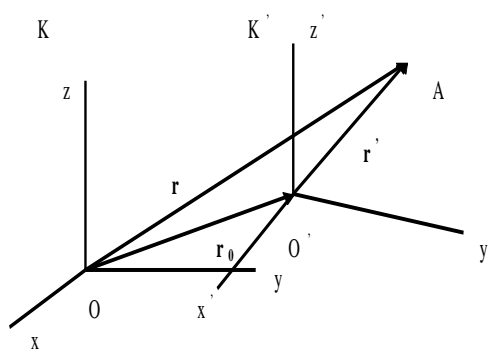
Если рассматривать движение некоторого объекта, например, самолета, в разных системах отсчета (с земли, из салона самолета или из другого самолета), то и выглядеть оно будет по-разному. В качестве наглядного примера изобразим траекторию движения точки на ободу колеса вагона поезда в двух системах отсчета:



СО - вагон поезда СО - наблюдатель на Земле. В результате первая кривая - окружность, а вторая - циклоида.

Таким образом, выбор системы отсчета для каждой конкретной задачи очень важен - он может как облегчить решение, так и усложнить его.

Имея все это ввиду, рассмотрим движение материальной точки А в двух системах отсчета, которые движутся в пространстве друг относительно друга со скоростью \vec{v}_0 , а расстояние между началами координат этих систем \vec{r}_0 . Эти величины могут



зависеть от времени. Из рисунка видно, что $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. Продифференцируем это выражение

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \text{ получим } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'.$$

Продифференцировав еще раз, получим интересное нас соотношение:

$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$. Это выражение показывает, что ускорение некоторого объекта в системе К' может быть вызвано как ускоренным движением объекта в системе К, так и неравномерным движением самой системы К'. По этому признаку возможно разделить

все системы отсчета на две группы: инерциальные и неинерциальные.

Инерциальными называются системы, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Во всех таких системах ускорение данного объекта имеет одно и то же значение ($\vec{a}_0 = 0$).

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета (ИСО) Ньютон сформулировал в виде закона инерции или *первого закона Ньютона*:

Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.

Ясно, что ИСО бесчисленное множество. Системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с ускорением, называются неинерциальными ($\vec{a}_0 \neq 0$).

Чаще всего в качестве исходной системы для определения инерциальности данной выбирается сфера неподвижных звезд. При решении задач в общей физике Землю обычно считают ИСО.

1.6 Принцип относительности Галилея.

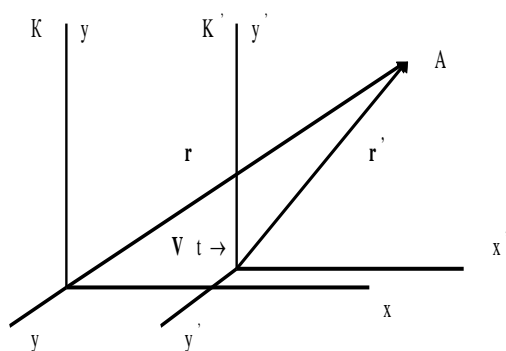
Для ИСО справедлив принцип относительности Галилея:

Все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.

Это значит, что никакими механическими опытами, проводимыми

«внутри» этой системы, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется прямолинейно и равномерно. Во всех ИСО свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики.

Теперь сформулируем математическое выражение принципа относительности Галилея - преобразование Галилея.



преобразование Галилея.

Пусть в некоторой точке пространства находится точка А. Выберем две ИСО - К и К', которые движутся друг относительно друга со скоростью \vec{V} так, что оси y и y' все время параллельны, а направления осей x и x' совпадают. Тогда аналогично формулам параграф 1.5 запишем

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t$ и $t' = t$. Взяв производную, получим закон сложения скоростей в классической механике: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$, и кроме того $\vec{a}' = \vec{a}$. Это и есть преобразования Галилея, которые можно

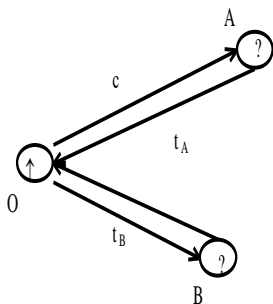
представить в другом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad \text{Наиболее важное в этих уравнениях то, что время существует независимо от}$$

пространства, и во всех ИСО идет одинаково (единица измерения времени - 1 секунда - одинакова во всех СО).

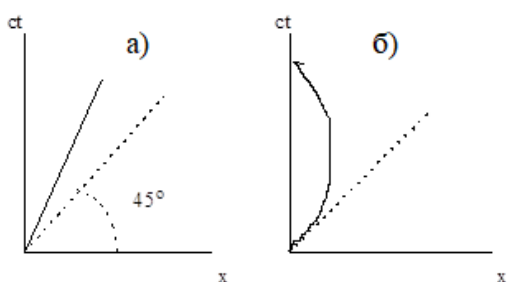
Однако, хотя время идет и одинаково во всех ИСО, но установить часы все равно надо так, чтобы они были синхронизованы. Это значит, что в момент времени, например, $t=0$ все часы должны показывать то же самое. Конечно, можно собрать все часы в одном месте и установить их всех одинаково. Но в реальных условиях это невозможно. Тогда поступают следующим образом: в качестве переносчика информации используют световую волну (или радиоволну). Из некоторой точки, где находятся эталонные часы, посылают сигнал в точку А, который отражается и возвращается в точку О. Время его движения Δt_A делится на два - получается время, за которое сигнал достигнет точки А. Теперь наблюдатель в определенный заранее момент времени t_0 посылает сигнал в точку А и наблюдатель в точке А устанавливает на своих часах время

$t = t_0 + \Delta t_A/2$, где $\Delta t_A = 2\ell_{OA}/c$. Если считать, что скорость распространения сигнала одинакова во всех направлениях, то аналогичные действия можно предпринять для любой точки пространства (на рисунке это точка B) и таким образом установить все часы синхронно.



В дальнейшем мы убедимся, что время идет независимо от пространства не абсолютно, а лишь в рамках классической механики Ньютона. То есть, если $v \ll c$, то принцип относительности Галилея справедлив. Поэтому сейчас введем понятие диаграмм Минковского, которые проще объяснить в классической механике, но имеют важное значение они будут лишь в специальной теории относительности. Итак, есть единое пространство - время (x, y, z, t) - четырехмерное. В этом пространстве движется тело - траекторию его называют *мировой линией*, а каждую ее точку - *мировой точкой*.

Рисовать четырехмерное пространство сложно, поэтому изображают все на примере двумерного: x и ct . Обе оси имеют единицей измерения метр.



Изобразим две мировых линии: равномерно движущуюся вдоль оси x точку (а) и траекторию мяча (б), брошенного под углом к горизонту (по оси x отложена высота подъема тела над Землей). Пунктирная линия на рисунках — это траектория светового луча, движущегося вдоль оси x со скоростью c .

1.7 Масса, импульс, II закон Ньютона.

В параграфе 1.5 был сформулирован I закон Ньютона. Из него следовало, что в ИСО только внешнее воздействие может вызвать ускоренное движение тела. Для описания этого воздействия используют понятие - сила. Поэтому силой называют векторную величину, характеризующую воздействие на данное тело со стороны других тел. Модуль этой величины определяет «степень» этого воздействия, а направление силы совпадает с направлением ускорения, сообщаемого телу данным воздействием.

Опыт показывает, что всякое тело оказывает сопротивление при любых попытках изменить его скорость - как по модулю, так и по направлению. Это свойство, выражающее степень неподатливости тела к изменению его скорости, называют инертностью. У разных тел оно проявляется в разной степени. Мерой инертности служит величина, называемая массой. Введем понятие массы, определив отношение масс двух различных тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными внешними воздействиями (силами):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad \text{Таким образом, необходимо измерить ускорения тел, а потом методом}$$

сравнения с эталоном получить массу любого тела. Тогда $m_1 a_1 = m_2 a_2 = F$.

Сформулируем II закон Ньютона:

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на нее силе, то есть $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$.

Этот закон можно записать и иначе. Введем понятие импульса (старое название - количество движения) $\vec{p} = m \vec{v}$, тогда с учетом $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, получаем

$$m \vec{a} = \frac{m \cdot d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad \text{В этой формулировке } \vec{p} \text{ - импульс материальной точки, а}$$

\vec{F} - сумма всех сил (равнодействующая), действующих на эту точку. Сумма сил определяется так же, как и сумма любых векторов. Теперь перечислим единицы измерения введенных величин в системе СИ:

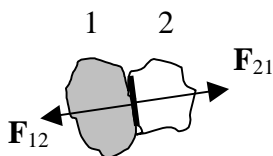
$[m] = \text{кг}$, $[a] = \text{м/с}^2$, $[F] = \text{Н} = \text{кг м/с}^2$.

Очень важно отметить, что оба закона Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета.

1.8 Силы, III закон Ньютона.

Воздействие тел друг на друга всегда носит характер взаимодействия. Если тело 2 действует на тело 1 с силой \vec{F}_{21} , то и тело 1 действует на тело 2 с силой \vec{F}_{12} . Третий закон Ньютона утверждает, что

силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю, противоположны по направлению и приложены каждая к своему телу.



Математическое выражение этого закона выглядит так:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Как и первые два, этот закон тоже справедлив только в ИСО. Кроме того, он нарушается в случаях, когда скорости взаимодействующих тел близки к скорости света.

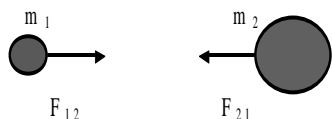
Теперь перейдем к рассмотрению природы сил. Наиболее общей классификацией сил является их разделение на фундаментальные силы, то есть не сводящиеся к другим, более простым силам. За каждую такую силу (за каждое такое взаимодействие) отвечает определенное свойство материи. Таких видов сил четыре:

- 1) Гравитационные силы (связаны с наличием у тел массы)
- 2) Электромагнитные силы (связаны с наличием у тел заряда)
- 3) Ядерные силы - сильные взаимодействия (силы связи протонов в ядре; связаны с наличием у нуклона изотопического спина)
- 4) Ядерные силы - слабые взаимодействия (проявляются в ядерных реакциях; связаны со свойством четность)

Наиболее часто встречающиеся силы в механике относятся к гравитационным (сила тяжести) и электромагнитным (сила упругости, сила трения, сила Кулона). Рассмотрим эти силы.

А) Сила гравитационного притяжения. Для этой силы существует закон всемирного тяготения, установленный для взаимодействия материальных точек или однородных сферических тел:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2};$$
 в этой формуле γ - универсальная



гравитационная постоянная, а m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, которые называются гравитационными в отличие от инертной массы, входящей во второй закон Ньютона.

В) Кулоновская сила, действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 : $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Эта сила может быть, как силой притяжения, так и силой отталкивания (для одноименных зарядов).

Для решения конкретных задач удобно вводить в рассмотрение силы, которые можно получить из фундаментальных, но являющиеся приближенными.

Однородная сила тяжести - $\vec{F} = m\vec{g}$, где m - масса тела, g - ускорение свободного падения.

Упругая сила - сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия: $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Сила трения скольжения, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела: $F = kN$, где k - коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей, N - сила нормального давления (реакция опоры). Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ всегда направлена противоположно возможному движению тела. Кроме того, если тело

находится в покое, то сила трения (в зависимости от обстоятельств) может меняться от нуля до максимального значения, равного $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = k N$.

Сила сопротивления, действующая на тело при его поступательном движении в газе или жидкости (так называемое вязкое трение, в отличие от сухого в предыдущем пункте): $\vec{F} = -\beta \vec{v}$, где k - положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды. Этот коэффициент зависит от скорости. Но при малых скоростях этой зависимостью можно пренебречь.

Тема 3. Законы сохранения в механике

1.9 Закон сохранения импульса.

Отметим сначала важную деталь. Поскольку сила - величина векторная, то II закон Ньютона для материальной точки можно представить в виде:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x; \frac{dp_y}{dt} = F_y; \frac{dp_z}{dt} = F_z$$

Если одна из проекций силы (например, на ось y) $F_y = 0$, то в этом направлении импульс материальной точки изменяться не будет $p_y = \text{const}$. В этом случае говорят, что сохраняется проекция импульса p_y . При этом величина остальных проекций может изменяться произвольным образом (в зависимости от величины проекции силы). Если же $\vec{F} = 0$, то сохраняется вектор импульса $\vec{p} = \text{const}$. Все вышесказанное можно считать законом сохранения импульса одной материальной точки.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц. Они могут взаимодействовать друг с другом силами \vec{F}_{ij} , где i - номер одной из взаимодействующих частиц, а j - номер другой; и с какими-либо внешними объектами с силами \vec{F}_i , i - номер выбранной нами частицы. Введем понятие замкнутой системы. Система называется замкнутой, если на нее не действуют никакие внешние силы или их равнодействующая равна нулю. Теперь запишем уравнения II закона Ньютона для каждой частицы в системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2 \\ \dots \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{NN-1} + \vec{F}_N \end{array} \right.$$

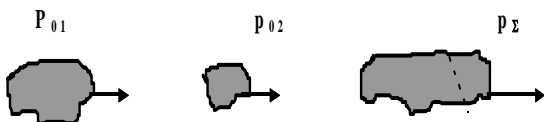
Сложим все эти уравнения вместе. Учтем, что по третьему закону Ньютона

$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \mathbf{0}$. Кроме того, назовем полным импульсом системы сумму импульсов отдельных частиц: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$. Тогда в результате получим

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}}$. Это математическое выражение закона изменения импульса системы:

импульс системы частиц могут изменить только внешние силы. Закон сохранения импульса сформулируем так:

В замкнутой системе полный импульс всех частиц остается неизменным.

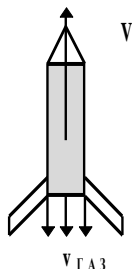


В качестве примера рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. Под этим подразумевается, что в результате удара изменилось внутреннее состояние обоих тел (модель АТТ для этого случая не подходит) так, что они объединились в одно

целое. Первое тело до удара имело импульс \vec{p}_{01} , а второе - \vec{p}_{02} . После удара импульс

объединенного тела равен \vec{p}_Σ . Удар считается мгновенным, а система из двух тел - замкнутой. Поэтому конечный импульс системы равен начальному импульсу, то есть $\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_\Sigma$

I.10 Реактивное движение



Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере ракеты. Топливо, в основном определяющее массу ракеты, сгорает и получившийся газ имеет большую скорость, унося, таким образом, часть импульса. Если нет внешних сил, то система

«ракета + газ» замкнута и импульс ее должен сохраняться. Если же внешняя сила есть, то импульс будет изменяться так: $d\vec{p} = \vec{F} dt$.

Выразим изменение импульса за время dt через массы и скорости. Пусть $m(t)$ - масса, а $\vec{v}(t)$ - скорость ракеты в момент времени t , тогда ее импульс $\vec{p} = m \vec{v}$. Через промежуток времени масса ракеты уменьшится на dm ($dm < 0$), скорость же увеличится на $d\vec{v}$. Тогда

новый импульс ракеты будет равен $\vec{p}(t+dt) = (m + dm) (\vec{v} + d\vec{v})$. Чтобы получить новый импульс системы, нужно к импульсу ракеты добавить импульс газов, унесенный ими за время dt : $dm_{\text{ГАЗ}} \vec{v}_{\text{ГАЗ}}$. Тогда

$$d\vec{p} = (m + dm) (\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\text{ГАЗ}} \vec{v}_{\text{ГАЗ}} - m \vec{v} = \vec{F} dt.$$

Так как масса системы в целом не меняется, то $dm + dm_{\text{ГАЗ}} = 0$ и раскрыв скобки, получаем $m d\vec{v} + dm (\vec{v} - \vec{v}_{\text{ГАЗ}}) = \vec{F} dt$ или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} (\vec{v}_{\text{ГАЗ}} - \vec{v}).$$

Обозначим $\mu = \frac{dm}{dt}$ - расход топлива, а

$\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{ГАЗ}} - \vec{v}$ - скорость истечения газов относительно ракеты. Тогда можно записать уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \mu \vec{u}_{\text{отн}}$$

Величина $\mu \vec{u}_{\text{отн}}$ называется реактивной силой.

Используем это уравнение для получения формулы Циолковского. Она соответствует движению свободной ракеты, то есть случаю, когда $\vec{F} = 0$. Тогда проектируя уравнение Мещерского на направление движения ракеты, имеем

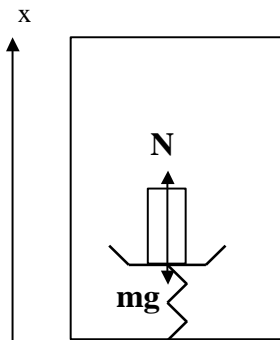
$$m \frac{dv}{dt} = -\mu u_{\text{отн}}; \frac{1}{u_{\text{отн}}} dv = -\frac{dm}{m}; \ln m = -\frac{v}{u_{\text{отн}}} + C.$$

Используем начальные условия для нахождения C : при $t=0$ $m=m_0$ и $v=v_0$.

$$\text{Получаем } \ln m - \ln m_0 = -\frac{v - v_0}{u_{\text{отн}}}; m = m_0 e^{-\frac{v - v_0}{u_{\text{отн}}}}; v = v_0 + u_{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m}$$

I.11 Сила тяжести и вес тел

Вблизи поверхности Земли на тело действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$. Она в основном определяется силой гравитации. Как определить вес тел? Необходимо привести тело в положение равновесия относительно подвеса или опоры и измерить силу, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. Таким образом, вес тел — это сила, с которой тело действует на подвес или опору. Можно вывести общую формулу для веса тела. Для этого рассмотрим весы, на которых находится некоторое тело, вес которого надо определить. Поместим их в лифт, способный двигаться в любых направлениях с ускорением. Если лифт неподвижен, то по II закону Ньютона $0 = \vec{N} + m\vec{g}$, а по III закону Ньютона $\vec{P} + \vec{N} = 0$, где \vec{N} - реакция опоры, а \vec{P} - вес тела. В этом случае $\vec{P} = m\vec{g}$, то есть вес и сила тяжести численно равны.



Если же лифт движется в какую-либо сторону с ускорением \vec{a} , то II закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}; \quad \vec{P} + \vec{N} = 0 \text{ и } \vec{P}_0 = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Это и есть общая формула для веса тел. Рассмотрим три случая:

1) если ускорение лифта направлено вверх, то вес тела будет больше силы тяжести $P_{\uparrow} = m(g + a)$ - перегрузка.

2) если ускорение лифта направлено вниз, то вес тела меньше силы тяжести - $P_{\downarrow} = m(g - a)$. В случае, когда $g = a$, наблюдается

невесомость.

3) если же лифт движется вправо с ускорением a , то II закон Ньютона записывается в проекциях на оси x и y так:

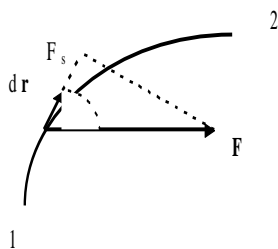
$$OX: 0 = P_x - mg$$

$$OY: ma = P_y$$

Тогда $P_x = mg$ и $P_y = ma$; $P_{\rightarrow} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$. Таким образом, вес тел может быть как больше, так и меньше силы тяжести.

I.12 Работа силы. Мощность.

Пусть частица под действием силы \vec{F} совершает перемещение по некоторой траектории 1 - 2. В общем случае сила \vec{F} в процессе движения частицы может меняться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу \vec{F} можно считать постоянной.

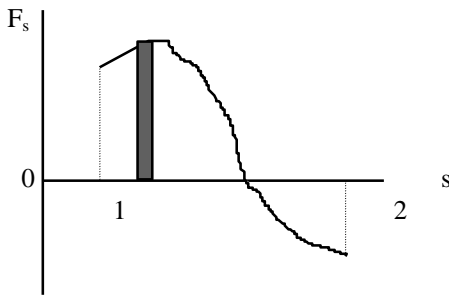


Действие силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$ характеризуют величиной, равной скалярному произведению $\vec{F} d\vec{r}$, которую называют элементарной работой силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$. Ее можно представить и в другом виде $\vec{F} d\vec{r} = F \cos\alpha ds = F_s ds$, где α - угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$, $ds = |d\vec{r}|$ - элементарный путь, F_s - проекция вектора силы на вектор

перемещения (указан на рисунке). Итак, $dA = F_s ds$. Если угол α острый, то работа совершается положительная, если угол α тупой, то отрицательная. Если же угол α равен $\pi/2$, то работа силы равна нулю. Суммируя (интегрируя) выражение для dA по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы \vec{F} на данном пути:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Этой формуле можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график F_s как функцию положения частицы на траектории. Пусть, например, этот график имеет вид, показанный на рисунке. Из рисунка видно, что элементарная работа dA численно равна площади заштрихованной полоски, а работа A на пути от точки 1 до точки 2 - площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью s . При этом площадь фигуры над осью s берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью s - со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).



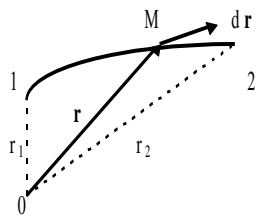
Рассмотрим несколько примеров на вычисление работы.

А) Работа упругой силы $\vec{F} = -k \vec{r}$, где \vec{r} - радиус - вектор частицы M относительно точки O . Переместим частицу M , на которую действует эта сила, по произвольному пути из точки 1 в точку 2. Найдем сначала элементарную работу силы \vec{F} на элементарном перемещении $d\vec{r}$: $dA = \vec{F} d\vec{r} = -k \vec{r} d\vec{r}$. Скалярное произведение $\vec{r} d\vec{r} = r (d\vec{r})_r = r dr$, поэтому $dA = -k r dr = -d(kr^2/2)$. Теперь вычислим работу данной силы на всем пути, то есть проинтегрируем последнее выражение от точки 1 до точки 2:

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$$

Б) Работа гравитационной (или кулоновской) силы.

Пусть в точке O находится неподвижный силовой центр - материальная точка,



действующая на частицу M с силой \vec{F} , которая как для гравитационного, так и для кулоновского взаимодействий может быть представлена в виде $\vec{F} = (\alpha/r^2) \vec{e}_r$, где α - соответствующая постоянная ($-\gamma m_1 m_2$ для гравитационной или $kq_1 q_2$ для кулоновской сил), r - расстояние от точки O до частицы M , \vec{e}_r - единичный вектор в направлении радиус -

вектора (рисунок полностью эквивалентен предыдущему). Элементарная работа этой силы на перемещении $d\vec{r}$ равна $dA = \vec{F} d\vec{r} = (\alpha/r^2) \vec{e}_r d\vec{r} = \alpha dr/r^2 = -d(\alpha/r)$. Работа же этой силы на всем пути от точки 1 до точки 2

$$A_{\text{кул}} = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{kq_1 q_2}{r_1 r_2} (r_2 - r_1); A_{\text{грав}} = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_1 r_2} (r_2 - r_1)$$

В) Работа однородной силы тяжести $\vec{F} = m \vec{g}$.

Запишем эту силу в виде $\vec{F} = -m g \vec{e}_z$, где \vec{e}_z - орт вертикальной оси, положительное направление которой выбрано вверх. Элементарная работа силы тяжести на перемещении $d\vec{r}$ $dA = \vec{F} d\vec{r} = -mg \vec{e}_z d\vec{r} = -mg dz = -d(mgz)$.

Работа же данной силы на всем пути от точки 1 до точки 2

$$A = -\int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2)$$

Если же на частицу в процессе движения действуют несколько сил, результирующая которых $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$, то нетрудно показать, что работа результирующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности на том же перемещении. Действительно, $A = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots = A_1 + A_2 + \dots$

Единицей работы в системе СИ является Джоуль: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}$

Мощность — это работа, совершаемая в единицу времени, поэтому

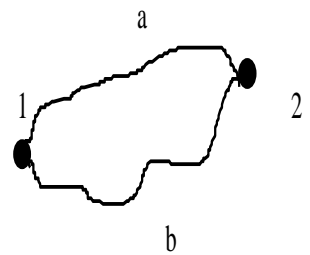
$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}; A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$$

В системе СИ мощность измеряется в Ваттах: 1 Вт = 1 Дж * 1 с⁻¹.

I.13 Консервативные силы.

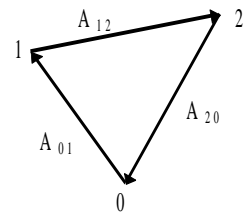
Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что частица находится в поле сил. Так, например, частица может находиться в поле сил тяжести, в поле упругих сил, в поле сил сопротивления (в потоке газа). Поле, остающееся постоянным во времени, называют стационарным. В стационарном силовом поле сила, действующая на частицу, зависит только от ее положения. Работа, которую совершают силы поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 2, зависит, вообще говоря, от пути между этими двумя точками. Вместе с тем имеются стационарные силовые поля, в которых работа, совершаемая над частицей силами поля, не зависит от пути между точками 1 и 2. Силы, обладающие таким свойством, называют консервативными.

Это свойство консервативных сил можно сформулировать и иначе: *силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю*. Чтобы в этом убедиться, разобьем произвольный замкнутый контур на две части: 1a2 и 2b1 (изображено на рисунке). Тогда работа A на замкнутом пути $A = A_{1a2} + A_{2b1}$. Нетрудно заметить, что работа сил поля при перемещении частицы по одному и тому же пути туда и обратно отличаются только знаком, так как $(d\vec{r})_{1a} = -(d\vec{r})_{a1}$, следовательно, $A_{2b1} = -A_{1b2}$, поэтому $A = A_{1a2} - A_{1b2}$. По определению консервативных сил, работа их не зависит от формы пути и $A_{1a2} = A_{1b2}$. Значит $A = 0$. Тем самым доказана эквивалентность двух этих формулировок.



I.14 Потенциальная энергия частицы. Связь силы и потенциальной энергии.

Сопоставим каждой точке поля консервативных сил значение некоторой функции $E_p(\mathbf{r})$, которую определим следующим образом. Произвольно выбранной точке O припишем значение функции E_{p0} , взятое тоже произвольно. Значение функции в любой другой точке 1 положим равным сумме E_{p0} и работы A_{10} , совершаемой силами поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 0 $E_{p1} = E_{p0} + A_{10}$. Для точки 2 $E_{p2} = E_{p0} + A_{20}$. Тогда разность $E_{p1} - E_{p2} = A_{10} - A_{20}$. Так как для консервативных сил работа по замкнутому пути равна нулю, то $A_{01} + A_{12} + A_{20} = 0$ и $E_{p1} - E_{p2} = A_{12}$ ($\Delta E_p = -A_{12}$). Таким образом, разность потенциальных энергий двух точек поля равна работе по



перемещению частицы между этими точками: $E_{p2} - E_{p1} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Теперь получим связь силы поля \vec{F} и потенциальной энергией его $E_p(\vec{r})$.

Если известна зависимость $E_p(x, y, z)$, то можно найти $\vec{F}(\vec{r})$. Пусть частица перемещается вдоль оси x, тогда работа по ее переносу $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x ds_x$, при этом $ds_y = ds_z = 0$. Тогда $dA = F_x dx$. Вместе с тем $dE_p = -dA$ и $F_x dx = -dE_p$. Выражая отсюда проекцию силы, получаем $F_x = -dE_p/dx$ при условии $ds_y = ds_z = 0$. Этот результат математики записывают в виде *частной производной*:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

Использование буквы ∂ вместо d в частной производной позволяет отметить тот факт, что производная берется по одной переменной, а остальные переменные при этом считаются неизменными. Аналогично можно записать и проекции силы на остальные оси координат z и y. Тогда вектор силы запишется в виде

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Данное выражение представляет собой произведение дифференциального вектора, который носит название *градиент* и потенциальной энергии

$\vec{F} = - \text{grad } E_p$. Выпишем отдельно математическую формулу для градиента

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Направление вектора $\text{grad} E_p$ совпадает с направлением оси ℓ , вдоль которой функция E_p возрастает с наибольшей скоростью, а модуль равен $dE_p/d\ell$, то есть скорости возрастания функции вдоль этой оси. Наиболее распространенное обозначение такого дифференциального вектора - оператор набла $\text{grad} \equiv \nabla$, тогда $\vec{F} = - \text{grad} E_p = - \nabla E_p$.

I.15 Кинетическая энергия частицы.

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы \vec{F} (в общем случае сила \vec{F} может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила \vec{F} при перемещении частицы на $d\vec{r}$. С учетом закона сохранения импульса

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ и } d\vec{r} = \vec{v} dt, \text{ получаем}$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Скалярное произведение $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v (d\vec{v})_v$, где $(d\vec{v})_v$ - проекция вектора $d\vec{v}$ на направление вектора \vec{v} . Эта проекция равна dv - приращение модуля вектора скорости. Поэтому $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v dv$ и элементарная работа

$$dA = m v dv = d \left(\frac{mv^2}{2} \right). \text{ Отсюда видно, что работа результирующей силы } \mathbf{F} \text{ идет на приращение}$$

некоторой величины, которую называют кинетической энергией: $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Таким образом,

приращение кинетической энергии частицы при ее элементарном перемещении равно $dE_k = dA$, а при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$$

Работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.

Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы частиц. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергии частиц, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем предыдущее уравнение для каждой частицы системы, а затем сложим все эти уравнения. В результате снова получится та же формула, но уже не для одной частицы, а для системы частиц (материальных точек). При этом под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на частицы. Следовательно, **приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.**

I.16 Закон сохранения энергии в механике.

Вывод закона сохранения энергии в механике разделим на два этапа. Сначала получим его для одной частицы (материальной точки), а затем и для системы взаимодействующих частиц. Из определения кинетической энергии следует, что приращение кинетической энергии частицы равно элементарной работе результирующей \vec{F} всех сил, действующих на частицу. Что это за сила? Если частица находится в интересующем нас стационарном поле консервативных сил, то на нее действует консервативная сила $\vec{F}_{\text{конс}}$ со стороны этого поля. Кроме того, на частицу могут действовать и другие силы, имеющие иное происхождение. Назовем их сторонними силами \vec{F}

стор. И те, и другие силы будут по отношению к частице являться внешними. Таким образом, результирующая \vec{F} всех сил, действующих на частицу, может быть представлена в виде $\vec{F} = \vec{F}_{\text{конс}} + \vec{F}_{\text{стор}}$. Работа всех этих сил идет на приращение кинетической энергии частицы:

$\Delta E_k = A_{\text{конс}} + A_{\text{стор}}$. По определению потенциальной энергии, работа сил этого поля равна убыли потенциальной энергии частицы в этом поле: $A_{\text{конс}} = -\Delta E_p$. Подставив это выражение в предыдущее и перенеся величину ΔE_p влево, получим $\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(E_k + E_p) = A_{\text{стор}}$. Отсюда видно, что работа сторонних сил идет на приращение величины $E_k + E_p$. Эту величину - сумму кинетической и потенциальной энергий - называют полной механической энергией частицы в поле и обозначают $E = E_k + E_p$. Итак, $E_2 - E_1 = A_{\text{стор}}$. Это закон изменения энергии для одной частицы: полная механическая энергия частицы может измениться под действием только сторонних сил. Обычно в качестве сторонних сил выступают диссипативные силы, такие как силы трения, сопротивления среды, то есть силы, которые переводят механическую энергию в тепловую. Однако, сторонними можно считать любые силы, которые по тем или иным причинам не целесообразно учитывать посредством потенциальной энергии.

Сформулируем закон сохранения механической энергии для одной частицы:

если сторонние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течении интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается постоянной за это время $E = E_k + E_p = \text{Const}$.

Теперь переходим к выводу закона сохранения механической энергии для системы, состоящей из N частиц. Ранее была получена формула для кинетической энергии системы частиц. Показано, что приращение кинетической энергии системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2 равно работе, которую совершают все силы, действующие на все частицы системы. Разделим эти силы на внутренние и внешние, а внутренние, в свою очередь - на консервативные и диссипативные. Работу внутренних консервативных сил можно выразить через разность двух величин, называемых собственной потенциальной энергией системы $A_{\text{внутр}}^{\text{конс}} = -\Delta E_p^{\text{соб}}$. Если интересующая нас система частиц находится во внешнем стационарном поле консервативных сил, то удобно все внешние силы, действующие на частицы системы, разделить на силы со стороны внешнего поля (внешние силы поля) и сторонние внешние силы, не относящиеся к данному внешнему полю (внешние сторонние силы). Соответственно работа $A_{\text{внеш}}$ внешних сил может быть представлена как алгебраическая сумма работ внешних сил поля и сторонних внешних сил: $A_{\text{внеш}} = A_{\text{внеш}}^{\text{конс}} + A_{\text{внеш}}^{\text{стор}}$. Работа внешних сил поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы во внешнем поле $A_{\text{внеш}}^{\text{конс}} = -\Delta E_p^{\text{внеш}}$, тогда $A_{\text{внеш}} = -\Delta E_p^{\text{внеш}} + A_{\text{внеш}}^{\text{стор}}$. Следовательно, изменение кинетической энергии системы частиц при переходе из состояния 1 в состояние 2 будет равно $\Delta E_k = -\Delta E_p^{\text{соб}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}} - \Delta E_p^{\text{внеш}} + A_{\text{внеш}}^{\text{стор}}$. Окончательно, $\Delta(E_k + E_p^{\text{соб}} + E_p^{\text{внеш}}) = A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}} + A_{\text{внеш}}^{\text{стор}}$. Это и есть закон изменения механической энергии системы частиц, находящейся во внешнем поле. Величина $E = E_k + E_p^{\text{соб}}$ называется полной механической энергией системы, а величина $E' = E_k + E_p^{\text{соб}} + E_p^{\text{внеш}}$ называется полной механической энергией системы во внешнем стационарном поле консервативных сил. С учетом всего вышесказанного математическое выражение для закона изменения механической энергии системы можно записать так:

$$E'_2 - E'_1 = A_{\text{внеш}}^{\text{стор}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}}$$

Внешние сторонние силы могут как увеличивать механическую энергию системы, так и уменьшать ее; диссипативные же силы могут лишь ее уменьшать (переводить в другие виды энергии). Поэтому, можно сформулировать закон сохранения энергии в механике так:

в замкнутой системе, внутри которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия системы не изменяется с течением времени.

Под замкнутой системой подразумевается то же, что и при выводе закона сохранения импульса. Более глубокое осмысление процесса перехода энергии из одного вида в другой позволило сделать вывод о существовании в природе универсального закона сохранения энергии:

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

Этот закон является обобщением большого количества экспериментальных фактов.

I.17 Центральный абсолютно упругий удар шаров.

В качестве примера использования закона сохранения энергии рассмотрим центральный абсолютно упругий удар. Центральным называется такой удар двух шаров, при котором они и до, и после столкновения движутся вдоль одной прямой, не вращаясь. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором полная механическая энергия сталкивающихся тел сохраняется. В процессе удара сначала кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую и тела разлетаются со скоростями, определяемыми двумя условиями - законами сохранения импульса и энергии. Это возможно, так как за время соударения сторонние силы не успевают совершить сколько-ни будь заметной работы. Массы шаров равны m_1 и m_2 , скорости шаров до и после столкновения равны соответственно \vec{v}_1, \vec{v}_2 и \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

Закон сохранения импульса $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

Закон сохранения энергии $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$

Используя две математические формулы $\vec{A}^2 - \vec{B}^2 = (\vec{A} - \vec{B})(\vec{A} + \vec{B})$ и, если

$\vec{A} \vec{B} = \vec{C} \vec{D}$ и $\vec{A} = \vec{C}$, то и $\vec{B} = \vec{D}$, получаем

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{u}_2)$$

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) (\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2) (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

$$\text{и } \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2.$$

Умножая последнее равенство на m_2 и решая его совместно с первым, получаем ответ

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2}; \vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Рассмотрим два простых случая:

1) Массы шаров одинаковы, тогда шары просто обмениваются скоростями, то есть $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$; $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$.

2) Тяжелый шар массы m_2 покоится, а на него налетает легкий шар массы m_1 . Тогда при условии $m_1 \ll m_2$ скорости шаров оказываются $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$; $\vec{u}_2 = 0$.

I.18 Теорема о движении центра масс. Теорема Кенига.

Пусть система состоит из N материальных точек, положение которых в пространстве и массы определяются величинами \vec{r}_1, m_1 ; \vec{r}_2, m_2 ; ... Центром масс (или центром инерции) системы называется такая воображаемая точка, радиус-вектор которой \vec{r}_c выражается через радиус-векторы точек системы следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Продифференцируем это выражение по времени и получим скорость, с которой движется центр масс системы материальных точек:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Возьмем еще одну производную по времени и получим ускорение центра масс:

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Теперь можно сформулировать теорему о движении центра масс:

Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила - геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Пример: по параболической траектории летит снаряд и разрывается в некоторой точке пространства. Все осколки летят в разные стороны, но центр масс снаряда продолжает двигаться по параболе.

Теперь перейдем к кинетической энергии. Ясно, что она зависит от системы отсчета, в которой измеряется. Необходимо найти закон, по которому преобразуется кинетическая энергия системы материальных точек при переходе от одной ИСО к другой. Сначала разберем случай одной частицы массы m_i и скорости \vec{v}_i и две системы отсчета K и K' , относительная скорость которых \vec{V} . Тогда по закону сложения скоростей Галилея $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}$ и кинетическую энергию частицы в K системе можно выразить так:

$$E_{ki} = \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{m_i (\vec{v}_i' + \vec{V})^2}{2} = \frac{m_i v_i'^2}{2} + m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{V} + \frac{m_i \vec{V}^2}{2}$$

или $E_{ki} = E_{ki}' + 0.5 m_i \vec{V}^2 + (\vec{p}_i' \cdot \vec{V})$ (*), где \vec{p}_i' - импульс материальной точки в системе K' .

Теперь рассмотрим систему из N материальных точек. Для каждой точки напомним по уравнению (*), а затем их все сложим. Обозначая суммарный импульс частиц в системе K' через $\vec{P}' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + \dots = M \vec{v}_c'$, получаем

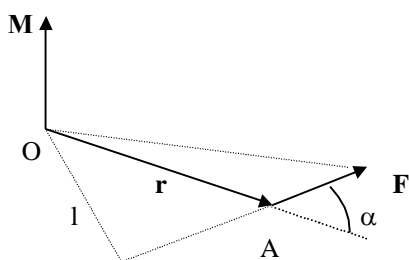
$$E_k = E_k' + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \vec{P}' \cdot \vec{V} = E_k' + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + M \vec{v}_c' \cdot \vec{V}$$

Если в качестве системы K' выбрать систему центра инерции (движется со скоростью \vec{v}_c), то скорость $\vec{v}_c' = 0$ и $E_k = E_k' + 0.5 M \vec{V}^2$ ($\vec{V} = \vec{v}_c$).

Теорема Кенига: Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.

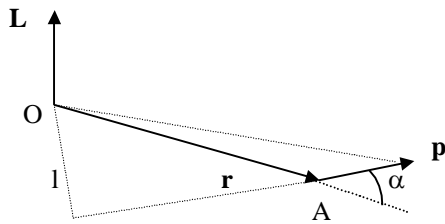
I.19 Момент силы, момент импульса.

Ясно, что закручивать гайку ключом с длинной ручкой легче, чем с короткой. Из этого следует, что кроме модуля силы и ее направления, есть и другая величина - точка приложения силы, характеризующая движение (в данном случае это вращательное движение). Для обозначения этой величины используется момент силы. Момент силы относительно точки O - это вектор \vec{M} ,



модуль которого равен $M = F l = F r \sin \alpha$, а направление его перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \vec{r} и \vec{F} . Получается, что момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора (проведенного в точку приложения силы из точки O , выбранной в данном случае за начало координат) и силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$. Зная свойства векторного произведения, можно заметить, что направление момента силы связано с направлениями векторов \vec{r} и \vec{F} правилом правого винта. Приложен момент

силы к точке O (изображено на рисунке).



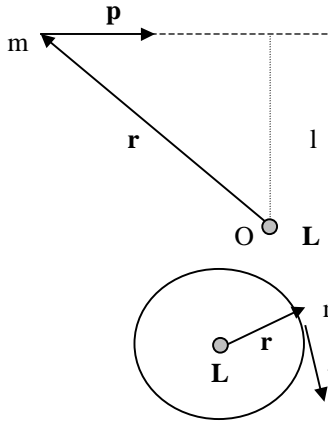
По тем же правилам можно ввести и другую физическую величину, которую называют моментом импульса. Она обозначается буквой \vec{L} и равна

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m [\vec{r}, \vec{v}].$$

Его модуль равен $L = m v r \sin\alpha$, а направление определяется так же, как и момента силы. Приложен момент импульса так же к точке O. Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим в качестве примера расчета момента импульса два частных случая:

частных случая:

1). Частица движется равномерно по прямолинейной траектории. Независимо от того, где находится частица модуль и направление момента импульса \vec{L} останется неизменным. Модуль момента импульса в этом случае равен $L = m v r \sin\alpha = m v l$. Величина l называется плечом импульса.



2). Частица движется по окружности радиуса r . Модуль момента импульса относительно центра окружности $L = mvr$. Направление вектора \vec{L} при движении частицы остается неизменным - перпендикулярно плоскости рисунка от нас.

I.20 Закон сохранения момента импульса.

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора \vec{L} в данной системе отсчета. Для этого

продифференцируем выражение для момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

Так как точка O неподвижна (материальная точка движется так, как изображено на рисунке параграфа 1.19), то вектор $d\vec{r}/dt$ равен скорости \vec{v} частицы, то есть совпадает по направлению с вектором, поэтому первая скобка в формуле для изменения вектора момента импульса равна нулю. Далее, согласно второму закону Ньютона, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, где \vec{F} - равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Следовательно, уравнение приобретает вид $d\vec{L}/dt = [\vec{r}, \vec{F}]$. Величина, стоящая в правой части уравнения, — это момент сил, определенный относительно точки O. Итак, производная по времени от момента импульса \vec{L} частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту \vec{M} равнодействующей силы \vec{F} относительно той же точки

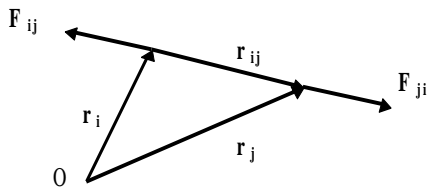
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это закон изменения момента импульса одной частицы. Этот закон представляет собой три независимых уравнения для каждой из проекций момента импульса. Если какая-нибудь из проекций момента силы равна нулю, то говорят, что соответствующая проекция момента импульса сохраняется.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц, которые взаимодействуют между собой и с окружающей средой. Назовем моментом импульса системы частиц сумму моментов импульса отдельных частиц. Вычислим производную по времени от момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \vec{M}_{ij}^{\text{ВНУТР}} + \vec{M}_i^{\text{ВНЕШН}} \right)$$

Так как все взаимодействия внутри системы подчиняются III закону Ньютона, то $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и $\vec{M}_{ij}^* = \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = -[\vec{r}_j - \vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] = 0$, так как эти вектора направлены по одной прямой. Тогда уравнение для изменения момента импульса приобретает вид:



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{ВНЕШН}} = \vec{M}^{\text{ВНЕШН}}$$

Таким образом, момент импульса системы взаимодействующих частиц может изменяться только под действием моментов внешних сил — это утверждение составляет закон изменения момента импульса системы. Если же на систему моменты внешних сил не действуют (система замкнута с точки зрения момента импульса), то момент импульса такой системы сохраняется с течением времени. Это утверждение составляет закон сохранения момента импульса системы частиц.

Демонстрации закона сохранения момента импульса можно посмотреть здесь: <https://youtu.be/zjY9PqvuluM> и веселая <https://youtu.be/ywFcukXHjPE>. Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы и играет определяющую роль при рассмотрении любых природных явлений.

1.21 Основное уравнение динамики вращательного движения.

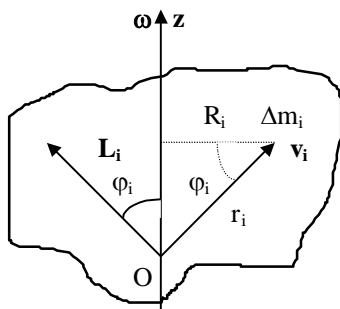
Переходим к изучению движения АТТ - пять следующих параграфов будет посвящено именно этому. В отличие от материальной точки, АТТ имеет размеры и может двигаться не только *поступательно*, но и *вращаться* относительно некоторой оси. Определим понятия поступательного и вращательного движения.

Поступательное движение — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. При этом все точки тела движутся с одинаковыми линейными скоростями и ускорениями, а их траектории имеют одинаковый вид. Для поступательного движения справедлив II закон Ньютона для материальной точки, в качестве которой удобно выбрать центр масс. Таким образом, теорема о движении центра масс полностью описывает поступательное движение абсолютно твердого тела.

Вращательное движение — это движение, при котором хотя бы одна точка тела остается неподвижной. Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, то все точки тела имеют одинаковые угловые скорости и угловые ускорения, а их траекториями являются различные окружности. В этом смысле вращательное движение удобно описывать угловыми переменными: φ, ω, β .

Таким образом, движение АТТ всегда можно разделить на поступательное движение центра масс и вращение относительно него и изучать их отдельно. Поэтому нашей задачей теперь является получение уравнения для вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси.

Мысленно разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, на элементарные массы Δm_i . На рисунке изображено положение тела относительно оси вращения.



Ось вращения и элементарная масса лежат в плоскости чертежа. Скорость \vec{v}_i направлена за чертеж. Момент импульса массы Δm_i \vec{L}_i перпендикулярен к векторам \vec{v}_i и \vec{r}_i . Расстояние массы Δm_i от оси вращения равно $R_i = r_i \cos \varphi_i$. По определению момента импульса МТ $\vec{L}_i = \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$. Здесь \vec{r}_i - радиус - вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки О, \vec{v}_i - скорость i -той элементарной массы. Момент импульса тела \vec{L} равен сумме моментов импульса элементарных масс: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$. Из рисунка следует, что в случае

несимметричного тела векторы $\vec{\omega}$ и \vec{L} неколлинеарные. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус вокруг оси вращения. Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедлив закон изменения момента импульса. Запишем его в проекции на ось вращения, которую обозначим за ось z : $\frac{dL_z}{dt} = M_z$. Найдем момент импульса АТТ

относительно оси вращения z , то есть проекцию вектора \vec{L} на ось z . Из рисунка можно сделать вывод, что $L_{zi} = L_i \cos\varphi_i$. Поскольку угол между векторами \vec{r}_i и \vec{v}_i прямой, $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Следовательно, $L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \cos\varphi_i = \Delta m_i R_i v_i$, где R_i - расстояние массы Δm_i от оси вращения. Зная, что $v_i = \omega R_i$, получим $L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i$. Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi} : $L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i$. Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки O , относительно которой определяется момент импульса \vec{L} . Величина же $I_z = \sum R_i^2 \Delta m_i$, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси. Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится. Теперь проекцию на ось z момента импульса АТТ можно представить в виде $L_z = I_z \omega$. Принимая во внимание то, что для АТТ момент инерции относительно оси есть величина неизменная, получаем основное уравнение вращательного движения АТТ:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \text{ или } I_z \beta_z = M_z.$$

Это уравнение заменяет второй закон Ньютона в случае вращательного движения. Роль массы в нем играет момент инерции, а роль силы - момент силы.

1.22 Тензор инерции.

Итак, мы получили новую величину - момент инерции относительно оси. Но если движение происходит относительно нескольких осей, то одного осевого момента инерции для описания недостаточно. Необходимо получить общие уравнения, связывающие момент импульса АТТ и угловую скорость. Для упрощения расчетов воспользуемся представлением о теле как о совокупности материальных точек массы Δm_i . Рассматривая то же движение, что и в предыдущем параграфе, запишем общее выражение для вектора момента импульса $\vec{L} = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$. Так как $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, то $\vec{L} = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \sum \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega} - \sum \Delta m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)$. При получении этого результата использовалась знаменитая формула «бац минус цаб» $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$. Тогда $\vec{L} = \vec{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 - \sum \Delta m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)$. Уже в этой формуле заложена зависимость между \vec{L} и $\vec{\omega}$ сложнее, чем $\vec{L} = I \vec{\omega}$. Теперь учтем, что $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$ и $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Тогда проекция момента импульса на ось (например, x) будет выглядеть так: $L_x = \omega_x \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2) - \sum \Delta m_i x_i y_i \omega_y - \sum \Delta m_i x_i z_i \omega_z$. В общем случае это можно записать так:

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \text{ где } I_{xx} = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \quad I_{xy} = - \sum \Delta m_i x_i y_i$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \quad \text{и так далее.}$$

Из этих формул ясно, что $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, поэтому из девяти величин $I_{xx}, I_{xy} \dots$ различны лишь шесть. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются осевыми моментами инерции, а $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$ называются центробежными моментами инерции. Совокупность величин, изображенных ниже, называется **тензором инерции**. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются диагональными элементами тензора, а остальные - недиагональными. В данном случае величины, расположенные симметрично относительно диагонали, равны. Такой тензор называется симметричным. Приведенный тензор осуществляет связь между двумя векторами — это тензор второго ранга. Скаляр в этом ряду является тензором нулевого ранга, а вектор - тензором первого ранга. Значения компонент любого тензора зависят от выбора системы координат. Для каждого

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

тензора существует такая система координат, в которой недиагональные компоненты обращаются в ноль. Такой тензор называется диагональным, а оси координат - главными осями тензора. Соответственно, величины $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ называются главными моментами инерции. Из всех компонент тензора наиболее важное значение имеет осевой момент инерции $I_{zz} = \sum \Delta m_i (r_i^2 - z_i^2) = \sum \Delta m_i R_i^2$, который был получен ранее. В большинстве случаев с помощью его удается решить поставленную задачу.

1.23 Вычисление осевых моментов инерции. Теорема Штейнера.

Полученная формула для осевого момента АТТ соответствует приближению набора МТ. Если же переходить к континуальному пределу (сплошному телу), то сумму необходимо заменить интегралом следующего вида

$$I_{zz} = \int_m R^2 dm = \int_v \rho R^2 dV$$

где ρ - плотность тела, а R - расстояние от элементарного объема dV до оси вращения. Если тело однородное, то плотность его одинакова во всех точках и

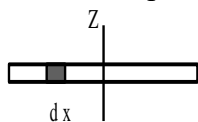
$$I_{zz} = \rho \int_v R^2 dV.$$

Вычисление такого интеграла в общем случае достаточно сложно. Рассмотрим несколько простых случаев.

1). Момент инерции материальной точки (масса m , расстояние от оси - R).

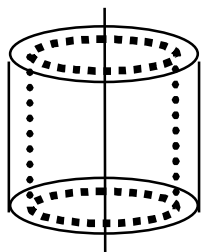
В этом случае интегрирование тривиально и в результате $I_{MT} = m R^2$.

2). Момент инерции однородного стержня (m , длина ℓ , ось проходит через центр масс). Стержень однородный, поэтому $dV = S dx$, $R = x$, $\rho = m/V = m/(S \ell)$, тогда



$$I_z^{cm} = 2 \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell/2} x^2 dx = 2 \frac{m}{\ell} \frac{1}{3} \left(\frac{\ell}{2} \right)^3 = \frac{m \ell^2}{12}.$$

3). Момент инерции цилиндра (m , радиус r , относительно оси симметрии)

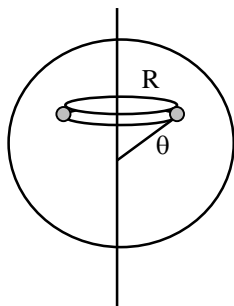


Из всего объема цилиндра выделим тонкий цилиндрический слой толщиной dR (отмечен на рисунке пунктиром), площадью $2\pi R h$, где h - высота цилиндра, а R - расстояние от выделенного объема до оси вращения. Тогда масса этой части равна $dm = 2\pi \rho R h dR$ и $dI_z = R^2 dm = 2\pi \rho h R^3 dR$. Зная, что $m = \rho V = \rho \pi r^2 h$, получаем для всего цилиндра

$$I_z^{cyl} = 2\pi \rho h \int_0^r R^3 dR = \frac{m r^2}{2}.$$

4). Момент инерции шара (m , $R_{ш}$, ось проходит через центр шара).

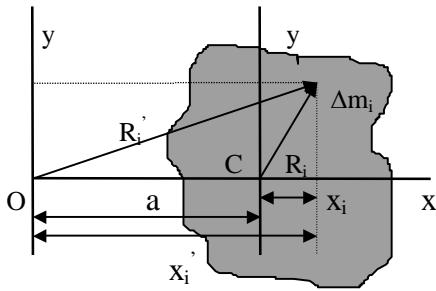
Начало отсчета снова выберем на оси и в качестве dV выберем ту часть объема тела, которая находится на расстоянии R от оси вращения и видна под углом ϑ к оси: $dV = 2\pi r^2 \sin\theta dr d\theta$. Это объем бублика радиусом $r \sin\theta$ и сечением $r d\theta \times dr$. Теперь подставим этот объем в формулу для осевого момента $dI_z = \rho R^2 dV = 2\pi \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta$. Это момент инерции бублика, а для шара получаем



$$I_z^{шар} = 2\pi \rho \int_0^{R_{ш}} r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4\pi R_{ш}^3}{3} \rho \frac{2R_{ш}^2}{5} = \frac{2}{5} m R_{ш}^2.$$

Все эти моменты инерции определены относительно осей симметрии тел (то есть проходят через центр масс симметричных фигур).

Получим формулу, связывающую моменты инерции тел при их вращении вокруг оси,



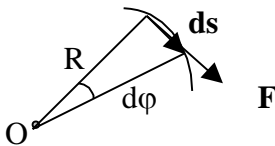
параллельной оси, проведенной через центр масс, и отстоящей от нее на расстояние a . Итак, рассмотрим две параллельные оси: одна проходит через центр масс перпендикулярно рисунку, а вторая - на расстоянии a от первой оси и тоже перпендикулярно рисунку. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O , будет равен $I = \sum R_i'^2 \Delta m_i = \sum (x_i'^2 + y_i'^2) \Delta m_i = \sum [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i = \sum (x_i^2 + 2x_i a + a^2 + y_i^2) \Delta m_i = \sum R_i^2 \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i = I_c + m a^2 + 2 a m x_c = I_c + m a^2$. Так как одна

из наших осей проходит через центр масс, то $x_c = 0$, поэтому теорема Штейнера звучит так: *Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:*

$$I = I_c + m a^2.$$

1.24 Кинетическая энергия вращающегося и катящегося тела.

Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то элементарная масса Δm_i , отстоящая от оси вращения на расстояние R_i , обладает скоростью $v_i = \omega R_i$. Следовательно, ее кинетическая энергия равна $\Delta E_{ki} = 1/2 \Delta m_i v_i^2 = 1/2 \Delta m_i \omega^2 R_i^2$. Сумма всех таких энергий дает полную кинетическую энергию тела при его вращении $E_k^{BP} = 1/2 \omega^2 \sum R_i^2 \Delta m_i = 1/2 I_c \omega^2$. Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии поступательного движения, но роль массы здесь выполняет момент инерции, а роль линейной скорости - угловая. Теперь выясним, что может изменить эту энергию. Найдем



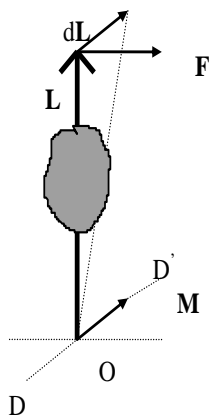
работу, совершаемую внешней силой при вращении АТТ. Рассмотрим частный случай, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы. В этом случае $\vec{F} \parallel d\vec{s}$, то есть сила и перемещение параллельны и $dA = F_s ds = F_s R d\phi = M_z d\phi$. Если же сила направлена произвольно по отношению к движению, то ее можно разложить на три составляющие: параллельно оси вращения $\vec{F}_{||}$ (ее

момент относительно оси равен нулю), параллельно радиусу вращения \vec{F}_{\perp} (ее момент тоже равен нулю) и по касательной к окружности \vec{F}_{τ} (это и есть рассмотренная выше сила). Таким образом, общая формула такова $dA = M_{\omega} d\phi$. Для мощности получаем такую формулу $P = M_{\omega} \omega = \vec{M} \vec{\omega}$. Если же тело и вращается, и движется поступательно, то удобно представлять его кинетическую энергию в виде суммы поступательной части и энергии вращения, определенной относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда по теореме Кенига получаем:

$$E_k = E_k^{пост} + E_k^{вр} = \frac{m v_{цм}^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

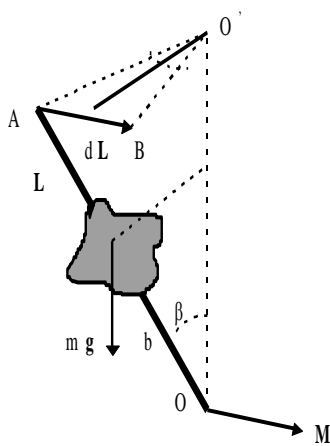
В качестве примера можно определить кинетическую энергию обруча, катящегося без скольжения по горизонтальной поверхности. В этом случае $\omega = v/R$ и $E_k = mv^2/2 + m R^2/2 (v/R)^2 = m v^2$.

I.25 Гироскопы. Гироскопический эффект.



Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с большой скоростью. Для симметричного гироскопа направления векторов \vec{L} и $\vec{\omega}$ совпадают, тогда $\vec{L} = I \vec{\omega}$. Так как гироскоп массивен, то I очень велик, так же велика и ω . Изобразим свободный гироскоп, то есть такой, что сумма моментов всех сил, действующих на него равна нулю $\vec{M} = 0$. Ось гироскопа закреплена в точке O , момент импульса равен \vec{L} . Трения нет. Попытаемся повернуть гироскоп силой \vec{F} , действующей горизонтально в течении времени Δt . Оказывается, что гироскоп будет поворачиваться в направлении DD' . Это явление называется гироскопическим эффектом. Такое поведение гироскопа связано с тем, что изменение момента импульса равно $d\vec{L} = \vec{M} dt$; новое значение момента импульса будет равно $\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + \vec{M} dt$ и ось гироскопа повернется в

направлении, перпендикулярном силе. Отметим тот факт, что $|\vec{L}| \gg |\vec{M} dt|$. Таким образом,



если на свободный гироскоп подействовать силой \vec{F} , то он будет совершать вращательное движение вокруг исходной оси вращения. Это явление названо прецессией. Рассмотрим прецессию гироскопа под действием силы тяжести. Исследовать будем тот же гироскоп, но пусть в этом случае он будет наклонен к вертикальной оси под углом β . На гироскоп будет действовать момент силы mg , равный $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$. Модуль этого момента равен $M = mgb \sin \beta$, где b – расстояние от точки O до центра масс гироскопа. Действие момента силы тяжести выразится в изменении момента импульса гироскопа $d\vec{L} = \vec{M} dt$ и ось вращения гироскопа повернется на угол $d\varphi$. Модуль этого изменения равен $|d\vec{L}| = L \sin \beta d\varphi$. Выразим отсюда угол поворота и получим

частоту прецессии: $d\varphi = \frac{mgb \sin \beta dt}{L \sin \beta}$; $\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgb}{L} = \frac{mgb}{I\omega}$. В результате за каждые dt

гироскоп повернется на малый угол по окружности, при этом повернется и момент силы тяжести. Это и есть прецессия с угловой скоростью $\omega_{пр} \ll \omega$. Полученные формулы верны, если $mgb \ll I\omega^2$. Первая часть этого соотношения по порядку величины равна потенциальной энергии гироскопа в поле силы тяжести, а вторая - кинетической энергии гироскопа. Итак, полученные формулы верны, если $E_p \ll E_k$.

Демонстрацию работы гироскопа можно посмотреть здесь: www.youtube.com/watch?v=y1zyEPK5bQM

I.26 Статика. Условия равновесия АТТ. Виды равновесия.

Если тело, к которому приложены силы, покоится, то говорят, что это тело находится в равновесии. Выяснить условия равновесия реальных тел непросто, так как все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил изменяют свою форму и размеры, или, как говорят, деформируются. А деформации существенно влияют на равновесие тел. Во многих случаях, которые встречаются на практике, деформациями можно пренебречь и вести расчет так, как если бы тела были недеформируемыми, то есть абсолютно твердыми. Изучив условия равновесия АТТ, мы найдем условия равновесия реальных тел в тех случаях, когда их деформациями можно пренебречь. Таким образом, раздел механики, в котором изучается равновесие АТТ, называется

статикой. Отметим, что деформации тел и их роль в равновесии изучаются в других курсах, например, в курсе сопротивления материалов.

Мы уже изучили два вида механического движения: поступательное и вращательное. Следовательно, чтобы тело находилось в состоянии механического равновесия необходимо выполнение двух условий:

- А) отсутствие поступательного движения;
- Б) отсутствие вращательного движения.

Поступательное движение АТТ определяется теоремой о движении центра масс:

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}. \text{ Поэтому первое условие равновесия будет выглядеть так: } \sum_{i=1}^{N_{\text{пост}}} \vec{F}_i^{\text{пост}} = 0.$$

Векторная сумма всех внешних сил (в количестве $N_{\text{пост}}$), действующих на тело, должна равняться нулю.

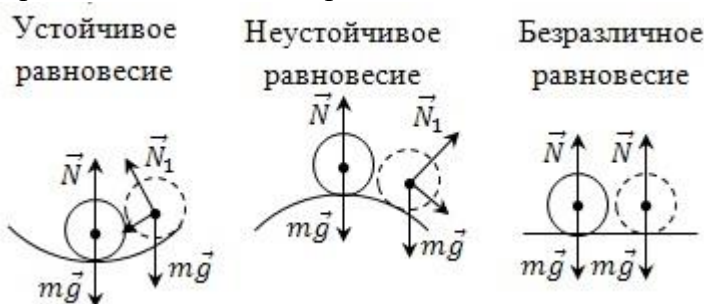
Вращательное движение АТТ определяется основным уравнением вращательного

$$\text{движения: } I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \text{ Тогда второе условие равновесия будет выглядеть так: } \sum_{i=1}^{N_{\text{вращ}}} \vec{M}_i = 0.$$

Векторная сумма всех моментов внешних сил (в количестве $N_{\text{вращ}}$), действующих на тело, должна равняться нулю.

Виды равновесия.

Оказывается, что даже выполнение этих двух условий равновесия не гарантирует стабильности и устойчивости тела или конструкции. В подавляющем числе случаев необходимо иметь конструкцию, которая бы не падала и не разрушалась. В таком случае говорят об устойчивом равновесии – это такое состояние тела, при котором при отклонении тела из положения равновесия оно возвращается в исходное положение. Пример такого равновесия приведен на рисунке. Из рисунка видно, что сумма сил, действующих на смещенное тело будет направлена к положению равновесия. Такая сила называется возвращающей.



В положении неустойчивого равновесия ситуация другая. Сумма сил, действующих на смещенное тело в этом случае будет направлена от положения равновесия и тело в исходное положение не возвращается. А в случае безразличного равновесия никакой дополнительной силы не возникает и

перемещаться смещенное тело никуда не будет.

Важно отметить, что в положении устойчивого равновесия тело имеет минимальную потенциальную энергию по отношению к соседним точкам, в положении неустойчивого равновесия тело имеет максимальную потенциальную энергию по отношению к соседним точкам, а в положении безразличного равновесия тело имеет одинаковую потенциальную энергию во всех соседних точках.

1.27 Симметрия пространства - времени и законы сохранения.

Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса связаны с определенными свойствами симметрии пространства и времени. Все эти законы можно получить из II закона Ньютона, если в добавление к нему использовать свойства симметрии пространства и времени. Под симметрией пространства - времени понимают однородность времени, однородность и изотропность пространства.

1). Однородность времени означает равноправие всех моментов времени: *если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов времени все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.*

2). Однородность пространства означает, что в пространстве нет выделенных положений, все точки пространства равноправны: *если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.*

3). Изотропия пространства означает, что в пространстве нет выделенных направлений, все направления эквивалентны: *если замкнутую систему тел повернуть на произвольный угол вокруг некоторой оси, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.*

Наиболее важным при этом остается условие замкнутости системы.

Обратимся к выводу закона сохранения энергии. Из динамики возьмем следствие II закона Ньютона $A_{12} = E_{k2} - E_{k1}$. Далее предположим, что все силы, действующие на объекты, составляющие систему, можно представить в виде потенциальной энергии, которая для одной частицы будет выглядеть так - $E_p(x, y, z, t)$. Таким образом, она может зависеть и от времени. Тогда работа всех сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии

$A_{12} = -\int \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right)$. Запишем полный дифференциал E_p и подставим в

выражение для работы $dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz + \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$, тогда

$A_{12} = -\int dE_p + \int \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$ и $(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = \int \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$. Если система замкнута, то

потенциальная энергия не может явно зависеть от времени в силу однородности пространства. Таким образом, закон сохранения энергии доказан.

Перейдем к доказательству закона сохранения импульса. Пусть механическая система замкнута.

Все силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, действующие на материальные точки системы, являются силами внутренними, внешних сил нет. Ввиду однородности пространства энергия системы не изменится, если систему сместить из одного положения в другое. Математически это означает,

что независимо от величин $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ и \vec{R} - вектора смещения системы в другое положение $E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = E_p(\vec{r}_1 + \vec{R}, \vec{r}_2 + \vec{R}, \dots)$. Выберем \vec{R} бесконечно малым, таким, что $\vec{R} = dx \vec{e}_x$ и

разложим в ряд: $E_p(\vec{r}_1 + \vec{R}, \dots) = E_p(\vec{r}_1, \dots) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1} + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} + \dots \right) dx$. Выражение в скобках должно

равняться нулю, а ведь это - сумма проекций всех сил, действующих внутри системы, на ось x (без знака минус). Ввиду произвольности выбора R можно считать, что в этом случае сумма всех сил, действующих на систему, равна нулю, а это как раз то условие, при котором из II закона Ньютона получается закон сохранения импульса.

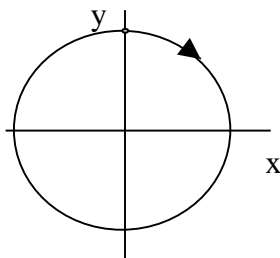
Закон сохранения момента импульса требует, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на систему, равнялась нулю. Рассмотрим поворот замкнутой механической системы на угол $d\varphi$.

Ввиду изотропности пространства на этот поворот работы не затрачивается, поэтому $dA = (\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots) d\varphi = 0$ и геометрическая сумма моментов всех сил, действующих на систему, равна нулю.

1.28 Степени свободы и обобщенные координаты

Положение материальной точки в пространстве может быть задано тремя числами - координатами. Например, это могут быть декартовы координаты - x, y, z , сферические координаты - ρ, θ, φ . В любом случае для точки их три. Про такой объект говорят, что он обладает тремя степенями свободы. Может случиться, что движение точки ограничено, например, пружиной или нитью. Тогда говорят, что на движение наложены связи. В этом случае уравнение $f(x, y, z) = 0$ - это уравнение движения, в результате чего независимыми остаются лишь две координаты. Говорят, что точка обладает двумя степенями свободы. Возможно и одномерное

движение, например, по дуге. В этом случае говорят, что точка обладает одной степенью свободы. Примером такого движения является движение материальной точки по окружности. При этом создается впечатление, что движение описывается двумя координатами (x, y). Но так как уравнение движения ($x^2 + y^2 = R^2$) связывает эти координаты, то независимой величиной



остается только одна. В качестве такой координаты можно выбрать длину дуги окружности с началом отсчета в точке, например, с координатами $(0, R)$. В этом примере длина дуги L является обобщенной координатой. Обобщим понятие степеней свободы на систему из n материальных точек. Если ограничений движению нет, то для определения мгновенного положения всех точек системы надо задать $3n$ координат. В этом случае система обладает $3n$ степенями свободы. Пусть на систему наложено какое-либо количество связей. Тогда независимых координат останется f .

Для их задания можно использовать любые f чисел q_1, q_2, \dots, q_f , с помощью которых можно задать положение n точек. Это и будут обобщенные координаты. Производные от обобщенных координат будут называться обобщенными импульсами. Число независимых обобщенных координат и называется числом степеней свободы системы.

В качестве примера рассмотрим число степеней свободы АТТ. Число независимых координат определим так: АТТ может участвовать во вращательном (3 координаты) и поступательном (3 координаты) движении. Других возможностей нет — значит всего у АТТ 6 степеней свободы.

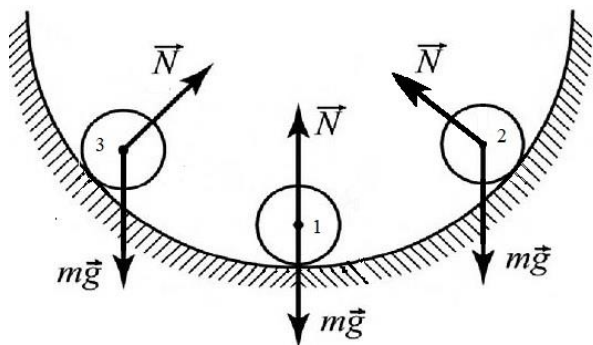
Тема 4. Колебания

1.29. Гармонические колебания.

Как уже обсуждалось в параграфе 1.26 («Статика»), у некоторых механических систем может существовать точка устойчивого равновесия. Вблизи таких точек возможно возникновение ещё одного вида механического движения – колебательного движения.

Под колебательным движением понимают движение с той или иной степенью повторяемости по времени.

Рассмотрим подробнее такое движение на простом примере. Пусть на дне бокала находится небольшой шарик (см. на рисунке). Если его вывести из положения равновесия (1) в положение (2), то сумма всех сил, действующих на него, не будет равна нулю, а будет направлена к положению равновесия. Такая же ситуация возникнет и в положении шарика (3). Сила, возникающая в этих случаях всегда направлена к положению равновесия и называется возвращающей. Таким образом шарик будет периодически отклоняться от положения равновесия. Обозначим его отклонение от положения равновесия (1) через x . Отметим, что в этом курсе рассматриваются только малые отклонения колеблющегося тела от равновесного положения. Следовательно, зависимость от времени $x(t)$ будет описываться периодической функцией времени. В данном случае периодом T движения шарика будет называться минимальный промежуток времени, через который шарик вернется в начальное положение. Величина, обратная периоду, называется частотой колебаний $\nu = 1/T$. Периодических функций много. Выберем простейшую из них – синус (или косинус). Тогда зависимость $x(t)$ можно записать в виде:



В этом курсе рассматриваются только малые отклонения колеблющегося тела от равновесного положения. Следовательно, зависимость от времени $x(t)$ будет описываться периодической функцией времени. В данном случае периодом T движения шарика будет называться минимальный промежуток времени, через который шарик вернется в начальное положение. Величина, обратная периоду, называется частотой колебаний $\nu = 1/T$. Периодических функций много. Выберем простейшую из них – синус (или косинус). Тогда зависимость $x(t)$ можно записать в виде:

Величина, обратная периоду, называется частотой колебаний $\nu = 1/T$. Периодических функций много. Выберем простейшую из них – синус (или косинус). Тогда зависимость $x(t)$ можно записать в виде:

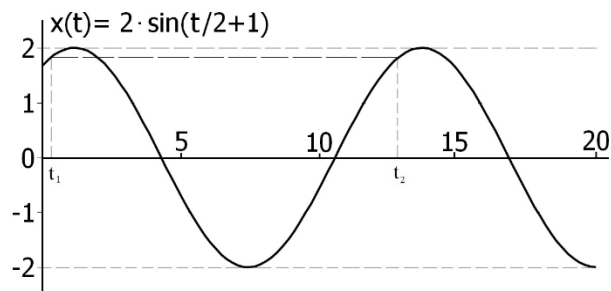
$$x(t) = A \cdot \sin(a \cdot t + b).$$

Это простейшее уравнение, способное описать колебательное движение. Колебания, происходящие по такому закону, называются **гармоническими**.

Выясним физический смысл постоянных A, a, b . Синус – функция ограниченная:

$$|\sin(a \cdot t + b)| \leq 1.$$

В случае, когда он равен единице, отклонение от положения равновесия шарика будет максимальным. Следовательно, $A = x_m$ называется амплитудой колебаний. Величина $at + b$, стоящая под знаком синуса, называется фазой колебаний. Запишем условие периодичности синуса:



Следовательно,

$$\sin(a \cdot t_1 + b + 2\pi) = \sin(a \cdot t_2 + b).$$

Следовательно, $a \cdot (t_2 - t_1) = 2\pi$. Так как $t_2 - t_1 = T$, то $a = \frac{2\pi}{T} = \omega$ есть круговая частота колебаний.

Ясно, что $\omega = 2\pi\nu$. На рисунке показана зависимость $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + b)$. В начальный

момент ($t = 0$), наш шарик может находиться на любом расстоянии от положения равновесия. За это отвечает $b = \varphi_0$, которая называется начальной фазой колебаний.

Скорость движения шарика можно определить, вычислив производную от x :

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \text{ а ускорение } - a_x(t) = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0). \text{ Тогда}$$

$a_x = -\omega^2 \cdot x$, или $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$ (**). Эту формулу, так же, как и зависимость $x(t)$, можно считать определением гармонических колебаний:

колебания, происходящие по такому закону, называются гармоническими.

Уравнению (**) можно придать другой вид. Умножим его на массу колеблющегося тела и получим: $m \cdot a_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x$. Обозначим $m \cdot \omega^2 = k$. Получим уравнение колебаний в виде: $m \cdot a_x = -k \cdot x = F_x$. Эта сила является возвращающей и называется квазиупругой (так как соответствует закону Гука). Колебательных систем много, они разные, но гармонические колебания в них всегда происходят под действием такой квазиупругой силы.

Запишем кинетическую, потенциальную и полную энергии тела при колебаниях:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m \cdot v_x^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0)}{2}$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0)}{2}$$

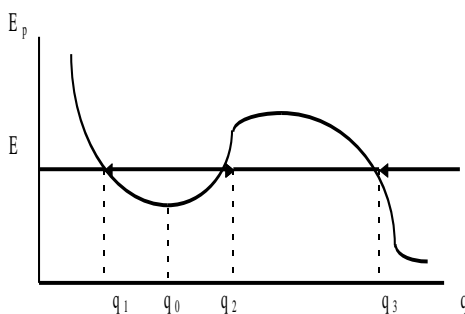
$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2}{2}.$$

Суммируя написанное, сформулируем 2 условия возникновения гармонических колебаний:

- 1) Наличие у системы положения устойчивого равновесия.
- 2) Отсутствие трения в колебательной системе (или очень малое трение).

I.29a. Гармонические колебания (для тех, кто любит посложнее).

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, которую будем характеризовать обобщенной



координатой q . Тогда может оказаться, что зависимость потенциальной энергии системы от обобщенной координаты $E_p(q)$ будет иметь вид, изображенный на рисунке. Если E - полная механическая энергия частицы в системе, то частица может находиться только в тех местах оси q , где $E_p(q) \leq E$ (значение E изображено на рисунке горизонтальной линией). Поэтому движение в области от q_3 до бесконечности будет неограниченно (инфинитно), а в области от q_1 до q_2 будет ограничено (финитно). Точка q_0 оказывается точкой устойчивого

равновесия системы. При определенных условиях (отсутствие или пренебрежимо малое трение) в таких точках может возникать особый вид механического движения - механические колебания. Колебаниями в широком смысле называются движения, обладающие той или иной степенью повторяемости по времени (Физ. Энциклопедия). Получим основное уравнение колебаний и его основные свойства. Разложим потенциальную энергию в ряд вблизи q_0 - положения устойчивого равновесия:

$$E_p(q) = E_p(q_0) + \left. \frac{dE_p}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots$$

Так как в точке $q = q_0$ у потенциальной энергии наблюдается минимум, то первая производная этой функции при этом равна нулю. Если теперь вторую производную обозначить величиной $k/2$, то потенциальная энергия системы и значение силы, действующей на частицу, вблизи q_0 будут равны

$$E_p(q) = E_p(q_0) + \frac{k}{2} (q - q_0)^2; f(q) = -k(q - q_0)$$

Такая сила называется возвращающей, так как, где бы не находилась частица, сила, действующая на нее, будет направлена к положению равновесия системы. Итак, для возникновения колебаний необходимо наличие двух условий - возвращающая сила и отсутствие (или очень малое) трение. Колебания, как и любое механическое движение, подчиняются II закону Ньютона. Для колеблющейся частицы массы m это уравнение выглядит так $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ или

$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -k(q - q_0)$. Введем новую переменную $x = q - q_0$, описывающую движение частицы. Это означает, что мы перенесли начало координат системы отсчета в положение устойчивого равновесия системы. Тогда, обозначив $\omega^2 = k / m$, получаем $m x'' = -k x$ или $x'' + \omega^2 x = 0$. Последнее уравнение можно считать определением *гармонических колебаний*: колебания, происходящие в соответствии с этим уравнением, называются гармоническими. Общим решением такого уравнения является сумма гармонических функций $x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. В этой формуле $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_2}{A_1}$; $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Смещение частицы из положения

равновесия (уравнение движения) можно записать так:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

В этом уравнении величина A называется амплитудой колебаний, ω - частотой, величина φ_0 - начальной фазой, а $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ - фазой колебаний. Это уравнение получено при условии, что отклонения от положения равновесия малы, поэтому такие колебания называются малыми колебаниями. Энергия системы, совершающей малые колебания, равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \varphi}{2} + \frac{kA^2 \sin^2 \varphi}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

и не зависит от времени. Такое возможно, если работа сил трения пренебрежимо мала. Далее мы рассмотрим свободные, затухающие и вынужденные колебания.

I.30 Свободные колебания (математический маятник, груз на пружине).

Свободными называются колебания системы под действием только внутренних сил в системе без влияния всяких внешних воздействий. Для всех колебательных систем будем рассматривать малые колебания, то есть такие, для которых $x \ll 1$.

В качестве первой замкнутой системы рассмотрим математический маятник (МТ на невесомой нити длины l) в поле силы тяжести (трения нет). Запишем общее выражение для II закона Ньютона колеблющегося маятника, а затем спроектируем его на касательную к траектории (дуга окружности на рисунке):

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}; \text{ OX: } ma = -mg \sin \alpha$$

Так как $x \ll l$, то и угол отклонения маятника от вертикали мал и $\sin \alpha \cong \alpha = x/l$. Тогда $a = -\frac{g}{l}x$. Учитывая, что $a = x''$, получаем уравнение

гармонических колебаний $x'' + \frac{g}{l}x = 0$. Величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ называется

частотой свободных колебаний математического маятника. С ней связана величина периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. И, наконец,

общее уравнение движения для этого случая $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Для

полного определения колебаний необходимо задать значения амплитуды и начальной фазы колебаний. Это можно сделать, например, двумя способами: задать кинетическую или потенциальную энергию:

1) в начальный момент МТ отвели на расстояние x_0 от вертикали и свободно отпустили.

Тогда

$$x|_{t=0} = x_0$$

В этом случае уравнение колебаний выглядит так

$$v|_{t=0} = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

2) В начальный момент МТ из положения равновесия толчком сообщают скорость v_0 . Тогда

$$x|_{t=0} = 0$$

В этом случае $\varphi_0 = 0$ и

$$v|_{t=0} = v_0$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Вторым примером будет система «груз на пружине». Рассмотрим сначала случай, изображенный на рисунке. При изменении длины пружины на груз будет действовать сила упругости, которая

для малых колебаний подчиняется закону Гука $F_{\text{упр}} = -kx$ (k - жесткость пружины), то есть является возвращающей. Тогда II

закон Ньютона $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} + \vec{N}$ в проекции на ось x будет иметь вид: $ma = -kx$. Снова получаем уравнение гармонических

колебаний с частотой собственных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и

периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Рассмотрение вертикальных колебаний

груза на пружине проводится аналогично и дает те же результаты.

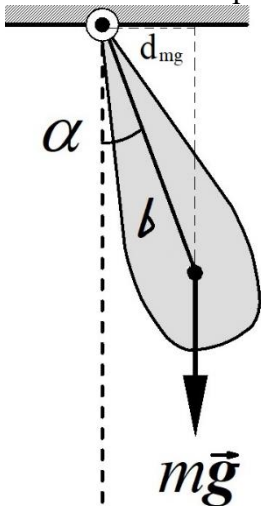
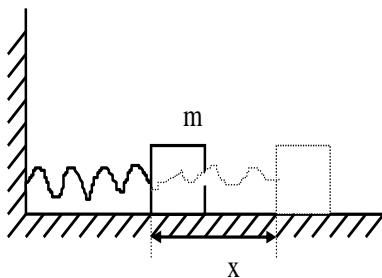
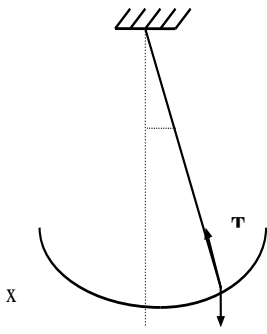
В заключение приведем вывод формулы для колебательной системы «физический маятник».

Физическим маятником называется АТТ, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Если отклонить такое тело на угол α , то момент силы тяжести будет возвращать его в положение равновесия. Следовательно, в этом случае нужно для описания колебаний использовать основное уравнение динамики вращательного движения. Относительно оси z , проходящей через точку подвеса перпендикулярно рисунку, уравнение будет выглядеть так:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z = -mgb \cdot \sin \alpha.$$

Рассматриваются малые колебания, следовательно, $\sin \alpha \approx \alpha$, и тогда получаем уравнение гармонических колебаний следующего вида:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgb}{I} \cdot \alpha = 0.$$



В этой формуле b – расстояние от точки подвеса до центра тяжести тела; I – момент инерции тела относительно оси z ; $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$. Тогда частота колебаний такой системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{I}}, \text{ период } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}, \text{ где } m - \text{ масса АТТ.}$$

I.31 Затухающие механические колебания.

В реальной природе всегда действуют силы трения, поэтому реальные свободные колебания при этом будут затухающими. Со временем уменьшается их энергия и амплитуда. Кроме того, так как сила трения действует против возвращающей силы, то и частота затухающих колебаний должна быть меньше, чем у таких же свободных. В качестве сил трения рассмотрим так называемое «жидкое трение», то есть трение, величина которого зависит от скорости относительного движения трущихся объектов $F = -\beta v = -\beta \dot{x}$. Запишем II закон Ньютона в этом случае $ma = -kx - \beta v$ или $x'' = -\omega_0^2 x - \beta/m \dot{x}$. Введем обозначения $\gamma = \beta/2m$; $\omega_0^2 = k/m$, тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$x'' + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение этого уравнения по-прежнему будет иметь периодический характер, но ясно, что амплитуда колебаний будет убывать. Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$$

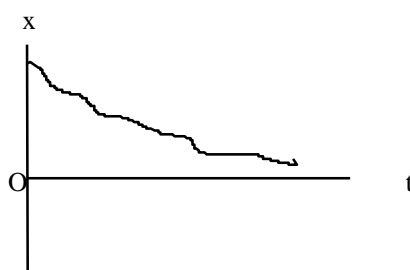
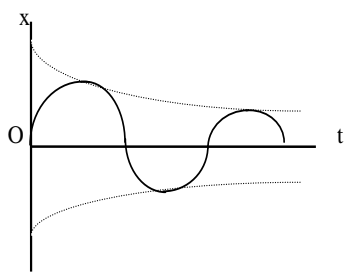
В этой формуле неизвестными величинами являются ω и α . Для их определения вычислим первую и вторую производные по времени от x и подставим полученные выражения в уравнение движения. Полученное выражение имеет вид

$$(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\gamma) x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t + (2\alpha\omega - 2\omega\gamma) x_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t = 0$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе круглые скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем α и ω : $\alpha = \gamma$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Таким образом, решение уравнения для затухающих колебаний будет выглядеть так:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right).$$

Величина γ называется декрементом затухания. На рисунках изображены графики зависимости



смещения тела из положения равновесия при малых (левый) и больших (правый) величинах декремента затухания.

При очень большом трении в системе колебаний вообще не будет, а будет более или менее плавное приближение

колебательной системы к положению устойчивого равновесия

I.32 Вынужденные механические колебания.

Вынужденными колебаниями называются колебания, которые совершаются под влиянием внешних сил. В данном случае будут изучаться механические колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Уравнение II закона Ньютона в этом случае примет вид: $ma = -kx - 2\gamma m \dot{x} + F_0 \cos \omega t$ или

$$x'' + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t.$$

Процесс установления колебаний будет проходить так. Сначала в течение некоторого времени t будет происходить увеличение амплитуды колебаний (так называемый переходный процесс), а

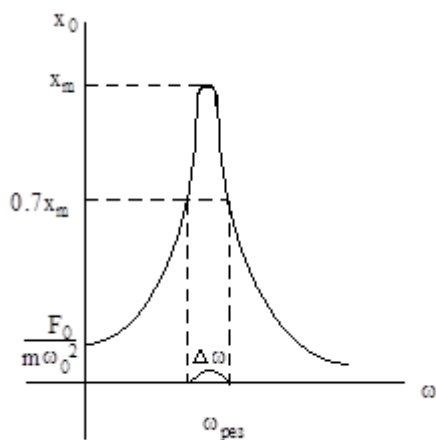
затем начнется установившийся процесс колебаний с постоянной амплитудой, зависящей от величины вынуждающей силы и ее частоты. Рассматривать будем установившийся процесс, поэтому решение будем искать на частоте вынуждающей силы в виде $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ и, таким образом, необходимо найти две величины: фазу колебаний φ и амплитуду x_0 . Действуя по тем же принципам, что и в случае затухающих колебаний, получаем следующее уравнение для определения неизвестных:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\gamma\omega\sin\varphi - F_0/(m x_0)]\cos\omega t + [(\omega^2 - \omega_0^2)\sin\varphi - 2\gamma\omega\cos\varphi]\sin\omega t = 0.$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе квадратные скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем x_0 и φ :

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}; \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Построим график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы $x_0 = f(\omega)$.



При частотах, близких к собственной частоте колебаний системы, происходит резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной. Она равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

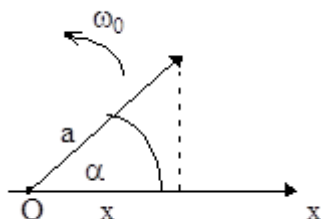
Важной характеристикой колебательной системы является добротность Q . Она характеризует ширину резонансной кривой. Чем больше добротность, тем уже резонансная кривая. Определить добротность можно по формуле

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega}.$$

Под $\Delta\omega$ понимается ширина области, где амплитуда колебаний не меньше 0.7 от амплитуды колебаний при резонансе (смотри на рисунке).

1.33 Сложение колебаний. Биения.

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких колебаний одинакового направления (или, что, то же самое, сложение нескольких гармонических функций), значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким образом схема называется векторной диаграммой.

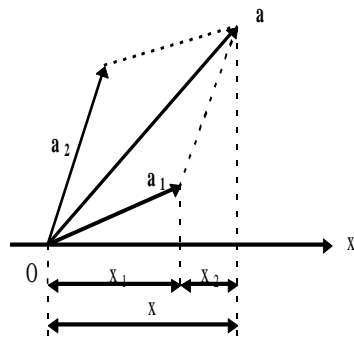


Возьмем ось, которую обозначим за x (изображена на рисунке горизонтально). Из точки O , взятой на оси, отложим вектор длины a , образующий с осью угол α . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-a$ до a , причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону $x = a \cos(\omega t + \alpha)$. Значит, гармоническое колебание может быть представлено с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный фазе колебания.

колебания.

Теперь с помощью векторной диаграммы рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2 , которые запишутся следующим образом: $x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$; $x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$. Представим оба колебания с помощью векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , как изображено на рисунке. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор \vec{a} . Легко видеть, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$x = x_1 + x_2$. Следовательно, вектор \vec{a} представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0 , что и вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0 , амплитудой a и начальной фазой α . Из построения видно, что



$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1\operatorname{Sin}\alpha_1 + a_2\operatorname{Sin}\alpha_2}{a_1\operatorname{Cos}\alpha_1 + a_2\operatorname{Cos}\alpha_2}.$$

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор \vec{a} пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью - диаграмма будет нестационарной.

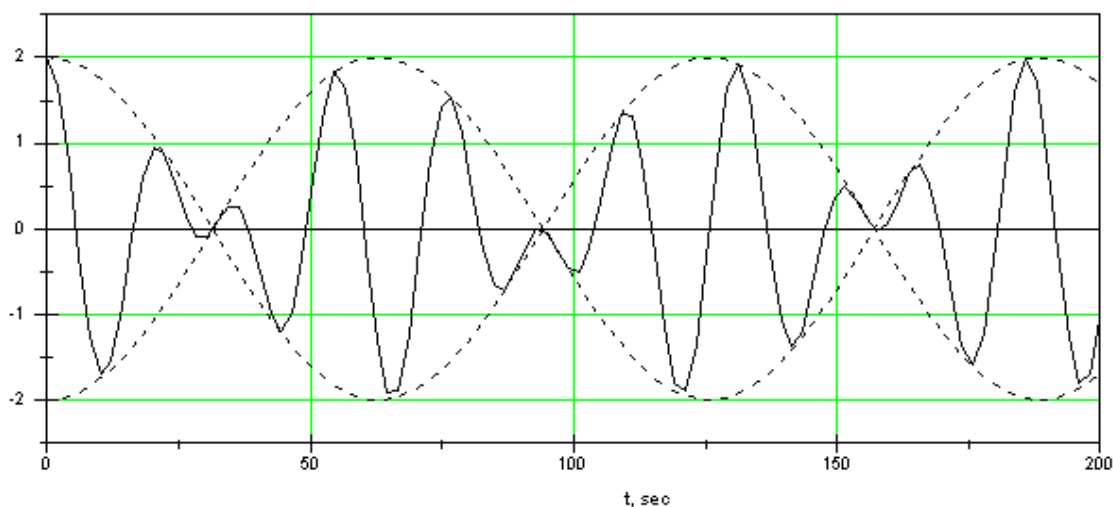
Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями. Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω , частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a . Для простоты положим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид: $x_1 = a\cos\omega t$, $x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t$. Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right) \cos\omega t$$

График этой функции показан на рисунке, изображенном ниже. Заключенный в скобки множитель изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Это дает основания считать, что рассматриваемое колебание - гармоническое с частотой ω , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от $-2a$ до $+2a$, в то время как амплитуда по определению - положительная величина. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид:

амплитуда = $\left| 2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|$. Эта величина - периодическая функция с частотой, в два раза

превышающая частоту выражения, стоящего под знаком модуля, то есть с частотой $\Delta\omega$. Таким образом, частота пульсаций амплитуды - ее называют частота биений - равна разности частот складываемых колебаний.



I.34 Напряженность и потенциал гравитационного поля.

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства - создает в нем гравитационное поле. Это поле проявляет себя в том, что на помещенное в него другое тело действует сила. Для характеристики гравитационного поля вводится векторная величина $\vec{g} = \vec{F}/m_{np}$. Эта величина называется напряженностью гравитационного поля. Она равна отношению силы, действующей на пробную массу (малую по величине и точечную), внесенную в данную точку поля, к массе пробной массы. Получим величину напряженности поля точечной массы (или однородного сферического тела). Используем закон всемирного тяготения, тогда

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r; \vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

В этих формулах M - масса тела, создающего поле, G - универсальная гравитационная постоянная. Как известно, разность потенциальных энергий взаимодействия двух таких масс как M и m_{np} равна работе которую совершает гравитационная сила со знаком минус:

$$E_{p2} - E_{p1} = -A_{12} = -\int_1^2 \vec{F}_{грав} \cdot d\vec{\ell}.$$

Рассмотрим перемещение тела массы m из бесконечности в точку, отстоящую от массы M на расстояние r

$$\begin{aligned} E_p(r) - E_p(\infty) &= -\int_{\infty}^r \vec{F}_{грав} \cdot d\vec{\ell} = -G \cdot m_{np} \cdot M \cdot \int_{\infty}^r \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\ell} = \\ &= G \cdot m_{np} \cdot M \cdot \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = G \cdot m_{np} \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = -G \cdot \frac{m_{np} \cdot M}{r} \end{aligned}$$

Тогда $E_p(r) = E_p(\infty) - G \cdot \frac{m_{np} \cdot M}{r}$. Обычно считают, что тела на бесконечном удалении друг от друга не взаимодействуют, поэтому $E_p(\infty) = 0$. Если считать, что E_p - потенциальная

энергия тела m_{np} в поле точечной массы (например, Земли), то величина $\varphi = \frac{E_p}{m_{np}} = -G \frac{M}{r}$

называется потенциалом гравитационного поля сферического тела (точечной массы). Если гравитационное поле создается некоторой распределенной массой, то напряженность и потенциал такого поля можно найти по принципу суперпозиции

$$\vec{g} = \int \frac{d\vec{F}}{m_{np}} \text{ и } \varphi = \int \frac{dE_p}{m_{np}}, \text{ где } d\vec{F} \text{ и } dE_p \text{ - сила и потенциальная энергия тела } m_{np} \text{ в}$$

поле точечной массы dM , создающей поле. Связь между напряженностью и потенциалом такая же, что и для любого потенциального поля: $\vec{F} = -\nabla E_p$ и $\vec{g} = -\nabla \varphi$.

I.35 Движение космических тел в гравитационном поле. Законы Кеплера.

Рассмотрим движение космического тела (например, Земли) в поле другого массивного тела (например, Солнца). Поле такого тела можно считать центральным, то есть полем, в котором сила, действующая на Землю, все время проходит через некоторую точку, которая называется силовым центром. Для центрального поля выполняется закон сохранения момента импульса: момент центральной силы всегда равен нулю. Значит, момент импульса Земли в поле неподвижного Солнца остается неизменным.

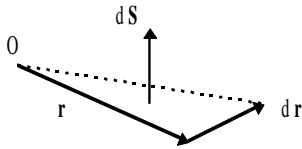
Итак, после многолетних наблюдений, Кеплер сформулировал три закона, которые впоследствии стали тремя законами Кеплера:

- I. Каждая планета движется по замкнутой траектории - эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- II. Радиус - вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

III. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Докажем эти законы, используя законы сохранения энергии и момента импульса. Сначала покажем, что любая траектория планеты - плоская. Запишем момент импульса планеты $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times d\vec{r}/dt$. Так как $\vec{L} = \text{Const}$, то вектора скорости и радиус - вектор все время перпендикулярны вектору момента импульса, а значит траектория движения планеты плоская.

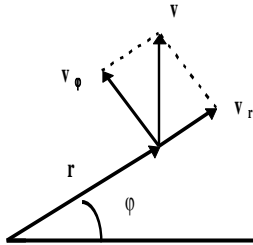
II закон Кеплера. Вычислим модуль момента импульса $|\vec{L}| = m|\vec{r} \times d\vec{r}/dt| = m r dr/dt \sin(\vec{r}, d\vec{r}) = m r dh/dt = 2m dS/dt$. Тогда если обозначить вектором площади величину $d\vec{S} = dS \vec{n}$, то окончательно получим II закон Кеплера



$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{Const}.$$

Эта величина называется секториальной скоростью и остается постоянной при движении планеты по орбите.

I закон Кеплера. Так как траектория плоская, то движение характеризуется двумя обобщенными координатами. Их можно выбирать произвольно, но наиболее удачный выбор - полярная система координат - r и φ. В этой системе координат скорость планеты можно представить в виде



$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\phi$, как изображено на рисунке. Тогда, если $d\vec{r} = (dr)_\phi \vec{e}_\phi + (dr)_r \vec{e}_r = r d\phi \vec{e}_\phi + dr \vec{e}_r$, то

$\vec{v} = d\vec{r}/dt = r \omega \vec{e}_\phi + dr/dt \vec{e}_r$ и $v^2 = v_\phi^2 + v_r^2$. Подставим полученные выражения для скорости в законы сохранения момента импульса и энергии

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{e}_\phi v_\phi + \vec{e}_r v_r) = m \vec{r} \times v_\phi \vec{e}_\phi = m \omega r^2 \vec{e}_\perp$$

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2)}{2} - G \frac{mM}{r} = \text{Const}.$$

Модуль момента импульса $L = m \omega r^2 = m r^2 \frac{d\phi}{dt}$ и $\frac{d\phi}{dt} = L/(mr^2)$. Теперь можно ввести новую

переменную $\rho = 1/r$. Тогда

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -r^2 \frac{L}{mr^2} \frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{L}{m} \frac{d\rho}{d\phi}.$$

Подставим полученный результат в выражение для закона сохранения энергии

$$\frac{m}{2} (v_r^2 + v_\phi^2) - G \frac{mM}{r} = \frac{m}{2} \left(\frac{L}{m} \right)^2 \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 - GmM\rho = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{2m} \rho^2 - GmM\rho = \text{Const}$$

Продифференцируем полученное выражение по φ, и, после упрощений, получим

$$2 \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d^2\rho}{d\phi^2} + 2\rho \frac{d\rho}{d\phi} - \frac{2Gm^2M}{L^2} \frac{d\rho}{d\phi} = 0; \frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \rho = \frac{Gm^2M}{L^2} > 0.$$

Полученное уравнение с точки зрения математики соответствует уравнению вынужденных колебаний без затухания с частотой вынуждающей силы $\omega = 1$, тогда $\rho = A \sin \phi + B \cos \phi + C =$

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\phi - \phi_0) + C; \text{tg} \phi_0 = \frac{B}{A}. \text{ Обозначим } \rho = \frac{1}{C} = \frac{L^2}{Gm^2M}; e = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}.$$

Для ρ получается уравнение $\rho r = 1 + e \cos(\phi - \phi_0)$, а для r имеем $r = \frac{\rho}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$. В

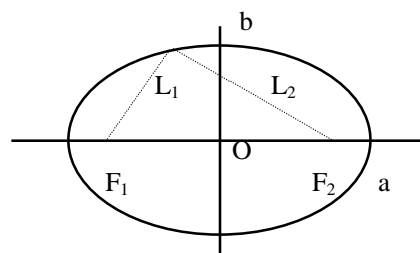
аналитической геометрии такую кривую называют *коническим сечением*. Она может быть: $e < 1$ - эллипс; $e = 1$ - парабола; $e > 1$ - гипербола; $e = 0$ - окружность. Минимальному расстоянию $r_{\text{мин}}$ планеты до Солнца соответствует угол $\phi = \phi_0$. Поэтому начало отсчета угла удобно перенести

туда. Эта точка называется *перигелий*, противоположная - *афелий*. Таким образом, траектория космического тела описывается кривой

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Для замкнутой траектории - это эллипс. Вспомним основные свойства эллипса:

1. Площадь $S = \pi a b$.
2. $L_1 + L_2 = 2a$ (смотри на рисунке).
3. $p = b^2/a$.
4. $r_{\min} = p/(1+e)$; $r_{\max} = p/(1-e)$.



III закон Кеплера. Из II закона Кеплера полная площадь эллипса равна $S = \frac{L}{2m} T$. Эту же площадь

можно вычислить независимо (свойство 1) $S = \pi a b$, где a и b - длины полуосей эллипса. Величины a и b можно определить, зная эксцентриситет e и параметр p : $r(0) + r(\pi) = 2a = 2p/(1-e^2)$ и $a = p/(1 - e^2)$, кроме того, зная свойство 2 эллипса, получаем для линии, соединяющей точки F_2 , b и O :

$$a^2 = (a - r_{\min})^2 + b^2 \text{ и } b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \text{ следовательно } - p = \frac{b^2}{a}.$$

$$\text{Тогда } T^2 = \left(\frac{2mS}{L} \right)^2 = \frac{4m^2 (\pi ab)^2}{m^2 GM p} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \text{ или } \frac{T^2}{a^3} = \text{Const}.$$

ЧАСТЬ II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Тема II.1. Термодинамика

II.1 Системы многих частиц. Понятие идеального газа.

В механике рассматриваются движения материальных тел, свойства которых могут быть смоделированы в виде понятий материальной точки или абсолютно твердого тела (АТТ). При этом не учитывается внутренняя структура и внутренние движения тел. Это можно сделать не всегда. Особенно важно учитывать эти внутренние движения при взаимодействии тел, которые находятся в разных агрегатных состояниях (твердое, жидкое, газообразное, плазма). Поэтому данный раздел физики - молекулярная физика - будет создавать модели материальных тел, которые будут включать совокупность атомов и молекул, свойства, законы движения и взаимодействия которых известны.

Силы взаимодействия между атомами и молекулами, как правило, - притяжение на больших расстояниях, связанное с гравитационными силами, и - отталкивание на малых (связанное с электромагнитными силами). Таким образом, притяжение между атомами стремится связать их в одно целое, имеющаяся у них кинетическая энергия стремится их разделить. В борьбе этих сил побеждает одна, которая сильнее и, таким образом, формируется 4 типа агрегатных состояний, перечисленных выше. Например, при низких температурах, кинетическая энергия молекул мала и все вещества будут находиться в твердом состоянии. При более высоких температурах связи между атомами становятся более слабыми и вещество становится жидким.

Теперь о тех величинах, которые важны в молекулярной физике, и их порядке: масса и количество вещества. Масса атомов очень мала, поэтому используют не абсолютные, а относительные величины. В качестве единицы массы используется 1/12 массы изотопа углерода ^{12}C : $m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ кг, тогда относительная единица массы $M_r = m_{\text{мол}}/m_u$. Количество вещества измеряется в молях. Один моль равен количеству вещества, в котором содержится столько же частиц, сколько их содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C . Это число названо числом Авогадро и равно

$$N_A = \frac{0.012 \text{ кг}}{12 m_u} = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} .$$

Молярной массой M называется масса одного моля вещества. Формула для числа молей $\nu = m/M = N/N_A$.

Итак, все реальные тела – системы многих частиц. Наиболее простая из них – идеальный газ. По определению, это газ, состоящий из материальных точек, имеющих массу, но не имеющих размеров, силы взаимодействия между которыми отсутствуют, и которые сталкиваются как упругие шары. Применимость этой модели ограничена, но такие ситуации существуют.

Теперь о методах исследования систем многих частиц (СМЧ)- динамическом, статистическом и термодинамическом.

Динамический метод для описания СМЧ не подходит. В принципе, можно написать уравнения и определить координаты и скорости всех частиц, составляющих материальное тело (всего их будет $6N$, если все тело состоит из N частиц). Но! В 1 см^3 воздуха содержится приблизительно 10^{19} частиц. Поэтому решить эти уравнения и подставить в них начальные данные не удастся за время приблизительно равное времени жизни Вселенной. Кроме этой проблемы есть и еще одна: из-за огромного числа столкновений между частицами информация об их состоянии очень быстро устареет.

Статистический метод дает информацию обо всей системе на основе динамического метода, но не точную, а вероятностную. Речь идет о статистических закономерностях, то есть о возможности предсказать дальнейшее поведение системы.

Термодинамический метод – это метод, который не занимается внутренней структурой системы, а использует только параметры, относящиеся ко всей системе в целом. Например, модель идеального газа характеризуется параметрами P, V, T . Этот метод базируется на законах сохранения (например, на законе сохранения энергии).

При исследовании СМЧ ученые опираются на статистический и термодинамический методы, результаты использования которых дополняют друг друга.

II.2 Уравнение состояния идеального газа.

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться энергией между собой и с внешней средой

Термодинамическая система может находиться в различных состояниях, отличающихся температурой, давлением, объемом, плотностью и т. д. Подобные величины, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояния. Параметры состояния не всегда имеют определенные значения. Например, у тела, подогреваемого с одной стороны и охлаждаемого с другой, температура в разных точках будет различной и телу, как целому, нельзя приписать определенное значение температуры. Состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения, называется неравновесным.

Состояние термодинамической системы будет равновесным, если все параметры состояния имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени.

Термодинамические системы, которые не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом, называются замкнутыми.

Ясно, что параметры состояния связаны друг с другом. Соотношение, определяющее связь между параметрами состояния какого-либо тела, называется уравнением состояния этого тела. В простейшем случае равновесное состояние тела определяется значениями трех параметров: давления p , объема V и температуры T (масса тела предполагается известной). Связь между этими параметрами может быть выражена аналитически формулой

$$F(p, V, T) = 0,$$

где $F(p, V, T)$ - некоторая функция параметров. Это уравнение и есть уравнение состояния данного тела.

Теперь о параметрах. Давление – это отношение силы, действующей перпендикулярно площадке, к ее площади: $p = F_{\perp}/S$. Объем V – это область пространства, занимаемая телом.

Теперь кратко о температуре. В первом приближении температуру можно определить, как величину, характеризующую степень нагретости тел. В технике и в быту используется температура, отсчитанная по шкале Цельсия. Единица этой шкалы называется градусом Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). В физике пользуются термодинамической температурой, которая не только более удобна, но, кроме того, имеет глубокий физический смысл (далее будет ясно, что термодинамическая температура определяется средней кинетической энергией, приходящейся на одну молекулу газа). Единица термодинамической температуры - кельвин (К) является одной из основных единиц СИ. Числовые значения кельвина и градуса Цельсия одинаковы. Термодинамическая температура T связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением $T = t + 273,15$.

Опытным путем было установлено, что при обычных условиях (т. е. при комнатной температуре и атмосферном давлении) параметры состояния таких газов, как кислород и азот, довольно хорошо подчиняются уравнению

$$\frac{pV}{T} = b = \text{Const}.$$

где b - константа, пропорциональная массе газа. Оказалось также, что чем разреженнее газ (чем меньше его плотность), тем точнее выполняется это уравнение.

У разреженных газов молекулы практически не взаимодействуют между собой. Они лишь иногда сталкиваются друг с другом. Однако эти столкновения происходят настолько редко, что большую часть времени молекулы движутся свободно. Такой газ строго подчиняется этому уравнению, которое, следовательно, является уравнением состояния идеального газа. Особенно близки по своим свойствам к идеальному газу гелий и водород.

Согласно **закону Авогадро** при нормальных условиях, т. е. при температуре 0°C ($273,15\text{ K}$) и давлении в одну атмосферу ($1,013 \cdot 10^5\text{ Па}$), объем моля любого газа равен $22,4\text{ л/моль} = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль}$. Отсюда следует, что в случае, когда количество газа равно одному молю, константа b в уравнении состояния идеального газа будет одинаковой для всех газов. Обозначив константу b для одного моля буквой R , напишем уравнение состояния идеального газа следующим образом: $pV_m = RT$.

Индекс «м» при V указывает на то, что имеется в виду объем одного моля газа (молярный объем). Константа R называется молярной газовой постоянной или просто газовой постоянной. Согласно закону Авогадро

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}).$$

Чтобы получить уравнение состояния для произвольной массы m идеального газа, умножим обе части уравнения состояния идеального газа на отношение m/M , где M - молярная масса газа. После несложных преобразований получим уравнение Менделеева-Клайперона

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad p = nkT$$

Уравнения представляют собой различные формы записи уравнения состояния идеального газа. При работе со смесями газов полезно использовать **закон Дальтона**, тоже точно выполняющийся для идеального газа: давление в смеси газов равно сумме парциальных давлений отдельных газов.

II.3 Давление газа на стенку сосуда.

При своем движении молекулы газа ударяют о стенку сосуда, в котором заключен газ, создавая тем самым давление газа на стенку. Вычислим это давление, исходя из молекулярно-кинетических представлений. Чтобы облегчить вычисления, сделаем несколько упрощающих задачу предположений.

1. Давление газа на стенку не зависит от формы сосуда. Поэтому предположим, что сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c .

2. Допустим, что ударяющиеся о стенку молекулы отражаются от нее по зеркальному закону и без изменения модуля скорости. В частности, если до удара молекула двигалась вдоль нормали к стенке, то и после удара она движется вдоль той же нормали.

3. «Приближение 1/6». Если газ находится в равновесии, все направления движения молекул равновероятны, ни одному из них нельзя отдать предпочтения перед другими. В каждом направлении перпендикулярно стенке движется 1/6 часть всех молекул газа.

Теперь перейдем к расчету. Сначала определим число молекул, которые падают на часть стенки площадью ΔS за время Δt . При этом сделаем это, считая, что все молекулы движутся с одной и той же скоростью v . За это время до стенки долетят молекулы, находящиеся в объеме цилиндра длиной $v\Delta t$ и площадью основания ΔS , имеющие скорость по направлению к стенке, то есть

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \Delta V = \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S.$$

В этой формуле n – концентрация молекул.

На самом деле все частицы имеют различные скорости. Тогда пусть n_1 – это концентрация молекул, имеющих скорость v_1 , n_2 – то же для частиц, имеющих скорость v_2 и так далее. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{N_i} n_i = n$$

Теперь для получения числа частиц i – того сорта, долетающих до стенки, можно записать

$$\Delta N_i = \frac{1}{6} n_i \Delta V_i = \frac{1}{6} n_i v_i \Delta t \Delta S.$$

Каждая молекула при абсолютно упругом ударе о стенку передает ей импульс $2m_0 v_i$. Тогда импульс, переданный стенке i – тым сортом молекул, будет определяться по формуле

$$\Delta I_i = \frac{1}{3} m_0 n_i v_i^2 \Delta t \Delta S.$$

По определению давление это $p = F_{\perp} / \Delta S$, с другой стороны, $F_{\perp} = \frac{\Delta I_{\perp}}{\Delta t}$ в соответствии с законом сохранения импульса, полученным в механике. Тогда получаем давление газа на стенку сосуда

$$p = \frac{1}{3} m_0 \sum_{i=1}^{N_i} n_i v_i^2 = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle ,$$

где $\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} n_i v_i^2}{n}$ называется квадратом среднеквадратичной скорости молекул. Назовем

величину $m_0 \langle v^2 \rangle / 2$ средней энергией поступательного движения молекул $\langle E_{\text{пост}} \rangle$. Получаем еще одну формулу для давления газа на стенку сосуда:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle .$$

II.4 Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

Любое тело может участвовать в трех видах механического движения: поступательном, вращательном и колебательном. Для описания каждого из этих движений необходимо задать некоторое количество координат и следить за их изменением. Исходя из этого, определим число степеней свободы любого тела как минимальное количество координат, необходимое для описания механического движения тела. Материальная точка имеет 3 степени свободы (поступательные). Двухатомная молекула имеет 6 степеней свободы (3пост+2вращ+1кол), трехатомная – 9(3+3+3) ... Теперь необходимо ответить на вопрос: эквивалентны ли различные степени свободы с точки зрения энергии?

Из сравнения двух формул $p=nkT$ и $p = \frac{2}{3}n \langle E_{\text{пост}} \rangle$ следует, что $\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2}kT$, где $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа. Таким образом, получила подтверждение мысль о том, что абсолютная температура T – это количественная мера теплового движения молекул. С другой стороны, ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимуществ перед другой. Поэтому на каждую поступательную степень свободы приходится в среднем $\frac{1}{2}kT$. Что касается вращательного движения, то для этих степеней свободы существует закон равнораспределения энергии по степеням свободы:

На каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

Но! Если молекула не одноатомная, то в ней возможны колебания атомов. При колебаниях средняя потенциальная энергия молекулы равна средней кинетической энергии и поэтому колебания как вид механического движения в два раза более энергоёмкие. Итак, на колебательную степень свободы приходится в среднем kT . Теперь запишем среднюю энергию молекулы, включающую все виды возможного механического движения:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2}kT, \text{ где } i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

Для возбуждения колебательных степеней свободы необходима высокая температура. При нормальных условиях колебательные степени свободы не возбуждены.

II.5 Внутренняя энергия термодинамической системы. Работа в термодинамике.

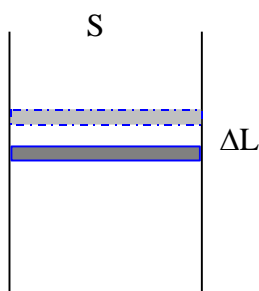
Внутренняя энергия (ВЭ) какого-либо тела U складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движения молекул, потенциальной и кинетической энергии их колебательного движения, потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой и собственной энергии молекул (связанной, например, с массой). Кинетическая энергия тела как целого и потенциальная энергия тела во внешнем поле во внутреннюю энергию не входит. Как и потенциальная энергия ВЭ определена с точностью до произвольной константы.

Свойства внутренней энергии системы тел:

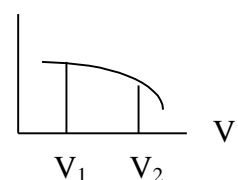
- 1) Внутренняя энергия – аддитивна. ВЭ системы тел состоит из ВЭ каждого тела в отдельности и энергии взаимодействия между ними. Энергия взаимодействия в основном связана с взаимодействием тонких приповерхностных слоев тел и много меньше ВЭ каждого из тел в отдельности. Поэтому можно сказать, что ВЭ есть величина аддитивная, то есть ВЭ системы равна сумме ВЭ тел в отдельности: $U_{\text{сист}} = U_1 + U_2$.
- 2) ВЭ является функцией состояния. Это значит, что она зависит только от параметров состояния системы в данный момент времени, но не от истории ее развития. А форма перехода из одного состояния в другое не важна.

Формулу для расчета внутренней энергии идеального газа можно записать так:

$$U_{\text{ид.газ}} = N \cdot \langle E \rangle = N \cdot \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2} \nu RT.$$



Теперь рассмотрим понятие работы, ограничиваясь случаем взаимодействия газа с каким-либо другим объектом. Для этого рассмотрим газ в цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем. Пусть газ начал медленно (обратимо) расширяться, и переместил поршень на малое расстояние ΔL . При этом давление газа можно считать неизменным (в силу малости изменения объема газа). Газ действует на поршень силой $F = p \cdot S$ и совершает при этом работу $\Delta A' = F \cdot \Delta L = p \cdot S \cdot \Delta L = p \cdot \Delta V$, где ΔV –



изменение объема газа. Тогда $dA' = p \cdot dV$. Эта формула справедлива в любом случае (то есть, применима всегда). Принято считать, что при расширении газ совершает положительную работу, при сжатии – отрицательную. Если же процесс идет при заметном изменении объема от V_1 до V_2 , то работу можно определить интегрированием:

$$A'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Изобразим такой процесс на графике зависимости $p = f(V)$. Площадь под кривой численно равна работе газа.

II.6 I начало термодинамики.

Перейдем к закону сохранения энергии в молекулярной физике – I началу термодинамики. Изменение ВЭ системы может происходить за счет двух процессов: совершение над системой работы и передачи системе энергии без совершения работы (то есть в немеханической форме). Во втором случае говорят о передаче энергии в виде *теплоты*. Теплота Q , следовательно, должна



измеряться в тех же единицах, что и работа – $[Q] = \text{Дж}$. Поэтому $U_2 - U_1 = Q + A$. В этой формуле A – работа, совершаемая внешними силами над системой; она связана с работой самой системы формулой $A = -A'$. Физическая природа теплопередачи

заключается в том, что более нагретое тело состоит из частиц, имеющих большие в среднем импульсы. Поэтому они действуют на менее нагретые и передают им часть своего импульса, за счет чего средняя скорость их теплового движения увеличивается. Кроме того, энергия может быть передана за счет излучения.

Количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.

$$Q = U_2 - U_1 + A'$$

Это и есть одна из формулировок первого начала термодинамики. Другая формулировка:

Невозможен вечный двигатель первого рода, то есть такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая извне энергия.

Для элементарных процессов $\delta Q = dU + \delta A'$. Значком δ отмечен тот факт, что Q и A' не являются функциями состояния, а зависят от вида процесса перехода из одного состояния в другое, а именно

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1; \int_1^2 dA' = A'_{12} \text{ и } \int_1^2 dQ = Q_{12}$$

и первый интеграл не зависит от пути перехода, а остальные зависят.

II.7 Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа.

Способность тел принимать теплоту характеризуется теплоемкостью. Теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить этому телу для того, чтобы температура тела повысилась на один Кельвин. Запишем формулу, соответствующую этому определению:

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Кроме этой величины различают удельную и молярную теплоемкости. Удельной теплоемкостью называется теплоемкость единицы массы вещества (в системе СИ – килограмма). Молярной теплоемкостью называют теплоемкость одного моля вещества.

$$c_{\text{уд}} = \frac{C_{\text{тела}}}{m}; C = \frac{C_{\text{тела}}}{\nu}.$$

Теплоемкость тел зависит от условий, при которых изменяется их температура. Поэтому молярная теплоемкость тел при изопрцессах различна и обозначается специальными символами. C_V – молярная теплоемкость при изохорическом процессе. C_P – молярная теплоемкость при изобарическом процессе.

1). Рассмотрим изохорический процесс. Так как объем тела не меняется, то механическая работа не совершается. Поэтому полученное тепло идет на изменение внутренней энергии тела. Отсюда следует, что

$$C_V = \left(\frac{\partial U_M}{\partial T} \right)_V.$$

Опытным путем было установлено, что у газов, близких по своим свойствам к идеальным, теплоемкость при постоянном объеме в широких температурных пределах не зависит от температуры. Поэтому можно записать

$$dU_M = C_V dT.$$

Тогда внутренняя энергия одного моля идеального газа может быть записана так:

$$U_M = C_V T.$$

Внутренняя энергия величина аддитивная, поэтому для произвольной массы газа m внутренняя энергия будет записываться так:

$$U = \frac{m}{M} C_V T.$$

2). Теперь рассмотрим процесс, происходящий при постоянном давлении ($p = \text{Const}$). Согласно первому началу термодинамики можно записать для одного моля газа

$$\Delta Q_M = dU_M + dA' = dU_M + p dV_M.$$

Из этой формулы можно получить выражение для молярной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении:

$$C_P = \left(\frac{\partial Q_M}{\partial T} \right)_P = \frac{dU_M}{dT} + \frac{p dV_M}{dT} = C_V + p \left(\frac{\partial V_M}{\partial T} \right)_P.$$

Используя уравнение состояния идеального газа $PV_M = RT$ для расчета, получаем

$$C_P = C_V + R.$$

Эта формула носит название формулы Майера.

Отношение теплоемкостей является визитной карточкой любого газа и приводится в справочных таблицах $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$. Через эту величину можно выразить молярную теплоемкость и внутреннюю

энергию идеального газа:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{i}{2} R; U_M = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV_M}{\gamma - 1}. \text{ И так, } U = \nu \frac{R \cdot T}{\gamma - 1} = \nu \cdot C_V \cdot T.$$

II.8 Уравнение адиабаты идеального газа.

Рассмотрим, как будет вести себя идеальный газ при различных процессах. Рассматриваться будут только обратимые процессы. В этом случае можно использовать в качестве уравнения состояния уравнение Менделеева – Клайперона:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Среди всех процессов, которые могут происходить с газами постоянной массы, есть группа процессов, которые называются *изопрцессами*. В этих процессах один из параметров состояния идеального газа остается неизменным. Названия этих процессов приведены ниже:

1) изохорический процесс ($V = \text{Const}$); $\frac{P}{T} = \text{Const}$.

2) изобарический процесс ($p = \text{Const}$); $\frac{V}{T} = \text{Const}$.

3) изотермический процесс ($T = \text{Const}$); $pV = \text{Const}$.

Одним из процессов, которые могут происходить с идеальным газом, является такой, при котором газ не обменивается теплом с окружающей средой. Такой процесс называется *адиабатическим* процессом. Получим уравнение, определяющее адиабатический процесс. Первое начало термодинамики для любого элементарного процесса выглядит так:

$$\delta Q = dU + dA' = dU + pdV = d\left(\frac{m}{M}C_v T\right) + pdV.$$

Для адиабатического процесса $\delta Q = 0$ и после несложных преобразований можно получить

$$\frac{C_p}{C_v} pdV = -Vdp.$$

Обозначим отношение теплоемкостей буквой γ и проведем интегрирование этого уравнения. В результате получаем уравнение адиабатического процесса в параметрах (p, V):

$$pV^\gamma = \text{Const}.$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона. Можно получить уравнение адиабаты в координатах (T, V):

$$TV^{\gamma-1} = \text{Const}.$$

Сравним изотермический и адиабатический процессы графически. Для этого вычислим производные dp/dV в одной точке (p, V) для обоих процессов. Несложные расчеты дают

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \text{ - для изотермы;}$$

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} \text{ - для адиабаты.}$$

Таким образом, наклон касательной к кривой больше у адиабаты, что и отражено на рисунке.

II.9 Политропические процессы.

Политропическими называются процессы, в ходе которых теплоемкость тел, участвующих в процессе, остается неизменной. Кроме того, если речь идет о газе, то масса газа не должна изменяться в ходе процесса. Получим уравнение такого процесса и формулу, по которой можно определить теплоемкость газа при политропических процессах. Для этой цели мы можем использовать I начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа. Запишем закон сохранения энергии для элементарного теплового процесса $\delta Q = dU + dA'$, и учтем определение теплоемкости: $\delta Q = \nu C dT$. После подстановки получим

$$\frac{m}{M} C dT = \frac{m}{M} C_v dT + pdV \text{ или } \frac{m}{M} (C - C_v) dT = pdV$$

Продифференцируем уравнение Менделеева-Клайперона $\frac{m}{M} R dT = dpV + pdV$ и подставим

полученный результат в предыдущее уравнение

$$(C - C_v)(dpV + pdV) = RpdV.$$

После несложных вычислений получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{C - C_p}{C - C_v}\right) \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получаем уравнение политропы:

$$pV^n = \text{Const},$$

где буквой n обозначена постоянная для этого процесса величина, называемая постоянной политропы,

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}.$$

Из последней формулы, используя формулу Майера, можно выразить молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе

$$C = \frac{nC_v - C_p}{n - 1} = \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{n - 1} \right) R.$$

В таблице приведены известные основные политропические процессы.

	n	C
Изобарический процесс	0	C_p
Изотермический процесс	1	∞
Адиабатический процесс	γ	0
Изохорический процесс	∞	C_v

II.10 Работа газа при политропических процессах.

Как уже отмечалось, работа, совершаемая идеальным газом, не является функцией состояния. Поэтому в ходе различных процессов будет совершаться различная работа. Общая формула, полученная ранее, дает возможность рассчитать работу, совершаемую идеальным газом:

$$A'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

1) При изохорическом процессе объем, занимаемый газом, не изменяется, поэтому газ работы не совершает.

2) При изобарическом процессе давление не изменяется и расчет легко дает

$$A'_{12} = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T.$$

3) При изотермическом процессе можно выразить давление газа через постоянную в этом процессе температуру. Формула для работы в этом процессе такова:

$$A'_{12} = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

4) При расчете работы при адиабатическом процессе используем уравнение адиабаты $pV^n = \text{Const}$ в виде $p_1 V_1^\gamma = p V^\gamma$. Тогда

$$A'_{12} = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{m}{M} \frac{RT}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right).$$

5) При произвольном политропическом процессе в полученной формуле надо γ заменить на n :

$$A'_{12} = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right) = \frac{m}{M} \frac{RT}{n - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right).$$

II.11 Классическая теория теплоемкости идеального газа.

Согласно классической термодинамике, средняя кинетическая энергия произвольной молекулы определяется по формуле: $\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT$, где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$ – число степеней свободы молекулы. Молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой, поэтому потенциальной энергии у молекул такого газа нет. Следовательно, внутренняя энергия идеального газа может быть определена по формуле (N – число молекул газа):

$$U = N \langle E \rangle = \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} \nu RT.$$

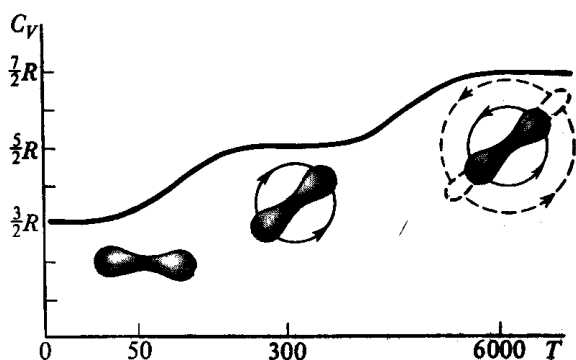
Тогда для молярной теплоемкости идеального газа классическая термодинамика дает такие формулы:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q_M}{dT} \right)_V = \frac{i}{2} R = \frac{R}{\gamma - 1} ; \quad C_P = C_V + R = \frac{i + 2}{2} R = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Отметим основную особенность полученных формул: теплоемкости идеального газа **от температуры не зависят**. В таблице даны значения теплоемкостей и показателей адиабаты для различных газов.

Состав газа	молекул	Число степеней свободы			C_V/R	C_P/R	γ
		поступательные	вращательные	колебательные			
одноатомные		3	0	0	3/2	5/2	1.67
двухатомные жесткие		3	2	0	5/2	7/2	1.40
двухатомные упругие		3	2	1	7/2	9/2	1.26
трехатомные жесткие		3	3	0	6/2	8/2	1.33

Приведенные формулы дают хорошее согласие с экспериментом для одноатомных и многих двухатомных газов, находящихся в условиях близких к нормальным. Однако для молекулы Cl_2 теплоемкость оказывается примерно равной $6/2R$. Для трехатомных молекул совпадений с теорией меньше, чем отклонений от нее. Возьмем для примера молекулу водорода H_2 .



Для такого газа теплоемкость C_V должна быть равна либо $5/2R$, либо $7/2R$, но не должна зависеть от температуры. На практике это не так. Зависимость теплоемкости водорода приведена на рисунке. При низкой температуре его

теплоемкость равна $3/2R$, при комнатной температуре она уже равна $5/2R$, а при очень высоких температурах становится равной $7/2R$. Таким образом, молекула водорода ведет себя при низкой температуре как точечная частица, у которой отсутствуют внутренние движения, при нормальной температуре – как жесткая гантель и наряду с поступательным движением также совершает вращательные движения, а при очень высокой температуре к этим движениям добавляются также колебательные движения атомов, входящих в молекулу. Дело происходит, как будто благодаря изменению температуры включаются (или выключаются) различные степени свободы: при малой температуре включены лишь поступательные степени свободы, затем при повышении температуры возбуждаются вращательные, а затем и колебательные степени свободы.

Однако переход от одного режима движения к другому происходит не скачком при определенной температуре, а постепенно в некотором интервале температур. Это объясняется тем, что при определенной температуре возникает лишь возможность перехода молекул в другой режим движения, но эта возможность не реализуется сразу всеми молекулами, а лишь их частью. По мере изменения температуры все большая доля молекул переходит в другой режим движения, и поэтому кривая теплоемкости изменяется плавно в некотором интервале температур.

Объяснить зависимость теплоемкости газов от температуры классической теории не удалось. Такое объяснение может дать только квантовая физика.

Тема II.2 Статистическая физика.

II.12 Основные положения теории вероятности.

Для начала рассмотрим задачу о движении молекулы газа, находящегося в объеме V . В этом объеме выделим малую часть V_0 и поставим следующий вопрос: когда данная молекула окажется в выделенном объеме? Ответить на этот вопрос точно невозможно. Столкновения между частицами происходят нерегулярно, и предсказать результат столкновения невозможно. В таком случае говорят, что поведение молекулы носит случайный характер, а положение частицы является случайной величиной. Математический аппарат для изучения таких величин называется теорией вероятности.

Определение вероятности. Основу статистической физики составляет теория вероятностей. Вероятность интересующего нас события характеризуется кратностью его повторения. Если в N случаях i -е событие происходит N_i раз, то вероятностью P_i этого события называют величину

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

Так как на практике N всегда конечно, то для вычисления вероятности стараются, чтобы N и N_i были достаточно большими. Тогда можно считать, что

$$P_i = \frac{N_i}{N}$$

Ясно, что сумма вероятностей всех возможных результатов измерений равна единице:

$$\sum P_i = \sum \frac{N_i}{N} = 1$$

Применительно к СМЧ (например, идеальный газ) понятие вероятности события можно проиллюстрировать следующим образом. Выберем одну молекулу. Будем следить за ней, фиксируя через определенные моменты времени энергию ее вращения, которая изменяется как дискретная величина. Тогда вероятность того, что у молекулы эта величина будет при следующем измерении иметь определенное значение (E_1) определится по формуле $P_{E_1} = \frac{N_{E_1}}{N}$.

Такую вероятность назовем временной вероятностью. Но можно поставить эксперимент по-другому. Одновременно зафиксировать у всех молекул энергию вращения и определить вероятность как отношение числа молекул, имеющих выбранное значение энергии вращения, к полному числу молекул. Согласно эргодической гипотезе, определенные таким образом вероятности равны друг другу.

Теперь обратимся к вычислению вероятностей *сложных событий*. Рассмотрим две основные теоремы: о сложении и умножении вероятностей. Проще всего это понять с помощью игрального кубика. Дадим определение независимых событий: события A и B независимы, если исход первого события никак не влияет на исход события второго.

1. *Теорема о сложении вероятностей* заключается в том, что вероятность того, что в результате N бросаний кубика выпадет i или k , равна сумме вероятностей отдельных независимых событий (значком \cup обозначается слово *или*)

$$P(i \cup k) = \frac{N_i + N_k}{N} = P_i + P_k$$

2. *Теорема об умножении вероятностей.* Найдем вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадет последовательно i и k (или наоборот). Рассмотрим N двойных бросаний. Пусть первый кубик из каждой пары бросков дал i в N_i случаях (так что $P_i = N_i/N$). Теперь выделим из этих N_i случаев те N_k случаев, когда второй кубик давал k (так что $P_k \approx N_k/N_i$). Искомая вероятность (значком \cap обозначается слово и)

$$P(i \cap k) = \frac{N_i}{N} \frac{N_k}{N_i} = P_i P_k.$$

Средние значения случайных величин. Зная вероятности появления различных результатов измерения дискретной величины x , можно найти их среднее значение $\langle x \rangle$. По определению среднего

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum N_i x_i = \sum P_i x_i$$

Функция распределения. Рассмотрим случай, когда случайная величина x имеет *непрерывный* характер (например, скорости молекул). Для этого разобьем всю область изменения x на отдельные интервалы, и будем считать число попаданий случайной величины в тот или иной интервал. Интервалы должны быть во избежание заметных флуктуаций достаточно большими, чтобы в каждом интервале число попаданий было $N_i \gg 1$ и чтобы с помощью формулы $P_i = \frac{N_i}{N}$

можно было определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал. Вместе с тем, интервалы должны быть достаточно небольшими, чтобы более детально характеризовать распределение величины x .

Итак, мы имеем достаточно большое число достаточно небольших интервалов и, допустим, нам известна вероятность ΔP_x попадания нашей случайной величины в тот или иной интервал Δx . Сама величина ΔP_x весьма мала, поэтому в качестве характеристики случайной величины берут отношение $\Delta P_x / \Delta x$, которое для достаточно малых Δx не зависит от величины самого интервала Δx . Это отношение при $\Delta x \rightarrow 0$ называют *функцией распределения* $f(x)$ случайной величины x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = \frac{dP_x}{dx}$$

Видно, что функции распределения $f(x)$ можно приписать смысл *плотности вероятности*, т.е. вероятности интересующей нас величины оказаться в единичном интервале вблизи значения x . В разных случаях функция распределения имеет совершенно разный вид. Вероятность того, что случайная величина x окажется в пределах интервала $(x, x + dx)$:

$$dP_x = f(x) \cdot dx$$

Вероятность того, что величина x попадает в интервал (a, b) :

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Ясно, что вероятность того, что величина x может принять хотя бы какое-нибудь значение (достоверное событие), равна единице. Это называют *условием нормировки*:

$$\int f(x) dx = 1$$

где интегрирование производится по всему интервалу возможных значений величины x . Из этого условия следует, что вся площадь под кривой $f(x)$ равна единице.

Средние значения. Среднее значение величины x можно найти, зная ее нормированную на единицу функцию распределения $f(x)$. Обратимся к формуле вычисления среднего значения дискретной величины. Она справедлива и для случая, когда интервал изменения величины x будет разбит на небольшие участки. Уменьшая участки, мы должны, в конце концов, заменить P_i на dP и Σ - на интеграл \int . Тогда

$$\langle x \rangle = \int x dP = \int x f(x) dx$$

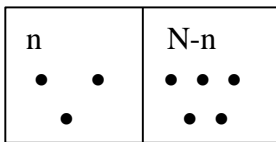
где интегрирование проводится по интересующему нас интервалу значений x . Аналогичные формулы справедливы для любой функции $f(x)$, например,

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx .$$

II.13 Понятия микросостояний и макросостояний.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц, находящуюся в объеме V . Чтобы полно описать состояние этой системы, необходимо указать координаты и скорости всех N частиц. Такое описание системы называется микроописанием, а описываемое состояние – микросостоянием. Микросостояние системы, таким образом, характеризуется заданием $3N$ координат и $3N$ скоростей частиц системы.

Можно, однако, характеризовать систему другими величинами: числом частиц N , энергией системы E , связанной с ней температурой T , объемом V и давлением p и изучать зависимость от времени этих величин. Такое описание системы называется макроописанием, а состояние – макросостоянием.



Найдем связь между микро- и макро- описаниями системы. Эта связь может быть получена на языке вероятности. Выведем формулу, связывающую вероятности микро- и макро- состояний системы, на простом примере: N частиц размещаются по двум половинам сосуда. В задачу входит нахождение вероятностей того или иного распределения частиц. Вероятность одной частице попасть в любую

половину равна $p_0 = 1/2$, а вероятность не попасть в выбранную половину равна тоже $(1 - p_0) = 1/2$. Попадание частиц в сосуд являются независимыми событиями, поэтому вероятность того, что в левой половине сосуда окажется n частиц (на рисунке слева их 3), а в правой окажется $N-n$ частиц (на рисунке справа их 5) будет равна

$$P_{\text{МИКРО}} = p_0^n \cdot (1 - p_0)^{N-n} = \frac{1}{2^N} .$$

Эта величина и есть вероятность микросостояния для данного случая. Поскольку каждую частицу можно пронумеровать, то перестановка частиц внутри одной половинки дает новое микросостояние, но макросостояние при этом остается тем же. Это значит, что одно макросостояние может быть реализовано различными способами (различными микросостояниями).

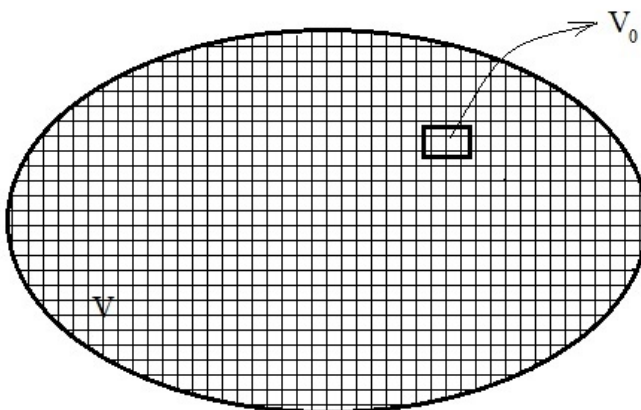
Число таких микросостояний системы называется **статистическим весом** и обозначается буквой Ω . Для вычисления статистического веса данного микросостояния *комбинаторика* дает формулу (величина $N! = N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot 1$ называется в математике факториалом):

$$\Omega(n, N) = \frac{N!}{n!(N - n)!} .$$

Теперь можно записать формулу для вероятности макросостояния системы из N частиц:

$$P_{\text{МАКРО}} = \Omega(n, N) \cdot P_{\text{МИКРО}} = \frac{N!}{n!(N - n)!} p_0^n \cdot (1 - p_0)^{N-n} .$$

Вернемся к системе, состоящей из N частиц, находящейся в объеме V . Найдем вероятность того, что в выделенном объеме V_0 окажется n частиц, а в оставшейся части – $N - n$ частиц. Разделим весь объем V на N_V одинаковых очень малых объемов ΔV . Вероятность попадания частицы в



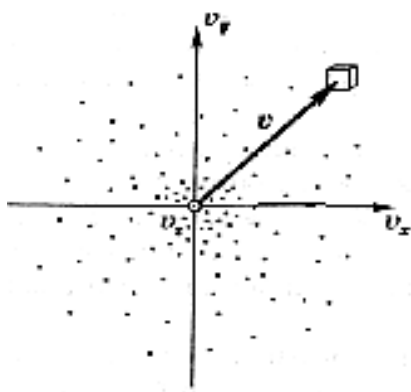
такой объем равна $1/N_v = \Delta V/V$. Вероятности попадания частиц в различные части (одинаковые) объема равны. Вероятность частице попасть в объем V_0 , следовательно, равна V_0/V . Поэтому, для искомой вероятности получаем

$$P_{\text{МАКРО}} = \Omega(n, N) \cdot P_{\text{МИКРО}} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p_0^n \cdot (1-p_0)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)^{N-n}.$$

Это распределение называется биномиальным.

II.14 Распределение Максвелла (проекция скорости).

Первая из функций распределения, которая будет рассмотрена, - функция распределения молекул газа по скоростям. Закон распределения молекул по скоростям для равновесного состояния газа был получен Максвеллом. Рассмотрим газ, находящийся в объеме V при температуре T в состоянии термодинамического равновесия. В координатном пространстве



каждая молекула отображается точкой, которая со временем будет изменять свое положение из-за теплового движения молекул. Представим себе *пространство скоростей* с декартовой системой координат, по осям которой отложены значения проекций скоростей молекул v_x, v_y, v_z . Тогда в этом пространстве значению скорости отдельной молекулы будет соответствовать точка, в которую будет упираться конец вектора \vec{v} . Такая точка называется изображающей точкой. Частица, движущаяся с постоянной скоростью, будет иметь неподвижную изображающую точку в пространстве скоростей. Из-за столкновений молекул положение точек будет меняться, но их распределение в целом будет оставаться неизменным (термодинамическое равновесие). Вследствие равноправности

всех направлений движения расположение точек относительно начала координат будет сферически симметричным. Поэтому плотность точек может зависеть только от модуля скорости v .

Итак, пусть макросистема (газ) содержит N молекул. Выделим в некоторой точке - конце вектора \vec{v} - малый объем d^3v (на рисунке ось v_z направлена на нас). Относительное число точек (молекул) в этом объеме, или другими словами, вероятность dP того, что скорость молекулы, т.е. конец вектора \vec{v} , попадет в этот объем, можно записать так:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v) \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z,$$

где $f(v)$ имеет смысл *объемной плотности вероятности*.

Вероятность же того, что молекула (точка) будет иметь проекции скорости в интервале (v_x, v_x+dv_x) , есть

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \varphi(v_x) \cdot dv_x,$$

где $\varphi(v_x)$ - функция распределения по v_x . Последнее выражение - это по существу интеграл от предыдущего по dv_y и dv_z , т.е. относительное число молекул (точек) в тонком плоском слое от v_x до $v_x + dv_x$

Вероятности того, что молекула имеет проекции скорости в интервалах (v_x, v_x+dv_x) , (v_y, v_y+dv_y) , и (v_z, v_z+dv_z) , являются независимыми, поэтому в соответствии с теоремой об умножения вероятностей независимых событий можно записать

$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z.$$

Из соображения равноправия осей v_x, v_y и v_z ясно, что функции φ должны одинаковым образом зависеть от соответствующих проекций скоростей. Анализируя предыдущие формулы, находим $f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z)$. Положительные и отрицательные направления координатных осей в газе

эквивалентны. Поэтому должно быть $\varphi(v_x) = \varphi(-v_x)$. Значит, функция φ может зависеть только от модуля или, что то же самое, от квадрата скорости v_x . Точно так же ввиду изотропии газа, функция f может зависеть только от квадрата полной скорости v , но не от ее направления. Вместо квадратов скоростей удобнее взять в качестве аргументов соответствующие кинетические энергии: $E_x = m v_x^2/2$, $E_y = m v_y^2/2$, $E_z = m v_z^2/2$, $E = mv^2/2 = E_x + E_y + E_z$. При переходе к новым аргументам сами функции условимся обозначать прежними буквами φ и f , хотя это - аналитически совсем другие функции. Необходимое нам уравнение запишется в виде

$$\varphi(E_x)\varphi(E_y)\varphi(E_z) = f(E_x + E_y + E_z),$$

причем оно справедливо, каковы бы ни были (положительные) значения аргументов E_x , E_y , E_z . Этим уравнением и определится вид функции φ , а с ней и функции f . Действительно, рассмотрим такие изменения аргументов E_x , E_y , E_z , которые удовлетворяют двум условиям:

1) $E_z = \text{const}$, 2) $E_x + E_y = \text{const}$. При таких условиях исходное уравнение все еще остается верным. Из него следует, что

$$\varphi(E_x)\varphi(E_y) = \text{const при условии } E_x + E_y = \text{const}.$$

Логарифмируя, а затем, дифференцируя первое соотношение, получим

$$\frac{\varphi'(E_x)}{\varphi(E_x)} dE_x + \frac{\varphi'(E_y)}{\varphi(E_y)} dE_y = 0$$

при условии $dE_x + dE_y = 0$. Отсюда

$$\frac{\varphi'(E_x)}{\varphi(E_x)} = -\frac{\varphi'(E_y)}{\varphi(E_y)}.$$

При выводе предполагалось, что изменения аргументов E_x и E_y связаны условием $E_x + E_y = C = \text{const}$. Однако значения постоянной C , а с ней и аргументов E_x и E_y могут быть какими угодно. Поэтому условие $E_x + E_y = \text{const}$ фактически не накладывает никаких ограничений на значения, которые могут принимать аргументы E_x и E_y . Значит, в предыдущем соотношении E_x и E_y могут независимо принимать любые значения. Но слева стоит функция только E_x , а справа - только E_y . Равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда отношения $\varphi'(E_x)/\varphi(E_x)$ и $\varphi'(E_y)/\varphi(E_y)$ равны одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную через α , получим

$$\frac{\varphi'(E_x)}{\varphi(E_x)} = \frac{\varphi'(E_y)}{\varphi(E_y)} = -\alpha, \text{ или } \frac{d\varphi(E_x)}{\varphi(E_x)} = -\alpha dE_x.$$

Интегрирование дает

$$\varphi(E_x) = A_1 e^{-\alpha E_x}, \varphi(E_y) = A_1 e^{-\alpha E_y}, \varphi(E_z) = A_1 e^{-\alpha E_z},$$

где величина A_1 - это новая постоянная, значение которой будет определено ниже. Что касается постоянной α , то она должна быть положительной, так как в противном случае $\varphi(E_x)$ неограниченно возрастала бы при неограниченном возрастании кинетической энергии E_x , что физически невозможно.

Для функции распределения $f(E) = f(E_x + E_y + E_z)$, из предыдущих формул получаем $f(E) = A e^{-\alpha E}$, причем $A = A_1^3$. Эта формула, отличающаяся исключительной простотой, и выражает максвелловский закон распределения скоростей. Для того чтобы придать ему окончательный вид, необходимо еще определить постоянные A и α . Для этого проще начать не с функции f , а с функции φ . Последняя функция в зависимости от скорости v_x представлена на рисунке. Площадь элементарной полоски, заштрихованной на рисунке, дает вероятность того, что x -составляющая скорости молекулы лежит внутри интервала $(v_x, v_x + dv_x)$, а умноженная на N , она дает вероятное число молекул со скоростями в том же интервале. Функция $\varphi(E_x)$ должна быть нормирована условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x) dv_x = A_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right) dv_x = 1.$$

Переходя к новой переменной $\zeta = \sqrt{\frac{\alpha m v_x^2}{2}}$ и используя табличное значение интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta = \sqrt{\pi}, \text{ получаем значение постоянной } A_1 = \sqrt{\frac{\alpha m}{2\pi}}.$$

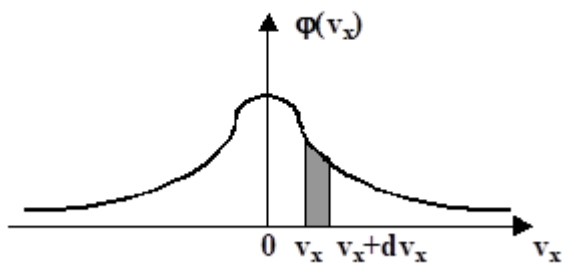
Для нахождения постоянной α

необходимо использовать теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы: $\langle E_x \rangle = kT/2$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, получим уравнение

$$\langle E_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E_x \varphi(E_x) dv_x = \frac{kT}{2} = A_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv_x^2}{2} \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right) dv_x = \frac{A_1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \exp(-\zeta^2) d\zeta = \frac{1}{2\alpha}.$$

Для α получаем значение $\alpha = 1/(kT)$.

Таким образом, мы получили окончательный вид функции распределения молекул газа по проекции скорости на выбранную ось:



$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right),$$

$$\varphi(v_y) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right),$$

$$\varphi(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

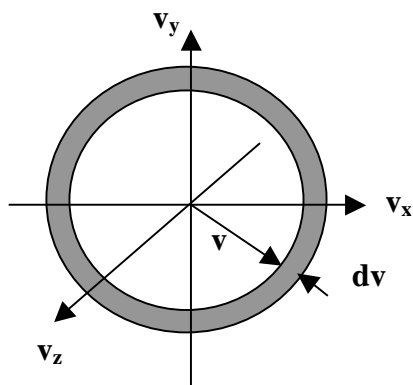
И тогда $f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$.

График функции $\varphi(v_x)$ изображен на рисунке. Площадь тонированной полоски на рисунке - это вероятность того, что проекция скорости молекулы лежит в интервале $(v_x, v_x + dv_x)$. Данная функция нормирована на единицу, т.е. площадь под кривой $\varphi(v_x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1.$$

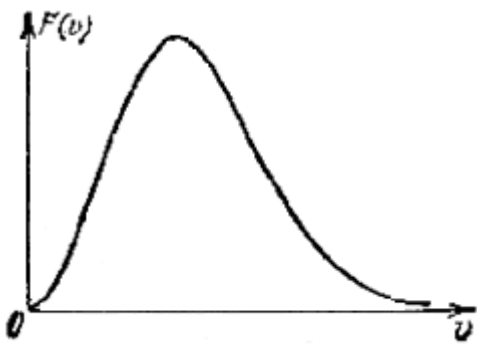
Интегрирование, проводимое в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, не означает, что в газе есть молекулы с такими большими скоростями. Это следует рассматривать только как вычислительный прием. Молекул с весьма большими скоростями очень мало, и они практически не вносят никакого вклада в нормировочный интеграл. Это и позволяет записывать такие пределы.

II.15. Распределение Максвелла (модуль скорости).



Получим распределение молекул по модулю скорости. Найдем вероятность или относительное число молекул, модуль скорости которых заключен в интервале $(v, v + dv)$. Таким молекулам соответствуют все точки, попадающие в шаровой слой с радиусами v и $v + dv$ (на рисунке изображены в виде кольца). Объем этого слоя равен произведению поверхности слоя на его толщину, т.е. $4\pi v^2 dv$, объемная же плотность вероятности $f(v)$ во всех точках слоя одинакова. Следовательно, согласно теореме сложения вероятностей, вероятность попадания в этот слой $dP = f(v) \cdot 4\pi v^2 dv$.

Величина dP/dv - мы ее обозначим $F(v)$ - характеризует искомую вероятность, т.е. $F(v) = 4\pi v^2 \cdot f(v)$. Используя результаты, полученные ранее, запишем:



$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Эта формула представляет собой закон *распределения Максвелла по модулю скорости*. Вид функции $F(v)$ показан на рисунке. Эта функция тоже нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v) dv = 1.$$

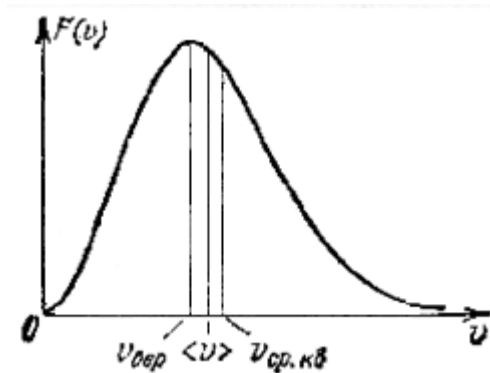
Следует отметить, что полученные Максвеллом распределения по скоростям не зависят ни от структуры молекул, ни от того, как они взаимодействуют друг с другом. Поэтому они применимы не только к газам, но и к другим агрегатным состояниям вещества.

II.16 Характерные скорости распределения молекул по скоростям.

К ним относятся три скорости: наиболее вероятная $v_{\text{вер}}$, средняя $\langle v \rangle$ и среднеквадратичная $v_{\text{кв}}$. *Наиболее вероятной скорости* соответствует максимум функции распределения $F(v)$. Эта скорость определяется из условия $dF/dv = 0$, откуда следует

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Средняя скорость по определению



$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Среднеквадратичная скорость $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$; она находится из условия

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v)dv = \frac{3kT}{m},$$

откуда

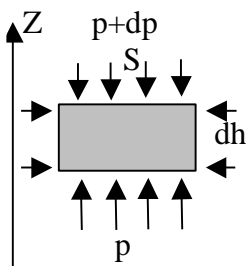
$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Этот результат можно получить и без интегрирования, а как следствие формул

$$\langle E \rangle = \frac{3kT}{2} = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}.$$

II.17. Барометрическая формула.

Рассмотрим земную атмосферу и зададимся целью: определить, как давление воздуха в ней зависит от высоты над поверхностью Земли. При этом ограничимся случаем, когда температура атмосферы не зависит от высоты. Для решения данной задачи выделим в атмосфере физически бесконечно малый объем $dV = dhS$



воздуха и изобразим его на рисунке. На выделенный объем действуют силы со стороны окружающего воздуха, но при этом воздух в этом объеме находится в равновесии. Это означает, что сумма всех сил, действующих на этот воздух, равна нулю. В проекции на вертикальную ось условие равновесия выглядит так:

$$pS - (p + dp)S - dm \cdot g = 0.$$

Используя простую формулу $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot S \cdot dh$, получаем $dp = -\rho \cdot g \cdot dh$. Отметим, что если $dh > 0$, то $dp < 0$. Плотность атмосферного воздуха можно выразить через атмосферное давление в данной точке через уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mgdh}{RT}$$

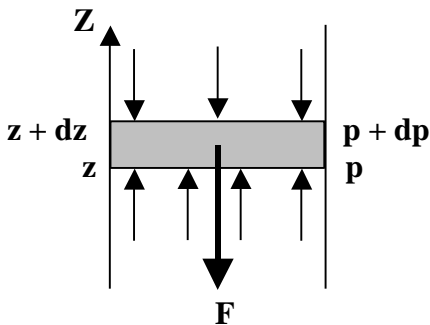
необходимо решить с начальными условиями на поверхности Земли: $h = 0$ и $p = p_0$. В результате получаем *барометрическую формулу*:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

II.18. Распределение Больцмана. Распределение Максвелла-Больцмана.

В отсутствие внешних сил средняя концентрация n молекул газа в состоянии термодинамического равновесия всюду одинакова. Если же газ находится во внешнем силовом поле, ситуация становится иной.

Рассмотрим, например, поведение молекул газа, находящегося под действием силы тяжести. Если бы не было теплового движения, то все молекулы «упали» бы на поверхность Земли. Наличие же теплового движения мешает этому. В результате совместного действия этих двух факторов устанавливается некоторое равновесие, и концентрация молекул становится зависящей



от высоты.

Найдем зависимость концентрации молекул от высоты их, отсчитанной от поверхности Земли. Пусть газ находится во внешнем поле потенциальных (консервативных) сил, действующих для простоты в одном направлении и зависящих только от координаты z (однородное поле). При тепловом равновесии температура T должна быть одинакова по всей толщине газа, иначе бы возникли потоки тепла, и состояние газа не было бы равновесным. Для определенности будем считать, что силы внешнего поля направлены вниз, а ось z -

вверх (смотри на рисунок). Выделим мысленно бесконечно узкий слой газа толщиной dz с площадью основания столба, равной S . Запишем условие равновесия этого слоя, используя гидростатический подход. На слой dz действует направленная вверх сила, обусловленная разностью давлений dp ($dp < 0$), и сила, действующая вниз со стороны внешнего поля. При равновесии должно соблюдаться равенство

$$d\vec{F}_{\uparrow} + \vec{F}_1 \cdot dN = 0 \text{ или}$$

$$dpS = nSdz \cdot F_{1z},$$

где F_{1z} - проекция внешней силы, действующей на каждую молекулу. Заметим, что левая и правая части этого равенства являются отрицательными. Из механики известно, что $\vec{F} = -\nabla U$ и $F_z = -dU/dz$, где U - потенциальная энергия молекулы во внешнем поле. Поэтому предыдущую формулу можно переписать так:

$$dp = -n dU.$$

Считая газ идеальным, т.е. подчиняющимся формуле $p = nkT$, представим левую часть этого равенства в виде $dp = dn kT$. Тогда эта формула примет вид $dn \cdot kT = -n dU$, или

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dU}{kT}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$\ln \frac{n}{n_0} = -\frac{U - U_0}{kT}.$$

Будем считать, что $U_0 = 0$, где $n = n_0$, тогда

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Этот закон и выражает *распределение Больцмана*.

С помощью распределения Больцмана можно найти число молекул в интересующем нас элементарном объеме dV :

$$dN = ndV.$$

При этом следует иметь в виду, что объем dV может иметь, вообще говоря, не любую форму. Обязательным является выполнение условия: во всех точках объема dV концентрация n должна быть одинаковой.

Распределения Максвелла и Больцмана являются составными частями единого распределения, называемого распределением Гиббса (этот вопрос подробно рассматривается в спецкурсах по статистической физике, и мы ограничимся только упоминанием этого факта).

Оба разобранных нами распределения можно объединить в один *закон распределения Максвелла-Больцмана*, согласно которому число dN молекул, проекции скорости которых и их координаты лежат в интервалах

$$(v_x, v_x + dv_x), (v_y, v_y + dv_y), (v_z, v_z + dv_z),$$

$$(x, x + dx), (y, y + dy), (z, z + dz),$$

определяется выражением

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2kT}} dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

$$dP(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = dP(v_x, v_y, v_z) \cdot dP(x, y, z).$$

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2/2 + U}{kT} \right) dv_x dv_y dv_z dx dy dz.$$

В этой формуле $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, а $U = U(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы изучаемой системы во внешнем поле.

II.19. Определение Перреном числа Авогадро (1906 г.).

Распределение Больцмана, то есть распределение частиц во внешнем потенциальном поле, может быть использовано для определения констант, используемых в молекулярной физике. Один из самых важных и знаменитых экспериментов в этой области – это работы Перрена по определению числа Авогадро (1906). Так как молекулы газов не видны даже в микроскоп, то на эксперименте использовались гораздо большие по размеру броуновские частицы. Эти частицы помещались в раствор, в котором на них действовала выталкивающая сила. При этом уменьшалась сила тяжести, действующая на броуновские частицы, и тем самым распределение

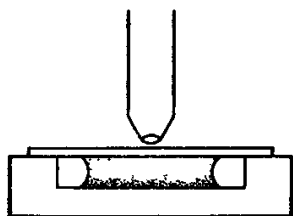


частиц по высоте как бы растягивалось. Это давало возможность наблюдать это распределение в микроскоп.

Одна из трудностей состояла в получении взвешенных частиц совершенно одинакового размера и формы. Перрен пользовался частицами гуммигута и мастики. Растирая гуммигут в воде, Перрен получал эмульсию ярко-желтого цвета, в которой при наблюдении в микроскоп можно было различить множество зернышек сферической формы. Вместо

механического растирания Перрен обрабатывал также гуммигут или мастику спиртом, растворяющим эти вещества. При разбавлении такого раствора большим количеством воды получалась эмульсия из таких же сферических зернышек, что и при механическом растирании гуммигута. Для отбора зернышек совершенно одинакового размера Перрен подвергал

взвешенные в воде частицы многократному центрифугированию и таким путем получал весьма однородную эмульсию, состоящую из шарообразных частиц с радиусом порядка 0,1 микрометра. Обработав 1 кг гуммигута, Перрен получил через несколько месяцев фракцию, содержащую несколько десятков грамм зерен желаемого размера. С этой фракцией и были выполнены описываемые здесь опыты.



При изучении эмульсии надо было производить измерения при ничтожных разностях высот - всего в несколько сотых миллиметра. Поэтому распределение концентрации частиц по высоте исследовалось с помощью микроскопа. К предметному стеклу микроскопа (изображено на рисунке) приклеивалось очень тонкое стекло с просверленным в нем широким отверстием. Таким путем получалась плоская ванночка, высота которой была около 100 мкм (0,1 мм). В центре ванночки помещалась капля эмульсии, которая

тотчас сплющивалась покровным стеклом. Чтобы избежать испарения, края покровного стекла покрывались парафином или лаком. Тогда препарат можно было наблюдать в течение нескольких дней или даже недель. Препарат помещался на столике микроскопа, тщательно установленного в горизонтальном положении. Объектив был очень сильного увеличения с малой глубиной фокуса, так что одновременно можно было видеть только частицы, находящиеся внутри очень тонкого горизонтального слоя с толщиной Δh порядка микрометра. Частицы совершали интенсивное броуновское движение. Фокусируя микроскоп на определенный горизонтальный слой эмульсии, можно было сосчитать число частиц в этом слое. Затем микроскоп фокусировался на другой слой, и снова считалось число видимых броуновских частиц. Таким путем можно было определить отношение концентраций броуновских частиц на разных высотах. Разность высот измерялась микрометрическим винтом микроскопа.

Теперь перейдем к конкретным расчетам. Так как броуновские частицы находятся в поле сил тяжести и Архимеда, то потенциальная энергия такой частицы

$$U = (\rho - \rho')Vgh.$$

В этой формуле ρ - плотность гуммигута, ρ' - плотность жидкости, V - объем частицы гуммигута. Начало отсчета потенциальной энергии выбрано на дне кюветы, то есть при $h = 0$. Распределение Больцмана для такого поля запишем в виде

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{U-U_0}{kT}} = n_0 e^{-\frac{(\rho-\rho')Vgh}{kT}}.$$

Напомним, что n - число частиц в единице объема на высоте h , а n_0 - число частиц в единице объема на высоте $h = 0$.

Число шариков ΔN , видимых в микроскоп на высоте h , равно $n(h)S\Delta h$, где S - площадь видимой части эмульсии, а Δh - глубина резкости микроскопа (в опыте Перрена эта величина составляла 1 мкм). Тогда отношение чисел частиц на двух высотах h_1 и h_2 запишем так:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \exp\left(\frac{(\rho - \rho')Vg(h_2 - h_1)}{kT}\right).$$

Вычислив логарифм от обеих частей равенства и произведя несложные вычисления, получаем значение постоянной Больцмана, а, затем и числа Авогадро:

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{RT \ln\left(\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}\right)}{(\rho - \rho')Vg(h_2 - h_1)}.$$

При работе в различных условиях и с различными эмульсиями Перрен получил значения постоянной Авогадро в диапазоне от $6.5 \cdot 10^{23}$ до $7.2 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Это было одним из прямых доказательств молекулярно - кинетической теории, в справедливость которой в то время верили далеко не все ученые.

II.20 Энтропия.

Бывают состояния системы равновесные и неравновесные. Как их отличать? Ведь такие параметры системы, как E , T , V или N могут быть одинаковыми у двух таких состояний. Поэтому для описания равновесности состояния вводится понятие энтропии. Энтропия непосредственно связана с вероятностью. Ранее мы выяснили, что вероятность макросостояния (в дальнейшем мы будем называть его просто состоянием) пропорциональна его статистическому весу Ω . Поэтому в качестве величины, определяющей вероятность состояния, можно было бы взять сам статистический вес. Однако это неудобно по следующим причинам. Во-первых, статистический вес выражается огромными числами, работать с которыми было бы чрезвычайно затруднительно. Во-вторых, что важнее, статистический вес не обладает свойством аддитивности. Чтобы убедиться в этом, разобьем данную систему на две практически не взаимодействующие подсистемы. Предположим, что эти подсистемы находятся в состояниях со статистическими весами Ω_1 и Ω_2 . Каждое из Ω_1 микросостояний первой подсистемы может реализоваться совместно с каждым из Ω_2 микросостояний второй подсистемы. Всего возможно $\Omega_1\Omega_2$ различных комбинаций микросостояний подсистем, каждая из которых является микросостоянием системы. Следовательно, статистический вес состояния системы $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$. Отсюда следует, что статистический вес не является аддитивной величиной: Ω не равен сумме Ω_1 и Ω_2 . Взяв логарифм от обеих частей предыдущего равенства, получим соотношение

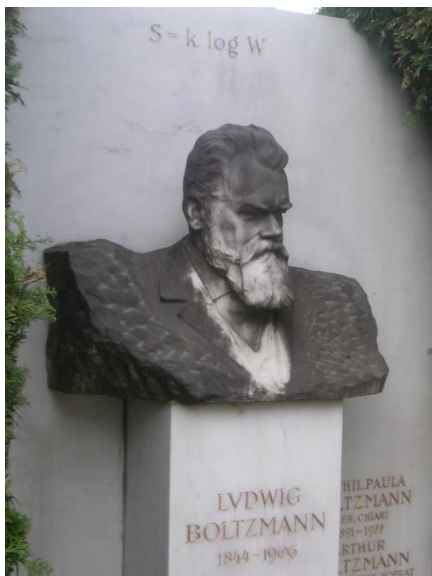
$$\ln\Omega = \ln\Omega_1 + \ln\Omega_2,$$

из которого следует, что логарифм статистического веса - аддитивная величина. Иметь дело с аддитивными величинами много проще и удобнее. В связи с этим в качестве характеристики вероятности состояния системы принимается величина

$$\sigma = \ln\Omega,$$

называемая энтропией системы. Определенная так энтропия используется в теоретической физике, где обычно не приходится иметь дело с числовыми значениями величин. Ниже мы дадим немного отличное определение энтропии, применяемое в экспериментальных работах.

Энтропия является функцией состояния термодинамической системы. Следовательно, она может быть представлена в виде функции параметров состояния, таких как p , V , T и др. Методами статистической физики можно доказать, что из предыдущего определения вытекает следующее соотношение:



$$d\sigma = \frac{\delta Q}{kT} \text{ (обратимый процесс).}$$

Здесь $d\sigma$ - приращение энтропии, обусловленное получением системой в ходе обратимого процесса количества теплоты δQ (напомним, что δQ —алгебраическая величина), k - постоянная Больцмана, T - термодинамическая температура системы. Подчеркнем, что формула справедлива только для обратимых процессов.

Чтобы избавиться в последней формуле от постоянной Больцмана k и сделать числовые значения энтропии более удобными, в экспериментальной физике от величины σ переходят к величине

$$S = k \cdot \ln\Omega,$$

которая также называется энтропией. Определенная таким образом энтропия измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К). В дальнейшем мы будем пользоваться энтропией S .

Термодинамическое определение энтропии S имеет вид

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ (обратимый процесс).}$$

Это соотношение лежит в основе термодинамических применений энтропии.

Из определения S как величины, характеризующей вероятность состояния термодинамической системы, вытекают следующие свойства энтропии:

1. В ходе необратимого процесса энтропия изолированной системы возрастает. Действительно, изолированная (т. е. предоставленная самой себе) система переходит из менее вероятных в более вероятные состояния, что сопровождается увеличением статистического веса, а, следовательно, и функции S .

2. Энтропия изолированной системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна.

Утверждение о том, что энтропия изолированной термодинамической системы может только возрастать либо по достижении максимального значения оставаться постоянной (иными словами, не может убывать), носит название закона возрастания энтропии или *второго начала термодинамики*. С ним связана и невозможность существования вечного двигателя II рода: нет такого устройства, которое могло бы все тепло, поступающее в систему, превращать в работу.

В случае изолированной системы $\delta Q = 0$. Из термодинамического определения энтропии, справедливой только для обратимых процессов, вытекает, что в этом случае $dS = 0$, а, следовательно $S = \text{const}$. Таким образом, в ходе обратимого процесса, протекающего в изолированной системе, энтропия остается постоянной.

Протекание в изолированной системе (т. е. при $\delta Q = 0$) необратимого процесса сопровождается ростом энтропии. Поэтому

$$dS > 0.$$

Если системе сообщается количество теплоты δQ в ходе необратимого процесса, то энтропия получает, кроме приращения $\delta Q/T$, положительное приращение, обусловленное необратимостью процесса. В итоге

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \text{ (необратимый процесс).}$$

Под T в этой формуле подразумевается температура теплового резервуара, от которого данная система получает количество теплоты δQ . Температура системы при необратимом процессе может не иметь определенного значения, потому что состояния системы не являются равновесными. При $\delta Q = 0$ предыдущая формула переходит в неравенство $dS > 0$.

Отсюда следует, что при протекании необратимого процесса в системе, отдающей теплоту внешней среде (при $\delta Q < 0$), энтропия может не только возрастать, но и убывать. Формулы можно объединить в одну формулу:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

в которой знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства - к необратимым процессам. Отметим, что при протекании обратимого процесса в неизолированной системе энтропия может как возрастать (если $\delta Q > 0$), так и убывать (если $\delta Q < 0$).

Состояние, осуществляемое небольшим числом способов, называется упорядоченным или неслучайным. Состояние, осуществляемое многими способами, называется беспорядочным или случайным. Следовательно, энтропия является мерой степени беспорядка в системе. Это обстоятельство поясняет смысл полученных соотношений. Сообщение системе теплоты приводит к усилению хаотического движения молекул и, следовательно, увеличивает степень беспорядка в системе. Чем выше температура, т. е. чем больше внутренняя энергия системы, тем меньшим оказывается относительное возрастание беспорядка, обусловленное сообщением системе данного количества теплоты δQ (тем меньше dS , соответствующее данному δQ).

При абсолютном нуле температуры всякое тело, как правило, находится в состоянии, статистический вес которого равен единице. Согласно формуле $S = k \cdot \ln \Omega$ энтропия в этом случае равна нулю. Отсюда следует, что *энтропия любого тела стремится к нулю при стремлении к нулю температуры*:

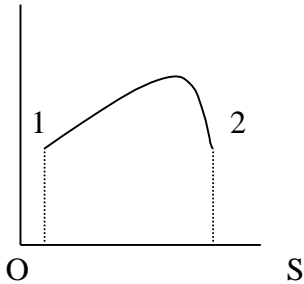
$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Это утверждение называют теоремой Нернста или *третьим началом термодинамики*.

II.21 Энтропия идеального газа.

В соответствии с предыдущими формулами количество теплоты δQ , получаемое термодинамической системой в ходе обратимого процесса, может быть представлено в виде

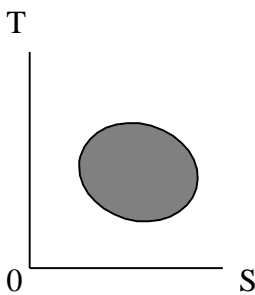
T



$\delta Q = TdS$. Эта формула аналогична формуле $dA' = pdV$ для работы газа, которая также справедлива только для обратимого процесса (иначе параметр состояния p не имел бы определенного значения). Кривая на рисунке изображает обратимый процесс на диаграмме (T, S). Подобно тому, как площадь под кривой на диаграмме (p, V) численно равна работе A_{12} , площадь под кривой на диаграмме (T, S) численно равна количеству теплоты Q_{12} , полученному телом в ходе процесса 1 - 2:

$$Q_{12} = \int_1^2 TdS .$$

В случае изотермического процесса эта формула упрощается следующим образом:



$$Q_{12} = T(S_2 - S_1)$$

В случае кругового процесса, изображенного на рисунке, количество полученной телом теплоты численно равно площади цикла.

Представив в уравнении первого начала термодинамики δQ в виде TdS , а элементарную работу системы в виде pdV , придем к формуле $TdS = dU + pdV$, из которой следует, что

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} .$$

Напишем это соотношение для моля газа, учтя, что в этом случае $U_m = C_V T$, а $p/T = R/V_m$:

$$dS_m = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV_m}{V_m}$$

(индекс «м» указывает, что соответствующие величины относятся к одному молю газа).

Интегрирование этого уравнения дает, что

$$S_m = C_V \ln T + R \ln V_m + S_0,$$

где S_0 - постоянная интегрирования. Мы получили выражение для энтропии моля идеального газа в переменных T и V.

В соотношения, с которыми обычно приходится иметь дело на практике, входят либо изменение (т. е. приращение или убыль) энтропии, либо производные энтропии по параметрам состояния. Постоянная S_0 в эти соотношения не входит.

II.22 Флуктуации.

В этом параграфе будет показано, что средние значения таких величин, как давление p , внутренняя энергия U , число частиц N и др., достаточно точно и полно описывают состояние термодинамической системы. Причем, чем больше число частиц в системе, тем точнее описание. Пусть f - некоторая физическая величина (например, скорость молекулы). Флуктуацией f называется отклонение $\Delta f = f - \langle f \rangle$ мгновенного значения этой величины от среднего ее значения. Ясно, что среднее значения флуктуации f равно нулю:

$$\langle \Delta f \rangle = \int (f - \langle f \rangle) dP = \int f dP - \int \langle f \rangle dP = \langle f \rangle - \langle f \rangle = 0 .$$

Поэтому в качестве характеристики отклонения величин от своих средних значений пользуются средним квадратом флуктуации $\langle(\Delta f)^2\rangle$. Величина $\sqrt{\langle(\Delta f)^2\rangle}$ называется среднеквадратичной флуктуацией, а величина $\sqrt{\langle(\Delta f)^2\rangle}/\langle f\rangle$ – относительной среднеквадратичной флуктуацией.

Получим формулу, связывающую величину относительной среднеквадратичной флуктуации и число частиц в системе N. Для этого сначала получим несколько вспомогательных формул.

Запишем квадратичную флуктуацию $(\Delta f)^2 = f^2 - 2f\langle f\rangle + \langle f\rangle^2$ и вычислим ее среднее значение: $\langle(\Delta f)^2\rangle = \langle f^2\rangle - 2\langle f\rangle\langle f\rangle + \langle f\rangle^2 = \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2$. Получим теперь среднее значение произведения двух флуктуирующих величин:

$$fg = (\langle f\rangle + \Delta f)(\langle g\rangle + \Delta g) = \langle f\rangle\langle g\rangle + \langle f\rangle\Delta g + \langle g\rangle\Delta f + \Delta f\Delta g.$$

$$\langle fg\rangle = \langle f\rangle\langle g\rangle + \langle f\rangle\langle\Delta g\rangle + \langle g\rangle\langle\Delta f\rangle + \langle\Delta f\Delta g\rangle = \langle f\rangle\langle g\rangle + \langle\Delta f\Delta g\rangle.$$

По определению две величины f и g называются статистически независимыми, если $\langle\Delta f\Delta g\rangle = 0$. Для них $\langle f\cdot g\rangle = \langle f\rangle\langle g\rangle$.

Теперь можно рассмотреть систему из N независимых частиц (молекул идеального газа). Пусть f_i – произвольная аддитивная величина (пусть это энергия), характеризующая i – тую частицу. Тогда $F = \sum f_i$ – это сумма всех значений этой величины (полная энергия системы). Ее среднее значение равно $\langle F\rangle = \langle\sum f_i\rangle = N\langle f\rangle$. Далее аналогичные вычисления проведем для F^2 :

$$F^2 = \left(\sum_i f_i\right)^2 = \sum_i f_i^2 + \sum_{i\neq j} f_i f_j ; \langle F^2\rangle = \left\langle\left(\sum_i f_i\right)^2\right\rangle = \sum_i \langle f_i^2\rangle + \sum_{i\neq j} \langle f_i f_j\rangle.$$

Так как все частицы независимы, то $\langle f_i\cdot f_j\rangle = \langle f_i\rangle\langle f_j\rangle = \langle f_i\rangle^2$ и

$$\langle F^2\rangle = \sum_i \langle f_i^2\rangle + \sum_{i\neq j} \langle f_i\rangle^2 = N\langle f^2\rangle + N(N-1)\langle f\rangle^2.$$

В расчетах учтено, что всего N^2 слагаемых в полной сумме и из них N слагаемых с одинаковыми значениями f.

Для среднего значения квадрата среднеквадратичной флуктуации функции F

$$\langle(\Delta F)^2\rangle = \langle F^2\rangle - \langle F\rangle^2 = N\langle f^2\rangle + N^2\langle f\rangle^2 - N\langle f\rangle^2 - N^2\langle f\rangle^2 = N(\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2).$$

Отсюда следует, что относительная среднеквадратичная флуктуация

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta F)^2\rangle}}{\langle F\rangle} = \frac{\sqrt{\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2}}{\langle f\rangle} \frac{1}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Итак, с увеличением числа частиц в системе флуктуации термодинамических величин убывают

обратно пропорционально \sqrt{N} . При больших N (напомним, что в

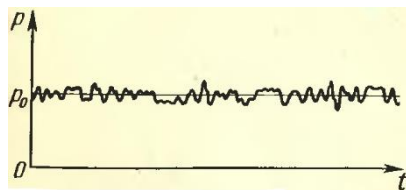
1 см³ воздуха находится 10¹⁹ молекул) относительные флуктуации

ничтожны. Достоверность термодинамических результатов

доказана. В качестве доказательства приведем пример давления в

газе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия.

Как известно, давление создается в результате ударов молекул о



стенку сосуда с газом. Эти удары носят случайный характер, в результате чего давление

испытывает флуктуации. Казалось бы, что эти флуктуации должны быть заметны, но полученная

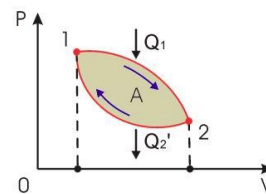
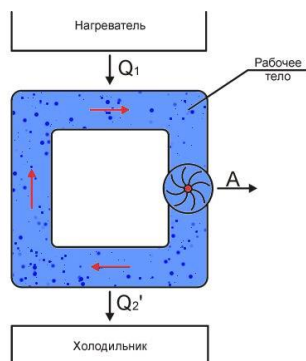
нами формула говорит об обратном. Эти флуктуации настолько незначительны, что при

измерениях оказываются практически незаметны. В качестве иллюстрации этого факта приводим

зависимость давления газа в сосуде с концентрацией 10² в см³.

II.23 КПД тепловой машины.

Тепловые машины или тепловые двигатели предназначены для получения полезной работы за счет теплоты, выделяемой вследствие химических реакций (сгорание топлива), ядерных превращений или по другим причинам (например, вследствие нагрева солнечными лучами). На рисунках приведена условная схема тепловой машины и ее термодинамический цикл.



Для функционирования тепловой машины обязательно необходимы следующие составляющие: нагреватель, холодильник и рабочее тело. При этом, если необходимость в наличии нагревателя и рабочего тела обычно не вызывает сомнений, то холодильник как составная часть тепловой машины в её конструкции зачастую отсутствует. В качестве холодильника выступает окружающая среда.

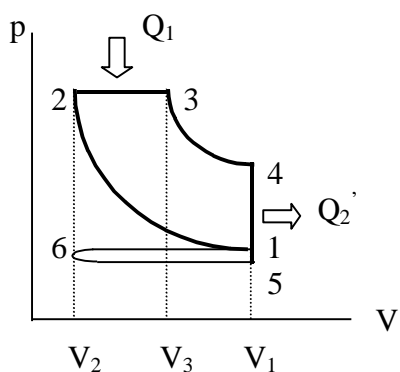
Принцип действия тепловых машин заключается в следующем. Нагреватель передает рабочему телу теплоту Q_1 , вызывая повышение его температуры. Рабочее тело совершает работу A над каким-либо механическим устройством, например, приводит во вращение турбину, и далее отдает холодильнику теплоту Q_2 , возвращаясь в

исходное состояние. Величина $Q_2 = Q_2'$ представляет собой количество теплоты, передаваемое холодильником рабочему телу, и имеет отрицательное значение.

Отметим, что наличие холодильника и передача ему части полученной от нагревателя теплоты, является обязательным, так как иначе работа тепловой машины невозможна. Действительно, для получения механической работы необходимо наличие потока, в данном случае потока теплоты. Если же холодильник будет отсутствовать, то рабочее тело неизбежно придет в тепловое равновесие с нагревателем, и поток теплоты прекратится.

Итак, тепловой машиной называется циклически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла. В качестве примера рассмотрим тепловые машины, работающие по циклу Дизеля и по циклу четырехтактного двигателя внутреннего сгорания.

Цикл Дизеля. На рисунке приведен идеализированный цикл, по которому работает данная тепловая машина. Сначала газ, который называется рабочим телом, сжимается по адиабате 12,



затем изобарическое расширение 23 (воспламенение топлива без свечи), далее снова адиабата 34 с расширением (рабочий ход) и, наконец, изохорический процесс сброса давления 45. Нижняя петля, которая начинается в точке 5 и заканчивается в точке 1, соответствует открытию выпускного клапана и выбросу отработанного газа, а, затем забору нового. Одно тело, которое называется нагревателем, сообщает теплоту машине, другое, называемое холодильником, часть тепла отбирает. Отбор тепла обусловлен тем, что машина должна работать по замкнутому циклу. Нагревателем в данном случае является топливо, а холодильником является окружающий воздух. По завершению цикла рабочее тело возвращается в исходное состояние. Поэтому

изменение внутренней энергии рабочего тела за цикл всегда равно нулю. При расширении на участке 23 рабочему телу сообщается тепло Q_1 (сгорает топливо). На участке 41 внешняя среда отбирает тепло в количестве Q_2' . Остальное тепло тратится на совершение рабочим телом работы $A = Q_1 - Q_2'$. Эффективность тепловой машины характеризуется коэффициентом полезного действия η . Для него существует формула:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} \leq 1.$$

КПД цикла Дизеля. Конструктивные особенности такого двигателя задают две величины:

$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ - степень предварительного сжатия ($\varepsilon \cong 15 - 20$); $\delta = \frac{V_3}{V_2}$ - степень предварительного

расширения. Через них и выразим КПД. Сначала запишем уравнения адиабатического сжатия и расширения рабочего тела, а также уравнение изобарического предварительного расширения:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}; T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}; \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}.$$

Теперь определим количество теплоты, передаваемое рабочему телу от нагревателя и холодильника:

$$Q_1 = C_p(T_3 - T_2);$$

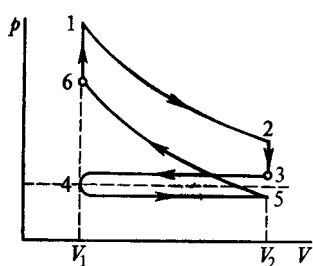
$$Q_2 = C_v(T_4 - T_1).$$

Подставим полученные результаты в формулу для определения КПД и после несложных вычислений получим окончательную формулу:

$$\eta = 1 - \frac{\delta^\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1} (\delta - 1)}.$$

КПД цикла Дизеля обычно не превышает 40%.

Четырехтактный двигатель внутреннего сгорания. В состоянии 1 в камере объема V_1 имеется после сгорания сжатой смеси воздуха с бензином газ под большим давлением p_1 . Начинается рабочий цикл (расширение газа по адиабате $1 \rightarrow 2$), в процессе которого совершается положительная работа. В состоянии 2 (нижняя мертвая точка) расширение достигает максимума и поршень находится в крайнем положении. Объем V_2 равен сумме объемов камеры сгорания и цилиндра. После открытия выпускного клапана давление в цилиндре падает до близкого к атмосферному.



В идеальном цикле считаем эти процессы мгновенными. В реальном цикле выпускной клапан начинает открываться раньше достижения поршнем нижней мертвой точки 2, поэтому переход $2 \rightarrow 3$ не строго изохорный. На участке $3 \rightarrow 4$ происходит выталкивание оставшихся в цилиндре продуктов сгорания. В верхней мертвой точке 4 закрывается выпускной клапан и открывается впускной клапан. На участке $4 \rightarrow 5$ происходит засасывание топлива. В точке 5 закрывается всасывающий клапан и на участке $5 \rightarrow 6$ происходит сжатие рабочей смеси. В точке 6 смесь воспламеняется, и давление в камере сжатия возрастает до p_1 . В идеальном цикле считаем, что точка 5 совпадает с 3, путь $3 \rightarrow 4$ совпадает с $4 \rightarrow 5$ и никакой работы на пути $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ не совершается. Работа одного моля газа в цикле вычисляется по формуле

Работа одного моля газа в цикле вычисляется по формуле

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] - \frac{p_6 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{(p_1 - p_6) V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{R(T_1 - T_6)}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

где T_1 и T_6 - температуры в состояниях 1 и 6. Так как $\gamma - 1 = (C_p - C_v)/C_v = R/C_v$, то

$$A = C_v(T_1 - T_6) \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Энергия, затрачиваемая на увеличение температуры моля газа от T_6 до T_1 , равна $Q_1 = C_v(T_1 - T_6)$, поэтому КПД такого цикла определяется по формуле

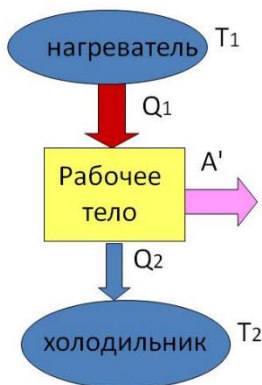
$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

Отношение V_2/V_1 называется степенью сжатия. Чем больше степень сжатия, тем больше КПД. В современных двигателях эта величина достигает значений до 18. Больше она быть не может из-за угрозы детонации. Вычисляемый по этой формуле КПД оказывается обычно завышенным примерно в два раза по сравнению с действительным КПД в реальных двигателях внутреннего

сгорания. Источником расхождения являются значительные отклонения условий работы, принятые для идеального цикла, от условий функционирования реального цикла. Видео работы такого двигателя можно посмотреть здесь: https://youtu.be/yZ8w_WEMbEU.

II.24 Цикл Карно.

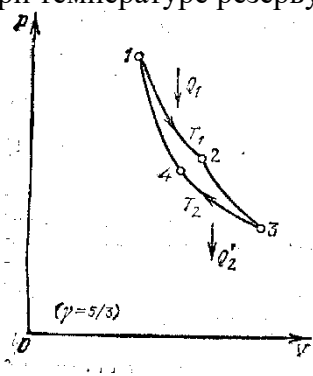
Рабочий цикл обратимой тепловой машины содержит участки, в ходе которых рабочее тело машины обменивается теплотой с нагревателем и холодильником. Выясним, при каких условиях процесс теплообмена будет обратимым.



Предположим, что какое-то тело обменивается теплотой с другим телом, которое мы будем называть тепловым резервуаром. Пусть теплоемкость резервуара бесконечно велика. Это означает, что получение или отдача резервуаром конечного количества теплоты не изменяет его температуры. Процесс теплообмена тела с резервуаром может быть обратимым только при условии, что в ходе этого процесса температура тела будет равна температуре резервуара. Действительно, допустим, что тело получает теплоту от резервуара с температурой T , имея температуру, меньшую T . При протекании того же процесса в обратном направлении тело сможет вернуть резервуару полученную от него теплоту только в том случае, если его температура будет, во всяком случае, не ниже, чем T . Следовательно,

при прямом и при обратном ходе процесса температура тела будет различной - тело проходит в обоих случаях через различные последовательности состояний, и процесс будет необратимым. Таким образом, процесс теплообмена может быть обратимым лишь в том случае, если, получая теплоту и возвращая ее при обратном ходе резервуару, тело имеет одну и, ту же температуру, равную температуре резервуара.

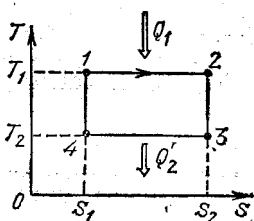
Итак, единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура которого остается неизменной, является изотермический процесс, протекающий при температуре резервуара.



Для работы тепловой машины необходимо наличие двух тепловых резервуаров - нагревателя и холодильника. Допустим, что теплоемкость резервуаров бесконечно велика. Выясним, какой обратимый цикл может совершать рабочее тело машины в этих условиях. Этот цикл, очевидно, должен состоять как из процессов, в ходе которых тело обменивается теплотой с нагревателем и холодильником, так и из процессов, не сопровождающихся теплообменом с внешней средой, т. е. адиабатических процессов. Выше мы установили, что единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура

которого остается неизменной, является изотермический процесс, протекающий при температуре резервуара.

Таким образом, мы приходим к выводу, что обратимый цикл, совершаемый в тепловой машине



работчим телом, вступающим в теплообмен с двумя резервуарами бесконечно большой теплоемкости (нагревателем и холодильником), может состоять только из двух изотерм (при температурах резервуаров) и двух адиабат. Такой цикл был впервые введен в рассмотрение С. Карно и носит название цикла Карно. На рисунке показано, как выглядит цикл Карно на диаграмме p, V в случае, когда рабочим телом является идеальный газ. Предельно просто выглядит

цикл Карно на диаграмме T, S (следующий рисунок). На участке 1 - 2 рабочее тело получает от нагревателя с температурой T_1 количество теплоты Q_1 . Это количество теплоты можно представить в виде

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1).$$

На участке 3 - 4 тело отдает холодильнику с температурой T_2 количество теплоты Q_2' , что эквивалентно получению телом количества теплоты $-Q_2'$. Это количество теплоты можно представить в виде

$$Q_2' = T_2(S_2 - S_1).$$

Подставив найденные значения Q_1 и Q_2' в формулу для КПД тепловой машины, приходим к равенству

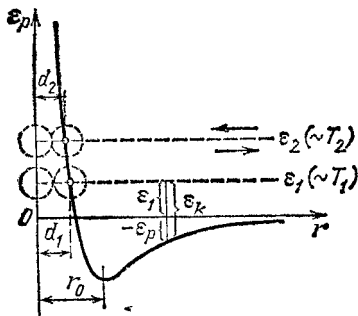
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

При выводе этой формулы мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Следовательно, можно утверждать, что коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (то есть при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Это утверждение носит название *теоремы Карно*.

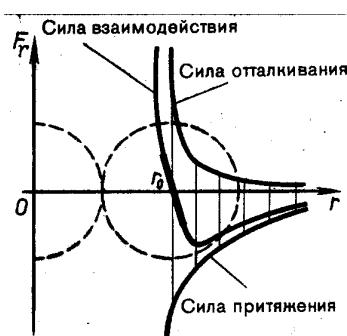
КПД любой необратимой машины всегда меньше, чем КПД обратимой машины, работающей в тех же условиях.

II.25 Длина свободного пробега молекул в газе.

Молекулы газа при своем движении сталкиваются друг с другом. Термин «столкновение» применительно к молекулам не следует понимать буквально и представлять себе этот процесс подобным соударению твердых шаров. Под столкновением молекул подразумевается процесс их взаимодействия, в результате которого изменяются направление движения и модуль скорости молекул.



направлению к первой из бесконечности, имея запас кинетической энергии E_1 (E_p на бесконечности равна нулю).



Взаимодействие между молекулами характеризуется их взаимной потенциальной энергией E_p . На рисунке приведена кривая зависимости E_p от расстояния r между центрами молекул. Эту кривую можно также трактовать как график зависимости потенциальной энергии второй молекулы в силовом поле неподвижной молекулы, помещающейся в начале координат. На участке от r_0 до бесконечности между молекулами действует сила притяжения, которая при $r < r_0$ сменяется быстро возрастающей силой отталкивания. Пусть вторая молекула начинает движение по направлению к первой из бесконечности, имея запас кинетической энергии E_1 (E_p на бесконечности равна нулю). По мере приближения к первой молекуле кинетическая энергия второй молекулы возрастает (одновременно уменьшается потенциальная энергия E_p , так что полная механическая энергия второй молекулы остается постоянной), достигает максимума при $r = r_0$, после чего начинает быстро убывать. Когда потенциальная энергия молекулы становится равной начальной энергии E_1 , молекула останавливается. Затем молекула проделывает тот же путь в обратном направлении. Расстояние d , на которое сближаются при столкновении центры молекул, называется эффективным диаметром молекулы. На рисунке видно, что, чем больше начальная кинетическая энергия молекулы (то есть чем

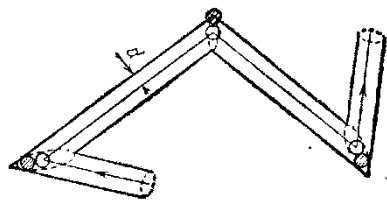
выше температура), тем меньше d . Следовательно, эффективный диаметр молекул уменьшается с повышением температуры. Величина

$$\sigma = \pi d^2$$

называется эффективным сечением молекулы. Диск такой площади окажется на пути точечных частиц, летящих параллельным пучком в направлении, перпендикулярном к диску.

Силы притяжения на участке от r_0 до бесконечности малы, а силы отталкивания при $r < r_0$, напротив, очень велики. Это дает основание рассматривать соударение молекул как столкновение не взаимодействующих на расстоянии твердых упругих шаров диаметра d . Такая модель процесса соударения молекул значительно упрощает рассмотрение ряда вопросов, а вносимые при этом погрешности оказываются не очень существенными. Воспользуемся моделью шаров для нахождения средней длины свободного пробега молекул, т. е. среднего расстояния λ , проходимого молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами.

Начнем с определения среднего числа ν столкновений, которые претерпевает в единицу времени данная молекула с другими молекулами. Вначале будем считать, что движется только



выделенная нами молекула, а все остальные застыли неподвижно на своих местах. Ударившись об одну из неподвижных молекул, выделенная молекула будет лететь прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не столкнется с другой неподвижной молекулой (на рисунке изображены несколько столкновений). Это произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль

которой летит молекула, на расстоянии, меньшем эффективного диаметра молекул d . В результате соударения молекула изменит направление своего движения, после чего опять будет двигаться прямолинейно и равномерно, пока на ее пути не встретится снова молекула, центр которой находится внутри показанного на рисунке цилиндра радиуса d .

В единицу времени молекула проходит ломаный путь, равный в среднем $\langle v \rangle$. Число происходящих при этом столкновений с неподвижными молекулами равно количеству молекул, центры которых находятся внутри коленчатого цилиндра радиуса d и длины $\langle v \rangle$. В дальнейшем выяснится, что средняя длина свободного пробега λ много больше, чем эффективный диаметр молекул d . Поэтому при подсчете объема изломами цилиндра можно пренебречь и считать, что объем равен $\sigma \langle v \rangle = \pi d^2 \langle v \rangle$. Умножив объем на число n молекул в единице объема, найдем число ν' столкновений в единицу времени движущейся молекулы с неподвижными:

$$\nu' = \pi d^2 \langle v \rangle n.$$

На самом деле все молекулы движутся, вследствие чего число столкновений определяется не средней скоростью $\langle v \rangle$ движения молекул относительно стенок сосуда, а средней скоростью $\langle v_{\text{отн}} \rangle$ движения молекул друг относительно друга. Относительная скорость двух произвольно взятых молекул равна

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Возведя это равенство в квадрат, получим

$$(\vec{v}_{\text{отн}})^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha.$$

где α - угол между векторами \vec{v}_2 и \vec{v}_1 . Среднее значение суммы равно сумме средних значений слагаемых. Следовательно,

$$\langle (v_{\text{отн}})^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle - 2\langle v_1v_2\cos\alpha \rangle.$$

Усреднение производится по всем возможным парам молекул. Угол α между скоростями принимает с равной вероятностью все значения от 0 до π . Поэтому третье слагаемое в формуле при усреднении обращается в нуль. Среднее значение квадрата скорости у всех молекул одинаково, так что $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. С учетом этого можно написать, что $\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle$,

откуда $v_{\text{отн.ср.кв.}} = \sqrt{2}v_{\text{ср.кв.}}$. Средние квадратичные скорости пропорциональны средним арифметическим. Отсюда следует, что

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

Заменив в формуле для числа столкновений $\langle v \rangle$ на $\langle v_{\text{отн}} \rangle$, получим для среднего числа соударений в единицу времени выражение

$$v = \pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle n.$$

Наконец, разделив средний путь, проходимый молекулой за секунду, т. е. $\langle v \rangle$, на число столкновений v , получим среднюю длину свободного пробега молекул:

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{v} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

При постоянной температуре плотность молекул n пропорциональна давлению газа. Следовательно, длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению. Из-за уменьшения эффективного диаметра молекул длина свободного пробега при повышении температуры слабо растет.

Произведем оценку значений λ и v при нормальных условиях. Концентрация молекул воздуха может быть оценена по формуле $p = nkT$, тогда $n = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Диаметр молекул составляет десятые доли нанометра. Примем эффективный диаметр молекул равным $0,2 \text{ нм} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Тогда длина свободного пробега молекул будет приблизительно равна $\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Теперь мы можем убедиться в том, что $\lambda \gg d$ (такое предположение было сделано при выводе формул). Разделив среднюю скорость молекул на λ , получим число столкновений, претерпеваемых каждой молекулой в единицу времени:

$$v = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}.$$

Средняя скорость молекул азота при комнатной температуре равна 470 м/с . Положив λ равной $2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, получим для v значение, равное $2,5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, при атмосферном давлении и комнатной температуре число столкновений каждой молекулы с другими молекулами составляет несколько миллиардов в секунду.

II.26 Явления переноса

Рассмотрим процессы, возникающие при нарушениях равновесия в системе. Если после нарушения равновесия предоставить систему самой себе, возникает процесс релаксации, в результате которого система возвращается в равновесное состояние. Предположим, что за счет воздействия извне неравновесное состояние системы сохраняется неизменным в течение неограниченного времени, вследствие чего возникшие в системе процессы будут стационарными (т. е. не зависящими от времени). Кроме того, будем считать, что нарушения равновесия невелики.

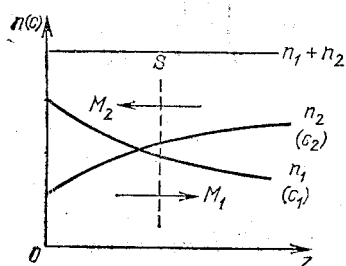
Нарушение равновесия приводит к переносу из одних мест среды в другие либо вещества, либо энергии, либо импульса, либо заряда. Интенсивность процесса переноса характеризуется потоком соответствующей величины.

Потоком какой-либо величины (например, частиц, массы, энергии, импульса, электрического заряда) называется количество этой величины, проходящее в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность. Примерами могут служить поток воды через поперечное сечение трубы либо поток электрического заряда через поперечное сечение проводника (называемый силой тока). Поверхность, через которую рассматривается поток, может иметь любую форму.

Поток - скалярная алгебраическая величина, знак которой определяется выбором направления, вдоль которого поток считается положительным. Если поток данной величины (частиц, энергии, импульса) направлен вдоль оси z , мы будем считать его положительным, в противном случае - отрицательным.

Рассмотрим уравнения, описывающие диффузию (перенос частиц или массы), теплопроводность (перенос энергии) и внутреннее трение (перенос импульса).

Диффузия. Диффузией называется обусловленное тепловым движением выравнивание концентраций в смеси нескольких веществ. Этот процесс наблюдается в газообразных, жидких и



твердых средах. Мы ограничимся рассмотрением только двухкомпонентных смесей. Пусть в единице объема смеси находится n_1 молекул одной компоненты и n_2 молекул другой компоненты. Число молекул в единице объема мы будем называть концентрацией данной компоненты. Предположим, что концентрации n_1 и n_2 изменяются вдоль оси z (от координат x и y концентрации не зависят). Быстрота этого изменения характеризуется производными dn_1/dz и dn_2/dz . Чтобы наблюдать процесс диффузии в чистом виде, будем

считать давление в жидких и газообразных смесях не зависящим от z , так что динамические потоки не возникают, и этом случае производные dn_1/dz и dn_2/dz имеют разные знаки (как изображено на рисунке).

Вследствие теплового движения возникает поток молекул каждой из компонент в направлении убывания ее концентрации. Экспериментально установлено, что поток молекул i -й компоненты через перпендикулярную к оси z поверхность S определяется уравнением:

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S,$$

где D - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом диффузии. Таким образом, поток молекул пропорционален градиенту концентрации. Знак минус в этом уравнении обусловлен тем, что поток направлен в сторону убывания концентрации.

Умножив обе части формулы на массу молекулы i -й компоненты m_i , получим уравнение диффузии для потока массы i -й компоненты:

$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S.$$

Здесь $\rho_i = n_i \cdot m_i$ - парциальная плотность i -й компоненты (ее называют также абсолютной концентрацией).

Уравнение диффузии называют законом Фика.

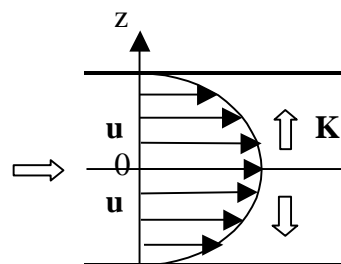
Теплопроводность. Если в некоторой среде создать вдоль оси z градиент температуры, то возникает тепловой поток, удовлетворяющий уравнению

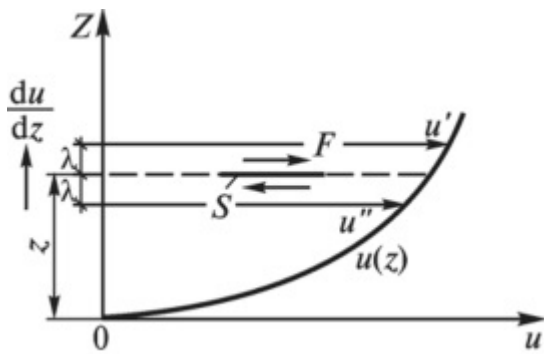
$$q = -k \frac{dT}{dz} S.$$

Здесь q - тепловой поток через поверхность S , перпендикулярную к оси z , dT/dz - градиент температуры (скорость изменения температуры вдоль оси z), k - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и называемый теплопроводностью. Знак минус в уравнении отражает тот факт, что теплота течет в направлении убывания температуры, в связи с чем, знаки q и dT/dz противоположны.

Уравнение представляет собой аналитическую формулировку закона, установленного Фурье и носящего его имя.

Внутреннее трение. Перенос импульса в направлении перпендикулярном движению жидкости за счет взаимодействия соседних слоев. Запишем формулу для силы взаимодействия:





$$F = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S$$

В этой формуле η - коэффициент пропорциональности, называемый вязкостью, S - площадь лежащей на границе между слоями поверхности, по которой действует сила F , du/dz - величина, показывающая, как быстро изменяется скорость течения жидкости или газа в направлении z , перпендикулярном к направлению движения слоев. Уравнение было установлено

Ньютоном и называется законом Ньютона.

Согласно второму закону Ньютона, сила равна производной импульса по времени. Поэтому предыдущее уравнение можно представить в виде

$$K = -\eta \frac{du}{dz} S,$$

где K - импульс, передаваемый в единицу времени от слоя к слою, т. е. поток импульса через поверхность S . Знак минус в этой формуле обусловлен тем обстоятельством, что импульс «течет» в направлении убывания скорости u . Поэтому знаки потока импульса и производной du/dz противоположны.

В первой формуле для силы минус писать нельзя, потому что она определяет одинаковый модуль двух противоположно направленных сил, с которыми слои действуют друг на друга. Кроме того, нужно брать модуль производной du/dz , так как производная может иметь любой знак, а модуль силы - положительная величина.

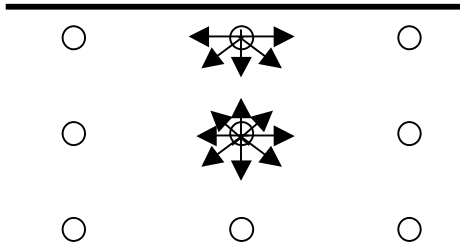
II.27 Реальные газы.

Поведение таких газов как He, H₂, N₂, O₂ хорошо описывается уравнением Менделеева – Клапейрона ($pV_M = RT$) до тех пор, пока объем, занимаемый всеми молекулами, мал по сравнению с объемом самого сосуда с газом. Оценим применимость такого приближения. Пусть эффективный диаметр молекулы, полученный из эксперимента, будет равен $d \cong 10^{-10}$ м. Тогда объем молекулы будет равен $V_0 = \pi d^3/6 \cong 10^{-30}$ м³. При нормальных условиях в одном кубическом метре газа находится примерно 10^{26} молекул, поэтому занимаемый ими объем будет всего 10^{-4} м³. Это составляет одну сотую процента от занимаемого объема, поэтому уравнение состояния идеального газа работает превосходно. Теперь подсчитаем, какую часть объема будет составлять объем газа при давлении 5000 атм. Сжав 1 м³ этого газа до такого давления, получаем, что он занимает объем $2 \cdot 10^{-4}$ м³. Ясно, что в данной ситуации, когда половина объема занята молекулами, уравнение состояния идеального газа использовать нельзя.

Существует множество уравнений для описания поведения реальных газов (не меньше 100), но наиболее простым и точным из них является уравнение, предложенное Ван-дер-Ваальсом:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT,$$

где a и b – константы, различные для различных газов. Эти поправки и позволяют правильно объяснять поведение реальных газов. Поясним смысл поправок.



Поправка a характеризует добавку к давлению за счет взаимодействия между молекулами. На больших расстояниях между молекулами существуют силы притяжения. Поэтому к стенке молекулы подлетают медленнее, чем они сделали бы это в случае отсутствия взаимодействия:

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}.$$

Давление становится меньше – газ как бы сжимает сам себя. Порядок величины поправки $a = 10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / (\text{моль})^2$.

Вторая поправка b по смыслу более понятна. Она численно равна эффективному объему, занимаемому молекулами:

$$b \approx N_A \frac{4}{3} \pi d^3.$$

Поправка b равна учетверенному объему всех молекул, порядок ее $b = 10^{-3} \text{ м}^3$.

Во всех предыдущих формулах масса газа была равна одному молю. Для ν молей $V = \nu V_M$ и уравнение приобретает следующий вид:

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT.$$

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, строго подчиняющийся этому уравнению, называется ван-дер-ваальсовским.

II.28 Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.

Внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии теплового движения его молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Ввиду теоремы о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы кинетическая энергия теплового движения однозначно определяется температурой газа и не зависит от его объема. Если температура поддерживается постоянной, то остается постоянной и кинетическая энергия. Если пользоваться моделью идеально твердых шаров, то силам отталкивания (возникающим при столкновениях шаров) не будет соответствовать, никакая потенциальная энергия. Вся потенциальная энергия обусловлена только силами притяжения между молекулами. Ее можно вычислить макроскопически, так как силы притяжения между молекулами сводятся к молекулярному давлению, с которым поверхностный слой газа давит на остальную массу газа. Работа, которую надо затратить против этого внутреннего давления, и дает приращение потенциальной энергии при изотермическом расширении газа. При рассмотрении уравнения Ван-дер-Ваальса мы получили дополнительное по сравнению с идеальным газом молекулярное давление

$$\Delta p = p_{\text{ид}} - p = \frac{a}{V^2}.$$

При расширении от объема V_1 до V_2 против этого давления необходимо совершить работу

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \Delta p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} = \Delta E_{\text{f2}} - \Delta E_{\text{f1}},$$

которая равна разности дополнительных потенциальных энергий газа Ван-дер-Ваальса. Добавив эту потенциальную энергию к внутренней энергии идеального газа, получаем следующую формулу:

$$U = \nu \left(C_V T - \frac{a}{V} \right).$$

Внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа меньше, чем была бы у идеального газа.

ЧАСТЬ III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.

III.1 Электрические заряды в природе. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.

В настоящее время известно, что в основе всего разнообразия явлений природы лежат четыре фундаментальных взаимодействия между элементарными частицами: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, электромагнитное – от *электрических зарядов*.

Еще в глубокой древности люди заметили, что янтарь, потертый о шерсть, приобретает способность притягивать к себе различные тела. Другие тела тоже обнаружили такие свойства. Наблюдаемые явления в начале 17 века были названы электрическими (от греческого слова электрон – янтарь). Стали говорить, что тело, получившее после натирания способность притягивать другие тела, наэлектризовано, то есть ему сообщен электрический заряд. Электрический заряд частицы является одной из основных первичных характеристик. Заряд всех элементарных частиц (если они заряжены) одинаков по абсолютной величине. Его можно назвать элементарным зарядом. Обозначается модуль элементарного заряда буквой e .

Электрическому заряду частицы присущи следующие фундаментальные свойства:

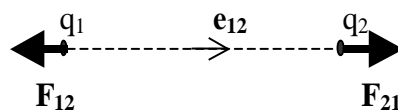
- 1) электрический заряд существует в двух видах – положительный и отрицательный;
- 2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется во времени (закон сохранения заряда);
- 3) электрический заряд является релятивистским инвариантом – его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от скорости заряженной частицы;
- 4) единица измерения заряда в системе СИ – Кулон. Элементарный заряд $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Определить наличие заряда можно по его действию на другие заряды определенной силой. Закон, которому подчиняется сила взаимодействия **точечных** зарядов, был установлен экспериментально в 1785 г Кулоном. Под точечным зарядом понимается идеализированный объект, размеры которого много меньше расстояния между ним и точкой наблюдения. В результате проведенных экспериментов Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна величине каждого из них и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой, соединяющей заряды.

Запишем формулу для закона Кулона:

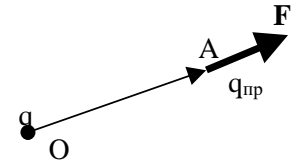
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}.$$

Формула записана в системе СИ. В этой формуле \vec{e}_{12} - единичный вектор, направление которого показано на рисунке, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. По III закону Ньютона, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Заметим, что заряды одного знака отталкиваются, а разных знаков – притягиваются друг к другу.



III.2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что на заряд, помещенный в какую-либо точку такого поля, действует сила. Поэтому, чтобы установить наличие электрического поля в данной точке, туда надо поместить заряд и измерить силу. Такой заряд будем называть *пробным*, и, естественно, он должен быть малым и точечным. Далее для простоты изложения получим общие формулы на примере формул для точечного заряда. Все выводы, сделанные при этом, будут верны для электрических полей любой системы зарядов. Пусть источник поля – точечный заряд q , а пробный заряд внесен в точку A , характеризуемую радиус-вектором \vec{r} (начало координат в точке O). Тогда сила их взаимодействия равна



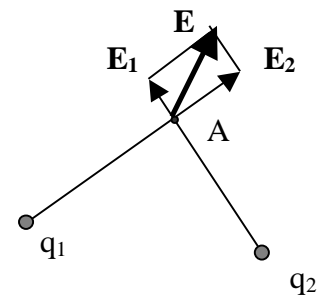
$$\vec{F} = q_{\text{пр}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right).$$

Ясно, что величина в скобках не зависит от величины пробного внесенного заряда и определяется только свойствами самого поля, в то время как сила \vec{F} зависит от $q_{\text{пр}}$. Поэтому величину в скобках и используют в качестве силовой характеристики поля и называют напряженностью электрического поля –

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}.$$

Она численно равна силе, действующей на положительный единичный заряд, внесенный в данную точку пространства. Эта формула справедлива для электрического поля любых неподвижных зарядов. С помощью этих формул получаем напряженность электрического поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$



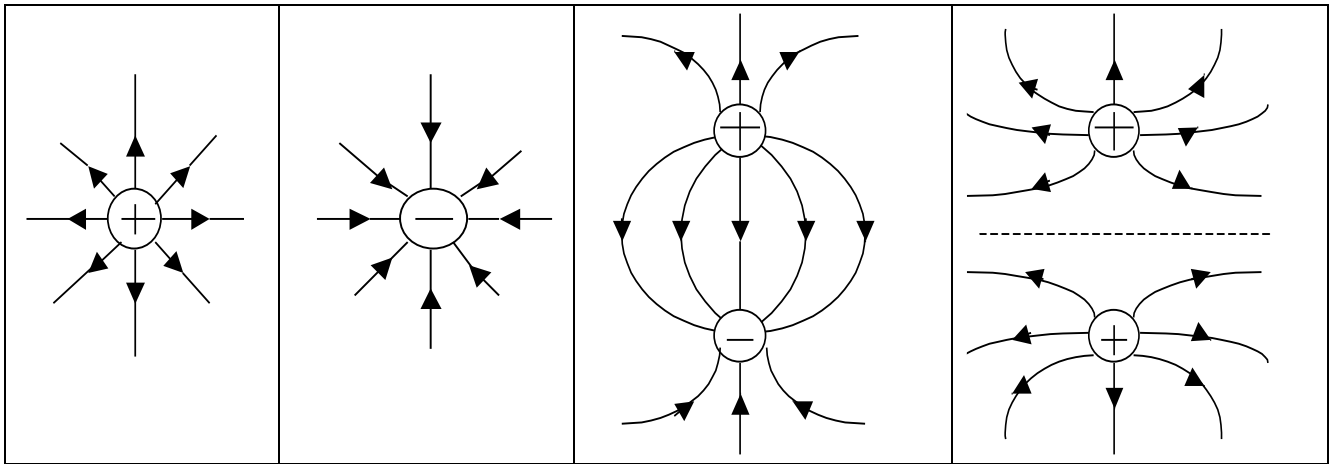
Сила, действующая со стороны электрического поля на заряд q , будет равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Если поле создается несколькими зарядами, то полная сила, действующая на некий заряд q , будет равна сумме сил: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q\vec{E}_i = q\sum_i \vec{E}_i = q\vec{E}$, где \vec{E} – это суммарная напряженность

электрического поля. Это утверждение носит название **принципа суперпозиции**:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i; \vec{E} = \int_V d\vec{E}.$$

Вторая формула выражает принцип суперпозиции для заряда, непрерывно распределенного по объему V . Этот принцип позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов. Действительно, всегда можно разбить мысленно систему зарядов на точечные заряды dq и найти поле от этих зарядов по принципу суперпозиции. В качестве примера рассмотрим поле двух положительных точечных зарядов q_1 и q_2 . Найдем поле в точке A . Для этого надо по формуле для напряженности электрического поля точечного заряда найти модули E_1 и E_2 , а затем сложить два этих вектора.

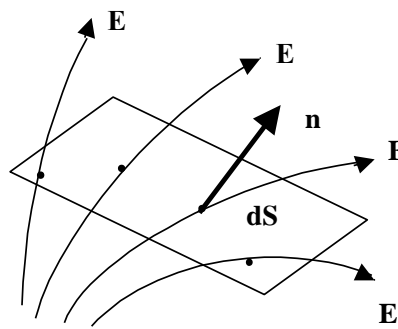
Если мы знаем величину и направление вектора электрического поля в любой точке пространства, то можно построить картину, называемую линиями вектора напряженности или силовыми линиями электрического поля. Касательная к такой линии указывает направление силы, которая будет действовать на внесенный в эту точку заряд, а густота линий характеризует численное значение вектора \vec{E} . На рисунке показаны картины силовых линий некоторых полей.



III.3 Теорема Гаусса.

Поле системы зарядов можно определить, разбивая систему зарядов на точечные и суммируя (или интегрируя) по всему объему, занятому зарядами. Этот метод основан на принципе суперпозиции и всегда дает результат. Но иногда можно использовать более простой и наглядный метод – теорему Гаусса.

Сначала определим понятие поток вектора через поверхность. Рассмотрим область пространства, в которой существует электрическое поле. Поместим в некоторое



место этого пространства площадку $d\vec{S}$ (это вектор, модуль которого равен площади dS , а направление определяется единичным вектором внешней нормали к этой поверхности). Тогда эту площадку будут пересекать силовые линии, густота которых говорит о величине поля в данной точке. Величина $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ называется потоком вектора электрического поля через площадку $d\vec{S}$. Поток можно записать в виде $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E dS \cos \alpha = E_n dS$, где E_n – проекция

вектора электрического поля на нормаль к площадке. Чтобы найти полный поток через некоторую поверхность S , необходимо вычислить интеграл

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$$

Теперь сформулируем теорему Гаусса:

Поток вектора электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .

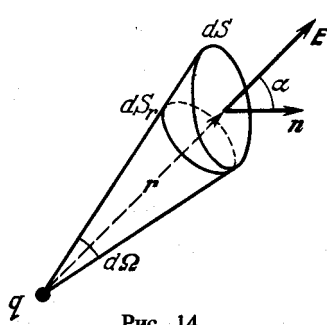


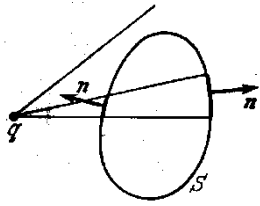
Рис. 14

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Докажем эту теорему для поля одного точечного заряда, далее обобщим на случай любого заряда. Окружим точечный заряд произвольной замкнутой поверхностью и, выделив на ней элемент площади $d\vec{S}$, определим поток вектора электрического поля через $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot d\Omega.$$

В этих формулах использован тот факт, что $dS \cos \alpha = dS_r = r^2 d\Omega$; dS_r – элемент сферической поверхности, который опирается на элемент телесного угла $d\Omega$, как показано на рисунке.



Окончательно для потока получаем $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$. Если же заряд

расположен вне выбранной поверхности, то часть телесного угла будет иметь положительное значение $d\Omega > 0$ (будет с «точки зрения» заряда выпуклая), а часть телесного угла будет иметь отрицательное значение $d\Omega < 0$ (будет вогнутая), поэтому полный поток через такую поверхность будет равен нулю. На языке силовых линий это означает, что, сколько силовых линий вошло в поверхность, столько и вышло. Для точечного

заряда теорема доказана. Если же заряд не точечный, а распределен непрерывно по некоторому объему, то его можно разделить на точечные заряды dq и для каждого записать:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ и } d\Phi = \oint_S d\vec{E} d\vec{S} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{dq}{\epsilon_0}.$$

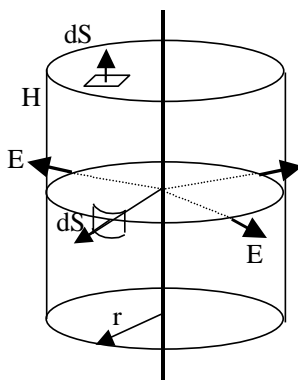
и получить общую формулу: $\Phi = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0}$, где ρ – плотность зарядов. Для дискретного распределения зарядов получаем следующую цепочку формул:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) d\vec{S} = \oint \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 d\vec{S} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}.$$

III.4 Вычисление полей заряженных плоскости, цилиндра, сферы и шара.

Как уже упоминалось, теорема Гаусса используется в тех случаях, когда имеется какая-либо симметрия в распределении зарядов, создающих электрическое поле. В этом случае главной задачей является нахождение такой поверхности для расчета потока вектора \vec{E} , на которой легко можно было бы вычислить вектор \vec{E} или угол между векторами \vec{E} и $d\vec{S}$. При этом расчет с помощью теоремы Гаусса становится несложным.

1). Бесконечная нить, равномерно заряженная зарядом с линейной плотностью λ .



Для такого распределения заряда имеется осевая симметрия. Это означает, что все направления, перпендикулярные нити, имеют одинаковые свойства: модуль вектора \vec{E} не должен зависеть от направления. Для расчета потока выбираем замкнутую поверхность, состоящую из цилиндра радиуса r , соосного с нитью, и двух плоскостей (я называю их «дно» и «крышка»). На боковой поверхности цилиндра вектор \vec{E} направлен перпендикулярно поверхности и одинаков в любой точке ее. На плоскостях («дно» и «крышка») вектор \vec{E} параллелен плоскостям и потока через эти поверхности вектора \vec{E} нет. В результате можно записать следующую цепочку формул:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{дно}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{крышка}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{бок}} E dS = E \int_{\text{бок}} dS = E 2\pi r H = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda H}{\epsilon_0}.$$

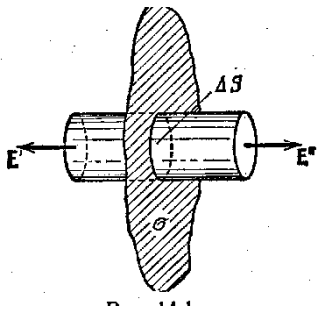
Для напряженности электрического поля нити получаем следующую формулу:

$$E_{\text{нить}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Для цилиндра радиуса R , заряженного равномерно по поверхности, получается та же формула, но только для расстояний r от оси цилиндра, больших, чем его радиус R . Внутри цилиндра электрического поля нет.

2). Бесконечная плоскость, равномерно заряженная зарядом с поверхностной плотностью σ .

Так как плоскость бесконечна во все стороны, то в любой точке пространства вектор \vec{E} может быть направлен только перпендикулярно плоскости. Поэтому в данном случае в качестве поверхности для интегрирования используется замкнутый цилиндр, изображенный на рисунке. Для удобства расчетов площади оснований цилиндра ΔS берут малы. На боковой поверхности цилиндра вектор \vec{E} параллелен плоскостям и потока через эту поверхность нет. На плоскостях («дно» и «крышка») вектор \vec{E} направлен перпендикулярно поверхности и одинаков в любой точке ее. В результате можно



записать

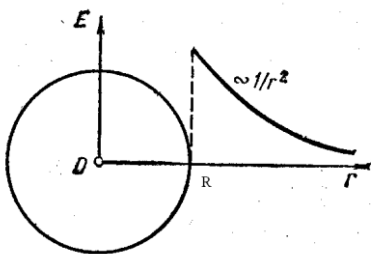
$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{лево}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{право}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{лево}} \vec{E}' d\vec{S} + \int_{\text{право}} \vec{E}'' d\vec{S} = 2 \int \vec{E} d\vec{S} = 2E \int dS = 2E \Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}.$$

Итак, электрическое поле заряженной плоскости определяется по формуле:

$$E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3). Сфера радиуса R , заряженная равномерно по поверхности с поверхностной плотностью σ .

При равномерном распределении заряда по сфере эта система обладает сферической симметрией. При этом любое направление из центра сферы будет обладать одинаковыми свойствами по отношению к величине электрического поля и его зависимости от расстояния от центра сферы. Другими словами, модуль вектора электрического поля будет одинаков на сферической поверхности. В качестве поверхности для интегрирования выбираем поверхность радиуса r с центром в центре заряженной сферы. Рассмотрим два случая. В первом случае радиус сферы интегрирования $r < R$. Так как внутри сферы не помещен заряд, а сферическая симметрия есть, то по теореме Гаусса единственная возможность для электрического поля – равенство его нулю. Итак, $E_{\text{внутри}} = 0$. Во втором случае $r > R$ и цепочка формул для расчета электрического поля на поверхности сферы будет выглядеть так:



$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} E dS = E \int_{\text{сфера}} dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}.$$

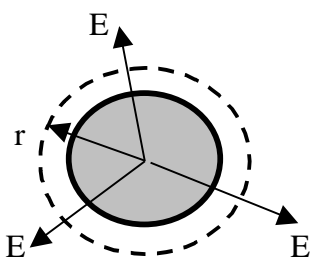
Учитывая полученные формулы, получаем ответ для вектора \vec{E} :

$$E_{\text{внесф}} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

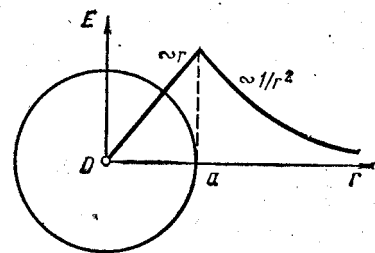
Внутри сферы электрическое поле отсутствует. На рисунке изображена зависимость модуля вектора напряженности электрического поля сферы от расстояния от ее центра. Вне сферы этот заряд производит впечатление точечного заряда, расположенного в центре сферы.

4). Шар радиуса a , заряженный равномерно по объему с объемной плотностью ρ .

Задача обладает сферической симметрией. Снова в качестве замкнутой поверхности выбираем сферу с центром в центре шара. В зависимости от радиуса сферы интегрирования возможны два случая. В первом случае $r > R$ и внутри этой сферы



находится весь заряд, создающий поле. Поэтому ответ для напряженности электрического поля будет соответствовать полю точечного заряда, расположенного в центре симметрии системы:



$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} E dS = E \int_{\text{сфера}} dS = E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внут}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0}.$$

$$E_{\text{внешара}} = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q_{\text{шар}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Во втором случае $r < R$ и внутри этой сферы находится не весь заряд шара, а только его часть равная

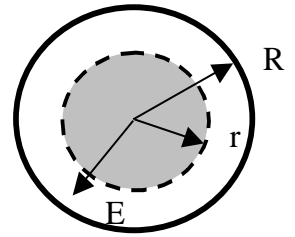
$$q_{\text{внутр}} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3} = \frac{q_{\text{шар}} r^3}{R^3}.$$

В результате для поля внутри шара получаем следующее уравнение:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{сфера}} E dS = E \int_{\text{сфера}} dS = E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внут}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}.$$

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Зависимость модуля напряженности электрического поля шара от расстояния от центра шара приведено на рисунке.



III.5 Потенциал электрического поля.

Перейдем к следующей характеристике электрического поля – энергетической. Рассмотрим поле, создаваемое точечным неподвижным зарядом q , находящемся в точке O . В любой точке пространства на пробный заряд $q_{\text{пр}}$ действует сила

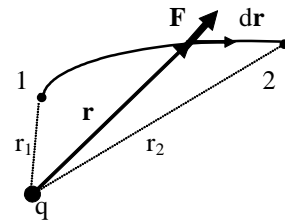
$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = F(r) \cdot \vec{e}_r.$$

Сила эта является центральной (то есть в любой точке пространства направлена по линии, соединяющей некий центр O с искомой точкой), а следовательно, консервативной. Поэтому работа этой силы не зависит от пути, по которому передвигается заряд $q_{\text{пр}}$. Тогда работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = \int F(r) \vec{e}_r d\vec{l}.$$

Легко показать, что $\vec{e}_r d\vec{l} = dr$, тогда получаем

$$A_{12} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$



Как уже было получено в механике, для консервативной силы эта работа равна разности потенциальных энергий пробного заряда в электрическом поле заряда q : $A_{12} = W_{p1} - W_{p2}$. Тогда для потенциальной энергии получаем

$$W_p = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{Const}.$$

Обычно считается, что заряды, находящиеся на очень большом расстоянии друг от друга, не взаимодействуют, поэтому константу выбирают равной нулю. Полученная величина (потенциальная энергия) зависит от величины внесенного заряда, а величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}}$$

не зависит и называется потенциалом электрического поля. Эта формула была получена на примере поля точечного заряда, но, тем не менее, справедлива во всех возможных случаях. Потенциал же поля точечного заряда можно вычислять по формуле:

$$\varphi_{\text{тз}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Следует заметить, что для потенциала тоже справедлив принцип суперпозиции: потенциал системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов отдельных зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i; \varphi = \int_V d\varphi.$$

III.6 Связь между \vec{E} и φ для электрического поля.

Поле системы зарядов можно определить по принципу суперпозиции, разбивая мысленно распределенный заряд на точечные заряды dq : $\vec{E} = \int d\vec{E}$ и $\varphi = \int d\varphi$. Но есть и другая возможность: можно, зная одну из этих величин, получить вторую. Выведем соответствующие формулы.

Элементарная работа dA электрического поля по переносу пробного заряда на расстояние $d\vec{r}$ определяется так: $dA = \vec{F}d\vec{r} = q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{r}$. Тогда работа электрического поля по переносу пробного заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}.$$

Так как электростатическое поле потенциально, то эта работа равна разности потенциальных энергий пробного заряда в этом электрическом поле:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

После несложных вычислений получаем связь разности потенциалов и напряженности электрического поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}.$$

Эта формула позволяет вычислять разность потенциалов, если известна напряженность \vec{E} . Теперь получим обратное соотношение. Для этого запишем полученное соотношение в дифференциальной форме

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz).$$

Для того чтобы из этой формулы определить проекцию напряженности электрического поля, например, по оси x , необходимо считать остальные переменные постоянными величинами. В математике такая производная называется частной и записывается так

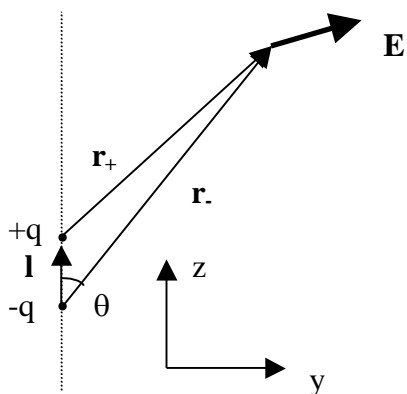
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z.$$

Эти три производные объединяют в векторный оператор, который носит название *градиент* (или оператор ∇). Запишем окончательную формулу:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right).$$

III.7 Поле диполя.

Электрический диполь – это система из двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Когда говорят о поле диполя, то имеют в виду точечный диполь, то есть систему зарядов, расстояния между которыми гораздо меньше, чем от зарядов до точки наблюдения $l \ll r_+, r_-$. Поле диполя обладает симметрией. Ось диполя задает ось симметрии, относительно которой все направления, в плоскости, перпендикулярной оси, эквивалентны. Поэтому достаточно изучать поле в одной плоскости (плоскости рисунка). Найдем сначала потенциал этого поля, а потом с помощью формул предыдущего параграфа получим его напряженность. По принципу суперпозиции поле диполя



$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}.$$

Из рисунка ясно, что $r_-^2 = r_+^2 + l^2 + 2r_+ l \cos\theta$. С учетом дипольного приближения ($l \ll r_+, r_-$), получаем $r_-^2 = r_+^2 + 2r_+ l \cos\theta$ и далее $r_- = r_+ \sqrt{1 + 2 \frac{l \cos\theta}{r_+}} \approx r_+ (1 + \frac{l}{r_+} \cos\theta)$. Тогда, поскольку $r_+ \approx$

$r_- \approx r$, получаем

$$\varphi = \frac{kq l \cos\theta}{r^2} = \frac{kp \cos\theta}{r^2} = \frac{k(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}.$$

В этой формуле $\vec{p} = q\vec{l}$ называется дипольным моментом диполя. Напомню, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Для получения напряженности электрического поля диполя воспользуемся формулой:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

вычислив с ее помощью проекции E_y и E_z . Вычисления дают следующие ответы:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kpz}{r^3} \right) = \frac{3kpz}{r^4} \frac{y}{r} = \frac{3kp \cos\theta \sin\theta}{r^3}.$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \right) = k \frac{3p \cos^2\theta - p}{r^3} = \frac{kp}{r^3} (3 \cos^2\theta - 1).$$

Модуль вектора напряженности электрического поля будет равен

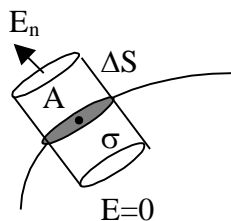
$$E = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2\theta}.$$

III.8 Поле в веществе. Поле внутри и снаружи проводника.

Рассмотрим металл, находящийся в **постоянном** электрическом поле. Истинное электрическое поле в любом веществе (его называют микрополем) меняется весьма резко, как по координате, так и по времени. Оно определяется в данной точке суммой полей от всех заряженных частиц этого вещества. Его найти практически невозможно, да и не нужно. А нужно знать макрополе – это электрическое поле, усредненное по физически бесконечно малому объему. Это объем, содержащий большое число атомов, достаточное для усреднения, но имеющий размеры много меньше тех, на которых заметно меняется макрополе. Макрополе в веществе состоит как бы из двух – внешнего и внутреннего. Внутреннее образуется за счет смещения зарядов вещества из положений равновесия, что приводит к появлению индуцированного заряда, как на поверхности, так и в объеме.

Теперь остановимся на особенностях поведения металлов в электрическом поле.

1) Металл отличается от остальных веществ тем, что в нем имеется огромное число свободных электронов, то есть электронов, которые могут перемещаться на расстояния порядка размеров самого металла. Поэтому если в металле на электроны действует какая-либо сила, то они будут



передвигаться до тех пор, пока внутреннее поле, связанное с перераспределением зарядов, полностью не скомпенсирует внешнюю силу. В результате электрическое поле внутри металла в стационарном случае равно нулю. Из этого следует (теорема Гаусса), что в металле нет нескомпенсированных свободных зарядов в объеме. Зато эти заряды появляются на поверхности, где их поверхностная плотность равна $\sigma(A)$. Она, конечно, зависит от формы поверхности. Поскольку электрическое поле внутри металла равно нулю, то потенциал электрического поля

внутри металла постоянен. Это означает, что энергия электронов внутри металла в электростатическом случае везде одинакова.

2) Так как на поверхности металла есть свободные заряды, то электрическое поле в пространстве вблизи поверхности должно быть перпендикулярно этой поверхности. Иначе возникнет сила, направленная вдоль поверхности, способная двигать заряды, что они и будут делать до полной ликвидации этой составляющей силы.

3) Поле вблизи поверхности металла можно получить с помощью теоремы Гаусса. Рассмотрим малую область пространства вблизи точки A на поверхности металла. Окружим ее замкнутой поверхностью в виде малого цилиндра площадью основания ΔS и высотой h как показано на рисунке. В силу пункта 2) через боковую поверхность этого цилиндра силовые линии электрического поля поверхностных зарядов не выходят; кроме того, поле внутри металла равно нулю. Поэтому поток вектора \vec{E} выходит только через наружную поверхность и равен

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E_n \Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\epsilon_0}, \text{ откуда получаем окончательную формулу}$$

$$E_n = \sigma / \epsilon_0.$$

III.9 Общая задача электростатики. Метод изображений.

Очень часто приходится встречаться с задачами, в которых распределение зарядов неизвестно, но заданы потенциалы проводников, их форма и относительное расположение. И требуется определить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в любой точке поля между проводниками. Напомним, что, зная φ можно легко восстановить само поле E и по значению E непосредственно у поверхности проводника найти распределение поверхностных зарядов на них.

Получим уравнение для потенциала. Предположим, что электрический заряд распределен в пространстве с объемной плотностью ρ . Выберем бесконечно малый объем dV , который ограничивается поверхностью $d\vec{S}$. Тогда по теореме Гаусса получаем

$$\vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \text{ или } \frac{\vec{E} d\vec{S}}{dV} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Величина слева называется *дивергенцией вектора \vec{E}* . Дивергенция – векторный оператор, совпадающий по формуле с градиентом. Различие заключается в том, что если этот оператор применяется к скаляру, то он называется градиентом, а если к вектору – то дивергенцией:

$$\text{div} \equiv \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}; \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Зная, что $\vec{E} = -\nabla\varphi$, получаем

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

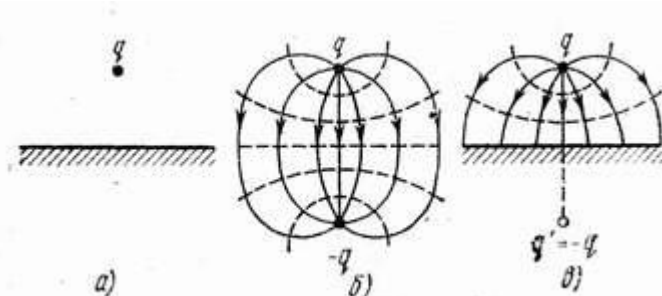
где оператор $\Delta = \nabla^2$ называется оператором Лапласа: $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Это уравнение носит имя Пуассона. Если между проводниками зарядов нет, то получаем уравнение Лапласа: $\Delta\varphi = 0$. Для однозначного решения задачи по нахождению потенциала во всем пространстве необходимо задать значения потенциалов на всех проводниках: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$. В теории доказывается, что у такой задачи есть единственное решение. Это утверждение носит название теоремы единственности.

Однако решить такую задачу часто достаточно сложно математически. Поэтому в некоторых простых случаях используют искусственные методы. Один из них и будет сейчас изложен.

Метод электрических изображений.

Рассмотрим его применение на примере точечного электрического заряда q , находящегося на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости. Необходимо найти потенциал во всем пространстве. Идея метода заключается в том, что мы должны найти другую задачу, которая решается просто и решение которой или его часть может быть использовано. Таким образом, нам надо решить уравнение Лапласа с граничным условием: потенциал равен нулю в нижней полуплоскости (внутри металла поле равно нулю).



В нашем случае поле в верхней полуплоскости, создаваемое зарядом q и распределенным по поверхности плоскости зарядом противоположного знака, совпадает с полем системы двух зарядов q и $-q$, второй расположен на расстоянии l от поверхности плоскости внутри нее. Из рисунка это видно наиболее ясно.

Решение, найденное нами, и есть единственное в этом случае. Теперь можно считать, что поле в верхней полуплоскости создается двумя точечными зарядами. Напомним, что поле в нижней полуплоскости обязано быть равным нулю. Потенциал электрического поля такой системы в точке A находим теперь как сумму потенциалов точечных зарядов:

$$\varphi_A = \varphi_q + \varphi_{-q} = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

Можно сказать, что метод изображений по существу основан на подгонке потенциала под граничные условия: мы стараемся найти другую задачу, у которой конфигурация поля в интересующей нас части пространства была бы той же. Если это удастся сделать с помощью достаточно простых конфигураций точечных зарядов, то метод изображений оказывается весьма эффективным.

III.10. Поляризация диэлектрика. Вектор \vec{P} .

Диэлектрики отличаются от металлов тем, что в них нет свободных электронов (при комнатных температурах и ниже) и они не проводят электрический ток. Это означает, что все электроны «привязаны» к своим атомам или молекулам. Поскольку диэлектрик (не заряженный) в целом нейтрален ($q=0$), то потенциал внутри диэлектрика может быть создан диполями. Сами молекулы исходно могут иметь вид диполей, или такой их вид можно создать внешним электрическим полем. Молекулы (атомы), у которых в отсутствие внешнего электрического поля центр тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадает (дипольный момент равен нулю) называются неполярными. Это, например, молекулы H_2, O_2, N_2 . У других, таких как CO, HCl , центры тяжести даже без внешнего поля сдвинуты и есть дипольный момент. Такие молекулы называются полярными. Напомним, что дипольным моментом молекулы называется величина

$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$, где \vec{l} - расстояние между центрами тяжести отрицательных и положительных зарядов молекулы ($q > 0$).

Если неполярную молекулу поместить в электрическое поле, то она приобретет дипольный момент, величина которого будет пропорциональна напряженности электрического поля. Для полярной молекулы, находящейся во внешнем электрическом поле, имеющийся уже дипольный момент практически не изменяется, лишь ориентируется вдоль поля.

В диэлектрике огромное количество диполей (полярный диэлектрик) и все они хаотически ориентированы в пространстве. Поэтому в отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент как неполярного, так и полярного диэлектрика равен нулю. Если же любой диэлектрик поместить в электрическое поле, то возникающие (или имеющиеся уже) дипольные моменты выстраиваются преимущественно по полю. Появляется макроскопический дипольный момент. Это явление называется **поляризацией диэлектрика**. Количественно это явление характеризуется вектором поляризации \vec{P} , который определяется следующим образом:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i,$$

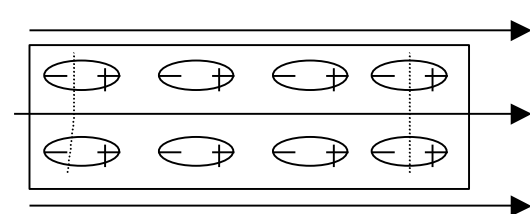
где ΔV – физически малый объем, а \vec{p}_i - дипольный момент i – ой молекулы. Модуль вектора поляризации численно равен дипольному моменту единицы объема.

У большинства диэлектриков в отсутствие внешнего электрического поля вектор поляризации равен нулю. При помещении таких диэлектриков в электрическое поле появляется вектор поляризации, величина которого прямо пропорциональна напряженности электрического поля:

$\vec{P} = \kappa \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$, где величина κ называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика.

III.11 Поле внутри диэлектрика. Объемные и поверхностные связанные заряды.

Заряды, входящие в состав диэлектрика, называются связанными по понятной причине. Заряды,



не входящие в состав молекул диэлектрика, называются сторонними. Поле в диэлектрике

E является суперпозицией полей $\vec{E}_{\text{стор}}$ и $\vec{E}_{\text{связ}}$. Это

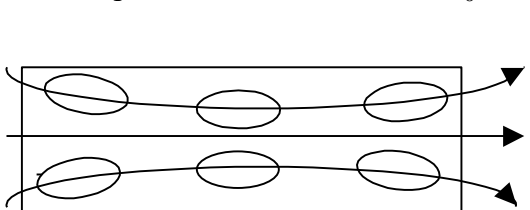
поле называется микроскопическим

$$\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{связ}} + \vec{E}_{\text{стор}}.$$

Но, как мы уже обсуждали, это поле сильно зависит от координат. Обычно пользуются усредненным по физически бесконечно малому объему макрополем, которое равно

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle.$$

Это макрополе состоит из поля \vec{E}_0 - внешнего и \vec{E}' - внутреннего: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Когда внешнего



поля нет, нет и объемной плотности связанных зарядов и поверхностной тоже нет. При наличии

внешнего поля появляются объемная ρ' и поверхностная σ' плотности связанных зарядов. На

рисунках показано, как и в каком случае возникают эти заряды. На первом рисунке показана возможность

возникновения только поверхностного связанного заряда в случае однородного электрического внешнего поля. В случае неоднородного внешнего поля появляется и поверхностная, и объемная плотность связанных зарядов, что и показано на втором рисунке.

III.12 Свойства вектора \vec{P} . Связь σ' и ρ' с вектором \vec{P} .

Теорема Гаусса для поля вектора \vec{P} . Как мы сейчас покажем, поле вектора \vec{P} обладает следующим замечательным и важным свойством. Оказывается, поток вектора \vec{P} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью S , т. е.

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'.$$

Это уравнение и выражает теорему Гаусса для вектора \vec{P} .

Доказательство теоремы. Пусть произвольная замкнутая поверхность S охватывает часть диэлектрика (рис. а, где диэлектрик заштрихован). При включении внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется - положительные заряды сместятся относительно отрицательных зарядов. Найдем заряд, который проходит через элемент dS замкнутой поверхности S наружу (рис. б). Пусть \vec{l}_+ и \vec{l}_- - векторы, характеризующие смещения положительного и отрицательного связанных зарядов в результате поляризации. Тогда ясно, что через элемент поверхности dS наружу поверхности S выйдет положительный заряд $\rho'_+ l_+ dS \cos \alpha$, заключенный во «внутренней» части косоугольного цилиндра (рис. б). Кроме того, через элемент dS войдет внутрь поверхности S отрицательный заряд $\rho'_- l_- dS \cos \alpha$, заключенный во «внешней» части косоугольного цилиндра.

Но мы знаем, что перенос отрицательного заряда в некотором направлении эквивалентен переносу положительного заряда в противоположном направлении. Учитывая это, можно записать суммарный связанный заряд, выходящий наружу поверхности S через элемент dS , как

$$dq' = \rho'_+ l_+ dS \cos \alpha + |\rho'_-| l_- dS \cos \alpha.$$

Поскольку $\rho'_+ = |\rho'_-|$,

$$dq' = \rho'_+ (l_+ + l_-) dS \cos \alpha = \rho'_+ l dS \cos \alpha.$$

где $l = l_+ + l_-$ - расстояние, на которое сместились относительно друг друга положительные и отрицательные связанные заряды диэлектрика при поляризации.

Далее, согласно определению вектора поляризации \vec{P} $\rho'_+ l = P$ и $dq' = P dS \cos \alpha$, или

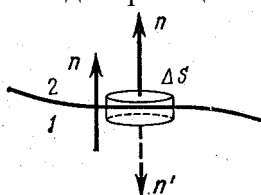
$$dq' = P_n dS = \vec{P} d\vec{S}$$

Проинтегрировав это выражение по всей замкнутой поверхности S , мы найдем весь заряд, который вышел при поляризации из объема, охватываемого поверхностью S , он равен $\oint \vec{P} d\vec{S}$. В результате внутри поверхности S останется некоторый избыточный связанный заряд q' . Ясно, что вышедший заряд должен быть равен с обратным знаком оставшемуся внутри поверхности S избыточному связанному заряду, и мы приходим к исходному утверждению.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для \vec{P} . В дифференциальной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \text{div} \vec{P} = -\rho',$$

т. е. дивергенция поля вектора P равна взятой с обратным знаком объемной плотности избыточного связанного заряда в той же точке.



Граничные условия для вектора \vec{P} . Рассмотрим поведение вектора \vec{P} на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков. Найдем связь между поляризованностью P и поверхностной плотностью σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса для вектора P . Возьмем в качестве

замкнутой поверхности небольшой плоский цилиндр, торцы которого расположим по разные стороны границы раздела (рис.). Высоту цилиндра будем предполагать ничтожно малой, а площадь ΔS каждого торца настолько малой, что во всех точках каждого торца цилиндр вектор \vec{P} был бы одинаков (это же касается и поверхностной плотности σ' связанного заряда). Пусть \vec{n} - общая нормаль к границе раздела в данном месте. Условимся всегда проводить вектор \vec{n} от диэлектрика 1 к диэлектрику 2.

Пренебрегая потоком вектора \vec{P} сквозь боковую поверхность выбранного нами цилиндра, запишем согласно теореме Гаусса $P_{2n}\Delta S + P_{1n}\Delta S = -\sigma'\Delta S$,

где P_{2n} и P_{1n} - проекции вектора \vec{P} в диэлектрике 2 на нормаль \vec{n} и в диэлектрике 1 на нормаль \vec{n}' (рис.). Учитывая, что проекция вектора \vec{P} на нормаль \vec{n}' равна с обратным знаком проекции этого вектора на противоположную (общую) нормаль \vec{n} , т. е. $P_{1n}' = -P_{1n}$ перепишем предыдущее

уравнение после сокращения на ΔS в следующем виде:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'.$$

Это значит, что на границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{P} испытывает разрыв, величина которого зависит от σ' . В частности, если среда 2 вакуум, то $P_{2n} = 0$, и условие приобретает более простой вид: $\sigma' = P_n$.

III.13 Теорема Гаусса для диэлектриков. Вектор \vec{D} .

При выводе теоремы Гаусса для вектора \vec{E} учитывались лишь свободные заряды. В случае, когда электрическое поле возбуждается в веществе, необходимо учитывать поляризацию среды и наличие электрического поля, создаваемого связанными зарядами. Поэтому ранее выведенную формулу в этом случае нужно дополнить:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{полн}}}{\epsilon_0} = \frac{q + q'}{\epsilon_0}.$$

Для расчетов эта формула неудобна, так как содержит два зависящих друг от друга неизвестных q' и \vec{E} . Поэтому ее надо переписать в более удобном виде. Для этого используем теорему Гаусса для вектора \vec{P} :

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'.$$

Тогда после несложных преобразований получим следующую формулу:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q.$$

Величина, стоящая в скобках под интегралом, называется вектором электрической индукции

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Теперь теорема Гаусса для диэлектриков принимает окончательный вид:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов внутри этой поверхности.

Используя формулу, связывающую вектор поляризации и напряженность электрического поля, можно получить еще одну важную формулу:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \kappa)\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды. Для всех веществ $\epsilon > 1$, для вакуума $\epsilon = 1$. В случае *однородного* диэлектрика можно доказать, что величина диэлектрической проницаемости среды ϵ характеризует во сколько раз поле в диэлектрике меньше, чем поле в вакууме (то есть в той же точке, но в отсутствии диэлектрика).

III.14 Теорема о циркуляции для вектора \vec{E} .

Электростатическое поле точечного заряда q – центральное и поэтому потенциальное. Это означает, что работа по переносу пробного заряда из одной точки в другую не зависит от формы пути. На пробный заряд в этом поле действует сила $\vec{F} = q_{\text{пр}} \vec{E}$, где \vec{E} – напряженность поля точечного заряда. Работа этой силы по переносу пробного заряда по любой замкнутой траектории L равна, следовательно, нулю:

$$\oint_L q_{\text{пр}} \vec{E} d\vec{r} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{r} = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части последнего соотношения, называется **циркуляцией вектора \vec{E} вдоль замкнутого контура L** . Таким образом, циркуляция вектора напряженности электрического поля точечного заряда вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного в области электрического поля, равна нулю. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы поле напряженностью \vec{E} было потенциальным.

Напряженность \vec{E} электростатического поля произвольной системы точечных зарядов связана с напряженностью \vec{E}_i отдельного заряда q_i принципом суперпозиции, поэтому

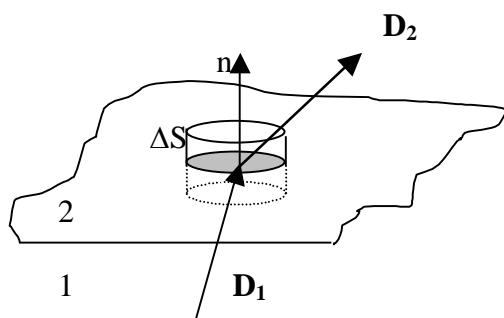
$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = \oint_L \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \oint_L \vec{E}_i d\vec{r} = 0$$

Теперь можно утверждать, что циркуляция вектора напряженности любого электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Тем самым доказано, что любое электростатическое поле потенциально.

III.15 Граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{D} .

Получим связь между векторами \vec{E} и \vec{D} по обе стороны границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Это будет сделано с помощью теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

Условие для вектора \vec{D} . Возьмем бесконечно малый цилиндр высоты h и площадью основания ΔS . Размеры его должны быть таковы, чтобы можно было считать поле на поверхности цилиндра однородным. Граница раздела делит цилиндр пополам так, как изображено на рисунке. В результате половина цилиндра находится в среде 1, а вторая половина – в среде 2. Обозначим индукцию электрического поля в среде 1 как \vec{D}_1 , в среде 2 это поле будет \vec{D}_2 . Вычислим поток вектора индукции электрического поля через поверхность цилиндра. В соответствии с теоремой Гаусса, этот поток должен быть равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся на границе раздела двух сред внутри цилиндра.



Расчет дает следующий результат:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int_{\text{верх}} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\text{дно}} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{D} d\vec{S} = \sigma \Delta S.$$

Так как поле в верхней части цилиндра однородно (как и в нижней), то

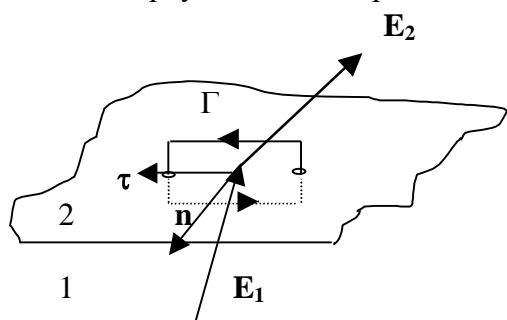
$$D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S + \int_{\text{бок}} \vec{D} d\vec{S} = \sigma \Delta S.$$

Устремим и без того малое $h \rightarrow 0$. Тогда поток вектора индукции электрического поля через боковую поверхность будет равен нулю. Получаем

граничное условие для нормальной к поверхности раздела компоненты вектора \vec{D} :

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Условие для вектора \vec{E} . Снова рассмотрим границу раздела тех же диэлектриков, вдоль которой вычислим циркуляцию вектора \vec{E} по бесконечно малому прямоугольному контуру Γ . Контур расположен перпендикулярно поверхности раздела диэлектриков так, что половина его находится в среде 1, а вторая половина его находится в среде 2. Высота контура h к тому же много меньше длины ℓ . На рисунке показаны направления обхода контура и направление нормали к плоской поверхности, связанной с контуром. Циркуляция вектора \vec{E} равна



расположен перпендикулярно поверхности раздела диэлектриков так, что половина его находится в среде 1, а вторая половина его находится в среде 2. Высота контура h к тому же много меньше длины ℓ . На рисунке показаны направления обхода контура и направление нормали к плоской поверхности, связанной с контуром. Циркуляция вектора \vec{E} равна

$$\int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} + \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{l} + \int_{\text{верх}} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Тогда, считая поле \vec{E} в пределах контура однородным, получаем

$$E_{2\tau} \ell - E_{1\tau} \ell = 0.$$

В этой формуле вектор $\vec{\tau}$ направлен вдоль плоскости контура справа налево, кроме того, учтено, что высота контура очень мала. Граничное условие для тангенциальной компоненты вектора \vec{E} приобрело окончательный вид

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

Можно оба граничных условия выразить через вектор \vec{E} , учитывая тот факт, что вектор электрической индукции – вектор вспомогательный:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

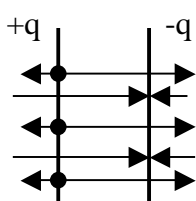
$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

III.16 Электроемкость. Конденсаторы (плоский, цилиндрический, сферический).

Способность проводников накапливать электрический заряд называется электроемкостью. Если приложить разность потенциалов U к системе проводников, то на них появится заряд q . Опыт показывает, что эти величины связаны линейной зависимостью $q \sim U$. Коэффициент пропорциональности в этой зависимости называется электроемкостью C : $q = CU$.

Система из нескольких проводников (не менее двух) называется конденсатором. Чтобы определить электроемкость системы проводников необходимо поместить на них заряд q и вычислить разность потенциалов U , тогда электроемкость можно определить как $C = q/U$. Прделаем эти действия для нахождения емкости следующих систем:

1) Плоский конденсатор (заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε). На рисунке изображены силовые линии поля каждой пластины. Вне области между плоскостями



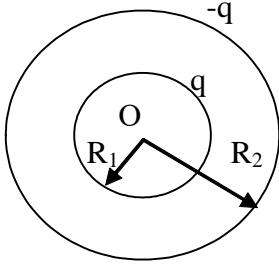
поля вычитаются, а внутри электрические поля складываются, тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}; E_{\text{внутр}} = E_q - E_{-q} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Зная, что $\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, получаем $U = qd/(\varepsilon\varepsilon_0 S)$. Тогда $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$

. В этой формуле S – площадь пластин, d – расстояние между ними.

2) Сферический конденсатор (радиусы обкладок R_1 и R_2 , между ними – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ). Поместим на внутреннюю обкладку заряд q , а на внешнюю заряд $-q$. Найдем по теореме Гаусса поле во всем пространстве. Поле в области пространства $r < R_1$ равно нулю, так как сферическая поверхность с центром в точке O такого радиуса никаких зарядов не охватывает, и, следовательно, $\oint \vec{E} d\vec{S} = 0$.



Аналогичная ситуация и в области пространства $r > R_2$. Только в этом случае полный охватываемый заряд равен нулю. Таким образом, поле есть только в пространстве между обкладками, и его найдем по теореме Гаусса (считая, что диэлектрика нет), выбрав для интегрирования сферу радиусом $R_1 < r < R_2$:

Гаусса (считая, что диэлектрика нет), выбрав для интегрирования сферу радиусом $R_1 < r < R_2$:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad \text{Тогда с учетом диэлектрика } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad \text{Разность}$$

потенциалов найдем интегрированием $U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$. Для емкости $C = q/U$

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad \text{Если внешняя сфера имеет бесконечный радиус, то получается конденсатор}$$

в виде шара в диэлектрике. Емкость такого шара равна $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

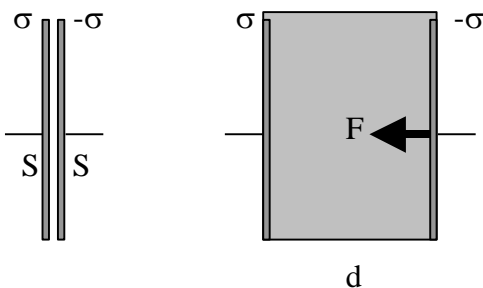
3) Цилиндрический конденсатор (высота H , радиусы обкладок R_1, R_2 , внутри диэлектрик ϵ). Чтобы формулы были простыми, необходимо предположить, что $H \gg R_1, R_2$ и $R_1, R_2 \gg R_2 - R_1$. Снова заряжаем конденсатор: внутреннюю обкладку зарядом q , а внешнюю – зарядом $-q$. Далее в качестве поверхности для интегрирования выбираем замкнутый цилиндр радиусом $R_1 < r < R_2$, охватывающий всю внутреннюю обкладку. Силовые линии электрического поля будут пересекать лишь боковую поверхность этого цилиндра и поток вектора \vec{D} будет равен

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = DS = D 2\pi r H = q. \quad \text{Тогда } E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r H}. \quad \text{Теперь определим разность потенциалов}$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad \text{Емкость } C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}.$$

III.17 Энергия электрического поля.

Получим формулу для энергии электрического поля на примере поля, создаваемого плоским заряженным конденсатором. Создадим этот конденсатор следующим образом. Разделим тонкую



металлическую незаряженную пластину площадью S на две, каждая с плотностью заряда σ и $-\sigma$, и разведем их на расстояние d . В процессе раздвижки на каждую пластину действует сила со стороны другой пластины $\vec{F} = q\vec{E}_\sigma = -\vec{E}_\sigma \sigma S$. Это сила притяжения, и против этой силы надо совершить работу по созданию конденсатора, величина которой равна $A = -\int_0^d \vec{F} d\vec{l} = E_\sigma \sigma S d = \frac{\sigma^2}{2\epsilon\epsilon_0} S d$.

При получении этой формулы была использована формула для электрического поля заряженной плоскости, которую можно получить с помощью теоремы Гаусса: $E_\sigma = \sigma / (2\epsilon\epsilon_0)$. Выразим поверхностную плотность заряда через полный заряд конденсатора и учтем, что работа нашей внешней силы пошла на создание энергии конденсатора W . Тогда получаем

$$A = W = \frac{q^2 d}{2\epsilon\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергию заряженного конденсатора (причем любого) можно теперь записать так:

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Это полная энергия, запасенная в конденсаторе. Но это ведь энергия электрического поля, которое сосредоточено в области пространства, ограниченного пластинами конденсатора. В идеальном случае поля вне пластин нет. Поэтому можно говорить о плотности энергии электрического поля, не задумываясь о том, каким образом это поле создано. В данном случае электрическое поле однородно и можно получить следующее соотношение (E - полное электрическое поле внутри конденсатора)

$$W_c = \frac{1}{2} E\sigma Sd = \frac{E\sigma}{2} V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V.$$

Ясно, что V – объем конденсатора, а ϵ - диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами. Мы получили формулу для плотности энергии однородного электрического поля, но эта формула носит общий характер и справедлива для любого поля:

$$\omega_c = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$$

В случае неоднородного электрического поля полную энергию этого поля можно получить по формуле

$$W_c = \int_V \omega_c dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

В заключение отметим, что эти формулы справедливы в случае однородного диэлектрика.

III.18 Плотность тока. Уравнение непрерывности.

В этом разделе будем изучать законы постоянного тока. Электрическим током называется направленное движение зарядов. В металлах носителями тока являются электроны, в электролитах – электроны и ионы, в полупроводниках – электроны и так называемые «дырки». При отсутствии внешнего поля носители тока совершают хаотические перемещения так, что направленного движения нет. При включении электрического поля появляется направленное движение зарядов, то есть упорядоченное их перемещение. Тогда электрический ток можно определить как

$$I = \frac{dq}{dt},$$

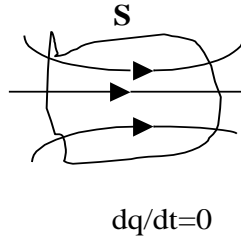
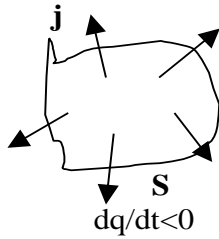
то есть заряд перешедший через рассматриваемую поверхность S за время dt . Ток – скалярная величина, а вот *плотность тока* \vec{j} - векторная величина. Ее модуль определяется как отношение тока, протекающего через бесконечно малую перпендикулярную к току поверхность, к величине этой поверхности:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

За положительное направление тока принимают направление движения положительных зарядов. Обозначим буквой ρ объемную плотность свободных зарядов в веществе (не путать с плотностью вещества!), тогда для вектора плотности тока получаем $\vec{j} = \rho \cdot \vec{U}$, где \vec{U} - скорость «дрейфового» (то есть направленного вдоль электрического поля) упорядоченного движения зарядов. Связь между величиной тока и плотностью его определяется соотношением

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Теперь получим соотношение, которое носит название уравнения непрерывности. Для этого в среде, где протекает электрический ток плотностью \vec{j} , выберем некую замкнутую поверхность S как показано на рисунке. Ток через эту поверхность будет определяться, с одной стороны, предыдущим соотношением, а с другой стороны, убылью зарядов в объеме, ограниченном выбранной поверхностью:



Ток через эту поверхность будет определяться, с одной стороны, предыдущим соотношением, а с другой стороны, убылью зарядов в объеме, ограниченном выбранной поверхностью:

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}; \oint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{dq}{dt} = 0.$$

Последнее соотношение и носит название уравнения непрерывности, записанного в интегральном виде. Ему можно придать дифференциальный вид. Для этого используем следующие формулы

$$q = \int \rho dV; \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{d\rho}{dt} dV,$$

а также определение дивергенции вектора \vec{j} : $\vec{j} d\vec{S} = \text{div} \vec{j} dV$. В результате получаем

$$\nabla \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

III.19 Обобщенный закон Ома.

Закон Ома для однородного участка электрической цепи, открытый экспериментально, гласит: *сила тока, протекающего по однородному проводнику, прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах*. Коэффициент пропорциональности в этой формуле называется электрическим сопротивлением проводника:

$$I = \frac{U}{R}$$

Экспериментально установлено, что для однородного цилиндрического проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление можно определить по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ - удельное (то есть единицы длины) сопротивление проводника (не путать с плотностью вещества или зарядов!). Из этих соотношений можно получить закон Ома в дифференциальной форме:

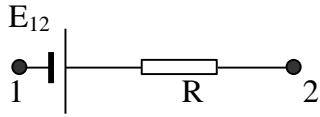
$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

В этой формуле величина σ называется удельной проводимостью среды.

Одними только электрическими силами поддерживать постоянный ток невозможно. Под действием только электрических сил все свободные заряды распределились бы так, что потенциал в цепи был бы везде одинаков. В результате ток бы прекратился. Для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы. Для их количественного описания используется вектор \vec{E}^* , который называется напряженностью поля сторонних сил. Тогда формула для плотности тока будет иметь вид

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Это и есть обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.



Теперь получим закон Ома для неоднородного участка цепи, или закон Ома в интегральной форме. Для этого используем закон Ома в дифференциальной форме, умножив его на $d\vec{l}$, а затем проинтегрировав это уравнение, считая, что мы перемещаем единичный заряд по схеме, изображенной на рисунке, из точки 1 в

точку 2. Тогда получится следующая цепочка формул:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}; \quad I \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Первый интеграл дает нам сопротивление этого участка цепи R , а интеграл $\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = \epsilon_{12}$

называется электродвижущей силой. Таким образом,

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}.$$

III.20 Закон Джоуля – Ленца.

Рассмотрим произвольный участок электрической цепи, по которой течет ток. За время dt через какое-либо сечение проводника будет перенесен заряд $dq = Idt$, тогда работа по его переносу равна

$$dA = dqU = IUdt,$$

где U – разность потенциалов, и, следовательно, мощность, которую развивают силы источника

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = (\varphi_1 - \varphi_2)I + E_{12}I.$$

Эта мощность, развиваемая током на участке цепи, может использоваться (расходоваться) на перемещение участка цепи или на протекание в нем химических реакций, или может превратиться в тепло. В случае, когда проводник неподвижен и химических реакций в нем не происходит, работа тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. Принято говорить, что в проводнике выделяется тепло

$$dQ = UI dt \text{ или } Q = \int_0^t UI dt' = \int_0^t I^2 R dt' = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt'. \text{ Этот закон был установлен экспериментально и}$$

назван законом Джоуля – Ленца. Если в цепи течет постоянный ток, то закон можно записать в простом виде:

$$Q = I^2 R t.$$

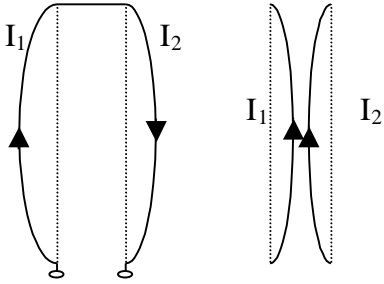
С помощью несложных вычислений можно получить дифференциальный вид закона. Тепло, выделяющееся в единице объема за единицу времени при протекании тока, равно

$$Q_{уд} = \frac{dQ}{dV} = \rho j^2.$$

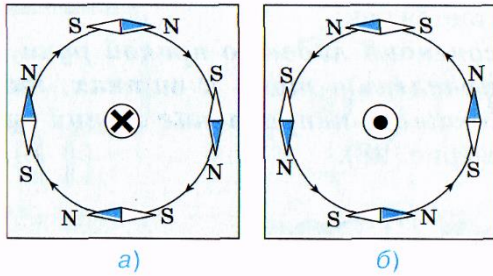
III.21 Взаимодействие токов. Магнитное поле.

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи, притягивают друг друга, если токи имеют одинаковое направление и отталкивают друг друга, если токи противоположны по направлению. Величина силы взаимодействия двух токов на единицу их длины пропорциональна

$$\text{величинам токов } I_1 \text{ и } I_2 \text{ и обратно пропорциональна расстоянию между ними } b: F_{ед} = k_1 \frac{2I_1 I_2}{b}.$$



Этот закон был установлен Ампером в 1820 году. В дальнейшем с помощью этой формулы удалось определить единицу измерения тока в системе СИ – 1 Ампер. 1 Ампер – это такой ток, при котором параллельные проводники с током на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждую единицу их длины. В той системе единиц, в которой работал Ампер, коэффициент k_1 был равен единице. В системе СИ этот коэффициент равен $k_1 = \mu_0 / (4\pi)$. Тогда в системе СИ эта формула приобретает вид:



$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}$$

Ясно, что природа этой силы не электростатическая, так как при выключении тока взаимодействие исчезло. Поэтому это новое поле назвали магнитным. Такое название связано с тем, что Эрстед в 1820 году обнаружил влияние тока на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда при включении тока стрелка, находящаяся под прямым бесконечным током,

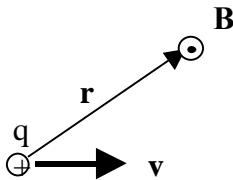
располагалась перпендикулярно току (рис а). Если изменить направление тока в проводе, то стрелка повернется на 180° (рис б). Из этого следовало, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту векторную величину обозначают, как \vec{B} и называют магнитной индукцией.

Итак, движущиеся заряды создают вокруг себя магнитное поле, которое проявляется в действии силы на попадающие в это поле движущиеся заряды.

Кроме того, опыт дает, что для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: поле \vec{B} , порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей \vec{B}_i , порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

III.22 Магнитное поле движущегося заряда.



Окружающее нас пространство изотропное, поэтому поле неподвижного заряда сферически симметрично. Если же заряд движется, то появляется выделенное направление – направление его движения. Подчеркнем, что в этом разделе будет изучаться только движение зарядов с постоянным вектором скорости,

малым по сравнению со скоростью света ($v \ll c$). Рассмотрим, от чего зависят свойства создаваемого движущимся зарядом магнитного поля. Ясно, что это поле должно иметь осевую симметрию. То есть магнитное поле в точках на окружности радиуса r_\perp (проекция радиус-вектора на перпендикулярное скорости направление) должно быть одинаково. Кроме того, оно должно зависеть от величины заряда q , расстояния \vec{r} и скорости его движения \vec{v} :

$$\vec{B} = f(q, \vec{v}, \vec{r}(t)).$$

Вид этой функции может быть установлен только экспериментально. Когда были проведены необходимые эксперименты, то оказалось, что зависимость имеет следующий вид:

$$\vec{B} = k_1 \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Таким образом, вектор индукции магнитного поля \vec{B} перпендикулярен как радиус вектору, соединяющему движущийся заряд с точкой наблюдения, так и вектору скорости заряда. Модуль

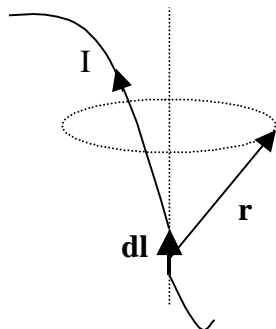
магнитной индукции равен $B = k_1 q \frac{v}{r^2} \text{Sin}(\vec{v}, \vec{r})$. Направление вектора \vec{B} для случая, изображенного на рисунке, показано точкой в кружочке – вектор направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка. Для системы СИ, которой обычно пользуются при расчетах, формула для вектора \vec{B} приобретает следующий вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Приведем здесь значение константы $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Единицей измерения магнитной индукции в системе СИ является тесла (Тл).

III.23 Закон Био - Савара - Лапласа. Поле прямого тока.

От поля одного движущегося заряда перейдем к полю тока. Пусть в пространстве есть некий проводник с током I . Выделим на этом проводнике участок $d\vec{l}$, на котором будут двигаться сразу $dq = enSdl$ носителей заряда. В этой формуле n – концентрация электронов в проводнике, а S – площадь поперечного сечения проводника. Тогда индукция магнитного поля, создаваемая этим участком проводника с током в точке A , будет определяться по формуле:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[\vec{v} + \vec{u}, \vec{r}]}{r^3},$$

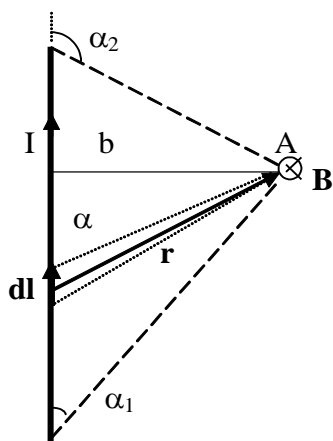
где \vec{v} - скорость хаотического теплового движения электронов, а \vec{u} - скорость упорядоченного их движения, создающая ток I . Усредним магнитную индукцию по всем носителям тока, находящимся в элементе объема Sdl

$$\langle d\vec{B} \rangle = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[\langle \vec{u} \rangle, \vec{r}]}{r^3}.$$

Тогда, используя формулу для плотности тока \vec{j} , получаем

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{[ne \langle \vec{u} \rangle, \vec{r}]}{r^3} dl = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dl.$$

Но $\vec{j} dl = j d\vec{l}$ и $jS = I$, тогда получаем окончательную формулу для закона Био – Савара – Лапласа:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Мы получили формулу для магнитного поля, создаваемого участком проводника с током. Био и Савар провели эксперименты, а Лаплас их проанализировал и дополнил принципом суперпозиции. Модуль вектора магнитной индукции в этом случае будет равен

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \text{Sin}(d\vec{l}, \vec{r}).$$

Отметим, что \vec{r} - вектор, соединяющий элемент тока с точкой наблюдения A .

Используем полученный результат для расчета поля прямого тока конечной длины, как изображено на рисунке. Выберем на этом токе произвольный малый участок и найдем магнитное поле в точке A . Ясно, что вектор магнитной индукции от этого участка будет перпендикулярен как вектору $d\vec{l}$, так и вектору \vec{r} и направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Кроме того, ясно, что так же направлен вектор $d\vec{B}$ и от любого другого участка проводника с током. Следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \sin\alpha.$$

Теперь необходимо все переменные (а их три – r , dl и α) выразить через одну и провести интегрирование. Прделаем это: $r = b/\sin\alpha$; $dl = rd\alpha/\sin\alpha$. Теперь можно все подставить в формулу для dB :

$$dB = \frac{\mu_0 I r d\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi b} \sin\alpha.$$

Проинтегрируем

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

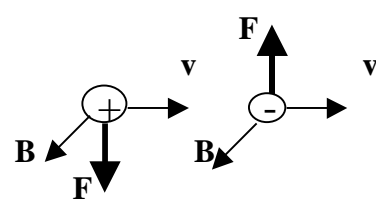
Это ответ для тока конечной длины. Для бесконечного тока угол $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$, тогда

$$B_{\uparrow} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

III.24 Сила Лоренца.

На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую можно назвать магнитной. Эта сила должна зависеть от величины заряда q , его скорости \vec{v} и величины магнитного поля \vec{B} . Эксперимент показал, что сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, равна $\vec{F}_M = k_2 q[\vec{v}, \vec{B}]$.

Эту формулу можно считать определением магнитной индукции \vec{B} . Одна Тесла определяется так, чтобы коэффициент k_2 в формуле был равен единице в системе СИ. Тогда



$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Модуль магнитной силы равен $F_M = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$, где α - угол между векторами \vec{v} и \vec{B} . Направлена эта сила перпендикулярно как скорости частицы, так и направлению магнитного поля. Для положительного и отрицательного зарядов направление магнитной силы противоположно. Наиболее важным в этом

случае является то, что в силу перпендикулярности магнитной силы направлению вектора скорости ($\vec{F} \perp \vec{v}$), работы эта сила совершать не может, а следовательно, не может изменить модуль скорости заряда.

Если в пространстве существуют одновременно и магнитное, и электрическое поля, то сила, действующая на заряд, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Это выражение было получено Лоренцем и носит название силы Лоренца.

III.25 Закон Ампера.

Теперь получим силу, действующую на проводник с током в магнитном поле. На каждый из носителей тока в проводнике действует магнитная часть силы Лоренца (носители участвуют в тепловом и направленном движении).

$$\vec{F} = q[\vec{v} + \vec{u}, \vec{B}].$$

Эта сила за счет столкновений передается, в конечном счете, всему проводнику в целом. Найдем величину силы $d\vec{F}$, действующей на элемент проводника длины dl . Ясно, что надо усреднить силу по всем носителям тока в этом участке проводника, тогда

$$\langle \vec{F} \rangle = q[\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle, \vec{B}] = q[\langle \vec{u} \rangle, \vec{B}]$$

Теперь можно найти силу $d\vec{F}$. Для этого найдем заряд, который находится в этом участке проводника $dq = q \cdot n \cdot S \cdot dl$. Окончательно получаем:

$$d\vec{F} = \langle \vec{F} \rangle n S dl = [nq \langle \vec{u} \rangle, \vec{B}] S dl = [j, \vec{B}] dV.$$

Для силы Ампера получаем

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$$

Это сила, действующая на участок проводника с током $d\vec{l}$, находящегося в магнитном поле. Эта формула была получена экспериментально и названа силой Ампера или законом Ампера. Модуль этой силы равен $dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin(\angle d\vec{l}, \vec{B})$.

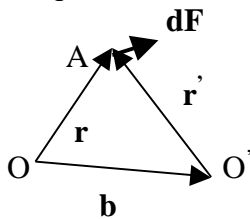
III.26 Контур с током в магнитном поле.

Поместим контур с током I в магнитное поле. На каждый участок контура будет действовать сила Ампера. В результате контур может совершать ускоренное поступательное движение и вращаться. Получим формулы, по которым можно рассчитать это движение.

Сначала рассмотрим однородное магнитное поле $\vec{B} = \overline{c} \overline{on} \overline{st}$. В таком поле на участок проводника с током будет действовать сила $d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$. Сумма всех этих сил будет равна

$$\vec{F} = \oint I [d\vec{l}, \vec{B}] = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}] = 0.$$

Интеграл в последней формуле равен нулю, так как сумма векторов малых участков, составляющих замкнутый контур, равна нулю. Следовательно, в однородном магнитном поле сила на контур с током не действует и поступательного движения контур не совершает. Зато возможно вращательное движение под действием момента сил Ампера.

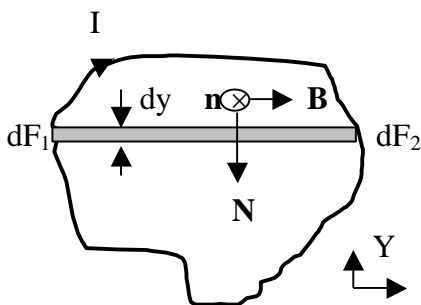


В дальнейшем будем рассматривать только плоские контуры для упрощения понимания. Получим формулу, которая упростит дальнейшее рассмотрение. Покажем, что в случае однородного

магнитного поля точка, относительно которой будет определяться момент сил, может быть выбрана произвольно. Рассмотрим некоторую точку контура с током A , в которой на этот участок контура действует сила $d\vec{F}$. На рисунке показаны две системы координат с началом в точках O и O' . Из рисунка ясно, что $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{b}$. Момент этой силы, определенный в не штрихованной системе равен $\vec{N} = \int [\vec{r}, d\vec{F}]$, а в штрихованной -

$$\vec{N}' = \int [\vec{r}', d\vec{F}] = \int [\vec{r} - \vec{b}, d\vec{F}] = \int [\vec{r}, d\vec{F}] - [\vec{b}, \int d\vec{F}] = \vec{N}.$$

Таким образом, если поле однородное, то начало отсчета может располагаться произвольно. Теперь можно вычислить момент сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле. Контур ориентирован так, как показано на рисунке. Вектор индукции магнитного поля ориентирован в плоскости рисунка слева направо. Ток в контуре течет по часовой стрелке, поэтому нормаль к контуру направим перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Разобьем весь контур на полоски толщиной dy и длиной x . На токи, текущие в пределах этого участка, действуют две силы, модули которых равны $dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy$ и $dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy$. Эти две силы равны по величине, направлены в



противоположные стороны и образуют пару сил с моментом

$$dN = IBx dy = Ib dS ; d\vec{N} = I [\vec{n}, \vec{B}] dS.$$

Полный момент сил, действующий на весь контур, можно получить интегрированием:

$$\vec{N} = \int I[\vec{n}, \vec{B}]dS = I[\vec{n}, \vec{B}] \int dS = I[\vec{n}, \vec{B}]S = [(IS\vec{n}), \vec{B}] = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

Величина $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ называется дипольным магнитным моментом контура с током. Модуль момента сил можно определить по формуле $N = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B}) = p_m B \sin\alpha$.

Найдем работу, которая совершается при повороте контура. Чтобы увеличить угол α на $d\alpha$, необходима работа $dA = N d\alpha = p_m B \sin\alpha d\alpha$. Тогда потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет вычисляться так: $dW_{\text{рмех}} = p_m B \sin\alpha d\alpha$ и

$$W_{\text{рмех}} = - p_m B \cos\alpha = - \vec{p}_m \vec{B}.$$

Параллельная ориентация векторов \vec{p}_m и \vec{B} отвечает минимуму энергии и, следовательно, устойчивому положению равновесия.

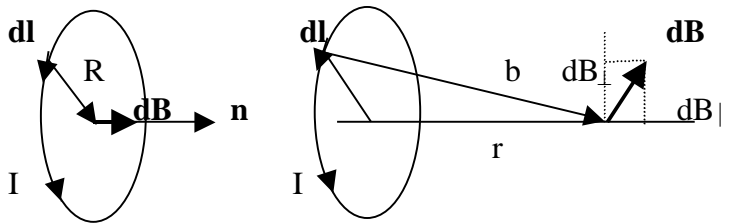
Коротко о неоднородном поле. Кроме момента сил, который может быть определен по той же формуле, что и в однородном поле, на контур будет действовать сила

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n},$$

где p_m – магнитный момент контура, а $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ – производная вектора индукции магнитного поля по направлению нормали к контуру (или по направлению магнитного момента).

III.27. Поле кругового тока. Магнитный момент.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущем по проводнику, имеющему форму



окружности радиуса R . Сначала получим величину магнитного поля в центре кольца. Для этого используем закон Био-Савара. Мысленно разделим кольцо на участки тока длиной dl . Затем определим величины и направления магнитных полей от этих участков. После этого по

принципу суперпозиции сложим все магнитные поля по правилу сложения векторов. В центре кольца направления всех магнитных полей от участков dl будут одинаковы (на рисунке), а величина будет определяться формулой

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Тогда, выполняя все перечисленные операции, получаем:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{(I\pi R^2)}{R^3}.$$

Для любого контура с током вводят понятие магнитного момента. Магнитный момент плоского контура с током определяется так: $\vec{p}_m = IS\vec{n}$. Магнитное поле в центре кольца

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{R^3}.$$

Теперь найдем поле на оси кольца. Все векторы $d\vec{B}$ от участков dl покрывают поверхность конуса, образующие которой перпендикулярны вектору \vec{B} . В силу осевой симметрии все вектора $d\vec{B}_\perp$ компенсируют друг друга и остается только составляющая $d\vec{B}_\parallel$. Тогда

$$dB_\parallel = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi b^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{b^3}.$$

Проинтегрировав по кольцу и учтя, что $b = \sqrt{r^2 + R^2}$, получаем

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi b^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

Итак, магнитное поле, создаваемое на оси кольца, кольцом с током I , определяется по формуле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Из формулы следует, что магнитное поле на оси зависит только от модуля r , поэтому поле слева и справа на оси симметрично. На больших расстояниях, когда $r \gg R$, получаем следующую формулу

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{r^3}.$$

III.28. Теорема Гаусса для вектора \vec{B} . Теорема о циркуляции для вектора \vec{B} .

По определению величина $\oint \vec{B} d\vec{S}$ - называется потоком вектора \vec{B} через некоторую замкнутую поверхность. Найдем поток вектора магнитной индукции. В силу того, что магнитных зарядов не существует, линии вектора магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца, т.е. замкнуты. Такое поле называют *вихревым*. Поэтому поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Теорема Гаусса для вектора \vec{B} : поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

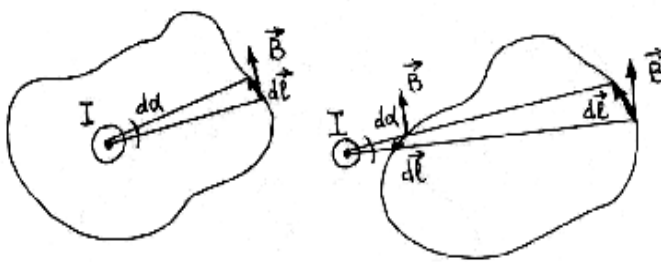
Получим дифференциальную форму теоремы Гаусса. По определению дивергенции

$$\frac{\vec{B} d\vec{S}}{dV} = \text{div} \vec{B}$$

Тогда $\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$. Это может выполняться для любого объема V , только если

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\nabla \cdot \vec{B} = 0).$$

Теперь докажем теорему о циркуляции вектора \vec{B} . Пусть в некотором объеме пространства течет по проводу сечения S ток I . Необходимо



вычислить интеграл $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$ по некоторому

замкнутому контуру L . Проще всего вычислить этот интеграл в случае прямого тока. Пусть замкнутый контур лежит в плоскости перпендикулярной к току (см. на рисунке). В каждой точке контура вектор \vec{B}

направлен по касательной к окружности, проведенной через эту точку. Поэтому $\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = B dl_{\perp}$, далее, зная, что $dl_{\perp} = r d\alpha$, получаем

$$\vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha.$$

Окончательно получаем $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\alpha = \mu_0 I$.

Если замкнутый контур не охватывает тока, то $\oint_L d\alpha = 0$ и $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$.

Важно, чтобы ток и направление обхода были связаны правилом правого винта. Все выводы сохраняются для неплоского контура. Если же в пространстве есть несколько токов I_i , тогда по

принципу суперпозиции $\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$ и

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^N \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \mu_0 I_k = \mu_0 I.$$

Таким образом,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где I – полный ток, охватываемый контуром L . Это и есть теорема о циркуляции вектора \vec{B} , или закон полного тока.

III.29. Намагничение вещества. Вектор \vec{J} .

Если в магнитное поле, образованное какими-либо токами, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться – приобретать магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле \vec{B}' , которое вместе с первичным полем \vec{B}_0 , обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Здесь под B и B' имеются в виду поля, усредненные по физически бесконечно малому объему. Поле B' , как и поле B_0 токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля B при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Это означает, что линии вектора B и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

В настоящее время установлено, что молекулы многих веществ обладают собственным магнитным моментом, обусловленным внутренним движением зарядов. Каждому магнитному моменту соответствует элементарный круговой ток, создающий в окружающем пространстве магнитное поле. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно, поэтому обусловленное ими результирующее магнитное поле равно нулю. Равно нулю и суммарный магнитный момент вещества. Последнее утверждение относится и к тем веществам, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитных моментов.

Если же вещество поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, и вещество намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. При этом магнитные поля отдельных молекул уже не компенсируют друг друга, в результате возникает поле B' .

Иначе происходит намагничивание веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитного момента. Внесение таких веществ во внешнее поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах, и молекулы, а вместе с ними и все вещество приобретают магнитный момент, что также приводит к возникновению поля B' .

Большинство веществ при внесении в магнитное поле намагничиваются слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только ферромагнитные вещества: железо, никель, кобальт, многие их сплавы и др.

Степень намагничения магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют *намагниченностью* и обозначают \vec{J} . По определению

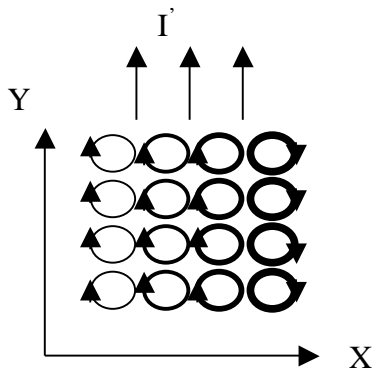
$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

где ΔV - физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки, \vec{p}_m - магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме ΔV .

Аналогично тому, как это было сделано для поляризованности \vec{P} , намагниченность можно представить как

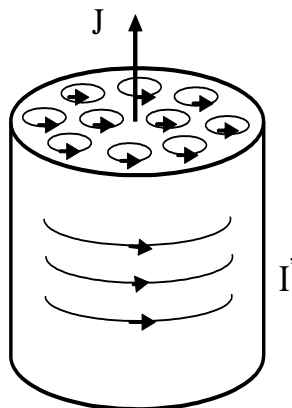
$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle,$$

где n - концентрация молекул; $\langle \vec{p}_m \rangle$ - средний магнитный момент одной молекулы. Из



последней формулы видно, что вектор \vec{J} сонаправлен со средним вектором $\langle \vec{p}_m \rangle$, поэтому в дальнейшем достаточно знать поведение вектора $\langle \vec{p}_m \rangle$ и представлять себе все молекулы в пределах объема ΔV имеющими одинаковый магнитный момент $\langle \vec{p}_m \rangle$. Это будет значительно облегчать понимание вопросов, связанных с явлением намагничивания. Например, увеличение намагниченности \vec{J} вещества означает соответствующее увеличение вектора $\langle \vec{p}_m \rangle$: если $\vec{J} = 0$, то и $\langle \vec{p}_m \rangle = 0$.

Если во всех точках вещества вектор \vec{J} одинаков, говорят, что вещество намагничено однородно.



Токи намагничивания \mathbf{I} . Намагничивание вещества, как это уже было сказано, обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием магнитных моментов отдельных молекул в одном направлении. Это же можно сказать и об элементарных круговых токах, связанных с каждой молекулой, их называют молекулярными токами. Такое поведение молекулярных токов приводит, как мы сейчас увидим, к появлению макроскопических токов \mathbf{I} , называемых токами намагничивания. Обычные токи, текущие по проводникам, связаны с перемещением в веществе носителей тока, их называют токами проводимости \mathbf{I} .

Чтобы понять, как возникают токи намагничивания, представим себе сначала цилиндр из однородного магнетика, намагниченность \vec{J} которого однородна и направлена вдоль оси. Молекулярные токи

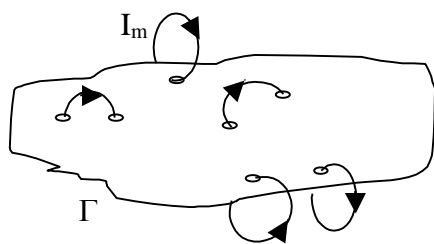
в намагниченном магнетике ориентированы, как показано на рисунке. У соседних молекул элементарные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и макроскопически взаимно компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи и образуют макроскопический поверхностный ток намагничивания \mathbf{I} , циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Ток \mathbf{I} возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и молекулярные токи вместе взятые.

Теперь представим себе другой случай: намагниченный магнетик является неоднородным. Пусть, например, молекулярные токи расположены так, как на рисунке, где толщина линий соответствует силе молекулярных токов. Эта картина означает, что вектор \vec{J} направлен за плоскость рисунка и растет по модулю при увеличении координаты X . Здесь видно, компенсации молекулярных токов внутри неоднородного магнетика уже нет, и в результате возникает объемный макроскопический ток намагничивания \mathbf{I} , текущий в положительном направлении оси Y . Соответственно говорят о линейной \mathbf{i}' (А/м) и поверхностной \mathbf{j}' (А/м²) плотностях тока.

III.30. Свойства вектора \vec{J} .

Оказывается – в этом мы сейчас убедимся, – для стационарного случая циркуляция намагниченности \vec{J} по произвольному контуру Γ равна алгебраической сумме токов намагничивания I' , охватываемых контуром Γ :

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I',$$



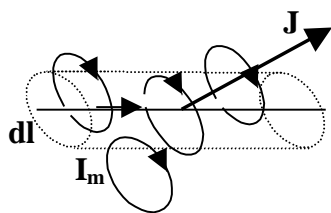
где $I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$, причем интегрирование проводится по произвольной поверхности, натянутой на контур Γ .

Для доказательства этой теоремы вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, охватываемых контуром Γ . Натянем на контур Γ произвольную поверхность S , как изображено на рисунке. Из этого рисунка видно, что одни молекулярные токи пересекают поверхность S дважды – раз в одном направлении, второй

раз в другом. Поэтому такие токи не вносят никакого вклада в результирующий ток намагничивания через поверхность S .

Но те молекулярные токи, которые обвиваются вокруг контура Γ , пересекают поверхность S только один раз. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания I' , пронизывающий поверхность S .

Пусть каждый молекулярный ток равен I_m и площадь, охватываемая им, S_m . Тогда, как видно из рисунка, элемент $d\vec{l}$ контура Γ обвивают те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь



косого цилиндрика с объемом $dV = S_m \cos \alpha dl$, где α – угол между элементом контура и направлением вектора \vec{J} в данном месте. Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз, и их вклад в ток намагничивания $dI' = I_m n dV$, где n – концентрация молекул. Подставив сюда выражение для dV , получим

$$dI' = I_m S_m n \cos \alpha dl = J \cos \alpha dl = \vec{J} d\vec{l};$$

здесь учтено, что $I_m S_m = p_m$ – магнитный момент отдельного молекулярного тока, а $I_m S_m n$ – магнитный момент единицы объема вещества. Проинтегрировав полученное выражение по всему контуру Γ , получим исходное утверждение. Теорема доказана.

Остается заметить, что если магнетик неоднородный, то ток намагничивания I' , вообще говоря, пронизывает всю поверхность, а не только у ее границы, прилегающей к контуру Γ . Именно поэтому его и можно представить как $I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$, где интегрирование распространяется по всей поверхности S , ограниченной контуром Γ . В приведенном же доказательстве нам удалось весь ток I' как бы «согнать» к границе поверхности S – прием, единственной целью которого является упростить вычисление этого тока.

III.31. Теорема о циркуляции вектора \vec{H} .

Теорема о циркуляции вектора \vec{H} (для магнитного поля *постоянных* токов). В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, поэтому циркуляция вектора \vec{B} теперь будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания, а именно:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'),$$

где I и I' – токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром Γ .

Ввиду того, что определение токов I' в общем случае задача сложная, формула становится малоприменимой в практическом отношении. Оказывается, однако, можно найти некоторый вспомогательный вектор, циркуляция которого будет определяться только токами проводимости, охватываемыми контуром Γ . Действительно, мы уже знаем, что с током I' связана циркуляция намагниченности:

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I'.$$

Предполагая, что циркуляция векторов \vec{B} и \vec{J} берется по одному и тому же контуру Γ , выразим I' в предыдущем уравнении по этой формуле, тогда:

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой \vec{H} . Итак, мы нашли некоторый вспомогательный вектор \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

циркуляция которого по произвольному контуру Γ равна алгебраической сумме токов проводимости I , охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Эта формула выражает теорему о циркуляции вектора \vec{H} : *циркуляция вектора \vec{H} по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.*

Правило знаков для токов то же, что и в случае циркуляции вектора \vec{B} .

Заметим, что вектор \vec{H} представляет собой комбинацию двух совершенно различных величин B/μ_0 и J . Поэтому вектор \vec{H} – это действительно вспомогательный вектор, не имеющий сколько-нибудь глубокого физического смысла. Его введение оправдывается простыми уравнениями для его нахождения. Размерность этого вектора – А/м.

Вектор \vec{J} был введен как вектор, зависящий от вектора результирующего магнитного поля \vec{B} . Однако принято связывать не эти векторы, а векторы \vec{J} и \vec{H} . Для большинства веществ эта связь линейна:

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость, безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика. В отличие от диэлектрической восприимчивости ϵ , которая всегда положительна, магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Соответственно магнетики разделяют на виды:

А) диамагнетики ($\chi < 0$);

Б) парамагнетики ($\chi > 0$);

В) ферромагнетики (для них зависимость нелинейная, причем $\chi \gg 1$).

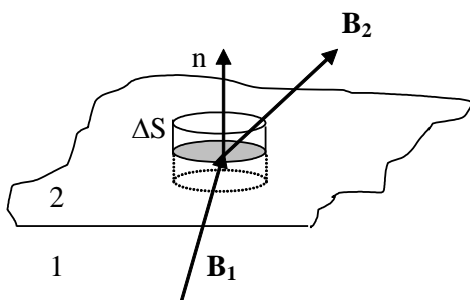
Для магнетиков с линейной зависимостью \vec{J} и \vec{H} связь между величинами становится такой:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

а величина μ называется магнитной проницаемостью вещества.

III.32 Граничные условия для векторов \vec{B} и \vec{H} .

Получим связь между векторами \vec{B} и \vec{H} по обе стороны границы раздела двух магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Это будет сделано с помощью теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.



Условие для вектора \vec{B} . Возьмем бесконечно малый цилиндр высотой h и площадью основания ΔS . Размеры его должны быть таковы, чтобы можно было считать поле на поверхности цилиндра однородным. Граница раздела делит цилиндр пополам так, как изображено на рисунке. В результате половина цилиндра находится в

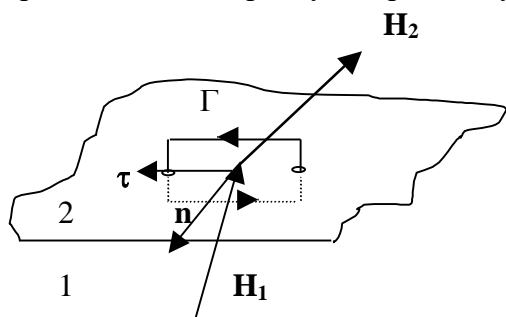
среде 1, а вторая половина – в среде 2. Обозначим индукцию магнитного поля в среде 1 как \vec{B}_1 , в среде 2 это поле будет \vec{B}_2 . Вычислим поток вектора индукции магнитного поля через поверхность цилиндра. В соответствии с теоремой Гаусса этот поток должен быть равен нулю. Расчет дает следующий результат:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \int_{\text{верх}} \vec{B} d\vec{S} + \int_{\text{дно}} \vec{B} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Так как поле в верхней части цилиндра однородно (как и в нижней), то

$$B_{2n} \Delta S - B_{1n} \Delta S + \int_{\text{бок}} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Устремим и без того малое $h \rightarrow 0$, тогда поток вектора магнитного поля через боковую поверхность цилиндра будет равен нулю. Получаем граничное условие для нормальной к



поверхности раздела компоненты вектора \vec{B} :

$$B_{2n} = B_{1n}.$$

Условие для вектора \vec{H} . Снова рассмотрим границу раздела тех же магнетиков, по которой протекает ток проводимости плотностью \vec{i} . Вычислим циркуляцию вектора \vec{H} по бесконечно малому прямоугольному контуру Γ . Контур расположен перпендикулярно поверхности раздела магнетиков

так, что половина его находится в среде 1, а вторая половина его находится в среде 2. Высота контура h к тому же много меньше длины l . На рисунке показаны направления обхода контура и направление нормали к плоской поверхности, связанной с контуром. Циркуляция вектора \vec{H} равна

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{\text{низ}} \vec{H} d\vec{l} + \int_{\text{бок}} \vec{H} d\vec{l} + \int_{\text{верх}} \vec{H} d\vec{l} = I = \int \vec{i} d\vec{\ell} = i_n l.$$

Тогда, считая поле \vec{H} в пределах контура однородным, получаем:

$$H_{2\tau} l - H_{1\tau} l = i_n l.$$

В этой формуле вектор $\vec{\tau}$ направлен вдоль плоскости контура справа налево, кроме того, учтено, что высота контура очень мала. Граничное условие для тангенциальной компоненты вектора \vec{H} приобрело окончательный вид:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_n.$$

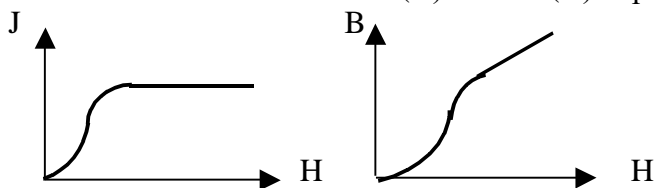
Если токов проводимости на границе раздела нет, то граничное условие упрощается:

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}.$$

III.33 Ферромагнетизм.

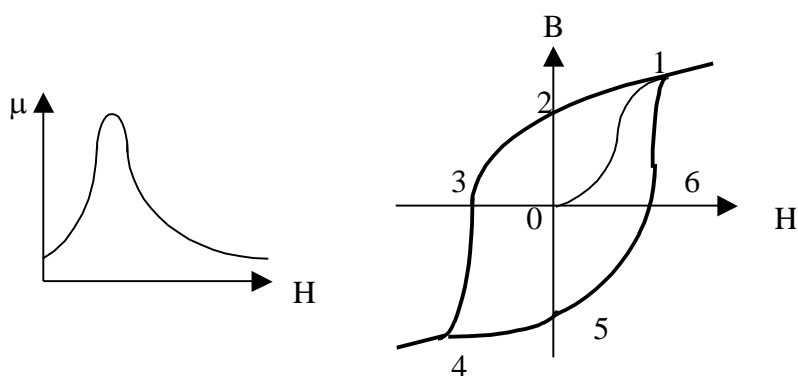
Ферромагнетиками называют вещества, которые могут обладать *спонтанной намагниченностью*, то есть намагничены уже при отсутствии внешнего поля. Типичные представители этого класса магнетиков – это железо, кобальт и многие их сплавы.

Основная кривая намагничения. Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость $J = f(H)$ и $B = f(H)$. Кривая $J = f(H)$, на которой намагниченность $J = 0$



при $H = 0$, называется основной кривой намагничения. При увеличении магнитного поля J выходит на плато (то есть перестает зависеть от H) уже при малых H . Это говорит о том, что достаточно небольших полей, чтобы ориентировать все имеющиеся у молекул магнитные моменты вдоль поля.

Индукция магнитного поля определяется формулой $B = \mu_0 (H + J)$, поэтому она растет с увеличением поля H . Ввиду нелинейной зависимости $B(H)$ для ферромагнетика нельзя ввести магнитную проницаемость μ как постоянную величину, а только как функцию $\mu = f(H)$. Ее вид изображен на соответствующем рисунке. Максимальное значение магнитной проницаемости для ферромагнетиков может достигать величины 100000. Отметим, что все величины получены из основной кривой намагничения.



первоначально ненамагниченный ферромагнетик намагничивать, то зависимость B от H идет по основной кривой намагничения. Но если после достижения насыщения (линейная зависимость B от H) уменьшать H , то кривая пойдет выше (линия 1–2), а затем пройдет точки 2–3–4. Если же теперь проделать все дальше, то кривая пройдет через точки 4–5–

6–1. Если в точках 1 и 4 наступает насыщение, то такую петлю называют максимальной петлей гистерезиса. Ясно, что у ферромагнетика при $H = 0$ намагниченность не исчезает, и отрезок $O2$ на оси B называют *остаточной индукцией* B_r . При этом остается остаточная намагниченность J_r . Это и есть постоянные магниты. Чтобы полностью размагнитить ферромагнетик, необходимо приложить обратное магнитное поле, по величине равное отрезку $O3$ на оси H . Это поле называется *коэрцитивной силой* H_c . Для обычных ферромагнетиков эти величины имеют порядок: $B_r \cong 1$ Тл; $H_c \cong 100 - 1000$ А/м.

Температура Кюри. При повышении температуры способность ферромагнетика намагничиваться уменьшается, и при температуре, которая называется T_c (точка Кюри), ферромагнетик превращается в парамагнетик. Дело в том, что активное тепловое движение разрушает упорядоченность.

Физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой механики. При определенных условиях в кристаллах могут возникать так называемые обменные силы, которые заставляют магнитные моменты электронов усаживаться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного, то есть самопроизвольного, намагничения – эти области называются доменами. Поскольку обменные силы короткодействующие, то размер домена исчисляется микронами. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направления магнитных моментов для каждого домена различны, поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля полный магнитный момент всего ферромагнетика равен нулю и образец ненамагничен. При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля. Такой рост доменов в слабых полях имеет обратимый характер. В более сильных полях происходит одновременная переориентация магнитных моментов в пределах всего домена. Этот процесс является необратимым, что и служит причиной гистерезиса. После выключения внешнего поля намагниченность не исчезает, и ферромагнетик становится постоянным магнитом.

III.34 Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

В 1831 году Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике - открыто явление электромагнитной индукции. Суть его в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток был назван индукционным. Появление

индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции (то есть электрическое поле). При этом весьма замечателен тот факт, что ЭДС индукции не зависит ни от чего, кроме скорости изменения магнитного потока Φ : $-\text{d}\Phi/\text{d}t$. Фарадей обнаружил, что индукционный ток можно получить двумя способами:

- 1) перемещением контура (или его части) в магнитном поле;
- 2) в неподвижном контуре созданием переменного магнитного поля.

Индукционный ток подчиняется правилу Ленца. Направление индукционного тока (а значит и знак ЭДС индукции) определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Другая формулировка: индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Закон электромагнитной индукции. В 1845 году Ф.Э.Нейман дал математическое определение закона электромагнитной индукции:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак «-» в этом уравнении связан с определенным правилом знаков. Знак магнитного потока Φ связан с выбором нормали к поверхности S , а знак E_i связан с выбором положительного направления обхода по контуру (направление индукционного тока). Здесь предполагается, что направление нормали \vec{n} к контуру и положительное направление обхода связаны правилом правого винта.

Полный магнитный поток (потокосцепление). Если контур состоит из N витков, то в каждом одинаковом витке индуцируется одинаковая E_i , а полная ЭДС индукции будет суммой этих E_i . Если один виток охватывает магнитный поток Φ_1 , то суммарный магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на такой сложный контур, можно представить как $\Psi = N\Phi_1$. Это и есть потокосцепление. Тогда ЭДС индукции

$$E_i = -N \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

III.35 Явление самоиндукции. Индуктивность.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда меняется магнитный поток через контур. При этом не важно, с чем связано изменение магнитного потока. Если ток в контуре изменяется со временем, то меняется и величина магнитного поля, а, следовательно, и магнитный поток. Таким образом, в случае изменения тока в контуре в нем возникает ЭДС индукции. Это явление названо самоиндукцией.

Индуктивность. Если в пространстве, где находится контур с током I , нет ферромагнетиков, то магнитное поле, а значит и магнитный поток Φ через контур будут прямо пропорциональны току I . Тогда можно записать:

$$\Phi = LI.$$

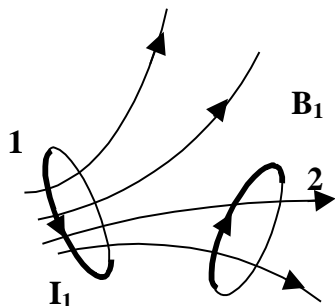
В этой формуле величина L называется индуктивностью контура. По определению $L > 0$. Индуктивность L зависит от формы и размера контуров, а также от магнитных свойств окружающей среды. Единица измерения индуктивности – 1 Генри (Гн). 1 Гн – это индуктивность такого контура, у которого при токе 1 А магнитный поток равен 1 Веберу. При изменении силы тока в контуре согласно закону электромагнитной индукции возникает ЭДС самоиндукции E_s :

$$E_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Если $L = \text{Const}$ (не изменяется конфигурация контура и $\mu = \text{Const}$), то

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Знак «-» показывает, что E_s всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока – в соответствии с правилом Ленца. Эта ЭДС старается сохранить ток неизменным: если ток в контуре уменьшается, то ЭДС самоиндукции стремится его увеличить. Особенно сильно это явление проявляется при включении и выключении тока в цепи, содержащей большую индуктивность.



III.36 Взаимная индукция. Взаимная индуктивность.

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенных достаточно близко друг к другу. Если в контуре 1 течет ток I_1 , то он создает магнитное поле, которое пронизывает контур 2. В контуре 2 магнитный поток, связанный с током I_1 , равен Φ_2 . Естественно, что Φ_2 будет пропорционален току I_1 (при отсутствии ферромагнетиков). Коэффициент пропорциональности обозначим через L_{21} . Для этого случая связь между потоком и током будет такова:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1.$$

Аналогично, в случае, когда ток течет в контуре 2, а магнитный поток пересекает контур 1, получаем

$$\Phi_1 = L_{12} I_2.$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называют коэффициентами взаимной индуктивности контуров. Взаимная индуктивность численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре. Коэффициенты L_{12} и L_{21} зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Размерность взаимной индукции – Генри.

Теорема взаимности. Соответствующий, достаточно сложный, расчет дает (а опыт подтверждает), что при отсутствии ферромагнетиков коэффициенты L_{12} и L_{21} одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Это и есть теорема взаимности. Смысл этой теоремы в том, что одинаковые токи в обоих контурах создают одинаковый магнитный поток в другом контуре.

Взаимная индукция. Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре возникает ЭДС индукции. Это явление и называют взаимной индукцией. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС, возникающие в контурах 1 и 2, равны, соответственно,

$$E_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}; E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Контуры считаются неподвижными, и нет ферромагнетиков. С учетом явления самоиндукции ток в 1 контуре можно будет найти из уравнения:

$$R_1 I_1 = E_1^* - L \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

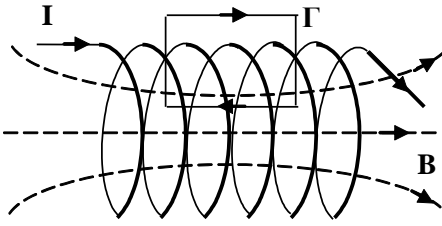
Аналогичное уравнение можно записать для тока во 2 контуре. Величиной E_1^* обозначена сторонняя ЭДС (не связанная с взаимной индукцией). Явление взаимной индукции положено в основу работы трансформаторов.

III.37 Индуктивность соленоида.

Соленоидом называется катушка из тонкого провода, намотанного на каркас. Пространство внутри катушки может быть заполнено материалом с магнитной проницаемостью μ . Рассмотрим идеальный соленоид: длина его L гораздо больше радиуса R . В этом случае при пропускании через соленоид тока I внутри соленоида возникает однородное магнитное поле с линиями

индукции, параллельными оси соленоида. Вне соленоида при этом магнитного поля нет. Для нахождения величины магнитного поля воспользуемся теоремой о циркуляции для вектора \vec{H} :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I.$$



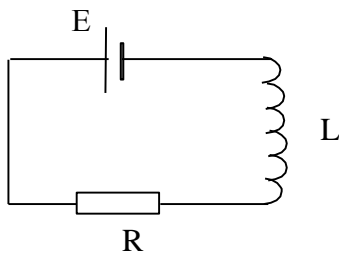
Для нахождения циркуляции выберем контур, как показано на рисунке. Тогда, поскольку вне контура поля нет, а на вертикальных участках контура магнитное поле перпендикулярно направлению обхода, получаем: $Hl = nI$, здесь n – число витков на единицу длины соленоида. Для магнитного поля $B = \mu_0 H = \mu_0 nI$. Индуктивность можно теперь определить по формуле

$$L = N \frac{\Phi_1}{I} = N \frac{BS}{I} = N \frac{\mu_0 nIS}{I} = \mu_0 n^2 V.$$

В этой формуле V – объем соленоида.

III.38 Энергия магнитного поля.

Получим общую формулу для энергии магнитного поля на простом примере. Рассмотрим цепь, состоящую из индуктивности, сопротивления и источника ЭДС. Подключим источник к цепи, тогда закон Ома для нее будет выглядеть так:



$$IR = E + E_s,$$

где E_s – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при включении тока. Умножим обе части уравнения на $I dt$, тогда $E I dt = I^2 R dt - E_s I dt = dQ + I d\Phi$.

Это работа, совершаемая источником. Она идет на выделение джоулева тепла в цепи и на работу против ЭДС самоиндукции. Ее величина определяется формулой $\delta A^{\text{доп}} = I d\Phi$. Эта формула верна во всех случаях (даже при наличии ферромагнетиков). Далее используем определение индуктивности ($\Phi = LI$) и получим следующие формулы: $\delta A^{\text{доп}} = LI dI$ и $A^{\text{доп}} = LI^2/2$. Эта работа идет на создание магнитного поля в катушке:

$$W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Это магнитная энергия тока, или собственная энергия тока. Теперь на основе этой формулы получим энергию магнитного поля. Выразим полученную энергию через индукцию магнитного поля B и используем полученную ранее формулу для индуктивности соленоида: $L = \mu_0 n^2 V$.

Тогда $W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V I^2$. Но так как $nI = H = \frac{B}{\mu_0}$, то $W_{\text{магн}} = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} V$. Эта

формула выведена для однородного магнитного поля, но, тем не менее, она справедлива для любого магнитного поля:

$$W_{\text{магн}} = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV.$$

Эта магнитная энергия распределена в пространстве с плотностью

$$\omega_m = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

III.39 Уравнения Максвелла.

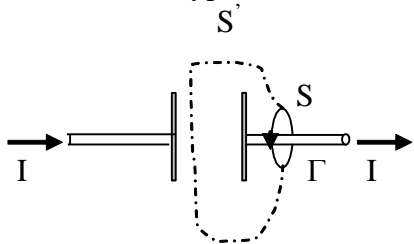
Теория электромагнитного поля, начала которой заложил Фарадей, математически была завершена Максвеллом. При этом главное, что сделал Максвелл, было предположение о симметрии во взаимозависимости полей \vec{E} и \vec{H} . Дело в том, что поскольку меняющееся во времени магнитное поле $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ создает электрическое поле (закон электромагнитной индукции),

следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ создает магнитное поле.

Эту идею Максвелла можно обосновать следующим рассуждением. Рассмотрим разряжающийся конденсатор. Вычислим циркуляцию напряженности магнитного поля \vec{H} с помощью теоремы о циркуляции, полученной для магнитоэстатического случая:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S}.$$

В качестве контура Γ для вычисления циркуляции выберем окружность, охватывающую ток, а



поверхности, с ним связанные, выберем две – плоский круг S и поверхность S' . Обе поверхности имеют равные края, но через плоскость круга течет ток проводимости, а через поверхность S' – не течет. Получается, что для переменных токов циркуляция \vec{H} зависит от выбора поверхности. Этого не может быть, следовательно, в рассуждениях (формулах) допущена ошибка. Для переменных полей теорему о циркуляции необходимо изменить. Следуя за Максвеллом,

заметим, что поверхность S' пронизывают только линии электрического поля. Используем поверхности S и S' в качестве замкнутой поверхности для теоремы Гаусса для вектора \vec{D} : $\oint \vec{D} d\vec{S} = q$. Продифференцируем по времени это соотношение и дополним его уравнением непрерывности:

$$\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}; \quad \oint_s \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Объединив эти соотношения, получим формулу:

$$\oint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0.$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение непрерывности для случая переменных токов. Второе слагаемое в скобках Максвелл назвал *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сумму токов проводимости и смещения назвали полным током:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В соответствии с уравнением непрерывности, линии полного тока являются непрерывными: там, где кончается ток проводимости, начинается ток смещения. Теперь необходимо вместо тока проводимости в теорему о циркуляции вектора \vec{H} подставить полный ток и все противоречия, о которых говорилось ранее, будут сняты:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Это уравнение и является одним из главных достижений Максвелла. В дифференциальной форме это уравнение можно записать, используя, математический оператор – ротор. Определим ротор вектора как

$$\vec{H}d\vec{l} = \text{rot}\vec{H}d\vec{S}.$$

Тогда дифференциальная форма полученного уравнения запишется так:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Запишем полную систему уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \oint \vec{B}d\vec{S} = 0;$$

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint \vec{D}d\vec{S} = \int \rho dV.$$

Первые два уравнения показывают, что магнитное поле может возникать из-за движения зарядов, либо в связи с переменным электрическим полем. Второе уравнение можно трактовать как отсутствие магнитных зарядов. Вторые два уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникать по двум причинам: при наличии электрических зарядов, а также при наличии переменного со временем магнитного поля. Внутри этих уравнений заключены все законы электромагнетизма, начиная с закона Кулона и заканчивая законом электромагнитной индукции. Хочется отметить, что это открытие Максвелл сделал чисто теоретически.

Запишем дифференциальную форму уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div}\vec{B} = 0;$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div}\vec{D} = \rho.$$

Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями (запишем их для случая, когда на границе раздела двух сред нет ни сторонних зарядов, ни токов проводимости):

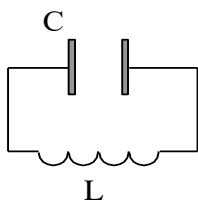
$$D_{1n} = D_{2n}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad B_{1n} = B_{2n}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Но и это еще не полная система уравнений. Она должна быть дополнена так называемыми материальными уравнениями. Если электромагнитное поле возбуждено в однородной среде, характеризуемой величинами диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ и проводимостью σ , то

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}; \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.

III.40 Электромагнитные колебания.



Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивности L . В реальном контуре всегда присутствует сопротивление R , но мы будем рассматривать идеальный контур и это сопротивление не учитывать. Зарядим конденсатор и замкнем ключ. Протекание тока будет происходить в соответствии с законом Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + E_s.$$

Поскольку $R = 0$, $E_s = -L \frac{dI}{dt}$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$, то уравнение приобретает вид:

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Обозначим точкой над физической величиной ее производную по времени $I = \dot{q}$, тогда

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний величины q с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. При этом

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Период электромагнитных колебаний определяется формулой Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Напряжение на конденсаторе и ток в катушке теперь можно записать так:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha); I = \dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Теперь можно записать полную энергию колебаний:

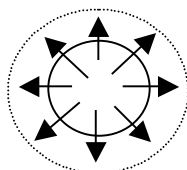
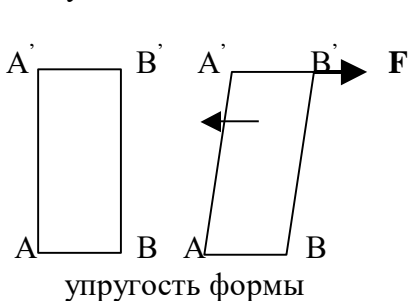
$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \alpha(t) + \frac{q_0^2}{2} L \omega_0^2 \sin^2 \alpha(t) = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = W_{\max}^{\text{эл}} = W_{\max}^{\text{магн}}.$$

Кроме того, амплитуды напряжения и тока связаны соотношением:

$$I_m \sqrt{\frac{L}{C}} = U_m.$$

III.41 Продольные и поперечные упругие волны

Любая колебательная система взаимодействует с окружающей средой, вызывая вынужденные колебания ближайших точек среды. При этом предполагается, что окружающее пространство представляет собой сплошную упругую среду. Тело считается упругим, если деформации, вызванные внешним воздействием, исчезают после его прекращения. При этом выполняется закон Гука:



$$dp = -k \frac{dV}{V}.$$

В этой формуле dp – давление, созданное колебательным движением, а k – модуль объемной упругости. Существует два вида упругости: упругость формы и объемная упругость. На рисунке проиллюстрированы оба вида упругости. Если тело стремится вернуть исходную форму, то есть вернуться в исходное состояние, то это упругость формы. Такая упругость присуща твердым телам. Для жидкостей и газов характерна лишь объемная упругость.

Таким образом, если в какой-либо точке среды возникают колебания, то за счет упругих свойств среды они передаются в другие точки и вызывают там деформации. Механическое возмущение, распространяющееся в упругой среде, называется упругими или механическими волнами. Ясно, что

волновой процесс периодический. Если частота колебаний в упругой волне лежит в диапазоне 20 – 20000 Гц, то такие волны воспринимает человеческое ухо – это слышимый звук.

Различают два вида волн: продольные и поперечные. Упругая волна называется продольной, если частицы среды совершают колебания в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной упругостью и могут существовать в любой среде. Упругая волна называется поперечной, если частицы среды совершают колебания, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Эти волны связаны с упругостью формы и могут существовать только в твердых телах.

III.42 Уравнение волны.

В нашу задачу входит определение величины деформации (то есть отклонения от положения равновесия) точек среды в зависимости от координат и времени. Ясно, что волновой процесс сопровождается переносом энергии. Различают бегущие волны (с переносом энергии) и стоячие волны (без переноса энергии).

Упругая волна называется синусоидальной (гармонической), если соответствующие ей колебания среды являются гармоническими. Частота колебаний называется частотой волны. Волна распространяется в среде с некоторой скоростью v , поэтому она дойдет от одной точки к другой точке за время t . Если волна вышла из некоторой точки в момент времени t_0 , то $t - t_0 = \ell / v$. Это означает, что фаза колебаний в двух точках среды, находящихся на расстоянии ℓ друг от друга, будет отличаться на $\Delta\alpha = \omega(t - t_0) = \omega \ell / v$.

Геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение, называется волновой поверхностью. Точки, до которых дошла волна, называются волновым фронтом. Перпендикуляр к волновой поверхности называется лучом.

Волна называется плоской, если ее волновые поверхности представляют собой плоскости, параллельные друг другу.

Теперь напишем уравнение плоской волны. Если не рассматривать поглощение средой энергии, то амплитуда колебаний в каждой точке одинакова и отклонение частиц среды от своего положения равновесия будет зависеть от времени и координаты, отсчитанной по оси луча: $S = f(x, t)$. Если в начале координат ($x = 0$) колебания начались в момент времени $t = 0$, то в точку с координатой x они дойдут в момент времени $t = x/v$. Колебания в этой точке будут происходить по тому же закону, что и в начале координат, но с запаздыванием:

$$S(x = 0, t) = A \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$S(x = x, t) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha_0\right)$$

Расстояние, которое волна проходит за время, равное периоду колебаний, называется длиной волны:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

Тогда для плоской гармонической волны уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$S(x, t) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha_0\right)$$

Величина A называется амплитудой волны, а α_0 – ее начальной фазой. Часто используется понятие волновой вектор (волновое число): \vec{k} . Его модуль равен $k = 2\pi/\lambda$, а направление совпадает с направлением скорости волны. Если волна плоская, но распространяется в произвольном направлении (не по оси x), то ее уравнение имеет следующий вид:

$$S(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0)$$

Для сферической волны аналогичное уравнение таково:

$$S(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr + \alpha_0)$$

Величина $\Phi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0$ называется фазой волны.

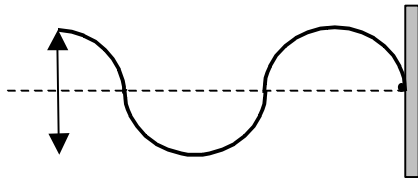
III.43 Стоячие упругие волны.

Возьмем шнур и закрепим его на стене, как показано на рисунке. Возбудим в шнуре поперечную синусоидальную волну. Тогда поперечные смещения точек шнура будут подчиняться закону

$$S_1 = A_1 \cos(\omega t - kx)$$

Если изменить знак перед слагаемым kx , то получим волну

$$S_2 = A_2 \cos(\omega t + kx),$$



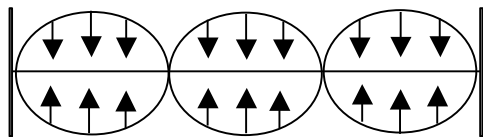
распространяющуюся в обратном направлении. Такую волну можно получить, если отразить от стенки первую волну. Поэтому волна S_1 называется падающей волной, а S_2 – отраженной. Если отражение происходит без потери энергии, то амплитуды обеих волн одинаковы $A_1 = A_2 = a$. От сложения таких волн получается волна, колебания в которой происходят по закону:

$$S = S_1 + S_2 = a \{ \cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) \} = 2a \cos kx \cos \omega t.$$

Такая волна называется стоячей. В этой волне каждая точка шнура, характеризуемая координатой x , совершает колебания с частотой ω и амплитудой $|2a \cos kx|$. Точки шнура, в которых выполняется условие $\cos kx = 0$, называются узлами смещения. В этих точках амплитуда колебаний равна нулю. Точки, где амплитуда колебаний максимальна, называются пучностями смещения. Расстояние между двумя узлами (двумя пучностями) можно определить из условия $k \cdot \Delta x = \pi$.

Получаем, что это расстояние равно половине длины волны. Все точки, расположенные между двумя соседними узлами, совершают колебания в одной фазе. Узлы смещения как бы разделяют шнур на независимые области, в которых совершаются независимые гармонические колебания. Никакой передачи энергии между этими областями нет.

Если длина шнура неограниченна, то частота ω , а, следовательно, и длина стоячей волны могут



быть любыми. Если же оба конца шнура закрепить, а затем дернуть его, то в обе стороны побегут волны всевозможных частот и начнут отражаться от закреплений. Возникнет сложное нестационарное движение. Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных

частотах колебаний: закрепленные концы шнура должны быть узлами стоячей волны. Отсюда следует, что на длине шнура L должно укладываться целое число полуwave:

$$\lambda = \frac{2L}{n}; \omega_n = \frac{2\pi\nu}{\lambda} = \frac{\pi\nu}{L} n; n = 1, 2, 3, \dots$$

В этих формулах ν – скорость упругих волн в шнуре, L – длина шнура. Значения n определяют набор собственных (или нормальных) колебаний шнура. Собственные колебания с наименьшей частотой $\omega_1 = \pi\nu/L$ называются основным тоном, остальные называются обертонами, или гармониками. Аналогичные явления можно наблюдать и для колебаний в стержнях, как продольных, так и поперечных.

III.44 Волновое уравнение для электромагнитных волн.

Итак, мы ранее говорили, что уравнения Максвелла имеют решение в виде электромагнитных волн. Получим эти решения для простейшего случая: однородная ($\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$), непроводящая ($j = 0$), нейтральная (плотность зарядов $\sigma = 0$) среда. В этом случае систему уравнений Максвелла можно записать с помощью оператора ∇ в виде

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \nabla \cdot \vec{D} = 0; \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

К этим уравнениям добавим материальные уравнения: $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}; \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Эту систему будем решать следующим образом. Вычислим векторную производную (то есть оператор $\nabla \times$) от первого уравнения Максвелла. Получим следующее соотношение:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}).$$

Подставим из второго уравнения Максвелла значение последней скобки, тогда

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\mu \epsilon \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Первая часть уравнения представляет собой *двойное векторное произведение*, которое можно раскрыть с помощью мнемонического правила – «бац минус цаб»:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Тогда левая часть уравнения приобретает вид (учтено, что третье уравнение Максвелла дает $\nabla \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \nabla \vec{E} = 0$):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\nabla \cdot \nabla) = -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}.$$

Оператор $\Delta = \nabla^2$ называется оператором Лапласа. Окончательный вид уравнения для электромагнитной волны выглядит так:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Чуть ниже мы покажем, что это действительно уравнение, дающее волновое движение, а сейчас констатируем, что волновое движение происходит со скоростью, которую дает данное уравнение:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Для вакуума $\epsilon = \mu = 1$ и $v_{\text{вак}} = c$. Для магнитного поля уравнение выглядит аналогично:

$$\Delta \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Максвелл теоретически предсказал существование такого решения, девять лет спустя (1888) Г.Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн. С помощью вибратора (искрового разрядника) он получил электромагнитную волну, а затем исследовал ее свойства (отражение, преломление и др.).

По виду волнового фронта (то есть точек пространства, до которых дошли электромагнитные колебания) волны разделяют на плоские, сферические, цилиндрические и др. Далее мы будем рассматривать простейший вид волнового фронта – плоский. Итак, рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Тогда волновое уравнение приобретет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_+ f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{E}_- f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Первое слагаемое в ответе представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси, второе слагаемое – такую же волну, но движущуюся в обратном направлении. Точный вид зависимости может быть произвольным. Простейшее решение этого уравнения называется синусоидальным или гармоническим и имеет вид

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \text{Sin}(\omega t - kx + \alpha_0).$$

В этой формуле E_0 – амплитуда колебаний электрического поля в данной точке пространства, ω – частота колебаний в волне, k – волновой вектор (волновое число), равный $k = \omega/v$, α_0 – начальная фаза колебаний в данной точке пространства. Гармоническая или монохроматическая волна (от оптики – одноцветная) – это идеальный объект, в природе не встречающийся в чистом виде. Но в некоторых условиях реальная волна может быть описана как гармоническая. Любую волну можно представить как сумму гармонических волн. В этом нам помогает принцип суперпозиции для электрического и магнитного полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots;$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \dots$$

III.45 Свойства плоской монохроматической волны.

Уравнения для электрического и магнитного полей в плоской монохроматической волне можно записать в виде:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_m \sin(\omega t - kx + \alpha_E)$$

$$\vec{H}(x, t) = \vec{H}_m \sin(\omega t - kx + \alpha_H)$$

Исследуем свойства этих решений. Для этого нам потребуется комплексное представление чисел:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha; \operatorname{Re}(e^{i\alpha}) = \cos\alpha; \operatorname{Im}(e^{i\alpha}) = \sin\alpha.$$

Тогда $\vec{E} = \vec{E}_m \operatorname{Im}(e^{i(\omega t - kx + \alpha_E)}) = \vec{E}_m \operatorname{Im} e^{i\Phi_E}$. Далее значок Im писать не будем.

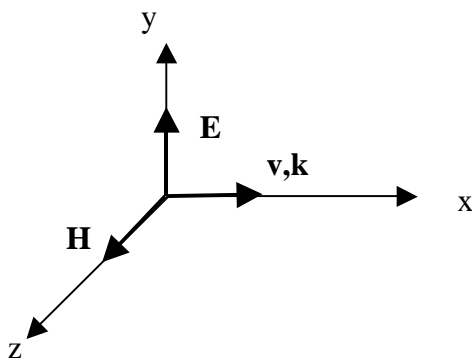
Свойства ПМВ.

1) Электромагнитные волны – поперечные. Для доказательства этого надо показать, что $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{H} \perp \vec{k}$. Покажем это:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H}; \nabla \times \vec{E} = \nabla(e^{i\Phi_E} \times \vec{E}_m) = -i\vec{k} \times \vec{E}; \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}.$$

Тогда $-i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H}$; и $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}$; значит условие перпендикулярности выполнено:

$\vec{H} \perp \vec{k}$. Точно так же доказывается и второе условие.



2) Векторы электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны: $\vec{H} \perp \vec{E}$. Это условие так же сразу следует из формулы $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}$. Теперь можно утверждать, что векторы $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ составляют правую тройку векторов, что и показано на рисунке. Напоминаем, что рассматривается плоская электромагнитная волна. Однако на рисунке она еще и плоско поляризована (свойство 5).

3) Колебания векторов электрического и магнитного полей волны происходят в фазе: $\alpha_E = \alpha_H$. Покажем это для

конфигурации, изображенной на рисунке. Векторы \vec{E} и \vec{H} имеют проекции $\vec{E} \Rightarrow (0, E_y, 0)$; $\vec{H} \Rightarrow (0, 0, H_z)$. Для вектора $\vec{k} \Rightarrow (k_x, 0, 0)$. Из уравнения $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}$ следует, что $k_x E_y \vec{e}_z = \mu_0 \omega H_z \vec{e}_z$, тогда

$$k E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_E) = \mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_H).$$

Аналогично из уравнения $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ можно получить

$$k H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_H) = \epsilon \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_E).$$

Для совместного выполнения этих условий необходимо, чтобы $\alpha_E = \alpha_H$.

4) Связь амплитуд электрического и магнитного полей в волне. Для совместного выполнения предыдущих уравнений необходимо еще и выполнение условий $k E_m = \mu_0 \omega H_m$ и $k H_m = \epsilon \epsilon_0 \omega E_m$. Из них следует искомая связь:

$$\epsilon \epsilon_0 E_m^2 = \mu_0 H_m^2.$$

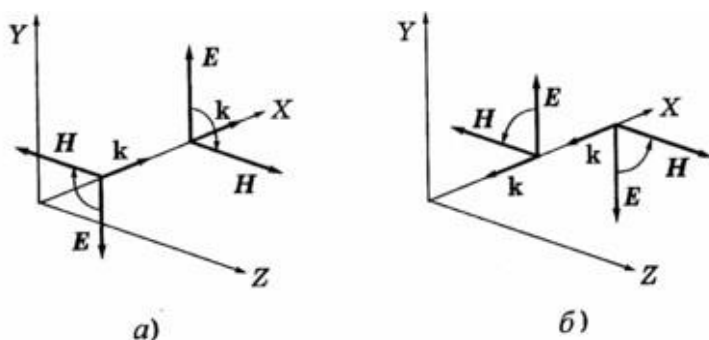
5) Поляризация волны. Направления векторов \vec{E} и \vec{H} в монохроматической плоской волне может быть произвольным, что и выполняется, например, для естественного света

(электромагнитной волны видимого диапазона). ЭЛМ волна, в которой направления колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} упорядочены каким-либо образом, называется поляризованной. Если колебания вектора \vec{E} (а, вместе с ним и конец вектора \vec{H}) происходят в одной плоскости при движении волны, то такая ЭЛМ волна называется линейно (плоско) поляризованной. Если конец вектора \vec{E} (а, вместе с ним и конец вектора \vec{H}) при движении волны описывает эллипс (смотреть против направления вектора \vec{k}), то волна называется эллиптически поляризованной.

III.46 Стоячая электромагнитная волна.

Пусть имеется плоская ЭЛМ волна, движущаяся в направлении оси x. Эта волна характеризуется векторами $\vec{E} \Rightarrow (0, E_y, 0)$ и $\vec{H} \Rightarrow (0, 0, H_z)$. Уравнения волны для проекций векторов \vec{E} и \vec{H} таковы: $E_y = E_m \sin(\omega t - kx); H_z = H_m \sin(\omega t - kx)$.

В направлении оси x находится идеально отражающая стенка, расположенная перпендикулярно движению волны. В результате получаем отраженную волну, проекции векторов в которой $E_y = E_m \sin(\omega t + kx); H_z = -H_m \sin(\omega t + kx)$.

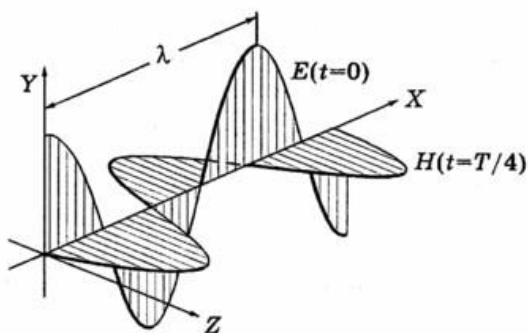


Напомним, что векторы $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ составляют правую тройку векторов. В результате суперпозиции двух волн получаем волну, проекции векторов \vec{E} и \vec{H} которой выражаются формулами:

$$E_y^{ст} = 2E_m \cos kx \sin \omega t$$

$$H_z^{ст} = 2H_m \sin kx \cos \omega t$$

Это и есть стоячая ЭЛМ волна. Она состоит из двух стоячих волн – электрической и магнитной. Колебания электрического поля сдвинуты по фазе относительно колебаний магнитного поля на $\pi/2$. В этой волне в каждой точке амплитуда колебаний разная. Точки, где амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами. Точки, в которых амплитуда колебаний соответствующего вектора максимальна, называются пучностями. Расстояния между двумя узлами (или двумя пучностями) равно половине длины волны $\lambda/2$. Напомним, что длиной волны называется расстояние, которое волна проходит за период колебаний:



$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$$

В стоячей ЭЛМ волне узлы магнитного поля совпадают с пучностями электрического поля. Энергия электромагнитного поля не переходит ни через один из узлов.

III.47 Энергия и поток энергии ЭЛМ волн. Вектор Пойнтинга.

Исходя из того, что если энергия уменьшается, значит, она куда-то уходит, положим, что энергия ЭЛМ поля не только имеет свою плотность

$$w = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2},$$

но и некий вектор \vec{S} , называемый плотностью потока энергии.

Теперь сформулируем теорему Пойнтинга:

Убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограничивающую этот объем, плюс работа, совершенная в единицу времени (то есть мощность), которую поле производит над зарядами вещества внутри данного объема.

Математически это выглядит так:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{S} d\vec{A} + P,$$

где величина $d\vec{A}$ обозначает элемент поверхности, $W = \int w dV$, $P = \int \vec{j} \vec{E} dV$.

Получим формулу для вектора Пойнтинга. По своему определению, это вектор, модуль которого равен энергии, проходящей через единицу площади за единицу времени, а направление совпадает с направлением скорости волны $\vec{S} = w\vec{v}$. Анализируя свойства ЭЛМ волны, можно прийти к выводу, что

$$\vec{v} = v \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{EH} = v \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{EH}.$$

Пользуясь свойством 4 ЭЛМ волны, получаем $w = EH/v$. Тогда окончательный вид таков:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Модуль вектора Пойнтинга равен $S = EH$.

III.48 Импульс электромагнитного поля.

Пусть на какое-либо проводящее тело падает электромагнитная волна. Электрическое поле волны возбудит в этой среде ток плотностью (σ - удельная электропроводность среды)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Магнитное поле волны будет воздействовать на этот ток силой (на единицу объема)

$$\vec{F}_{\text{ед.об}} = [\vec{j}, \vec{B}] = \mu_0 [\vec{j}, \vec{H}].$$

Эта сила оказывает давление на вещество. Поскольку это давление на вещество со стороны электромагнитной волны, то и вещество, и электромагнитное поле должны изменить свой импульс. Причем по закону сохранения импульса эти изменения должны быть по модулю одинаковы. Таким образом, закон сохранения импульса требует наличия у электромагнитного поля импульса. Обозначим импульс электромагнитного поля как \vec{K} . Он будет по модулю равен импульсу, передаваемому среде электромагнитной волной, который, в свою очередь, может быть определен из уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = F.$$

Поверхностному слою площадью S и толщиной dl за время dt сообщается импульс

$$dK = F_{\text{ед.об}} \cdot S \cdot dl \cdot dt = \mu_0 \cdot j \cdot H \cdot S \cdot dl \cdot dt.$$

В этом же слое за это же время поглощается энергия

$$dW = j \cdot E \cdot S \cdot dl \cdot dt,$$

которая выделяется в виде тепла. И импульс, и энергия передаются среде волной. Эти величины оказываются связанными соотношением

$$K = \mu_0 \frac{H}{E} W.$$

Используя свойство 4 электромагнитных волн, можно записать окончательный ответ:

$$K = \frac{1}{c} W.$$

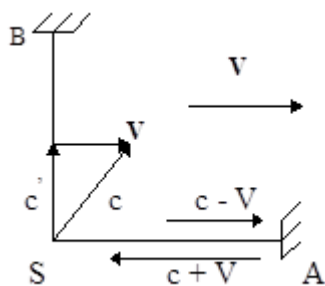
ЧАСТЬ IV. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

IV.1 Принцип относительности Галилея и опыт Бертоцци.

Специальная теория относительности, созданная Эйнштейном в 1905 году, по своему основному содержанию может быть названа *физическим учением* о пространстве и времени. Физическим потому, что свойства пространства и времени в этой теории рассматриваются в теснейшей связи с законами совершающихся в них физических явлений. Термин «специальная» подчеркивает то обстоятельство, что эта теория рассматривает явления только в инерциальных системах отсчета. Прежде чем перейти к ее изложению, сформулируем основные принципы ньютоновской механики:

- 1) Пространство имеет 3 измерения; справедлива евклидова геометрия.
- 2) Время существует независимо от пространства в том смысле, в котором независимы три пространственных измерения.
- 3) Промежутки времени и размеры тел не зависят от системы отсчета.
- 4) Признается справедливость закона инерции Ньютона - Галилея (I закон Ньютона).
- 5) При переходе от одной ИСО к другой справедливы преобразования Галилея для координат, скоростей и времени.
- 6) Выполняется принцип относительности Галилея: все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу в отношении механических явлений.
- 7) Соблюдается принцип дальнего действия: взаимодействия тел распространяются мгновенно, то есть с бесконечной скоростью.

Эти представления ньютоновской механики вполне соответствовали всей совокупности экспериментальных данных, имевшихся в то время. Со временем исследованию подверглись такие явления и процессы, при которых относительные скорости движения тел были велики (сравнимы со скоростью распространения света в вакууме). И тогда оказалось, что в ряде случаев механика Ньютона не работала. Первым подвергся проверке закон сложения скоростей. Принцип относительности Галилея утверждал, что все ИСО эквивалентны по своим механическим свойствам. Но их, наверное, можно отличить по электромагнитным или каким-либо другим свойствам. Например, можно заняться экспериментами по распространению света. В соответствии с существовавшей в то время волновой теорией, существовала некая абсолютная система отсчета (так называемый «эфир»), в которой скорость света была равна c . Во всех



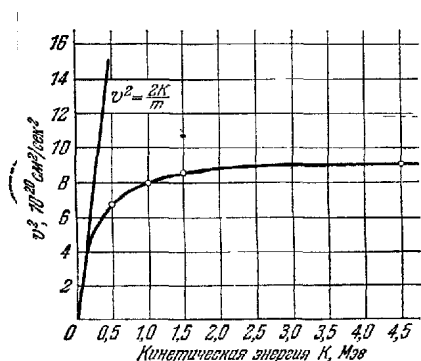
остальных системах скорость света должна была подчиняться закону $c' = c - V$. Это предположение взяли проверить сначала Майкельсон, а затем и Морли. Целью эксперимента являлось обнаружение «истинного» движения Земли относительно эфира. Было использовано движение Земли по орбите со скоростью 30 км в секунду. Идея эксперимента состояла в следующем. Свет от источника S посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал A и B, находящихся на одинаковом расстоянии L от источника S, и возвращался в точку S. Сравнилось время прохождения

светом путей SAS и SBS. Допустим, что вся установка в момент эксперимента движется со скоростью V в указанном направлении. Если скорость света подчиняется обычному закону

сложения скоростей, то время прохождения пути SAS равно $t_{\parallel} = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$,

тогда как время прохождения пути SBS равно $t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$.

Исходя из этих результатов, ученые ожидали получить разницу во времени. Однако, как ни увеличивали они точность экспериментов, разницы во временах зафиксировать не удалось. Конечно, случайно могло оказаться, что относительная скорость Земли относительно эфира была в этот момент равна нулю, но эксперимент, проведенный через полгода, когда скорость Земли должна была быть 60 км/с, тоже ничего не дал.



Еще более наглядно продемонстрировал ограниченность области применения классической механики эксперимент, проведенный в 1964 году Бертоцци. Ему удалось в одном эксперименте независимо измерить скорость и кинетическую энергию электронов. Электроны ускорялись в ускорителе Ван-де-Граафа, а затем двигались равномерно расстояние АВ, которое можно было измерить достаточно точно. Определив время этого движения, определяли скорость. Далее электроны попадали в мишень и нагревали ее. Температуру мишени измеряли термопарой и по этим результатам находили кинетическую энергию электронов. В результате получали график зависимости квадрата скорости электрона от его кинетической энергии. Согласно классической механике ($v^2 = 2E_K/m$) он должен представлять прямую линию. В ходе же эксперимента получилась зависимость с предельным значением скорости $3 \cdot 10^8$ м/с.

После анализа этих и многих других экспериментов стало ясно, что нужна новая теория для изучения таких явлений.

IV.2 Постулаты Эйнштейна.

Глубокий анализ всего экспериментального и теоретического материала, имеющегося к началу XX в., привел Эйнштейна к пересмотру исходных положений классической физики, прежде всего представлений о свойствах пространства и времени. В результате им была создана специальная теория относительности, явившаяся логическим завершением всей классической физики.

Эта теория принимает без изменения такие положения ньютоновской механики, как евклидовость пространства и закон инерции Галилея - Ньютона. Что же касается утверждения о неизменности размеров твердых тел и промежутков времени в разных системах отсчета, то Эйнштейн обратил внимание на то, что эти представления возникли в результате изучения движений тел с малыми скоростями, поэтому их экстраполяция в область больших скоростей ничем не оправдана. Только опыт может дать ответ на вопрос, каковы их истинные свойства. Это же относится к преобразованиям Галилея и к принципу дальнего действия.

В качестве исходных позиций специальной теории относительности Эйнштейн принял два постулата, или принципа, в пользу которых говорит весь экспериментальный материал:

- 1) принцип относительности,
- 2) независимость скорости света от скорости источника.

Первый постулат представляет собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы:

все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Другими словами, *все инерциальные системы отсчета эквивалентны (неразличимы) по своим физическим свойствам; никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную.*

Второй постулат утверждает, что *скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.*

Это значит, что, *скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО.* Таким образом, скорость света занимает особое положение в природе. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при

переходе от одной системы отсчета к другой, скорость света в пустоте является инвариантной величиной. Как мы увидим, наличие такой скорости существенно изменяет представления о пространстве и времени.

Из постулатов Эйнштейна следует также, что скорость света в вакууме является *предельной*: никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчета. В самом деле, согласно принципу относительности, законы природы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Тот факт, что скорость любого сигнала не может превышать предельное значение, есть также закон природы. Следовательно, значение предельной скорости - скорости света в вакууме - должно быть одинаково во всех инерциальных системах отсчета: в противном случае эти системы можно было бы отличить друг от друга.

В частности, наличие предельной скорости автоматически предполагает ограничение скорости движения частиц величиной c . Иначе эти частицы могли бы осуществлять передачу сигналов (или взаимодействий между телами) со скоростью, превышающей предельную. Таким образом, согласно постулатам Эйнштейна, значение всех возможных в природе скоростей движения тел и распространения взаимодействий ограничено величиной c . Этим самым отвергается принцип дальнего действия ньютоновской механики.

Все содержание специальной теории относительности вытекает из этих двух ее постулатов. В настоящее время оба постулата Эйнштейна, как и все следствия из них, убедительно подтверждаются всей совокупностью накопленного экспериментального материала.

Синхронизация часов. Прежде чем делать какие-либо выводы из этих постулатов, Эйнштейн тщательно проанализировал представления о способах измерения пространства и времени. В первую очередь он обратил внимание на то, что физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Для описания события в данной системе отсчета нужно указать место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит.

Положение точки, в которой происходит событие, может быть определено с помощью жестких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах.

Соответствующий же момент времени можно определить с помощью часов, помещенных в ту точку системы отсчета, где происходит данное событие. Однако такое определение уже не является удовлетворительным, когда нам надо сопоставить друг с другом события, происходящие в *различных* местах, или, что то же самое, сравнить время для событий, происходящих в местах, удаленных от часов.

Действительно, чтобы сравнить время (показания часов в различных точках системы отсчета), прежде всего, необходимо установить способ, как определить общее для всех точек системы отсчета время. Другими словами, надо обеспечить *синхронный* ход всех часов данной системы отсчета.

Ясно, что синхронизировать часы, помещенные в различные точки системы отсчета, можно только с помощью каких-нибудь сигналов. Наиболее быстрые сигналы, пригодные для этой цели, - это световые или радиосигналы, распространяющиеся с известной скоростью c . Выбор именно этих сигналов обусловлен еще и тем, что их скорость не зависит от направления в пространстве, а также одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Далее можно поступить следующим образом. Наблюдатель, находящийся, например, в начале координат O данной системы отсчета, сообщает по радио: «Передаем сигнал точного времени. Сейчас по моим часам время t_0 ». В момент, когда этот сигнал достигнет часов, находящихся на известном расстоянии g от точки O , их устанавливают так, чтобы они показывали время $t = t_0 + g/c$, т. е. с учетом времени запаздывания сигнала. Повторение сигнала через определенные промежутки времени даст возможность каждому наблюдателю установить синхронный ход его часов с часами в точке O . В результате такой операции можно утверждать, что все часы данной системы отсчета показывают в каждый момент одно и то же время.

Существенно отметить, что определенное таким образом время относится лишь к той системе отсчета, относительно которой синхронизированные часы покоятся.

Соотношения между событиями. Обратимся к вопросу о пространственных и временных соотношениях между данными событиями в разных инерциальных системах отсчета.

Уже в ньютоновской механике пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, к какой системе отсчета они относятся. Например, две последовательные вспышки лампочки в движущемся поезде происходят в одной и той же точке системы отсчета, связанной с поездом, но в разных точках системы отсчета, связанной с полотном дороги.

Утверждение, что два одновременных события происходят в одном и том же месте или на таком-то расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

В противоположность этому временные соотношения между событиями в ньютоновской механике считаются не зависящими от системы отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два события происходят одновременно в одной системе отсчета, то они являются одновременными и во всех других системах отсчета. Вообще промежуток времени между двумя данными событиями считается одинаковым во всех системах отсчета.

Легко убедиться, что в действительности это не так - *одновременность* (а, следовательно, и течение времени) *является понятием относительным*, приобретающим смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это понятие относится. Покажем с помощью простого рассуждения, что два события, одновременные в одной системе отсчета, в другой системе отсчета оказываются неодновременными.

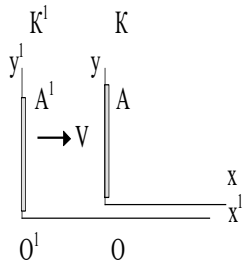
Представим себе стержень АВ, движущийся с постоянной скоростью V относительно K^1 - системы отсчета. В середине стержня находится лампочка О, по концам (в точках А и В) - фотоэлементы. Пусть в некоторый момент лампочка О дала кратковременную вспышку света. Поскольку скорость распространения света в системе отсчета, связанной со стержнем (как и во всякой инерциальной системе отсчета) равна c в обоих направлениях, то световые импульсы достигнут равноудаленных от О фотоэлементов А и В в один и тот же момент времени (в системе отсчета «стержень») и оба фотоэлемента сработают одновременно.

Иначе обстоит дело в K^1 - системе. В этой системе отсчета скорость световых импульсов в обоих направлениях также равна c , однако проходимые ими пути различны. Действительно, пока световые импульсы идут к точкам А и В, последние переместятся вправо и, следовательно, фотоэлемент А сработает раньше, чем фотоэлемент В.

Таким образом, события, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т. е. одновременность в отличие от представлений ньютоновской механики является понятием относительным. А это в свою очередь означает, что время в разных системах отсчета течет неодинаково. Если бы в нашем распоряжении имелись мгновенно распространяющиеся сигналы, то события, одновременные в одной системе отсчета, были бы одновременными и в любой другой системе. Это непосредственно следует из только что рассмотренного примера. В этом случае течение времени не зависело бы от системы отсчета и можно было бы говорить об абсолютном времени, которое фигурирует в преобразованиях Галилея. Таким образом, преобразования Галилея, по существу, исходят из предположения, что синхронизация часов осуществляется с помощью мгновенно распространяющихся сигналов. Однако таких сигналов в действительности нет.

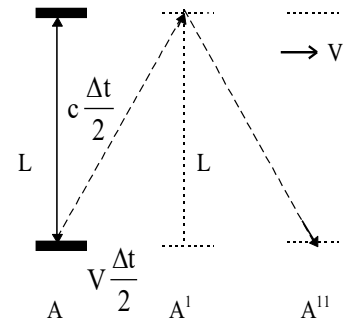
IV.3 Замедление времени.

Сначала сравним поперечные по отношению к направлению скорости движения размеры тел.



Пусть в системе K^1 стержень A^1O^1 покоится, расположившись вдоль оси y^1 и длина его L_0 . Система K^1 движется вдоль оси x^1 причем оси x и x^1 при движении остаются параллельными. Тогда в некоторый момент точки O^1 и O совпадут. Совпадут ли длины стержней AO и $A^1O^1 = L_0$? Да, так как в соответствии с первым постулатом все ИСО равноправны, в противном случае по поперечной длине стержня можно было бы отличать системы. Таким образом, $y^1 = y$.

Теперь проведем еще один мысленный эксперимент. В качестве часов выбираем световой луч и два зеркала. В качестве интервала времени берем $\Delta t_0 = 2L/c$. Это время прохода луча туда и обратно в неподвижных относительно наблюдателя A часах. Такое время называется **собственным** для данных часов. Если же часы движутся со скоростью V перпендикулярно оси часов, то относительно наблюдателя A (и связанной с ним ИСО K) промежуток времени будет другой. Поперечные размеры часов неизменны, поэтому путь, проходимый лучом для наблюдателя A , иной (см. рис.). Теорема Пифагора дает



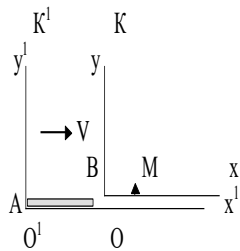
$$\left(c \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(V \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2, \quad \Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Новый интервал времени - $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Ясно, что так как $V < c$, то и $\beta < 1$ и $\Delta t > \Delta t_0$. Таким образом, изменяется единица измерения времени - она становится больше. Тем самым, по движущимся часам пройдет меньше времени, чем по неподвижным (относительно наблюдателя A). Это явление и называется замедлением времени.

IV.4 Сокращение длины.

Пусть стержень AB неподвижен в системе K^1 и расположен в ней параллельно оси x^1 . Система K^1 движется параллельно оси x относительно системы K со скоростью V .



Длина стержня, измеренная в системе, где он неподвижен, называется *собственной* длиной стержня. В данном случае она равна L_0 . Как определить длину стержня в системе K ? В точке M установим часы и зафиксируем моменты времени t_A и t_B совпадения с меткой точек B и A стержня. Следовательно, $\Delta t_0 = t_A - t_B$ - время пролета стержня мимо неподвижных часов. Тогда длина стержня в системе K $L = V \cdot \Delta t_0$. Для наблюдателя в системе K^1 время будет другое и $L_0 = V \cdot \Delta t$, а промежутки

времени связаны друг с другом соотношением из предыдущего параграфа. Окончательно получаем

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

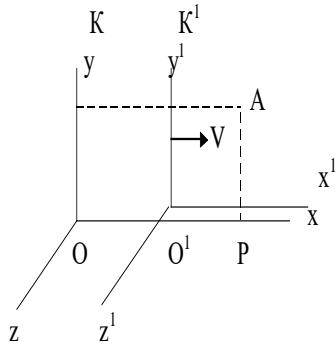
Так как $\beta < 1$, то $L < L_0$ - это и называется лоренцевым сокращением. Это чисто кинематический эффект. В качестве примера рассмотрим, при какой скорости длина стержня уменьшится на одну треть:

$L = 2L_0/3 = L_0 \sqrt{1-\beta^2}$ и $\beta = 0.73$, а $V = 0.73c$. Это огромная скорость. При реальных для макроскопических объектов скоростях $V = 100$ м/с, величина $\beta \cong 3 \cdot 10^{-7}$ и разность длин никак не проявляется.

IV.5 Преобразования Лоренца.

Теперь наступило время заменить преобразования Галилея и закон сложения скоростей новыми формулами с учетом постулатов Эйнштейна.

Рассмотрим некоторое событие, произошедшее в точке А, с точки зрения двух наблюдателей К и К¹. Наблюдатель системы К¹ движется относительно наблюдателя системы К со скоростью V (на рисунке изображено положение осей координат систем и направление их относительного движения - стандартное для СТО).



Пусть в тот момент, когда точки O и O¹ совпадали, на часах обеих систем было время $t = t^1 = 0$. Предположим теперь, что в точке А с координатами x, y, z К-системы отсчета в момент времени t по ее часам произошло событие. Найдем соответствующие величины (x^1, y^1, z^1, t^1) , определенные в системе К¹. Вопрос относительно координат y^1 и z^1 уже был решен ранее: это поперечные по отношению к движению координаты и $y^1 = y, z^1 = z$. Координата x^1 точки А в системе К¹ равна O¹P и является собственной длиной этого отрезка - $(O^1P)_0$. Длина же этого отрезка в системе К равна O¹P = $x - V \cdot t$ (в этой системе отрезок движется). Связь между длинами

этого отрезка определена формулой сокращения длины, тогда

$$O^1P = (O^1P)_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad \text{и} \quad x^1 = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad \text{Аналогично можно найти и обратную связь } x \text{ и } x^1:$$

$$x = \frac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Теперь найдем связь между моментами наступления события в точке А t и t^1 . Исключая значение x^1 из последней формулы с помощью предыдущей, получаем связь времен:

$$t^1 = \frac{t - x \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad \text{а обратно} \quad t = \frac{t^1 + x^1 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Итак, преобразования Лоренца при переходе от одной ИСО к другой выглядят так:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = \frac{t - x \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y^1 \\ z = z^1 \\ t = \frac{t^1 + x^1 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = x - Vt \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = t \end{cases}$$

В третьем столбце приведены преобразования Галилея. Сразу заметим, что в пределе $\beta \ll 1$ эти формулы переходят в преобразования Галилея. При этом $t^1 = t$. Кроме того, этими формулами пользоваться нельзя в случае $V = c$. То есть нельзя связать ИСО с фотонами - световыми квантами.

И последнее: в формулу для времени входит координата. Это указывает на неразрывную связь между пространством и временем. Другими словами, речь идет о едином пространстве-времени, в котором протекают все физические явления.

IV.6 Интервал в СТО.

В механике Ньютона промежутки времени и размеры тел не зависят от ИСО, в которой они измерялись. В этом случае говорят, что величины

$$\Delta t \text{ и } \Delta L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

равные промежутку времени и расстоянию между точками, инвариантны по отношению к преобразованию координат в механике Ньютона. В СТО эти величины утратили свойство инвариантности. Однако, оказалось, что существует величина, включающая Δt и ΔL , обладающая свойством инвариантности - ее назвали *интервал*. Приведем формулу для его вычисления:

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta L^2}$$

Убедимся в инвариантности интервала: покажем, что интервал ΔS , определенный в системе К, равен интервалу ΔS^1 , определенному в системе К¹. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца для интервала времени Δt^1 и проекций отрезка $\Delta x^1, \Delta y^1$ и Δz^1 . Подставим их в выражение для интервала

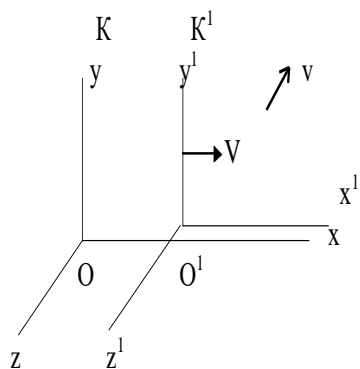
$$\Delta S^1 = \sqrt{c^2 \Delta t^{1^2} - \Delta x^{1^2} - \Delta y^{1^2} - \Delta z^{1^2}} = \sqrt{c^2 \frac{\left[\Delta t - \left(\frac{V}{c^2} \right) \Delta x \right]^2}{1 - \beta^2} - \frac{(\Delta x - V \Delta t)^2}{1 - \beta^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \Delta S.$$

Интервал может быть вещественным (времениподобным), если $c \cdot \Delta t > \Delta L$; мнимым (пространственноподобным), если $c \cdot \Delta t < \Delta L$ и равным нулю, если $c \cdot \Delta t = \Delta L$. Если рассматривать 4-х мерное пространство, то поверхность $L = ct$ разделяет пространство на две части: часть, где события связаны причинно-следственной связью ($L < ct$) - времениподобный интервал и часть, где события причинно-следственной связью связаны быть не могут. Это происходит потому, что не существует воздействий, способных передаваться со скоростью, большей c .

Итак, в СТО мы знаем уже три инвариантные (по отношению к преобразованиям координат и времени) величины: скорость света c , промежуток собственного времени Δt и интервал между событиями ΔS .

IV.7 Преобразования скорости в СТО.

Преобразования Галилея давали для скорости следующие формулы при переходе от одной ИСО к другой (при стандартном расположении ИСО):



$$\begin{cases} v_x^1 = v_x - V \\ v_y^1 = v_y \\ v_z^1 = v_z \end{cases}$$

Получим теперь с помощью преобразований Лоренца новые формулы. Для этого рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью \vec{V} в системе К. Найдем ее скорость в системе К¹. По определению скорости

$$\begin{cases} v_x^1 = \frac{dx^1}{dt^1} = \frac{dx^1}{dt} \frac{dt}{dt^1} = \frac{v_x - V}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dt}{dt^1} \\ v_y^1 = \frac{dy^1}{dt^1} = \frac{dy^1}{dt} \frac{dt}{dt^1} = v_y \frac{dt}{dt^1} \\ v_z^1 = \frac{dz^1}{dt^1} = \frac{dz^1}{dt} \frac{dt}{dt^1} = v_z \frac{dt}{dt^1} \end{cases} .$$

Для удобства вычислений производная представлена в виде производной от сложной функции. Несложные вычисления дают окончательный результат:

$$\begin{cases} v_x^1 = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \\ v_y^1 = v_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \\ v_z^1 = v_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \end{cases} . \text{ Это и есть релятивистский закон сложения скоростей.}$$

Ясно, что при $v, V \ll c$ эти формулы переходят в классические преобразования Галилея, которые приведены в начале параграфа. Покажем теперь, что скорость света будет одинакова во всех ИСО: пусть $v_x = c$, тогда

$$v_x^1 = (c - V)/(1 - V/c) = c; \quad v_y^1 = 0; \quad v_z^1 = 0.$$

Модуль скорости в K^1 системе можно найти по стандартной формуле

$$v^1 = \sqrt{(v_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (v_z^1)^2} .$$

IV.8 Релятивистский импульс.

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех ИСО, то есть быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Покажем, что старое определение импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ не дает этого. Рассмотрим центральное абсолютно неупругое соударение двух одинаковых частиц с массой покоя m_0 в двух системах: K^1 (где частицы летят с одинаковыми по модулю скоростями V навстречу друг другу вдоль оси x^1) и K , которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x^1 . В системе K^1 полный импульс системы из двух частиц равен нулю, как до соударения, так и после него. В системе же K скорости частиц

$$\text{определяются так: } v_{1x} = \frac{v_{1x}^1 + V}{1 + \frac{v_{1x}^1 V}{c^2}} = \frac{2V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}, \quad v_{1y} = 0; \quad v_{2x} = \frac{v_{2x}^1 + V}{1 + \frac{v_{2x}^1 V}{c^2}} = 0, \quad v_{2y} = 0 .$$

Таким образом, до соударения импульс частиц в системе K равен

$$p_x^{\text{до}} = m_0 \cdot v_{1x} + m \cdot v_{2x} = \frac{2m_0 V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2} .$$

После соударения частицы покоятся в системе K^1 , следовательно, в системе K импульс частиц равен $p_x^{\text{ПОСЛЕ}} = 2m_0 V$. Итак, в системе K закон сохранения *такого* импульса не соблюдается с

точностью $(V/c)^2 \ll 1$. Вывод напрашивается сам собой – импульс нужно определить иначе, так, чтобы выполнялся закон сохранения импульса. При этом новый импульс переходил бы в старый при малых скоростях движения частиц. Для этого в определение импульса нужно ввести собственное время:

$$\text{старое определение импульса} - \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}$$

$$\text{новое определение импульса} - \vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В этих формулах m_0 - масса покоя частицы, а τ - ее собственное время.

IV.9. Основное уравнение релятивистской динамики.

Как и следовало ожидать, II закон Ньютона, записанный в виде $m_0 \vec{a} = \vec{F}$, не инвариантен к преобразованиям Лоренца (как это было для преобразований Галилея). Однако этим преобразованиям удовлетворяет уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - новое определение импульса, введенное в СТО. При $\beta \ll 1$ оно

переходит во II закон Ньютона. Следует заметить, что в СТО имеются формулы для преобразования всех механических величин, включая силу, при переходе из одной ИСО к другой. Уравнение динамики в СТО сложнее, чем II закон Ньютона; направления ускорения и силы не всегда совпадают. Но есть два простых случая, когда эти направления совпадают:

1) $\vec{v} \parallel \vec{F}$. Тогда в основном уравнении можно убрать вектора и вычислить производную. Получится следующее уравнение:

$$\frac{m_0 a}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = F \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0} (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

2) $\vec{v} \perp \vec{F}$. В этом случае проще всего спроектировать основное уравнение на тангенциальное направление (ось τ) - $a_\tau = 0$ и на нормальное направление (ось n) - $m \cdot a_n = F$. Тогда мы получаем уравнение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0} (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

IV.10 Кинетическая энергия релятивистской частицы.

Чтобы получить релятивистское выражение для кинетической энергии частицы, будем исходить из того, что работа, совершенная над частицей, равна приращению ее кинетической энергии $dE_k = dA$. Умножим основное уравнение динамики СТО на $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ - перемещение частицы за время dt под действием силы \vec{F} . В результате получаем

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dt = \vec{F} d\vec{r} = dA.$$

Следовательно, с учетом того, что $\vec{v} d\vec{v} = v dv$

$$dA = dE_k = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Легко убедиться прямым дифференцированием, что это дифференциал от

$$dE_k = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right), \text{ что после интегрирования дает}$$

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{Const.}$$

Кинетическая энергия, по самому своему определению, это энергия движения, поэтому, если $v = 0$, то и $E_k = 0$. Исходя из этого, находим $\text{Const} = -m_0 c^2$. Тогда для кинетической энергии в СТО получаем формулу

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Эта формула при $\beta \ll 1$ переходит в классическую $E_k = mv^2/2$. Для простоты расчетов по проверке можно использовать формулу бинома Ньютона для представления знаменателя.

IV.11 Связь массы и энергии. Инвариант.

Из формулы $dE_k = dm \cdot c^2$ следует, что приращение кинетической энергии частицы сопровождается пропорциональным приращением ее релятивистской массы. Вместе с тем известно, что при протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразовываться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся частиц может преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшейся частицы. Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при *любом* увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит.

Отсюда Эйнштейн пришел к следующему фундаментальному выводу: общая энергия тела (или системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла (кинетической, электрической, химической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением

$$E = m \cdot c^2$$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы - закон взаимосвязи (пропорциональности) массы m и полной энергии E тела. Во избежание недоразумений обратим внимание на то, что в полную энергию E не включена потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковое действует на тело.

Соотношение $E = mc^2$ можно записать и в другой форме, если учесть формулу $E_k = (m - m_0)c^2$. Тогда полная энергия тела

$$E = m_0 c^2 + E_k,$$

где m_0 - масса покоя тела, E_k - его кинетическая энергия. Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело ($E_k = 0$) также обладает энергией

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

Эту энергию называют энергией покоя или собственной энергией.

Мы видим, что масса тела, которая в нерелятивистской механике выступала как мера инертности (во втором законе Ньютона) или как мера гравитационного действия (в законе всемирного

тяготения), теперь выступает в новой функции - как мера *энергосодержания* тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии - энергией покоя. Изменение полной энергии тела (системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы $\Delta m = \Delta E/c^2$, и наоборот. При обычных макроскопических процессах изменение массы тел оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений.

Ясно, что как энергия E , так и импульс p частицы имеют различные значения в разных системах отсчета. Оказывается, однако, что существует величина - некоторая комбинация E и p , которая является инвариантной, т.е. имеет одно и то же значение в разных системах отсчета. Эта величина есть $E^2 - p^2c^2$. Убедимся, что это так. Воспользовавшись формулами $E = mc^2$ и $p = mv$, запишем

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0c^4}{1 - \beta^2} [1 - \beta^2],$$

или после сокращения получаем так называемый *инвариант*

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.$$

Этот вывод чрезвычайно важен: он позволяет во многих случаях упростить анализ и решение различных вопросов.

ЧАСТЬ V. ОПТИКА.

V.1 Световая волна

С точки зрения современной физики свет в одних явлениях ведет себя как электромагнитная волна (ЭМВ), в других явлениях – как частица. В этом разделе физики (оптика) изучается свет как ЭМВ. В любой ЭМВ есть электрическая \vec{E} и магнитная \vec{H} составляющие. Как показывает опыт, на человека влияние оказывает лишь электрическая составляющая ЭМВ. Поэтому далее будет основное внимание уделяться именно ей.

Рассмотрим сферическую монохроматическую волну. Уравнение такой волны

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kr + \alpha),$$

где ω - частота ЭМ колебаний в волне, k – модуль волнового вектора, а α - начальная фаза колебаний. Величина $n = c/v$ называется абсолютным показателем преломления среды. В этой формуле

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

фазовая скорость волны. Сравнивая полученную ранее формулу для фазовой скорости $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$,

получаем для показателя преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Обычно у прозрачных сред магнитная проницаемость $\mu \approx 1$, поэтому $n = \sqrt{\epsilon}$. Значит, показатель преломления таких сред зависит только от диэлектрической проницаемости среды. Опыт показывает, что эта величина зависит от частоты ЭМВ. Это приводит к явлению, которое называется дисперсией.

Монохроматическая ЭМВ характеризуется частотой или длиной волны, которые связаны простой формулой $\lambda = c/v$. Экспериментальные результаты обычно представляют собой зависимость различных величин от длины волны. Поэтому и мы приведем диапазон длин волн, которые относятся к ЭМВ видимого диапазона (световых волн)

$$\lambda = 0.40 - 0.76 \text{ мкм.}$$

Другой характеристикой волны является ее энергия. Эта величина оценивается интенсивностью световой волны. По определению, это модуль средней по времени (за период) плотности потока энергии, проходящей через данную точку пространства. Интенсивность обозначается буквой I :

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{E}, \vec{H}] \rangle.$$

Мы уже знаем, как вычислить интенсивность монохроматической волны:

$$[\vec{E}, \vec{H}] = E_m H_m \cos^2(\omega t - kr + \alpha) = \sqrt{\varepsilon \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kr + \alpha).$$

При вычислениях мы использовали одно из ранее изученных свойств ЭМВ. При усреднении по времени вместо квадрата косинуса появляется множитель $\frac{1}{2}$:

$$\langle \cos^2(\omega t - kr + \alpha) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kr + \alpha) dt = \frac{1}{2}.$$

Окончательно для интенсивности света получаем формулу

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2.$$

Линии, вдоль которых распространяется световая волна, называются лучами. На луче вектор Пойнтинга \vec{S} параллелен касательной к лучу. Свет, испускаемый обычными источниками, называется естественным. В естественном свете есть колебания вектора \vec{E} во всех направлениях, перпендикулярных вектору \vec{k} . В отличие от такого света, свет, в котором направления колебаний вектора \vec{E} упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоскополяризованным (линейно поляризованным). Если \vec{E} , поворачиваясь относительно луча при движении волны, описывает в плоскости, перпендикулярной лучу, эллипс, то свет эллиптически поляризован, если круг – то поляризован по кругу.

V.2 Групповая и фазовая скорости

Итак, уравнение гармонической волны можно записать так

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Величина, стоящая под знаком косинуса, называется фазой волны. Если волна распространяется вдоль оси z , то ее фаза изменяется по закону $\Phi = \omega t - kz$. Тогда фазовая скорость волны будет равна $v = \omega/k$, причем $\lambda = 2\pi/k$. Если это монохроматическая волна, то с этой скоростью движется и поверхность постоянной фазы, и максимум энергии. Но проблема состоит в том, что с помощью такой волны никакого сигнала не передать. Дело в том, что монохроматическая волна – это **бесконечная** последовательность горбов и впадин с одной частотой следования. А, как известно, если есть необходимость передать какую-либо информацию, то сигнал должен быть не такой. Он должен содержать уже несколько частот (гармоник). Оборванная монохроматическая волна перестает быть таковой и имеет сложный частотный спектр. Поэтому любая *реальная* волна представляет собой совокупность нескольких гармоник. В силу того, что диэлектрическая проницаемость большинства сред зависит от частоты, то получается, что разные гармоники будут двигаться с разной скоростью и форма волны при ее движении будет изменяться. Это



явление (зависимость скорости ЭМВ от ее частоты) называется дисперсией. В этом случае вводится понятие групповой скорости. Под групповой скоростью светового импульса понимают скорость, с которой движется максимум его интенсивности $I_m \sim n E_m^2$. На рисунке изображен

сигнал, состоящий из трех гармоник, в два момента времени (нормальная дисперсия). Групповая скорость важна еще и тем, что любой прибор регистрирует энергию волны, а это значит, что в первую очередь регистрирует максимум интенсивности. Получим формулу для групповой скорости. По сложившейся традиции получим ее на простейшем примере, а затем обобщим на любой случай. Рассмотрим волновой пакет (световой импульс), состоящий из двух гармоник с близкими частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами k_1 и k_2 . Волны имеют одну поляризацию и распространяются в одном направлении:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z); E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z).$$

При сложении по принципу суперпозиции для электрического поля получаем

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left\{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z\right\} \cos\left\{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right\}.$$

Такое образование и называется группой волн или волновым пакетом. Последний множитель можно рассматривать как монохроматическую волну, а остальные множители – как ее амплитуду. При этом максимум амплитуды этой волны будет двигаться со скоростью, которую можно определить из уравнения

$$\Phi_{\text{огнб}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{dz}{dt} = u = v_{\text{ГР}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

Общая же формула будет выглядеть так:

$$u = v_{\text{ГР}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Считая, что $\omega = vk$, получаем связь групповой и фазовой скорости

$$u = v + \frac{\partial v}{\partial k} k.$$

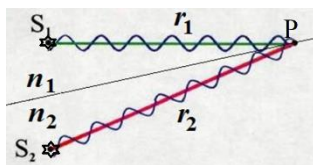
Используя связь между волновым вектором и длиной волны ($k=2\pi/\lambda$), получаем формулу Релея

$$u = v - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \lambda. \text{ Для различных сред существует три случая:}$$

- 1) $\partial v / \partial \lambda = 0$. Это случай отсутствия дисперсии (вакуум, воздух, H_2O).
- 2) $\partial v / \partial \lambda > 0$. Нормальная дисперсия - $u < v$ (стекло и большинство прозрачных сред).
- 3) $\partial v / \partial \lambda < 0$. Аномальная дисперсия $-u > v$ (сероуглерод).

V.3 Интерференция. Когерентность

Интерференцией называется изменение средней плотности потока энергии (\vec{S}), обусловленное суперпозицией ЭМВ. Рассмотрим это явление на простейшем примере.



Пусть в точке P одновременно существуют две произвольные (в общем случае некогерентные) ЭМВ \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . В соответствии с принципом суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2$.

Любой прибор регистрирует не мгновенное значение электрического поля (или потока энергии), а усредненное за время измерения значение. Глаз как измерительный прибор тоже не различает быстрых изменений светового потока. После усреднения последнего соотношения, получаем

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle.$$

В зависимости от результата усреднения последнего слагаемого в правой части равенства может быть два различных случая:

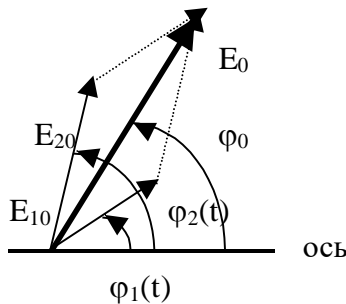
случай I) $\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$; $I = I_1 + I_2$; интерференции нет

случай II) $\langle E^2 \rangle \neq \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$; $I \neq I_1 + I_2$; интерференция есть.

Неравенство $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ служит необходимым условием интерференции. Нарушение аддитивности интенсивности I связано не с нарушением закона сохранения энергии, а с перераспределением энергии по волновому фронту при взаимодействии волн. Из анализа формулы ясно, что если частоты волн различны, то интерферировать они не будут. Аналогичный результат получается для волн с взаимно перпендикулярными векторами электрического поля ($\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$).

Рассмотрим простейший случай сложения двух ЭМВ одинаковой частоты ω , для которых $\vec{E}_1 \uparrow \uparrow \vec{E}_2$. В этом случае электрическое поле ЭМВ в точке P можно записать так

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - \varphi_1(t)); E_2 = E_{20} \cos(\omega t - \varphi_2(t)).$$



Для сложения этих волн используем метод векторных диаграмм. С помощью диаграммы можно достаточно просто получить амплитуду результирующей волны \vec{E}_0 и ее начальную фазу φ_0 :

$$E_0^2(t) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t));$$

$$\text{tg} \varphi_0 = \frac{E_{10} \sin \varphi_1(t) + E_{20} \sin \varphi_2(t)}{E_{10} \cos \varphi_1(t) + E_{20} \cos \varphi_2(t)}.$$

В этих формулах стоят мгновенные значения величин. Как мы уже знаем, эти величины необходимо усреднить. Получаем формулу для вычисления квадрата амплитуды:

$$\langle E_0^2 \rangle = \frac{1}{t'} \int_0^{t'} E_0^2(t) dt = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) dt.$$

Анализируя полученный ответ, можно получить необходимое условие интерференции: за время измерения t' разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ должна сохранять свое значение. Волны, удовлетворяющие такому условию, называются **когерентными**.

Дополнительным (достаточным) условием интерференции является равенство частот и неперпендикулярность \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

Для характеристики волны (а не регистрирующего прибора) используют понятия временной и пространственной когерентности. Временная когерентность ограничивается степенью

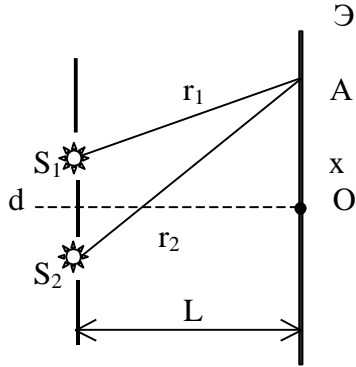
немонохроматичности волны $\frac{\Delta\omega}{\omega}$; а пространственная когерентность ограничивается степенью

непараллельности колебаний $\frac{|\Delta\vec{k}|}{k}$.

Создать когерентные источники для наблюдения и использования явления интерференции можно следующими способами:

- 1) Делением амплитуды волны. К таким устройствам относится интерферометр Майкельсона.
- 2) Делением волнового фронта. К таким устройствам относятся схема Юнга, бипризма Френеля, билинза Бийе, зеркало Ллойда, бизеркало Френеля.

Рассмотрим интерференцию двух волн на примере схемы Юнга (на рисунке).



Э Два точечных источника S_1 и S_2 излучают ЭМВ в направлении экрана Э. Для простоты будем считать, что амплитуды двух волн, приходящих в точку А экрана одинаковы и равны E_0 . Такие источники будут когерентны, если они являются источниками волн, рожденных от одной лампы накаливания и прошедших через малое отверстие в шторе. Расстояние между отверстиями (источниками) d должно быть мало по сравнению с расстоянием до экрана $d \ll L$. Кроме того интерференция волн на экране будет наблюдаться в узкой области экрана $x \ll L$. Итак, в точку А приходит две сферические волны одного направления $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kr_1)$; $E_2 = E_0 \cos(\omega t - kr_2)$. По

принципу суперпозиции

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right).$$

В этой формуле $\Phi_1 - \Phi_2 = \omega t - kr_1 - \omega t + kr_2 = k(r_2 - r_1) = \Delta\Phi$ называется разностью фаз. Величина $\Delta = \Delta\Phi/k = r_2 - r_1$ называется разностью хода. Напомним, что оптической разностью хода называется величина $\Delta_{\text{опт}} = n_2 r_2 - n_1 r_1$. Тогда выражение для интенсивности результирующей волны будет выглядеть так:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n 4E_0^2 \cos^2 \frac{r_2 - r_1}{2} k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n 2E_0^2 (1 + \cos k\Delta).$$

Итак, если волны распространяются в вакууме, то интенсивность на экране будет пропорциональна

$$I \sim 2E_0^2 (1 + \cos k\Delta).$$

Это означает, что в точках экрана, в которых выполняется условие $\Delta = \pm \lambda m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) будет наблюдаться максимум интенсивности (яркое пятно) с $I \sim 4E_0^2$. В точках же экрана, в которых выполняется условие $\Delta = \pm \lambda(m + 1/2)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) будет наблюдаться минимум интенсивности (темное пятно) с $I = 0$. Координаты максимумов и минимумов интенсивности света на экране можно определить по рисунку:

$$r_2 - r_1 = \sqrt{L^2 + (x + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2} \cong \frac{xd}{L}.$$

Тогда положения максимумов будут определяться по формуле

$$x_m = \pm \frac{\lambda}{d} L m.$$

Ширина интерференционного максимума, то есть расстояние между ближайшими минимумами (или максимумами) при этом будет равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{d} L.$$

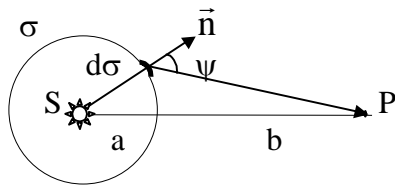
V.4 Дифракция. Принцип Гюйгенса – Френеля

По сути, интерференция и дифракция – это одно и то же явление: перераспределение энергии волн по волновому фронту. Но исторически сложилось так, что наложение волн от дискретно расположенных источников называется интерференцией, а аналогичное явление от непрерывно расположенных источников (например, одной щели) называется дифракцией. В основе рассмотрения обоих этих явлений лежит принцип Гюйгенса – Френеля.

Первоначально Гюйгенс постулировал: каждая точка волнового фронта может рассматриваться как источник вторичных волн, огибающая которых дает волновой фронт в следующий момент времени.

В этом определении не учитывалось явление интерференции вторичных волн, поэтому не было ясно, почему волна распространяется только вперед. Лишь дополнительные исследования Френеля дали возможность использовать этот принцип в расчетах.

Напишем математические формулы, соответствующие принципу Гюйгенса-Френеля. Рассмотрим источник S с точки зрения наблюдателя в точке P (соответствующее положение объектов изображено на рисунке). Он излучает сферическую волну, одна из волновых поверхностей которой изображена на рисунке. Окружим источник S сферой радиуса a . Выберем на этой поверхности σ участок $d\sigma$. Рассмотрим электрическое поле, создаваемое в точке P источником S , как интерференцию волн, приходящих от источников, расположенных



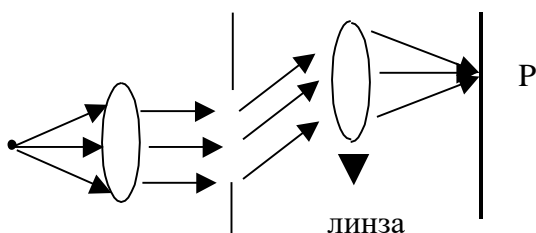
на поверхности σ и характеризующимся поверхностью $d\sigma$, нормалью \vec{n} и углом ψ . Френель ввел коэффициент $k(\psi)$, который имеет максимальное значение при угле $\psi = 0$ (когда нормаль к элементу излучающей поверхности «смотрит» на точку P) и обращается в ноль при $\psi \geq \pi/2$. Тем самым устраняется

возможность распространения назад волны, движущейся вперед (устраняется возможность появления обратной волны, направленной внутрь σ). Тогда для электрического поля, создаваемого этим элементом поверхности в точке P , можно записать

$$dE_p = k(\psi) \left\{ E_0' \frac{e^{ika}}{a} \right\} \frac{e^{ik\vec{r}}}{r} d\sigma.$$

В этой формуле нет временного множителя для волны $e^{i\omega t}$ и учтено, что волна сферическая. Для сферической волны интенсивность связана с мощностью излучателя P_0 и расстоянием от него r соотношением $I \sim \frac{P_0}{4\pi r^2}$, поэтому $E \sim \sqrt{I} \sim \frac{P_0}{r}$. Суммарное поле от всех участков выбранной поверхности в точке P можно определить с помощью принципа суперпозиции для вектора напряженности электрического поля:

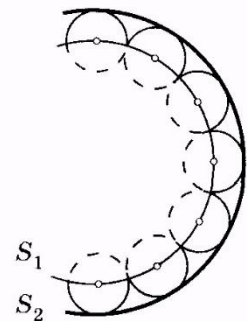
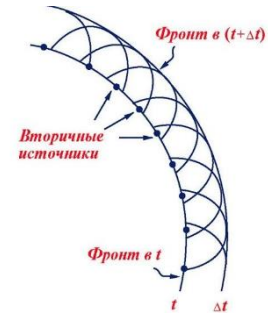
$$E_p = \frac{E_0' e^{ika}}{a} \iint k(\psi) \frac{e^{ik\vec{r}}}{r} d\sigma.$$



Эта формула и является математическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля.

Различают два вида дифракции:

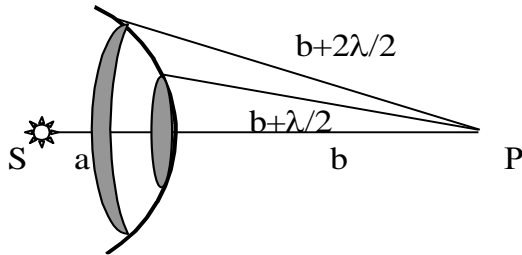
- а) дифракция в параллельных лучах – дифракция Фраунгофера.
- б) дифракция Френеля.



При изучении дифракции Фраунгофера используется линза (изображена на рисунке), а при дифракции Френеля ее нет.

V.5 Зоны Френеля. Дифракция на круглом отверстии и диске.

Вычисления по формуле Гюйгенса-Френеля часто очень сложны. Но в случаях, отличающихся какой-либо симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть найдено более просто.

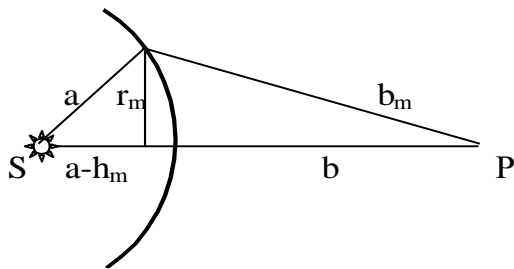


Пусть точечный источник S излучает сферическую волну в сторону точки наблюдения P . Выделим одну из волновых поверхностей и разделим ее на кольца так, чтобы разность хода от соответствующих краев зон равнялась $\lambda/2$. Это и есть зоны Френеля. Общая формула для расстояний от краев зон Френеля до точки P – $b_m = b + m\lambda/2$. Особенность такого деления заключается в

том, что волны от соседних зон приходят в точку наблюдения в противофазе. Вычислим площадь зоны Френеля с номером m . Она равна

$\Delta S_m = S_m - S_{m-1}$. Из рисунка следует, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = b_m^2 - (b + h_m)^2 \text{ или } 2(a + b)h_m = m\lambda b + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2.$$



Для не очень больших m ($m \cong 1$) второе слагаемое можно не учитывать. Тогда для площади сферического сегмента, равной $S = 2\pi R h$, подготовлены формулы для всех сомножителей и

$$S_m = \frac{\pi a b}{a + b} m\lambda; \Delta S_m = \frac{\pi a b}{a + b} \lambda.$$

Необходимо отметить тот факт, что в этом приближении площади всех зон Френеля одинаковы. Теперь найдем радиус зоны с номером m :

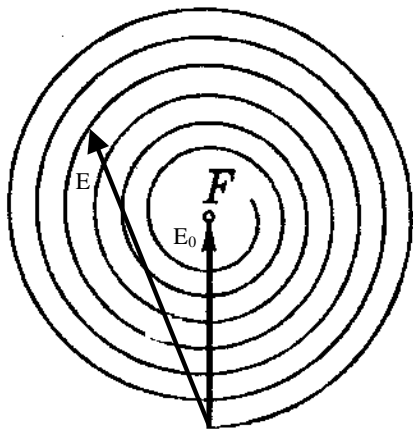
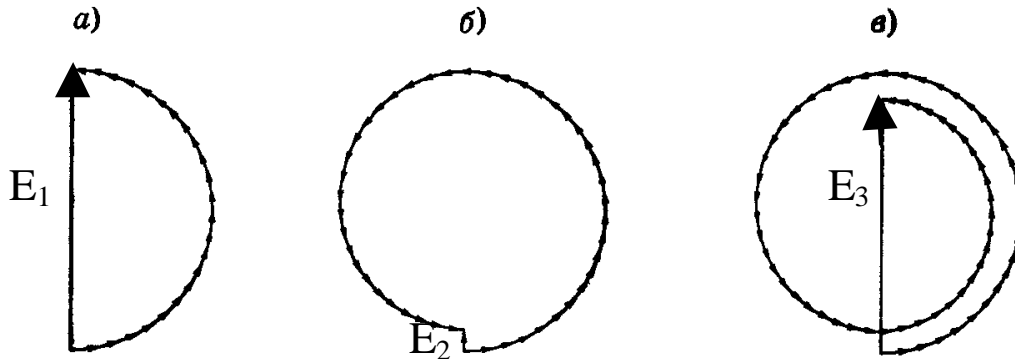
$$r_m = \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{ab}{a + b}} m\lambda.$$

Так как волна сферическая ($E \sim 1/r$), то амплитуда электрического поля убывает по мере увеличения номера m ($b_m = b + m\lambda/2$), поэтому $E_1 > E_2 > E_3 > \dots$, а суммарная амплитуда (в силу противофазности колебаний в волнах от соседних зон) получается как

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \dots \cong \frac{E_1}{2}.$$

При расчете использован тот факт, что выражение в скобках с достаточной степенью точности равно нулю. Таким образом оказывается, что если преграды на пути волны нет и открыт весь волновой фронт, то интенсивность света в точке Р $I_0 = E_0^2 = \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 = \frac{I_1}{4}$ в четыре раза меньше,

чем в случае одной первой открытой зоны Френеля. Этот же результат можно изобразить

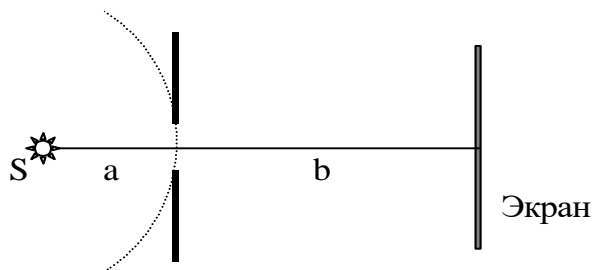


графически. От горизонтальной оси откладываются в полярных координатах модули векторов $d\vec{E}$ от соседних точек волнового фронта. Второй координатой является разность фаз между волной, пришедшей в точку Р из некоей точки волновой поверхности, и волной, пришедшей в точку Р из центра волновой поверхности. В результате кривая завивается в спираль, которая была названа спиралью Френеля. На рисунке изображены различные варианты построений векторов электрического поля в точке Р с помощью спирали.

Используя эти идеи, можно увеличить интенсивность света в точке Р, используя зонные пластинки: фазовые и амплитудные. Фазовая пластинка устроена так, что все нечетные зоны Френеля оказываются закрытыми и вычитания векторов

электрического поля не происходит. Амплитудная зонная пластинка работает так, что фазы нечетных зон «поворачиваются» и становятся положительными. Интенсивность света в точке Р амплитудная пластинка дает в 4 раза больше.

Используем метод зон Френеля для изучения дифракции света на круглом отверстии.



Если на пути волны поставить преграду в виде плоскости с круглым отверстием, то в зависимости от размера отверстия картина освещенности экрана за преградой будет различна. Если расстояния а и b удовлетворяют соотношению

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda,$$

где m – целое число, то отверстие оставит открытым ровно m зон Френеля. Далее, зная это число, можно по спирали Френеля определить результат дифракции в центре экрана (точка Р):

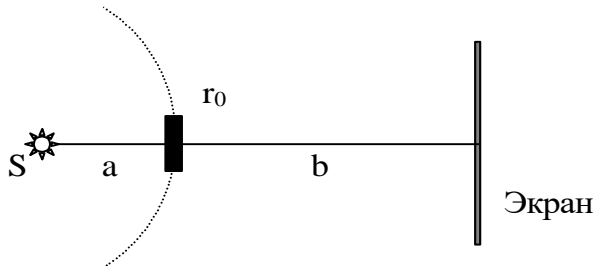
$m = 1$ (одна зона Френеля). $I \sim E^2 = E_1^2 = 4I_0^2 = 4I_0$

$m = 2$ (две зоны Френеля). $I \sim E^2 = 0$

$m = 3$ (три зоны Френеля). $I \sim E^2 = E_3^2 = 4I_0^2 = 4I_0$

На рисунке индексом E_0 обозначена амплитуда вектора электрического поля от всего открытого волнового фронта, а индексом E – тоже, но для части открытого волнового фронта. В остальных точках экрана дифракционная картина будет представлять собой чередование светлых и темных колец. Все это будет наблюдаться в небольшой окрестности проекции отверстия на экран. У

метода спирали Френеля есть один существенный недостаток: он дает интенсивность дифракционной картины **только** в центре экрана.



Теперь перейдем к рассмотрению дифракции световой волны на круглом диске. На пути волны от точечного источника до экрана поставим преграду в виде круглого диска, как показано на рисунке. В этом случае при сложении векторов электрического поля, приходящих в точку Р от различных открытых зон Френеля, получается такой результат:

$$E = E_{m+1} - E_{m+2} + \dots = \frac{E_{m+1}}{2} + \left(\frac{E_{m+1}}{2} - E_{m+2} + \frac{E_{m+3}}{2} \right) + \dots \cong \frac{E_{m+1}}{2}.$$

Если значение m невелико ($m < 10$), то $E \cong \frac{E_1}{2} = E_0$. Это означает, что если диск закрывает небольшое число зон Френеля (хотя бы и четное), то картина на экране будет со светлым пятном в центре диска. Интенсивность в нем будет равна интенсивности, которая возникла бы в этой точке при полном отсутствии какой-либо преграды. При этом в остальных точках экрана будет наблюдаться чередование светлых и темных колец – обычная дифракционная картина. В истории физики это светлое пятно за диском известно как пятно Пуассона. Пуассон первым заметил, что по расчетам Френеля в центре экрана за диском должно быть светлое пятно. Это противоречило бытовавшим до этих взглядов на природу света. Араго тут же поставил эксперимент, который и подтвердил правоту Френеля.

V.6 Дифракция плоской волны на щели.

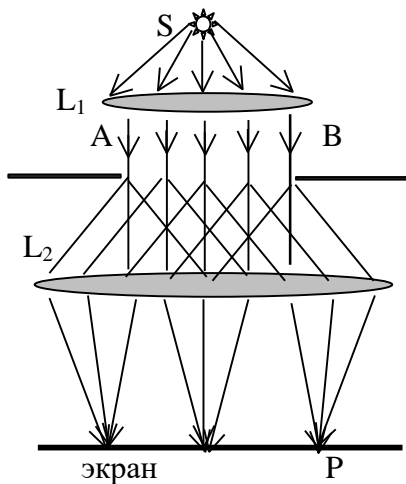
Размер первой зоны Френеля играет важную роль как параметр, определяющий переход волновой оптики к геометрической оптике. Для случая падения плоской волны на круглое отверстие радиус первой зоны Френеля определяется по формуле (b – расстояние от отверстия

до экрана) $r_1^2 = b\lambda$. Тогда величина $\frac{d^2}{b\lambda} \approx m$ по порядку величины дает число зон Френеля,

которое уместится в отверстии. В зависимости от значения этой величины возможны три варианта:

А) $\frac{d^2}{b\lambda} \ll 1$. Размер отверстия много меньше размера 1 з.Ф. В этом случае наблюдается дифракция Фраунгофера.

Б) $\frac{d^2}{b\lambda} \approx 1$. Размер отверстия сравним с размером 1 з.Ф. Наблюдается дифракция Френеля.

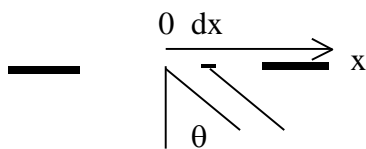


В) $\frac{d^2}{b\lambda} \gg 1$. Размер отверстия гораздо больше 1 з.Ф. В этом

случае дифракции практически нет и свет распространяется в виде лучей – геометрическая оптика.

Теперь рассмотрим случай дифракции Фраунгофера на щели. Для наблюдения дифракции возьмем точечный источник света S и поместим его в фокусе собирающей линзы L₁. После нее свет пойдет в виде плоской волны и на пути встретит преграду в виде плоскости с бесконечной щелью ширины AB = b, расположенную перпендикулярно волне. За преградой дифрагированные лучи попадают на собирающую линзу L₂, которая собирает все параллельные лучи в одной точке экрана, расположенного в фокальной плоскости этой линзы. В нашу задачу входит нахождение распределения интенсивности лучей, попадающих на экран. Для этого используем принцип Гюйгенса-Френеля и его математическое выражение.

Рассмотрим некоторую точку экрана P. В ней собираются лучи, вышедшие из различных точек открытого волнового фронта (щели), но все они вышли из щели под одним и тем же углом θ , отсчитанном от перпендикуляра к преграде. Разобьем мысленно эту щель на очень узкие полоски шириной dx, а затем просуммируем вектора электрического поля волн, пришедших в точку P от этих полосок.



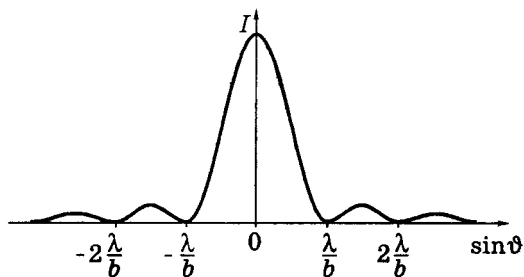
Амплитуда электрического поля в точке P будет пропорциональна площади излучателя, а значит dx. Поэтому амплитуду электрического поля в точке P запишем так: $dE_m = E_0^* dx/b$. Волна, пришедшая из точки с координатой x под углом θ , опережает по фазе волну, пришедшую из точки с координатой x = 0 на $d\phi = kx \cdot \sin\theta$ (см. рисунок). Тогда отвлекаясь от всех остальных множителей (не зависящих от x), запишем электрическое поле волны в точке P в виде (запись в комплексном виде; нам нужна только вещественная часть)

$\text{Re } E = \text{Re} \frac{E_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin\theta} dx = \text{Re} \frac{E_0}{b} \frac{1}{k \sin\theta} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i(kx \sin\theta)} (k \sin\theta dx) = E_0^* \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

В этой формуле буквой α обозначено выражение

$$\alpha = \frac{kb \sin\theta}{2} = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$$

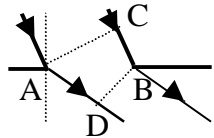
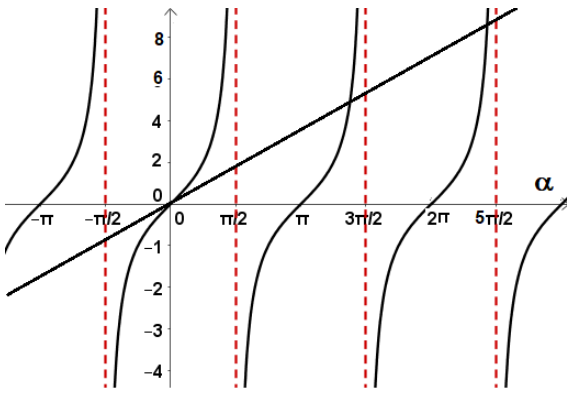
Тогда для интенсивности световой волны, попавшей в точку экрана P под углом θ , получаем следующее выражение



$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} \right)^2}$$

График этой зависимости изображен на рисунке. Минимумы интенсивности будут наблюдаться в точках, в которых синус будет обращаться в ноль

(кроме центральной точки): $\alpha = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Расчет дает формулу для МИНИМУМОВ дифракционной картины:



между колебаниями, распространяющимися от краев щели под углом θ к нормали, будет равна $\Delta = b(\sin\theta - \sin\theta_0)$, поэтому условие минимумов интенсивности изменится и примет вид $b(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$b \cdot \sin\theta = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для нахождения положения максимумов интенсивности света на экране необходимо вычислить производную от интенсивности и приравнять ее к нулю. В результате расчетов для максимумов интенсивности получается трансцендентное уравнение

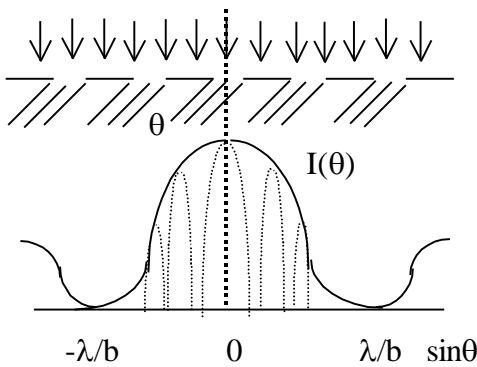
$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha \text{ или } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) = \left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right).$$

Если плоская световая волна падает на щель наклонно под углом θ_0 к нормали, то разность хода

V.7 Дифракционная решетка. Условие максимумов и минимумов интенсивности.

Дифракционная решетка – это прибор для разложения световой волны в спектр и определения ее спектрального состава. Дифракционные решетки бывают:

- 1) стеклянные, когда на прозрачной поверхности специальное устройство наносит штрихи. Такая ДР работает как на просвет, так и на отражение.
- 2) металлические, когда на полированной поверхности металла наносятся штрихи. Такая ДР работает только на отражение.



Рассмотрим дифракционные свойства *идеализированной* ДР. Она представляет собой N бесконечных щелей шириной b в непрозрачном экране. Размер самой преграды между щелями a . Постоянной решетки называется величина $d = b + a$. Ширина всей ДР $L \approx 1$ см, что гораздо меньше, чем расстояние от ДР до экрана. Наблюдение дифракционной картины происходит на экране, помещенном в фокальной плоскости линзы, или на экране, удаленном от решетки. В обоих случаях наблюдается дифракция в параллельных лучах. Световая волна падает на ДР перпендикулярно решетке, начало координат и отсчет фаз производится от середины ДР. Тогда для вторичных

световых волн, идущих от открытых частей волнового фронта под углом θ , разность хода от соседних щелей равна $d \cdot \sin\theta$, а разность фаз в этом случае равна

$$\delta = kd \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta.$$

Найдем амплитуду электрического поля в точке P на экране, в которой собираются лучи от всех щелей, идущие под углом θ к нормали. Для этого используем результат, полученный в предыдущем параграфе для одной щели. Для центральной щели напряженность электрического поля в точке P будет равна (обозначения те же)

$$E_0 = E_0^* \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Тогда для остальных щелей с номерами $\pm 1, \pm 2, \dots$ аналогичные величины равны

$$E_1 = E_0 e^{-i\delta}; E_2 = E_0 e^{-i2\delta}; \dots E_{N/2} = E_0 e^{-i\frac{N}{2}\delta}.$$

Полное электрическое поле на экране будет суммой геометрической прогрессии

$$E = E_0 \left[e^{i\frac{N}{2}\delta} + \dots + e^{i\delta} + 1 + e^{-i\delta} + \dots + e^{-i\frac{N}{2}\delta} \right] = E_0 \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta} (1 - e^{-iN\delta})}{1 - e^{-i\delta}} = E_0 \frac{\sin \frac{N}{2} \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta}{2}}$$

Для интенсивности электрического поля волны в точке Р на экране получаем

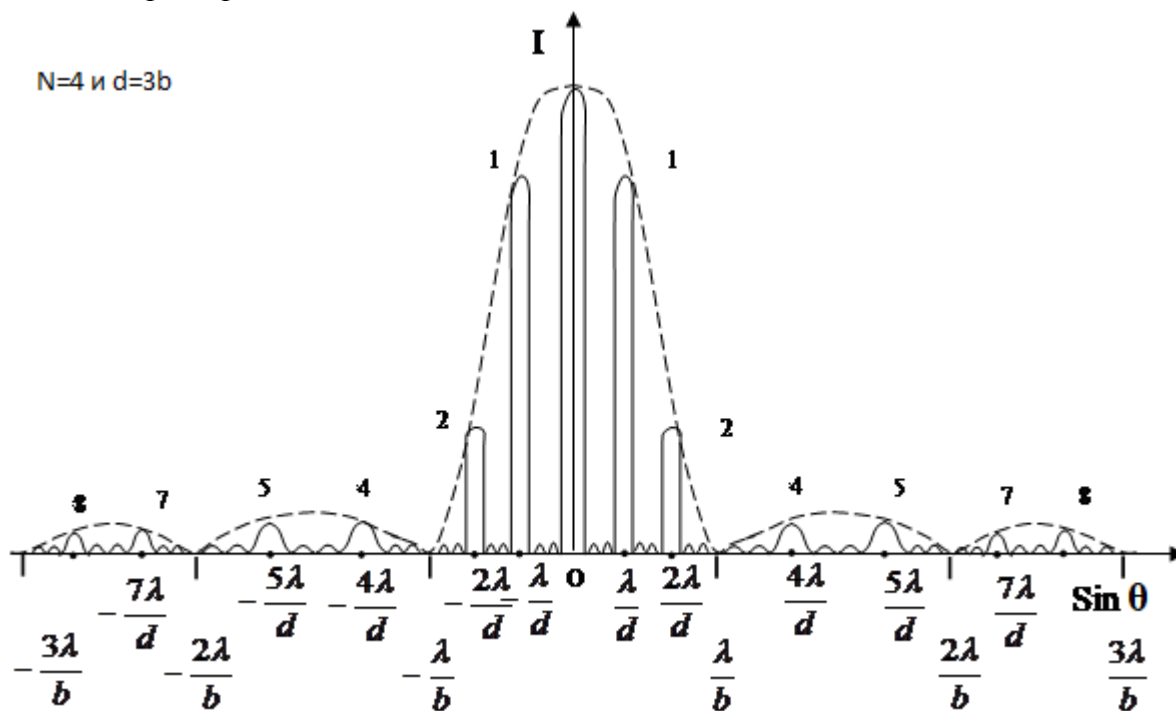
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \left(N \frac{\delta}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

Напоминаем, что $\alpha = \frac{kb \sin \theta}{2} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$, а $\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$.

С помощью этих формул можно определить максимумы и минимумы освещенности экрана. В центр экрана волны от различных щелей приходят в фазе. При этом если амплитуда электрического поля в центре экрана от одной щели E_0 , то от N щелей она будет в N раз больше. При этом интенсивность света в этой точке будет в N^2 раз больше, чем от одной щели. Аналогичная картина будет наблюдаться и в направлениях, для которых выполняется условие – разность хода волн, идущих от соседних щелей должна равняться целому числу длин волн: $d \sin \theta = m\lambda; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Точки экрана, для которых выполняются эти условия, дают положения главных максимумов интенсивности дифракционной картины. Для нахождения положения минимумов воспользуемся тем фактом, что первая дробь в формуле для интенсивности обращается в ноль при условии, которое было получено в предыдущем параграфе:

$$b \sin \theta = m_1 \lambda; m_1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$



В этом направлении ни одна щель не излучает, поэтому такие минимумы носят название главных минимумов. Кроме главных минимумов на дифракционной картине имеются точки, в которых выполняется условие $\sin(N\delta/2) = 0$, а $\sin(\delta/2) \neq 0$. При этом второй множитель в формуле для

интенсивности обращается в ноль, что дает условие побочных (добавочных или второстепенных) минимумов:

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{p}{N} \right) \lambda; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots; p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Действительно, рассмотрим промежуток углов θ между m и $m-1$. При этом значение $\delta/2$ изменяется от 0 до π . Знаменатель второго сомножителя при этом не равен нулю, а числитель $[\sin(N\delta/2)]$ обращается в нуль $N-1$ раз. Таким образом, в этом диапазоне углов (между двумя главными максимумами) будет находиться $N-1$ побочный минимум.

V.8 Электромагнитная волна на границе раздела двух прозрачных сред. Законы отражения и преломления как следствия уравнений Максвелла.

На границе раздела двух различных сред ход светового луча может измениться. Дело в том, что скорости распространения волны в этих средах будут различны. Математическое выражение этого факта – граничные условия, которым подчиняется световая волна. Если на границе раздела двух сред нет свободных зарядов ($\sigma = 0$) и токов ($j = 0$), то

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; H_{\tau 1} = H_{\tau 2}; D_{n1} = D_{n2}; B_{n1} = B_{n2}.$$

Из этих четырех формул только две независимы. Покажем это с помощью уравнений Максвелла.

Нужное нам уравнение выглядит так: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ или $\oint H_1 dl = \int \dot{D}_n dS$. Поэтому, если

касательные к поверхности раздела компоненты вектора H_1 одинаковы в обеих средах, то и производные по времени от нормальных к поверхности раздела компонент вектора смещения D_n должны быть одинаковы. Как мы уже знаем, для случая монохроматических волн $\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\varphi}$ и $\dot{\vec{D}} = i\omega \vec{D}$. Поэтому равенство производных означает и равенство самих величин.

Аналогично доказывается эквивалентность первого и четвертого граничного условия. Итак, независимыми оказываются два граничных условия – первое и второе. Так как на плоскости у любого вектора две независимых проекции, то всего получается четыре независимых уравнения, связывающие вектора электрического и магнитного поля по обе стороны границы. Воспользуемся ими для получения *законов отражения и преломления*.

Рассмотрим падение плоской волны естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_2) под углом θ . Обозначим волновые вектора падающей, отраженной и преломленной световых волн буквами \vec{k}, \vec{k}' и \vec{k}'' . Все эти вектора лежат в одной плоскости, которую назовем плоскостью падения волны. Это следует из однородности каждой полубесконечной среды. Выделим из естественного света одну плоскую линейнополяризованную монохроматическую волну. Тогда вектор электрического поля для нее в комплексном виде запишется так

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}.$$

Поле в среде 1 состоит из полей падающей и отраженной волн

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}' = \vec{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \vec{E}'_m e^{i(\omega t - k'_x x - k'_y y + \alpha')},$$

а в среде 2 существует только преломленная волна

$$\vec{E}_2 = \vec{E}'' = \vec{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}.$$

В нашу задачу входит нахождение связи между частотами, волновыми векторами и начальными фазами колебаний падающей, отраженной и преломленной волн. Далее мы используем граничное условие $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ для случая $y = 0$. Получаем следующее равенство

$$E_{\text{мт}} e^{i(\omega t - k_x x)} + E'_{\text{мт}} e^{i(\omega' t - k'_x x + \alpha')} = \vec{E}''_{\text{мт}} e^{i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')}.$$

Сначала получим соотношение между частотами. Так как это равенство должно быть справедливо при любом x , то и при $x = 0$ оно сохраняется. Но тогда сумма двух гармонических функций будет тоже гармонической функцией. А это возможно только в случае, если у всех волн одна и та же частота. Итак, $\omega = \omega' = \omega''$.

Теперь перейдем к волновым векторам. Исходное равенство справедливо в любой момент времени, а значит справедливо и в момент $t = 0$. Кроме того, оно должно выполняться и в любой точке границе раздела (при любом x). Отсюда следует, что $k_x = k'_x = k''_x$ или

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta''.$$

Так как волновые вектора падающей и отраженной волн по модулю одинаковы, то мы получаем **закон отражения**

$$\theta = \theta'.$$

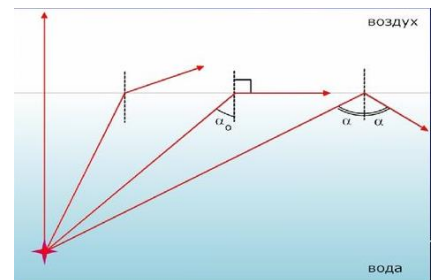
Используя соотношение $k'' = \frac{\omega}{v_2}$, получаем **закон преломления**

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Получили мы эти законы для одной линейно поляризованной волны, но по принципу суперпозиции можно из таких волн составить любую волну, в том числе и естественный свет. Поэтому эти законы выполняются для любой электромагнитной волны.

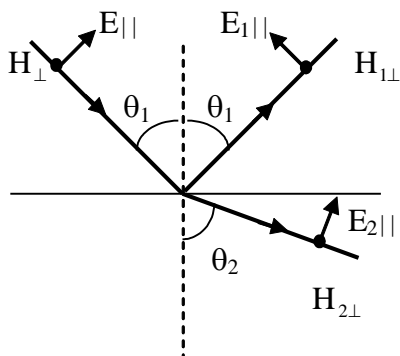
Несколько слов скажем о явлении, названном полным внутренним отражением (ПВО). В законе преломления заложена возможность того, что в случае, когда $n_2 < n_1$, значение $\sin \theta'' = 1$, а числитель при этом меньше единицы. Это означает, что преломленная волна есть, но она идет вдоль границы раздела сред, не проходя во вторую среду. Условием этого является соотношение

$$\sin \theta_{\text{ПВО}} = \frac{n_2}{n_1}; n_2 < n_1.$$



V.9 Поляризация электромагнитной волны на границе раздела двух сред. Формулы Френеля.

В этом параграфе мы рассмотрим падение волны естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_2) с точки зрения поляризационных свойств ЭМВ. Естественный свет – неполяризованный. Его можно представить в виде двух взаимно перпендикулярно линейно поляризованных волн, фазы которых никак не связаны. Такие волны являются некогерентными. Обозначим электрическое поле таких волн буквами \vec{E}_{\perp} и \vec{E}_{\parallel} . Первый из векторов перпендикулярен плоскости падения световой волны, второй вектор параллелен этой плоскости. В силу не когерентности волн, закон



их сложения таков: $E^2 = E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2$.

В нашу задачу входит нахождение формул, связывающих электрические поля отраженной и падающей волны, а также преломленной и падающей волны. Выделим из естественной волны одну из составляющих и найдем для нее искомые формулы.

1) Вектор \vec{E} исходной волны лежит в плоскости падения. При этом вектор \vec{H} перпендикулярен плоскости падения. Тогда граничные условия для касательных проекций

векторов электрического и магнитного поля будут выглядеть так:

$$E_{II} \cdot \cos \theta_1 - E_{III} \cdot \cos \theta_1 = E_{2II} \cdot \cos \theta_2.$$

$$H_{\perp} + H_{1\perp} = H_{2\perp}.$$

Вспользуемся связью векторов электрического поля и напряженности магнитного поля в волне

$H = n \epsilon_0 E$. Тогда система уравнений приобретает вид:

$$E_{II} - E_{III} = E_{2II} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

$$E_{II} + E_{III} = \frac{n_2}{n_1} E_{2II} = E_{2II} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

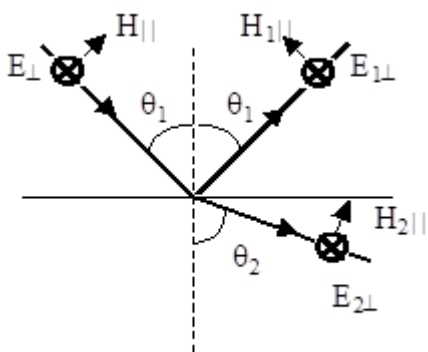
Разделив первое равенство на второе, и приведя все к общему знаменателю, можно получить окончательное выражения параллельной составляющей электрического поля отраженной волны в этом случае:

$$E_{III} = E_{II} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

После несложных вычислений можно получить формулу для преломленной волны:

$$E_{2II} = E_{II} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2) Вектор \vec{E} исходной волны перпендикулярен плоскости падения. При этом вектор \vec{H} лежит в плоскости падения. Теперь граничные условия для касательных проекций векторов электрического и магнитного поля будут выглядеть так:



$$E_{\perp} + E_{1\perp} = E_{2\perp}.$$

$$H_{||} \cdot \cos \theta_1 - H_{1||} \cdot \cos \theta_1 = H_{2||} \cdot \cos \theta_2.$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем формулы для электрического поля для отраженной и преломленной волн перпендикулярной к плоскости падения поляризации:

$$E_{1\perp} = E_{\perp} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)};$$

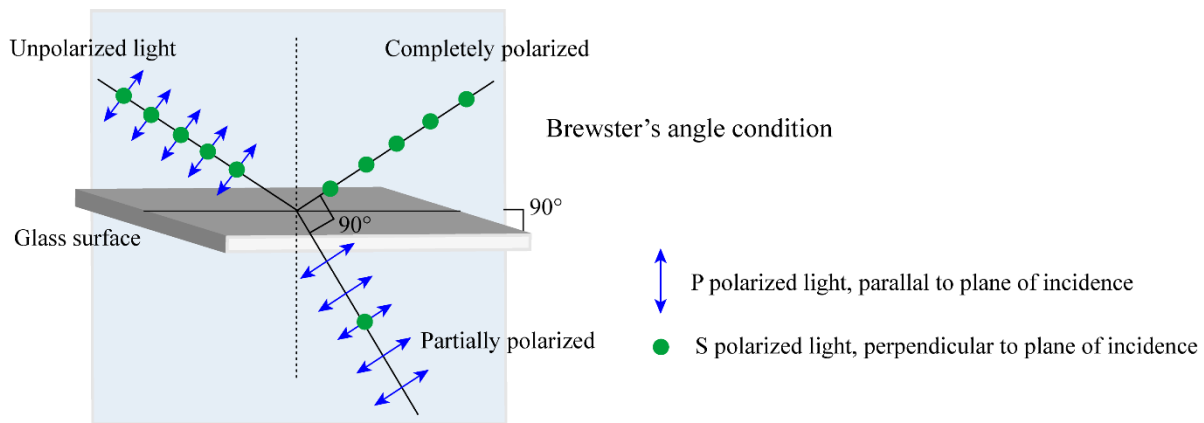
$$E_{2\perp} = E_{\perp} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Для определения энергии отраженной волны и прошедшей волны вводятся понятия коэффициента отражения R и коэффициента пропускания T :

$$R = \frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 = \frac{E_{III}^2 + E_{1\perp}^2}{E_{II}^2 + E_{\perp}^2} = R_{\perp} + R_{||}; T = \frac{I_2}{I_0} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_2}{E_0} \right)^2.$$

Анализ полученных формул показывает, что существует ситуация, когда параллельная плоскости падения компонента электрического поля в отраженной волне отсутствует. В этом случае отраженная волна оказывается линейно поляризованной. Условием этого является соотношение

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$



Угол падения, при котором в отраженной волне остается только E_{\perp} , называется углом Брюстера. Для этого угла имеется соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{БР}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Величина этого угла для перехода воздух-стекло $\theta_{\text{БР}} = 57^{\circ}$.

V.10 Двойное лучепреломление.

Электрическое поле в веществе (в том числе и поле ЭМВ) характеризуется векторами \vec{E} и \vec{D} . Для изотропных сред связь между этими величинами простая $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$. В этой формуле ϵ - диэлектрическая проницаемость вещества, которая является в этом случае скаляром. В природе существуют вещества, имеющие анизотропные свойства. Это означает, что свойства таких веществ в различных направлениях различны. Для таких веществ связь между векторами \vec{E} и \vec{D}

$$D_x = \epsilon_0 (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z)$$

более сложная и осуществляется через тензор $D_y = \epsilon_0 (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z) \Rightarrow$

$$D_z = \epsilon_0 (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z)$$

$$D_i = \sum_j \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j \quad ; i = 1,2,3; j = 1,2,3.$$

диэлектрической проницаемости (ϵ_{ij}). Понятие тензора уже встречалось нам, когда мы изучали движение твердого тела (тензор инерции). Тогда мы рассмотрели основные свойства тензора. Из приведенных уравнений ясно, что вектора \vec{E} и \vec{D} могут быть не параллельны. Точная теория показывает, что тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным - $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Кроме того, для каждого кристалла существует такая система координат, в которой тензор (ϵ_{ij})

превращается в диагональный. Оси такой $\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$

системы координат называются главными осями кристалла. Для главных осей справедливо соотношение

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = \text{const}.$$

Учитывая соотношение $n = \sqrt{\epsilon}$, получаем

$$(n_x x)^2 + (n_y y)^2 + (n_z z)^2 = \text{const}.$$

Это уравнение определяет фигуру, называемую эллипсоидом Френеля. У этого эллипсоида (как и любого другого) имеется два круговых сечения. Оси, перпендикулярные этим круговым сечениям, называются оптическими осями кристалла. В общем случае их две. Форма эллипсоида Френеля зависит от значения диагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости кристалла. Если выполняется условие

$$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z,$$

то эллипсоид Френеля становится эллипсоидом вращения. В этом случае две различные оптические оси превращаются в одну и такой кристалл называют одноосным. При этом его оптическая ось совпадает с осью z.

Получим общее уравнение для волн в одноосных кристаллах. Рассмотрим прохождение ЭМВ через не поглощающий немагнитный кристалл, в котором нет ни внесенных зарядов ($\sigma = 0$), ни макроскопических токов ($j = 0$). Для получения искомым уравнений будем использовать систему уравнений Максвелла. Решение ее будем искать в виде плоской волны, как наиболее простое. Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме и используем комплексную запись векторов электрического и магнитного полей ЭМВ:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div} \vec{D} = 0; \text{div} \vec{B} = 0.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.$$

Введем два единичных вектора – волновой \vec{N}_k и лучевой \vec{N}_s :

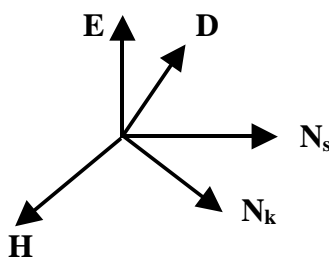
$$\vec{k} = k \vec{N}_k; \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = S \vec{N}_s.$$

После упрощений уравнения Максвелла приобретают следующий вид:

$$\vec{D} = -\frac{1}{v} \vec{N}_k \times \vec{H}; \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 v} \vec{N}_k \times \vec{E}; \vec{N}_k \vec{D} = 0; \vec{N}_k \vec{H} = 0.$$

Анализируя полученные уравнения, можно получить соотношения между направлениями векторов, описывающих ЭМВ:

$$\vec{D} \perp \vec{N}_k, \vec{H}; \vec{H} \perp \vec{E}, \vec{N}_k; \vec{E} \perp \vec{H}; \vec{N}_s \perp \vec{E}, \vec{H}.$$



Таким образом, в кристаллах групповая (\vec{N}_s) и фазовая (\vec{N}_k)

скорости в общем случае по направлению не совпадают. Лучевой

вектор – это вектор, в направлении которого распространяется

максимум амплитуды волны. Он сонаправлен с вектором

групповой скорости. Волновой же вектор перпендикулярен волновой поверхности и

сонаправлен вектору фазовой скорости волны. Получается, что ЭМВ в кристаллах не совсем

поперечная (направления всех векторов в волне показаны на рисунке).

Объединяя первые два уравнения, получаем искомую связь векторов \vec{E} и \vec{D} в волне

$$\vec{D} = -\epsilon_0 n^2 (\vec{N}_k \times \vec{N}_k \times \vec{E}).$$

Раскроем двойное векторное произведение

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 (\vec{E} - \vec{N}_k (\vec{N}_k \vec{E})).$$

Это и есть общее уравнение для нахождения всех оптических свойств кристаллов. Решать его в общем случае сложно. Но, рассматривая простые случаи, можно проиллюстрировать все основные законы оптики анизотропных сред.

1) Сначала покажем возможность возникновения эллиптической поляризации волны, распространяющейся в кристалле, если падающая волна была поляризована линейно. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси y ($N_x = N_z = 0; N_y = 1$). В этом случае при произвольном направлении плоскости поляризации волны у нее будут две проекции вектора \vec{E} : E_x и E_z . Рассмотрим отдельно распространение этих компонент волны в кристалле.

а) Пусть у вектора электрического поля волны будет одна компонента E_x . Тогда

$$\vec{N}_k \vec{E} = E_x \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Общее уравнение примет вид $\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$. Кроме того, $D_i = \sum_j \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j$. В результате получаем

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_{xx} E_x = \epsilon_0 n^2 E_x. \text{ Тогда показатель преломления в этом случае равен } n = \sqrt{\epsilon_{xx}}, \text{ а}$$

$$\text{скорость распространения волны такой поляризации } v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}.$$

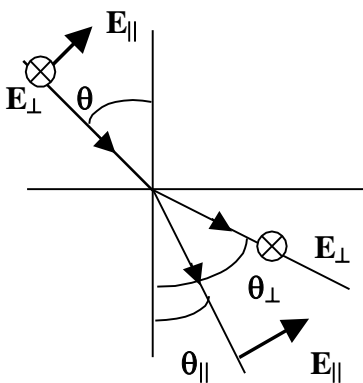
б) Пусть у вектора электрического поля волны будет одна компонента E_z . Тогда аналогичный расчет дает следующий результат: $D_z = \epsilon_0 \epsilon_{zz} E_z = \epsilon_0 n^2 E_z$. Скорость в этом случае равна

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{zz}}}.$$

Мы рассматриваем одноосный кристалл, следовательно $\epsilon_{zz} = \epsilon_z \neq \epsilon_x$. Поэтому скорости двух волн, на которые мы разложили исходную волну, будут различны. Разность фаз между этими волнами будет зависеть от расстояния, которое эти волны прошли в кристалле, то есть от его толщины. В результате при определенной толщине кристалла на выходе волна будет поляризована эллиптически.

2) Теперь покажем возможность двулучепреломления для одноосного кристалла.

Пусть из воздуха в кристалл под углом θ падает пучок естественного света. Выберем систему

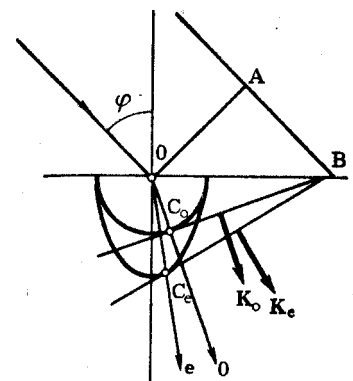


координат как показано на рисунке (ось z перпендикулярна плоскости рисунка). Для одноосного кристалла $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Обозначим величины $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_o$, а $\epsilon_z = \epsilon_e$. Представим падающую волну в виде двух никак по фазе не связанных взаимно перпендикулярно поляризованных волн. При этом в кристалл волны будут входить под углами, которые можно определить из уравнений (закон преломления):

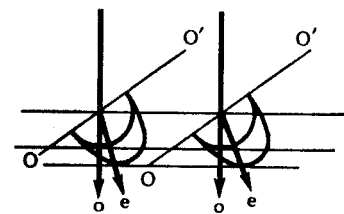
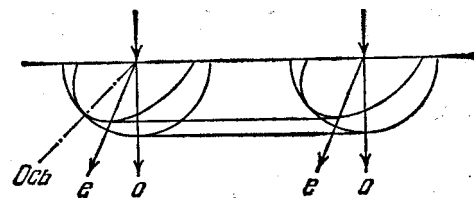
$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\perp}} = n_{\perp} = \sqrt{\epsilon_e}; \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\parallel}} = n_{\parallel} = \sqrt{\epsilon_o}.$$

Теперь становится ясно, что волновые фронты будут различны, и в кристалле эти волны будут иметь различные направления движения – произойдет двулучепреломление.

Построение Гюйгенса. В основе теории Гюйгенса для распространения волны в анизотропных кристаллах лежит следующая идея. В кристалле у волны две волновых поверхности: одна соответствует *обыкновенной* (O) волне, другая – *необыкновенной* (e). Скорость обыкновенной волны $v_o = c/n_o$ одинакова во всех направлениях, поэтому волновая поверхность обыкновенной волны – сфера. Скорость необыкновенной волны $v_e = c/n_e$ и зависит от направления движения этой волны. Скорости



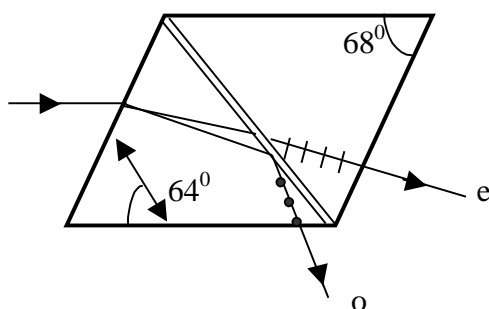
обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы в направлении оптической оси и максимально отличаются в направлениях, перпендикулярных оптической оси. Волновая поверхность необыкновенной волны – эллипсоид вращения. Кристалл называется положительным, если $v_o > v_e$ ($n_o < n_e$); кристалл называется отрицательным, если $v_o < v_e$ ($n_o > n_e$). Сам же принцип Гюйгенса остается неизменным: каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн. На рисунках изображены различные варианты построения волновых поверхностей. На первом рисунке рассмотрено наклонное падение света на отрицательный кристалл. Поверхность кристалла параллельна оптической оси кристалла OB . на втором рисунке свет падает нормально на поверхность кристалла исландского шпата (отр. кристалл). Оптическая ось OO' не параллельна поверхности. Третий рисунок для положительного кристалла.



V.11 Поляризационные приборы. Закон Малюса.

Явление двулучепреломления используется для получения поляризованного света. Такие приборы делятся на два класса: поляризационные приборы и дихроичные пластинки.

1. Поляризационные приборы. Наиболее распространенными приборами этого класса являются



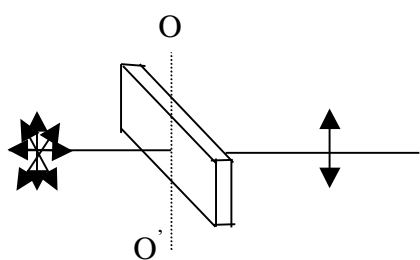
призмы. Изготавливаются призмы в основном из исландского шпата, кварца или натронной селитры. Различают однолучевые и двухлучевые призмы. В двухлучевых призмах распространяются два луча в различных направлениях. Наиболее распространенной поляризационной призмой является призма Николя или просто николь. На рисунке показана такая призма. Стрелкой обозначено направление оптической оси. Естественный угол скола у исландского шпата составляет 71° , для изготовления призмы 3° стачивают. Два куска

исландского шпата склеивают канадским бальзамом. Тогда обыкновенный луч на границе склейки испытывает полное внутреннее отражение и уходит в сторону ($n_{\text{исл.шпата}} = 1.658$, $n_{\text{бальзама}} = 1.550$). Необыкновенный же луч на этой границе просто преломляется. Обыкновенный луч попадает на зачерненную поверхность и поглощается. Второй луч, полностью поляризованный, выходит из призмы.

2. Дихроичные пластинки. К таким приборам относятся поляроиды и турмалины. В этих приборах обыкновенный луч поглощается сильнее и, при определенной толщине поглощающего слоя, поглощается весь.

Использование поляризаторов.

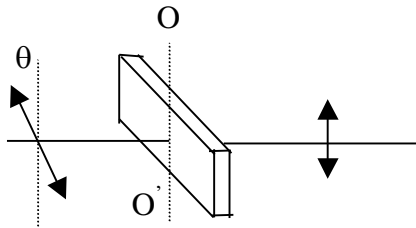
а) На поляризатор падает пучок естественного света. Идеальный поляризатор пропускает колебания электрического поля в волне только в плоскости, проходящей через оптическую ось



(e-луч). Поэтому, если представить естественный свет \vec{E} как две линейно поляризованные волны, одна из которых поляризована в плоскости оптической оси \vec{E}_{\parallel} , а другая – в перпендикулярной плоскости \vec{E}_{\perp} , то пройдет через поляризатор лишь одна, параллельная составляющая \vec{E}_{\parallel} .

Поскольку $I_{\text{ест}} = I_{\parallel} + I_{\perp} = 2I_{\parallel} = 2I_{\perp}$, то $I_{\text{прош}} = \frac{1}{2}I_{\text{ест}}$.

б) На поляризатор падает линейно поляризованный свет. Разложим вектор электрического поля падающей волны на две взаимно перпендикулярных составляющих $\vec{E}_0 = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$. Один из них направлен вдоль оптической оси поляризатора и проходит полностью. Второй же луч не проходит совсем. Электрическое поле после поляризатора будет определяться так $E_1 = E_{\parallel} = E_0 \cos \theta$, а интенсивность прошедшей волны будет равна

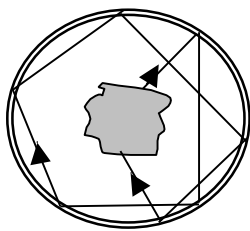


$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Эта формула носит название закона Малюса.

V.12 Тепловое излучение. Равновесная плотность излучения. Закон Кирхгофа.

Вспомним основные постулаты молекулярно-кинетической теории: все вещества состоят из атомов или молекул; атомы или молекулы находятся в непрерывном движении и взаимодействуют друг с другом за счет гравитационного или электромагнитного полей. Мы уже знаем, что атомы состоят из заряженных частиц. Любая заряженная частица, которая движется с ускорением, должна излучать. Поэтому, все атомы, участвующие в тепловом движении, должны излучать ЭМВ. Это излучение и называется тепловым. Особенностью такого излучения является сильная зависимость интенсивности теплового излучения от абсолютной температуры T .



Рассмотрим основные свойства теплового излучения и дадим основные определения. Рассмотрим какое-либо тело, нагретое до температуры T . Окружим его адиабатической оболочкой и откачаем воздух. Стенки этой оболочки идеально отражают все, что на них падает. Внутри оболочки, таким образом, останется тело и его тепловое излучение. Через некоторое время наступит равновесие между телом и излучением: энергии, излучаемая и поглощаемая телом в единицу времени, будут равны. Это равновесие называется тепловым равновесием, а излучение – равновесным тепловым излучением. Итак,

тепловое излучение, которое находится в равновесии со своим телом, называется равновесным тепловым излучением. К равновесным системам применимы все законы термодинамики. Теперь дадим несколько определений.

Энергетической светимостью тела R называется энергия, излучаемая с единицы поверхности тела в единицу времени во всех направлениях. Энергетическая светимость является функцией только температуры. В некоторых учебниках эта величина обозначается буквой M_3 .

Испускательной способностью тела Γ_{ω} называется энергия, излучаемая телом с

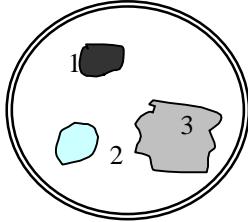
единицы поверхности в единицу времени в единичном частотном интервале. При этом dR_{ω} - энергия, излучаемая телом в 1с с 1m^2 поверхности в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$. Испускательная способность тела является функцией частоты и температуры.

Поглощательной способностью тела $a_{\omega T}$ называется отношение потока энергии,

поглощенной телом, к потоку энергии, падающей на поверхность тела за одно и тоже время. Ясно, что $a_{\omega T} \leq 1$. Если поглощательная способность тела равна единице, то такое тело называется

абсолютно черным телом (АЧТ). Такое тело поглощает все излучение, которое падает на его поверхность. Если $a_{\omega T} = a_T = \text{const} < 1$, то такое тело называется серым телом.

Закон Кирхгофа. Возьмем адиабатическую оболочку, в которой в состоянии теплового равновесия находятся три различных тела. При этом они обмениваются тепловым излучением.

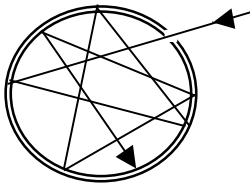


Оказывается, что хотя они и разные, но каждое из них поглощает энергию теплового излучения в той же степени, в которой и излучает. Это происходит независимо от вида тел, поэтому

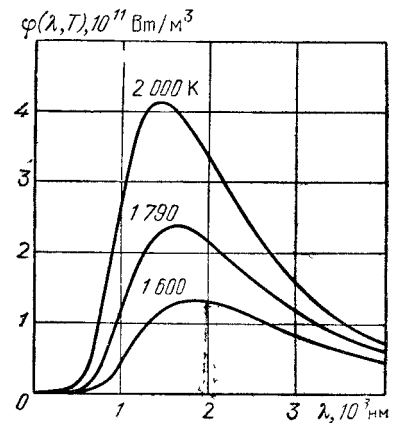
$$\frac{r_{\omega T1}}{a_{\omega T1}} = \frac{r_{\omega T2}}{a_{\omega T2}} = \frac{r_{\omega T3}}{a_{\omega T3}} = \dots = f(\omega, T).$$

Отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, а является универсальной функцией частоты и температуры.

Так как для АЧТ поглощательная способность равна единице, то функция $f(\omega, T)$ оказывается испускательной способностью АЧТ. Таких тел как АЧТ в природе в чистом виде не существует. Однако некоторые тела в определенных условиях по своим свойствам близки к АЧТ. Изображенный на рисунке объем по своим свойствам может служить примером АЧТ. Это адиабатическая оболочка с малым отверстием для исследования свойств находящегося внутри излучения. Для таких тел есть эксперименты, результаты которых изображены на графике. В теоретических исследованиях удобнее пользоваться зависимостями от частоты, в эксперименте получаются зависимости от длины волны. Поэтому экспериментальные



данные для теплового излучения представляют собой зависимости испускательной способности АЧТ от длины волны: $dR_{\omega} = r_{\omega} d\omega$; $dR_{\lambda} = \varphi(\lambda, T) d\lambda$. Так как $dR_{\omega} = dR_{\lambda}$ и $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, то $\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f(\omega, T)$.



данные для теплового излучения представляют собой зависимости испускательной способности АЧТ от длины волны:

$dR_{\omega} = r_{\omega} d\omega$; $dR_{\lambda} = \varphi(\lambda, T) d\lambda$. Так как $dR_{\omega} = dR_{\lambda}$ и

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \text{ то}$$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f(\omega, T).$$

Рассмотрим излучение, находящееся в равновесии со своим телом. В этом случае энергия излучения будет распределена в объеме полости с определенной плотностью $u = u(T)$. Спектральное распределение этой энергии можно охарактеризовать функцией $u(\omega, T)$, определяемой условием $du_{\omega} = u(\omega, T) d\omega$. Тогда

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega.$$

Найдем связь между испускательной способностью АЧТ и спектральной плотностью равновесного теплового излучения. Рассмотрим полость, заполненную равновесным излучением. Воспользуемся гипотезой Планка о фотонах (подробности будут чуть позже) и запишем объемную спектральную плотность теплового излучения как $du_{\omega} = \hbar \omega dn_{\omega}$. При изучении молекулярной физики была получена формула, определяющая число ударов молекул газа о стенку: $dN = 1/4 c dn_{\omega}$. Для фотонного газа она тоже применима, поэтому в единицу времени фотоны принесут на единицу площади энергию $1/4 \hbar \omega c dn_{\omega}$, которая вся поглотится. Поскольку речь идет о АЧТ, вся эта энергия будет излучена. Следовательно, $f(\omega, T) d\omega = 1/4 \hbar \omega c dn_{\omega} =$

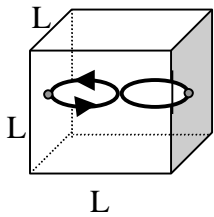
$$c/4 u(\omega, T) d\omega. \text{ Поэтому, } f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T).$$

V.13 Излучение АЧТ. Формула Релея-Джинса.

Классическая физика оказалась не в состоянии теоретически объяснить вид функции $\varphi(\lambda, T)$, измеренной экспериментально. Предельные случаи $\varphi(\lambda, T)$ при достаточно малых и достаточно больших частотах были теоретически обоснованы формулами Рэлея—Джинса и Вина. Общая формула как интерполяционная формула для предельных случаев была найдена Планком. Она положила начало развитию квантовой теории.

Итак, нужно получить формулу для вычисления испускательной способности АЧТ или плотности энергии теплового излучения. Попытки получить эту формулу сводились к нахождению числа возбужденных колебаний и умножению этого числа на энергию одного колебания.

Концентрация мод колебаний. Рассмотрим модель АЧТ в виде полости с адиабатическими стенками. Будем считать, что полость имеет форму куба с ребром L , как изображено на рисунке. Наполним ее тепловым излучением. Со временем установятся стоячие волны во всех направлениях. В этом случае волны не гасят друг друга и могут существовать бесконечно долго.



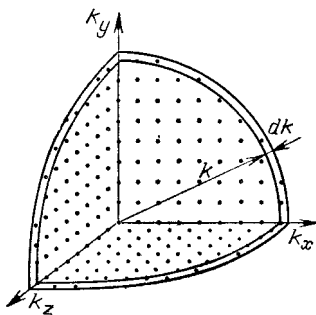
Стоячая волна может образоваться лишь в том случае, если бегущая волна после отражения от двух противоположных граней куба и прохождения пути $2L$, возвращается в исходную точку с фазой, отличающейся от первоначальных на $2\pi n$, где n - целое. Не ограничивая общности, можно считать, что двукратное отражение от граней либо не вносит в фазу волны каких-либо изменений, либо изменяет фазу на 2π . Поэтому условие образования стоячих волн в каждом из измерений куба имеет вид

$$k_2 L = 2\pi n, \text{ или } k_x L = \pi n_x; k_y L = \pi n_y; k_z L = \pi n_z,$$

где n_x, n_y, n_z - целые числа. Число волн dN , волновые числа которых заключены между $(k_x, k_x + dk_x)$, $(k_y, k_y + dk_y)$, $(k_z, k_z + dk_z)$ равно числу целых чисел, заключенных в интервале $(n_x, n_x + dn_x)$, $(n_y, n_y + dn_y)$, $(n_z, n_z + dn_z)$, поэтому

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z.$$

Расчет удобно вести в сферических координатах, считая, что по осям декартовой системы координат отложены k_x, k_y и k_z . Поскольку числа k_x, k_y и k_z положительны, в сферических координатах число возбужденных колебаний принимает вид



$$dN = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk.$$

Учитывая, что $k = \omega/c$, находим концентрацию стоячих волн (число волн, приходящееся на единицу объема полости):

$$\frac{dN}{L^3} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.$$

Рис. 5.6. Число точек, заключенных в 1/8 шарового слоя, равно числу стоячих волн, волновые числа которых лежат в интервале dk

Поскольку электромагнитная волна обладает двумя возможными поляризациями, то полная концентрация стоячих волн в два раза больше и равна

$$\frac{dN_{\text{полн}}}{L^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.$$

Каждая из стоячих волн называется модой колебаний, а число мод равно числу степеней свободы системы. Если $\langle \varepsilon \rangle$ является средней энергией, приходящейся на одну степень свободы, то плотность энергии стоячих волн равна

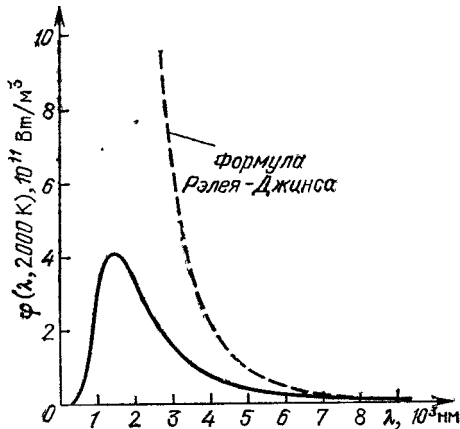
$$u(\omega, T) = \frac{dN_{\text{полн}}}{L^3} \langle \varepsilon \rangle = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \varepsilon \rangle .$$

Таким образом, нахождение $u(\omega, T)$ свелось к определению средней энергии моды колебаний. Формула Рэлея - Джинса. По теореме о равномерном распределении энергии на одну степень свободы в классической статистической системе приходится энергия $kT/2$. У гармонического осциллятора средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, и поэтому его средняя энергия равна kT . Это энергия, приходящаяся на одну моду колебаний. Подставим этот результат в общую формулу, в результате получим

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT ; f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT .$$

Последнее равенство называется формулой Рэлея-Джинса.

Эта формула была предложена Д. У. Рэлеем в 1900 г. и несколько более подробно обоснована Д. Д. Джинсом. Она дает достаточно хорошее согласие с экспериментом при малых ω (больших λ). При больших ω спектральная



плотность значительно превосходит наблюдаемую, а при $\omega \rightarrow \infty$ получается недопустимое соотношение $u(\omega, T) \rightarrow \infty$. Расходимость плотности энергии излучения $u(\omega, T)$ называется *ультрафиолетовой катастрофой*.

Формула Вина. В. Вин (1864—1928) предположил, что каждая мода колебаний является носителем энергии $\varepsilon(\omega)$, но не все моды данной частоты возбуждены. Относительное число $\Delta N/N$ возбужденных мод дается распределением Больцмана:

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{\varepsilon(\omega)}{kT}} .$$

Отсюда для средней энергии, приходящейся на моды с частотой ω , находим

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon(\omega) e^{-\frac{\varepsilon(\omega)}{kT}} .$$

Из общих термодинамических соображений Вин заключил, что энергия моды частотой ω пропорциональна частоте, т.е. $\varepsilon(\omega) = \hbar\omega$. Коэффициент пропорциональности здесь дан в современных обозначениях в виде постоянной Планка, которая в то время не была известна. Общая формула в этом случае приобретает вид

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\varepsilon(\omega)}{kT}} ; f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\varepsilon(\omega)}{kT}} .$$

Она называется формулой Вина (1896) и дает хорошее согласие с экспериментом в области достаточно больших частот (малых длин волн). Промежуточную область долгое время описать не удавалось.

V.14 Формула Планка. Законы Стефана-Больцмана и Вина.

Попытку выйти из положения предпринял Планк (1858-1947). В 1900 он предложил интерполяционную формулу, которая полностью соответствовала экспериментальным данным. При получении этой формулы он предположил, что тела излучают ЭМВ (тепловое излучение) дискретно, в виде квантов с энергией ε_0 . Тогда сама энергия теплового излучения должна быть дискретна и кратна этой величине $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots, n\varepsilon_0$. При этом сами излучательные системы рассматривались как колебательные системы – атомные осцилляторы (АО). Такая система, АО в данный момент с вероятностью

$$P_n = A e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}$$

находится в одном из состояний с энергией $n\varepsilon_0$, то есть подчиняется распределению Больцмана по энергии. Средняя излучаемая энергия при этом может быть вычислена по формуле (используем обозначение $\beta = 1/(kT)$):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\varepsilon_0}}.$$

По виду эта формула похожа на логарифмическую производную

$$-\frac{d}{d\beta} \left(\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\varepsilon_0} \right) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\varepsilon_0}}.$$

Таким образом, необходимо вычислить сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\varepsilon_0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\beta\varepsilon_0} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}}.$$

После вычисления логарифмической производной, получаем выражение для вычисления средней энергии АО:

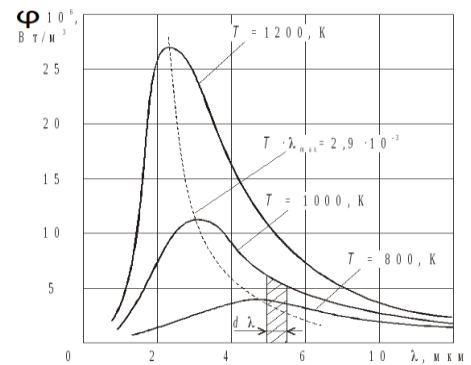
$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}, \text{ а для испускательной способности АЧТ } f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}.$$

И вот теперь Планк предположил, что энергия кванта пропорциональна частоте ω , то есть $\varepsilon_0 = \hbar\omega$. Постоянный коэффициент в этой формуле получил название постоянной Планка.

Формула для испускательной способности АЧТ приобрела окончательный вид:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Из сравнения теории и эксперимента было найдено значение постоянной Планка. Оно оказалось равным $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Сначала Планк догадался, что формула должна иметь такой вид, и



лишь спустя четыре месяца ему удалось вывести эту формулу. Легко показать, что законы Релея-Джинса и Вина входят в эту формулу как ее предельные случаи соответственно малых и больших частот:

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1 \Rightarrow f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cong \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT - \text{Релей-Джинс.}$$

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1 \Rightarrow f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cong \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} - \text{Вин.}$$

Закон Стефана-Больцмана. С помощью формулы Планка можно вычислить энергетическую светимость АЧТ. Для этого необходимо вычислить следующий интеграл:

$$R_{\text{ачт}} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4.$$

Вычислена энергия, излучаемая АЧТ с единицы поверхности в единицу времени. Она пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, что подтверждается экспериментом. Коэффициент σ в этом законе назван постоянной Стефана-Больцмана и равен $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴). Ее можно вычислить из приведенной формулы, зная постоянную Планка, или определить из эксперимента. Оба значения получились очень близкими по величине.

Закон смещения Вина. Суть закона смещения Вина в том, что экспериментально было обнаружено смещение максимума испускательной способности АЧТ в сторону меньших длин волн при увеличении температуры АЧТ: $\lambda_m T = b$. Коэффициент b был назван постоянной Вина. Для того, чтобы теоретически получить эту формулу, необходимо записать испускательную способность АЧТ в зависимости от длины волны, а затем определить ее максимум дифференцированием. Прделаем последовательно все вычисления:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right) = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^5 \frac{\hbar}{8\pi^3 c^3} \frac{1}{\frac{2\pi c \hbar}{\lambda kT} - 1} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^5 \frac{\hbar}{8\pi^3 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}; x = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda kT}.$$

Дифференцируя полученное выражение по x , получаем трансцендентное уравнение:

$$e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0.$$

Решая его методом последовательных приближений, находим его решение $x_m = 4.965$. Теперь зная значение x_m , можно получить закон смещения Вина:

$$\lambda_m T = \left(\frac{kx_m}{2\pi c \hbar} \right)^{-1} = b.$$

ЧАСТЬ VI. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.

В этой главе мы, в основном, будем рассматривать те эксперименты, результаты которых привели к необходимости пересмотреть основы классической физики и создать новую науку – квантовую физику. Классическая физика вошла в нее как часть. Далее мы рассмотрим основные положения квантовой физики и довольно кратко изложим основные результаты ее применения к микромиру – атомную и ядерную физику.

VI.1 Внешний фотоэффект

В соответствие с идеей Планка при тепловом излучении обмен энергией между атомами и электромагнитным полем происходит порциями. Из этого еще не следует никаких выводов о дискретности энергии электромагнитного поля. Для такого вывода нужны эксперименты. Одним из таких экспериментов явился эксперимент по фотоэффекту. Открыто это явление было в 1887 году Герцем и исследовано Столетовым в 1887-1889 годах. Суть этого явления заключается в том, что при освещении ЭМВ катода вакуумного диода в диоде появлялся электрический ток. Попробуем теоретически получить основные законы фотоэффекта на основе классической электродинамики. Согласно ей, энергия электромагнитного поля $E_{ЭМП}$ в объеме V определяется так

$$I = \langle S \rangle = cu; u = \frac{dE_{ЭМП}}{dV}; E_{ЭМП} = \frac{I}{c} V = \frac{V}{2c} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2 = \frac{V}{2} \epsilon_0 n E_m^2,$$

где I – интенсивность светового потока, а $n = \sqrt{\epsilon}$. Она может быть сколь угодно мала, что подтверждается большим числом экспериментов. Теперь предложим классическое объяснение фотоэффекта: электроны в металле находятся в связанном состоянии (в «яме»), и, чтобы освободить электрон, нужна энергия, равная работе выхода $A_{вых}$. По закону сохранения энергии $\Delta E = A_{вых} + E_{кин}$,

где $E_{кин}$ – кинетическая энергия вылетевшего электрона, а ΔE – энергия, сообщенная электрону электромагнитной волной. Поэтому классическая электродинамика предсказывает:

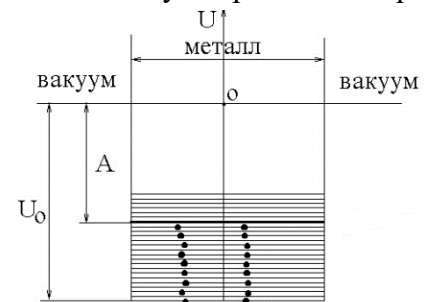
- порог по ΔE , а следовательно, по интенсивности I ($\Delta E < A_{вых}$);
- $E_{кин} \sim \Delta E$, то есть кинетическая энергия электрона

должна быть пропорциональна интенсивности падающего излучения.

Однако тщательные эксперименты Столетова показали, что

- наблюдается порог по частоте падающей волны (красная граница), но нет порога по интенсивности I ;
- скорость вылетающих электронов не зависит от интенсивности I , а зависит от частоты падающей волны ω .

Ученым стало ясно, что интенсивность ЭМВ не всегда полностью определяет энергию ЭМВ и надо пересматривать классическую электродинамику для таких случаев. Выход из создавшегося положения был предложен Эйнштейном в 1905 году. Он предположил, что энергия электромагнитного поля дискретна и квант ее энергии определяется, как $\hbar\omega$, то есть энергия электромагнитного поля определенной частоты равна $E_{ЭМП}(\omega) = N(\hbar\omega)$. Тогда, следуя



Эйнштейну, при фотоэффекте электрону в металле передается один квант энергии $\Delta E = \hbar\omega$ и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта приобретает вид

$$\hbar\omega = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}.$$

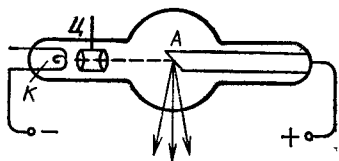
Этот результат отлично согласуется с экспериментом, и явился основой докторской диссертации Эйнштейна. Эйнштейн пошел дальше и разработал корпускулярную теорию света. Согласно ей, свет в некоторых явлениях, таких как фотоэффект, ведет себя как поток частиц – фотонов, которые имеют импульс и энергию в соответствии с формулами

$$E_{\text{ф}} = \hbar\omega \quad \vec{p}_{\text{ф}} = \frac{E_{\text{ф}}}{c} \vec{n} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n} \quad \vec{p}_{\text{эмп}}(\omega) = N \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n} = N(\hbar\vec{k}).$$

В этих формулах \vec{n} – единичный вектор, N – число фотонов определенной частоты, а \vec{k} – волновой вектор, модуль которого равен $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Чтобы определить массу покоя фотона, вспомним инвариант из СТО: $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$, откуда получаем $m_{0\text{ф}} = 0$.

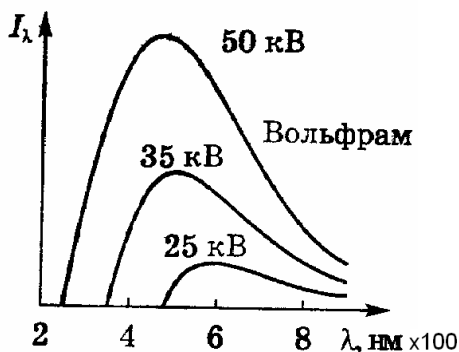
Итак, можно представлять электромагнитную волну как поток фотонов с нулевой массой покоя и скоростью движения равной скорости света. Для изучения фотоэффекта и, как покажет дальнейшее изучение явлений микромира, некоторых других явлений это важно. Но при обычных условиях дискретность ЭМП не проявляется, так как энергия одного фотона очень мала. Чтобы передать большую энергию, фотонов должно быть огромное количество. Например, электрическая лампа накаливания мощностью 100 Вт испускает в секунду $N = \frac{P}{\hbar\omega_{\text{ср}}} = 10^{20}$ фотонов. При таком их количестве дискретность не проявляется никак.

VI.2 Тормозное рентгеновское излучение.



Рассмотрим еще один эксперимент, результаты которого классическая физика объяснить не могла. Суть явления в следующем: при облучении стекол и металлов быстрыми электронами возникает излучение, которое мы теперь называем рентгеновским. Обнаружил его впервые в 1895 году Рентген. Наблюдать это явление можно

следующим образом. На анод специально сконструированного диода подается высокое напряжение. При этом из катода за счет термоэлектронной эмиссии вылетают электроны и под действием ускоряющего поля анода движутся к нему. При полете они фокусируются устройством Ц. При подлете к аноду они тормозятся, и при торможении излучают энергию. За счет взаимодействия с электронами изменяется состояние заряженных частиц самого анода, и он



тоже излучает, но это излучение можно отделить и не рассматривать. Основная энергия излучающих электронов выделяется в виде тепла в аноде, которому из-за этого требуется охлаждение, и лишь 1-3 % энергии электронов излучается. Самое интересное заключается в том, что спектр тормозного излучения имеет вид кривой с максимумом и резким краем со стороны коротких волн. Экспериментально установлено, что

$$\lambda_{\text{min}}^{(\text{нм})} = \frac{1239}{U(\text{В})}.$$

С точки зрения классической физики, при торможении электроны могут излучать энергию со всеми возможными длинами волн и никакого края излучения быть не может.

Объяснение этому явлению может быть найдено в рамках корпускулярной теории света. Электроны испускают энергию квантами по $\hbar\omega$ и максимальная энергия излученного кванта

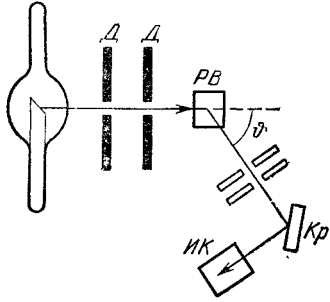
может быть в том случае, когда электрон излучил всю энергию, полученную им от ускоряющего поля анода. Записав соответствующие формулы, получаем

$$eU = \hbar\omega = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} \text{ и } \lambda_{\min} = \frac{2\pi c\hbar}{eU}.$$

Из сравнения теории и эксперимента было получено значение постоянной Планка, хорошо согласующееся с данными других экспериментов.

VI.3 Эффект Комптона.

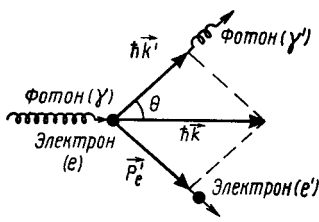
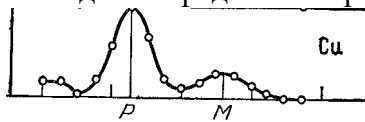
Завершаем серию экспериментов, связанных с квантованием энергии электромагнитного поля.



1923 год. Комптон, исследуя рассеяние рентгеновских лучей различными веществами, обнаружил, что в рассеянных лучах наряду с исходной волной (длина волны λ) присутствует излучение с другой длиной волны λ' . Наблюдение производилось с помощью установки, изображенной на рисунке. Рентгеновские лучи, пройдя через монохроматор (диафрагма на рисунке), попадают на рассеивающее вещество (PB) и затем принимаются с помощью рентгеновского спектрометра. Разность длин волн рассеянного и исходного излучений зависела от угла θ между рассеянным и падающим

пучками $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = f(\theta)$, но больше не зависела ни от чего: ни от вида PB, ни от длины волны падающего излучения. На рисунке показан вид спектра рассеянного излучения для меди. По вертикали отложена интенсивность рассеянного излучения, по горизонтали – длина волны. P отображает несмещенную линию излучения PB на длине волны λ , а M отображает смещенную линию излучения PB λ' . Согласно классической физике, падающая волна может вызвать в веществе вынужденные колебания частиц с той же частотой, что у вынуждающей силы. В результате вещество может излучать волны той же длины волны, что и падающая волна.

Выход был предложен в рамках квантовой физики. В этой науке свет рассматривается как поток фотонов. Эти фотоны, налетая на свободные электроны вещества, взаимодействуют с ними по законам упругих шаров. Для такого столкновения фотона и электрона, которое изображено на рисунке, можно записать законы сохранения энергии и импульса. В силу малости частиц эти законы надо писать с учетом специальной теории относительности. В результате получаем следующие уравнения:



$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} \text{ - закон сохранения энергии;}$$

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p} \text{ - закон сохранения импульса.}$$

Рассматривается столкновение фотона со свободным электроном, так как для связанного электрона этот эффект наблюдаться не будет.

Проделав несложные, но требующие внимания вычисления, получаем формулу для искомой разницы длин волн:

$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{2\pi\hbar}{m_0c\lambda} (1 - \cos\theta) \right); \quad \Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta); \quad \lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}.$$

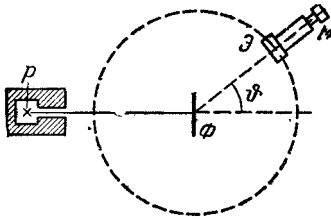
Величину λ_c называют комптоновской длиной волны. Существенной деталью этого результата является то, что разность длин волн зависит от постоянной Планка.

VI.4 Проблема стабильности атомов. Атом по Бору.

Ученых давно интересовало, как устроены атомы и молекулы. Но на основе классической физики невозможно даже правильно оценить размер атома. Покажем это. Из экспериментов было известно, что расстояние между атомами в твердом теле составляет величину порядка одного Ангстрема ($1\text{Å} = 10^{-10}\text{ м}$). Теоретически эту величину можно оценить так: масса равная одному грамму вещества занимает объем порядка одного кубического сантиметра, число частиц в этом объеме по порядку величины равно числу Авогадро. Считая, что на одну частицу такого вещества приходится кубик размером a , получаем эту величину:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1\text{cm}^3}{N_A}} \cong 1\text{Å}.$$

Это оценка. А можно ли вывести эту величину с помощью представлений классической физики?



Оказывается, что нельзя. К началу 20 века, когда закладывались основы квантовой физики, уже были известны результаты опытов Гейгера и Мардсен по рассеянию α - частиц металлической фольгой. На рисунке изображена схема эксперимента. Оказалось, что практически все альфа - частицы пролетают сквозь фольгу, не отклоняясь. Лишь небольшая их часть отлетает обратно. Резерфорд проанализировал эти результаты и предложил планетарную модель атома. Атом представлялся как малое по размерам ядро, вокруг

которого по круговым орбитам движутся электроны. Тогда размер атома определяется радиусом орбиты последнего электрона. Чтобы скомбинировать величину, имеющую размерность длины, из мировых констант в нашем распоряжении имеются следующие: N_A , m_p , m_e , e , k , c . Если считать, что электрон движется по орбите с малой скоростью, то использовать скорость света нельзя; из оставшихся констант величина размерности длины получена быть не может. Если же считать движение электрона релятивистским ($v \sim c$), то можно составить следующую величину:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 3 \cdot 10^{-13}\text{ см}.$$

Эта величина называется «классическим радиусом электрона». Однако она на четыре порядка меньше экспериментальных величин. Поэтому необходимо было использовать другие, новые представления для описания структуры атома. Было предположено, что и в этом случае необходимо использовать постоянную Планка \hbar . Она имеет размерность момента импульса. Нильс Бор догадался, что момент импульса электрона при его движении по орбите в атоме пропорционален \hbar . Эксперимент Гейгера и Марсден был проведен в 1910 году, а в 1913 году Бор предложил свою теорию атома водорода. На электрон в атоме водорода действует кулоновская сила со стороны заряженного ядра, поэтому можно записать II закон Ньютона в проекции на радиальную ось. Второе уравнение системы и есть условие квантования момента импульса электрона:

$$m \frac{v^2}{a_0} = \frac{ke^2}{a_0^2}; L = mva_0 = \hbar.$$

Отсюда можно получить радиус орбиты электрона в атоме водорода по Бору:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.53 \cdot 10^{-8}\text{ см}.$$

Эта величина называется боровским радиусом и по величине совпадает с экспериментальной. С помощью этих уравнений можно вычислить радиусы возможных орбит электрона и спектр его возможных энергий (n – номер орбиты).

$$r_n = \frac{(n\hbar)^2}{kme^2}; E_n = -\frac{k^2 me^4}{2(n\hbar)^2}.$$

Таким образом, электрон в атоме находится на стационарной орбите и при движении по ней не излучает. Он излучает при переходе с одной орбиты на другую в соответствии с формулой

$$\hbar\omega_{nk} = \frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Теория Бора позволила продвинуться достаточно далеко. Она объяснила строение атома водорода, его спектр, отсутствие излучения при движении по орбите. Но она оказалась неспособна объяснить строение многоэлектронных атомов. Это смогла сделать лишь последовательная квантовая теория.

VI.5 Гипотеза де Бройля. Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля.

Де Бройль проанализировал двойственную (волна-частица) природу световой волны и пришел к выводу (1923), что и у частиц может быть двойственность поведения. Формула $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ для импульса кванта ЭМВ навела его на мысль, что и у частиц должна быть длина волны. Он предложил для длины волны различных объектов следующую формулу ($h = 2\pi\hbar$)

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Эта формула называется формулой де Бройля и отражает тот факт, что каждой частице может быть приписан колебательный процесс, который распространяется в пространстве. Тогда

$\lambda = \frac{h}{mv}$ в нерелятивистском случае и $\lambda = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v}$ в релятивистском случае. Он же предложил

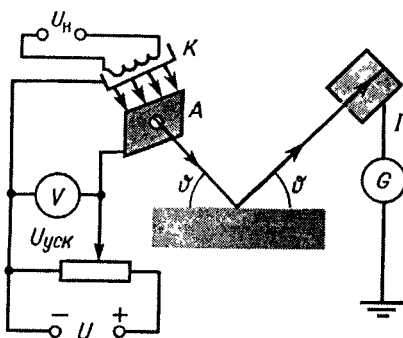
приписывать каждой частице волновую функцию

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})}.$$

Долгое время смысл этой функции был неясен. Лишь в 1926 году правильную ее интерпретацию дал Борн. Определим порядок величин длин волн для частиц:

1) Для пылинки массой $1 \text{ мкг} = 10^{-6} \text{ кг}$, движущейся со скоростью 10^2 м/с длина волны оказывается равной $\lambda = h/(mv) = 10^{-26} \text{ м}$. Такую длину волны никаким прибором зафиксировать невозможно. Волновых свойств у такой частицы нет.

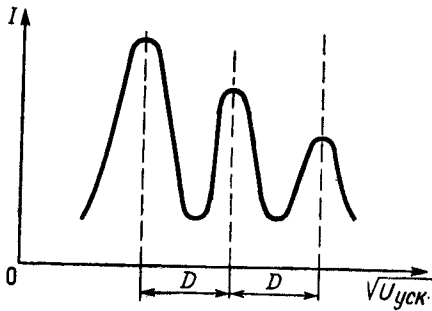
2) Для электрона с энергией $E = 150 \text{ эВ} = 240 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ скорость равна $7 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Длина волны такого электрона может быть вычислена по нерелятивистской формуле и $\lambda = h/(mv) = 10^{-10} \text{ м}$. Эта длина волны соответствует рентгеновским волнам (0.1 нм).



Для таких объектов возможно наблюдать дифракцию, как для рентгеновских волн. Дифракционной решеткой служит монокристалл (например, металла) с постоянной решетки $d \sim 0.3 - 0.5 \text{ нм}$. Такой эксперимент был поставлен Девиссоном и Джермером в 1927 году. У катода за счет термоэлектронной эмиссии появляются электроны, которые разгоняются полем анода. Далее они попадают на поверхность кристалла. Отраженные от поверхности металла электроны попадают на гальванометр. По силе тока гальванометра судят о числе электронов, летящих в определенном направлении. При

неизменном угле падения θ непрерывно изменялось ускоряющее напряжение. На эксперименте снималась зависимость тока гальванометра от величины ускоряющего напряжения. График зависимости приведен на рисунке. Зная ускоряющее напряжение, можно найти длину волны

$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU_{\text{уск}}}}$, а затем с помощью формулы Вульфа-Брегга для дифракции ЭМВ на



кристалле ($2d \sin \theta = n\lambda; n = \pm 1, \pm 2, \dots$) получить следующее

соотношение:
$$\sqrt{U_{\text{уск}}} = n \frac{h}{2\sqrt{2m_e} \cdot d \cdot \sin \theta} = nD.$$
 Первый

дифракционный максимум был получен для значения ускоряющего напряжения 54 В при угле падения электронного пучка на кристалл 50° . Из графика видно, что следующие максимумы достигались при значениях напряжения в $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ раза больше. На основе этих данных по формуле было

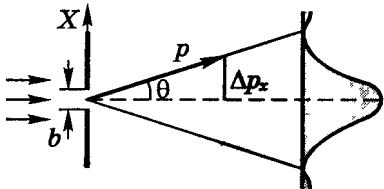
получено значение $d = 0.215$ нм, что соответствовало межплоскостному расстоянию для никеля. Этот результат был грандиозным успехом идеи де Бройля.

VI.6 Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

В классической физике исчерпывающее описание состояния частицы определяется динамическими параметрами, такими как координаты, импульс, момент импульса, энергия и др. Однако реальное поведение микрочастиц показывает, что существует принципиальный предел точности, с которой подобные переменные могут быть указаны и измерены.

Соотношения неопределенностей. Глубокий анализ причин существования этого предела, который называют *принципом неопределенности*, провел В. Гейзенберг (1927). Количественные соотношения, выражающие этот принцип в конкретных случаях, называют *соотношениями неопределенностей*.

Прежде чем сформулировать их, проведем мысленный эксперимент. Попытаемся определить координату x свободно движущейся с импульсом p частицы, поставив на ее пути щель шириной b (изображено на рисунке). До прохождения частицы через щель ее проекция импульса p_x имеет точное значение: $p_x = 0$. Это значит, что $\Delta p_x = 0$, но координата x частицы является совершенно



неопределенной. Если частица пройдет сквозь щель, то в плоскости щели координата x будет зарегистрирована с неопределенностью $\Delta x \approx b$. При этом вследствие дифракции с наибольшей вероятностью частица будет двигаться в пределах угла 2θ , где θ - угол, соответствующий первому дифракционному минимуму. Он определяется условием, при

котором разность хода волн от обоих краев щели будет равна λ :

$$b \cdot \sin \theta = \lambda.$$

В результате дифракции возникает неопределенность значения p_x - проекции импульса, величина которой

$$\Delta p_x = p \cdot \sin \theta.$$

Учитывая, что $b \approx \Delta x$ и $p = 2\pi\hbar/\lambda$, получим из двух предыдущих выражений:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx p\lambda = 2\pi\hbar.$$

Таким образом, попытка определить координату x частицы привела к появлению неопределенности Δp_x в импульсе частицы.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое из них ограничивает точности *одновременного* измерения координат и соответствующих проекций импульса частицы. Для проекции, например, на ось x оно выглядит так:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Второе соотношение устанавливает неопределенность измерения энергии, ΔE , за данный промежуток времени Δt :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

Поясним смысл этих двух соотношений. Первое из них утверждает, что если положение частицы, например, по оси x известно с неопределенностью Δx , то *в тот же момент* проекцию импульса

частицы на эту же ось можно измерить только с неопределенностью $\Delta p_x \approx \hbar/\Delta x$. Заметим, что эти ограничения не касаются одновременного измерения координаты частицы по одной оси и проекции импульса по другой: величины x и p_y , y и p_x могут иметь одновременно точные значения.

Согласно второму соотношению для измерения энергии с погрешностью ΔE необходимо время, не меньшее, чем $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Примером может служить «размытие» энергетических уровней водородоподобных систем (кроме основного состояния). Это связано с тем, что время жизни во всех возбужденных состояниях этих систем порядка 10^{-8} с. Размытие же уровней приводит к уширению спектральных линий (*естественное уширение*), которое действительно наблюдается. Сказанное относится и к любой нестабильной системе. Если время жизни ее до распада порядка τ , то из-за конечности этого времени энергия системы имеет неустранимую неопределенность, не меньшую, чем $\Delta E \approx \hbar/\tau$.

В итоге можно утверждать, что любое измерение изменяет состояние объекта и точное описание его состояния невозможно. Однако оценки показывают, что для классических объектов возможно описание их с помощью классической физики. Так для шарика массой 1 г и диаметром 0.1 мм неопределенность в определении скорости, связанная с соотношением неопределенности равна $\Delta v_x = \Delta p/m \approx \hbar/(m\Delta x) = 10^{-25}$ м/с. Такая маленькая величина не может быть измерена, а, следовательно, никак не сказывается на вычислениях по формулам классической физики.

Для электрона в атоме водорода оценки дают при размере атома порядка 10^{-10} м неопределенность в определении скорости равна 10^6 м/с. Эта величина неопределенности определения скорости (если хотите, погрешность в ее определении) сравнима со скоростью электрона при его движении по орбите. Поэтому понятие траектории для этого случая неприменимо. Необходима более строгая теория, чем теория Бора для атома водорода.

VI.7 Волновая функция в квантовой механике.

Вся совокупность экспериментов доказывает, что классическая физика не объясняет всех свойств микромира. Опыт с дифракцией электронов показывает, что от понятия траектории надо отказаться (по крайней мере, в соответствующих случаях). А это значит, что полный набор классической физики ($3N$ координат и $3N$ импульсов для системы из N частиц полностью определяют состояние такой системы) уже не работает и его надо заменить новым. Этот новый набор будет определять состояние системы менее точно, а точнее – вероятностно. В основе этой новой теории будет лежать принцип неопределенности: невозможно точно определить скорость и соответствующую координату частиц, следовательно, от понятия траектории необходимо отказаться.

Теперь определим основную задачу новой науки: квантовая физика должна уметь предсказать результат последующего измерения по результату предыдущего. Поэтому квантовая физика, по сути, наука вероятностная. С одной такой наукой – статистической физикой – мы уже встречались. Математическим аппаратом той науки была теория вероятностей. В квантовой физике теория вероятностей используется в полной мере.

Важную роль в этой новой науке играет понятие измерения. Так называется процесс взаимодействия объекта, живущего по законам квантовой физики с объектом, живущим по законам классической науки (измерительный прибор). Из этого определения следует, что для создания квантовой физики необходимы классические объекты.

Измерения могут давать два вида результатов: одинаковые и случайные. В первом случае можно говорить о том, что измеряемая физическая величина имеет определенное значение. Во втором случае так говорить о физической величине нельзя.

Полным набором физических величин в квантовой физике называется набор физических величин, характеризующих изучаемую систему, измерения которых дают определенный результат. Этот набор и приходит на смену классическому набору.

Это взгляд на систему с точки зрения эксперимента. А что дает теория? Как вычислить величины из полного набора? Для ответа на этот вопрос попробуем сначала перечислить все основные идеи, которые лежат в основе математического аппарата квантовой механики:

- 1) принцип неопределенности;
- 2) идея Планка о квантах;
- 3) идея де Бройля о волновой природе объектов;
- 4) принцип соответствия (Бор, 1923).

Принцип соответствия звучит так: любая новая теория, претендующая на более глубокое описание физической реальности, должна включать старую теорию как предельный случай.

На этой базе Гейзенберг (1925) и Шредингер (1926) разработали математический аппарат квантовой механики. Именно Шредингер предложил описывать поведение квантового объекта одной единственной функцией $\Psi(x, y, z, t)$, в общем случае комплексной, квадрат модуля которой давал бы величину, пропорциональную вероятности местонахождения объекта. Эта функция называется **волновой функцией**. Волновая функция может быть комплексной, а вероятность должна быть не только действительной величиной, но и должна быть больше нуля. Потому для описания вероятности нахождения объекта используется квадрат модуля волновой функции:

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi.$$

В этой формуле Ψ^* - комплексно-сопряженная величина.

Пример. $a = 5 + 2i$. Комплексно сопряженная величина $a^* = 5 - 2i$. Произведения этих величин $a^* a = (5 - 2i)(5 + 2i) = 29$, $a a^* = (5 + 2i)^2 = 21 - 20i$.

Ясно, что можно говорить лишь о вероятности нахождения объекта в *физически* бесконечно малом объеме, поэтому

$$dP(x, y, z, t) = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV,$$

а величина

$$\frac{dP(x, y, z, t)}{dV} = |\Psi(x, y, z, t)|^2$$

называется плотностью вероятности. По законам теории вероятности для этой величины есть условие нормировки

$$\int_V dP(x, y, z, t) = 1.$$

Сформулируем принцип суперпозиции для волновой функции. Допустим, что объект может иметь различные дискретные значения некоторой физической величины (например, энергии), волновая функция объекта в которых равна $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i, \dots$. Тогда ясно, что при измерении этой величины объект с некоторой вероятностью может быть найден в каждом из этих состояний. Значит, его волновая функция будет суммой этих Ψ_i из этих состояний.

Если какая-либо система (объект) может находиться в физически различных состояниях волновой функции $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i, \dots$, то она может быть обнаружена и в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ , такой, что

$$\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots + C_i \Psi_i + \dots = \sum_i C_i \Psi_i,$$

где C_i – амплитуды частных состояний системы (объекта). Если измерения дают $C_n = 1$, а остальные $C_i = 0$, то система находится в определенном состоянии.

Для непрерывно распределенных величин принцип суперпозиции выглядит так:

$$\Psi = \int C(L) \Psi(L) dL,$$

где L – значение какой-либо физической величины.

И последнее утверждение: волновая функция дает полную (и исчерпывающую) информацию о системе в вероятностном смысле. Другими словами, волновая функция определяет поведение

объекта или системы в данный и вообще в любой момент времени. Кроме нее не требуется ничего для описания системы.

VI.8 Операторы. Уравнение Шредингера.

Итак, в микромире в большинстве случаев от понятия траектории придется отказаться. Придется пользоваться волновой функцией и только ей. Утверждается, что знание волновой функции достаточно для полного описания поведения любого объекта. Описание системы с помощью волновой функции вероятностное (то есть статистическое), поэтому главную роль в таком описании играют средние значения физических величин и их среднеквадратичные отклонения. Необходимо уметь их вычислять с помощью волновой функции. Для начала найдем среднее значение координаты x объекта

$$\langle x \rangle = \int x dP(x, t) = \int x |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx = \int \Psi^*(x, y, z, t) x \Psi(x, y, z, t) dx .$$

Понятно, что для любой функции *только координат* формула для вычисления среднего значения будет выглядеть аналогично

$$\langle f(x, y, z) \rangle = \int \Psi^*(x, y, z, t) f(x, y, z) \Psi(x, y, z, t) dx .$$

Но волновая функция объекта зависит напрямую только от координат и времени. Как же вычислять средние значения таких физических величин, как энергия, импульс, момент импульса и других? Чтобы вычислять средние значения перечисленных выше величин по формулам, аналогичным написанным, необходимо использовать математические объекты, называемые **операторами**:

$$\langle L \rangle = \int \Psi^*(x, y, z, t) \hat{L} \Psi(x, y, z, t) dx .$$

В этой формуле величина \hat{L} называется оператором физической величины в классической механике L , среднее значение которой необходимо вычислить. По принципу соответствия этот оператор должен переходить в соответствующую величину L при $\hbar \rightarrow 0$. Вид операторов будет приведен в конце параграфа.

Под оператором \hat{L} понимают символ, показывающий каким способом одной функции $\varphi(q)$ сопоставляется другая функция $f(q)$. Под q понимается полный набор всех переменных, описывающих изучаемый объект или систему $(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$.

$$f(q) = \hat{L} \varphi(q) .$$

Рассмотрим основные свойства операторов.

В квантовой механике используется узкий класс операторов – линейные операторы. Линейными операторами называются операторы, которые удовлетворяют условию:

$$\hat{L}(C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) = \hat{L} C_1 \varphi_1 + \hat{L} C_2 \varphi_2 = C_1 \hat{L} \varphi_1 + C_2 \hat{L} \varphi_2 = C_1 f_1 + C_2 f_2 .$$

В этой формуле C_1 и C_2 – произвольные числа, а f_1 и f_2 – функции.

В таблице приведены значения операторов основных физических величин классической физики.

Динамические переменные в классической физике	Оператор соответствующей физической величины в квантовой механике
Координаты	\vec{r}, x, y, z
Импульс	\vec{p} $p_x \cdot p_y \cdot p_z$ $\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \frac{\hbar}{i} \nabla$ $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$

Момент импульса	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ $L_x = yp_z - zp_y$ $L_y = zp_x - xp_z$ $L_z = xp_y - yp_x$	$\hat{L} = [\hat{r}, \hat{p}] = \left[\vec{r}, \frac{\hbar}{i} \nabla \right]$ $\hat{L}_x = y \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$ $\hat{L}_y = z \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ $\hat{L}_z = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
Энергия	$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(\vec{r}, t)$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}, t)$

Раз есть волновая функция, то должно быть уравнение, которому она удовлетворяет. Получим это уравнение, как это сделал Шредингер в 1926 году.

Так как волновая функция полностью описывает поведение объекта как до, так и после данного момента времени, то

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \sim \Psi.$$

Поскольку эти функции из разных множеств, то связь их осуществляется через оператор. Шредингер нашел его вид и получилось так называемое *временное уравнение Шредингера*:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad \text{или} \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r}, t) \Psi.$$

Оператор \hat{H} , входящий в это уравнение, называется оператором Гамильтона. Его вид приведен в таблице. Если потенциальная энергия системы (объекта) $U(\vec{r}, t)$ не зависит явно от времени, то волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}.$$

Тогда уравнение Шредингера принимает вид

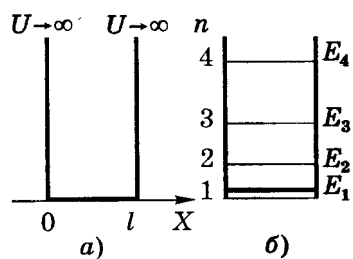
$$\hat{H} \Psi = E \Psi.$$

Такое уравнение называется стационарным уравнением Шредингера, а его решения называются собственными энергиями и собственными функциями системы (объекта). Используя вид оператора Гамильтона, запишем стационарное уравнение Шредингера в явном виде. Это основное уравнение нерелятивистской квантовой механики:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0.$$

VI.9 Частица в одномерной потенциальной яме; потенциальный барьер.

Уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$ позволяет найти волновые функции и энергетический спектр любой квантовой системы. Причем эти волновые функции называются собственными функциями системы, а энергии - собственными энергиями. В зависимости от системы, энергетический спектр может быть непрерывным или дискретным. В качестве простой задачи на использование стационарного уравнения Шредингера рассмотрим задачу о нахождении



состояний частицы массы m в одномерной яме ширины L с бесконечно высокими стенками. Стенки ямы считаются непроницаемыми и находятся на оси x в точках $x = 0$ и $x = L$. Движение частицы в яме одномерное. Уравнение Шредингера для этого случая будет иметь вид:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

За пределы ямы частица выйти не может, поэтому вероятность ее там обнаружить, равна нулю. Из условия непрерывности волновой функции следует, что она должна быть равна нулю и на границах ямы. Таким образом, к дифференциальному уравнению второго порядка, каким является уравнение Шредингера, имеются два граничных условия:

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0.$$

Для области пространства $0 \leq x \leq L$ уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = 0.$$

Введем обозначения $k^2 = 2mE/\hbar^2$, тогда получаем

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0.$$

Это уравнение нам давно известно и его решение будем искать в виде

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha).$$

Необходимо теперь определить A, k и α . Из граничных условий следует, что $\Psi(0) = A \sin \alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$. Кроме того, $\Psi(L) = A \sin(kL) = 0$. Это означает, что $kL = \pm n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для энергетического спектра частицы получаем дискретный спектр с энергиями

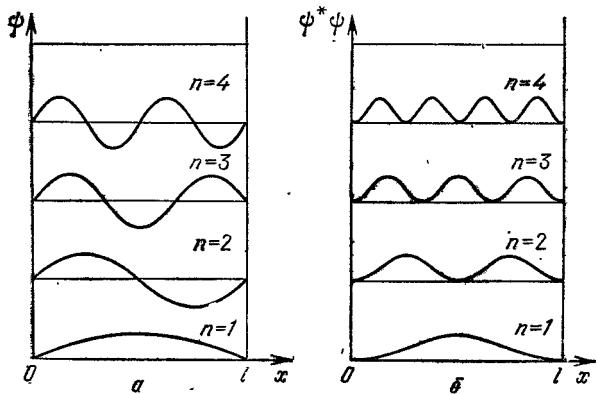
$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2; n = 1, 2, 3, \dots$$

Расстояние по энергии между соседними уровнями зависит от их номеров и увеличивается с увеличением номера

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (2n + 1).$$

Для классического объекта (с большой массой и размерами) дискретность уровней энергии мала до неуловимости.

Для нахождения A , то есть нормировки волновой функции, воспользуемся условием нормировки вероятности:



$$\int dP = \int \Psi^* \Psi dV = 1 \quad \text{или}$$

$$A^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 1. \quad \text{В результате получаем}$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad \text{Таким образом собственные функции}$$

частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками будут определяться по формуле

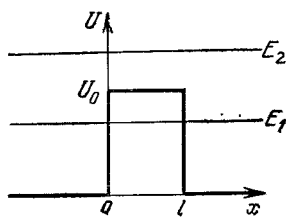
$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Плотность вероятности для частицы в яме дается формулой

$$\frac{dP_n}{dx} = \Psi_n^* \Psi_n = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L}.$$

На рисунках приведены волновые функции и плотности вероятностей различных состояний частицы.

Прохождение частицы через потенциальный барьер. В классической физике, если на пути



частицы встречается барьер (гравитационный, электрический или какой-либо другой), то частица от него отражается, пройти барьер насквозь она не может. Квантовая физика приводит к принципиально новому выводу о возможности прохождения частиц сквозь потенциальный барьер. Это явление называется туннельным эффектом. Для описания туннельного эффекта вводится понятие прозрачности D потенциального барьера. Если, по аналогии с оптикой,

подсчитать интенсивность $I_{\text{пад}}$ падающей волны и интенсивность $I_{\text{прош}}$ прошедшей волны, то, по определению, прозрачность $D = I_{\text{прош}}/I_{\text{пад}}$. Это, по сути, вероятность прохождения волны де Бройля сквозь барьер. Для прямоугольного барьера высотой U_0 прозрачность определяется формулой

$$D \sim e^{-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}.$$

В этой формуле L – ширина барьера, а E – энергия налетающей частицы массы m ($E < U_0$). Туннельный эффект играет заметную роль в случаях, когда размер барьера сравним с атомными размерами. Например, если $U_0 - E = 10$ эВ, то для электрона, налетающего на барьер шириной 10^{-10} м, получаем прозрачность $D \sim e^{-3.4}$. Если же ширина барьера 0.01 м, то прозрачность $D \sim e^{-100000000}$.

VI.10 Атом водорода; главное, азимутальное и магнитное квантовые числа.

Рассмотрим самую простую атомную систему – электрон, движущийся в поле неподвижного протона. Потенциальная энергия взаимодействия в этом случае равна

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Уравнение Шредингера для такой задачи

$$\Delta\Psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0.$$

Оказалось, что формулы для уровней энергии и радиусов орбит для электрона в атоме водорода по Бору оказались точными решениями этого уравнения:

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{(n\hbar)^2}{me^2}; E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2(n\hbar)^2}.$$

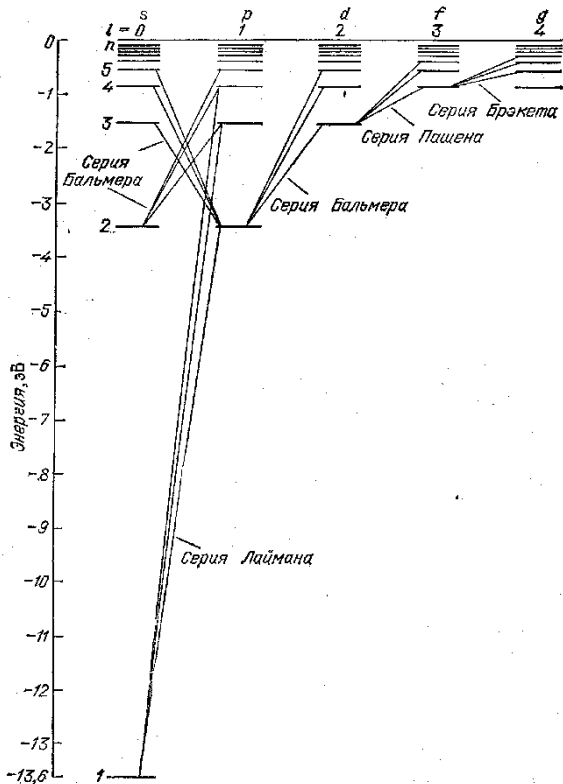
Наибольший интерес представляет нахождения волновых функций электрона – собственных функций уравнения Шредингера. Наиболее удобным является использование сферической системы координат с переменными r, θ и φ . Поэтому волновая функция выражается через эти переменные. Для электрона в атоме водорода одновременно измеримыми оказались три

величины: энергия электрона E , квадрат модуля момента импульса электрона L^2 и проекция момента импульса электрона на ось z L_z . Все эти величины квантуются, то есть изменяются дискретно. Таким образом, волновая функция определяется тремя параметрами – тремя квантовыми числами $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$. Параметр n , называемый главным квантовым числом, совпадает с номером уровня энергии. Параметры ℓ и m представляют собой азимутальное и магнитное

Уровень энергии E_n	Волновая функция Ψ_{nlm}	Значение			Уровень энергии E_n	Волновая функция Ψ_{nlm}	Значение		
		n	l	m			n	l	m
E_1	Ψ_{100}	1	0	0	E_3	Ψ_{300}	3	0	0
E_2	Ψ_{200} Ψ_{21-1} Ψ_{210} Ψ_{21+1}	2	0	0		Ψ_{31-1}	3	1	-1
						Ψ_{310}	3	1	0
						Ψ_{31+1}	3	1	+1
						Ψ_{32-2}	3	2	-2
						Ψ_{32-1}	3	2	-1
						Ψ_{320}	3	2	0
						Ψ_{32+1}	3	2	+1
						Ψ_{32+2}	3	2	+2

квантовые числа. Они определяют модуль момента импульса и проекцию момента импульса электрона на некое направление. Решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее стандартным условиям для волновой функции (однозначность, непрерывность и конечность), получается для значений ℓ , не превышающих $n-1$. Следовательно, при данном значении n квантовое число ℓ может принимать n различных значений: $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При данном ℓ квантовое число m может принимать $2\ell+1$ различных значений: $m = -\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell$.

Энергия электрона в атоме водорода зависит только от одного квантового числа – n . Следовательно, каждому собственному значению энергии E_n (кроме E_1) соответствует несколько собственных функций $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ (то есть разных состояний), отличающихся значениями ℓ и m . Таблица дает все возможные состояния для значения главного квантового числа $n = 1, 2, 3$. Состояния с одинаковой энергией называются вырожденными, а число различных состояний с каким-либо значением энергии называется кратностью вырождения соответствующего уровня. В данном случае каждому из n значений квантового числа ℓ соответствует $2\ell + 1$ значений квантового числа m . Следовательно, кратность вырождения энергетического уровня в атоме водорода равна



$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2.$$

Состояния с различными значениями азимутального квантового числа l отличаются моментом импульса электрона. В атомной физике применяются условные обозначения, заимствованные из спектроскопии. Электрон, находящийся в состоянии с $l = 0$ называют s – электроном, с $l = 1$ называют p – электроном, с $l = 2$ – d – электроном, с $l = 3$ – f – электроном. Значение главного квантового числа указывается цифрой перед буквой, например, 3p, 4f. Для различных атомов (не только для атома водорода) возможны следующие состояния электрона:

- 1s,
- 2s, 2p,
- 3s, 3p, 3d,
- 4s, 4p, 4d, 4f и так далее.

Схема уровней энергии для электрона в атоме водорода изображена на рисунке. Столбцы

соответствуют различным значениям азимутального квантового числа.

Испускание и поглощение света происходит при переходах электрона с одного уровня на другой. В квантовой механике доказывается, что для азимутального числа l имеется правило отбора $\Delta l = \pm 1$. Это означает, что возможны только такие переходы, при которых значение l изменяется на единицу. Примером таких переходов является серия переходов Бальмера, соответствующая переходам $ns \rightarrow 2p$; $nd \rightarrow 2p$ ($n = 2, 3, \dots$).

VI.11 Механический и магнитный моменты электрона. Спин.

Детально рассмотрим движение электрона в атоме водорода. В классической механике электрон движется по окружности и имеет механический момент импульса. Электрон имеет заряд, поэтому с механическим моментом связан магнитный момент

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}.$$

В квантовой механике понятие орбиты в данном случае нет, однако и в квантовой механике эти моменты называют *орбитальными*. Самое интересное, что формула для связи моментов справедлива и в квантовой механике.

Для нахождения собственных значений операторов момента импульса и его проекции необходимо решить два операторных уравнения

$$\hat{L}^2 \Psi = L^2 \Psi \quad \text{и} \quad \hat{L}_z \Psi = L_z \Psi.$$

Первое уравнение решается методами, далеко выходящими за рамки общей физики. Приведем здесь лишь его решение для собственных значений момента импульса:

$$L = \hbar \sqrt{l(l + 1)}, \text{ где } l = 0, 1, 2, \dots$$

Второе уравнение решается значительно проще. Оператор, соответствующий проекции момента на ось z в классической механике, определяется по формуле

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Уравнение на собственные значения запишется так: $-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \Psi$. Ищем решения в виде

$\Psi = Ae^{i\alpha\varphi}$. Используя условия периодичности волновой функции по углу φ , для L_z получаем решение $L_z = m\hbar$, где $m = 0, \pm 1, \dots$. Поскольку проекция вектора не может быть больше модуля, то $m\hbar \leq \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ и $|m|_{\max} = \ell$. Это общие решения, пригодные для любого момента в квантовой механике.

Далее для удобства записи вместо буквы **L** для обозначения моментов в квантовой механике использовать букву **M**. Тогда связь орбитальных моментов запишем в виде:

$$\mu_\ell = -\frac{e}{2m_e} M_\ell.$$

Применительно к орбитальным моментам, механическому и магнитному получаем следующие формулы:

$$M_\ell = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}; \quad \mu_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{\ell(\ell+1)} = -\mu_B\sqrt{\ell(\ell+1)};$$

$$M_{\ell z} = m_\ell\hbar, \quad \mu_{\ell z} = -\mu_B m_\ell, \quad m_\ell = -\ell, \dots, 0, \dots, \ell.$$

В этих формулах используется величина μ_B , называемая магнетоном Бора.

Исследование спектров (поглощения и излучения) щелочных металлов (Na, K) при помощи приборов с большой разрешающей способностью показало, что каждая линия этих спектров является двойной. Потом это явление было обнаружено и у других



элементов. Структура спектра, отражающая расщепление линий на компоненты, называется тонкой структурой. Сложные линии, состоящие из нескольких компонент, получили название мультиплетов. Для объяснения расщепления уровней Гаудсмит и Уленбек выдвинули гипотезу (1925) о том, что электроны обладают собственным моментом импульса M_s , не связанным с движением электрона в пространстве. Такой момент был назван **спином**. Предположение о спине электрона было в дальнейшем подтверждено большим количеством опытных фактов. Спин присущ практически всем частицам.

Модуль собственного момента импульса электрона определяется по общим законам квантовой механики. Собственный момент импульса электрона – еще одна измеряемая величина. Поэтому появляется еще одно квантовое число – спиновое квантовое число s .

Для электрона оно равно $\frac{1}{2}$: $s = \frac{1}{2}$:

$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}; \quad \mu_s = -\frac{e\hbar}{m_e}\sqrt{s(s+1)} = -2\mu_B\sqrt{s(s+1)}.$$

$$M_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar; \quad \mu_s = -\mu_B\sqrt{3}$$

Проекция спина на заданное направление может быть получена по формуле

$$M_{sz} = m_s\hbar; \quad m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}; \quad \mu_{sz} = -\frac{e}{m_e} M_{sz} = -\frac{e}{m_e}\hbar m_s = -\frac{e\hbar}{m_e}\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \mp \mu_B.$$

Итак, проекция собственного момента импульса электрона может принимать значения $\frac{1}{2}\hbar$, а проекция собственного магнитного момента может принимать значения $\pm \mu_B$.

В общем случае механический момент электрона складывается из двух моментов: орбитального M_ℓ , обусловленного движением электрона в атоме, и спинового M_s , не связанного с движением электрона в пространстве. Результирующая этих моментов дает полный момент импульса электрона. Его модуль, как и модуль всякого момента импульса вообще, определяется выражением

$$M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)},$$

где j - квантовое число полного момента импульса, которое может иметь значения

$$j = \ell + s, |\ell - s|$$

(ℓ и s - соответственно азимутальное и спиновое квантовые числа). При $\ell = 0$ квантовое число j имеет только одно значение: $j = s = 1/2$. При ℓ , отличном от нуля, возможны два значения: $j = \ell + 1/2$ и $j = \ell - 1/2$, которые соответствуют двум возможным взаимным ориентациям моментов M_ℓ и M_s - «параллельной» и «антипараллельной». Поскольку ℓ - целое число либо нуль, квантовое число j электрона в атоме водорода может иметь лишь полуцелые значения: $1/2, 3/2, 5/2, \dots$

Как и ранее, проекция полного механического момента на направление z определяется формулой $M_{jz} = m_j \hbar$, ($m_j = -j, -j+1, \dots, 0, \dots, j-1, j$).

Формула для полного магнитного момента оказывается сложнее, чем полученные ранее формулы:

$$\mu_j = -\mu_B g \sqrt{j(j+1)} \quad ; \quad g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}.$$

Выражение называется множителем Ланде или g - фактором.

Рассмотрим, как существование спина объясняет расщепление энергетических уровней (и соответственно расщепление спектральных линий). Орбитальный и спиновый магнитные моменты взаимодействуют друг с другом подобно тому, как взаимодействуют две магнитные стрелки. Это взаимодействие называется *спин-орбитальным*. Энергия взаимодействия зависит от взаимной ориентации моментов μ_ℓ и μ_s . Отсюда заключаем, что состояния с различными значениями j должны обладать различной энергией.

VI.12 Механический и магнитный моменты многоэлектронного атома.

Итак, состояние электрона в атоме определяется четырьмя числами: n, ℓ, m_ℓ, m_s . Но можно использовать и другую четверку чисел: n, ℓ, j, m_j . Все физические величины, соответствующие обеим четверкам чисел, одновременно измеримы.

В многоэлектронных атомах состояние каждого электрона описывается той же четверкой чисел. Отличие лишь в том, что электроны взаимодействуют между собой и энергия каждого электрона зависит в этом случае не только от n , но и от числа ℓ . Говорят, что в этом случае с энергией уровней E_n снимается вырождение по ℓ : $E_{n\ell}$.

Механический и магнитный моменты атома складываются из орбитальных и спиновых моментов электронов. Магнетизм ядра из-за его малости можно не учитывать. При сложении моментов в полный момент атома возможны два случая:

1) Орбитальные моменты электронов M_ℓ взаимодействуют между собой сильнее, чем со спиновыми моментами M_s . В свою очередь спиновые моменты электронов связаны между собой сильнее, чем с орбитальными моментами. В этом случае сначала складываются отдельно

орбитальные моменты электронов M_ℓ в полный орбитальный момент атома M_L и спиновые моменты электронов M_s в полный спиновый момент атома M_S , а затем получившиеся моменты складываются в полный момент атома M_J . Такой случай сложения моментов называется LS – связью. Такая связь наблюдается у большинства атомов.

2) Связь между орбитальным M_ℓ и спиновым M_s моментом электрона сильнее, чем взаимодействие его с другими электронами. В этом случае сначала складываются спиновой M_s и орбитальный M_ℓ моменты для каждого электрона в полный момент электрона M_j , а затем уже эти электронные моменты складываются в полный момент атома M_J . Такая связь называется jj – связью. jj – связь наблюдается в основном у тяжелых атомов.

Рассмотрим подробнее случай LS – связи. В этом случае сначала формируется полный орбитальный момент атома M_L . Его величина определяется формулой

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}.$$

Рассмотрим, как получаются возможные значения L для атома с двумя электронами. В этом случае орбитальное квантовое число L может иметь значения

$$L = \ell_1 + \ell_2; \ell_1 + \ell_2 - 1; \dots, |\ell_1 - \ell_2|,$$

где ℓ_1 и ℓ_2 – орбитальные числа, соответствующие орбитальному движению каждого электрона.

Всего в этом случае получается $2\ell_{\min}+1$ значение L (ℓ_{\min} – меньшее из чисел ℓ_1 и ℓ_2).

В случае атома, имеющего более чем два электрона, максимальное значение L равно сумме чисел ℓ всех электронов. Чтобы найти минимальное значение L , нужно сложить сначала числа ℓ любых двух электронов. Затем каждый из полученных результатов складывается с ℓ третьего электрона и т. д. Наименьшее из получившихся при этом чисел будет представлять собой минимальное возможное значение квантового числа L . Пусть, например, $\ell_1 = \ell_2 = 1$ и $\ell_3 = 3$. Возможные значения суммарного момента первого и второго электронов определяются числами 0, 1 и 2. Сложение первого из этих чисел с $\ell_3 = 3$ дает $L = 3$, второго числа - $L = 2, 3, 4$, третьего числа - $L = 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, квантовое число, определяющее результирующий момент в рассматриваемом случае, может иметь значения $L = 1, 2, 3, 4, 5$. Минимальное значение L оказалось равным 1, максимальное, как и следовало ожидать, равно 5 ($1 + 1 + 3$).

Значения орбитального момента импульса всегда целые или ноль.

Проекция результирующего орбитального момента на ось z определяется по стандартной формуле:

$$M_{Lz} = m_L \hbar, \quad m_L = -L, \dots, 0, \dots, L.$$

Все вычисления необходимо повторить для получения аналогичных формул для спинового механического момента электронов:

$$M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}$$

$$M_{Sz} = m_S \hbar, \quad m_S = -S, \dots, 0, \dots, S.$$

Значения квантового числа спинового механического момента получаются так же, как и значения L .

Результирующий орбитальный и спиновый механические моменты атома образуют в сумме полный момент импульса атома

$$M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}.$$

При данных значениях M_L и M_S квантовое число J имеет следующие значения

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|.$$

Следовательно, J – целое, если значение S – целое (четное число электронов), и J – полуцелое, если значения S – полуцелые (нечетное число электронов).

Проекция полного механического момента атома на направление z

$$M_{Jz} = m_J \hbar, \quad m_J = -J, \dots, 0, \dots, J.$$

Ясно, что состояние атома определяется квантовыми числами L, S и J. Для упрощения записи удобно пользоваться символической формой вида

$$^{2S+1}L_J.$$

Под буквой L понимают величину, обозначающую значение полного орбитального момента импульса. Для электронов с L = 0 это S, L = 1 это P, L = 2 это D, L = 3 это F и так далее. Нижний индекс дает значение квантового числа полного момента импульса атома. Значение верхнего индекса равно мультиплетности энергетического уровня.

Примеры

$$^1S_0 \Rightarrow L = 0, S = 0, J = 0. \quad \frac{^2P_3}{2} \Rightarrow L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}.$$

Модуль магнитного момента атома определяется по формуле

$$\mu_J = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)}.$$

В этой формуле величина μ_B называется магнетоном Бора, а величина g – множитель Ланде.

Вычисляется он по формуле

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Проекция магнитного момента атома на ось z вычисляется следующим образом:

$$\mu_{Jz} = -\mu_B g m_J; \quad m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

VI.13 Модель атомного ядра и ядерные силы.

Ко времени открытия атомного ядра (Резерфорд, 1911) были известны только две элементарные частицы – протон и электрон. В соответствии с этим считалось вероятным, что атомное ядро из них и состоит. Однако при использовании этой модели появились трудности, известные как **азотная катастрофа**. По протонно-электронной модели, ядро азота должно было содержать 14 протонов и 7 электронов. Спин всех этих частиц равен $\frac{1}{2}$, поэтому спин всего ядра должен быть полуцелым. Однако эксперимент давал значение спина ядра азота равным 1. Проблема была решена после открытия Чедвиком (1932) нейтрона со спином $\frac{1}{2}$. Идея о том, что ядро атомов состоит из протонов и нейтронов, впервые была высказана Иваненко и, независимо от него, Гейзенбергом в 1932 году. В современной ядерной физике протон и нейтрон объединяются общим названием нуклон. Суммарное число нуклонов в ядре называется массовым числом и обозначается буквой A, буквой Z обозначают заряд ядра, число нейтронов обозначается буквой N. Для обозначения ядра используется символ (X – химический символ элемента)

$$^A_Z X.$$

Ядра с одинаковыми Z, но разными A, называются изотопами. Размер ядра порядка 10^{-15} м. Для таких малых величин введено обозначение 1 Ферми = 1 Ф = 10^{-15} м.

Приведем в виде таблицы характеристики протона и нейтрона.

Протон $m_p = 938.28$ МэВ $\mu_p = 2.79$ μ_B ($m_e = 0.511$ МэВ)	Нейтрон $m_n = 939.57$ МэВ $\mu_n = -1.91$ μ_B $m_n - m_p = 1.3$ МэВ = $2.5 m_e$
--	--

$$1 \text{ МэВ} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1.78 \cdot 10^{-30} \text{ кг} (m_p c^2)$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} - \text{магнетон Бора.}$$

Нейтрон в свободном состоянии нестабилен. Он распадается на протон, электрон и антинейтрино.

Период полураспада 12 минут.

Взаимодействие между нуклонами в ядре получило название сильного взаимодействия.

Отличительными особенностями ядерных сил являются следующие:

- 1) Ядерные силы короткодействующие. Радиус их действия ограничивается областью расстояний между нуклонами порядка 10^{-15} м. На меньших расстояниях притяжение сменяется отталкиванием.
- 2) Ядерные силы не зависят от заряда нуклона.
- 3) Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов.
- 4) Ядерные силы не являются центральными.
- 5) Ядерные силы обладают свойством насыщения. Каждый нуклон в ядре взаимодействует с определенным числом нуклонов.

По современным представлениям любое фундаментальное взаимодействие обусловлено тем, что при взаимодействии объектов происходит обмен частицами, которые получили название переносчиков взаимодействия. Для сильного взаимодействия такими частицами являются π -мезоны. Другими словами, взаимодействие нуклонов в ядре происходит посредством обмена π -мезонами.

Дальнейшие исследования строения нуклонов потребовали появления новой экспериментальной техники. В последнее время используются ускорители заряженных частиц, которые носят название коллайдеры. В таких ускорителях сталкиваются пучки частиц, ускоренных до огромных энергий. Эксперименты по столкновению электронов и протонов подтвердили гипотезу Гелл-Мана и Цвейга о существовании кварков. Эксперименты показали, что нуклоны не являются точечными объектами, а состоят из кварков. В настоящее время установлено существование шести разновидностей кварков u, d, s, c, b, t и соответствующих им антикварков. Их названия происходят от английских слов *up, down, strange, charm, beauty, truth*. Кварки имеют дробный электрический заряд равный $2/3$ заряда электрона (u -, c -, t - кварки) и $-1/3$ заряда электрона (d -, s -, b - кварки). Антикварки имеют противоположные знаки зарядов. Нуклоны состоят из трех кварков: протон состоит из кварков u, u и d ; нейтрон состоит из u, d и d кварков. Чтобы избежать противоречия с принципом Паули (*в одной квантовой системе не может быть частиц, обладающих одинаковой совокупностью квантовых чисел*), была введена новая характеристика для кварков – квантовое число «цвет». Взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена глюонами.

VI.14 Энергия связи и дефект массы ядра.

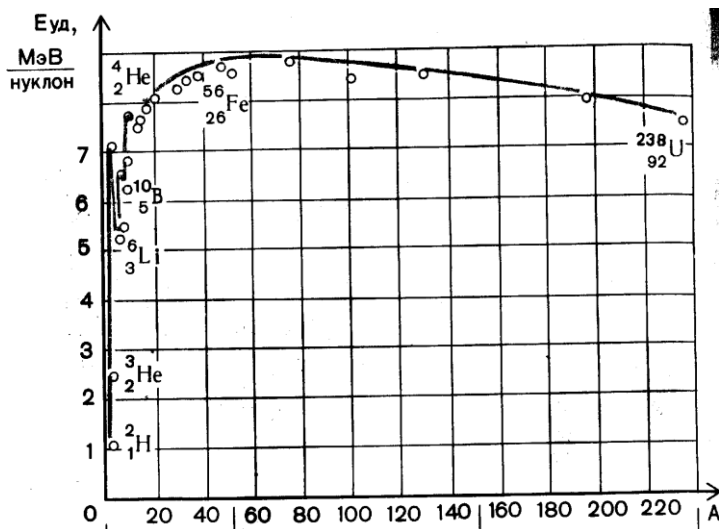
Масса ядра $m_{\text{я}}$ меньше суммы масс, входящих в нее частиц. Дефектом масс называется разность между массами отдельных нуклонов и массой покоя ядра:

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}.$$

Это связано с тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов друг с другом. Вспомним, что энергия покоя любого объекта равна $E_0 = m_0c^2$. Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммы энергий покоящихся невзаимодействующих нуклонов на величину

$$E_{\text{св}} = \{ [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \} c^2.$$

Это и есть энергия связи.



Энергия связи равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на такие расстояния, при которых они не взаимодействуют друг с другом.

Удельной энергией связи называется энергия связи, приходящаяся на один нуклон атома. На рисунке показана зависимость удельной энергии связи от массового числа. Если сравнивать удельную энергию связи для различных атомов, то окажется, что она имеет максимум порядка 8,7 МэВ/нуклон для средней части (железо) таблицы

Менделеева. Это значит, что такие ядра наиболее устойчивы. Для тяжелых ядер энергия связи меньше. Такая зависимость приводит к двум возможным энергетическим процессам:

1) Деление тяжелых ядер на несколько более легких ядер. Этот процесс энергетически выгоден, так как идет с выделением энергии. Например, деление ядра с $A_1 = 240$ (удельная энергия связи 7,5 МэВ/нуклон) на два с массовым числом $A_2 = 120$ (удельная энергия связи 8,5 МэВ/нуклон) привело бы к высвобождению энергии равной $(8,5 - 7,5)240 = 240$ МэВ.

2) Слияние (синтез) легких ядер. Например, слияние двух атомов тяжелого водорода ${}^2_1\text{H}$ в атом гелия ${}^4_2\text{He}$ привело бы к выделению энергии, равной 24 МэВ. Для этого процесса необходимо, чтобы части подошли очень близко друг к другу (на расстояние действия ядерных сил). Для этого их надо разогнать до огромных скоростей, что соответствует температурам

$T \approx 10^8 \text{ K}$ ($v_{\text{cp}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$). Поэтому такие реакции называются термоядерными.

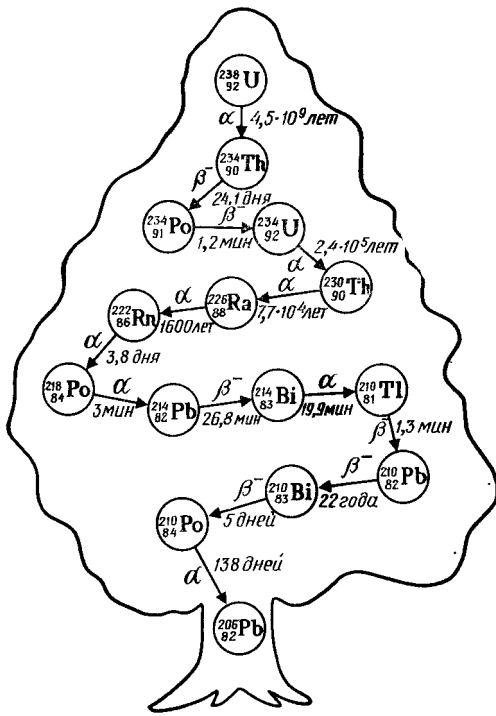
VI.15 Радиоактивность.

Радиоактивностью называется процесс самопроизвольного превращения одних атомных ядер в другие, сопровождающийся испусканием элементарных частиц. Различают естественную и искусственную радиоактивность. Естественной радиоактивностью называется радиоактивность, наблюдающаяся у ядер, существующих в естественных условиях. Радиоактивность, получаемая в ходе ядерных реакций, называется искусственной.

К числу радиоактивных процессов относятся:

- 1) α - распад,
- 2) β - распад,
- 3) γ - излучение ядер,
- 4) спонтанное деление тяжелых ядер,
- 5) протонная активность.

Закон радиоактивного распада. Процесс распада атомов носит случайный характер. Поэтому можно считать, что число ядер dN , распадающихся за малый промежуток dt , пропорционально как числу имеющихся ядер N , так и величине промежутка времени dt



$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt.$$

Постоянная λ называется постоянной распада. Знак минус в уравнении означает, что число атомов в ходе радиоактивного распада уменьшается. Проведя вычисления, получаем формулу радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

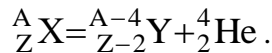
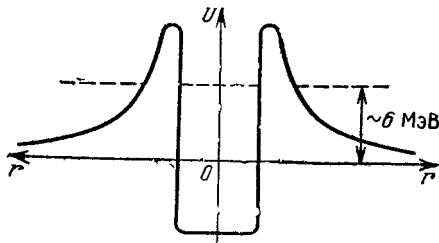
В этой формуле N_0 – число радиоактивных атомов в начальный момент времени, а N – число нераспавшихся атомов в момент времени t . Время, за которое число атомов уменьшается в два раза, называется периодом полураспада и обозначается буквой T . T и λ связаны соотношением

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Некоторые радиоактивные ядра распадаются на части, которые и сами радиоактивны. Возникает ряд радиоактивных превращений, называемых семейством. Приведем на рисунке одно из таких семейств – ряд урана ${}_{92}^{238}\text{U}$.

Теперь рассмотрим основные виды радиоактивного распада подробнее.

1) α - распад. Уравнение этого распада выглядит так:

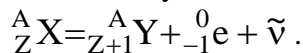


В этой формуле индексом X обозначено материнское ядро, индексом Y обозначено дочернее ядро. Последнее слагаемое в формуле — это альфа-частица, то есть ядро атома гелия. Эта частица возникает в момент распада. Покидая ядро, ей приходится преодолевать потенциальный барьер за счет туннельного эффекта. Внешняя часть барьера образована кулоновскими силами отталкивания альфа-частицы и дочернего ядра. Внутренняя часть барьера обусловлена ядерными силами.

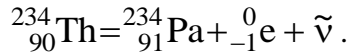
2) β - распад. Существует три вида β - распада.

а) β^- - распад. При β^- - распаде ядро превращается в другое ядро, и при этом вылетают из ядра электрон и антинейтрино. Процесс распределения энергии между электроном и антинейтрино является случайным. Это важная особенность β^- - распада. Общая формула такова:

б) β^+ - распад. При этом распаде схема такова:

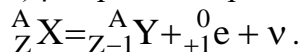


Примером этого распада является процесс превращения тория в протоактиний:

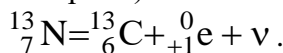


Получается так, что как бы один протон превращается в нейтрон.

в) Электронный захват. В этом случае ядро поглощает один из своих электронов, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино.



Единицей радиоактивности является беккерель (Бк): один распад в секунду. Допускается использование внесистемной единицы кюри (Ки): происходит $3.700 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду.



Единицей радиоактивности является беккерель (Бк): один распад в секунду. Допускается использование внесистемной единицы кюри (Ки): происходит $3.700 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду.

Единицей радиоактивности является беккерель (Бк): один распад в секунду. Допускается использование внесистемной единицы кюри (Ки): происходит $3.700 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду.

VI.16 Элементарные частицы.

Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи. Термин «элементарные частицы» в значительной мере условен, так как не существует четкого критерия элементарности частицы. Характерной особенностью элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям.

Всего вместе с античастицами открыто около 350 элементарных частиц, и число их продолжает расти. Большинство элементарных частиц нестабильно: они спонтанно превращаются в другие частицы. Стабильными являются фотон, электрон, все виды нейтрино, протон и их античастицы. Для того чтобы объяснить свойства и поведение элементарных частиц, их приходится наделять кроме массы, электрического заряда и спина рядом характерных дополнительных для них величин (квантовых чисел), о которых будет сказано ниже.

Известны четыре вида взаимодействий между элементарными частицами: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное (мы перечислили их в порядке убывания интенсивности).

Интенсивность взаимодействия принято характеризовать с помощью, так называемой константы взаимодействия, которая представляет собой безразмерный параметр, определяющий вероятность процессов, обусловленных данным видом взаимодействия. Отношение значений констант дает относительную интенсивность соответствующих взаимодействий.

Сильное взаимодействие. Этот вид взаимодействия обеспечивает связь нуклонов в ядре. Константа сильного взаимодействия имеет значение порядка 10. Наибольшее расстояние, на котором проявляется сильное взаимодействие (радиус действия γ), составляет примерно 10^{-13} м.

Электромагнитное взаимодействие. Константа взаимодействия равна $1/137 \approx 10^{-2}$. Радиус действия неограничен ($\gamma = \infty$).

Слабое взаимодействие. Это взаимодействие ответственно за все виды β -распада ядер (включая e^- -захват), за многие распады элементарных частиц, а также за все процессы взаимодействия нейтрино с веществом. Константа взаимодействия равна по порядку величины 10^{-14} . Слабое взаимодействие, как и сильное, является короткодействующим.

Гравитационное взаимодействие. Константа взаимодействия имеет значение порядка 10^{-39} . Радиус действия не ограничен ($\gamma = \infty$). Гравитационное взаимодействие является универсальным, ему подвержены все без исключения элементарные частицы. Однако в процессах микромира гравитационное взаимодействие ощутимой роли не играет.

В таблице сопоставлены значения (по порядку величины) константы разных видов

Вид взаимодействия	Константа взаимодействия	Время жизни, с
Сильное	10	10^{-23}
Электромагнитное	10^{-2}	10^{-16}
Слабое	10^{-14}	10^{-8}
Гравитационное	10^{-39}	---

взаимодействия. В последнем столбце таблицы приведено среднее время жизни частиц, распадающихся за счет данного вида взаимодействия. Это время называют также временем распада.

Элементарные частицы обычно подразделяют на четыре класса. К

одному из них относится только одна частица - **фотон**. Второй класс образуют **лептоны**, третий - **мезоны** и, наконец, четвертый класс - **барионы**. Мезоны и барионы часто объединяют в один класс сильно взаимодействующих частиц, называемых адронами (греческое «адрос» означает крупный, массивный).

Приведем краткую характеристику перечисленных классов частиц.

1. Фотоны (кванты электромагнитного поля) участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но не обладают сильным и слабым взаимодействиями.
2. Лептоны получили свое название от греческого слова «лептос», которое означает «легкий». К их числу относятся частицы, не обладающие сильным взаимодействием: электроны (e^- , e^+), мюоны (μ^- , μ^+), тяжелый тау-лептон (τ^- , τ^+), а также электронные

нейтрино ($\nu_e, \tilde{\nu}_e$), мюонные нейтрино ($\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$) и тау-нейтрино ($\nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau$). Все лептоны имеют спин, равный $1/2$, и, следовательно, являются фермионами. Все лептоны обладают слабым взаимодействием. Те из них, которые имеют электрический заряд (т. е. электроны и мюоны), обладают также электромагнитным взаимодействием.

3. Мезоны - сильно взаимодействующие нестабильные частицы, не несущие так называемого барионного заряда. К их числу принадлежат π - мезоны, или пионы (π^+, π^-, π^0), K-мезоны, или каоны ($K^+, K^-, K^0, \tilde{K}^0$), и эта - мезон (η).

Заряд π - мезонов равен элементарному заряду e (кроме нейтрального). Масса π - мезонов равна $273m_e$ для заряженных мезонов и $264 m_e$ для нейтрального мезона. Спин мезонов равен нулю. Масса K-мезонов составляет примерно $970m_e$ (494 МэВ для заряженных и 498 МэВ для нейтральных K-мезонов). Время жизни K-мезонов имеет значение порядка 10^{-6} с. Они распадаются с образованием π - мезонов и лептонов или только лептонов. Масса эта-мезона равна 549 МэВ ($1074 m_e$), время жизни порядка 10^{-19} с. Эта-мезоны распадаются с образованием π - мезонов и γ фотонов.

В отличие от лептонов, мезоны обладают не только слабым (и, если они заряжены, электромагнитным), но также и сильным взаимодействием, проявляющимся при взаимодействии их между собой, а также при взаимодействии между мезонами и барионами. Спин всех мезонов равен нулю, так что они являются бозонами.

4. Класс барионов объединяет в себе нуклоны (p, n) и нестабильные частицы с массой, большей массы нуклонов, получившие название гиперонов ($\Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-$). Все барионы обладают сильным взаимодействием. Спин всех барионов равен $1/2$, так что барионы являются фермионами. За исключением протона, все барионы нестабильны. При распаде бариона, наряду с другими частицами, обязательно образуется барион. Эта закономерность является проявлением закона сохранения барионного заряда.

Кроме перечисленных выше частиц, обнаружено большое число сильно взаимодействующих короткоживущих частиц, которые получили название резонансов. Эти частицы представляют собой резонансные состояния, образованные двумя или большим числом элементарных частиц. Время жизни резонансов составляет всего лишь примерно 10^{-23} — 10^{-22} с.

Семейства фундаментальных частиц

Семейство 1		Семейство 2		Семейство 3	
Частица	Масса, МэВ Заряд	Частица	Масса, МэВ Заряд	Частица	Масса, МэВ Заряд
Электрон	0,00054 - 1	Мюон	0,11 - 1	Таон	1,9 - 1
Электронное нейтрино	<10 -8 0	Мюонное нейтрино	0,0003 0	Таонное нейтрино	<0,033 0
U - кварк	0,0047 + 2/3	C - кварк	1,6 + 2/3	T - кварк	189,0 + 2/3
D - кварк	0,0074 - 1/3	S - кварк	0,16 - 1/3	B - кварк	5,2 - 1/3

STANDARD MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES

QUARKS	UP mass $2,3 \text{ MeV}/c^2$ charge $\frac{2}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ u	CHARM mass $1,275 \text{ GeV}/c^2$ charge $\frac{2}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ c	TOP mass $173,07 \text{ GeV}/c^2$ charge $\frac{2}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ t	GAUGE BOSONS	GLUON 0 0 1 g	HIGGS BOSON mass $126 \text{ GeV}/c^2$ 0 0 0 H
	DOWN mass $4,8 \text{ MeV}/c^2$ charge $-\frac{1}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ d	STRANGE mass $95 \text{ MeV}/c^2$ charge $-\frac{1}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ s	BOTTOM mass $4,18 \text{ GeV}/c^2$ charge $-\frac{1}{3}$ spin $\frac{1}{2}$ b		PHOTON 0 0 1 γ	
	LEPTONS	ELECTRON mass $0,511 \text{ MeV}/c^2$ charge -1 spin $\frac{1}{2}$ e	MUON mass $105,7 \text{ MeV}/c^2$ charge -1 spin $\frac{1}{2}$ μ		TAU mass $1,777 \text{ GeV}/c^2$ charge -1 spin $\frac{1}{2}$ τ	Z BOSON mass $91,2 \text{ GeV}/c^2$ 0 0 1 Z
		ELECTRON NEUTRINO mass $<2,2 \text{ eV}/c^2$ charge 0 spin $\frac{1}{2}$ ν_e	MUON NEUTRINO mass $<0,17 \text{ MeV}/c^2$ charge 0 spin $\frac{1}{2}$ ν_μ		TAU NEUTRINO mass $<15,5 \text{ MeV}/c^2$ charge 0 spin $\frac{1}{2}$ ν_τ	W BOSON mass $80,4 \text{ GeV}/c^2$ ± 1 1 W

Стандартная модель — это современная теория строения и взаимодействий элементарных частиц, многократно проверенная экспериментально. Эта теория базируется на очень небольшом количестве постулатов и позволяет теоретически предсказывать свойства тысяч различных процессов в мире элементарных частиц.