ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

стохастические дифференциальные уравнения

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО (Монография)

Д.Ф.Кузнецов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Высшая математика"
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Аннотация.[0]

Книга посвящена некоторым аспектам проблемы численнного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. В книге изложены как известные результаты, так и ряд новых результатов, связанных со свойствами стохастических интегралов, стохастическими разложениями процессов Ито, аппроксимацией повторных стохастических интегралов, численными методами для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Книга рассчитана на математиков, специализирующихся в области случайных процессов. Она будет также представлять интерес для математиков-вычислителей, программистов, инженеров.

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N 97-0-1.8-71 по фундаментальным исследованиям в естествознании.

Предисловие.

Настоящая монография посвящена проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Основы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений были заложены в монографии Г.Н.Мильштейна „Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений", которая вышла в 1988 году в России, а позднее в 1995 году за границей. Дальнейшее развитие эта проблема получила в обширной монографии „Numerical Solution of Stochastic Differential Equations"(P.E.Kloeden, E.Platen), вышедшей в 1992 году и переизданной в 1995 году, а также в монографии „Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments" (P.E.Kloeden, E.Platen, H.Schurz), которая вышла в 1994 году и была переиздана в 1997 году. Кроме этих монографий существует достаточно большое количество статей, посвященных проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

В предлагаемой книге используется численный подход к стохастическим дифференциальным уравнениям, который основан на конечной дискретизации временного интервала и моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора и специальных методов моделирования повторных стохастических интегралов.

Книга состоит из семи глав.

Первая глава – вводная. В ней рассмотрены некоторые физические и технические задачи, в которых встречается необходимость численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Приведены также некоторые сведения из теории вероятностей.

Вторая глава посвящена вопросу замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. Устанавливается класс повторных стохастических интегралов Ито для которого справедливы формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с обычными правилами замены порядка интегрирования для повторных римановых интегралов. Кроме формул замены порядка интегрирования получен ряд других свойств повторных стохастических интегралов. Полученные формулы замены порядка интегрирования являются, наряду с формулой Ито, средством для вывода различных свойств повторных стохастических интегралов.

Третья глава посвящена стохастическим разложениям процессов Ито.

В ней представлены в новых обозначениях как известные стохастические разложения: Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича, так и новые представления разложения Тейлора-Ито, названные унифицированными разложениями Тейлора-Ито. Унифицированные разложения Тейлора-Ито строятся с использованием формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито, которые получены во второй главе. Отличительной особенностью унифицированных разложений Тейлора-Ито является то, что они содержат существенно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, нежели разложения Тейлора-Ито, которые изучали Г.Н.Мильштейн, W.Wagner, P.E.Kloeden, E.Platen и другие авторы.

Четвертая глава посвящена проблеме аппроксимации повторных стохастических интегралов, к которым могут быть сведены все повторные стохастические интегралы, входящие в перечисленные выше стохастические разложения. Предлагается и доказывается новый метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, который основан на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. Предложенный метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с известным методом Г.Н.Мильштейна аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича. Среди них следует отметить возможность применения различных полных ортонормированных систем функций (а не только тригонометрической системы), сведение проблемы аппроксимации к вычислению коэффициентов Фурье специальных функций многих переменных, а также возможность получения формул для аппроксимации и погрешности аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности k. В четвертой главе также рассматривается метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, который основывается на их приближении кратными интегральными суммами. Этот метод, также как и метод, основанный на кратных рядах Фурье позволяет получить общую формулу для аппроксимации повторного стохастического интеграла произвольной кратности k. Метод, основанный на приближении интегральными суммами не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье, что является достаточно сложной задачей. Следует отметить, что этот метод среднеквадратически сходится несколько медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье.

Пятая глава посвящена построению явных одношаговых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые строятся на основе разложения Тейлора-Ито (W.Wagner, E.Platen), унифицированных разложений Тейлора-Ито, а также на основе разложения Тейлора-Стратоновича. Часть методов представленных в пятой главе является известной, например метод Г.Н.Мильштейна порядка 1.0. Другая и большая часть полученных методов является новой. Так, все представленные численные методы порядков 2.0, 2.5 и $r/2$; $r = 6, 7, \ldots$ являются новыми потому, что они используют ранее неизвестные аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича 4-й и более высоких кратностей (в литературе известны аппроксимации лишь для повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито 1, 2 и 3 кратности). Построены новые явные сильные одношаговые конечно разностные методы порядков 1.5, 2.0 и 2.5, последние два из которых не имеют аналогов для векторных стохастических дифференциальных уравнений с многомерным шумом.

В шестой главе рассматриваются точный и приближенный численные методы моделирования решений систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений. Для построения точного численного метода используется точное представление решений этих систем уравнений в форме Коши. Для построения приближенного численного метода используется аппроксимация белого шума кусочно постоянным дискретным случайным процессом. Разработаны алгоритмы численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений. Эти алгоритмы построены для систем произвольной фиксированной размерности k. Произведено сравнение точного и приближенного численного методов по моментным характеристикам.

В седьмой главе собраны примеры численного моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые предназначены для иллюстрации теории, изложенной в главах 1–6. В этих примерах впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегралов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

В конце монографии находится перечень используемых обозначений. Там же находится список литературы по проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений, который является очевидно не полным и содержит, главным образом, цитируемые источники.

Автор выражает глубокую благодарность О.Ю.Кульчицкому за помощь в написании главы 6 и параграфа 3.3.1.

Автор также выражает глубокую благодарность В.Б.Меласу за труд по рецензированию монографии и ценные рекомендации по структуре книги.

Автор выражает благодарность И.А.Ибрагимову, Л.Б.Клебанову, В.Н. Судакову, А.Н.Бородину, М.И.Гордину, Я.И.Белопольской, М.А.Лифшицу, В.Б. Невзорову и другим участникам Санкт-Петербургского городского семинара по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова за ценные замечания по третьей и четвертой главам монографии, частично докладывавшимся на этом семинаре.

Автор благодарит коллектив кафедры „Механика и процессы управления" физико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного технического университета, в особенности А.А.Первозванского – заведующего лабораторией „Процессы управления", в которой осуществлялся набор книги.

Текст монографии в полном объеме опубликован в электронном журнале „Дифференциальные уравнения и процессы управления", N1, 1998 (http://www.neva.ru/journal).

Автору представляется, что для прочтения монографии могут оказаться полезными следующие рекомендации по выбору материала для различных категорий читателей.

I. Для физиков, инженеров, программистов с целью решения прикладных технических задач стохастической динамики:

Глава 1

↓

§5.1 → §5.2 → §5.3.1 → §5.3.2 → §5.4.1
→ §5.5.2 → §5.5.3 → §5.6.2 → §5.6.3

↓

Глава 6

↓

Глава 7

II. Для математиков с целью изучения проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито:

Глава 1

$\downarrow$

Глава 2

$\downarrow$

Глава 3

$\downarrow$

Глава 4

$\downarrow$

Глава 5

$\downarrow$

Глава 6

$\downarrow$

Глава 7

III. Для математиков, специализирующихся в области численного решения стохастических дифференциальных уравнений, с целью ознакомления с некоторыми новыми результатами в этой области:

$\boxed{\S 2.2 \to \S 2.3 \to \S 2.4}$

$\downarrow$

$\boxed{\S 3.3 \to \S 3.4}$

$\downarrow$

$\boxed{\S 4.2 \to \S 4.3 \to \S 4.5 \to \S 4.7}$

$\downarrow$

$\boxed{\S 5.3 \to \S 5.6}$

$\downarrow$

$\boxed{\S 6.2}$

$\downarrow$

$\boxed{\S 7.1 \to \S 7.3 \to \S 7.8}$

Оглавление

Глава 1

О стохастических дифференциальных уравнениях: определения, свойства, проблемы, применения

1.1 О различных численных подходах, применяемых к стохастическим дифференциальным уравнениям

В настоящем параграфе кратко рассмотрим известные численные подходы, которые применяются к стохастическим дифференциальным уравнениям. На очень общем уровне существует метод Бьюси [1], посредством которого могут быть исследованы, в принципе, достаточно общие случайные системы с помощью метода Монте-Карло. Этот метод является достаточно неэффективным в отношении стохастических дифференциальных уравнений, поскольку он не использует специальную структуру этих уравнений, которая характеризуется коэффициентами сноса и диффузии.

Кушнер [2] предложил численный подход к стохастическим системам, который основывается на дискретизации как времени, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимируемые случайные процессы превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации с помощью этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова. Они содержат значительное количество излишней информации, которая многократно повторно перерабатывается в процессе вычислений. Поэтому такой подход марковских цепей применим только для задач с небольшой размерностью.

Проблема размерности также возникает при численном решении уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятностей процессов Ито.

В настоящей книге, также как и в монографиях [35], [38], используется другой и более эффективный и естественный подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Этот подход основывается на конечной дискретизации временного интервала $[0, T]$ и численном моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора. Важной особенностью этого подхода является то, что переменные состояния в нем не дискретизируются как в подходе Кушнера. Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) растут полиномиально [38] с ростом размерности задачи. Это обстоятельство позволяет говорить о некоторых вычислительных резервах данного подхода.

1.2 Некоторые сведения из теории вероятностей

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и борелевское измеримое пространство $(\Re^1, \mathcal{B})$. Функцию $\xi(\omega) \in \Re^1$, определенную при всех $\omega \in \Omega$, будем называть случайной величиной, если она измерима относительно $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}$ или $\mathcal{F}-$измерима, т.е. для любого $B \in \mathcal{B}$: $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1 *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется сходящейся в среднем степени $p(0 < p < \infty)$ к случайной величине $\xi(\omega)$: $\underset{k\to\infty}{(p)\text{-}l.i.m}\ \xi_k = \xi$, если $\mathsf{M}\{\mid \xi_k - \xi \mid^p\} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Отметим, что, если p=2, то сходимость в среднем степени 2 называют сходимостью в среднеквадратическом смысле и обозначают в виде: $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k = \xi$. Нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение: *Если последовательность случайных величин ξ_k сходится в среднем степени p, то она сходится и в среднем степени q при $0 < q < p < \infty$.*

Определение 1.2 *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется сходящейся с вероятностью единица или почти наверное к случайной величине $\xi(\omega)$: $\xi_k \overset{п.н.}{\to} \xi$ при $k \to \infty$ или $\underset{k\to\infty}{lim}\ \xi_k \overset{п.н.}{=} \xi$, если: $\mathsf{P}\{\omega : \xi_k \to \xi$ при $k \to \infty\} = 1$.*

Определение 1.3 *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ на-*

зывается фундаментальной с вероятностью единица или в среднем степени p, *если выполнено соответственно одно из следующих условий:* $\mathsf{P}\left\{\omega : \xi_k - \xi_l \to 0 \text{ при } k, l \to \infty\right\} = 1$, $\mathsf{M}\left\{\mid \xi_k - \xi_l \mid^p\right\} \to 0$ *при* $k, l \to \infty$.

Отметим, что фундаментальность последовательности случайных величин является необходимым и достаточным условием существования ее предела, что называется критерием Коши [53].

В дальнейшем, для доказательства ряда утверждений нам потребуются различные оценки сверху для математических ожиданий. В связи с этим, в этом параграфе приведем основные неравенства для математических ожиданий, которые будут нами использоваться в дальнейшем. Эти неравенства мы приводим без доказательства, в силу их широкой известности.

1.Неравенство Чебышева. С вероятностью 1

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathsf{M}\left\{\xi\right\}}{\varepsilon} \ \forall \xi(\omega) \geq 0, \ \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty.$$

Нетрудно видеть, что из неравенства Чебышева с вероятностью 1 следуют неравенства:

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathsf{M}\left\{\xi^2\right\}}{\varepsilon^2}, \ \mathsf{P}\left\{\mid \xi - \mathsf{M}\left\{\xi\right\} \mid \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathsf{D}\left\{\xi\right\}}{\varepsilon^2},$$

где $\mathsf{D}\left\{\xi\right\} \overset{def}{=} \mathsf{M}\left\{\left(\xi - \mathsf{M}\left\{\xi\right\}\right)^2\right\}$ –дисперсия случайной величины ξ.

2.Неравенство Коши-Буняковского.

$$\left(\mathsf{M}\left\{\mid \xi\eta \mid\right\}\right)^2 \leq \mathsf{M}\left\{\xi^2\right\} \mathsf{M}\left\{\eta^2\right\} \quad \forall \xi(\omega), \ \eta(\omega).$$

3.Неравенство Ляпунова.

$$\sqrt[s]{\mathsf{M}\left\{\mid \xi \mid^s\right\}} \leq \sqrt[t]{\mathsf{M}\left\{\mid \xi \mid^t\right\}} \ \ \forall \xi(\omega); \ \forall s, t : \ 0 < s \leq t.$$

4.Неравенство Гельдера.

$$\mid \mathsf{M}\left\{\xi\eta\right\} \mid \leq \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{\mid \xi \mid^p\right\}} \sqrt[q]{\mathsf{M}\left\{\mid \eta \mid^q\right\}} \ \ \forall \xi(\omega), \ \eta(\omega); \ \forall p, \ q : \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$1 \leq p, q \leq \infty$.

5.Неравенство Минковского.

$$\sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{\mid \xi + \eta \mid^p\right\}} < \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{\mid \xi \mid^p\right\}} + \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{\mid \eta \mid^p\right\}} \ \ \forall \ \xi(\omega), \ \eta(\omega); \ \forall p :$$

$\mathsf{M}\left\{\mid \xi \mid^p\right\} < \infty, \ \mathsf{M}\left\{\mid \eta \mid^p\right\} < \infty, \ 1 \leq p < \infty.$

6. $\mathsf{M}\{|\ \xi+\eta\ |^p\} \le 2^{p-1}(\mathsf{M}\{|\ \xi\ |^p\}+\mathsf{M}\{|\ \eta\ |^p\}) \quad \forall\xi(\omega),\ \eta(\omega);\ \forall p: p\ge 1.$

Семейство случайных величин, параметризованное параметром t, интерпретируемым как время, будем называть случайным процессом и обозначать в виде: $\xi_t \stackrel{def}{=} \xi(t,\omega) \in X \subset \Re^1$, где $t \in \mathcal{T} \subset \Re^1$ - временной параметр; $\mathcal{T}$ - множество определения, а X - множество значений случайного процесса ξ_t. Область определения $\mathcal{T}$ случайного процесса может быть конечным, полубесконечным или бесконечным интервалом числовой прямой. В этих случаях $\xi(t,\omega)$ называется случайным процессом с непрерывным временем. Если $\mathcal{T}$ имеет конечное или счетное множество элементов $t_k \in \mathcal{T} : t_k < t_{k+1}; k = 0, 1, 2, \ldots$, то ξ_t называется случайным процессом с дискретным временем или случайной последовательностью.

Случайный процесс считается полностью заданным, если заданы его конечномерные распределения - набор функций распределения, которые определены для любого $k \ge 1$ соотношениями:

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k) = \mathsf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{k}\{\xi(t_j,\omega) < x_j\}\right\},$$

где $t_i \in \mathcal{T};\ x_i \in \Re^1;\ i = 1, 2, \ldots, k.$

Справедливо и обратное утверждение, установленное Колмогоровым [4]:

Если функции $F(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k)$ при всех $k \ge 1$ удовлетворяют условиям:

1. $F(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k)$ - является совместной функцией распределения k случайных величин;

2. справедливо тождественное равенство:

$$F(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k) \equiv F(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}, t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_k})$$

для любой перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ чисел $1, 2, \ldots, k$;

3. $$\lim_{x_k\to+\infty} F(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k) =$$
$$= F(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, t_1, t_2, ..., t_{k-1}),$$

тогда существует такой случайный процесс $\xi(t,\omega)$, совместными функциями распределения которого являются функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_k, t_1, t_2, ..., t_k).$$

Таким образом, совокупность совместных функций распределения значений случайного процесса $\xi(t,\omega)$ является его исчерпывающей характеристикой.

Если функции распределения $F_\xi(x_1,x_2,...,x_k,t_1,t_2,...,t_k)$ имеют конечную смешанную k-ую производную, то существуют совместные плотности распределения значений случайного процесса ξ_t в соответствующие моменты времени:

$$p_\xi(x_1,x_2,...,x_k,t_1,t_2,...,t_k)=\frac{\partial^k}{\partial x_1\dots\partial x_k}F_\xi(x_1,x_2,...,x_k,t_1,t_2,...,t_k).$$

Случайный процесс называется гауссовским, если все его совместные плотности распределения являются гауссовскими:

$$p_\xi(x_1,x_2,...,x_k,t_1,t_2,...,t_k)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(K)}}\exp\left(-\tfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^TK^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2}\right),$$

где $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots x_k)^T$; $\mathbf{m}=(m_1,m_2,\dots m_k)^T$; $m_i\overset{def}{=}\mathsf{M}\{x_i\}$; $K=K^T>0$.

Случайный процесс ξ_t, заданный на $\mathcal{T}$, называется стационарным в узком смысле, если для любых $n\ge 1$ и любых моментов $t_1,t_2,\dots t_n,t$ таких, что $t_i+t\in\mathcal{T}(i=1,2,\dots n)$ совместные функции распределения или плотности распределения совокупности случайных величин ξ_{t_1+t}, ξ_{t_2+t}, ..., ξ_{t_n+t} не зависят от t.

Будем называть процесс $\overset{\circ}{\xi}_t=\xi_t-\mathsf{M}\{\xi_t\}$ центрированной составляющей процесса ξ_t.

Функция: $R_\xi(t_1,t_2)\overset{def}{=}\mathsf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}_{t_1}\overset{\circ}{\xi}_{t_2}\right\}$ называется корреляционной функцией процесса ξ_t, причем: $\mathsf{D}\{\xi_t\}=R_\xi(t,t)$, где $\mathsf{D}\{\xi_t\}$-дисперсия случайного процесса ξ_t.

Очевидно, что для стационарного в узком смысле случайного процесса ξ_t:

1. $\mathsf{M}\{\xi_t\}=const$,
2. $R_\xi(t_1,t_2)\equiv R_\xi(t_1-t_2)$,
3. $\mathsf{D}\{\xi_t\}\equiv R_\xi(0)$.

Однако, выполнение этих условий для случайного процесса ξ_t, вообще говоря, не гарантирует его стационарности в узком смысле. Поэтому, процессы ξ_t, удовлетворяющие условиям $1-3$, называются стационарными в широком смысле. Понятие стационарности в широком и узком смыслах оказываются эквивалентными только на классе гауссовских процессов.

Известно [3], что для того, чтобы функция $R_\xi(t)$ при $t \in (-\infty, \infty)$ была корреляционной функцией стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t, удовлетворяющего условию:

$$\mathsf{M}\left\{(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2\right\} \to 0 \text{ при } \tau \to 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление:

$$R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} dF_\xi(w), \tag{1.1}$$

где $F_\xi(w)$-произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева.

Функция $F_\xi(w)$, входящая в представление (1.1) корреляционной функции $R_\xi(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t, называется спектральной функцией. Если $F_\xi(w)$ абсолютно непрерывна и допускает представление:

$$F_\xi(w) = \int_{-\infty}^{w} S_\xi(v) dv,$$

то $S_\xi(w)$ называется спектральной плотностью процесса ξ_t.

Поясним физический смысл спектральной функции. Пусть ξ_t интерпретируется как электрический ток, представимый в виде "континуальной суммы"гармонических колебаний со случайными амплитудами. Тогда приращение $F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1)$ $(w_2 > w_1)$ равно средней мощности, рассеиваемой гармониками, частоты которых лежат в полуинтервале $[w_1, w_2)$.

Спектральная функция может быть восстановлена по корреляционной функции. Так, если w_1 и w_2 - точки непрерывности спектральной функции $F_\xi(w)$, то справедливо соотношение [3]:

$$F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itw_1} - e^{-itw_2}}{it} R_\xi(t) dt, \tag{1.2}$$

где интеграл в правой части понимается в смысле среднего значения.

В точках разрыва спектральной функции $F_\xi(w)$ соотношение (1.2) останется справедливым, если в левую часть вместо $F_\xi(u)$ подставить $\frac{1}{2}\left(F_\xi(w+0) - F_\xi(w)\right)$.

Если корреляционная функция $R_\xi(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid R_\xi(t) \mid dt < \infty,$$

то существует спектральная плотность процесса ξ_t и она определяется равенством:

$$S_\xi(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} R_\xi(t) dt. \tag{1.3}$$

Пользуясь представлением (1.3), нетрудно получить следующие свойства спектральной плотности:

1. $S_\xi(w) \in \Re^1$,
2. $S_\xi(w) = S_\xi(-w)$,
3. $S_\xi(w) \geq 0$.

Определение 1.4 *Случайный процесс ξ_t называется непрерывным в среднем степени $p(0 < p < \infty)$ в точке τ, принадлежащей его области определения, если для любой последовательности t_k сходящейся к τ и принадлежащей области определения процесса ξ_t $\mathsf{M}\{\mid \xi_{t_k} - \xi_\tau \mid^p\} \to 0$ при $t_k \to \tau$.*

Определение 1.5 *Случайный процесс ξ_t называется непрерывным с вероятностью 1 в точке τ, принадлежащей его области определения, если для любой последовательности t_k сходящейся к τ и принадлежащей области определения процесса ξ_t $\mathsf{P}\{\omega : \xi_{t_k} \to \xi_\tau$ при $t_k \to \tau\} = 1$.*

Процесс ξ_t будем называть непрерывным на промежутке $[t_1, t_2]$ в данном вероятностном смысле, если он непрерывен в этом смысле при любом $t \in [t_1, t_2]$. Непрерывность в среднем степени 2 случайного процесса ξ_t будем называть среднеквадратической непрерывностью.

Будем называть случайный процесс ξ_t, определенный для всех $t \in [0, T]$, дифференцируемым в момент $t \in [0, T]$ в одном из вероятностных смыслов, если существует правая часть следующего предельного соотношения:

$$\frac{\xi_{t+\Delta} - \xi_t}{\Delta} \to \frac{d\xi_t}{dt} \text{ при } \Delta \to 0,$$

понимаемого в этом вероятностном смысле.

Процесс ξ_t будем называть дифференцируемым на промежутке $[0, T]$ в данном вероятностном смысле, если он дифференцируем в этом смысле при всех $t \in [0, T]$.

Определение 1.6 *Случайный процесс ξ_t, определенный на промежутке $[0,T]$, называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $t_0, t_1, \dots t_k \in [0,T]$ таких, что: $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_k \le T$ случайные величины: $\xi_{t_0},\ \xi_{t_1} - \xi_{t_0},\ \dots,\ \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ стохастически независимы между собой.*

Определение 1.7 *Случайный процесс $f_t \in \Re^1$ с независимыми приращениями, определенный при $t \in [0,T]$, будем называть винеровским, если он удовлетворяет условиям:*

1) $\mathsf{M}\{f_t\} \equiv 0$,

2) $\mathsf{M}\left\{(f_{t_2} - f_{t_1})^2\right\} = \sigma_f^2 \mid t_2 - t_1 \mid,\ \sigma_f^2 = const > 0$,

3) f_{t_1} *и* $f_{t_2} - f_{t_1}$ $(t_2 > t_1)$ *имеют нормальное распределение при всех* $t_1, t_2 \in [0,T]$.

Часто полагают $\sigma_f^2 = 1,\ f_0 = 0$. В этом случае винеровский процесс называется стандартным. Поскольку приращения $f_{t_2} - f_{t_1}$ $(t_2 > t_1)$ винеровского процесса имеют нормальное распределение, то их функция распределения определяется соотношением:

$$\mathsf{P}\{f_{t_2} - f_{t_1} < x\} = \frac{1}{\sigma_f\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_f^2(t_2-t_1)}} du.$$

Известно, что в силу нормальности $f_{t_2} - f_{t_1}$ справедлива формула:

$$\mathsf{M}\{(f_{t_2} - f_{t_1})^m\} = \begin{cases} \sigma_f^m (m-1)!!\,(t_2 - t_1)^{\frac{m}{2}} & \text{при } m = 2k \\ 0 & \text{при } m = 2k+1 \end{cases},$$

где $k \in \mathcal{Z}, k > 0$.

Известно, что винеровский случайный процесс является непрерывным с вероятностью 1 случайным процессом.

Пусть $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$ поток $\sigma-$алгебр, подчиненный условиям:

1° $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s < t$.

2° $\mathcal{F}_0$ содержит все события вероятности 0.

Пусть $f_t = f(t,\omega) \in \Re^1$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ относительно $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_t$ стандартный винеровский случайный процесс.

Определенный при всех $t \in [0,T]$ и измеримый при $t \in [0,T]$ относительно $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_t$ случайный процесс $\xi_t = \xi(t,\omega)$ будем называть неупреждающим к винеровскому процессу f_t, если его значения ξ_τ стохастически не зависят от приращений $f_{t+s} - f_t$ при $t \ge \tau,\ s > 0$.

Определение 1.8 *Стохастическим интегралом Ито от процесса* ξ_τ *по винеровскому процессу* f_τ *на промежутке* $[0,T]$ *назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{l.i.m.}\sum_{j=0}^{N-1}\xi(\tau_j,\omega)\left(f(\tau_{j+1},\omega)-f(\tau_j,\omega)\right)\stackrel{def}{=}\int_0^T\xi_\tau df_\tau, \tag{1.4}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ *–разбиение промежутка* $[0,T]$ *такое, что* $\tau_j<\tau_{j+1},\ \tau_0=0,\ \tau_N=T,\ \Delta_N=\max\limits_{0\le j\le N-1}\mid\tau_{j+1}-\tau_j\mid$.

Нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1 *Пусть неупреждающий к винеровскому процессу* f_τ *случайный процесс* $\xi_\tau\in\Re^1$ *является среднеквадратически непрерывным на промежутке* $[0,T]$ *и удовлетворяет условию* $\mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\}<\infty$ *при всех* $\tau\in[0,T]$. *Тогда стохастический интеграл Ито вида (1.4) существует.*

Укажем некоторые свойства стохастического интеграла Ито.

*A*1. $\mathsf{M}\{\int_0^T\xi_\tau df_\tau\}=0.$

*A*2. $\mathsf{M}\left\{\left(\int_0^T\xi_\tau df_\tau\right)^2\right\}=\int_0^T\mathsf{M}\{\xi_\tau^2\}d\tau.$

*A*3. $\int_0^T(\alpha\xi_\tau+\beta\eta_\tau)\,df_\tau=\alpha\int_0^T\xi_\tau df_\tau+\beta\int_0^T\eta_\tau df_\tau\ \ \forall\alpha,\ \beta\in\Re^1$ с вероятностью 1,

*A*4. $\mathsf{M}\left\{\int_0^T\xi_\tau df_\tau\int_0^T\eta_\tau df_\tau\right\}=\int_0^T\mathsf{M}\left\{\xi_\tau\eta_\tau\right\}d\tau,$

где случайные процессы $\xi_\tau,\ \eta_\tau$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1.

Определим $\int_{t_1}^{t_2}\xi_\tau df_\tau$ при $\forall t_1,\ t_2:\ 0\le t_1\le t_2\le T$ следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2}\xi_\tau df_\tau=\int_0^T\mathbf{1}_{[t_1,t_2)}(\tau)\xi_\tau df_\tau, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{1}_{[t_1,t_2)}(\tau)=1$ при $\tau\in[t_1,t_2)$ и $\mathbf{1}_{[t_1,t_2)}(\tau)=0$ иначе. Нетрудно видеть, что

$$\int_{t_1}^{t_2}\xi_s df_s+\int_{t_2}^{t_3}\xi_s df_s=\int_{t_1}^{t_3}\xi_s df_s,$$

где $0\le t_1\le t_2\le t_3\le T$.

Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2}\xi_\tau df_\tau=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{l.i.m.}\sum_{j\in\mathcal{A}_{[t_1,t_2)}}\xi(\tau_j,\omega)\left(f(\tau_{j+1},\omega)-f(\tau_j,\omega)\right), \tag{1.6}$$

где $\mathcal{A}_{[t_1,t_2)} = \{j:\ t_1 \leq \tau_j < t_2\}$. Поэтому не ограничивая общности будем далее считать, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi_\tau df_\tau = \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N\to\infty}}{l.i.m.} \sum_{j=0}^{N-1} \xi(\tau_j, \omega) \left(f(\tau_{j+1}, \omega) - f(\tau_j, \omega) \right), \tag{1.7}$$

$\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ −разбиение промежутка $[t_1, t_2]$ такого типа, как в определении 1.8, т.е. $\tau_j < \tau_{j+1},\ \tau_0 = t_1,\ \tau_N = t_2,\ \Delta_N = \underset{0\leq j\leq N-1}{max} \mid \tau_{j+1} - \tau_j \mid$.

Можно показать, что если случайный процесс ξ_τ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то случайный процесс $\eta_t = \int_0^t \xi_\tau df_\tau,\ t \in [0, T]$ является $\mathcal{F}_t$−измеримым и непрерывным с вероятностью 1 случайным процессом. Кроме этого справедливы равенства:

$B1$. $\mathsf{M}\{\eta_t - \eta_s \mid \mathcal{F}_s\} = 0$,

$B2$. $\mathsf{M}\left\{(\eta_t - \eta_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right\} = \int_s^t \mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\} d\tau$,

$B3$. $\mathsf{M}\{(\eta_t - \eta_s)(\eta_\theta - \eta_\tau) \mid \mathcal{F}_s\} = 0$,

где $0 \leq s \leq t \leq \tau \leq \theta \leq T$.

Известно также, что случайный процесс η_τ является мартингалом относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Аналогично (1.7) примем для интеграла $\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau$ $(0 \leq t_0 \leq t \leq T)$ следующее определение.

Определение 1.9 *Стохастическим интегралом от процесса ξ_τ на промежутке $[t_0, t]$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N\to\infty}}{l.i.m.} \sum_{j=0}^{N-1} \xi\left(\tau_j, \omega\right) \left(\tau_{j+1} - \tau_j\right) \overset{def}{=} \int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau, \tag{1.8}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ −разбиение промежутка $[t_0, t]$ такого типа, как в определении 1.8.

Отметим, что стохастический интеграл вида (1.8) существует, если условия теоремы 1.1 выполнены для процесса ξ_τ на промежутке $[t_0, t]$. Отметим некоторые свойства интеграла $\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau$:

$C1$. $\mathsf{M}\{\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau\} = \int_{t_0}^t \mathsf{M}\{\xi_\tau\} d\tau$,

$C2$. $\mathsf{M}\left\{\left(\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau\right)^2\right\} \leq \left(\int_{t_0}^t \sqrt{\mathsf{M}\{\xi_\tau^2\}} d\tau\right)^2$,

$C3.$ $\int_{t_0}^{t_1} \xi_s ds + \int_{t_1}^{t} \xi_s ds = \int_{t_0}^{t} \xi_s ds \ \ \forall t_1 : \ t_0 \le t_1 \le t$ с вероятностью 1.

$C4.$ $\int_{t_0}^{t} (\alpha\xi_\tau + \beta\eta_\tau)\, d\tau = \alpha \int_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau + \beta \int_{t_0}^{t} \eta_\tau d\tau \ \ \forall \alpha,\ \beta \in \Re^1$ с вероятностью 1.

Предполагается, что случайные процессы $\xi_\tau,\ \eta_\tau$, входящие в $C1 - C4$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 на промежутке $[t_0, t]$.

Определение 1.10 *Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса ξ_τ по винеровскому процессу f_τ на промежутке $[0, T]$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{l.i.m.} \quad \sum_{j=0}^{N-1} \xi \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}, \omega \right) \left(f(\tau_{j+1}, \omega) - f(\tau_j, \omega) \right) \stackrel{def}{=} \int_0^{*T} \xi_\tau df_\tau, \tag{1.9}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ −разбиение промежутка $[0, T]$ такого типа, как в определении 1.8.

1.3 Математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений

Анализ динамики управляемых механических, электромеханических и ряда других систем при случайных внешних воздействиях сводится к исследованию вероятностных и статистических свойств решений систем дифференциальных уравнений, возмущенных случайными процессами. В достаточно общем случае такие системы описываются уравнением вида:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)\, \mathbf{r}_t; \ \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \tag{1.10}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$-вектор состояния системы; $\mathbf{u}(t) \in \Re^k$-управляющее неслучайное воздействие; $\mathbf{r}_t \stackrel{def}{=} \mathbf{r}(t, \omega) \in \Re^m$-возмущение, представляющее собой векторный случайный процесс; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in \Re^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in \Re^{n \times m}$-матричные функции своих аргументов. Далее, для простоты будем считать процесс $\mathbf{r}_t$ скалярным и обозначать его через r_t.

К исследованию систем уравнений вида (1.10) сводится решение широкого класса задач статистической механики, электродинамики, теории управления и других дисциплин. Первая из таких задач была рассмотрена Л.Бешелье [7] в связи с изучением одномерного броуновского движения частицы. Результаты Л.Бешелье были обобщены А.Эйнштейном и

М.Смолуховским [8] на многомерный случай. Более широкая постановка задачи о стохастическом рассмотрении динамических систем содержится в работе А.А.Андронова, А.А.Витта и Л.С.Понтрягина [9]. Эти фундаментальные работы положили начало статистическому описанию динамических систем, получившему в настоящее время широкое применение и развитие.

Корреляционные или спектральные свойства решений системы (1.10) существенным образом зависят от взаимосвязи динамических характеристик системы и частотных свойств возмущающего случайного процесса. Если полоса пропускания динамической системы (1.10) по входу значительно ýже полосы частот равномерности спектра стационарного возмущающего процесса, то этот процесс может считаться белошумным по отношению к данной системе, т.е. имеющим постоянную спектральную плотность в диапазоне частот существенном для динамики системы (1.10).

Белошумный процесс является обобщенным случайным процессом с δ-образной корреляционной функцией и постоянной спектральной плотностью во всем частотном диапазоне: $R_r(\tau) = \sigma_r^2\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = \sigma_r^2 = const$.

Понятие белошумности случайного процесса условно. Один и тот же случайный процесс может считаться белошумным по отношению к одной динамической системе и небелошумным ("цветным") по отношению к другой, имеющей более широкую полосу пропускания. Р.Л.Стратоновичем была предложена параметризованная модель белошумного случайного процесса. Если ввести малый параметр $\mu > 0$ таким образом, что: $r_t = \frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$, где ξ_t-стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ такой, что: $\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t, t+\tau)d\tau = 1$ и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$, то процесс r_t будет иметь корреляционную функцию $R_r(\tau)$ и спектральную плотность $S_r(\omega)$ такие, что при $\mu \to 0$: $R_r(\tau) = \frac{1}{\mu^2}R_\xi\left(\frac{\tau}{\mu^2}\right) \to \sigma_r^2\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = S_\xi\left(\mu^2\omega\right) \to S_\xi(0)$; $\delta(\tau)$-обобщенная δ-функция Дирака.

Система дифференциальных уравнений (1.10) для таким образом параметризованных случайных возмущающих процессов принимает вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t\right) + \Sigma\left(\mathbf{x}_t, t\right)\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}};\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0). \tag{1.11}$$

При достаточно малом μ процесс $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ может считаться белошумным по отношению к данной динамической системе, так как полоса равномерности спектра возмущающего процесса $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ неограничено расширяется при $\mu \to 0$, а полоса пропускания системы остается постоянной.

Если полоса пропускания системы (1.10) не достаточно узка по отношению к полосе равномерности спектра возмущающего процесса r_t, то белошумная аппроксимация этого процесса не адекватна исходной постановке задачи стохастической динамики. В этих случаях существенен учет свойств "цветности"процесса r_t, для чего спектральная плотность этого процесса представляется в виде:

$$S_r(\omega) = H_r(j\omega)H_r(-j\omega) = \frac{F_r(j\omega)}{A_r(j\omega)}\frac{F_r(-j\omega)}{A_r(j\omega)}, \tag{1.12}$$

где $H_r(p) = \frac{F_r(p)}{A_r(p)}$-дробно-рациональная передаточная функция устойчивой системы, т.е. $F_r(p)$ и $A_r(p)$-полиномы конечных степеней m и n $(m < n)$, причем полином $A_r(p)$-гурвицев; j-мнимая единица.

Известно, что спектральной плотностью (1.12) обладают установившиеся выходные процессы системы вида:

$$\dot{\mathbf{z}}_t = A_r\mathbf{z}_t + F_r\mathbf{f}_t^{\cdot}; \quad r_t = \mathbf{h}^T\mathbf{z_t}, \tag{1.13}$$

для матриц $A_r,\ F_r$, которой справедливо равенство:

$$H_r(p) = \mathbf{h}^T\left(pI - A_r\right)^{-1}F_r = \frac{F_r(p)}{A_r(p)},$$

где $\mathbf{f}_t^{\cdot}$ -белошумный процесс; I-единичная матрица. Система (1.13) называется формирующим фильтром процесса r_t.

Если расширить систему уравнений (1.10), дополнив их уравнениями (1.13), то в этом расширенном виде математическое описание динамической системы сводится к стохастической системе дифференциальных уравнений с белошумным возмущением.

Таким образом, универсальной математической моделью, описывающей стохастическую динамику систем является модель нелинейной системы дифференциальных уравнений, возмущенных белошумным случайным процессом (в общем случае векторным):

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t\right) + \Sigma\left(\mathbf{x}_t, t\right)\mathbf{f}_t^{\cdot};\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \tag{1.14}$$

где сохранены все обозначения формулы (1.10), но коррелированное возмущение $\mathbf{r}_t$ заменено на белошумное $\mathbf{f}_t^{\cdot}$.

Необходимо отметить, что белошумный процесс является обобщенным случайным процессом, имеющим бесконечную дисперсию. Поэтому обращаться с этим процессом нужно с большой осторожностью, придавая точный математический смысл преобразованиям, включающим белошумный процесс. Далее будет показано, что система уравнений (1.14) с белошумным возмущением может рассматриваться в различных математических смыслах, приводящихся друг к другу, например, в смысле Ито или в смысле Стратоновича, которые наиболее употребимы в литературе. При этом систему уравнений вида (1.14) часто бывает удобно приводить к форме Ито при проведении аналитических вычислений. В то же время формой адекватной математическому описанию конкретных физических или технических систем является форма Стратоновича. Поскольку эти формы приводятся друг к другу, то возможно их разумное сочетание при математическом моделировании динамических стохастических систем.

Рассуждения о соответствии частотных свойств случайного возмущения и частотных характеристик динамического объекта, приведенные выше, носили чисто качественный характер из-за большой общности рассматриваемых моделей. Если теперь из всего множества моделей (1.10)-(1.14) выделить класс линейных моделей, то эти качественные соображения можно перевести в количественные оценки. Проделаем это.

Пусть система (1.10) линейна и стационарна так, что:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma r_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0);\ y_t = \mathbf{h}^T\mathbf{x_t}, \tag{1.15}$$

где y_t–скалярный выходной процесс; $A,\ B,\ \Sigma,\ \mathbf{h}$–постоянные матрицы соответствующих размеров; матрица A–гурвицева.

Система уравнений (1.15) может быть представлена в эквивалентной операторной форме. Тогда чисто случайная составляющая решения уравнения (1.15) в операторной форме примет вид:

$$\overset{\circ}{y}_t = H_r(D) r_t, \tag{1.16}$$

где $D \overset{def}{=} \frac{d}{dt}$–оператор дифференцирования; $H_r(D) = \mathbf{h}^T(DI - A)^{-1}\Sigma = \frac{\Sigma(D)}{A(D)}$–передаточный оператор от возмущения r_t к выходу y_t; $A(D), \Sigma(D)$–полиноминальные операторы; $A(p) = det(pI - A)$–гурвицев полином.

В силу устойчивости системы (1.15) и стационарности возмущения r_t процесс $\overset{\circ}{y}_t$ является асимптотически стационарным и обладающим следующей спектральной плотностью:

$$S_y(\omega) = \mid H_r(j\omega) \mid^2 S_r(\omega),$$

где $S_r(\omega)$–спектральная плотность возмущения r_t.

Определим количественные характеристики полосы пропускания системы (1.16) и полосы равномерности спектра процесса r_t.

Под полосой пропускания системы (1.16) будем понимать полосу частот, удовлетворяющую условию:

$$\Omega_{syst} = \{\omega : 0 \le \omega \le \bar{\omega}_{syst}\},$$

где $\bar{\omega}_{syst} = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} \left\{ \omega : \frac{k_s^2}{\omega} \int\limits_0^{\omega} | \; H_r\,(ju) \; |^2 \, du \; \le | \; H_r(j\omega) \; |^2 \right\}$ при некотором $k_s = 0.1 \div 0.3$.

Коэффициент k_s задает относительный пороговый уровень амплитудно-частотной характеристики системы $|H_r(j\omega)|$ по отношению к ее среднему значению, что означает гашение сигналов системой (1.16) в частотном диапазоне $\omega > \bar{\omega}_{syst}$ не менее чем в k_s раз по отношению к среднему гашению в полосе частот Ω_{syst}.

Полосой частот равномерности спектра процесса r_t будем называть следующую полосу частот:

$$\Omega_r = \{\omega : 0 \le \omega \le \bar{\omega}_r\},$$

где $\bar{\omega}_r = \underset{\omega^{'},\omega^{''}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \omega : \max_{\omega^{'} < \omega^{''}} \; | \; S_r(\omega^{'}) - S_r(\omega^{''}) \; | \le k_r \; \max\left\{ S_r(\omega^{'}), S_r(\omega^{''}) \right\} \right\}$ при некотором $k_r = 0.05 \div 0.2$.

Коэффициент k_r задает относительный пороговый уровень равномерности спектральной плотности $S_r(\omega)$ процесса r_t. В диапазоне частот Ω_r спектральная плотность $S_r(\omega)$ изменяется в пределах $k_r \cdot 100\%$ от своих значений, что позволяет приближенно считать ее константой в этом диапазоне.

Рассмотрим теперь два характерных случая, часто встречающихся в приложениях.

1. Полоса пропускания системы (1.16) Ω_{syst} значительно у́же полосы частот Ω_r равномерности спектра процесса r_t :

$$\Omega_{syst} \subset \Omega_r. \tag{1.17}$$

В этом случае процесс r_t может считаться широкополосным по отношению к системе (1.16), что соответствует гипотезе его белошумности в системе (1.15) или (1.16). Необходимо отметить, что белошумная аппроксимация процесса r_t в данном случае тесно связана со свойствами самой системы.

Для одной системы процесс r_t может считаться белошумным, а по отношению к другой тот же процесс r_t будет уже небелошумным.

В рассмотренном случае $r_t = \dot{f_t}$–белый шум и система уравнений (1.15) запишется в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}_t + Bu(t) + \Sigma \dot{f_t}; \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \ y_t = \mathbf{h}^T \mathbf{x}_t, \tag{1.18}$$

что соответствует частному случаю универсальной модели (1.14).

2. Полоса пропускания системы (1.16) не у́же полосы Ω_r частот равномерности спектра процесса r_t :

$$\Omega_{syst} \supset \Omega_r. \tag{1.19}$$

В этом случае процесс r_t является узкополосным по отношению к системе (1.16) и учет его "цветности"обязателен. Спектральную плотность $S_r(\omega)$ можно представить или аппроксимировать в этом случае дробно-рациональной функцией вида (1.12), а процесс r_t считать выходом формирующего фильтра (1.13). Совокупность уравнений (1.15), (1.13) является системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с белошумным процессом в правой части.

1.4 Примеры стохастических моделей физических и технических систем

Рассмотрим ряд характерных физических и технических систем, адекватными моделями математического описания которых являются стохастические дифференциальные уравнения.

1.4.1 Стохастическая модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста

В 20-х годах техника физического эксперимента достигла настолько высокого уровня, что флуктуационный предел чувствительности электроизмерительных приборов оказался легко достижимым. В 1928 г. Найквист дал количественную характеристику тепловых электрических флуктуаций в цепях, установив равномерность спектра их колебаний, т.е. белошумность, а также зависимость их интенсивности от температуры. Аналогичный результат имеет место и для флуктуаций мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе, т.е., по существу, для характеристик броуновского движения. Опишем эти результаты, придерживаясь их изложения в работах [10] и [11].

Рассмотрим линейное по оси x движение частицы массой m_0, взвешенной в жидкости или газе. Будем предполагать, что эта частица находится под действием случайных стационарных сил взаимодействия с молекулами окружающей среды f_t, упругой возвращающей силы $-cx_t$ и вязкого трения $-\alpha\,\dot{x}_t$. Уравнение движения частицы запишется тогда в виде:

$$m_0\ddot{x}_t + \alpha\dot{x}_t + cx_t = f_t,$$

где f_t-стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S_f(\omega)$:

$$S_f(\omega) \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

где $R_f(\tau)-$ корреляционная функция процесса f_t.

Нетрудно показать, что спектральная плотность $S_v(\omega)$ установившегося процесса $v_t \stackrel{def}{=} \dot{x}_t$ определяется по формуле:

$$S_v(\omega) = \frac{\omega^2 S_f(\omega)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 m_0^2 + \alpha\omega^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{c}{m_0}$.

В соответствии с постулатом молекулярной физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, можно написать следующее уравнение для средней кинетической энергии частицы:

$$\frac{kT}{2} = \mathsf{M}\left\{\frac{m_0 v_t^2}{2}\right\} = \frac{m_0}{2}\mathsf{M}\left\{v_t^2\right\} = \frac{m_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2 S_f(\omega)d\omega}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 m_0^2 + \alpha\omega^2}, \qquad (1.20)$$

где T-абсолютная температура среды в градусах; $k = 1.38\cdot 10^{-23}\frac{\text{дж}}{\text{град}}$-постоянная Больцмана.

Сделав в правой части (1.20) замену переменных: $z = \frac{\omega}{\omega_0}$, преобразуем уравнение (1.20) к виду:

$$kT = \frac{1}{\pi\sqrt{m_0 c}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{S_f(\omega_0 z)dz}{\left(z-z^{-1}\right)^2+\gamma^2},$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{m_0 c}}$.

Учитывая, что:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\left(z - z^{-1}\right)^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

и то, что функция $\frac{1}{\left(z-z^{-1}\right)^2+\gamma^2}$ является δ-образной в окрестности $z = 1$, из (1.20) при $\gamma << 1$ получаем формулу Найквиста [12]:

$$S_f(\omega) = 2kT\alpha. \tag{1.21}$$

Непосредственной подстановкой (1.21) в (1.20) нетрудно проверить, что $S_f(\omega) = 2kT\alpha$ является решением уравнения (1.20) и в общем случае, а не только при $\gamma << 1$.

Таким образом, согласно формуле Найквиста процесс внешнего воздействия на рассматриваемую частицу со стороны окружающей среды является белошумным процессом с интенсивностью $2kT\alpha$.

1.4.2 Автоколебательная электрическая система (ламповый генератор)

Рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, упрощенная принципиальная схема которого изображена на рисунке 1.1 [13]. На схеме не изображены, но подразумеваются постоянное сеточное смещение и анодное напряжение. В автоколебательной системе, изображенной на рисунке 1.1, мгновенное значение анодного тока I_a вследствие дробовых флуктуаций отличается от среднего тока I_a^* на случайную величину $I_f(t)$ (флуктуационная компонента анодного тока). Если пренебречь реакцией анодной нагрузки ($D = 0$) и сеточным током ($I_c = 0$), то можно получить [13] следующее уравнение колебаний рассматриваемой автоколебательной системы:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0 \left(1 - \frac{4\dot{x}^2}{3\omega_0^2 A_0^2}\right) \dot{x} + \omega_0^2 \varepsilon \xi(t). \tag{1.22}$$

В (1.22) введены следующие обозначения:

1. $x = \omega_0 M \left(I - I_=\right)$, где M-индуктивная связка, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $I_=$-постоянная составляющая анодного тока, I- ток индуктивной ветви контура,

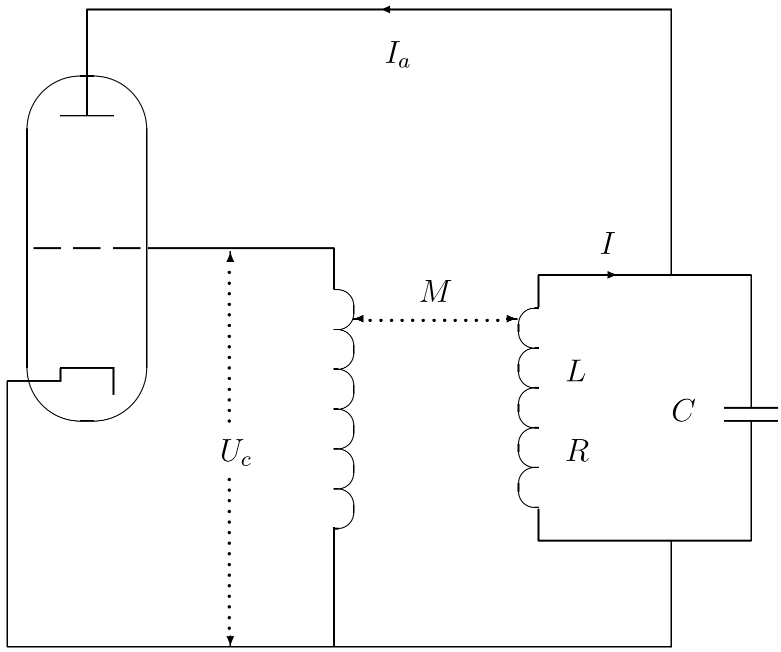

Рис. 1.1: Ламповый генератор.

2. $\varepsilon = \omega_0(MS - RC)$—малый параметр, где S—крутизна характеристики лампы $F(U) \stackrel{def}{=} I_a^*$, которая, например, может иметь следующий вид:

$$F(U) = I_= + SU - \frac{\gamma}{3}U^3,$$

где $U = U_c + DU_a$ (D-коэффициент проницаемости, в нашем случае $D = 0$), γ— параметр,

3. U_a-анодное напряжение; U_c-сеточное напряжение, которое, в пренебрежении сеточным током I_c, имеет вид:

$$U_c = M\ \dot{I},$$

4. $A_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega_0 M\gamma}}$—амплитуда колебаний сеточного напряжения,

5. $\xi(t) = \frac{\omega_0 M}{\varepsilon} I_f(t)$— случайная функция, происхождение которой обусловлено дробовыми флуктуациями анодного тока:

$$I_a = F(U) + I_f(t),$$

6. $\varepsilon\xi(t)$—флуктуационный член.

Важно отметить, что происхождение флуктуационного члена $\varepsilon\xi(t)$ может обуславливаться не дробовыми флуктуациями анодного тока, а внешними шумами. Введем внешнее воздействие $u_k(t)$ в индуктивную ветвь контура. Тогда случайная функция $\xi(t)$ будет иметь вид [13]:

$$\xi(t) = \frac{\omega_0 MC\dot{u}_k(t)}{\varepsilon}.$$

Введем предположение о малости времени корреляции τ_{cor} случайной функции $\xi(t)$. Время корреляции τ_{cor} сравнивается с временем релаксации амплитуды, которое по порядку величины равно $\frac{1}{\omega_0\varepsilon}$ [13]. Потребуем выполнения неравенства:

$$\tau_{cor} << \frac{1}{\omega_0\varepsilon}.$$

Это условие означает, что воздействующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что выполняется во многих практических случаях. В предположении об отсутствии корреляции моментов пролета различных электронов или в предположении о кратковременности этих корреляций корреляционная функция флуктуационной составляющей анодного тока имеет $\delta-$образный вид [13]:

$$R_{I_{cor}}(t,\tau) = \Gamma^2 e I_a^* \delta(t-\tau), \tag{1.23}$$

где Γ^2-коэффициент депрессии дробового шума, e- заряд электрона. Пользуясь соотношением (1.23) находим корреляционную функцию и спектральную плотность величины $\xi(t)$:

$$R_\xi(\tau) = \Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2 \delta(\tau),$$

$$S_\xi(\omega) = 2\Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2.$$

Это означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является белым шумом, действующим на рассматриваемую систему, поскольку $\xi(t)$ имеет $\delta-$образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность.

1.4.3 Чандлеровские колебания

Хорошо известно, что с течением времени мгновенная ось вращения Земли постоянно меняет свое положение по отношению к малой оси земного эллипсоида. Эти колебания полюса вокруг условного полюса вращения, принятого Международной Службой Широты, имеют составляющие св 1 год и 14 месяцев. Составляющая этих колебаний, имеющая период приблизительно в 435 дней называется чандлеровским колебанием. Это колебание не является в точности периодическим. Его существование было предсказано еще Эйлером в 1765г. Однако он рассматривал колебания положения полюса на основе свободной нутации твердого тела. В результате он получил, что период указанных блужданий составляет 305 дней, что не соответствует многочисленным экспериментальным данным. Чандлер в 1891г. предположил, что движение полюса имеет две составляющие с периодами 1 год и 428 дней соответственно, что соответствует современным представлениям о проблеме чандлеровских колебаний.

На рис.1.2 и 1.3, которые взяты из книги [14], изображены движения полюса относительно своего среднего значения в периоды с 1900 по 1912 годы (по Ванаху) и с 1900 по 1970 годы (по данным Международной Службы Широты).

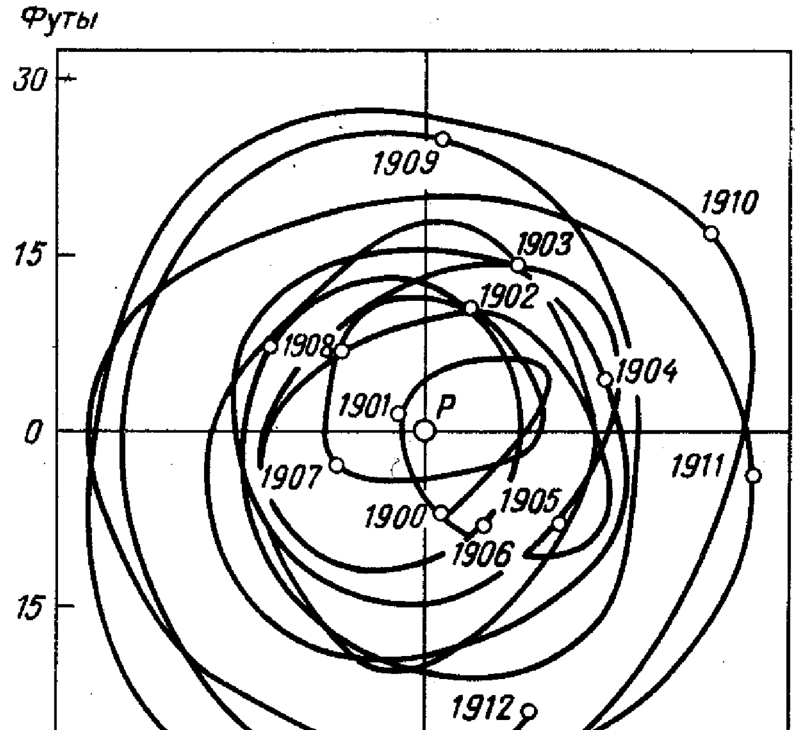

Рис.1.2. Движение Северного полюса относительно своего среднего положения (данные по Ванаху за 1900-1912 гг.). Маленькими кружками около дат обозначено положение полюса в начале каждого года.

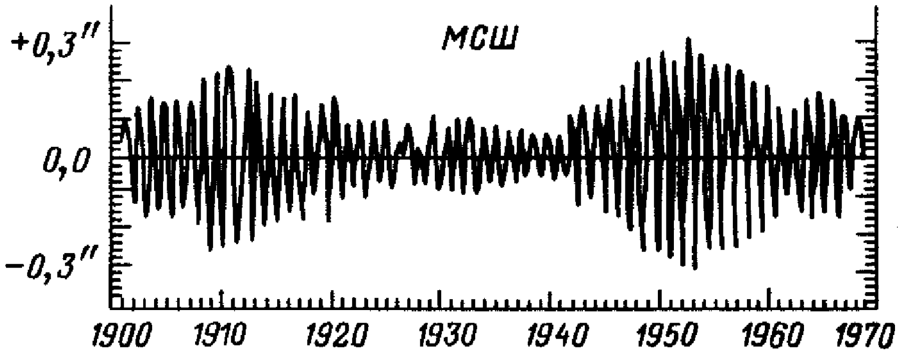

Рис.1.3. Изменения амплитуды чандлеровского колебания (с 1900 по 1970 гг.) по данным Международной Службы Широты.

Рассмотрим математическую модель чандлеровских колебаний, предложенную Колмогоровым в 1960г. (Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. [16], 1962):

$$d\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + d\begin{bmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{bmatrix}, \tag{1.24}$$

где $x_t,\ y_t \in \Re^1$—случайные процессы, описывающие положение полюса; λ-затухание, а ω-частота чандлеровского колебания; ϕ_t и ψ_t-процессы возбуждения; $d\phi_t,\ d\psi_t$-описывают изменение тензора инерции Земли во временном интервале $[t, t+dt]$.

Оказывается, что ряд экспериментальных данных (Орлов [15], 1958) свидетельствует в пользу того, что значения $d\phi_t$ и $d\psi_t$ в периоды времени, разделенные несколькими годами, практически независимы. В настоящее время принято, что наилучшая оценка периода чандлеровских колебаний составляет 435 дней. Предположение о нормальном распределении этой оценки (Колмогоров, 1966) и линейном затухании ковариационной функции, приводит к тому, что время релаксации составляет 15-30 лет. Этот промежуток времени является много большим, чем промежутки в несколько лет, на которых значения чандлеровских колебаний являются независимыми. Поэтому случайные процессы $\dot{\phi}_t$ и $\dot{\psi}_t$ являются широкополосными по отношению к полосе пропускания системы (1.24) и следовательно могут считаться гауссовскими белыми шумами.

1.4.4 Стохастические модели химической кинетики и модели регуляции численности конкурирующих видов

В 1951г. Б.П.Белоусовым была экспериментально открыта колебательная химическая реакция в гомогенной системе. Результаты его исследований были опубликованы несколько позже в работе [20]. После этого было открыто достаточно много различных колебательных реакций [21], [22]. Для исследования этих химических реакций предлагались различные математические модели. В частности, в 1920г. Лотка [18] предложил гипотетическую химическую реакцию, в которой возможны колебания концентраций реагирующих веществ. Уравнения этой реакции имеют вид:

$$\dot{x}(t) = k_1 x(t) + a_1 x(t) y(t), \tag{1.25}$$

$$\dot{y}(t) = k_2 y(t) + a_2 x(t) y(t), \tag{1.26}$$

где $x(t)$ и $y(t)$-концентрации реагирующих веществ, $k_1,\ k_2,\ a_1,\ a_2-$ постоянные. Аналогичная модель в дальнейшем была использована Вольтерра для объяснения численности конкурирующих видов животных. При этом $x(t)$ и $y(t)$-численности двух конкурирующих видов, $k_1,\ k_2-$коэффициенты роста, а a_1 и a_2-коэффициенты гибели.

Предположим, что параметры роста k_1 и k_2 или соответствующие коэффициенты колебательной химической реакции имеют случайную составляющую, т.е. могут быть представлены в виде:

$$k_1(t) = k_1' + \sigma_1 \xi^{(1)}(t)$$

$$k_2(t) = k_2' + \sigma_1 \xi^{(2)}(t),$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2,\ k_1',\ k_2'-$постоянные, а $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)-$случайные процессы, которые при определенных условиях течения химических реакций или при определенных условиях проживания конкурирующих видов могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами. Таким образом в стохастическом варианте модель (1.25), (1.26) примет вид:

$$\dot{x}(t) = (k_1' + a_1 y(t)) x(t) + \sigma_1 x(t) \xi^{(1)}(t), \tag{1.27}$$

$$\dot{y}(t) = (k_2' + a_2 x(t)) y(t) + \sigma_2 y(t) \xi^{(2)}(t). \tag{1.28}$$

Более общая модель, получившая название модели Лотки-Вольтерра [19] имеет вид:

$$\dot{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t)\left(\gamma_i + \sum_{j=1}^{m} \nu_{ij} x^{(j)}(t)\right) \tag{1.29}$$

или в стохастическом варианте

$$\dot{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t)\left(\gamma_i^{'} + \sum_{j=1}^{m} \nu_{ij} x^{(j)}(t)\right) + \sigma_i x^{(i)} \xi^{(i)}(t), \tag{1.30}$$

где $x^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)-$численность i-й популяции или концентрация i-го вещества. Оправданность стохастических моделей вида (1.27), (1.28) и (1.30), в частности, для колебательных химических реакций заключается в том, что для химических реакций, протекающих в протяженных объемах, существенную роль играет диффузия веществ. Если же для описания такой химической реакции выбрана модель типа (1.25), (1.26), то ясно, что явление диффузии не будет в ней учитываться, поскольку в системе двух уравнений первого порядка возможны только периодические колебания.

1.4.5 Модели финансовой математики

Проблема рационального назначения премии за опцион является одной из наиболее сложных в теории фондового рынка. Хорошо известно [23], что эффективность безрисковых вложений определяется постоянной силой роста δ, так что цена вклада $S_0(t)$ определяется следующим уравнением

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = \delta dt. \tag{1.31}$$

Однако, эффективность вклада в акции (или любые ценные бумаги, на которые выпускается опцион) случайна [23], и цена акции S_t удовлетворяет скалярному стохастическому дифференциальному уравнению Ито (см. параграф 1.5) вида:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t df_t, \tag{1.32}$$

где $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс.

1.4.6 Солнечная активность

Систематические наблюдения за солнечной активностью начались с 1610г. Многочисленные наблюдения свидетельствуют в пользу того, что солнечная активность, измеряемая количеством солнечных пятен и групп пятен, ведет себя как случайный процесс с систематической осцилляцией с периодом приблизительно в 11 лет [24]. В настоящее время не существует теоретических оснований для объяснения этой 11 летней периодичности. На рис.1.4, который взят из книги [14], изображена зависимость количества солнечных пятен от времени, которая известна под названием чисел Вольфера.

В книге М. Арато [14] предложена непрерывная математическая модель солнечной активности. Эта модель, без учета среднего значения солнечной активности, представляет собой следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \tag{1.33}$$

где x_t-количество солнечных пятен, $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс; $a_1,\ a_2, c$-постоянные.

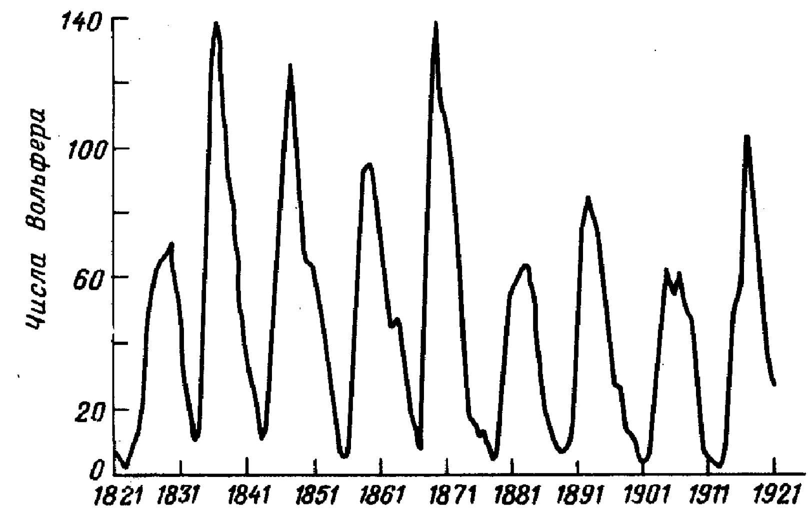

Рис.1.4. Годичная солнечная активность (числа Вольфера означают число солнечных пятен.)

1.5 Стохастические дифференциальные уравнения

В этом параграфе придадим строгий математический смысл понятию стохастического дифференциального уравнения.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и измеримый при всех $t \in [0,T]$ стандартный винеровский случайный процесс $f_t \in \Re^1$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$dx_t = a(x_t,t)dt + \sigma(x_t,t)df_t;\ x_0 = x(0,\omega), \tag{1.34}$$

где $x_t \in \Re^1$–случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.34); $a(x_t,t)$ и $\sigma(x_t,t) \in \Re^1$–измеримые при всех $(x,t) \in \Re^1 \times [0,T]$ случайные процессы. Уравнение (1.34) может быть переписано в интегральном виде:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau,\tau)d\tau + \int_0^t \sigma(x_\tau,\tau)df_\tau;\ x_0 = x(0,\omega). \tag{1.35}$$

Второй интеграл в правой части (1.35) может пониматься, например, в смысле Ито или Стратоновича. Пусть интеграл $\int_0^t \sigma(x_\tau,\tau)df_\tau$ является стохастическим интегралом Ито, тогда уравнение (1.34) и соответствующее ему уравнение (1.35) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Если же интегал $\int_0^t \sigma(x_\tau,\tau)df_\tau$ является стохастическим интегралом Стратоновича (ранее для него было введено специальное обозначение: $\overset{*}{\int\limits_0^t} \sigma(x_\tau,\tau)df_\tau$), то уравнение (1.34) и соответствующее ему уравнение (1.35) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (1.34). Будем далее предполагать, что x_0 и $f_t - f_0$ при $t > t_0$ являются стохастически независимыми.

Будем говорить, что случайный процесс $x_t \in \Re^1$ является решением уравнения Ито (1.34), если x_t измерим при всех $t \in [0,T]$, интегралы в правой части (1.35) существуют и равенство (1.35) имеет место при всех $t \in [0,T]$ с вероятностью 1.

В частности в [3] показано, что если выполнены условия:

1. $a(x_t,t)$ и $\sigma(x_t,t) \in \Re^1$–измеримые при всех $(x,t) \in \Re^1 \times [0,T]$ случайные процессы,

2. для всех $x,y \in \Re^1$ существует такая постоянная $K < \infty$, что:

$$\mid a(x,t) - a(y,t) \mid + \mid \sigma(x,t) - \sigma(y,t) \mid \le K \mid x - y \mid,$$

и
$$| a(x,t) |^2 + | \sigma(x,t) |^2 \leq K^2 \left(1 + | x |^2\right),$$

3. $\mathsf{M}\left\{| x_0 |^2\right\} < \infty,$
то существует решение уравнения (1.35) и если x_{1_t}, x_{2_t}-два непрерывных решения при фиксированном x_0, то

$$\mathsf{P}\left\{x_{1_t} = x_{2_t}\right\} = 1,\ \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T} | x_{1_t} - x_{2_t} |> 0\right\} = 0.$$

Кроме этого решение уравнения (1.35) непрерывно с вероятностью 1.

Перейдем теперь к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{1.36}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$-случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.36); $\mathbf{f}_t \in \Re^m$-стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $\mathbf{a} : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, $\Sigma : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times m}$; $\mathbf{x}_0$-начальное условие.

Уравнение (1.36) эквивалентно уравнению:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{1.37}$$

Будем далее предполагать, что $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > t_0$ являются стохастически независимыми.

Аналогично одномерному случаю будем говорить, что случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ является решением уравнения Ито (1.37), если каждая компонента $\mathbf{x}_t$ измерима при всех $t \in [0,T]$, интегралы в правой части (1.37) существуют и равенство (1.37) имеет место при всех $t \in [0,T]$ с вероятностью 1.

В [3] показано, что при выполнении следующих условий:

*A*1. $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \Re^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in \Re^{n\times m}$–измеримые при всех $(x,t) \in \Re^n \times [0,T]$ случайные процессы,

*A*2. для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^n$ существует такая постоянная $K < \infty$, что:

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t) | + \sum_{k=1}^m | \Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t) |\leq K | \mathbf{x} - \mathbf{y} |$$

и

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) |^2 + \sum_{k=1}^{m} | \Sigma_k(\mathbf{x}, t) |^2 \leq K^2 \left(1 + | \mathbf{x} |^2\right),$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)$-$k$-ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)$,

$A3$. $\mathsf{M}\left\{| \mathbf{x}_0 |^2\right\} < \infty$

существует единственное, в смысле стохастической эквивалентности, и непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.37).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)d^* f_t;\ x_0 = x(0, \omega), \tag{1.38}$$

где $x_t \in \Re^1$−случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.38); $a(x_t, t)$ и $\sigma(x_t, t) \in \Re^1$−измеримые при всех $(x, t) \in \Re^1 \times [0, T]$ случайные процессы; обозначение $d^* f_t$ указывает на то, что уравнение (1.38) является стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича.

Уравнение (1.38) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau)d\tau + \overset{*}{\int_0^t} \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau;\ x_0 = x(0, \omega). \tag{1.39}$$

В многомерном случае стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega)$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \overset{*}{\int_0^t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.36) и (1.37).

Далее будет рассматриваться вопрос о связи стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича, который изложен, например, в [38].

1.6 Формула Ито

Рассмотрим правило вычисления стохастического дифференциала от процесса, который задается нелинейным безынерционным преобразованием от решения стохастического дифференциального уравнения Ито. Это правило носит название формулы Ито.

Рассмотрим процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, а $\mathbf{x}_t$– решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида (1.36).

Сформулируем утверждение о формуле Ито в интегральной форме.

Лемма 1.1 (Формула Ито) *Пусть выполнены условия:*

1° *Частные производные* $\frac{\partial}{\partial t}R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}R(\mathbf{x}, t)$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *существуют и непрерывны на* $\Re^n \times [0, T]$.

2° *Функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ *и процессы* $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}_t, t)$ *таковы, что для процессов* $L\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ *и* $G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$; $i = 1, \ldots, m$ *выполнены условия теоремы 1.1 на промежутке* $[t, s] \subset [0, T]$.

Тогда для всех $s, t \in [0, T]$ *таких, что* $s \geq t$ *справедливо с вероятностью 1 равенство*

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s L\left\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\right\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)}\left\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\right\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

где интегралы существуют в среднеквадратическом смысле,

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t)\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)}\partial \mathbf{x}^{(i)}},$$

$$G_0^{(i)}\{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}};\ i = 1, \ldots, m$$

Подробнее по поводу формулы Ито см. например [3], [38].

1.7 Связь стохастических интегралов и уравнений Ито и Стратоновича

В [38], в частности, показано, что для измеримого при всех $t \in [t_0, t]$, непрерывного в среднеквадратическом смысле на промежутке $[t_0, t]$ случайного процесса ξ_τ, для которого $\mathsf{M}\{\mid \xi_\tau \mid^{2n}\} < \infty$ $\forall \tau \in [t_0, t]$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\} \leq (t - t_0)^{n-1}\left(n(2n-1)\right)^n \int_{t_0}^t \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\} d\tau, \qquad (1.40)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int_{t_0}^{t}\xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\} \leq (t-t_0)^{2n-1}\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\}d\tau, \tag{1.41}$$

где $f_\tau \in \Re^1-$стандартный винеровский процесс, $n \in \mathcal{N}$.

Лемма 1.2 *Пусть процесс Ито $\eta_\tau \in \Re^1$ определен при $\tau \in [t, T]$ и имеет вид:*

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s d\mathbf{w}_s^{(i)}, \tag{1.42}$$

где процессы $a_s,\ b_s$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 на промежутке $[t, T]$ и при всех $s,\ \tau \in [t, T]$ и некоторых положительных $C,\ \gamma < \infty$ удовлетворяют условиям:

$$\mathsf{M}\left\{a_s^4\right\} \leq \infty, \quad \mathsf{M}\left\{b_s^4\right\} \leq \infty, \tag{1.43}$$

$$\mathsf{M}\left\{(b_s - b_\tau)^4\right\} \leq C \mid s-\tau \mid^\gamma, \tag{1.44}$$

где $\mathbf{w}_s^{(i)} = \mathbf{f}_s^{(i)}$ при $i = 1, 2$ и $\mathbf{w}_s^{(0)} = s\ \forall s \in [t, T]$. Тогда выполнено с вероятностью 1 следующее равенство:

$$\int\limits_t^{*T}\eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)} = \int_t^T \eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}}\int_t^T b_s ds, \tag{1.45}$$

где $i,\ j = 0,\ 1,\ 2;$ $\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} = 1$ при $i = j \neq 0$ и $\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} = 0$ иначе; $\mathbf{f}_t^{(1)},\ \mathbf{f}_t^{(2)} \in \Re^1$- независимые винеровские процессы; $\int\limits_t^{*T}\eta_s d\mathbf{w}_s^{(0)} \stackrel{def}{=} \int_t^T \eta_s ds$.

Доказательство: Представим с вероятностью 1 интегральную сумму для стохастического интеграла $\int\limits_t^{*T}\eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)}$ с помощью (1.42) в виде:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\eta_{\tau_k'}\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1}\eta_{\tau_k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\eta_{\tau_k'} - \eta_{\tau_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\eta_{\tau_k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{w}_s^{(i)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_k'} a_s ds\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)}, \tag{1.46}$$

где $\tau_k' = \tau_k + \frac{1}{2}\Delta\tau_k$, $\Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} = \mathbf{w}_{\tau_{k+1}}^{(j)} - \mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)}$, $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Рассмотрим сначала случай, когда $i \neq 0,\ j \neq 0$. Тогда первое слагаемое в правой части (1.46) имеет с вероятностью 1 своим среднеквадратическим пределом при $\Delta_N \to 0$, $N \to \infty$ интеграл Ито $\int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(j)}$. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (1.46) при $i \neq 0$; $j \neq 0$. С вероятностью 1 имеем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{f}_s^{(i)} \Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} (b_s - b_{\tau_k}) d\mathbf{f}_s^{(i)} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} b_{\tau_k} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right) \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{f}_s^{(i)} \left(\mathbf{f}_{\tau_{k+1}}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)}\right). \qquad (1.47)$$

Нетрудно видеть, что третье слагаемое в правой части (1.47) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N \to 0$, $N \to \infty$. Рассмотрим первое слагаемое в правой части (1.47). С использованием неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} (b_s - b_{\tau_k}) d\mathbf{f}_s^{(i)} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathsf{M}\left\{\left(\int_{\tau_k}^{\tau_k'} (b_s - b_{\tau_k}) d\mathbf{f}_s^{(i)}\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

Далее используя неравенство (1.40) при $n = 2$ и условие (1.44), а также соотношение $\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\} = 3\left(\tau_k' - \tau_k\right)^2$ получаем, что среднеквадратический предел при $\Delta_N \to 0$, $N \to \infty$ первого слагаемого в правой части (1.47) с вероятностью 1 равен нулю. Нетрудно видеть, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{N-1} b_{\tau_k} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right) \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим теперь случай $i = j$. С использованием неравенства $(a + b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$ получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_{\tau_k} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2 - \frac{1}{2}\int_t^T b_s ds\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(b_{\tau_k}\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)-\frac{1}{2}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}(b_s-b_{\tau_k})\,ds\right)\right)^2\right\} \le$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{b_{\tau_k}^2\right\}\mathsf{M}\left\{\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}(b_s-b_{\tau_k})\,ds\right)^2\right\}. \tag{1.48}$$

Поскольку $\mathsf{M}\left\{b_{\tau_k}^2\right\} < \infty$ и

$$\mathsf{M}\left\{\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)^2\right\} = 3\left(\tau_k'-\tau_k\right)^2+\frac{1}{4}\left(\Delta\tau_k\right)^2,$$

то первое слагаемое в правой части (1.48) имеет нулевой предел при $\Delta_N \to 0,\ N\to\infty$. В силу неравенства Минковского и условия (1.44) второе слагаемое в правой части (1.48) также имеет нулевой предел при $\Delta_N \to 0$, $N\to\infty$. Таким образом с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{N-1}b_{\tau_k}\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\ne 0\}}\int_t^T b_s ds.$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в правой части (1.46). С использованием неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_k'}a_s ds\Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^2\right\} \le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int_{\tau_k}^{\tau_k'}a_s ds\right)^4\right\}\right)^{1/4}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\}\right)^{1/4}\right)^2.$$

Из последнего неравенства и неравенства (1.41) $n=2$ заключаем, что третье слагаемое в правой части (1.46) имеет нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Таким образом лемма доказана для $i\ne 0,\ j\ne 0$.

Если $i=0$ или $j=0$, то доказательство леммы существенно упрощается. Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о связи стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича.

Пусть стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)d^* f_t;\; x_0 = x(0, \omega), \tag{1.49}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.38).

Пусть условия леммы 1.1 выполнены для случайного процесса $\sigma(x_t, t)$ и функции $\sigma(x, t)$. Тогда для случайного процесса $\sigma(x_t, t)$ справедлива с вероятностью 1 формула Ито:

$$\sigma(x_s, s) = \sigma(x_t, t) + \int_t^s L\left\{\sigma(x_\tau, \tau)\right\} d\tau + \int_t^s \sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \tag{1.50}$$

где дифференциальный оператор $L\left\{\cdot\right\}$ имеет вид:

$$L\left\{\cdot\right\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial\tau} + a(x, \tau)\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, \tau)\frac{\partial^2\left\{\cdot\right\}}{\partial x^2}.$$

Таким образом случайный процесс $\sigma(x_t, t)$ является процессом Ито с коэффициентом сноса $L\left\{\sigma(x_\tau, \tau)\right\}$ и коэффициентом диффузии

$$\sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x}.$$

Пусть эти коэффициенты диффузии и сноса удовлетворяют условиям леммы 1.2. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$\overset{*}{\int_0^t} \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau = \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x}d\tau. \tag{1.51}$$

Согласно (1.51) можно перейти от стохастического дифференциального уравнения Стратоновича к соответствующему ему стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx_t = a^*(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t;\; x_0 = x(0, \omega), \tag{1.52}$$

где

$$a^*(x_t, t) = a(x_t, t) + \frac{1}{2}\sigma(x_t, t)\frac{\partial\sigma(x_t, t)}{\partial x}.$$

Если функции $a^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения уравнения Ито (1.52), то существует единственное, в смысле стохастической эквивалентности, решение стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (1.49).

Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega) \tag{1.53}$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int\limits_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Обобщая (1.51) на многомерный случай с вероятностью 1 получим:

$$\int\limits_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau = \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}_\tau, \tau)\frac{\partial \Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}d\tau,$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}, \tau)$-$k$-ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, \tau)$.

Таким образом, стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича вида (1.53) соответствует стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1.54}$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Sigma_k(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}.$$

Если матричные функции $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t)$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.54), то и соответствующее ему стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.53) имеет единственное, в смысле стохастической эквивалентности, решение.

1.8 О некорректности применимости численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям

В этом параграфе поясним, на примере численных методов, основанных на разложении Тейлора, почему формальное использование численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений является некорректным для стохастических дифференциальных уравнений.

Отметим, что достаточно большое количество численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений строятся с помощью разложения Тейлора. К этим методам можно отнести методы, являющиеся непосредственно отрезками ряда Тейлора на дискретной временной сетке, конечно-разностные методы типа Рунге-Кутта, всевозможные многошаговые численные методы, строящиеся с использованием формулы Тейлора.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t) + b(x_t, t) f_t^{\cdot}, \tag{1.55}$$

где $x_t \in \Re^1$-решение уравнения (1.55); $a : \Re^1 \times [0, T] \to \Re^1$, $b : \Re^1 \times [0, T] \to \Re^1$; $f_t^{\cdot}$-гауссовский белошумный случайный процесс.

Запишем уравнение (1.55) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t, \tag{1.56}$$

где $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс.

Попробуем применить идеологию численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям (1.55), (1.56). Согласно формуле Тейлора при $s > t$ имеем:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt}(s-t) + \frac{d^2x_t}{dt^2}\frac{(s-t)^2}{2} + O\left((s-t)^3\right), \tag{1.57}$$

где запись $\xi_t = O\left((s-t)^\gamma\right)$ понимается следующим образом:

$$\lim_{s \to t} \frac{\sqrt{\mathsf{M}\left\{\xi_t^2\right\}}}{(s-t)^\gamma} = C = const < \infty.$$

Используя (1.55) и (1.57) получаем:

$$x_s = x_t + a(x_t,t)(s-t) + b(x_t,t)(s-t)f_t^{\cdot} +$$

$$+\frac{d}{dt}\left[a(x_t,t) + b(x_t,t)f_t^{\cdot}\right]\frac{(s-t)^2}{2} + O\left((s-t)^3\right). \tag{1.58}$$

Нетрудно видеть, что правая часть (1.58) неопределена. Это связано с тем, что белый шум $f_t^{\cdot}$ не является дифференцируемым в каком-либо вероятностном смысле случайным процессом, а в правую часть (1.58) входит величина $\frac{d}{dt}f_t^{\cdot}$.

Рассмотрим теперь эту же идеологию в отношении уравнения (1.56). При этом будем использовать для случайных процесов $a(x_t,t)$, $b(x_t,t)$ такие же правила дифференцирования, как и для неслучайных функций, т.е.

$$da(x_t,t) = \frac{\partial a(x_t,t)}{\partial x}dx_t + \frac{\partial a(x_t,t)}{\partial t}dt, \tag{1.59}$$

$$db(x_t,t) = \frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}dx_t + \frac{\partial b(x_t,t)}{\partial t}dt. \tag{1.60}$$

Запишем (1.56), (1.59), (1.60) в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau,\tau)d\tau + \int_t^s b(x_\tau,\tau)df_\tau, \tag{1.61}$$

$$a(x_s,s) = a(x_t,t) + \int_t^s \left[a(x_\tau,\tau)\frac{\partial a(x_\tau,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial a(x_\tau,\tau)}{\partial \tau}\right]d\tau +$$

$$+\int_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial a(x_\tau,\tau)}{\partial x}df_\tau, \tag{1.62}$$

$$b(x_s,s) = b(x_t,t) + \int_t^s \left[a(x_\tau,\tau)\frac{\partial b(x_\tau,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_\tau,\tau)}{\partial \tau}\right]d\tau +$$

$$+\int_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial b(x_\tau,\tau)}{\partial x}df_\tau, \tag{1.63}$$

где $s > t$. Объединяя (1.61)-(1.63) приходим к равенству:

$$x_s = x_t + a(x_t,t)(s-t) + b(x_t,t)\int_t^s df_\tau + b(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}\int_t^s\int_t^\tau df_{\tau_1}df_\tau +$$

$$+\left[a(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}dx_t+\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial t}\right]\int_t^s\int_t^\tau d\tau_1 df_\tau+O\left((s-t)^2\right). \tag{1.64}$$

Поскольку для случайных процессов $a(x_t,t),\ b(x_t,t)$ справедливы, при определенных условиях, отличные от (1.59), (1.60) правила дифференцирования (см. формулу Ито), то разложение решения x_t уравнения (1.56) в окрестности момента времени t будет иметь другой вид, нежели (1.64). Так, по формуле Ито с вероятностью 1 имеем:

$$da(x_t,t)=\left[\frac{\partial a(x_t,t)}{\partial t}+a(x_t,t)\frac{\partial a(x_t,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x_t,t)\frac{\partial^2 a(x_t,t)}{\partial x^2}\right]dt+$$

$$+b(x_t,t)\frac{\partial a(x_t,t)}{\partial x}df_t, \tag{1.65}$$

$$db(x_t,t)=\left[\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial t}+a(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x_t,t)\frac{\partial^2 b(x_t,t)}{\partial x^2}\right]dt+$$

$$+b(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}df_t. \tag{1.66}$$

Записывая (1.65), (1.66) в интегральной форме и подставляя результат в (1.61) приходим с вероятностью 1 к разложению:

$$x_s=x_t+a(x_t,t)(s-t)+b(x_t,t)\int_t^s df_\tau+$$

$$+b(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}\int_t^s\int_t^\tau df_{\tau_1}df_\tau+b(x_t,t)\frac{\partial a(x_t,t)}{\partial x}\int_t^s\int_t^\tau df_{\tau_1}d\tau+$$

$$+\left[\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial t}+a(x_t,t)\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial x}dx_t+\frac{1}{2}b^2(x_t,t)\frac{\partial^2 b(x_t,t)}{\partial x^2}\right]\int_t^s\int_t^\tau d\tau_1 df_\tau+$$

$$+O\left((s-t)^2\right). \tag{1.67}$$

Сопоставляя разложения (1.64) и (1.67) приходим к выводу, что в правой части (1.64) отсутствует часть слагаемых, которые входят в правую часть (1.67). При этом эти слагаемые порядка $O\left((s-t)^{3/2}\right)$.

Таким образом приведенные выше рассуждения показывают, что формальное применение правил дифференцирования для неслучайных функций к случайным процессам приводит либо к неопределенности, либо к неверному результату. При этом ошибка будет уже в членах порядка $O\left((s-t)^{3/2}\right)$.

Литература к главе 1

Boyce W.E.(1978), Kushner J.H.(1977), Гихман И.И., Скороход А.В. (1977), Ширяев А.Н. (1989), Розанов Ю.А. (1963), Стратонович Р.Л.(1966), Bachelier L. (1900), Эйнштейн А., Смолуховсий М.(1936), Андронов А.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С.(1933), Ван-дер-Зил А. (1958), Стратонович Р.Л., Полякова М.С. (1981), Nyquist H. (1928), Стратонович Р.Л.(1961), Arato M. (1982), Орлов А. (1958), Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. (1962), Неймарк Ю.И., Ланда П.С. (1987), Lotka A.J. (1920), Вольтерра В. (1976), Белоусов Б.П. (1959), Жаботинский А.М.(1974), Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. (1984), Первозванский А.А. (1994), Wolf J.R. (1852), Слуцкий Е.Е. (1935), Rössler O.E. (1950), Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E. (1992).

Глава 2

Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

В настоящей главе установлен класс повторных стохастических интегралов для которого справедливы с вероятностью 1 формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с обычными правилами замены порядка интегрирования для повторных римановых интегралов. Приводятся доказательства теорем о замене порядка интегрирования для указанного класса повторных стохастических интегралов, а также рассматривается ряд других свойств повторных стохастических интегралов.

2.1 Повторные стохастические интегралы

venfoot

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и пусть $f_\tau \in \Re^1$–измеримый при всех $\tau \in [t_0, t] \subset [0, T]$ винеровский случайный процесс, ϕ_t–некоторый измеримый при всех $\tau \in [t_0, t] \subset [0, T]$, определенный на промежутке $[t_0, t]$ случайный процесс, а $\psi_l(t);\ l = 1, \ldots, k$ некоторые определенные на промежутке $[t_0, t]$ функции. Рассмотрим в соответствии с (1.7), (1.8) стохастический интеграл $J_{t_0 t}^{(1)} = \int_{t_0}^{t} \phi_\tau dw_\tau^{(0)}$, где $w_\tau^{(0)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(0)} = \tau$. Далее рассмотрим повторный стохастический интеграл $J_{t_0 t}^{(2)} = \int_{t_0}^{t} \psi_1(\tau) J_{t_0 \tau}^{(1)} dw_\tau^{(1)}$, где $w_\tau^{(1)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(1)} = \tau$. Этот интеграл тоже определен в соответствии с (1.7), (1.8). Продолжая этот процесс далее рассмотрим повторный стохастический интеграл $J_{t_0 t}^{(k+1)} = \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) J_{t_0 \tau}^{(k)} dw_\tau^{(k)}$, где $w_\tau^{(k)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(k)} = \tau$, который также определен в соответствии с (1.7), (1.8).

Укажем достаточные условия существования интеграла $J_{t_0t}^{(k+1)}$, $k \ge 1$.

Лемма 2.1 *Пусть случайный процесс* ϕ_t *удовлетворяет условиям теоремы 1.1 на промежутке* $[t_0, t] \subset [0, T]$, *а функции* $\psi_i(t)$; $i = 1, \ldots, k$ - *непрерывны на промежутке* $[t_0, t]$. *Тогда стохастический интеграл* $J_{t_0t}^{(k+1)}$ *существует при всех* $t_0, t: \ 0 \le t_0 \le t \le T$.

Доказательство: Докажем лемму по индукции. Нетрудно видеть, что в условиях леммы 2.1, согласно теореме 1.1, существует при всех $t_0, t: \ 0 \le t_0 \le t \le T$ стохастический интеграл $J_{t_0t}^{(1)}$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для интеграла $J_{t_0t}^{(k)}$. Далее нетрудно проверить, что случайный процесс $\psi_k(\tau)J_{t_0\tau}^{(k)}$, $\tau \in [t_0, t]$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 на промежутке $[t_0, t]$. Поэтому интеграл $J_{t_0t}^{(k+1)}$ существует, согласно теореме 1.1 при всех $t_0, t: \ 0 \le t_0 \le t \le T$. Лемма доказана.

Лемма 2.2 *В условиях леммы 2.1 справедлива оценка*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{t_0t}^{(k)}\right)^2\right\} \le \sup_{\tau\in[t_0,t]} \left\{\prod_{l=1}^{k-1} \psi_l^2(\tau)\mathsf{M}\left\{\phi_\tau^2\right\}\right\} \mid t - t_0 \mid^{\gamma_k},$$

где $\gamma_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \delta_i$; $\delta_i = 2$ *при* $w_\tau^{(i)} = \tau$ *и* $\delta_i = 1$ *при* $w_\tau^{(i)} = f_\tau$.

Доказательство: Из свойства $B2$ стохастического интеграла Ито и свойства $C2$ стохастического интеграла $\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau$ получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{t_0t}^{(k)}\right)^2\right\} \le \sup_{\tau\in[t_0,t]} \left\{\psi_{k-1}^2(\tau)\mathsf{M}\left\{\left(J_{t_0\tau}^{(k-1)}\right)^2\right\}\right\} \mid t - t_0 \mid^{\delta_{k-1}}.$$

Далее применяя многократно это неравенство само к себе приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

2.2 Проблема замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана при определенных условиях справедливо свойство замены порядка интегрирования. В частности, для непрерывных на промежутке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$

справедлива следующая формула замены порядка интегрирования

$$\int_a^b f(x)\int_a^x g(y)dydx = \int_a^b g(y)\int_y^b f(x)dxdy. \tag{2.1}$$

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Ито вида:

$$J = \int_{t_0}^{t}\psi(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\phi_s\, df_s df_\tau,$$

где функция $\psi(\tau)$ и случайный процесс ϕ_τ удовлетворяют условиям существования интеграла J, а $f_\tau \in \Re^1-$ скалярный винеровский процесс. Представляется очевидным, что если бы для интеграла J была справедлива формула замены порядка интегрирования, аналогичная (2.1), то мы имели бы

$$\int_{t_0}^{t}\psi(s)\int_{t_0}^{s}\phi_\tau df_\tau df_s = \int_{t_0}^{t}\phi_\tau\int_{\tau}^{t}\psi(s)\ df_s df_\tau, \tag{2.2}$$

где неясно как определена правая часть этого равенства. Действительно, если бы мы рассматривали интеграл $\int_{t_0}^{t}\phi_\tau\int_{\tau}^{t}\psi(s)\ df_s df_\tau$ как интеграл Ито в соответствии с (1.7) от случайного процесса $\eta_\tau = \phi_\tau\int_\tau^t\psi(s)\ df_s$, то получили бы во-первых, что правая часть (2.2) имеет ненулевое среднее, в то время как левая часть (2.2) имеет нулевое среднее и во-вторых, что процесс $\eta_\tau = \phi_\tau\int_\tau^t\psi(s)\ df_s$ не является неупреждающим по отношению к f_τ, т.е. не удовлетворяет теореме 1.1 о существовании стохастического интеграла Ито. Таким образом проблема замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито связана с тем, что после формального применения формулы замены порядка интегрирования мы получаем некий "новый"стохастический интеграл, который не укладывается в рамки классического определения стохастического интеграла Ито. Поэтому необходимо дать такое определение этого "нового"стохастического интеграла, чтобы правая часть равенства (2.2) существовала и равенство (2.2) выполнялось с вероятностью 1.

В [6] Р.С. Стратонович дал следующее определение смешанного стохастического интеграла, который мы будем называть обобщенным стохастическим интегралом Ито.

Определение 2.1 *Обобщенным стохастическим интегралом Ито на* *промежутке* $[0,T]$ *называется следующий предел:*

$$\lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j} \right) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{def}{=} \int_0^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau, \qquad (2.3)$$

понимаемый в одном из вероятностных смыслов, где ϕ_τ, θ_τ*− некоторые случайные процессы,* Δ_N*−ранг разбиения* $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ *промежутка* $[0,T]$ *такого типа как в определении 1.8.*

Определим $\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau df_\tau \theta_\tau$ при $\forall t_0,\ t_1:\ 0 \le t_0 \le t_1 \le T$ следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau df_\tau \theta_\tau = \int_0^T \mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(\tau) \phi_\tau df_\tau \theta_\tau,$$

где $\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(\tau) = 1$ при $\tau \in [t_0,t_1)$ и $\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(\tau) = 0$ иначе.

Мы будем рассматривать стохастические интегралы несколько более общей структуры, чем (2.3):

$$\lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \left(w_{\tau_{j+1}} - w_{\tau_j} \right) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{def}{=} \int_0^T \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau, \qquad (2.4)$$

где $w_t = f_t$ либо $w_t = t$. Для произвольных $t_0,\ t_1:\ 0 \le t_0 \le t_1 \le T$ определим $\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau$ аналогично $\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau df_\tau \theta_\tau$ т.е. следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau = \int_0^T \mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(\tau) \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau. \qquad (2.5)$$

Не ограничивая общности, так же как и в (1.7) будем считать, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau = \lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \left(w_{\tau_{j+1}} - w_{\tau_j} \right) \theta_{\tau_{j+1}}, \qquad (2.6)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ −разбиение промежутка $[t_0,t_1]$ такого типа, как в определении 1.8.

Интегралы вида (2.6) в дальнейшем будем рассматривать только в среднеквадратическом смысле. Рассмотрим некоторые справедливые с вероятностью 1 достаточно очевидные свойства стохастических интегралов, определенных в виде (2.6).

1. $\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau g(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau g(\tau) dw_\tau$, где $g(\tau)$-непрерывная на промежутке $[t_0,t_1]$ функция.

2. $\int_{t_0}^{t_1} (\phi_\tau + \psi_\tau)\, dw_\tau \theta_\tau = \int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau + \int_{t_0}^{t_1} \psi_\tau dw_\tau \theta_\tau.$

3. $\int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau\, (\theta_\tau + \psi_\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \theta_\tau + \int_{t_0}^{t_1} \phi_\tau dw_\tau \psi_\tau.$

При этом предполагается, что случайные процессы $\phi_\tau,\ \theta_\tau$ и ψ_τ таковы, что все интегралы, входящие в перечисленные свойства существуют.

2.3 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито второго порядка

Будем рассматривать стохастические интегралы вида (2.6) для случайных процессов θ_s специального вида. Прежде всего рассмотрим случайные процессы θ_s интегрального вида: $\theta_s = \int_s^t \psi(\tau) dw_\tau$, где $\psi(\tau)$−некоторая определенная на промежутке $[t_0, t]$ функция, $0 \le t_0 \le s \le t \le T$.

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторном стохастическом интеграле Ито порядка 2.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Неупреждающий к винеровскому процессу $f_s \in \Re^1$ случайный процесс $\phi_s \in \Re^1$ является непрерывным в среднеквадратическом смысле на промежутке $[t_0, t] \subset [0, T]$ и при всех $s \in [t_0, t]$ удовлетворяет условию: $\mathsf{M}\left\{\phi_s^2\right\} < \infty$.

2. Функция $\psi(\tau)$ является непрерывной на промежутке $[t_0, t]$.
Тогда существует следующий среднеквадратический предел:

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{\tau_k} \Delta w_\tau^{(0)} \int_{\tau_{k+1}}^t \psi(s) dw_s^{(1)} \stackrel{def}{=} \int_{t_0}^t \phi_s dw_s^{(0)} \int_s^t \psi(\tau) dw_\tau^{(1)},$$

где $w_\tau^{(i)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(i)} = \tau$; $i = 0,\ 1$; $\Delta w_{\tau_k}^{(i)} = w_{\tau_{k+1}}^{(i)} - w_{\tau_k}^{(i)}$; $\{\tau_j\}_{j=0}^N$-разбиение промежутка $[t_0, t]$ с рангом Δ_N такого типа как в определении 1.8 и справедлива с вероятностью 1 формула замены порядка интегрирования в повторном стохастическом интеграле Ито порядка 2:

$$\int_{t_0}^t \psi(s) \int_{t_0}^s \phi_\tau dw_\tau^{(0)} dw_s^{(1)} = \int_{t_0}^t \phi_s dw_s^{(0)} \int_s^t \psi(\tau) dw_\tau^{(1)}. \qquad (2.7)$$

Доказательство: Рассмотрим некоторое разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[t_0, t]$ такого типа как в определении 1.8 с рангом Δ_N. Отметим, что согласно лемме 2.1, в условиях настоящей теоремы существует повторный стохастический интеграл в левой части равенства (2.7). Проведем с этим интегралом справедливые с вероятностью 1 преобразования:

$$\int_{t_0}^{t}\psi(s)\int_{t_0}^{s}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}dw_s^{(1)}\stackrel{def}{=}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(\tau_k)\Delta w_{\tau_k}^{(1)}\int_{t_0}^{\tau_k}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}=$$

$$=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(\tau_k)\Delta w_{\tau_k}^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}.$$

С другой стороны с вероятностью 1 имеем:

$$\int_{t_0}^{t}\phi_s dw_s^{(0)}\int_{s}^{t}\psi(\tau)dw_\tau^{(1)}\stackrel{def}{=}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{N-1}\phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(0)}\int_{\tau_{j+1}}^{t}\psi(s)dw_s^{(1)}=$$

$$=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{N-1}\phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(0)}\sum_{k=j+1}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\psi(s)dw_s^{(1)}=$$

$$=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\psi(s)dw_s^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(0)}.$$

Очевидно, что из проведенных выше преобразований следует, что для доказательства настоящей теоремы осталось показать, что с вероятностью 1 $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N=0$, где

$$\varepsilon_N=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\psi(\tau_k)\Delta w_{\tau_k}^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}-\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\psi(s)dw_s^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(0)}\right).$$

Нетрудно видеть, что с вероятностью 1 $\varepsilon_N=\varepsilon_N^{(1)}+\varepsilon_N^{(2)}$, где

$$\varepsilon_N^{(1)}=\sum_{k=0}^{N-1}\psi(\tau_k)\Delta w_{\tau_k}^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left(\phi_\tau-\phi_{\tau_j}\right)dw_\tau^{(0)};$$

$$\varepsilon_N^{(2)}=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\left(\psi(\tau_k)-\psi(s)\right)dw_s^{(1)}\sum_{j=0}^{k-1}\phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(0)}.$$

Покажем, что с вероятностью 1 $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N^{(1)}=0$. Для этого рассмотрим 4 случая:

$$
\begin{gathered}
dw_s^{(0)} = df_s,\ \ \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k},\\
dw_s^{(0)} = ds,\ \ \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k},\\
dw_s^{(0)} = df_s,\ \ \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k,\\
dw_s^{(0)} = ds,\ \ \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k.
\end{gathered}
$$

Для первого случая с использованием свойств $B2$ и $B3$ стохастического интеграла Ито, теоремы о среднем и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\varepsilon_N^{(1)}\right)^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1}\psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathsf{M}\left\{\left(\phi_\tau-\phi_{\tau_j}\right)^2\right\}d\tau \le
$$

$$
\le C\max_{0\le j\le N-1}\ \mathsf{M}\left\{\left(\phi_{\theta_j}-\phi_{\tau_j}\right)^2\right\}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\tau_k\sum_{j=0}^{k-1}\Delta\tau_j \to 0
$$

при $\Delta_N \to 0,\ N\to\infty$, где $\theta_j\in[\tau_j,\tau_{j+1}],\ \psi^2(\tau)\le C<\infty$.

Рассмотрим второй случай. С использованием неравенства Минковского, свойства $C2$ и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\varepsilon_N^{(1)}\right)^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1}\psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(\phi_\tau-\phi_{\tau_j})d\tau\right)^2\right\} \le
$$

$$
\le \sum_{k=0}^{N-1}\psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(\phi_\tau-\phi_{\tau_j})d\tau\right)^2\right\}}\right)^2 \le
$$

$$
\le C\max_{0\le j\le N-1}\ \mathsf{M}\left\{\left(\phi_{\theta_j}-\phi_{\tau_j}\right)^2\right\}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\tau_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}\Delta\tau_j\right)^2 \to 0
$$

при $\Delta_N \to 0,\ N\to\infty$, где $\theta_j\in[\tau_j,\tau_{j+1}],\ \psi^2(\tau)\le C<\infty$.

В третьем случае с использованием неравенства Минковского, свойств $B2$ и $B3$ стохастического интеграла Ито, теоремы о среднем и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ имеем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\varepsilon_N^{(1)}\right)^2\right\} \le \left(\sum_{k=0}^{N-1}\mid\psi(\tau_k)\mid\Delta\tau_k\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(\phi_\tau-\phi_{\tau_j})df_\tau\right)^2\right\}}\right)^2 =
$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mid \psi(\tau_k) \mid \Delta\tau_k \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathsf{M}\left\{ (\phi_\tau - \phi_{\tau_j})^2 \right\} d\tau} \right)^2 \le$$

$$\le C \max_{0\le j\le N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j} \right)^2 \right\} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j} \right)^2 \to 0$$

при $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}],\ \psi^2(\tau) \le C < \infty$.

Наконец для четвертого случая с использованием неравенства Минковского, свойства $C2$ и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем:

$$\mathsf{M}\left\{ \left(\varepsilon_N^{(1)} \right)^2 \right\} \le \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mid \psi(\tau_k) \mid \Delta\tau_k \sqrt{\mathsf{M}\left\{ \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\}} \right)^2 \le$$

$$\le C \max_{0\le j\le N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j} \right)^2 \right\} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j \right)^2 \to 0$$

при $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}],\ \psi^2(\tau) \le C < \infty$.

Таким образом мы доказали, что с вероятностью 1 $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N^{(1)} = 0$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что с вероятностью 1 $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N^{(2)} = 0$. Поэтому с вероятностью 1 $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N = 0$. Теорема доказана.

Замечание *При доказательстве теоремы использовался тот факт, что* $\lim\limits_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}} \max\limits_{0\le j\le N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j} \right)^2 \right\} = 0,\quad \lim\limits_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}} \max\limits_{0\le j\le N-1} \mid \psi(t_j) - \psi(\theta_j) \mid = 0$, *где* $t_j,\ \theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. *Действительно, пусть последовательность* $a_N = \max\limits_{0\le j\le N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j} \right)^2 \right\}$ *не стремится к нулю при* $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$. *Тогда по некоторому* $\varepsilon > 0$ *найдутся* $N^*(\varepsilon) \in \mathcal{N}$, $\delta(\varepsilon) > 0,\ l \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}$ *такие, что при* $N > N^*(\varepsilon)$ *будут одновременно выполняться неравенства:* $\mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{t_l} - \phi_{\theta_l} \right)^2 \right\} \ge \varepsilon,\ \mid t_l - \theta_l \mid < \delta(\varepsilon)$, *из которых следует, что нарушается условие среднеквадратической непрерывности процесса* ϕ_t. *Поэтому* $\lim\limits_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}} \max\limits_{0\le j\le N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j} \right)^2 \right\} = 0$. *Аналогично показывается, что* $\lim\limits_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}} \max\limits_{0\le j\le N-1} \mid \psi(t_j) - \psi(\theta_j) \mid = 0$.

2.4 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито произвольного порядка

В этом параграфе обобщим результаты предыдущего параграфа и установим формулу замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито произвольного порядка $k \geq 2$.

Рассмотрим некоторый измеримый при всех $\tau \in [t_0, t] \subset [0, T]$ случайный процесс ϕ_τ, определенный на промежутке $[t_0, t]$. Рассмотрим также некоторые определенные на промежутке $[t_0, t]$ функции $\psi_i(\tau)$; $i = 1, \ldots, k$. Определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}^{(2)}_{t_0 t}$ порядка 2 вида: $\hat{J}^{(2)}_{t_0 t} = \int_{t_0}^{t} \phi_\tau dw^{(0)}_\tau \int_{\tau}^{t} \psi_1(t_1) dw^{(1)}_{t_1}$ через стохастический интеграл $\hat{S}^{(1)}_{\tau t} = \int_{\tau}^{t} \psi_1(t_1) dw^{(1)}_{t_1}$ порядка 1 в соответствии с определением (2.6):

$$\hat{J}^{(2)}_{t_0 t} \stackrel{def}{=} \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w^{(0)}_{\tau_l} \hat{S}^{(1)}_{\tau_{l+1} t},$$

где $\{\tau_l\}_{l=0}^{N}$ –разбиение промежутка $[t_0, t]$ такого типа как в определении 1.8 с рангом дробления Δ_N. Далее определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}^{(3)}_{t_0 t}$ порядка 3 вида: $\hat{J}^{(3)}_{t_0 t} = \int_{t_0}^{t} \phi_s dw^{(0)}_s \hat{S}^{(2)}_{st}$, где $\hat{S}^{(2)}_{st} = \int_{s}^{t} \psi_1(t_1) dw^{(1)}_{t_1} \int_{t_1}^{t} \psi_2(t_2) dw^{(2)}_{t_2}$, через повторный стохастический интеграл $\hat{S}^{(2)}_{st}$ порядка 2 в соответствии с определением (2.6):

$$\hat{J}^{(3)}_{t_0 t} \stackrel{def}{=} \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w^{(0)}_{\tau_l} \hat{S}^{(2)}_{\tau_{l+1} t}.$$

Продолжая этот процесс далее, определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}^{(k+1)}_{t_0 t}$ порядка $k+1$ вида:

$$\hat{J}^{(k+1)}_{t_0 t} = \int_{t_0}^{t} \phi_s dw^{(0)}_s \hat{S}^{(k)}_{st},$$

где $\hat{S}^{(k)}_{st} = \int_{s}^{t} \psi_1(t_1) dw^{(1)}_{t_1} \ldots \int_{t_{k-1}}^{t} \psi_k(t_k) dw^{(k)}_{t_k}$, через повторный стохастический интеграл $\hat{S}^{(k)}_{st}$ порядка k в соответствии с определением (2.6):

$$\hat{J}^{(k+1)}_{t_0 t} \stackrel{def}{=} \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w^{(0)}_{\tau_l} \hat{S}^{(k)}_{\tau_{l+1} t}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито порядка $k \ge 2$.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Неупреждающий к винеровскому процессу f_τ случайный процесс ϕ_τ является непрерывным в среднеквадратическом смысле на промежутке $[t_0, t]$ и при всех $\tau \in [t_0, t]$ удовлетворяет условию: $\mathsf{M}\left\{\phi_\tau^2\right\} < \infty$.

2. Функции $\psi_i(\tau);\ i = 1, \ldots, k$ являются непрерывными на промежутке $[t_0, t]$.

Тогда существует в среднеквадратическом смысле повторный стохастический интеграл $\hat{J}_{t_0 t}^{(k+1)}$ и справедлива с вероятностью 1 формула замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах порядка $k+1$:

$$J_{t_0 t}^{(k+1)} = \hat{J}_{t_0 t}^{(k+1)}, \tag{2.8}$$

где $J_{t_0 t}^{(k+1)} = \int_{t_0}^{t} \psi_k(t_1) \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi_1(t_k) \int_{t_0}^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(0)} dw_{t_k}^{(1)} \ldots dw_{t_1}^{(k)}$.

Доказательство: Рассмотрим некоторое разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[t_0, t]$ такого типа как в определении 1.8 с рангом дробления Δ_N. Отметим, что, согласно лемме 2.1, в условиях настоящей теоремы существует в среднеквадратическом смысле интеграл $J_{t_0 t}^{(k+1)}$. Поэтому следующая цепочка равенств:

$$J_{t_0 t}^{(k+1)} = \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}}\ \xi_N = \hat{J}_{t_0 t}^{(k+1)}, \tag{2.9}$$

справедливая с вероятностью 1, где

$$\xi_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \zeta_{j_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1} \zeta_{j_k} \sum_{l=0}^{j_k - 1} \eta_l,\ \ \eta_l = \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(0)},$$

$$\zeta_{j_p} = \int_{\tau_{j_p}}^{\tau_{j_p+1}} \psi_{k-p+1}(\tau) dw_\tau^{(k-p+1)};\ p = 1, \ldots, k,$$

обеспечит нам как существование в среднеквадратическом смысле интеграла $\hat{J}_{t_0 t}^{(k+1)}$, так и выполнение с вероятностью 1 равенства (2.8).

Докажем сначала правое равенство в цепочке равенств (2.9). Справедливость настоящей теоремы при $k = 1$ была доказана в предыдущем параграфе. Предположим, что утверждения настоящей теоремы справедливы при некотором $q = k - 1$ и докажем их справедивость при $q = k$. По определению стохастического интеграла $\hat{J}^{(k+1)}_{t_0 t}$ имеем:

$$\hat{J}^{(k+1)}_{t_0 t} \stackrel{def}{=} \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \hat{S}^{(k)}_{\tau_{l+1} t}. \qquad (2.10)$$

Из предположения индукции следует, что для повторного стохастического интеграла $\hat{S}^{(k)}_{\tau_{l+1} t}$ справедлива с вероятностью 1 формула замены порядка интегрирования:

$$S^{(k)}_{\tau_{l+1} t} = \hat{S}^{(k)}_{\tau_{l+1} t}, \qquad (2.11)$$

где $S^{(k)}_{\tau_{l+1} t} = \int_{\tau_{l+1}}^{t} \psi_k(t_1) \ldots \int_{\tau_{l+1}}^{t_{k-1}} \psi_1(t_k) dw^{(1)}_{t_k} \ldots dw^{(k)}_{t_1}$. При этом существование левой части (2.11) обеспечивает существование правой части (2.11). Проведем справедливые с вероятностью 1 преобразования:

$$S^{(k)}_{\tau_{l+1} t} = \int_{\tau_{l+1}}^{t} \psi_k(t_1) S^{(k-1)}_{\tau_{l+1} t_1} dw^{(k)}_{t_1} = \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_k(t_1) S^{(k-1)}_{\tau_{l+1} t_1} dw^{(k)}_{t_1} =$$

$$= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_k(t_1) \int_{\tau_{l+1}}^{t_1} \psi_{k-1}(t_2) S^{(k-2)}_{\tau_{l+1} t_2} dw^{(k-1)}_{t_2} dw^{(k)}_{t_1} =$$

$$= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_k(t_1) \left\{ \sum_{j_2=l+1}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \psi_{k-1}(t_2) S^{(k-2)}_{t_{l+1} t_2} dw^{(k-1)}_{t_2} + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_{j_1}}^{t_1} \psi_{k-1}(t_2) S^{(k-2)}_{\tau_{l+1} t_2} dw^{(k-1)}_{t_2} \right\} dw^{(k)}_{t_1} = \ldots = \varepsilon_{l+1,N} + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{q=1}^{k-r} \delta^{(rq)}_{l+1,N}, \qquad (2.12)$$

где

$$\varepsilon_{l+1,N} = \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \zeta_{j_1} \ldots \sum_{j_k=l+1}^{j_{k-1}-1} \zeta_{j_k}, \qquad (2.13)$$

$$\delta^{(rq)}_{l+1,N} = \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \zeta_{j_1} \ldots \sum_{j_{q-1}=l+1}^{j_{q-2}-1} \zeta_{j_{q-1}} \sum_{j_q=l+1}^{j_{q-1}-1} \zeta^{r+1}_{j_q} \sum_{j_{q+r+1}=l+1}^{j_q-1} \zeta_{j_{q+r+1}} \ldots \sum_{j_k=l+1}^{j_{k-1}-1} \zeta_{j_k}, \qquad (2.14)$$

где

$$\zeta^{r+1}_{j_q} \stackrel{def}{=} \int_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}} \psi_{k-q+1}(t_1) \ldots \int_{\tau_{j_q}}^{t_r} \psi_{k-q+1-r}(t_{r+1}) dw^{(k-q+1-r)}_{t_{r+1}} \ldots dw^{(k-q+1)}_{t_1},$$

$\zeta_{j_q}^1 \stackrel{def}{=} \zeta_{j_q}$, $r=0,\ 1,\ldots,k-1;\ k=1,\ 2,\ldots$. Отметим следующие, необходимые в дальнейшем, свойства случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$.

1. $\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_{j_q}^{r+1}\right)^2\right\} \le C_{r+1} \mid \tau_{j_q+1}-\tau_{j_q} \mid^{\gamma_r};\ C_{r+1}=const<\infty,$

где $\gamma_r=\sum\limits_{i=1}^{r+1}\delta_i;\quad \delta_i=2$ при $w_{t_i}^{(k-q+2-i)}=t_i$ и $\delta_i=1$ при $w_{t_i}^{(k-q+2-i)}=f_{t_i}$.

2. Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ при всех возможных $r,\ q$ стохастически независимы от значений f_s и приращений f_t-f_τ винеровского процесса при $s\le\tau_{j_q};\ t>\tau\ge\tau_{j_q+1}$.

3. Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ и $\zeta_{j_g}^{p+1}$ при всех возможных $r,\ p=0,\ 1,\ldots,k-1$ стохастически независимы при $g\ne q$.

Подставим (2.12) в (2.11), а (2.11) в (2.10). Тогда с вероятностью 1

$$\hat{J}_{t_0t}^{(k+1)}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{l=0}^{N-1}\eta_l\varepsilon_{l+1,N}+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-r}\sum_{l=0}^{N-1}\eta_l\delta_{l+1,N}^{(rq)}\right). \tag{2.15}$$

Нетрудно видеть, что справедлива формула замены порядка суммирования в повторной сумме:

$$\sum_{j_1=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}a_{j_1\ldots j_k}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{N-1}a_{j_1\ldots j_k}, \tag{2.16}$$

где $a_{j_1\ldots j_k}$—некоторые скалярные величины. Согласно (2.16) заменим порядок суммирования в правой части (2.13):

$$\varepsilon_{l+1,N}=\sum_{j_k=l+1}^{N-1}\zeta_{j_k}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{N-1}\zeta_{j_1}. \tag{2.17}$$

Подставим (2.17) в величину $\sum\limits_{l=0}^{N-1}\eta_l\varepsilon_{l+1,N}$ и снова воспользуемся формулой (2.16). Тогда получим с вероятностью 1 следующее равенство:

$$\sum_{l=0}^{N-1}\eta_l\varepsilon_{l+1,N}=\xi_N. \tag{2.18}$$

Предположим, что предел $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \xi_N$ существует (его существование будет доказано ниже). Тогда из (2.18) и (2.15) следует, что для доказательства правого равенства в цепочке равенств (2.9) остается показать, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1}\eta_l\delta_{l+1,N}^{(rq)}=0, \tag{2.19}$$

где $r=1,\ldots,k-1;\ q=1,\ldots,k-r$. Докажем соотношение (2.19). Для этого заменим порядок суммирования в правой части соотношения (2.14) воспользовавшись формулой (2.16):

$$\delta_{l+1,N}^{(rq)}=\sum_{j_k=l+1}^{N-1}\zeta_{j_k}\ldots\sum_{j_{q+r+1}=j_{q+r+2}+1}^{N-1}\zeta_{j_{q+r+1}}\sum_{j_q=j_{q+r+1}+1}^{N-1}\zeta_{j_q}^{r+1}\times$$

$$\times\sum_{j_{q-1}=j_q+1}^{N-1}\zeta_{j_{q-1}}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{N-1}\zeta_{j_1}. \tag{2.20}$$

Подставим (2.20) в $\sum\limits_{l=0}^{N-1}\eta_l\delta_{l+1,N}^{(rq)}$ и поменяем порядок суммирования в получившейся повторной сумме согласно формуле (2.16):

$$\sum_{l=0}^{N-1}\eta_l\delta_{l+1,N}^{(rq)}=\sum_{j_1=l+1}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_{q-1}=l+1}^{j_{q-2}-1}\zeta_{j_{q-1}}\sum_{j_q=l+1}^{j_{q-1}-1}\zeta_{j_q}^{r+1}\times$$

$$\times\sum_{j_{q+r+1}=l+1}^{j_q-1}\zeta_{j_{q+r+1}}\ldots\sum_{j_k=l+1}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}\sum_{l=0}^{j_k-1}\eta_l. \tag{2.21}$$

Используя соотношение (2.21), неравенство Минковского, и свойства случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$ нетрудно показать, что соотношение (2.19) справедливо с вероятностью 1. Таким образом, в предположении о существовании предела $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \xi_N$ мы получили, что правое равенство в цепочке равенств (2.9) справедливо с вероятностью 1. Покажем теперь, что справедливо с вероятностью 1 левое равенство в цепочке равенств (2.9). Рассмотрим повторный стохастический интеграл $J_{t_0t}^{(k+1)}$:

$$J_{t_0t}^{(k+1)}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{N-1}\psi_k(\tau_l)\Delta w_{\tau_l}^{(k)}J_{t_0\tau_l}^{(k)}. \tag{2.22}$$

Применим теперь к интегралу $J_{t_0\tau_l}^{(k)}$ теже рассуждения, что и к интегралу $S_{\tau_{l+1}t}^{(k)}$, приведшие к соотношению (2.12) и подставим получившееся выражение для $J_{t_0\tau_l}^{(k)}$ в (2.22). Далее с помощью неравенства Минковского и свойств случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$ нетрудно показать, что с вероятностью 1:

$$J_{t_0t}^{(k+1)} = \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \mu_N, \tag{2.23}$$

где

$$\mu_N = \sum_{j_1=0}^{N-1}\chi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}\sum_{l=0}^{j_k-1}\theta_l,$$

где $\chi_{j_1} = \psi_k(\tau_{j_1})\Delta w_{\tau_{j_1}}^{(k)}$, $\theta_l = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}$. При этом правая часть (2.23) существует, поскольку, как уже отмечалось ранее, в условиях настоящей теоремы существует левая часть (2.23). Покажем, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \mu_N = \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \xi_N. \tag{2.24}$$

Нетрудно видеть, что с вероятностью 1:

$$\mu_N = \mu_N^{(1)} + \mu_N^{(2)} + \xi_N, \tag{2.25}$$

где

$$\mu_N^{(1)} = \sum_{j_1=0}^{N-1}\chi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}\sum_{l=0}^{j_k-1}\Delta\theta_l,$$

$$\mu_N^{(2)} = \sum_{j_1=0}^{N-1}\Delta\chi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}\sum_{l=0}^{j_k-1}\eta_l,$$

где $\Delta\theta_l = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(\phi_\tau - \phi_{\tau_l})dw_\tau^{(0)}$, $\eta_l = \phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(0)}$, $\Delta\chi_{j_1} = \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}(\psi_k(\tau_{j_1}) - \psi_k(\tau))dw_\tau^{(k)}$. Используя неравенство Минковского, свойства случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$, свойство непрерывности функции $\psi_k(\tau)$, свойство среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ и замечание к теореме 2.1 нетрудно показать, что с вероятностью 1:

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \mu_N^{(1)} = \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \mu_N^{(2)} = 0. \tag{2.26}$$

Из (2.26) и (2.25) следует с вероятностью 1 (2.24), а из (2.24) и (2.23) следует с вероятностью 1 левое равенство в цепочке равенств (2.9). При этом предел $\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \xi_N$ существует, поскольку он равен интегралу $J_{t_0t}^{(k+1)}$, который существует в условиях настоящей теоремы согласно лемме 2.1.

Таким образом цепочка равенств (2.9) полностью доказана. Теорема доказана.

Рассмотрим стандартный векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_\tau\in\Re^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i=1,\ldots,m$. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 2.2 справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Пусть случайный процесс ϕ_τ и функции $\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Тогда существует в среднеквадратическом смысле повторный стохастический интеграл:*

$$\tilde{J}_{t_0t}^{\prime(k+1)}=\int_{t_0}^{t}\phi_\tau d\mathbf{w}_\tau^{(i_0)}\int_{\tau}^{t}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots\int_{t_{k-1}}^{t}\psi_k(t_k)d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)}=\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i=1,\ldots,m$; $\mathbf{w}_\tau^{(0)}=\tau;\ i_0,i_1,\ldots,i_k=0,\ 1,\ldots,m$ и с вероятностью 1 справедлива формула замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах:

$$\tilde{J}_{t_0t}^{(k+1)}=\tilde{J}_{t_0t}^{\prime(k+1)},$$

где $\tilde{J}_{t_0t}^{(k+1)}=\int_{t_0}^{t}\psi_k(t_1)\ldots\int_{t_0}^{t_{k-1}}\psi_1(t_k)\int_{t_0}^{t_k}\phi_\tau d\mathbf{w}_\tau^{(i_0)}d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)}$.

Рассмотрим одно достаточно важное свойство повторных стохастических интегралов, которое будет использоваться в главе 3.

Теорема 2.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2, а $h(\tau)$—непрерывная на промежутке $[t_0,t]$ функция. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\int_{t_0}^{t}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}h(\tau)\hat{S}_{\tau t}^{(k)}=\int_{t_0}^{t}\phi_\tau h(\tau)dw_\tau^{(0)}\hat{S}_{\tau t}^{(k)} \qquad (2.27)$$

и интегралы в левой и правой частях (2.27) существуют в среднеквадратическом смысле.

Доказательство: Нетрудно видеть, что согласно теореме 2.2, повторный стохастический интеграл в правой части (2.27) существует в среднеквадратическом смысле. Кроме этого с вероятностью 1:

$$\int_{t_0}^{t}\phi_\tau h(\tau)dw_\tau^{(0)}\hat{S}_{\tau t}^{(k)}=\int_{t_0}^{t}\phi_\tau dw_\tau^{(0)}h(\tau)\hat{S}_{\tau t}^{(k)}-$$

$$- \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j}(h(\tau_{j+1})-h(\tau_j))\Delta w_{\tau_j}^{(0)}\hat{S}_{\tau_{j+1}t}^{(k)}. \tag{2.28}$$

Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (2.9) с вероятностью 1 получаем:

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l}\left(h(\tau_{l+1})-h(\tau_l)\right)\Delta w_{\tau_l}^{(0)}\hat{S}_{\tau_{l+1}t}^{(k)} =$$

$$= \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}\sum_{l=0}^{j_k-1}\phi_{\tau_l}\left(h(\tau_{l+1})-h(\tau_l)\right)\Delta w_{\tau_l}^{(0)}, \tag{2.29}$$

где $\zeta_{j_p}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\psi_{k-p+1}(\tau)dw_\tau^{(k-p+1)};\ p=1,\ldots,k$. Далее из (2.29) с использованием неравенства Минковского, свойств случайных величин ζ_{j_q} и непрерывности функции $h(\tau)$ с вероятностью 1 получаем:

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l}\left(h(\tau_{l+1})-h(\tau_l)\right)\Delta w_{\tau_l}^{(0)}\hat{S}_{\tau_{l+1}t}^{(k)} = 0.$$

Отсюда и следует существование левой части (2.27) и справедливость этого соотношения с вероятностью 1.

Рассмотрим еще одно свойство повторных стохастических интегралов.

Лемма 2.3 *В условиях теоремы 2.2 справедливо с вероятностью 1 следующее равенство:*

$$\int_{t_0}^{t} g(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}dw_{t_1}^{(0)}\hat{S}_{t_1t}^{(k)} = \int_{t_0}^{t}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}\int_{\tau}^{t} g(t_1)dw_{t_1}^{(0)}\hat{S}_{t_1t}^{(k)}, \tag{2.30}$$

причем левая и правая его части существуют в среднеквадратическом смысле, а $g(\tau)$-непрерывная на промежутке $[t_0,t]$ функция.

Доказательство: По теореме 2.2 с вероятностью 1 имеем:

$$\int_{t_0}^{t}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}\int_{\tau}^{t} g(t_1)dw_{t_1}^{(0)}\hat{S}_{t_1t}^{(k)} =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\psi_k(t_1)\ldots\int_{t_0}^{t_{k-1}}\psi_1(t_k)\int_{t_0}^{t_k}\rho_\tau dw_\tau^{(0)}dw_{t_k}^{(1)}\ldots dw_{t_1}^{(k)}, \tag{2.31}$$

где $\rho_\tau \stackrel{def}{=} g(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\phi_s dw_s^{(k+1)}$. При этом по теореме 2.2 существует левая часть (2.31). Далее применяя к правой части (2.31) теорему 2.2 с вероятностью 1 получаем:

$$\int_{t_0}^{t}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}\int_{\tau}^{t} g(t_1)dw_{t_1}^{(0)}\hat{S}_{t_1 t}^{(k)} =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\rho_\tau dw_\tau^{(0)}\int_{\tau}^{t}\psi_1(t_1)dw_{t_1}^{(1)}\ldots\int_{t_{k-1}}^{t}\psi_k(t_k)dw_{t_k}^{(k)} =$$

$$=\int_{t_0}^{t} g(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\phi_{\tau_1}dw_{\tau_1}^{(k+1)}dw_\tau^{(0)}\hat{S}_{\tau t}^{(k)}.$$

Лемма доказана.

Литература к главе 2

Гихман И.И., Скороход А.В.(1977), Стратонович Р.Л.(1966), Кузнецов Д.Ф. (1997).

Глава 3

Стохастические разложения процессов Ито

С помощью формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах в этой главе получены унифицированные разложения Тейлора-Ито. Эти разложения содержат существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой, которой, в частности, целиком посвящена четвертая глава монографии. Поэтому унифицированные разложения Тейлора-Ито могут оказаться более удобными при численном решении стохастических дифференциальных уравнений, чем разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Кроме унифицированных разложений Тейлора-Ито приводятся в новых обозначениях разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора-Стратоновича.

3.1 Введение

В настоящей главе рассматривается проблема стохастических разложений процессов Ито в ряды Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. Эта проблема является достаточно новой в теории случайных процессов, так как первые работы, посвященные ей, относятся к 70-80 годам (Г.Н.Мильштейн (1974), W.Wagner и E.Platen (1978, 1982), E.Platen (1981,1982)). В частности, разложение Тейлора-Ито, представляющее собой разложение гладкого безынерционного нелинейного преобразования от решения стохастического дифференциального уравнения Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам с использованием формулы Ито, было впервые получено и использовано в работах [30], [32] (W.Wagner, E.Platen).

Настоящая глава главным образом посвящена построению унифицированных разложений Тейлора-Ито. Поясним, что здесь имеется в виду. Дело в том, что повторные стохастические интегралы, входящие в разложение Тейлора-Ито из [30], [32], преобразуются к системам канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности с полиномиальными весовыми функциями. Эти преобразования осуществляются на основе формул замены порядка интегрирования для повторных стохастических интегралов, полученных во второй главе. Результат, получающийся после приведения подобных слагаемых и является упомянутым выше унифицированным разложением Тейлора-Ито. Важно отметить, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора-Ито определяются рекуррентными соотношениями. Другой важной особенностью унифицированных разложений Тейлора-Ито является то, что они содержат значительно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена [30], [32]. Для сравнения отметим, что унифицированные разложения Тейлора-Ито до членов третьего порядка малости содержат только 12 различных повторных стохастических интегралов, в то время, как аналогичное разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена содержит уже 17 различных повторных стохастических интегралов. При этом, чем больше удерживается членов в разложении, тем существеннее проявляется это различие. Это преимущество унифицированных разложений Тейлора-Ито является особенно важным, поскольку аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой [35], [45], [49], [50], [51], [52]. Этой проблеме будет посвящена вся четвертая глава книги. Кроме этого, в настоящей главе приводятся в новых обозначениях разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора-Стратоновича.

3.2 Дифференцируемость по Ито случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и пусть $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t, \omega) \in \Re^m$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Определение 3.1 *Процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, *а* $\mathbf{x}_s$*-решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) называется непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на* $[0,T]$ *на траекториях уравнения (1.36), если для всех* $s,t \in [0,T]$ *таких, что* $s \geq t$ *следующее представление:*

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \tag{3.1}$$

справедливо с вероятностью 1, стохастические интегралы в правой части (3.1) существуют в среднеквадратическом смысле, а $B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $i = 1, \ldots, m$*-непрерывные в среднеквадратическом смысле процессы на* $[0,T]$, *называемые прозводными процесса* η_s *по Ито.*

Из леммы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1 *Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ *непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке [0,T], его производные* $B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$; $i = 1, \ldots, m$ *имеют вид:* $B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = L\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, *где*

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}, \tag{3.2}$$

$$G_0^{(i)}\{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; \ i = 1, \ldots, m, \tag{3.3}$$

причем для всех $s,t \in [0,T]$ *таких, что* $s \geq t$ *равенство*

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s L\left\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\right\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)}\left\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\right\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$$

справедливо с вероятностью 1 и интегралы в его правой части существуют в среднеквадратическом смысле.

Будем называть совокупность k-индексных элементов матрицей k-го ранга ${}^{(k)}A: \ {}^{(k)}A = \left\| \ A^{(i_1 \ldots i_k)} \right\|_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k}$. Ясно, что ${}^{(0)}A$ скаляр, ${}^{(1)}A$ матрица размера $m_1 \times 1$, ${}^{(2)}A$ матрица размера $m_1 \times m_2$ и т.д. Обозначение ${}^{(k)}A = \left\| {}^{(k-1)}A^{(i_1)} \right\|_{i_1=1}^{m_1}$, где ${}^{(k-1)}A^{(i_1)} = \left\| A^{(i_1 \ldots i_k)} \right\|_{i_2, \ldots, i_k = 1}^{m_2, \ldots, m_k}$ следует понимать как блочную матрицу с элементами $k-1$-го ранга. В дальнейшем иногда у скаляров и матриц-столбцов ранг указывать не будем.

Будем называть матрицу ${}^{(k)}C$ сверткой матриц ${}^{(k+l)}\mathrm{A}$ и ${}^{(l)}\mathrm{B}$ и обозначать ее в виде: ${}^{(k)}C = {}^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}B$, где

$$
{}^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{m_1,\ldots,m_l} A^{(i_1\ldots i_{k+l})} B^{(i_1\ldots i_l)} \right\|_{i_{l+1},\ldots,i_{l+k}=1}^{m_{l+1},\ldots,m_{l+k}}.
$$

Определение 3.2 *Процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ *называется* N *раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения (1.36) если* $\forall l \in \{0,\ 1,\ldots,N-1\}$, $\forall s,t \in [0,T]:\ s \geq t$ *справедливо покомпонентно с вероятностью 1 представление*

$$
{}^{(r_l)}B_{\gamma_l\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_l)}B_{\gamma_l\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} + \int_t^s {}^{(r_l)}B_{0\gamma_l\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}d\tau +
$$

$$
+ \int_t^s {}^{(r_l+1)}B_{1\gamma_l\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau,
$$

где интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле; $\gamma_q = 0,\ 1;\ r_l = \sum\limits_{i=1}^{l} \gamma_i;\ {}^{(r_q)}B_{\gamma_q\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} (q = 1,2,\ldots N)$*-непрерывные в среднеквадратическом смысле матричные случайные процессы, называемые* $q-$*ми производными процесса* η_s *по Ито в среднеквадратическом смысле на траекториях уравнения (1.36). При этом полагаем* $r_0 \equiv 0$; ${}^{(r_0)}B_{\gamma_0\ldots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{def}{=} \cdot$; ${}^{(r_0)}B_{0\gamma_0\ldots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{def}{=} {}^{(0)}B_0\{\cdot\}$; ${}^{(r_0+1)}B_{1\gamma_0\ldots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{def}{=} {}^{(1)}B_1\{\cdot\}$.

Пусть ${}^{(1)}D_j\{\cdot\} = \left\| D_j^{(i)}\{\cdot\} \right\|_{i=1}^{m}$; $j = 1,\ldots,k-$ векторные дифференциальные операторы, а $A_p\{\cdot\} = \cdot$, $C_p\{\cdot\}$ $(p = 1,\ldots,k+1)$–скалярные дифференциальные операторы. Далее будем обозначать:

$$
\left\| A_{k+1} D_k^{(i_k)} A_k \ldots D_1^{(i_1)} A_1 \{\cdot\} \ldots \right\|_{i_1,\ldots i_k=1}^{m} \overset{def}{=}
$$

$$
\overset{def}{=} {}^{(k)}A_{k+1} D_k A_k \ldots D_1 A_1\{\cdot\} = A_{k+1}{}^{(k)}D_k A_k \ldots D_1 A_1\{\cdot\} =
$$

$$
= A_{k+1}{}^{(1)}D_k{}^{(k-1)}A_k \ldots D_1 A_1\{\cdot\} = \ldots =
$$

$$
= A_{k+1}{}^{(1)}D_k A_k \ldots {}^{(1)}D_1 A_1\{\cdot\}.
$$

Рассмотрим функцию $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$.

Лемма 3.2 *Пусть условия леммы 1.1 выполнены. Пусть для всех* $l = 2, \ldots, N$ *матричная функция* ${}^{(r_{l-1})}H_{l-1} \ldots H_1\{R(\mathbf{x}, s)\}$ *покомпонентно удовлетворяет условию* 1° *леммы 1.1 и вместе с матричным случайным процессом* ${}^{(r_{l-1})}H_{l-1} \ldots H_1\{R(\mathbf{x}_s, s)\}$ *такова, что матричный процесс* ${}^{(r_l)}H_l \ldots H_1\{R(\mathbf{x}_s, s)\}$ *покомпонентно удовлетворяет условиям теоремы 1.1 на промежутке* $[0, T]$, *где* $H_p^{(i_p)}\{\cdot\} = G_0^{(i_p)}\{\cdot\}$ *и* $i_p = 1, \ldots, m$ *при* $\gamma_p = 1$; $H_p^{(0)}\{\cdot\} = L\{\cdot\}$ *и* $i_p = 0$ *при* $\gamma_p = 0$; $p = 1, \ldots, l$; *дифференциальные операторы* ${}^{(1)}G_0\{\cdot\}$ *и* $L\{\cdot\}$ *такие же, как в лемме 1.1. Тогда процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на* $[0, T]$ *и его производные имеют вид:*

$$
{}^{(r_l)}B_{\gamma_l \ldots \gamma_1}\{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_l)}H_l \ldots H_1\{R(\mathbf{x_s}, s)\}, \tag{3.4}
$$

где $l = 1, \ldots, N$; $r_l = \sum\limits_{p=1}^{l} \gamma_p$.

Соотношение (3.4) может быть переписано в покомпонентной форме:

$$
B_{\gamma_l \ldots \gamma_1}^{(i_l \ldots, i_1)}\left\{R(\mathbf{x}_s, s)\right\} = H_l^{(i_l)} \ldots H_1^{(i_1)}\left\{R(\mathbf{x}_s, s)\right\}, \tag{3.5}
$$

где предполагается, что

$$
(i_l, \ldots, i_p, 0, i_{p-1}, \ldots, i_1) \stackrel{def}{=} (i_l, \ldots, i_p, i_{p-1}, \ldots, i_1).
$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3 *Пусть выполнены следующие условия:*

A1. $\eta_s = \mathbf{x}_s^{(i)} \in \Re^1$, *где* $\mathbf{x}_s^{(i)}$ – i–*я компонента решения* $\mathbf{x}_s \in \Re^n$ *стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36).*

A2. процессы $\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)$ *и* $\Sigma(\mathbf{x}_s, s)$ *из (1.36) покомпонентно удовлетворяют условиям теоремы 1.1 на промежутке* $[0, T]$.

A3. $\forall x, y \in \Re^1$, $\forall (\gamma_l, \ldots, \gamma_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N} \mathcal{H}_g$, *где* $\mathcal{H}_g = \{(\gamma_g, \ldots, \gamma_1) : \ \gamma_i = 0,\ 1;\ i = 1, \ldots, g\}$, $\forall t \in [0, T]$ *функции* $B_{\gamma_l \cdots, \gamma_1}^{(i_l \ldots i_1)}\{x\}$, *определенные соотношением (3.5), удовлетворяют условиям:*

$$
\left| B_{\gamma_l \cdots, \gamma_1}^{(i_l \ldots i_1)}\{x\} - B_{\gamma_l \cdots, \gamma_1}^{(i_l \ldots i_1)}\{y\} \right| \leq K_1 \left| x - y \right|,
$$

$$
\left| B_{\gamma_l \cdots, \gamma_1}^{(i_l \ldots i_1)}\{x\} \right| \leq K_2 \left(1 + |x|\right),
$$

где $K_1, K_2 = const < \infty$. *Тогда процесс* η_s N *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0, T]$ *и* *его производные по Ито определяются соотношением (3.4) или покомпонентно соотношением (3.5).*

3.3 Унифицированные разложения Тейлора-Ито

3.3.1 Первая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито

Введем следующие обозначения

$$J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\begin{cases}\int\limits_t^s (s-\tau_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots\int\limits_{\tau_{k-1}}^s (s-\tau_k)^{l_k}d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k>0\\ 1 & \text{при } k=0\end{cases},$$

$$^{(k)}J_{l_1\ldots l_k s,t}=\left\|J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m.$$

Из теоремы 2.2 и свойств повторных стохастических интегралов, рассмотренных во второй главе вытекают существование и следующие свойства интегралов $J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}$ при $k>0$:

$$\mathsf{M}\left\{J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\}=0,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right)^2\right\}=\frac{(s-t)^{2(l_1+\ldots+l_k)+k}}{(2l_k+1)(2(l_k+l_{k-1})+2)\ldots(2(l_k+\ldots+l_1)+k)}, \quad (3.6)$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)}J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}=J_{jl_1\ldots l_k s,t}^{(pi_1\ldots i_k)};\ p=1,\ldots,m, \quad (3.7)$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\tau J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}=\frac{(s-t)^{j+1}}{j+1}J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}-\frac{1}{j+1}J_{l_1+j+1\ l_2\ \ldots\ l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}, \quad (3.8)$$

$$J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\int_t^s (s-\tau_1)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_{k-1}}(s-\tau_k)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)},$$

где последние три свойства справедливы с вероятностью 1.

Введем в рассмотрение матрицу k-го ранга вида:

$$^{(k)}(s\ominus t)_{jl_1\ldots l_k}=\left\|(s\ominus t)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m=\left\|\frac{(s-t)^j}{j!}J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m$$

и рассмотрим совокупность матриц k-го ранга:

$$C^{\mathcal{B}} = \left\{ {}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k} : \ (k, j, l_1, \dots , l_k) \in \mathcal{B} \right\},$$

где $\mathcal{B}$-подмножество множества наборов целых неотрицательных чисел.

Введем следующую операцию над множеством матриц k-го ранга

$$\left(C^{\mathcal{B}} \odot D^{\mathcal{B}}\right) \stackrel{def}{=} \sum_{(k,j,l_1,\dots ,l_k)\in\mathcal{B}} {}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}D_{jl_1\dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами. Далее будем обозначать

$$(s \ominus t)^{\mathcal{B}} = \{ {}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1\dots l_k} : \ (j, l_1, \dots , l_k, k) \in \mathcal{B} \}.$$

Докажем теорему о разложении процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$.

Теорема 3.1 *Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, порожденный решением уравнения (1.36), r+1 раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента $t \in [0, T]$ в ряд вида:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{r+1_{s,t}}, \tag{3.9}$$

где равенство справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в (3.9) введены обозначения:

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right), \tag{3.10}$$

где

$$C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\} = \left\{ {}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_t\} : \ (j, l_1, \dots , l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$Q^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\} = \left\{ L^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} : \ (j, l_1, \dots , l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$H^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\} = \left\{ {}^{(1)}G_0{}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} : \ (j, l_1, \dots , l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$
{}^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_t\}=\begin{cases}{}^{(k)}L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_t\} & \textit{при } k>0\\ \qquad L^j\{\eta_t\} & \textit{при } k=0\end{cases},
$$

$$
\mathcal{A}_q=\left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k): k+j+\sum_{p=1}^{k}l_p=q;\ k,j,l_1,\ldots,l_k=0,1,\ldots\right\},
$$

$$
L^j\{\cdot\}\stackrel{def}{=}\begin{cases}\underbrace{L\ldots L}_{j}\{\cdot\} & \textit{при } j>0\\ \qquad\cdot & \textit{при } j=0\end{cases},
$$

$$
{}^{(1)}G_p\{\cdot\}=\frac{1}{p}\left({}^{(1)}G_{p-1}L\{\cdot\}-{}^{(1)}LG_{p-1}\{\cdot\}\right);\ p=1,\ 2,\ldots,
$$

операторы ${}^{(1)}G_0\{\cdot\}$ *и* $L\{\cdot\}$ *такие же как в лемме 3.1.*

Доказательство: Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито. Тогда с вероятностью 1

$$
\eta_s=\eta_t+D_{1_{s,t}}=\left(C^{\mathcal{A}_0}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{\mathcal{A}_0}\right)+D_{1_{s,t}}, \tag{3.11}
$$

где

$$
D_{1_{s,t}}=\int_t^s L\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^s G_0\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau=
$$

$$
=\int_t^s(Q^{\mathcal{A}_0}\{\eta_\tau\}d\tau\odot(s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_0})+\int_t^s\left(\left(H^{\mathcal{A}_0}\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\odot(s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_0}\right). \tag{3.12}
$$

Соотношения (3.11) и (3.12) являются частными случаями (3.9) и (3.10) при $r=0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1_{s,t}}$. С вероятностью 1 имеем:

$$
D_{1_{s,t}}=D^*_{1_{s,t}}+D_{2_{s,t}}, \tag{3.13}
$$

$$
D^*_{1_{s,t}}=(s-t)L\{\eta_t\}+G_0\{\eta_t\}\stackrel{1}{\cdot}J_{0_{s,t}}=(C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{\mathcal{A}_1}), \tag{3.14}
$$

$$
D_{2_{s,t}}=\int_t^s\left(\int_t^{s_1}L^2\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^{s_1}G_0L\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)ds_1+
$$

$$
+\int_t^s\left(\int_t^{s_1}LG_0\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^{s_1}{}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_{s_1}. \tag{3.15}
$$

Заменим с вероятностью 1 порядки интегрирования в (3.15) согласно теореме 2.2:

$$D_{2_{s,t}} = \int_t^s L^2\{\eta_\tau\}d\tau(s-\tau) + \int_t^s LG_0\{\eta_\tau\}d\tau \stackrel{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}} +$$

$$+\int_t^s G_0L\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau(s-\tau) + \int_t^s \left({}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \stackrel{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}} =$$

$$= \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_1}\right) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_1}\right). \quad (3.16)$$

Обьединяя соотношения (3.11)-(3.16) придем с вероятностью 1 к представлению:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{1} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{2_{s,t}}, \quad (3.17)$$

$$D_{2_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_1}\right) + \quad (3.18)$$

$$+\int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_1}\right). \quad (3.19)$$

Нетрудно видеть, что (3.17) и (3.3.1) являются частными случаями (3.9) и (3.10) при $r=1$. Таким образом утверждение теоремы справедливо для $r=0,\ 1$. Продолжая начатый процесс разложения с вероятностью 1 получим на следующем шаге соотношения:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{1} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + \frac{1}{2}(s-t)^2L^2\{\eta_t\} +$$

$$+\left(G_0L\{\eta_t\} - LG_0\{\eta_t\}\right) \stackrel{1}{\cdot} J_{1_{s,t}} + {}^{(2)}G_0G_0\{\eta_t\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,t}} +$$

$$+(s-t)LG_0\{\eta_t\} \stackrel{1}{\cdot} J_{0_{s,t}} + D_{3_{s,t}} =$$

$$= \sum_{q=0}^{1} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + \left(C^{\mathcal{A}_2}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_2}\right) + D_{3_{s,t}} =$$

$$= \sum_{q=0}^{2} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{3_{s,t}}, \quad (3.20)$$

где

$$D_{3_{s,t}} = \int_t^s L^3 \{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int_t^s L^2 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}}(s-\tau) +$$

$$+ \int_t^s \left(LG_0 L \{\eta_\tau\} - L^2 G_0 \{\eta_\tau\} \right) d\tau \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ \int_t^s {}^{(2)}LG_0G_0 \{\eta_\tau\} d\tau \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \int_t^s \left(G_0 L^2 \{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 +$$

$$+ \int_t^s \left({}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}}(s-\tau) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left({}^{(2)}G_0 G_0 L \{\eta_\tau\} - {}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_\tau\} \right) \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ \int_t^s \left({}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} =$$

$$= \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_2}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2} \right) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_2}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2} \right). \quad (3.21)$$

Следовательно утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$ и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процесам в (3.10) с вероятностью 1 получим

$$D_{r+1_{s,t}} = D^*_{r+1_{s,t}} + D_{r+2_{s,t}}, \quad (3.22)$$

$$D^*_{r+1_{s,t}} = \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_t\} \odot \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) +$$

$$+ \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \quad (3.23)$$

$$D_{r+2_{s,t}} = \int_t^s \left(\int_t^{\tau_1} dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau_1 \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(\int_t^{\tau_1} dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right), \quad (3.24)$$

где

$$dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} =$$

$$= \left\{ {}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} d\tau + {}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : \ (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\},$$

$$dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} =$$

$$= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{:} d\mathbf{f}_\tau :\ (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\},$$

где

$$\begin{gathered} {}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k)}L^{j+2}G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\}, \\ {}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}LG_0L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\}, \\ {}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}G_0L^{j+1}G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\}, \\ {}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+2)}G_0G_0L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\}. \end{gathered}$$

Заменим с вероятностью 1, согласно лемме 2.3, порядки интегрирования в повторных стохастических интегралах в (3.24):

$$D_{r+2_{s,t}} = \int_t^s \left(\left(dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \int_\tau^s d\tau_1 \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{:} \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right). \tag{3.25}$$

Рассмотрим $\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}$ и $\int_\tau^s d\mathbf{f}^{(q)}_{\tau_1} (s \ominus \tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k} d\tau_1;\ q = 1, \ldots, m.$

Согласно свойствам (3.7) и (3.8) с вероятностью 1 имеем

$$\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k} = \begin{cases} (s \ominus \tau)^{(i_1\ldots i_k)}_{j+1\ l_1\ldots l_k} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}} (s \ominus \tau)^{(i_1\ldots i_k)}_{j+1\ l_1+j+1\ l_2\ldots l_k} \\ \text{при } k > 0 \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} \text{ при } k = 0 \end{cases}, \tag{3.26}$$

$$\int_\tau^s d\mathbf{f}^{(q)}_{\tau_1} (s \ominus \tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k} = \frac{1}{(s-\tau)^j} (s \ominus \tau)^{(qi_1\ldots i_k)}_{jjl_1\ldots l_k};\ k = 0,\ 1,\ \ldots. \tag{3.27}$$

Подставим (3.26) и (3.27) в (3.25) и заметим, что получающийся результат с вероятностью 1 запишется в виде:

$$D_{r+2_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{:} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \tag{3.28}$$

Таким образом (3.10) доказано.

После подстановки (3.26) и (3.27) при $\tau = t$ в (3.23) с вероятностью 1 получим

$$D^*_{r+1_{s,t}} = \left(C^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_{r+1}}\right). \tag{3.29}$$

Таким образом соотношения (3.22), (3.28) и (3.29) доказывают соотношение (3.9). Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что часть членов в сумме в правой части (3.9) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \to t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$. Это заключение вытекает из свойства (3.6). Следующая теорема показывает, как необходимо видоизменить разложение (3.9) чтобы упорядочить его члены по порядкам малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь наибольший порядок малости.

Теорема 3.2 *В условиях теоремы 3.1 справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Тейлора-Ито процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$ в окрестности фиксированного момента $t \in [0, T]$:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}\right) + H_{r+1_{s,t}}, \tag{3.30}$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{def}{=} \left(C\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}},$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right),$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) = q; k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{U}_r = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : \ k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p \le r;\right.$$

$$\left. k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) \ge r + 1; \ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, \ 1, \ldots \right\},$$

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_r(s-t)^{(r+1)/2};\ C_r = const < \infty;\ r = 0,\ 1,\ \ldots,$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 3.1.

Доказательство: Нетрудно видеть, что разложение (3.9) может быть представлено с вероятностью 1 в следующей форме:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r}\left(C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}\right) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{def}{=} \left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}}.$$

с помощью неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le \sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}} + \sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}}. \tag{3.31}$$

Рассмотрим величины в правой части (3.31). Поскольку

$$\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_t\}\, J_{l_1\ldots l_{k s,t}}^{(i_1\ldots i_k)},$$

то в малой окрестности момента t из свойства (3.6) и неравенства Минковского получаем

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}} \le C_r^{'}(s-t)^z,\ C_r^{'} = const < \infty,$$

где

$$z = \min_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r}\left\{\frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(C\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}} \le C_r^{'}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_r^{'} = \text{ const } < \infty. \tag{3.32}$$

Рассмотрим $D_{r+1_{s,t}}$:

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+\int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k)\in\mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} \left(\int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1\dots l_{k s,\tau}}^{(i_1\dots i_k)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{m} \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1\dots l_{k s,\tau}}^{(i_1\dots i_k)}\right).$$

В малой окрестности момента t с помощью теоремы 2.3 о замене порядка интегрирования, свойства (3.6) и неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_r''(s-t)^{z'},\ C_r'' = \text{const} < \infty,$$

где

$$z' = \min_{\substack{k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p = r \\ 0\le k\le r}} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^{k} l_p,\ \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^{k} l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_r''(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_r'' = \text{const} < \infty. \qquad (3.33)$$

Из (3.31)-(3.33) получаем

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_r(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_r = \text{const} < \infty.$$

Теорема доказана.

3.3.2 Вторая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы $I_{l_1\dots l_{k s,t}}^{(i_1\dots i_k)}$ вида:

$$I_{l_1\dots l_{k s,t}}^{(i_1\dots i_k)} = \begin{cases} \int\limits_t^s (t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int\limits_{\tau_{k-1}}^{s} (t-\tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при}\ \ k>0 \\ 1 & \text{при}\ k=0 \end{cases}, \qquad (3.34)$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$. Далее обозначим: ${}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}=\left\|I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}$. Поскольку между повторными стохастическими интегралами $J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$ и $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$ справедливо с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}=\sum_{j_1=0}^{l_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{l_k}C^{j_1}_{l_1}\ldots C^{j_k}_{l_k}\ (s-t)^{l_1+\ldots+l_k-j_1-\ldots-j_k}\ I^{(i_1\ldots i_k)}_{j_1\ldots j_{k_{s,t}}},$$

где $C^m_n=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ -биномиальный коэффициент, то разложение процесса Ито $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$ можно проводить как по повторным стохастическим интегралам $J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$, что было сделано ранее, так и по повторным стохастическим интегралам $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$.

Рассмотрим некоторые свойства повторных стохастических интегралов $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$, вытекающие из результатов главы 2:

$$\mathsf{M}\left\{I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}\right\}=0,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}\right)^2\right\}=\frac{(s-t)^{2(l_1+\ldots+l_k)+k}}{(2l_1+1)(2(l_1+l_2)+2)\ldots(2(l_1+\ldots+l_k)+k)},$$

$$\int_t^s(s-\tau)^j d\mathbf{f}^{(p)}_\tau I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,\tau}}}=I^{(pi_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_{k_{s,t}}},\quad p=1,\ldots,m;\ j=0,\ 1,\ldots,$$

$$\int_t^s(s-\tau)^j d\tau I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,\tau}}}=-\frac{1}{j+1}I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1+j+1\ l_2\ \ldots\ l_{k_{s,t}}},\quad j=0,\ 1,\ldots,$$

$$I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}=\int_t^s(t-\tau_1)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_{k-1}}(t-\tau_k)^{l_1}d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_k}\ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_1},$$

где последние три свойства справедливы с вероятностью 1.

Пусть

$$(s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{B}}=\left\{{}^{(k)}(s\hat{\ominus}t)_{jl_1\ldots l_k}:(j,l_1,\ldots,l_k,k)\in\mathcal{B}\right\}$$

и пусть

$${}^{(k)}(s\hat{\ominus}t)_{jl_1\ldots l_k}=\left\|(s\hat{\ominus}t)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1},$$

где

$$(s\hat{\ominus}t)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}=\frac{(s-t)^j}{j!}I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}};$$

$\mathcal{B}$ - некоторое подмножество множества наборов $(j,l_1,\ldots,l_k,k)$ целых неотрицательных чисел.

Сформулируем теорему о разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0,T] \rightarrow \Re^1$ в ряд по повторным стохастическим интегралам $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$.

Теорема 3.3 *Пусть случайный процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения (1.36). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента времени* $t \in [0,T]$ *в ряд по повторным стохастическим интегралам* $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$ *вида:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{r+1_{s,t}}, \tag{3.35}$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot}\ d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_r}\right), \tag{3.36}$$

где равенство (3.35) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.35) и (3.36) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения:

$$\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} = \left\{{}^{(k)}\hat{C}_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_t\} : (j,k,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{A}_q\right\},$$

где

$${}^{(k)}\hat{C}_{jl_1\ldots l_k}\{\cdot\} = \begin{cases} {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\{\cdot\} & \textit{при } k>0 \\ L^j\{\cdot\} & \textit{при } k=0 \end{cases},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 3.1.

Доказательство: Нетрудно убедиться, что при $q = 0,\ 1, \ldots$ выполняются с вероятностью 1 равенства:

$$\left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) = \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \odot (s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{A}_q}\right). \tag{3.37}$$

Используя (3.37) и теорему 3.1 приходим к утверждению настоящей теоремы. Теорема доказана.

Сформулируем теперь теорему о разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0,T] \rightarrow \Re^1$ в унифицированный ряд Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$.

Теорема 3.4 *Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ непрерывно дифференцируем $r+1$ раз по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента времени $t \in [0,T]$ в унифицированный ряд Тейлора-Ито вида:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{D}_q} \right) + H_{r+1_{s,t}}, \tag{3.38}$$

$$H_{r+1_{s,t}} \overset{def}{=} \left(\hat{C}\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{U}_r} \right) + D_{r+1_{s,t}}, \tag{3.39}$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \tag{3.40}$$

причем: $\sqrt{\mathsf{M}\left\{ \left(H_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\}} \le C_{r+1}(s-t)^{(r+1)/2}$, $C_{r+1} = const < \infty$, $r \in \mathcal{N} \bigcup \{0\}$, *где равенство (3.38) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.38)-(3.40) существует в среднеквадратическом смысле и в них введены такие же обозначения, как в теоремах 3.1, 3.2 и 3.3.*

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теоремы 3.2, поэтому не будем на нем останавливаться.

3.4 Разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Сравнение с унифицированными разложениями Тейлора-Ито

Как уже отмечалось ранее, разложения Тейлора-Ито были впервые получены Вагнером и Платеном в [30], [32]. Эти результаты содержатся также в монографии [38]. В настоящем параграфе произведем сопоставление разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена с унифицированными разложениями Тейлора-Ито, полученными в предыдущем параграфе. Сначала приведем результаты, полученные Вагнером и Платеном в [30], [32]. При этом будем придерживаться принятых в данной монографии обозначений и терминов.

Теорема 3.5 (W.Wagner, E.Platen) *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \ \Re^n \times [0,T] \rightarrow \Re^1$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения (1.36). Тогда процесс* η_s *разлагается в окрестности фиксированного момента* $t \in [0,T]$ *в ряд вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + D_{r+1_{s,t}}, \qquad (3.41)$$

$$D_{r+1_{s,t}} =$$

$$= \sum_{(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_1)} \int_t^s \ldots \left(\int_t^{\tau_r} {}^{(p_{r+1})}Q_{\lambda_{r+1}}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_{r+1}}\} \overset{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}}\right)\ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \qquad (3.42)$$

где равенство (3.41) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.41) и (3.42) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения: $\lambda_l = 1,\ 0;$ $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j;$ $Q_{\lambda_l}^{(0)}\{\cdot\} = L\{\cdot\}$ *и* $i_l = 0$ *при* $\lambda_l = 0;$ $Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\{\cdot\} = G_0^{(i_l)}\{\cdot\}$ *и* $i_l = 1,\ldots,m$ *при* $\lambda_l = 1;$ $(i_k,\ldots,i_{l-1},0,i_{l+1}\ldots,i_1) \overset{def}{=} (i_k,\ldots,i_{l-1},i_{l+1}\ldots,i_1);$ $\sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)}$ *- сумма по всем возможным перестановкам* $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1);$ $\overset{0}{\cdot}$*-означает умножение на скаляр;*

$${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \left\|J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}\right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \qquad m\lambda_l},$$

где $J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)} = \int_t^s\ldots\int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}$ *при* $k \geq 1$ *и* $J_{(\lambda_0\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_0\ldots i_1)} \overset{def}{=} 1;$ $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ *при* $i = 1,\ldots,m$ *и* $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau.$

Нетрудно понять, что (3.41) получается путем $r+1$ кратного последовательного применения формулы Ито к процессу $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Упорядочим члены разложения (3.41) по возрастанию порядков малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле. В результате будет получаться ряд, который в нашей терминологии будет называться разложением Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена.

Теорема 3.6 *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \ \Re^n \times [0,T] \rightarrow \Re^1$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения (1.36). Тогда* *он разлагается в окрестности фиксированного момента* $t \in [0, T]$ *в ряд Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + H_{r+1_{s,t}}, \tag{3.43}$$

$$H_{r+1_{s,t}} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} +$$

$$+D_{r+1_{s,t}}, \tag{3.44}$$

где равенство (3.43) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.43) и (3.44) существуют в среднеквадратическом смысле, причем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_{r+1}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где $C_{r+1} = const < \infty$; *множества* $\mathcal{E}_{qk}$ *и* $\mathcal{G}_{qk}$ *имеют вид:* $\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k = q\}$; $\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : r + 1 \le 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k \le 2r\}$; *остальные обозначения этой теоремы такие же, как в теореме 3.5.*

Доказательство теоремы сводится к пересортировке членов разложения (3.41), после чего приходим к (3.43).

Произведем анализ унифицированных разложений Тейлора-Ито и разложения Тейлора-Ито (3.43). Наиболее важным отличием унифицированных разложений Тейлора-Ито от разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида (3.43) является то, что они содержат существенно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, и при том большая часть из них имеет меньшую кратность. Это особенно важно, поскольку проблема совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито из разложений Тейлора-Ито является сложной с теоретической и вычислительной точки зрения. Вопросы, связанные с численным моделированием указанных повторных стохастических интегралов будут рассматриваться в главе 4. Ряд результатов, связанных с этой проблемой содержится также в [35], [45], [49], [50], [51].

Рассмотрим на сколько существенно различие в количестве различных повторных стохастических интегралов Ито в указанных выше разложениях. Унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.38) до малых $O((s-t)^{\frac{3}{2}})$

γ	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	...
N	2	4	7	12	20	33	...
M	2	5	9	17	29	51	...
Δ	0	1	2	5	9	18	...

Таблица 3.1

содержит 4 различных повторных стохастических интеграла: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)},\ I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i_1)},\ I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$. В то же время разложение (3.43) содержит 5 различных повторных стохастических интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)},\ J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)},\ J_{(10)s,t}^{(i_2)},\ J_{(01)s,t}^{(i_1)},\ J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. Унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.38) до малых $O((s-t)^2)$ содержит 7 различных повторных стохастических интегралов Ито: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{1_{s,t}}^{(i_1)},\ I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}, I_{01_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{10_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{0000_{s,t}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Аналогичное разложение (3.43) содержит уже 9 различных повторных стохастических интегралов Ито: $J_{(1)s,t}^{(i_1)},\ J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)},\ J_{(10)s,t}^{(i_2)},\ J_{(01)s,t}^{(i_1)},\ J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)},\ J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)},\ J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)},\ J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)},\ J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Для унифицированного разложения Тейлора-Ито (3.38) и разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена до малых $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ имеем соответственно следующие наборы, входящих в них различных повторных стохастических интегралов: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)},\ I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{1_{s,t}}^{(i_1)},\ I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)},\ I_{01_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{10_{s,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{0000_{s,t}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)},\ I_{2_{s,t}}^{(i_1)}, I_{010_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{100_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)},\ I_{001_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)},\ I_{00000_{s,t}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$ и $J_{(1)s,t}^{(i_1)},\ J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)},\ J_{(10)s,t}^{(i_2)},\ J_{(01)s,t}^{(i_1)},\ J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)},\ J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)},\ J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)},\ J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)},\ J_{(1110)s,t}^{(i_4 i_3 i_2)},\ J_{(1101)s,t}^{(i_4 i_3 i_1)},\ J_{(1011)s,t}^{(i_4 i_2 i_1)},\ J_{(0111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)},\ J_{(001)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(010)s,t}^{(i_2)},\ J_{(100)s,t}^{(i_3)},\ J_{(11111)s,t}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$.

Пусть N-число различных повторных стохастических интегралов, входящих в унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.38) до малых $O((s-t)^{\gamma})$, M-аналогичное число для разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, а $\Delta = M - N$. В таблице 3.1 помещены значения $N,\ M$ и Δ при $\gamma = (r+1)/2;\ r = 1, \ldots, 6$.

3.5 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R:\ \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, а $\mathbf{x}_s$-решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда, согласно определению 3.1, он представим с вероятностью 1 при всех $s,t\in[0,T]$ таких, что $s\ge t$ в виде:

$$\eta_s=\eta_t+\int_t^s B_0\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^s {}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau, \tag{3.45}$$

где случайные процессы $B_0\{\eta_\tau\}$ и ${}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}$, называемые производными по Ито процесса η_s, удовлетворяют условиям существования в среднеквадратическом смысле правой части (3.45). Рассмотрим стохастический интеграл Ито $\int_t^s {}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau$ из правой части (3.45). Будем предполагать, что процесс ${}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}$ также как и процесс η_s является непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда $\forall s,t\in[0,T]:\ s\ge t$ имеем покомпонентно справедливое с вероятностью 1 представление:

$${}^{(1)}B_1\{\eta_s\}={}^{(1)}B_1\{\eta_t\}+\int_t^s {}^{(1)}B_{01}\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^s {}^{(2)}B_{11}\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau.$$

Пусть случайные процессы ${}^{(1)}B_{01}\{\eta_\tau\}$ и ${}^{(2)}B_{11}\{\eta_\tau\}$ покомпонентно удовлетворяют условиям леммы 1.2, накладываемым на процессы a_τ и b_τ соответственно. Тогда согласно лемме 1.2 справедливо с вероятностью 1 равенство:

$$\int_t^s B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=\int_t^{*s} B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}-\frac{1}{2}\int_t^s B_{11}^{(i_1i_1)}\{\eta_\tau\}d\tau. \tag{3.46}$$

Подставляя (3.46) в (3.45) с вероятностью 1 получим:

$$\eta_s=\eta_t+\int_t^s B_\alpha\{\eta_\tau\}d\tau+\int_t^{*s} {}^{(1)}B_\beta\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau, \tag{3.47}$$

где введены обозначения:

$$B_\alpha\{\eta_\tau\}=B_0\{\eta_\tau\}-\frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^m B_{11}^{(i_1i_1)}\{\eta_\tau\},\ B_\beta^{(i_1)}\{\eta_\tau\}=B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\}. \tag{3.48}$$

Далее будем называть процессы $B_\alpha\{\eta_\tau\}$ и ${}^{(1)}B_\beta\{\eta_\tau\}$, входящие в представление (3.47) производными по Стратоновичу случайного процесса η_s в каком-либо (в данном случае в среднеквадратическом) вероятностном смысле. Сам же процесс η_s, удовлетворяющий представлению (3.47) будем называть дифференцируемым по Стратоновичу.

Дадим определение многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Определение 3.3 *Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s) \in \Re^1$ называется N раз непрерывно дифференцируемым по Стратоновичу на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.36) в некотором вероятностном смысле, если соотношение (3.47) справедливо с вероятностью 1 и при $k = 2,\ 3, \ldots, N$; $\forall s, t \in [0, T]:\ s \geq t$ справедливо покомпонентно с вероятностью 1 представление:*

$$
{}^{(p_{k-1})}B_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_s\} = {}^{(p_{k-1})}B_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_t\} + \int_t^s {}^{(p_{k-1})}B_{\alpha\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\}d\tau +
$$

$$
+\int\limits_t^{*s} {}^{(p_{k-1}+1)}B_{\beta\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau, \tag{3.49}
$$

где матричные случайные процессы ${}^{(p_l)}B_{\mu_l\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\}(l = 1, \ldots, N)$, непрерывные на промежутке $[0, T]$ в соответствующем вероятностном смысле, называются l-ми производными процесса η_s по Стратоновичу, правые части (3.47) и (3.49) существуют в том же вероятностном смысле и в (3.49) введены следующие обозначения: ${}^{(p_l)}B_{\mu_l\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} = \left\| B^{(i_l\ldots i_1)}_{\mu_l\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\}\right\|^{m\delta_1 \qquad m\delta_l}_{i_1=\delta_1,\ldots,i_l=\delta_l}$; $\mu_l = \alpha,\ \beta$; $\delta_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$ и $\delta_l = 1$ при $\mu_l = \beta$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l}\delta_j$.

Следует отметить, что k-ые производные по Стратоновичу покомпонентно определяются при $k = 2,\ 3, \ldots, N$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$
B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\alpha\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} = B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{0\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2}\sum_{i_k=1}^{m} B^{(i_k i_k i_{k-1}\ldots i_1)}_{11\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\}, \tag{3.50}
$$

$$
B^{(i_k i_{k-1}\ldots i_1)}_{\beta\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} = B^{(i_k i_{k-1}\ldots i_1)}_{1\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\}, \tag{3.51}
$$

а при $k = 1$ соотношениями (3.48), где $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$. Предполагается, что $(i_k, \ldots, i_{l+1}, 0, i_{l-1}, \ldots, i_1) = (i_k, \ldots, i_{l+1}, i_{l-1}, \ldots, i_1)$.

Приведем достаточные условия N кратной непрерывной дифференцируемости по Стратоновичу.

Лемма 3.4 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\eta_s = \mathbf{x}_s^{(i)} \in \Re^1$, *где* $\mathbf{x}_s^{(i)} - i-$*я компонента решения* $\mathbf{x}_s \in \Re^n$ *стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36).*

2. *Справедливы неравенства (1.40) и (1.41) при* $n = 2$ *покомпонентно для процессов* $\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)$, $\Sigma(\mathbf{x}_s, s)$, *входящих в стохастическое дифференциальное уравнение (1.36).*

3. *процесс* $\mathbf{x}_s^{(i)}$; $i = 1, \ldots, n$ $N + 1$ *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0, T]$ *на траекториях уравнения (1.36).*

4. $\forall x, y \in \Re^1$, $\forall(\mu_1, \ldots, \mu_l) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N+1} \mathcal{M}_g$, *где* $\mathcal{M}_g = \{(\mu_1, \ldots, \mu_g) : \ \mu_i = \alpha, \beta;\ i = 1, \ldots, g\}$, $\forall t \in [0, T]$ *функции* $B^{(i_l \ldots i_1)}_{\mu_l \ldots, \mu_1}\{x\}$, *определенные соотношениями (3.48), (3.50), (3.51) удовлетворяют условиям:*

$$\left| B^{(i_l \ldots i_1)}_{\mu_l \ldots, \mu_1}\{x\} - B^{(i_l \ldots i_1)}_{\mu_l \ldots, \mu_1}\{y\} \right| \leq K_1 \left| x - y \right|,$$

$$\left| B^{(i_l \ldots i_1)}_{\mu_l \ldots, \mu_1}\{x\} \right| \leq K_2 \left(1 + |x| \right),$$

где $K_1, K_2 = const < \infty$.

Тогда процесс η_s N *раз непрерывно дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0, T]$ *на траекториях уравнения (1.36) и его производные по Стратоновичу определяются соотношениями (3.48), (3.50), (3.51).*

Доказательство леммы заключается в индуктивной проверке справедливости условий леммы 1.2 в условиях леммы 3.4 для процессов $B^{(i_l \ldots i_1)}_{\mu_l \ldots, \mu_1}\{\mathbf{x}_s^{(i)}\}$; $i = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, N + 1$.

Отметим, что нетрудно указать достаточные условия N кратной непрерывной дифференцируемости по Стратоновичу для случайных процессов η_s более общего вида. Однако мы не будем этого делать, поскольку для дальнейшего изложения будет достаточна формулировка леммы 3.4.

3.6 Разложение Тейлора-Стратоновича

Пользуясь связью между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича можно получить разложение процесса Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам Стратоновича. Такое разложение для процессов Ито, представляющих собой гладкое безынерционное преобразование от решения стохастического дифференциального уравнения Ито, впервые было получено в [36](P.E.Kloeden, E.Platen) и было названо разложением Стратоновича-Тейлора. Мы же будем придерживаться следующей терминологии. Термин „разложение Тейлора-Стратоновича" мы будем употреблять только к тому разложению процесса Ито по повторным стохастическим интегралам Стратоновича, члены которого упорядочены в порядке возрастания порядков малости при $s \to t$ в среднеквадратическом смысле, а остаточный член имеет наибольший порядок малости по сравнению с членами указанного разложения. При получении разложений процессов Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам Стратоновича и, в частности, в ряд Тейлора-Стратоновича будем придерживаться обозначений, принятых в данной монографии.

Пользуясь интегральными представлениями (3.47) и (3.49) сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ в ряд по интегралам Стратоновича.

Теорема 3.7 *Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента $t \in [0, T]$ в ряд по интегралам Стратоновича вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\mu_k, \ldots, \mu_1)} {}^{(p_k)}B_{\mu_k \ldots \mu_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J^{*}_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t} + D_{r+1_{s,t}}, \tag{3.52}$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \sum_{(\mu_{r+1}, \ldots, \mu_1)} \int\limits_t^{*s} \ldots \left(\int\limits_t^{*\tau_r} {}^{(p_{r+1})}B_{\mu_{r+1} \ldots \mu_1}\{\eta_{\tau_{r+1}}\} \overset{\mu_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \ldots \overset{\mu_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \tag{3.53}$$

где равенство (3.52) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.52) и (3.53) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения: $\mu_l = \alpha,\ \beta$; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\mu_l = \beta$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l} \delta_j$; $\sum\limits_{(\mu_k, \ldots, \mu_1)}$ - сумма по всем возможным перестановкам $(\mu_k, \ldots, \mu_1)$; $\overset{0}{\cdot}$-умножение на скаляр; $(i_k, \ldots, i_{l+1}, 0, i_{l-1} \ldots, i_1) \overset{def}{=} (i_k, \ldots, i_{l+1}, i_{l-1} \ldots, i_1)$; ${}^{(p_k)}J^{*}_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t} = \left\| J^{*(i_k \ldots i_1)}_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t} \right\|^{m\delta_1 \quad m\delta_k}_{i_1=\delta_1, \ldots, i_k=\delta_k}$, $J^{*(i_k \ldots i_1)}_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t} =$

$\int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}$, *где введено обозначение:* $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ *при* $i = 1, \ldots, m$ *и* $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; *производные по Стратоновичу при* $k = 2,\ 3, \ldots, r$ *покомпонентно определяются рекуррентными соотношениями*

$$B_{\alpha\mu_{k-1}\ldots\mu_1}^{(i_{k-1}\ldots i_1)}\{\eta_\tau\} = LB_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}^{(i_{k-1}\ldots i_1)}\{\eta_\tau\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i_k=1}^{m} G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}^{(i_{k-1}\ldots i_1)}\{\eta_\tau\},$$

$$B_{\beta\mu_{k-1}\ldots\mu_1}^{(i_k i_{k-1}\ldots i_1)}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}^{(i_{k-1}\ldots i_1)}\{\eta_\tau\}$$

а при $k = 1$ *определяются соотношениями:*

$$B_\alpha\{\eta_\tau\} = L\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\left\{\eta_\tau\right\},\ B_\beta^{(i_1)}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_1)}\left\{\eta_\tau\right\},$$

где операторы $L\{\cdot\}$ *и* $G_0^{(i)}\{\cdot\}$; $i = 1, \ldots, m$ *такие же, как в лемме 3.1.*

Порядок малости при $s \to t$ в среднеквадратическом смысле общего члена разложения (3.52) определяется только порядком малости повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t}^{*(i_k\ldots i_1)}$. В главе 4 будет показано, что этот повторный стохастический интеграл Стратоновича имеет такой же порядок малости при $s \to t$ в среднеквадратическом смысле, что и соответствующий ему стохастический интеграл Ито. Поэтому общий член разложения (3.52) будет иметь порядок малости равный порядку малости повторного стохастического интеграла: $J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)} = \int_t^s \ldots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}$, где $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$. Нетрудно видеть, что: $\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}\right)^2\right\}} \le C_k(s-t)^{k-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_k}$, $C_k = const < \infty$. В силу сказанного, видно, что часть слагаемых разложения (3.52) имеет больший порядок малости при $s \to t$ в среднеквадратическом смысле, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$ разложения (3.52), для которого в малой окрестности t справедлива оценка:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_{r+1}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_{r+1} = const < \infty.$$

Сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R:\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ в упорядоченный по порядкам малости в среднеквадратическом смысле ряд по интегралам Стратоновича или ряд Тейлора-Стратоновича.

Теорема 3.8 *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0, T]$ *на траекториях уравнения (1.36). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента* $t \in [0, T]$ *в ряд Тейлора-Стратоновича вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\mu_k, \ldots, \mu_1) \in \mathcal{B}_{qk}} {}^{(p_k)}B_{\mu_k \ldots \mu_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t} + H_{r+1_{s,t}}, \qquad (3.54)$$

$$H_{r+1_{s,t}} = D_{r+1_{s,t}} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\mu_k, \ldots, \mu_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)}B_{\mu_k \ldots \mu_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{\mu_k \ldots \mu_{1_{s,t}}}, \qquad (3.55)$$

где равенство (3.54) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.54) и (3.55) существуют в среднеквадратическом смысле, причем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \le C_{r+1}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_{r+1} = const < \infty,$$

множества $\mathcal{B}_{qk}$ *и* $\mathcal{G}_{qk}$ *имеют вид:*

$$\mathcal{B}_{qk} = \left\{(\mu_k, \ldots, \mu_1):\ 2k - \delta_1 - \ldots - \delta_k = q\right\};$$

$$\mathcal{G}_{rk} = \left\{(\mu_k, \ldots, \mu_1):\ r+1 \le 2k - \delta_1 - \ldots - \delta_k \le 2r\right\},$$

а остальные обозначения такие же как в теореме 3.7.

3.7 Примеры разложений в ряды Тейлора-Ито

3.7.1 Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито

Приведем примеры разложений решений скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито в ряды Тейлора-Ито, используя следующее обозначение:

$$I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}} = \begin{cases} \int\limits_t^s (t-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-\tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \ldots df_{\tau_k} & \text{при} \ \ k > 0 \\ 1 & \text{при} \ k = 0 \end{cases},$$

где $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \tag{3.56}$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$−случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (3.56); $a,\ b \in \Re^1$-постоянные; $f_t = f(t, \omega) \in \Re^1$- стандартный скалярный винеровский процесс.

Унифицированное разложение Тейлора-Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t-решение стохастического дифференциального уравнения (3.56), до малых $O(t^3)$ при $t \to 0$ имеет вид:

$$\begin{gathered} x_t = x_0 \left\{ 1 + bI_{0_{t,0}} + at + b^2 I_{00_{t,0}} + \right. \\ + abtI_{0_{t,0}} + b^3 I_{000_{t,0}} + 2^{-1} a^2 t^2 + \\ + ab^2 t I_{00_{t,0}} + b^4 I_{0000_{t,0}} + ab^3 t I_{000_{t,0}} + \\ \left. + 2^{-1} b a^2 t^2 I_{0_{t,0}} + b^5 I_{00000_{t,0}} \right\} + H_{6_{t,0}}, \end{gathered} \tag{3.57}$$

где случайный процесс $H_{6_{t,0}}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sqrt{M\left\{\left(H_{6_{t,0}}\right)^2\right\}} \le C_6 t^3;\ C_6 = const < \infty.$$

Разложение (3.57) может быть получено и другим способом. Поскольку решение стохастического дифференциального уравнения (3.56) имеет вид:

$$x_t = x_0 e^{\left(a - \frac{1}{2} b^2\right) t + b f_t}, \tag{3.58}$$

где $t \in [0, T]$, то в предположении о том, что момент времени t находится в малой окрестности нуля, а ω фиксировано мы можем разложить правую часть (3.58) в ряд Тейлора вблизи нуля. Соответствующее разложение имеет вид:

$$\begin{gathered} x_t = x_0 e^{\left(a - \frac{1}{2} b^2\right) t + b f_t} = x_0 e^{\left(a - \frac{1}{2} b^2\right) t} e^{b f_t} = \\ = x_0 \left(1 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right)^2 t^2 + \ldots \right) \times \\ \times \left(1 + b f_t + \frac{1}{2} b^2 f_t^2 + \frac{1}{6} b^3 f_t^3 + \frac{1}{24} b^4 f_t^4 + \frac{1}{120} b^5 f_t^5 + \ldots \right). \end{gathered} \tag{3.59}$$

Перепишем (3.59) в виде:

$$x_t = x_0 \Biggl(1 + bf_t + at + \frac{1}{2!} b^2 \left(f_t^2 - t \right) +$$

$$+ abf_t + \frac{1}{3!} b^3 \left(f_t^3 - 3tf_t \right) + \frac{1}{2} a^2 t^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} ab^2 t \left(f_t^2 - t \right) + \frac{1}{4!} b^4 \left(f_t^4 - 6tf_t^2 + 3t^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} ab^3 t \left(f_t^3 - 3tf_t \right) + \frac{1}{2} a^2 bt^2 f_t +$$

$$+ \frac{1}{5!} b^5 \left(f_t^5 - 10 f_t^3 t + 15 t^2 f_t \right) \Biggr) + H_{6_{t,0}}. \tag{3.60}$$

В конце главы 4, в частности, будут с вероятностью 1 получены следующие формулы для повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_{0_{t,0}} = f_t,$$

$$I_{00_{t,0}} = \frac{1}{2!} b^2 \left(f_t^2 - t \right),$$

$$I_{000_{t,0}} = \frac{1}{3!} b^3 \left(f_t^3 - 3tf_t \right),$$

$$I_{0000_{t,0}} = \frac{1}{4!} b^4 \left(f_t^4 - 6tf_t^2 + 3t^2 \right),$$

$$I_{00000_{t,0}} = \frac{1}{5!} b^5 \left(f_t^5 - 10 f_t^3 t + 15 t^2 f_t \right).$$

Подставляя эти формулы в (3.60) придем к разложению Тейлора-Ито (3.57). Важно отметить, что рассмотренный пример представляет собой тот случай, когда унифицированное разложение Тейлора-Ито и разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена идентичны.

Рассмотрим линейное стационарное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = ax_t dt + bdf_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \tag{3.61}$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$–случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (3.61); $a, \ b \in \Re^1$-постоянные; $f_t = f(t, \omega) \in \Re^1$- стандартный скалярный винеровский процесс. Унифицированное разложение Тейлора-Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t-решение стохастического дифференциального уравнения (3.61), до малых $O(t^{r+1})$ при $t \to 0$ имеет вид:

$$x_t = \sum_{j=0}^{r} \frac{a^j (s-t)^j}{j!} x_t + b \sum_{l=0}^{r} \frac{a^l}{l!} I_{l_{t,0}} + H_{r+1_{t,0}}, \tag{3.62}$$

где случайный процесс $H_{r+1_{t,0}}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sqrt{M\left\{\left(H_{r+1_{t,0}}\right)^2\right\}} \leq C_{r+1} t^{(r+1)/2}; \quad C_{r+1} = const < \infty$$

Нетрудно видеть, что решение стохастического дифференциального уравнения Ито (3.61) имеет вид:

$$x_t = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} df_\tau. \tag{3.63}$$

Будем предполагать, что момент времени t принадлежит малой окрестности нуля, а ω фиксировано. Тогда разложив экспоненты, входящие в (3.63), в ряд Тейлора в окрестности момента времени t получим разложение Тейлора-Ито вида (3.62).

3.7.2 Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых многомерных стохастических дифференциальных уравнений Ито

Приведем примеры многомерных стохастических систем и разложений Тейлора-Ито их решений.

Рассмотрим стохастическое уравнение Матье в технической форме записи:

$$\frac{d^2\varphi_t}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_t}{dt} + \left(c + \varepsilon \mathbf{f}_t^{\cdot(1)}\right) = \mathbf{f}_t^{\cdot(2)}, \tag{3.64}$$

где $\varphi_t = \varphi(t,\omega) \in \Re^1$−решение уравнения (3.64); $\mathbf{f}_t^{\cdot(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{\cdot(2)}$-скалярные независимые гауссовские белые шумы; c и ε-постоянные. Перепишем (3.64) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} \\ -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} & 1 \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{d\varphi_t}{dt}$, $\mathbf{x}_t^{(2)} = \frac{d^2\varphi_t}{dt^2}$; $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$-скалярные независимые стандартные винеровские процессы.

Запишем унифицированное разложение Тейлора-Ито для процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ до малых $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ при $s \to t$:

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{1_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(2)} -$$

$$-\varepsilon(s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0_{s,t}}^{(1)} + (s-t) I_{0_{s,t}}^{(2)} +$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right),$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{0_{s,t}}^{(2)} + (s-t)\left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right) +$$

$$+\left(\varepsilon \mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{x}_t^{(1)}\right) I_{1_{s,t}}^{(1)} - \varepsilon^2 I_{1_{s,t}}^{(2)} + \varepsilon^3 (s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0_{s,t}}^{(1)} - \varepsilon^2 (s-t) I_{0_{s,t}}^{(2)} +$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left(-c\mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^2\left(c\mathbf{x}_t^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right) - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{01_{s,t}}^{(11)} +$$

$$+\varepsilon I_{01_{s,t}}^{(21)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{10_{s,t}}^{(11)} - \varepsilon I_{10_{s,t}}^{(21)}.$$

Рассмотрим стохастическую систему уравнений Лоренца в форме многомерного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)}\\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\\ \mathbf{f}_t^{(3)}\end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$–компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \Re^3$ уравнения (3.66); $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, 2, 3$ –скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a, r, b, c-постоянные.

Запишем унифицированное разложение Тейлора-Ито для процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ и $\mathbf{x}_t^{(3)}$ до малых $O((s-t)^{\frac{7}{2}})$ при $s \to t$:

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} + a(s-t)\left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)}\right) +$$

$$+a\frac{(s-t)^2}{2}\left[-a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)}\right) + r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right] -$$

$$-ac\mathbf{x}_t^{(1)}\left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0_{s,t}}^{(3)} + (s-t) I_{1_{s,t}}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2_{s,t}}^{(3)}\right] +$$

$$+a\frac{(s-t)^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(a+r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-\right.$$

$$\left.-(a+1)\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-\mathbf{x}_t^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right], \qquad (3.67)$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)}=\mathbf{x}_t^{(2)}+(s-t)\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-c\mathbf{x}_t^{(1)}\left(I_{1_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{0_{s,t}}^{(3)}\right)+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-r\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right]+$$

$$+\left(a\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+c(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+$$

$$+ac\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(I_{2_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}\right)+$$

$$+\frac{(s-t)^3}{6}\left\{a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left[-(a+1)\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)+b\mathbf{x}_t^{(3)}-2\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right]+\right.$$

$$+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)a+1-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)+$$

$$\left.+\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(a\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+\mathbf{x}_t^{(1)}(1+b)\right)\right\}, \qquad (3.68)$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)}=\mathbf{x}_t^{(3)}+cI_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)-bc\left(I_{1_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{0_{s,t}}^{(3)}\right)+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\mathbf{x}_t^{(2)}+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\mathbf{x}_t^{(1)}-\right.$$

$$\left.-b\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right]+$$

$$+c\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+$$

$$+\frac{(s-t)^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(-a\mathbf{x}_t^{(2)}+r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\right.\right.$$

$$\left.-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-b\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+$$

$$+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(-a\mathbf{x}_t^{(1)}+2a\mathbf{x}_t^{(2)}-(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)}\right)+$$

$$+\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\Biggr]. \qquad (3.69)$$

Рассмотрим систему уравнений Resслера [26] со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(3)}\\ \mathbf{x}_t^{(1)}+e\mathbf{x}_t^{(2)}\\ f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -c\mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}d\mathbf{f}_t^{(1)}, \qquad (3.70)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)},\ \mathbf{x}_t^{(3)}\in\Re^1$- компоненты решения $\mathbf{x}_t\in\Re^3$ системы (3.70); $\mathbf{f}_t^{(1)}\in\Re^1$-стандартный винеровский процесс; e,f,μ,c–постоянные.

Запишем унифицированное разложение Тейлора-Ито для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (3.70) до малых $O\left((s-t)^{5/2}\right)$:

$$\mathbf{x}_s^{(1)}=\mathbf{x}_t^{(1)}+(s-t)\left(-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)+c\mathbf{x}_t^{(3)}\left[(s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)}+I_{1_{s,t}}^{(1)}\right]+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(1)}-e\mathbf{x}_t^{(2)}-f-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}+\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right]-$$

$$-c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left[I_{01_{s,t}}^{(11)}+(s-t)I_{00_{s,t}}^{(11)}\right], \qquad (3.71)$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)}=\mathbf{x}_t^{(2)}+(s-t)\left(\mathbf{x}_t^{(1)}+e\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+\frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(3)}+\right.$$

$$\left.+e\left(\mathbf{x}_t^{(1)}+e\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right], \qquad (3.72)$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)}=\mathbf{x}_t^{(3)}-c\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0_{s,t}}^{(1)}+(s-t)\left(f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)+$$

$$+c^2\mathbf{x}_t^{(3)}I_{00_{s,t}}^{(11)}+c\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mu-\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[(s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)}+I_{1_{s,t}}^{(1)}\right]+$$

$$+c\left(f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)I_{1_{s,t}}^{(1)}-c^3\mathbf{x}_t^{(3)}I_{000_{s,t}}^{(111)}+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[\left(-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\mathbf{x}_t^{(3)}+\left(f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mu\right)\right]+$$

$$+c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mu\right)\left[I_{10_{s,t}}^{(11)}-I_{01_{s,t}}^{(11)}\right]-c^2\left(f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)I_{10_{s,t}}^{(11)}-$$

$$-c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mu-\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[I_{01_{s,t}}^{(11)}+(s-t)I_{00_{s,t}}^{(11)}\right]+c^4\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0000_{s,t}}^{(1111)}. \qquad (3.73)$$

Литература к главе 3

Мильштейн Г.Н.(1974), Wagner W., Platen E.(1978), Platen E.(1981), Platen E., Wagner W.(1982), Platen E.(1982(I),1982(II)), Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E.(1991), Pettersson R. (1992), Kloeden P.E., Platen E.(1992), Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.(1994), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1993,1996(I),1996(II),1997,1997(I)), Кузнецов Д.Ф.(1997).

Глава 4

Методы аппроксимации повторных стохастических интегралов

В этой главе рассматриваются методы аппроксимации повторных стохастических интегралов. Предлагается метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье, который позволяет представлять эти интегралы в виде кратных рядов из произведений независимых стандартных гауссовских величин. При этом коэффициенты этих рядов являются коэффициентами кратных рядов Фурье по полным ортонормированным системам функций для специальных функций многих переменных. Рассматриваемый метод позволяет получить общие формулы разложения и аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности k. Доказана среднеквадратическая сходимость метода. Произведено сравнение полученного метода и метода Г.Н. Мильштейна разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича.

Рассматривается метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на их приближении интегральными суммами, который также как и метод, основанный на кратных рядах Фурье, позволяет получить общую формулу для аппроксимации повторного стохастического интеграла кратности k. Этот метод не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье, однако среднеквадратически сходится несколько медленнее метода, основанного на кратных рядах Фурье.

4.1 Введение

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$-случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.1); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) :\ \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n;\ \ \Sigma(\mathbf{x}, t) :\ \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n\times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности [3], решения уравнения (4.1); $\mathbf{f}_t \in \Re^m-$ стандартный векторный винеровский процесс с измеримыми при всех $t \in [0, T]$ относительно $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_t$ независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}(i = 1, \ldots, m)$; случайная величина $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ стохастически независима от приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$.

Из результатов главы 3 следует, что при определенных условиях гладкости функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t),\ \Sigma(\mathbf{x}, t)$ и при выполнении определенных моментных условий для процессов $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t),\ \Sigma(\mathbf{x}_t, t)$ решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.1) разлагается [41]-[44] в унифицированные ряды Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам Ито:

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \ldots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \tag{4.2}$$

или

$$J_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \int_t^T (T - t_k)^{l_k} \ldots \int_t^{t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.3}$$

где $l_1, \ldots, l_k = 0,\ 1, \ldots;\ k = 1,\ 2, \ldots;\ i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ или разлагается [30], [32], [38] в ряды Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и ряды Тейлора-Стратоновича по повторным стохастическим стохастическим интегралам

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)T,t}^{(i_k\ldots i_1)} = \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)} \tag{4.4}$$

и

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)T,t}^{*(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^{*T} \ldots \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \tag{4.5}$$

соответственно, где $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_{i_l} = 1$ при $i_l = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_{i_l} = 0$ при $i_l = 0$; $i_1, \dots, i_k = 0,\ 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, m$.

Всвязи с этим проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито возникающая при решении широкого круга задач электродинамики, стохастической механики, теории управления и других дисциплин [38](см. также главу 2) сводится к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (4.2), (4.3), (4.4) или (4.5). Поскольку структура повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.5) или вида

$$I_{l_1 \dots l_{k T,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int\limits_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.6}$$

$$J_{l_1 \dots l_{k T,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (T - t_k)^{l_k} \dots \int\limits_t^{*t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.7}$$

существенно отличается от структуры повторных стохастических интегралов Ито вида (4.2), (4.3) или (4.4), то методы аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича основываются на различных подходах, учитывающих особенности структуры этих интегралов.

Отметим, что от интегралов (4.5), (4.6) и (4.7) можно перейти, с помощью определенных соотношений, к интегралам (4.2), (4.3) и (4.4).

В литературе [35], [45], [49], [50], [51], [52] известны два метода разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича в кратные ряды из произведений стандартных независимых гауссовских величин. Первый из них был предложен Мильштейном Г.Н. в [35] для повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.5). Этот метод основывается на покомпонентном разложении, так называемого, процесса "броуновского моста"вида: $\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta \in \Re^m$, определенного при $t \in [0, \Delta]$, $\Delta > 0$ в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами. Для получения разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.5) в кратный ряд из произведений стандартных независимых гауссовских величин по методу Мильштейна Г.Н. необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (4.5), подстановки с последующим интегрированием по времени разложенных в тригонометрический ряд Фурье компонент винеровского процесса $\mathbf{f}_t$. Эта процедура является достаточно трудоемкой и не приводит [35], [45] к общей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича при его произвольной кратности k. В результате в [35], [45] известны лишь разложения повторных стохастических интегралов вида (4.5) кратностей $1 \div 3$, при этом в работе [35]– кратностей 1 и 2, а в работе [45]– кратностей $1 \div 3$.

Другой и более общий метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$\int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.8}$$

где $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$-гладкие на промежутке $[t, T]$ функции, содержится в работах [49], [50], [51], [52] и рассматривается в этой главе. Идея этого метода навеяна работами [46], [47], [48]. Рассматриваемый в настоящей главе метод основывается на представлении повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.8) в виде кратного стохастического интеграла с последующим разложением подынтегральной функции кратного стохастического интеграла в кратный ряд Фурье по полным ортонормированным системам функций. В результате можно получить общие формулы разложения и аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.8) произвольной кратности k. В дальнейшем этот метод будем называть методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Отметим наиболее существенные преимущества метода, основанного на кратных рядах Фурье перед методом Г.Н.Мильштейна.

1. Метод, основанный на кратных рядах Фурье предусматривает применение различных ортонормированных полных систем функций, а метод Г.Н.Мильштейна допускает применение только тригонометрической системы.

2. Метод, основанный на кратных рядах Фурье дает возможность получить конкретную формулу, которая получена в этой главе, для аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.8) произвольной кратности k. Метод Г.Н.Мильштейна допускает лишь возможность получения такой формулы, однако из-за громоздкости преобразований на которых он основан в настоящее время в литературе [35], [38], [45] известны аппроксимации методом Г.Н.Мильштейна лишь для повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей $1 \div 3$.

3. Метод, основанный на кратных рядах Фурье сводит проблему ап-

проксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича к вычислению коэффициентов Фурье для специальных функций многих переменных. Эти коэффициенты могут вычисляться как аналитически, так и численно. Метод Г.Н.Мильштейна, в силу своих особенностей, исключает возможность применения вычислительных процедур для определения коэффициентов разложения.

В настоящей главе также рассматривается метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на их приближении интегральными суммами, который также как и метод, основанный на кратных рядах Фурье, позволяет получить общую формулу для аппроксимации повторного стохастического интеграла кратности k. Этот метод не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье, однако среднеквадратически сходится несколько медленнее метода, основанного на кратных рядах Фурье.

4.2 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича

Пусть выполнены условия:

1° $\mathbf{f}_\tau \in \Re^m$–измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i = 1, \ldots, m.$

2° $\psi_j(\tau);\ j = 1, \ldots, k$-дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Введем следующие обозначения:

$$J_{T,t}^{(k)s_l \ldots s_1} \stackrel{def}{=} \int_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times$$
$$\times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \ldots \int_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1}) \psi_{s_1+1}(t_{s_1+1}) \times$$
$$\times \int_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1}) \ldots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} dt_{s_1} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \ldots$$
$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.9}$$

$$J_{T,t}^{*(k)} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.10}$$

$$J_{T,t}^{(k)}=\int_t^T\psi_k(t_k)\ldots\int_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.11}$$

где в (4.9)-(4.11) введены обозначения: $(s_l,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kl}$; $\mathcal{A}_{kl}=\{(s_l,\ldots,s_1): s_l>s_{l-1}+1,\ldots,s_2>s_1+1;\ s_l,\ldots,s_1=1,\ldots,k-1\}$; $l=1,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right]$; $i_s=0,\ 1,\ldots,m$; $s=1,\ldots,k$; $[x]$−целая часть числа x. Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там где это необходимо, будут использоваться более развернутые обозначения.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{*(k)}$ произвольной кратности k.

Теорема 4.1 *Пусть условия* $1^\circ,\ 2^\circ$ *выполнены. Тогда справедливо с вероятностью 1 следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича* $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{*(k)}$*:*

$$J_{T,t}^{*(k)}=J_{T,t}^{(k)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J_{T,t}^{(k)s_r\ldots s_1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}. \tag{4.12}$$

Доказательство: Нетрудно по индукции проверить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{(k)s_r\ldots s_1}$, входящие в (4.12). Докажем равенство (4.12) по индукции. Рассмотрим случай $k=1$. Согласно (4.12) с вероятностью 1 имеем:

$$J_{T,t}^{(1)}=J_{T,t}^{*(1)}. \tag{4.13}$$

Соотношение (4.13) является хорошо известным [35], [38]. При $k=2$ из (4.12) с вероятностью 1 получаем:

$$J_{T,t}^{*(2)}=J_{T,t}^{(2)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}J_{T,t}^{(2)1}. \tag{4.14}$$

Рассмотрим процесс $\eta_{t_2}=\psi_2(t_2)J_{t,t_2}^{(1)}$ и найдем с помощью формулы Ито (лемма 1.1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2}=\frac{d\psi_2(t_2)}{dt_2}J_{t,t_2}^{(1)}dt_2+\mathbf{1}_{\{i_1\neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \tag{4.15}$$

Из (4.15) следует, что диффузионный коэффициент процесса η_{t_2} равняется $\mathbf{1}_{\{i_1\neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Далее непосредственно с помощью леммы 1.2 получаем соотношение (4.14). Таким образом утверждение теоремы доказано при $k=1,\ 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором

$k>2$ и докажем его справедливость при значении k на единицу большем. Воспользовавшись предположением индукции с вероятностью 1 имеем:

$$J_{T,t}^{*(k+1)}=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})\left\{J_{t,t_{k+1}}^{(k)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J_{t,t_{k+1}}^{(k)s_r\ldots s_1}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}\right\}d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}=$$

$$=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})J_{t,t_{k+1}}^{(k)}d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})J_{t,t_{k+1}}^{(k)s_r\ldots s_1}d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}. \qquad (4.16)$$

Используя формулу Ито (лемма 1.1) и лемму 1.2 с вероятностью 1 получаем:

$$\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})J_{t,t_{k+1}}^{(k)}d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}=J_{T,t}^{(k+1)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_k=i_{k+1}\neq 0\}}J_{T,t}^{(k+1)k}, \qquad (4.17)$$

$$\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})J_{t,t_{k+1}}^{(k)s_r\ldots s_1}d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}=\begin{cases}J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1},\ s_r=k-1\\ J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_k=i_{k+1}\neq 0\}}J_{T,t}^{(k+1)ks_r\ldots,s_1},\\ s_r<k-1\end{cases}. \qquad (4.18)$$

После подстановки (4.2) и (4.2) в (4.2) и перегруппировки слагаемых приходим с вероятностью 1 к соотношениям:

$$J_{T,t}^{*(k+1)}=J_{T,t}^{(k+1)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}}J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}} \qquad (4.19)$$

при k-четном и

$$J_{T,t}^{*(k'+1)}=J_{T,t}^{(k'+1)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k'}{2}\right]+1}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k'+1,r}}J_{T,t}^{(k'+1)s_r\ldots s_1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}} \qquad (4.20)$$

при $k^{'} = k+1$-нечетном. Из (4.2) и (4.2) с вероятностью 1 получаем:

$$J_{T,t}^{*(k+1)} = J_{T,t}^{(k+1)} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}. \qquad (4.21)$$

Соотношение (4.2) доказывает теорему.

Замечание 1 *Результат теоремы 4.1 при* $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *для стохастических интегралов несколько иного вида, чем* $J_{T,t}^{*(k)}$, $J_{T,t}^{(k)}$ *является известным [38]. Возможно обобщение этих результатов на случай произвольного* k *приводится здесь впервые.*

Замечание 2 *Результат теоремы 4.1 может быть обобщен, т.е. функция* $\psi_1(s)$ *в (4.12) может быть заменена на среднеквадратически непрерывный на промежутке* $[t, T]$ *случайный процесс* ϕ_s, *который является неупреждающим к винеровскому процессу* $\mathbf{f}_s$ *и удовлетворяет при всех* $s \in [t, T]$ *условию:* $\mathsf{M}\left\{\phi_s^2\right\} < \infty$.

4.3 Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций

4.3.1 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских величин

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$—полная ортонормированная на промежутке $[-1,\ 1]$ тригонометрическая система или система полиномов Лежандра. Сформулируем следующую теорему о сходимости ряда Фурье по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

Теорема 4.2 *Пусть* $f(x)$*−ограниченная на промежутке* $[-1,\ 1]$ *функция, которая является кусочно-гладкой на открытом интервале* $(-1,\ 1)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$, *где* $C_j = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\phi_j(x)dx$ *во всякой внутренней точке* x *промежутка* $[-1,\ 1]$ *сходится к величине* $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$. *При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится в точках* $x=-1$ *и* $x = 1$ *к* $f(-1+0)$ *и* $f(1-0)$ *соответственно, а тригонометрический* *ряд Фурье сходится в точках $x = -1$ и $x = 1$ в случае периодического продолжения функции $f(x)$ к $\frac{1}{2}\left(f(-1+0) + f(1-0)\right)$.*

Теорема 4.2 установлена при более слабых условиях для тригонометрического ряда Фурье, в частности, в [54], а для ряда Фурье по полиномам Лежандра в [55].

Результат теоремы 4.2 легко обобщается на случай произвольного промежутка $[t, T]$, где $-\infty < t < T < \infty$.

Рассмотрим функцию $K(t_1, \ldots, t_k),\ k \geq 2$ вида:

$$K(t_1, \ldots, t_k) = \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \tag{4.22}$$

определенную на гиперкубе $[t, T]^k \stackrel{def}{=} [t, T] \underbrace{\times \ldots \times}_{k-1} [t, T]$, где $\psi_i(t);\ i = 1, \ldots, k$-дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции, $\mathbf{1}_{\{\tau < \theta\}} = 1$ при $\tau < \theta$ и $\mathbf{1}_{\{\tau < \theta\}} = 0$ при $\tau \geq \theta$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{A}_j^{+} \left\{\Phi(t_p, \ldots, t_k)\right\} \stackrel{def}{=} \mathbf{1}_{\{t_j = t_{j+1}\}} \left[\Phi(t_p, \ldots, t_j, t_j + 0, t_{j+2}, \ldots, t_k) + \right.$$

$$\left. + \Phi(t_p, \ldots, t_j, t_j - 0, t_{j+2}, \ldots, t_k)\right], \tag{4.23}$$

где $1 \leq p \leq j \leq k-1;\ p, k \in \mathcal{N}$.

Согласно (4.22) и (4.23) имеем:

$$\mathcal{A}_j^{+}\{K(t_1, \ldots, t_k)\} = \mathbf{1}_{\{t_j = t_{j+1}\}} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \tag{4.24}$$

где $\prod\limits_{l \in \emptyset} \stackrel{def}{=} 1;\ j = 1, \ldots, k-1$.

Теорема 4.3 *Пусть выполнены условия:*

1.$\psi_i(\tau);\ i = 1, \ldots, k-$дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

2.$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}-$полная ортонормированная система функций на промежутке $[t, T]$, для которой ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j(x)$, $C_j = \int_t^T f(x)\phi_j(x)dx$ для любой кусочно-гладкой на открытом интервале (t, T) и ограниченной на промежутке $[t, T]$ функции $f(x)$ сходится во всякой внутренней точке x

промежутка $[t,T]$ *к* $\frac{1}{2}\left(f(x+0)\ +f(x-0)\right)$*, а также конечен на концах промежутка* $[t,T]$.

Тогда функция $\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ *разлагается в следующий кратный ряд Фурье внутри гиперкуба* $[t,T]^k$:

$$\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l), \tag{4.25}$$

где

$$\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{\cdot\}=\mathcal{A}^{*}_{k-1}\ldots\mathcal{A}^{*}_{1}\{\cdot\};\quad \mathcal{A}^{*}_{j}\{\cdot\}=\cdot+\frac{1}{2}\mathcal{A}^{+}_{j}\{\cdot\};\ j=1,\ldots,k-1,$$

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int_t^T\ldots\int_t^T K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k. \tag{4.26}$$

При этом ряд (4.25) конечен на границе гиперкуба $[t,T]^k$.

Доказательство: Рассмотрим случай $k=2$ и разложим функцию $K(t_1,t_2)$ вида (4.22) в ряд Фурье по переменной t_1 считая $t_2=const$:

$$K(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2), \tag{4.27}$$

где $C_{j_1}(t_2)=\psi_2(t_2)\int_t^{t_2}\phi_{j_1}(s)\psi_1(s)ds$. Происхождение в правой части (4.27) члена $-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$ вызвано тем, что функция $K(t_1,t_2)$ терпит разрыв при $t_1=t_2$ и по условию 2 теоремы 4.3 $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)$ сходится при $t_1=t_2$ к величине $\frac{1}{2}\left(K(t_2-0,t_2)+\ K(t_2+0,t_2)\right)=\frac{1}{2}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Очевидно, что (4.27) может быть переписано в виде:

$$\mathcal{A}^{*}_{1}\{K(t_1,t_2)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1). \tag{4.28}$$

Разлагая функцию $C_{j_1}(t_2)$ в ряд Фурье на промежутке $[t,T]$ и подставляя результат в (4.28) получим:

$$\mathcal{A}^{*}_{1}\{K(t_1,t_2)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2), \tag{4.29}$$

где $C_{j_2j_1}=\int_t^T\int_t^T K(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)dt_1dt_2$. Кроме того ряд (4.29) конечен на границе квадрата $[t,T]^2$, согласно условию 2 теоремы 4.3. Таким образом утверждение теоремы при $k=2$ доказано. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k>2$. Нетрудно видеть, что из (4.23) следует представление:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}K(t_1,\ldots,t_{k-1}). \tag{4.30}$$

Применим к левой и правой части (4.30) оператор $\mathcal{B}^+_{k-2}\{\cdot\}$:

$$\mathcal{B}^+_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}\mathcal{B}^+_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_{k-1})\}. \tag{4.31}$$

По предположению индукции имеем:

$$\mathcal{B}^+_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_{k-1})\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{\infty}C_{j_{k-1}\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k-1}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l), \tag{4.32}$$

где

$$C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})=$$

$$=\psi_{k-1}(t_{k-1})\int_t^{t_{k-1}}\psi_{k-2}(t_{k-2})\phi_{j_{k-2}}(t_{k-2})\ldots\int_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-2}.$$

После подстановки (4.32) в (4.31) получаем:

$$\mathcal{B}^+_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l). \tag{4.33}$$

Разложим функцию $\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})$ в ряд Фурье по переменным t_{k-1} и t_k на квадрате $[t,T]^2$ аналогично разложению (4.29):

$$\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})=\sum_{j_{k-1}=0}^{\infty}\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\phi_{j_k}(t_k)\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})-$$

$$-\frac{1}{2}\psi_k(t_{k-1})\mathbf{1}_{\{t_{k-1}=t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1}). \tag{4.34}$$

После подстановки (4.34) в (4.33) и использования (4.32) и (4.31) получаем:

$$\mathcal{B}^{+}_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{A}^{+}_{k-1}\left\{\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)\right\}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)-\frac{1}{2}\mathcal{A}^{+}_{k-1}\mathcal{B}^{+}_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}. \tag{4.35}$$

Из (4.35) следует, что:

$$\mathcal{A}^{*}_{k-1}\mathcal{B}^{+}_{k-2}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l). \tag{4.36}$$

Соотношение (4.36) доказывает соотношение (4.25). Сходимость ряда (4.25) на границе гиперкуба $[t,T]^k$ (не обязательно к функции $K(t_1,\ldots,t_k)$) доказывается по индукции с применением условия 2 теоремы 4.3.

Лемма 4.1 *В условиях теоремы 4.1 повторный стохастический интеграл $J^{(k)}_{T,t}$ может быть с вероятностью 1 представлен в виде:*

$$J^{(k)}_{T,t}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_{j_k}}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_{j_1}}, \tag{4.37}$$

где $\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}=\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l+1}}-\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}$; $i_l=0,\ 1,\ldots,m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$-разбиение промежутка $[t,T]$ такого типа, как в определении 1.8; $l=1,\ldots,k$.

Доказательство: Отметим, что существование интеграла $J^{(k)}_{T,t}$ в условиях леммы 4.1 вытекает из леммы 2.1. Докажем соотношение (4.3.1). Представим с вероятностью 1 интеграл $J^{(k)}_{T,t}$, пользуясь свойством аддитивности, в следующем виде:

$$J^{(k)}_{T,t}=\delta_{N,k}+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-r}\delta^{rq}_{N,k}, \tag{4.38}$$

где

$$\delta_{N,k}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

$$\delta_{N,k}^{rq}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_{q-1}=0}^{j_{q-2}-1}\zeta_{j_{q-1}}\sum_{j_q=0}^{j_{q-1}-1}\zeta_{j_q}^{r+1}\sum_{j_{q+r+1}=0}^{j_q-1}\zeta_{j_{q+r+1}}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

где

$$\zeta_{j_q}^{r+1}\stackrel{def}{=}\int_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\psi_{k-q+1}(t_1)\ldots\int_{\tau_{j_q}}^{t_r}\psi_{k-q+1-r}(t_{r+1})d\mathbf{w}_{t_{r+1}}^{(i_{k-q+1-r})}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_{k-q+1})};$$

$$\zeta_{j_q}^{1}\stackrel{def}{=}\zeta_{j_q};\ r=0,\ 1,\ldots,k-1;\ k=1,\ 2,\ldots.$$

Напомним упоминавшиеся ранее следующие свойства случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$:

$1^{\circ\circ}$ $\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_{j_q}^{r+1}\right)^2\right\}\le C_{r+1}\mid\tau_{j_q+1}-\tau_{j_q}\mid^{\gamma_{r+1}};\ C_{r+1}=const<\infty$, где $\gamma_{r+1}=\sum\limits_{i=1}^{r+1}\theta_i$, $\theta_i=1$ при $\mathbf{w}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})}=\mathbf{f}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})}$ и $\theta_i=2$ при $\mathbf{w}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})}=t_i$.

$2^{\circ\circ}$ Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ при всех возможных $r,\ q$ стохастически независимы от значений $\mathbf{f}_s$ и приращений $\mathbf{f}_t-\mathbf{f}_\tau$ винеровского процесса при $s\le\tau_{j_q};\ t>\tau\ge\tau_{j_q+1}$.

$3^{\circ\circ}$ Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ и $\zeta_{j_g}^{p+1}$ при всех возможных $r,\ p=0,\ 1,\ldots,k-1$ стохастически независимы при $g\ne q$.

С помощью свойств $1^{\circ\circ}-3^{\circ\circ}$ и неравенства Минковского нетрудно показать, что второе слагаемое в правой части (4.3.1) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Представим $\delta_{N,k}$ с вероятностью 1 в виде:

$$\delta_{N,k}=\delta_{N,k}^{'}+\delta_{N,k}^{''},\tag{4.39}$$

где

$$\delta_{N,k}^{'}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\xi_{j_k},$$

$$\delta_{N,k}^{''}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\eta_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}+\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\eta_{j_2}\sum_{j_3=0}^{i_2-1}\zeta_{j_3}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}+$$
$$\ldots$$
$$+\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{j_{k-2}-1}\xi_{j_{k-1}}\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\eta_{j_k},$$

где

$$\eta_{j_q}=\int\limits_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\left(\psi_{k-q+1}(t)-\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\right)d\mathbf{w}_t^{(i_{k-q+1})},$$

$$\xi_{j_q}=\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_q}}^{(i_{k-q+1})}.$$

Нетрудно показать, что в силу свойств $1^{\circ\circ}-3^{\circ\circ}$, неравенства Минковского и дифференцируемости функций $\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ второе слагаемое в правой части (4.3.1) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Таким образом лемма доказана.

Замечание 1 *Результат леммы 4.1 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ может быть заменена на среднеквадратически непрерывный на промежутке $[t,T]$ случайный процесс ϕ_s, который является неупреждающим к винеровскому процессу $\mathbf{f}_s$ и удовлетворяет при всех $s\in[t,T]$ условию:* $\mathsf{M}\left\{\phi_s^2\right\}<\infty$.

Замечание 2 *Нетрудно видеть, что если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (4.3.1) при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}$ заменить на $\left(\Delta\mathbf{f}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}\right)^p$ то в интеграле $J_{T,t}^{(k)}$ соответствующий дифференциал $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ примет значение dt_l при $p=2$. Если же $p=3,\ 4,\ldots,$ то правая часть (4.3.1) обратится с вероятностью 1 в ноль. Если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (4.3.1) заменить на $(\Delta\tau_{j_l})^p;\ p=2,\ 3,\ldots,$ то правая часть в (4.3.1) также обратится с вероятностью 1 в ноль.*

Определение 4.1 *Кратным стохастическим интегралом от функции $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$ называется следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=J_{\Phi_{T,t}}^{(k)},\qquad(4.40)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (4.3.1).

Пусть Γ_k-граница гиперкуба $[t,T]^k$. Определим стохастический интеграл по Γ_k от функции $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$, следующим образом:

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\left\{\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}-\sum_{j_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{j_k=1}^{N-2}\right\}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \int \ldots \int_{\Gamma_k} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}. \tag{4.41}$$

Наряду с интегралами вида (4.3.1) введем в рассмотрение следующий стохастический интеграл

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} Q(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} Q(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} = S_{Q_{T,t}}^{(k)}. \tag{4.42}$$

Введем некоторые вспомогательные обозначения:

$$\mathbf{I}_{\{j_l=j_{l+1}\}}(j_{q_0},\ldots,j_{q_1},j_l,j_{q_2},\ldots,j_{q_{p-1}},j_l,j_{q_p},\ldots,j_{q_{p+1}}) \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} (j_{q_0},\ldots,j_{q_1},j_{l+1},j_{q_2},\ldots,j_{q_{p-1}},j_{l+1},j_{q_p},\ldots,j_{g_{p+1}}), \tag{4.43}$$

где $q_i, l \in \mathcal{N}$; $i = 0,\ldots,p+1$; $l \neq q_0,\ldots,q_1,q_2,\ldots,q_{p-1},q_p,\ldots,q_{p+1}$; $(j_{g_1},\ldots,j_{g_k})$ –наборы чисел $j_{g_1},\ldots,j_{g_k}$. Далее будем считать, что для мультииндексов $(j_{g_1}\ldots\ j_{g_k})$ так же как и для наборов $(j_{g_1},\ldots,j_{g_k})$ справедливо соотношение (4.3.1). Будем также считать, что

$$(\ldots,j_p,j_q,\ldots,j_g,j_k,\ldots) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (\ldots,j_p,j_q,j_k,\ldots) & \text{при } q=g \\ (\ldots,j_p,j_k,\ldots) & \text{при } q>g \end{cases},$$

где $p,q,g,k \in \mathcal{N}$. Введем в рассмотрение операторы $C_l^*\{\cdot\}$ и $C_l^+\{\cdot\}$; $l = 1,\ldots,k-1$ вида:

$$C_l^+ \left\{ \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1\ldots j_k)} \right\} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_{l+1}=0}^{j_{l+2}-1} \sum_{j_{l-1}=0}^{j_{l+1}-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{\mathbf{I}_{\{j_l=j_{l+1}\}}(j_1,\ldots,j_k)} a_{\mathbf{I}_{\{j_l=j_{l+1}\}}(j_1\ldots j_k)};$$

$$C_l^*\{\cdot\} \stackrel{def}{=} \cdot + C_l^+\{\cdot\},$$

где $\sum\limits_{(j_{g_1},\ldots,j_{g_k})}$ -сумма по всем перестановкам в наборах $(j_{g_1},\ldots,j_{g_k})$; $g_1,\ldots,g_k \in \{1,\ldots,k\}$, а $a_{(j_{g_1}\ldots j_{g_k})}$–некоторые скалярные величины.

По индукции нетрудно доказать следующее тождество:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1\ldots j_k)} = C_{k-1}^{*}\ldots C_1^{*}\left\{\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1\ldots j_k)}\right\}. \qquad (4.44)$$

Перепишем соотношение (4.3.1) в виде:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1\ldots j_k)} =$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1} C_{s_r}^{+}\ldots C_{s_1}^{+}\left\{\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1\ldots j_k)}\right\}, \qquad (4.45)$$

где $\sum\limits_{\substack{s_0,\ldots,s_1=1\\ s_0>\ldots>s_1}}^{k-1} C_{s_0}^{+}\ldots C_{s_1}^{+}\left\{\cdot\right\} \stackrel{def}{=} \cdot;\ k=1,\ 2,\ldots$. В частности при $k=2$ из (4.3.1) получаем хорошо известную формулу:

$$\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1 j_2)} = \sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2)} a_{(j_1 j_2)} + C_1^{+}\left\{\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2)} a_{(j_1 j_2)}\right\} =$$

$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(a_{(j_1 j_2)}+a_{(j_2 j_1)}\right)+\sum_{j_2=0}^{N-1} a_{(j_2 j_2)}.$$

Положим $a_{(j_1\ldots j_k)} = \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}$. Тогда из (4.3.1) и (4.3.1) имеем:

$$J_{\Phi_{T,t}}^{(k)} = \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)} =$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1}\sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1}\ldots\sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1}\sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\times$$

$$\times\sum_{(j_1,\ldots,j_{s_1-1},j_{s_1+1},j_{s_1+1},\ldots,j_{s_r-1},j_{s_r+1},j_{s_r+1},\ldots,j_k)}$$

$$\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_{s_1-1}},\tau_{j_{s_1+1}},\tau_{j_{s_1+1}},\ldots,\tau_{j_{s_r-1}},\tau_{j_{s_r+1}},\tau_{j_{s_r+1}},\ldots,\tau_{j_k}\right)\times$$

$$\times\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1-1}}}^{(i_{s_1-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1+1})}\ldots$$

$$\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r-1}}}^{(i_{s_r-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r+1})}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_{l+1}}\neq 0\}}\int_t^T\ldots\int_t^{t_{s_r+3}}\int_t^{t_{s_r+2}}\int_t^{t_{s_r}}\ldots$$

$$\ldots\int_t^{t_{s_1+3}}\int_t^{t_{s_1+2}}\int_t^{t_{s_1}}\ldots\int_t^{t_2}\sum_{(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k)}$$

$$\Phi\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)\times$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}dt_{s_1+1}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})}dt_{s_r+1}d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},\qquad(4.46)$$

где $\prod\limits_{l=1}^{0}\stackrel{def}{=}1$; $\sum\limits_{(s_0,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k0}}\stackrel{def}{=}1$; $k=1,\ 2,\ldots$. При этом равенство (4.3.1) справедливо с веротностью 1, если кратный стохастический интеграл в левой части (4.3.1) и стохастические интегралы в правой части (4.3.1) существуют. Следует отметить, что если функция $Q(t_1,\ldots,t_q)$ является непрерывной в области интегрирования интеграла $S_{Q_{T,t}}^{(k)}$ вида (4.3.1), допускает непрерывное продолжение на границу этой области и является ограниченной на границе этой области интегрирования, то интеграл $S_{Q_{T,t}}^{(k)}$ существует.

Теорема 4.4 *Пусть функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ такова, что подынтегральные функции в повторных стохастических интегралах в правой части (4.3.1) непрерывны в областях интегрирования этих интегралов и допускают непрерывные продолжения на границы этих областей и являются ограниченными на границах этих областей интегрирования. Тогда справедливо с вероятностью 1 равенство:*

$$\int\ldots\int_{\Gamma_k}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=0.\qquad(4.47)$$

Доказательство: Для доказательства (4.3.1) и дальнейших рассуждений докажем следующую лемму.

Лемма 4.2 *В условиях теоремы 4.4 справедлива оценка:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(k)}_{\Phi_{T,t}}\right)^2\right\} \le C_k \sup_{(t_1,\ldots,t_k)\in[t,T]^k} \left\{\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)\right\}, \quad C_k = const < \infty. \tag{4.48}$$

Доказательство: Из (4.3.1) следует, что интеграл $J^{(k)}_{\Phi_{T,t}}$ равен конечной сумме интегралов $S^{(q)}_{Q_{T,t}},\ q \le k$ вида (4.3.1) с непрерывными подынтегральными функциями $Q(t_1,\ldots,t_q)$ в областях интегрирования интегралов $S^{(q)}_{Q_{T,t}},\ q \le k$, ограниченными на границах этих областей и непрерывно продолжимых на эти границы областей интегрирования. При этом функции $Q(t_1,\ldots,t_q)$ получаются при $q = k$ из $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ путем всевозможных перестановок переменных $t_1,\ldots,t_k$ и функции $Q(t_1,\ldots,t_q)$ получаются при $q < k$ из $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ путем приравнивания в $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ одной или большего числа пар переменных с последовательными номерами (при этом одновременно не могут приравниваться три или большее число переменных с последовательными номерами) и затем осуществления всевозможных перестановок переменных.

Далее с помощью неравенства Минковского получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(S^{(q)}_{Q_{T,t}}\right)^2\right\} \le C^*_q \sup_{(t_1,\ldots,t_q)\in\mathcal{D}_q} \left\{Q^2(t_1,\ldots,t_q)\right\} \mid T-t\mid^{\gamma_q}, \tag{4.49}$$

где $C^*_q = const < \infty$; $\gamma_q = \sum\limits_{l=1}^{q}\theta_l$, $\theta_l = 1$ при $\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l} = \mathbf{f}^{(i_l)}_{t_l}$ и $\theta_l = 2$ при $\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l} = t_l$; $\mathcal{D}_q = \left\{(t_1,\ldots,t_q):\ t \le t_1 < \ldots < t_q \le T\right\}$. Из (4.3.1) и того, что $J^{(k)}_{\Phi_{T,t}}$ согласно (4.3.1) равен конечной сумме интегралов $S^{(q)}_{Q_{T,t}}$ вида (4.3.1) приходим с помощью неравенства Минковского к утверждению леммы. Лемма доказана.

Замечание *Нетрудно видеть, что неравенство (4.3.1) останется справедливым, если в его левой части заменить стохастический интеграл $J^{(k)}_{\Phi_{T,t}}$ на его интегральную сумму.*

Вернемся к доказательству теоремы 4.4. Предположим сначала, что

$$\Phi(t_1,\ldots,t_k) \equiv 1.$$

Тогда интегральная сумма интеграла $\int\ldots\int_{\Gamma_k}\Phi(t_1,\ldots,t_k)\ d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}$ может быть представлена в следующем виде:

$$\left(\Delta\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_0} + \sum_{j_1=1}^{N-2}\Delta\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_{j_1}} + \Delta\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_{N-1}}\right)\ldots\left(\Delta\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_0} + \sum_{j_k=1}^{N-2}\Delta\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_{j_k}} + \Delta\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_{N-1}}\right) -$$

$$-\sum_{j_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{j_k=1}^{N-2}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}.$$

Нетрудно видеть, что это выражение состоит из конечной суммы случайных величин $\alpha_p^N\beta_{k-p}^N$, где

$$\alpha_p^N=\sum_{s_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{s_p=1}^{N-2}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{s_1}}^{(r_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{s_p}}^{(r_p)},\quad \beta_{k-p}^N=\prod_{l=1}^{k-p}\left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_0}^{(r_{p+l})}+\Delta\mathbf{w}_{\tau_{N-1}}^{(r_{p+l})}\right),$$

где $\alpha_0^N\stackrel{def}{=}1$; $\{r_1,\ldots,r_k\}=\{i_1,\ldots,i_k\}$; $p=0,\ 1,\ldots,k-1$; $k-p=1,\ldots,k$; $i_1,\ldots,i_k=0,\ 1,\ldots,m$. Согласно замечанию к лемме 4.2 $\mathsf{M}\left\{\left(\alpha_p^N\right)^2\right\}<\infty$. Далее используя неравенство Минковского и независимость случайных величин α_p^N и β_{k-p}^N нетрудно показать, что

$$\lim_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}\mathsf{M}\left\{\left(\left\{\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}-\sum_{j_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{j_k=1}^{N-2}\right\}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\right)^2\right\}=0,$$

откуда следует утверждение теоремы при $\Phi(t_1,\ldots,t_k)\equiv 1$. Если же функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 4.4, то очевидно доказательство можно провести аналогично случаю $\Phi(t_1,\ldots,t_k)\equiv 1$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 вытекает следующее, справедливое с вероятностью 1, равенство:

$$J_{\Phi_{T,t}}^{(k)}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{j_k=1}^{N-2}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}.$$

Далее в полной аналогии с доказательством леммы 4.2 приходим в условиях теоремы 4.4 к следующему неравенству:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{\Phi_{T,t}}^{(k)}\right)^2\right\}\le C_k^{'}\sup_{(t_1,\ldots,t_k)\in[t,T]^k\backslash\Gamma_k}\left\{\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)\right\},\quad C_k^{'}=const<\infty. \tag{4.50}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.3 *В условиях теоремы 4.1 с вероятностью 1 справедливо равенство:*

$$\int_t^T\ldots\int_t^T\mathcal{B}_{k-1}^{+}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=J_{T,t}^{*(k)}. \tag{4.51}$$

Доказательство: Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{\cdot\}$ в силу своего определения может быть представлен в виде:

$$
\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{\cdot\}=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{2^r}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{A}^{+}_{s_r}\ldots\mathcal{A}^{+}_{s_1}\{\cdot\}\,, \tag{4.52}
$$

где $\sum\limits_{\substack{s_0,\ldots,s_1=1\\ s_0>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{A}^{+}_{s_0}\ldots\mathcal{A}^{+}_{s_1}\{\cdot\}\overset{def}{=}\cdot;\ k=1,\ 2,\ldots$. Подставляя (4.3.1) в (4.3.1) и используя лемму 4.1 и замечание 2 к лемме 4.1 нетрудно увидеть, что справедливо с вероятностью 1 равенство:

$$
\int_t^T\ldots\int_t^T\mathcal{B}^{+}_{k-1}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}=
$$

$$
=J^{(k)}_{T,t}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J^{(k)s_r\ldots s_1}_{T,t}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}},
$$

из которого согласно теореме 4.1 вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Таким образом, согласно лемме 4.3, теоремам 4.3 и 4.4 с вероятностью 1 имеем:

$$
J^{*(k)}_{T,t}=\int_t^T\ldots\int_t^T\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}, \tag{4.53}
$$

где исключение границы Γ_k гиперкуба $[t,T]^k$ из области интерирования интеграла $J^{*(k)}_{T,t}$ не меняет с вероятностью 1, согласно теореме 4.4, его величины.

Лемма 4.4 *Пусть $\varphi_i(t)$; $i=1,\ldots,k$-дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство:*

$$
\prod_{l=1}^{k}\int_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{w}^{(i_l)}_s=\int_t^T\ldots\int_t^T\prod_{l=1}^{k}\varphi_l(t_l)d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\overset{def}{=}I^{(k)}_{T,t}. \tag{4.54}
$$

Доказательство: Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l}=\mathbf{f}^{(i_l)}_{t_l}$, $l=1,\ldots,k$. По определению 4.1 имеем:

$$
I^{(k)}_{T,t}\overset{def}{=}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\prod_{l=1}^{k}J^{l}_{N},
$$

где $J_N^l \stackrel{def}{=} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j)\Delta\mathbf{f}_{\tau_j}^{(i_l)}$. Пусть $J^l = \int_t^T \varphi_l(s)d\mathbf{f}_s^{(i_l)}$. Покажем, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \prod_{l=1}^{k} J_N^l = \prod_{l=1}^{k} J^l. \qquad (4.55)$$

Нетрудно видеть, что с вероятностью 1 справедливо представление:

$$\prod_{l=1}^{k} J_N^l - \prod_{l=1}^{k} J^l = \sum_{l=1}^{k} \left(\prod_{g=1}^{l-1} J^g\right) \left(J_N^l - J^l\right) \left(\prod_{g=l+1}^{k} J_N^g\right).$$

Поэтому в силу неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{l=1}^{k} J_N^l - \prod_{l=1}^{k} J^l\right)^2\right\} \le$$

$$\le \left(\sum_{l=1}^{k} \left(\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{g=1}^{l-1} J^g\right)^8\right\}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{g=l+1}^{k} J_N^g\right)^8\right\}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l - J^l\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2. \qquad (4.56)$$

Поскольку случайные величины J^l и J_N^l гауссовские и имеют конечную дисперсию, то $\mathsf{M}\left\{\left(J^l\right)^n\right\} < \infty$, $\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l\right)^n\right\} < \infty$ для любого конечного n. Поэтому из (4.3.1) с помощью неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{l=1}^{k} J_N^l - \prod_{l=1}^{k} J^l\right)^2\right\}} \le C_k \sum_{l=1}^{k} \left(\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l - J^l\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (4.57)$$

где $C_k = const < \infty$. Представим $J_N^l - J^l$ в виде:

$$J_N^l - J^l = \sum_{g=0}^{N-1} \zeta_g^l, \qquad (4.58)$$

где $\zeta_g^l = \int_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} \left(\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s)\right) d\mathbf{f}_s^{(i_l)}$. Поскольку случайные величины ζ_g^l независимы при различных g, то нетрудно показать [53], что

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \zeta_j^l\right)^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^4\right\} + 6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left(\zeta_q^l\right)^2\right\}. \qquad (4.59)$$

В силу гауссовости ζ_j^l имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^2\right\} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)\right)^2 ds,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^4\right\} = 3\left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)\right)^2 ds\right)^2.$$

После подстановки этих соотношений в (4.3.1), с учетом дифференцируемости функций $\varphi_i(s)$ получаем, что правая часть (4.3.1) имеет нулевой предел при $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$. Используя этот факт, а также (4.3.1), (4.3.1), (4.3.1) и (4.3.1) приходим к утверждению леммы при $\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = \mathbf{f}_{t_l}^{(i_l)}$, $l = 1, \ldots, k$. Нетрудно видеть, что если при некоторых $l \in \{1, \ldots, k\}$ $\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$, то доказательство леммы упрощается. Лемма доказана.

В силу леммы 4.4 соотношение (4.3.1) может быть с вероятностью 1 переписано в виде:

$$J_{T,t}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \int_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)} + J_{R_{T,t}}^{(k)}, \tag{4.60}$$

где

$$J_{R_{T,t}}^{(k)} \stackrel{def}{=} \int_t^T \ldots \int_t^T R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.61}$$

$$R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) = \left\{\sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k}\right\} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l). \tag{4.62}$$

При этом очевидно, что внутри гиперкуба $[t, T]^k$

$$\lim_{p_1 \to \infty} \ldots \lim_{p_k \to \infty} R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) = 0. \tag{4.63}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.5 *Справедливо равенство:*

$$\lim_{p_1 \to \infty} \ldots \lim_{p_k \to \infty} \mathsf{M}\left\{\left(J_{R_{T,t}}^{(k)}\right)^2\right\} = 0. \tag{4.64}$$

Доказательство: Согласно (4.62), (4.3.1), (4.25) и (4.23) имеем:

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{B}_{k-1}^{+}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{2^r}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{A}_{s_r}^{+}\ldots\mathcal{A}_{s_1}^{+}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{2^r}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{\substack{l=1\\ l\ne s_1,\ldots,s_r}}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l). \qquad (4.65)$$

Согласно (4.65) функция $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4. Тогда из (4.3.1) и (4.3.1) приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

В силу леммы 4.5 и соотношения (4.60) приходим к следующему основному результату.

Теорема 4.5 *В условиях теоремы 4.3 повторный стохастический интеграл Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$ разлагается с вероятностью 1 в следующий сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовских величин:*

$$J_{T,t}^{*(k)}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \qquad (4.66)$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}=\int_t^T\phi_{j_l}(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$-независимые при различных i_l или j_l (если $i_l,\ j_l\ne 0$) стандартные гауссовские величины; $C_{j_k\ldots j_1}$ имеет вид (4.26); $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ —полная ортонормированная система функций на промежутке $[t,T]$, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.3.

Замечание Суммирование в (4.66) ведется сначала по j_k, затем по j_{k-1} и т.д.

Далее вместо $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}$ будем иногда использовать сокращенную запись: $\zeta_{j_l}^{(i_l)}$.

4.3.2 Общие соотношения для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича

Идея аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича заключается в усечении кратных рядов, в которые они разлагаются согласно теореме 4.5 исходя из какого-либо критерия, например среднеквадратического, на точность аппроксимации.

Пусть $J^{*(k)q}_{T,t}$—аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^{*(k)}_{T,t}$, которая имеет вид

$$J^{*(k)q}_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta^{(i_l)}_{(j_l)T,t}, \tag{4.67}$$

где $q<\infty$ и удовлетворяет следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}-J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}\le\varepsilon, \tag{4.68}$$

где ε-заданное малое положительное число.

Изложенный в настоящей главе метод позволяет получить формулу разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича при его произвольной кратности k с использованием не только тригонометрической, но и любой другой, удовлетворяющей условию 2 теоремы 4.3, системе функций.

Сформулируем следующее утверждение.

Лемма 4.6 *Пусть $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^{*(k)}_{T,t}$ определяется формулой:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}-J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}=\int_t^T\ldots\int_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}C^2_{j_k\ldots j_1}. \tag{4.69}$$

Доказательство: В силу среднеквадратической сходимости ряда (4.66) имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}-J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}=\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}-\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}\right)C^2_{j_k\ldots j_1}. \tag{4.70}$$

Для доказательства леммы осталось показать, что

$$\int_t^T \ldots \int_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C^2_{j_k\ldots j_1}. \tag{4.71}$$

Далее замечаем, что справедливо равенство;

$$\int_t^T \ldots \int_t^T \left(\mathcal{B}^{+}_{k-1}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}\right)^2 dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \int_t^T \ldots \int_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \tag{4.72}$$

Поскольку функция $\mathcal{B}^{+}_{k-1}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}$ разлагается внутри гиперкуба $[t,T]^k$, согласно теореме 4.3, в следующий кратный ряд:

$$\mathcal{B}^{+}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l), \tag{4.73}$$

то

$$\int_t^T \ldots \int_t^T \left(\mathcal{B}^{+}_{k-1}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}\right)^2 dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}\sum_{r_1=0}^{q}\ldots\sum_{r_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1}C_{r_k\ldots r_1}\prod_{l=1}^{k}\int_t^T \phi_{j_l}(\tau)\phi_{r_l}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_t^T \ldots \int_t^T G_q(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k, \tag{4.74}$$

где

$$G_q(t_1,\ldots,t_k) = 2F_q(t_1,\ldots,t_k)R_q(t_1,\ldots,t_k) + R_q^2(t_1,\ldots,t_k),$$

$$F_q(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l),$$

$$R_q(t_1,\ldots,t_k) = \mathcal{B}^{+}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} - F_q(t_1,\ldots,t_k).$$

В силу ортонормированности системы функций $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ на промежутке $[t,T]$ следует, что первое слагаемое в правой части (4.74) равно $\sum\limits_{j_1=0}^{q}\ldots\sum\limits_{j_k=0}^{q} C^2_{j_k\ldots j_1}$. Поэтому для доказательства (4.71) осталось показать, что

$$\lim_{q\to\infty}\int_t^T \ldots \int_t^T G_q(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k = 0.$$

В силу равенства (4.74) второй интеграл в его правой части существует. Согласно формуле (4.3.1) следует, что справедливо соотношение:

$$\int_t^T \ldots \int_t^T G_q(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \left(\sum_{(t_1, \ldots, t_k)} G_q(t_1, \ldots, t_k) \right) dt_1 \ldots dt_k, \tag{4.75}$$

причем, как будет далее видно, все входящие в (4.75) интегралы существуют. Рассмотрим подробнее интеграл в правой части (4.75). Если в перестановке $(t_1, \ldots, t_k)$ взята комбинация $t_1, \ldots, t_k$, то

$$\int_t^T \ldots \int_t^{t_2} G_q(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \left(2F_q(t_1, \ldots, t_k) \left(\prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) - F_q(t_1, \ldots, t_k) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) - F_q(t_1, \ldots, t_k) \right)^2 \right) dt_1 \ldots dt_k.$$

Если же в перестановке $(t_1, \ldots, t_k)$ взята любая комбинация $t_{r_1}, \ldots, t_{r_k}$, отличная от $t_1, \ldots, t_k$, то

$$\int_t^T \ldots \int_t^{t_2} G_q(t_{r_1}, \ldots, t_{r_k}) dt_1 \ldots dt_k = -\int_t^T \ldots \int_t^{t_2} F_q^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k.$$

Таким образом мы получили, что интеграл

$$\int_t^T \ldots \int_t^T G_q(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k$$

равен конечной сумме интегралов по выпуклым множествам от непрерывных функций, стремящихся, в силу теоремы 4.3, к нулю при $q \to \infty$. Поэтому по теореме о среднем значении получаем

$$\lim_{q \to \infty} \int_t^T \ldots \int_t^T G_q(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k = 0. \tag{4.76}$$

Таким образом из (4.76), (4.72), (4.74) получаем (4.71). Лемма доказана.

Лемма 4.6 может быть доказана и из других соображений. Так, из теоремы 4.1 следует, что для попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ справедлива с вероятностью 1 формула:

$$J_{T,t}^{*(k)}=J_{T,t}^{(k)}.$$

Поэтому в этом случае

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{(k)}\right)^2\right\}=\int_t^T\psi_k^2(t_k)\ldots\int_t^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\int_t^T\ldots\int_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \tag{4.77}$$

Далее имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)}-J_{T,t}^{(k)}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)}\right)^2\right\}-2\mathsf{M}\left\{J_{T,t}^{*(k)}J_{T,t}^{*(k)q}\right\}+\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}\right)^2\right\}. \tag{4.78}$$

Нетрудно видеть, что поскольку с вероятностью 1

$$J_{T,t}^{*(k)}=\left\{\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}-\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}\right\}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}+J_{T,t}^{*(k)q},$$

то

$$\mathsf{M}\left\{J_{T,t}^{*(k)}J_{T,t}^{*(k)q}\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}\right)^2\right\}. \tag{4.79}$$

Подставляя (4.77) и (4.79) в (4.78) получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)}-J_{T,t}^{*(k)q}\right)^2\right\}=\int_t^T\ldots\int_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}\right)^2\right\}. \tag{4.80}$$

Учитывая (4.80) и соотношение

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}\right)^2\right\}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}^2,$$

которое справедливо для попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$, приходим к утверждению леммы 4.6. Лемма доказана.

Предположим теперь, что $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ и не являются попарно различными. В этом случае вычисление величины $\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}-J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}$ существенно сложнее, чем в случае попарно различных $i_l;\ l=1,\ldots,k.$ Для преодоления этой трудности докажем следующую лемму.

Лемма 4.7 *Пусть $f_t\in\Re^1$-стандартный винеровский процесс, а $\phi_j(\tau);\ j=1,\ 2,\ldots,2k$-непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{j=1}^{2k}\int_t^T\phi_j(\tau)df_\tau\right\}=\sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\neq r_j(i\neq j)}}\prod_{j=1}^{k}\int_t^T\phi_{r_{2j}}(\tau)\phi_{r_{2j-1}}(\tau)d\tau, \qquad (4.81)$$

где $\sum\limits_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\neq r_j(i\neq j)}}$ *означает сумму по всем различным наборам вида $\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}$ из k двоек чисел $r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\neq r_j(i\neq j)$. При этом $(r_i,r_{i+1})\stackrel{def}{=}(r_{i+1},r_i);\ i=1,\ldots,2k-1$ и наборы, состоящие из одних и тех же двоек, но расположенных в различном порядке считаются тождественными.*

Доказательство: Пусть $J^l_N\stackrel{def}{=}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\varphi_l(\tau_j)\Delta f_{\tau_j},\ J^l=\int_t^T\varphi_l(s)df_s;\ \Delta f_{\tau_j}=f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j};\ \{\tau_j\}_{j=0}^N$-такое разбиение промежутка $[t,T]$, что $t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,\ \Delta_N=\max\limits_{0\le j\le N-1}\mid\tau_{j+1}-\tau_j\mid.$

Поскольку с вероятностью 1

$$\prod_{l=1}^{2k}J^l_N-\prod_{l=1}^{2k}J^l=\sum_{l=1}^{2k}\left(\prod_{g=1}^{l-1}J^g\right)\left(J^l_N-J^l\right)\left(\prod_{g=l+1}^{2k}J^g\right),$$

то

$$\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{2k}J^l_N-\prod_{l=1}^{2k}J^l\right|\right\}\le$$

$$\le\sum_{l=1}^{2k}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(J^l_N-J^l\right)^2\right\}}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{g=1}^{l-1}J^g\right)^2\left(\prod_{g=l+1}^{2k}J^g\right)^2\right\}}\le$$

$$\le\sum_{l=1}^{2k}C_k\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(J^l_N-J^l\right)^2\right\}}\to 0$$

при $\Delta_N \to 0$, $N \to \infty$, где $C_k = const < \infty$. Таким образом

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \mathsf{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J_N^l \right\} = \mathsf{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J^l \right\}. \tag{4.82}$$

Используя соотношение (4.3.1) имеем:

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \mathsf{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J_N^l \right\} = \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \mathsf{M} \left\{ \prod_{j=1}^{2k} \sum_{l_j=0}^{N-1} \phi_j(\tau_{l_j}) \Delta f_{\tau_{l_j}} \right\} =$$

$$= \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \mathsf{M} \left\{ \sum_{r=0}^{2k-1} \sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1 \\ s_r>\ldots>s_1}}^{2k-1} C_{s_r}^+ \ldots C_{s_1}^+ \left\{ \sum_{j_{2k}=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_{2k})} \prod_{q=1}^{2k} \phi_q(\tau_{j_q}) \Delta f_{\tau_{j_q}} \right\} \right\}$$

$$= \underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(\sum_{(j_1,j_1,\ldots,j_k,j_k)} \prod_{q=1}^{k} \phi_{2q}(\tau_{j_q}) \phi_{2q-1}(\tau_{j_q}) \right) \Delta\tau_{j_1} \ldots \Delta\tau_{j_k} =$$

$$= \int_t^T \int_t^{t_k} \ldots \int_t^{t_2} \left(\sum_{(t_1,t_1,\ldots,t_k,t_k)} \prod_{q=1}^{k} \phi_{2q}(t_q) \phi_{2q-1}(t_q) \right) dt_1 \ldots dt_{k-1} dt_k =$$

$$= \int_t^T \int_t^{t_k} \ldots \int_t^{t_2} \left(\sum_{\substack{((r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})) \\ r_i \in \{1,\ldots,2k\};\ r_i \neq r_j (i \neq j)}} \prod_{q=1}^{k} \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \ldots dt_{k-1} dt_k =$$

$$= \int_t^T \int_t^{T} \ldots \int_t^{T} \left(\sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\} \\ r_i \in \{1,\ldots,2k\};\ r_i \neq r_j (i \neq j)}} \prod_{q=1}^{k} \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \ldots dt_{k-1} dt_k =$$

$$= \sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\} \\ r_i \in \{1,\ldots,2k\};\ r_i \neq r_j (i \neq j)}} \prod_{q=1}^{k} \int_t^T \phi_{r_{2q}}(\tau) \phi_{r_{2q-1}}(\tau) d\tau, \tag{4.83}$$

где $\sum\limits_{(x_1,\ldots,x_k)}$ -сумма по всем возможным перестановкам величин $x_1, \ldots, x_k$ в наборах $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Соотношения (4.82),(4.83) доказывают лемму. Лемма доказана.

В частности, из (4.81) при $k=1,\ 2,\ 3$ получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{l=1}^{2}\xi_l\right\}=a_{12},$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{l=1}^{4}\xi_l\right\}=a_{12}a_{34}+a_{32}a_{14}+a_{13}a_{24},$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{l=1}^{6}\xi_l\right\}=a_{65}a_{43}a_{21}+a_{65}a_{31}a_{42}+a_{65}a_{32}a_{41}+$$

$$+a_{63}a_{54}a_{21}+a_{62}a_{54}a_{13}+a_{32}a_{61}a_{54}+a_{64}a_{53}a_{21}+$$

$$+a_{64}a_{51}a_{32}+a_{64}a_{52}a_{31}+a_{62}a_{53}a_{41}+a_{61}a_{53}a_{42}+$$

$$+a_{61}a_{52}a_{43}+a_{62}a_{51}a_{43}+a_{63}a_{51}a_{42}+a_{63}a_{52}a_{41},$$

где $\xi_l \stackrel{def}{=} \int_t^T \phi_l(\tau)df_\tau$, $a_{lk} \stackrel{def}{=} \int_t^T \phi_l(\tau)\phi_k(\tau)d\tau.$

Из леммы 4.7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.8 *Пусть* $f_t\in\Re^1$*-стандартный винеровский процесс, а* $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$*-полная ортонормированная система функций на промежутке* $[t,T]$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{i=1}^{2k}\int_t^T\phi_{r_i}(\tau)df_\tau\right\}=\begin{cases}(2g+1)!!\ \textit{при}\ \{r_1,\ldots,r_{2k}\}=\{q_1,q_1,\ldots,q_k,q_k\}\\ \qquad 0\ \textit{в противном случае}\end{cases},$$

где g*-количество совпадений чисел в наборе* $\{q_1,\ldots,q_k\}$; $g\ge 0$; $r_i\in\mathcal{N}\bigcup\{0\}$; $r_i\ne r_j(i\ne j)$; $i,j=1,\ldots,2k$; $\{x_1,\ldots,x_k\}$*-неупорядоченный набор чисел* $x_1,\ldots,x_k$.

4.3.3 Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью тригонометрической системы функций

Согласно теореме 4.2 полная ортонормированная тригонометрическая система функций на промежутке $[t,T]$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3.

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.6), полученные согласно теореме 4.5 и соотношению (4.67) с использованием тригонометрической системы:

$$I_{0_{T,t}}^{*(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{4.84}$$

$$I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right], \qquad (4.85)$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=\frac{1}{2}(T-t)\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right], \qquad (4.86)$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\right\}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{rl}-\frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-$$

$$\left.-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\left\{\sum_{r,m=1}^{q}\frac{2}{rm}\left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\right.\right.$$

$$
+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{l,m=1}^{q}\frac{1}{m(l+m)}\Biggl[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-
$$

$$
-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\frac{1}{m(l-m)}\Biggl[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-
$$

$$
-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=l+1}^{q}\frac{1}{m(m-l)}\Biggl[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-
$$

$$
-\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Biggr]\Biggr\}\Biggr), \tag{4.87}
$$

$$
I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\Biggl\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\Biggr\}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2r^2}\Biggl(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\Biggr)\Biggr]+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\Biggl[-\frac{k}{(l^2-k^2)l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\Biggr]\Biggr) \tag{4.88}
$$

$$
I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\Biggl\{-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigl\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\Bigr\}\Biggr\}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2r^2}\Biggl(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\Biggr)\Biggr]+
$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\left[\left(\frac{k}{(l^2-k^2)l}+\frac{1}{kl}\right)\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\right]\Bigg). \qquad (4.89)$$

$$I_{2_{T,t}}^{*(i_1)q}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}+\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)\right]. \qquad (4.90)$$

где $\zeta_j^{(i)}=\int_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид:

$$\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases}, \qquad (4.91)$$

где $r=1,\ 2,\ldots,\ i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m.$

Рассмотрим вопрос о среднеквадратической сходимости аппроксимаций (4.85)-(4.90). Из соотношений (4.85)-(4.90) при $i_1\neq i_2,\ i_2\neq i_3,\ i_1\neq i_3$ непосредственным вычислением получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{1_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \qquad (4.92)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \qquad (4.93)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=(T-t)^3\left\{\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{79}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\right)\frac{5l^4+4r^4-3l^2r^2}{r^2l^2(r^2-l^2)^2}\right\}. \qquad (4.94)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{2_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{2_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^5}{2}\left\{\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.$$

$$
+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\Biggr\}, \qquad (4.95)
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\left\{\frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{25}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right\}, \qquad (4.96)
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\left\{\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{25}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{l^2(l^2-k^2)^2}\right\}, \qquad (4.97)
$$

С помощью соотношений (4.92)-(4.97) может быть определена погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича при заданном q или число q при заданной точности аппроксимации ε повторного стохастического интеграла Стратоновича в смысле соотношения (4.68).

Соотношения (4.94), (4.96) и (4.97) могут быть несколько упрощены, если воспользоваться леммой 4.6:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^3\left\{\frac{5}{36}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{79}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\r\ne l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\right\}, \qquad (4.98)
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\left\{\frac{2}{9}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.
$$

$$-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{k^2+l^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\},\tag{4.99}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl\{\frac{5}{9}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\}.\tag{4.100}$$

Сопоставляя (4.98)-(4.100) и (4.94), (4.96), (4.97) замечаем, что

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{48},\tag{4.101}$$

$$\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{\infty}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}=\frac{9\pi^4}{80}.$$

Рассмотрим аппроксимации повторных интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$ и условия для выбора числа q с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\left[-\frac{k}{(l^2-k^2)l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\Biggr)$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)\Biggr]+$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\left[\left(\frac{k}{(l^2-k^2)l}+\frac{1}{kl}\right)\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\Biggr).
$$

С использованием леммы 4.8 получаем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=
$$

$$
=\frac{(T-t)^4}{4}\left[\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{7}{4\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2+\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right], \tag{4.102}
$$

Далее с учетом (4.101) перепишем соотношение (4.102) в виде:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=
$$

$$
=\frac{(T-t)^4}{4}\left[\frac{109}{720}-\frac{5}{6\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\frac{7}{4\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right], \tag{4.103}
$$

Рассмотрим теперь аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (4.5) с использованием соотношения (4.67) и тригонометрической системы. Имеем:

$$
J_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_2i_1)q}=\frac{1}{2}(T-t)\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right], \tag{4.104}
$$

$$
J_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_3i_2i_1)q}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\right.
$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\right\}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{rl}-\frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-$$

$$\left.-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\left\{\sum_{r,m=1}^{q}\frac{2}{rm}\left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\right.\right.$$

$$\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{l,m=1}^{q}\frac{1}{m(l+m)}\left[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.$$

$$\left.-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\frac{1}{m(l-m)}\left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.$$

$$\left.-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=l+1}^{q}\frac{1}{m(m-l)}\left[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.$$

$$
\left.\left.\left.-\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]\right\}\right), \tag{4.105}
$$

где $\zeta_j^{(i)}=\int_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (4.91); $i_1,\ i_2,\ i_3=0,\ 1,\ldots,m.$

Поскольку в данном случае

$$
\int_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(0)}=\begin{cases}\sqrt{T-t} & \text{при } j=0\\ 0 & \text{при } j\neq 0\end{cases},
$$

то из (4.104), (4.105) получаем следующее семейство формул:

$$
J^{*}_{(00)T,t}=\frac{1}{2}(T-t)^2,
$$

$$
J^{*(i_2)q}_{(10)T,t}=\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_2)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right],
$$

$$
J^{*(i_1)q}_{(01)T,t}=\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right],
$$

$$
J^{*(i_2i_1)q}_{(11)T,t}=\frac{1}{2}(T-t)\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right],
$$

$$
J^{*}_{(000)T,t}=\frac{1}{6}(T-t)^3,
$$

$$
J^{*(i_1)q}_{(001)T,t}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}+\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)\right],
$$

$$
J^{*(i_2)q}_{(010)T,t}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right],
$$

$$
J^{*(i_3)q}_{(100)T,t}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_3)}-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right)\right],
$$

$$
J^{*(i_2i_1)q}_{(011)T,t}=(T-t)^2\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.\right.
$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}-\frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\right]\Biggr).$$

$$J_{(110)T,t}^{*(i_3i_2)q}=(T-t)^2\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[-\frac{1}{r^2-l^2}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\left(\frac{1}{rl}-\frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{8\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\right]\right).$$

$$J_{(101)T,t}^{*(i_3i_1)q}=(T-t)^2\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-$$

$$\left.-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\right\}\right).$$

$$J_{(111)T,t}^{*(i_3i_2i_1)q}=I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q},$$

где $I_{000_{T,t}}^{*(i_3 i_2 i_1)q}$ определяется формулой (4.87); $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (4.91); $i_1,\ i_2,\ i_3 = 1, \ldots, m$.

Для приведенного семейства формул можно непосредственным вычислением получить условия для выбора числа q типа (4.92)-(4.97).

4.3.4 Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций

Согласно теореме 4.2 полная ортонормированная система полиномов Лежандра на промежутке $[t, T]$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3.

Рассмотрим полную ортонормированную систему полиномов на промежутке $[t, T]$. Она имеет следующий вид:

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty},\ \text{где}\ \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j\left(\left(x - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right), \tag{4.106}$$

где $P_j(x)$-полином Лежандра. Известно [55], что $P_j(x)$ представим, например, в виде:

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2 - 1\right)^j,$$

который именуется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$.

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{j-1}(x)}{dx} = (2i+1)P_j(x);\ j = 1,\ 2, \ldots .$$

$$\int_{-1}^{1} x^k P_j(x) dx = 0;\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, j-1.$$

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k = j \end{cases},$$

$$jP_j(x) - (2j-1)xP_{j-1}(x) + (j-1)P_{j-2}(x) = 0;\ j = 2,\ 3, \ldots .$$

Используя эти свойства и систему функций (4.106) получим с вероятностью 1, согласно теореме 4.5, следующие разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича:

$$I_{0_{T,t}}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t}\,\zeta_0^{(i_1)}, \tag{4.107}$$

$$I^{*(i_1)}_{1_{T,t}}=-\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta^{(i_1)}_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta^{(i_1)}_1\right), \qquad (4.108)$$

$$I^{*(i_1)}_{2_{T,t}}=\frac{(T-t)^{5/2}}{3}\left(\zeta^{(i_1)}_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta^{(i_1)}_1+\frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta^{(i_1)}_2\right), \qquad (4.109)$$

$$I^{*(i_2i_1)}_{00_{T,t}}=\frac{T-t}{2}\Biggl[\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2i+1}}\Biggl\{\frac{1}{\sqrt{2i+3}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i+1}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i-1}\Biggr\}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta^{(i_2)}_0\zeta^{(i_1)}_1\Biggr]=$$

$$=\frac{T-t}{2}\left[\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta^{(i_2)}_{i-1}\zeta^{(i_1)}_i-\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i-1}\right\}\right], \qquad (4.110)$$

$$I^{*(i_2i_1)}_{01_{T,t}}=-\frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{4}{3}\zeta^{(i_2)}_0\zeta^{(i_1)}_0+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{(i_2)}_0\zeta^{(i_1)}_1+\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta^{(i_2)}_0\zeta^{(i_1)}_2-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta^{(i_2)}_2\zeta^{(i_1)}_0+\sum_{i=1}^{\infty}\Biggl\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i+1}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i-1}-\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_i+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\left((i+2)\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i+2}-(i+1)\zeta^{(i_2)}_{i+2}\zeta^{(i_1)}_i\right)\Biggr\}\Biggr], \qquad (4.111)$$

$$I^{*(i_2i_1)}_{10_{T,t}}=-\frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{2}{3}\zeta^{(i_2)}_0\zeta^{(i_1)}_0+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta^{(i_2)}_2\zeta^{(i_1)}_0-\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta^{(i_1)}_2\zeta^{(i_2)}_0+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\Biggl\{\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i-1}-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_{i+1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\left((i+1)\zeta^{(i_1)}_i\zeta^{(i_2)}_{i+2}-(i+2)\zeta^{(i_1)}_{i+2}\zeta^{(i_2)}_i\right)+$$

$$+\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta^{(i_2)}_i\zeta^{(i_1)}_i\Biggr\}\Biggr], \qquad (4.112)$$

Нетрудно видеть, что разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученные с помощью системы полиномиальных функций существенно проще по виду, чем соответствующие разложения, полученные с помощью тригонометрической системы функций.

Рассмотрим аппроксимацию стохастического интеграла $I^{*(i_2 i_1)}_{00_{T,t}}$, используя соотношение (4.110):

$$I^{*(i_2 i_1)q}_{00_{T,t}} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}\right\}\right],$$

где погрешность аппроксимации при $i_1 \neq i_2$ определяется равенством:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{00_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{00_{T,t}}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{4}\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1} =$$

$$= \frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \qquad (4.113)$$

Если в (4.110) или в (4.86) положить $i_1 = i_2$, то с вероятностью 1 получим хорошо известную формулу:

$$I^{*(i_1 i_1)}_{00_{T,t}} = \frac{\left(I^{*(i_1)}_{0_{T,t}}\right)^2}{2},$$

которая может быть получена и иным способом.

Нетрудно получить непосредственным вычислением при $i_1 \neq i_2$ следующее соотношение:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{10_{T,t}}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{01_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{01_{T,t}}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\sum_{i=q+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4i^2-1} + \frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right). \qquad (4.114)$$

Вместо (4.114) можно с помощью леммы 4.6 записать более удобное соотношение:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{10_{T,t}}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{01_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{01_{T,t}}\right)^2\right\} =$$

$$
=\frac{(T-t)^4}{16}\left\{\frac{7}{9}-\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{1}{4i^2-1}+\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}+\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right)\right\}.
$$

Равенство (4.114) может быть заменено на следующую оценку

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}\le
$$

$$
\le\frac{5(T-t)^4}{16}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \tag{4.115}
$$

Рассмотрим аппроксимации стохастических интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$ и погрешности этих аппроксимаций, полученные с использованием полиномиальной системы функций:

$$
I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{4}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_2^{(i_1)}+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{i=1}^{q}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}-\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right],
$$

$$
I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{2}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}-\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_2^{(i_1)}+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{i=1}^{q}\left\{-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}+\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right].
$$

Далее с использованием леммы 4.7 получаем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=
$$

$$
=\frac{(T-t)^4}{16}\left[\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}+\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\right)^2\right]\le
$$

$$
\leq \frac{(T-t)^4}{16}\left[\frac{3}{16}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)^2\right].
$$

4.4 Метод Г.Н.Мильштейна разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

4.4.1 Введение

Г.Н.Мильштейном в [35] был предложен метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на разложении, так называемого процесса "броуновского моста"в ряд Фурье со случайными коэффициентами. Это разложение в литературе [38] иногда называется разложением Каркунена-Лоэва.

Рассмотрим процесс "броуновского моста", который имеет вид:

$$
\mathbf{f}_t-\frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta \tag{4.116}
$$

и определен при $t\in[0,\Delta]$, где $\mathbf{f}_t\in\Re^m$- стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i=1,\ldots,m$. Рассмотрим справедливое с вероятностью 1 покомпонентное разложение процесса (4.116) в тригонометрический ряд Фурье:

$$
\mathbf{f}_t^{(i)}-\frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}=\frac{1}{2}a_{i,0}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta}+b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{4.117}
$$

где

$$
a_{i,r}=\frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta\left(\mathbf{f}_s^{(i)}-\frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)cos\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,
$$

$$
b_{i,r}=\frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta\left(\mathbf{f}_s^{(i)}-\frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)sin\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,
$$

где $r=0,\ 1,\ldots;\ i=1,\ldots,m$. Нетрудно показать, что случайные величины $a_{i,r},b_{i,r}$-гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям [35], [45]:

$$
\mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,r}\right\}=\mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,k}\right\}=0, \tag{4.118}
$$

$$
\mathsf{M}\left\{a_{i,r}a_{i,k}\right\}=\mathsf{M}\left\{b_{i,r}b_{i,k}\right\}=0, \tag{4.119}
$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right\} = 0, \tag{4.120}$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}^2\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}^2\right\} = \frac{\Delta}{2\pi^2 r^2}, \tag{4.121}$$

где $i,\ i_1,\ i_2 = 1,\ldots,m;\ r \neq k;\ i_1 \neq i_2$.

Согласно (4.117) с вероятностью 1 имеем:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}\frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right). \tag{4.122}$$

Далее путем подстановки (4.122) в повторный стохастический интеграл Стратоновича можно в принципе получить его разложение по системе стандартных независимых гауссовских величин.

4.4.2 Примеры разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г.Н.Мильштейна

Используя соотношение (4.122) нетрудно получить с вероятностью 1 следующие соотношения [35], [45]:

$$\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{4.123}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau = \frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{t}{2}a_{i,0} + \frac{\Delta}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{a_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - b_{i,r}\left(cos\frac{2\pi rt}{\Delta} - 1\right)\right\}, \tag{4.124}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = t\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau =$$

$$= \frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + t\sum_{r=1}^{\infty}\left\{a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right\} -$$

$$-\frac{\Delta}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{a_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}-b_{i,r}\left(cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right\}, \tag{4.125}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}=\frac{1}{\Delta}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau}d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}+\frac{1}{2}a_{i_1,0}\int\limits_0^{*t}d\mathbf{f}_t^{(i_2)}+$$
$$+\frac{t\pi}{\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}r\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}-b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(a_{i_1,r}a_{i_2,r}-b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right)\left(1-cos\frac{4\pi rt}{\Delta}\right)+\right.$$
$$+\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}+b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right)sin\frac{4\pi rt}{\Delta}+$$
$$\left.+\frac{2}{\pi r}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}\left(a_{i_1,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}+b_{i_1,r}\left(cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right)\right\}+$$
$$+\sum_{\substack{k,r=1\\k\ne r}}^{\infty}k\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}+\frac{cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}-\frac{k}{k^2-r^2}\right]+\right.$$
$$+a_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}+\frac{sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right]+$$
$$+b_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}-\frac{cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}-\frac{r}{k^2-r^2}\right]+$$
$$\left.+\frac{\Delta}{2\pi}b_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}-\frac{sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right]\right\}. \tag{4.126}$$

Положим в соотношениях (4.123)-(4.126) $t=\Delta$. В результате получим с вероятностью 1 следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{*\Delta}d\mathbf{f}_t^{(i)}=\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}, \tag{4.127}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau=\frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}+a_{i,0}\right), \tag{4.128}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}=\frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}-a_{i,0}\right), \tag{4.129}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}=\frac{1}{2}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}-\frac{1}{2}\left(a_{i_2,0}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}-a_{i_1,0}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}\right)+$$

$$+\pi\sum_{r=1}^{\infty} r\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}-b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right). \tag{4.130}$$

При получении (4.127)-(4.130) использовалось соотношение:

$$a_{i,0}=-2\sum_{r=1}^{\infty}a_{i,r}, \tag{4.131}$$

которое следует из (4.117) при $t=\Delta$.

4.5 Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье и метода Г.Н.Мильштейна

В начале главы 4 указывались отличительные особенности метода, основанного на кратных рядах Фурье и метода Г.Н.Мильштейна. В частности, отмечалось, что метод, основанный на кратных рядах Фурье предусматривает применение различных ортонормированных полных систем функций, а метод Г.Н.Мильштейна допускает применение только тригонометрической системы. Кроме этого метод, основанный на кратных рядах Фурье дает возможность получить конкретную формулу, которая была получена в настоящей главе, для аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.8) произвольной кратности k. Метод Г.Н.Мильштейна допускает лишь возможность получения такой формулы, однако из-за громоздкости преобразований на которых он основан в настоящее время в литературе [35], [38], [45] известны аппроксимации методом

Г.Н.Мильштейна лишь для повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей $1 \div 3$. Также отмечалось, что метод, основанный на кратных рядах Фурье сводит проблему аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича к вычислению коэффициентов Фурье для специальных функций многих переменных. Эти коэффициенты могут вычисляться как аналитически, так и численно. Метод Г.Н.Мильштейна, в силу своих особенностей, практически исключает возможность применения вычислительных процедур для определения коэффициентов разложения.

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученных методом Г.Н.Мильштейна и методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_\Delta^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}; \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r b_{i,r}, \tag{4.132}$$

где $i = 1, \ldots, m;\ r = 1,\ 2, \ldots$. В силу (4.131) имеем:

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi r}\rho_{i,r}. \tag{4.133}$$

Подставляя соотношения (4.132) и (4.133) в (4.127)-(4.130) получим с вероятностью 1 следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta}\xi_i, \tag{4.134}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{4.135}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{4.136}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{\Delta}{2}\Bigg\{\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\rho_{i_1,r}\eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r}\rho_{i_2,r} + \right.$$

$$+\sqrt{2}\left(\rho_{i_2,r}\xi_{i_1}-\rho_{i_1,r}\xi_{i_2}\right)\Big)\Big\}. \tag{4.137}$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов можно записать:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{4.138}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} + I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{4.139}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{4.140}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \tag{4.141}$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_2 i_1)}$ или интегралов $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$, полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье и тригонометрической системы функций в представления (4.138)-(4.141) получим с точностью до обозначений разложения (4.134)-(4.137). Это говорит о том, что что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы метод Г.Н.Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье дают один и тот же результат. По-видимому можно показать, что этот вывод будет справедлив и для других повторных стохастических интегралов Стратоновича.

4.6 Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита

В предыдущих параграфах этой главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от стандартной гауссовской случайной величины. Этому вопросу будет посвящен настоящий параграф. Результаты, излагающиеся в нем можно встретить, например, в [56], [35], [38].

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x,y);\ n=0,\ 1,\ldots$ вида:

$$H_n(x,y)=\frac{d^n}{d\alpha^n}e^{\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2 y}\ |_{\alpha=0}\ . \tag{4.142}$$

Нетрудно видеть, что многочлены $H_n(x,y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой:

$$H_n(x,y)=\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}}h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right).$$

Используя рекуррентные формулы [57]:

$$\frac{dh_n(z)}{dz}=2nh_{n-1}(z);\ n=1,\ 2,\ldots\ ,$$

$$h_n(z)=2zh_{n-1}(z)-2(n-1)h_{n-2}(z);\ n=2,\ 3,\ldots$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для многочленов $H_n(x,y)$:

$$\frac{\partial H_n(x,y)}{\partial x}=nH_{n-1}(x,y);\ n=1,\ 2,\ldots\ , \tag{4.143}$$

$$\frac{\partial H_n(x,y)}{\partial y}=\frac{n}{2y}H_n(x,y)-\frac{nx}{2y}H_{n-1}(x,y);\ n=1,\ 2,\ldots\ , \tag{4.144}$$

$$\frac{\partial H_n(x,y)}{\partial y}=-\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x,y);\ n=2,\ 3,\ldots\ . \tag{4.145}$$

Из (4.143)-(4.145) следует, что:

$$\frac{\partial H_n(x,y)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n(x,y)}{\partial x^2}=0;\ n=2,\ 3,\ldots\ . \tag{4.146}$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем:

$$H_n(f_t,t)-H_n(0,0)=\int_0^t\frac{\partial H_n(f_s,s)}{\partial x}df_s+$$

$$+\int_0^t \left(\frac{\partial H_n(f_s,s)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n(f_s,s)}{\partial x^2}\right)ds, \qquad (4.147)$$

где $f_t \in \Re^1$−стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (4.146) и того, что

$$H_n(0,0)=0;\ n=2,\ 3,\dots$$

из (4.147) с вероятностью 1 получим:

$$H_n(f_t,t)=\int_0^t nH_{n-1}(f_s,s)df_s;\ n=2,\ 3,\dots. \qquad (4.148)$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)} \stackrel{def}{=} \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} df_{t_n}\dots df_{t_1}=\frac{1}{n!}H_n(f_t,t), \qquad (4.149)$$

где $n=1,\ 2,\dots.$

Рассмотрим одно из обобщений [56] формулы (4.149).

$$J_t^{(n)} \stackrel{def}{=} \int_0^t \psi(t_1)\dots \int_0^{t_{n-1}} \psi(t_n)df_{t_n}\dots df_{t_1}=$$

$$=\frac{1}{n!}H_n(\delta_t,\Delta_t);\ n=1,\ 2,\dots, \qquad (4.150)$$

где $\delta_t \stackrel{def}{=} \int_0^t \psi(s)df_s,\ \Delta_t \stackrel{def}{=} \int_0^t \psi^2(s)ds,\ \psi(t)$−некоторая детерминированная непрерывная на промежутке $[0,T]$ функция.

Рассмотрим несколько первых формул из семейства (4.150):

$$J_t^{(1)}=\frac{1}{1!}\delta_t,$$

$$J_t^{(2)}=\frac{1}{2!}\left(\delta_t^2-\Delta_t\right),$$

$$J_t^{(3)}=\frac{1}{3!}\left(\delta_t^3-3\delta_t\Delta_t\right),$$

$$J_t^{(4)}=\frac{1}{4!}\left(\delta_t^4-6\delta_t^2\Delta_t+3\Delta_t^2\right),$$

$$J_t^{(5)}=\frac{1}{5!}\left(\delta_t^5-10\delta_t^3\Delta_t+15\delta_t\Delta_t^2\right),$$

$$J_t^{(6)} = \frac{1}{6!}\left(\delta_t^6 - 15\delta_t^4\Delta_t + 45\delta_t^2\Delta_t^2 - 15\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(7)} = \frac{1}{7!}\left(\delta_t^7 - 21\delta_t^5\Delta_t + 105\delta_t^3\Delta_t^2 - 105\delta_t\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(8)} = \frac{1}{8!}\left(\delta_t^8 - 28\delta_t^6\Delta_t + 210\delta_t^4\Delta_t^2 - 420\delta_t^2\Delta_t^3 + 105\Delta_t^4\right).$$

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!}f_t^n, \tag{4.151}$$

где

$$I_t^{*(n)} \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{*t} \ldots \int\limits_0^{*t_{n-1}} df_{t_n}\ldots df_{t_1}.$$

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. По теореме 4.1 с вероятностью 1 имеем:

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2}\int_0^t dt_1. \tag{4.152}$$

Из соотношения (4.149) следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2}f_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^t dt_1. \tag{4.153}$$

Подставляя (4.153) в (4.152) с вероятностью 1 получим:

$$I_t^{*(2)} = \frac{1}{2!}f_t^2.$$

Таким образом формула (4.151) справедлива при $n = 2$. Предположим, что формула (4.151) справедлива при $n = k$, т.е. с вероятностью 1

$$I_t^{*(k)} = \frac{1}{k!}f_t^k$$

и рассмотрим $I_t^{*(k+1)}$:

$$I_t^{*(k+1)} = \int\limits_0^{*t} I_{t_1}^{*(k)} df_{t_1}.$$

По теореме 4.1 и по предположению индукции с вероятностью 1 получаем:

$$
I_t^{*(k+1)} = \int_0^t I_{t_1}^{*(k)} df_{t_1} + \frac{1}{2} \int\limits_0^{*t} I_{t_1}^{*(k-1)} dt_1 =
$$

$$
= \int_0^t \frac{f_{t_1}^k}{k!} df_{t_1} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f_{t_1}^{k-1}}{(k-1)!} dt_1. \tag{4.154}
$$

Рассмотрим случайный процесс ξ_t вида:

$$
\xi_t = \frac{f_t^{k+1}}{(k+1)!}
$$

и найдем с вероятностью 1 с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$
d\xi_t = \frac{1}{2} \frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!} dt + \frac{f_t^k}{k!} df_t. \tag{4.155}
$$

Поскольку $\xi_0 = 0$, то из (4.154) и (4.155) следует с вероятностью 1, что

$$
I_t^{*(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!} f_t^{k+1}.
$$

Таким образом соотношение (4.151) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (4.151) допускает следующее обобщение:

$$
J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} \delta_t^n,
$$

где

$$
J_t^{*(n)} \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{*t} \psi(t_1) \ldots \int\limits_0^{*t_{n-1}} \psi(t_n) df_{t_n} \ldots df_{t_1},
$$

$\delta_t = \int_0^t \psi(s) df_s$, а $\psi(t)$-некоторая детерминированная непрерывная на промежутке $[0, T]$ функция.

4.7 Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на их приближении интегральными суммами

В этом параграфе рассмотрим метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{T,t}^{(k)}$ вида (4.11), который основывается на их приближении интегральными суммами.

Пусть функции $\psi_l(\tau);\ l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям Липшица с постоянными C_l:

$$\mid \psi_l(\tau_1)-\psi_l(\tau_2)\mid \le C_l\ \ \mid \tau_1-\tau_2\mid \forall\tau_1,\tau_2\in[t,T]. \tag{4.156}$$

Тогда согласно лемме 4.1 с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$J_{T,t}^{(k)}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)},$$

где $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}=\mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)}-\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)};\ i_l=0,\ 1,\ldots,m;\ \{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$-разбиение промежутка $[t,T]$ такого типа, как в определении 1.8 с рангом Δ_N; $l=1,\ldots,k$.

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла Ито $J_{T,t}^{(k)}$ в виде:

$$J_{T,t}^{(k)N}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}. \tag{4.157}$$

Соотношение (4.157) может быть переписано в следующей форме:

$$J_{T,t}^{(k)N}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\sqrt{\Delta\tau_{j_k}}\psi_k(\tau_{j_k})\mathbf{u}_{j_k}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sqrt{\Delta\tau_{j_1}}\psi_1(\tau_{j_1})\mathbf{u}_{j_1}^{(i_1)}, \tag{4.158}$$

где

$$\mathbf{u}_j^{(i)}\stackrel{def}{=}\begin{cases}\dfrac{\Delta\mathbf{f}_{\tau_j}^{(i)}}{\sqrt{\Delta\tau_j}} & \text{при } i=1,\ldots,m\\ \\ \sqrt{\Delta\tau_j} & \text{при } i=0\end{cases}. \tag{4.159}$$

Из (4.159) следует, что при $i\ne 0$ и различных j величины $\mathbf{u}_j^{(i)}$ являются гауссовскими независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Пусть

$$\tau_j=t+j\Delta;\ j=0,1,\ldots,N;\ \tau_N=T;\ \Delta>0. \tag{4.160}$$

Тогда формула (4.158) примет вид:

$$J_{T,t}^{(k)N}=\Delta^{k/2}\sum_{j_k=0}^{N-1}\psi_k(t+j_k\Delta)\mathbf{u}_{j_k}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(t+j_1\Delta)\mathbf{u}_{j_1}^{(i_1)}, \tag{4.161}$$

где

$$\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)}-\mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)}}{\sqrt{\Delta}} & \text{при } i=1,\ldots,m \\ \\ \sqrt{\Delta} & \text{при } i=0 \end{cases}.$$

Рассмотрим вопрос о среднеквадратической погрешности аппроксимации, которая возникает при замене $J_{T,t}^{(k)}$ на $J_{T,t}^{(k)N}$.

Теорема 4.6 *Пусть функции $\psi_l(\tau)$; $l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям Липшица вида (4.156), $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$–разбиение промежутка $[t,T]$ вида (4.160) с рангом Δ_N. Тогда существует такое малое число $T-t$, что выполняется следующая оценка:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{(k)}-J_{T,t}^{(k)N}\right)^2\right\} \le \frac{H_k(T-t)^2}{N}, \qquad (4.162)$$

где $H_k=const<\infty$.

Доказательство: Согласно соотношениям (4.3.1) и (4.3.1) с вероятностью 1 имеем:

$$J_{T,t}^{(k)}-J_{T,t}^{(k)N}=\delta''_{N,k}+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-r}\delta_{N,k}^{rq}, \qquad (4.163)$$

где

$$\delta_{N,k}^{rq}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_{q-1}=0}^{j_{q-2}-1}\zeta_{j_{q-1}}\sum_{j_q=0}^{j_{q-1}-1}\zeta_{j_q}^{r+1}\sum_{j_{q+r+1}=0}^{j_q-1}\zeta_{j_{q+r+1}}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

$$\zeta_{j_q}^{r+1} \stackrel{def}{=} \int_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\psi_{k-q+1}(t_1)\ldots\int_{\tau_{j_q}}^{t_r}\psi_{k-q+1-r}(t_{r+1})d\mathbf{w}_{t_{r+1}}^{(i_{k-q+1-r})}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_{k-q+1})};$$

$$\zeta_{j_q}^{1} \stackrel{def}{=} \zeta_{j_q};\ r=0,\ 1,\ldots,k-1;\ k=1,\ 2,\ldots.$$

$$\delta''_{N,k}=\sum_{l=1}^{k}\mu_{N,k}^{(l)},$$

где

$$\mu_{N,k}^{(1)}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\eta_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

$$\mu_{N,k}^{(2)}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\eta_{j_2}\sum_{j_3=0}^{i_2-1}\zeta_{j_3}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

$$\ldots$$

$$\mu_{N,k}^{(k)}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{j_{k-2}-1}\xi_{j_{k-1}}\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\eta_{j_k},$$

где

$$\eta_{j_q}=\int_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\left(\psi_{k-q+1}(t)-\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\right)d\mathbf{w}_t^{(i_{k-q+1})},$$

$$\xi_{j_q}=\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_q}}^{(i_{k-q+1})}.$$

Из (4.163) с помощью неравенства Минковского получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{(k)}-J_{T,t}^{(k)N}\right)^2\right\}\le\left(\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-r}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{rq}\right)^2\right\}}+\sum_{l=1}^{k}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\mu_{N,k}^{(l)}\right)^2\right\}}\right)^2. \tag{4.164}$$

С помощью неравенства Минковского нетрудно показать, что при достаточно малом $T-t$ правая часть (4.164) не превосходит величины:

$$\alpha_N=\left(\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}}+\sum_{l=1}^{2}\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\mu_{N,2}^{(l)}\right)^2\right\}}\right)^2, \tag{4.165}$$

где согласно введенным обозначениям:

$$\delta_N^{11}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2(t_2)\int_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)},$$

$$\mu_{N,2}^{(1)}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\left(\psi_2(t_2)-\psi_2(\tau_{j_1})\right)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

$$\mu_{N,2}^{(2)}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\psi_2(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\left(\psi_1(t_1)-\psi_1(\tau_{j_2})\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}.$$

С помощью неравенства Минковского и условий Липшица получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\mu_{N,2}^{(l)}\right)^2\right\}\le C_l^2\Delta^2(T-t)^{\gamma_1+\gamma_2}\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_{3-l}^2(s)\right\}, \tag{4.166}$$

где $l=1,\ 2;\ \gamma_j=1$ при $i_j\ne 0$ и $\gamma_j=2$ при $i_j=0$ $(j=1,2)$.

Рассмотрим $\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}$. Для этого рассмотрим 4 случая:

1. $i_1\ne 0,\ i_2\ne 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2^2(t_2)\int_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1dt_2\le$$

$$\le\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\sum_{j_1=0}^{N-1}\frac{\left(\Delta\tau_{j_1}\right)^2}{2}=\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\frac{\Delta}{2}(T-t).\qquad(4.167)$$

2. $i_1=0,\ i_2\ne 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2^2(t_2)\left(\int_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1\right)^2dt_2\le$$

$$\le\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\sum_{j_1=0}^{N-1}\frac{\left(\Delta\tau_{j_1}\right)^3}{3}=\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\frac{\Delta^2}{3}(T-t).\qquad(4.168)$$

3. $i_1\ne 0,\ i_2=0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left(\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2(t_2)\int_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_2\right)^2\right\}\le$$

$$\le\sum_{j_1=0}^{N-1}\left(\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\mid\psi_2(t_2)\mid\sqrt{\int_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1}dt_2\right)^2\le$$

$$\le\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\sum_{j_1=0}^{N-1}\frac{4\left(\Delta\tau_{j_1}\right)^3}{9}=\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\frac{4\Delta^2}{9}(T-t).\qquad(4.169)$$

4. $i_1=i_2=0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\delta_N^{11}\right)^2\right\}\le\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\left(\sum_{j_1=0}^{N-1}\frac{\left(\Delta\tau_{j_1}\right)^2}{2}\right)^2=$$

$$=\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\right\}\frac{\Delta^2}{4}(T-t)^2.\qquad(4.170)$$

Объединяя (4.166)-(4.170) получаем:

$$\alpha_N < \left[C_2 \Delta (T-t)^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)} \sqrt{\sup_{s\in[t,T]} \{\psi_1^2(s)\}} + \right.$$

$$+ C_1 \Delta (T-t)^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)} \sqrt{\sup_{s\in[t,T]} \{\psi_2^2(s)\}} +$$

$$\left. + \Delta^{\lambda} (T-t)^{\beta} \sqrt{\sup_{s\in[t,T]} \{\psi_1^2(s)\psi_2^2(s)\}} \right], \tag{4.171}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 = 1,\ 2;\ \lambda, \beta = \frac{1}{2}, 1;\ C_1, C_2$–постоянные Липшица. Таким образом из (4.171) при $T - t < 1$ следует оценка:

$$\alpha_N < H_k (T-t)\Delta = \frac{H_k (T-t)^2}{N},$$

где $H_k = const < \infty$. Теорема доказана.

В частности, с помощью (4.167) получаем следующие соотношения:

$$\mathsf{M}\left\{ \left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \tag{4.172}$$

$$\mathsf{M}\left\{ \left(I_{10_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} = \mathsf{M}\left\{ \left(I_{01_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} \le \frac{(T-t)^4}{2N},$$

где $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$.

В заключение отметим некоторые особенности метода, рассмотренного в настоящем параграфе.

1. Метод, основанный на приближении интегральными суммами имеет несколько более худшую скорость среднеквадратической сходимости, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье. Это отчетливо видно на примере соотношения (4.172) и соотношений (4.93), (4.113), (5.33)(см.главу 5).

2. Метод, основанный на приближении интегральными суммами не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье, что является достаточно трудоемкой задачей.

3. С помощью метода, основанного на приближении интегральными суммами получена общая формула для аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k.

Всвязи с тем, что метод, основанный на кратных рядах Фурье сходится быстрее, чем метод, основанный на приближении интегральными суммами и кроме того метод, основанный на кратных рядах Фурье требует моделирования всего лишь одной гауссовской случайной величины для моделирования интеграла $\int_t^T d\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i=1,\ldots,m$ в совокупности с другими стохастическими интегралами, в то время, как метод, основанный на приближении интегральными суммами требует моделирования N независимых гауссовских случайных величин для моделирования этого интеграла в совокупности с другими стохастическими интегралами, в дальнейшем будет широко использоваться именно метод, основанный на кратных рядах Фурье.

При численном решении ряда задач (см. главу 7) будет использоваться метод, основанный на кратных рядах Фурье с использованием полиномиальной системы функции. Это связано с тем, что полиномиальная система функций является гораздо более удобной, чем тригонометрическая с точки зрения скорости сходимости аппроксимаций повторных стохастических интегралов и с точки зрения простоты выражений для этих аппроксимаций. Следует отметить, что полиномиальная система функций для аппроксимации повторных стохастических интегралов применяется впервые именно в этой книге.

Отметим также, что определение коэффициентов кратных рядов Фурье является достаточно трудоемкой задачей, в особенности для рядов 4-й и более высокой кратности. Поэтому, возможно, целесообразно использовать для построения численных методов высоких порядков для стохастических дифференциальных уравнений Ито метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на их приближении интегральными суммами.

Литература к главе 4

Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E. (1992). Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.(1994), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1994), Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. (1992), Кузнецов Д.Ф.(1997(I),1997(II),1998(I)), Kuznetsov D.F.(1998(II)), Chung K.L., Williams R.J.(1983),

Глава 5

Явные сильные одношаговые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Настоящая глава посвящена построению явных сильных одношаговых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанных на разложениях Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. Приводятся новые представления некоторых известных численных методов, а также строится ряд новых численных методов, в том числе конечно-разностных, для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

5.1 Введение. Краткий обзор литературы

Приведем краткую историческую справку по численным методам для стохастических дифференциальных уравнений. Первые работы посвященные этой тематике относятся, по-видимому, к 50-м годам. Так G.Maruyama [58] (1955) одним из первых использовал и исследовал метод Эйлера для стохастических дифференциальных уравнений и доказал его среднеквадратическую сходимость. В 1973 году D.J.Clements, B.D.O.Anderson [59] и в 1974 году D.J.Wright [60] показали посредством численных экспериментов, что не любые эвристические стохастические обобщения хорошо известных численных методов сходятся к решениям стохастических дифференциальных уравнений. W.Rumelin [61] исследовал сильные схемы типа Рунге-Кутта порядка 1.0 для стохастических дифференциальных уравнений. В работе [62](E.Platen) построена явная сильная порядка 1.0 конечно-разностная численная схема для скалярного и векторного стохастических дифференциальных уравнений Ито со скалярным и аддитивным шумом. Аналогичная численная схема для стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича построена в работе [63](T.C.Gard). Двухшаговый сильный порядка 1.5 численный метод для стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом построен Г.Н.Мильштейном в [35]. В [62](E.Platen) и [38](P.E.Kloeden, E.Platen) содержатся явные сильные порядка 1.5 одношаговые и многошаговые конечно-разностные численные схемы для скалярного и векторного стохастических дифференциальных уравнений со скалярными, аддитивными, коммутативными и диагональными шумами. В [38] также содержится явная сильная одношаговая схема порядка 2.0 для скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным шумом, а также общий вид аналогичной схемы для векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом. В [64](C.C.Chang) построен явный сильный порядка 2.0 конечно-разностный метод для скалярного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и $\Sigma(\mathbf{x}, t) = \Sigma = const \in \Re^1$. Аналогичная схема для векторного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}, t)$ содержится в работе [38](P.E.Kloeden, E.Platen). Необходимо отметить, что известны также и другие работы, посвященные численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Например D.Talay [65], P.E.Kloeden, E.Platen [67], D.B.Hernandez, R.Spigler [69], D.Talay, L.Tubaro [66], P.E.Kloeden, E.Platen, N.Hofmann [68] исследовали различные неявные сильные, неявные и явные слабые численные схемы для стохастических дифференциальных уравнений. Перечисленные работы являются далеко не полным перечнем работ по численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений.

Настоящая глава посвящена построению методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, сходящихся в сильном смысле к решениям этих уравнений. Строятся явные сильные одношаговые численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито, разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложении Тейлора-Стратоновича, а также на методах аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье и и на приближениях интегральными суммами. Некоторые из представленных методов являются новыми версиями методов, полученных в работах [35](Г.Н.Мильштейн), [38], [39] (P.E.Kloeden, E.Platen, H.Schurz), другая часть полученных методов является новой. Новизна представленных методов по отношению к известным численным методам заключается во-первых в том, что часть из них содержит меньшее число различных повторных стохастических интегралов, аппроксимация которых на каждом шаге интегрирования, необходимая для реализации численных методов, является сложной теоретической и вычислительной проблемой и во-вторых, главным образом в том, что в полученных методах для аппроксимации входящих в них повторных стохастических интегралов используются полученные в главе 4 новые методы. С помощью этих методов аппроксимации повторных стохастических интегралов получены общие формулы для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито кратности k. В литературе [35], [38], [45] присутствуют аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей не выше третьей. Таким образом явные одношаговые сильные численные методы порядков 2.0, 2.5 и $r/2$; $r = 6, 7, \dots$, представленные в данной главе, можно считать новыми (хотя их общие представления были известны ранее [38]), поскольку в эти методы входят аппроксимации повторных стохастических интегралов 4-й и более высоких кратностей, которые были ранее неизвестны. На основе некоторых из построенных численных методов строятся их конечно-разностные модификации. Среди них явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядков точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Численные методы порядков 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем последние два из них не имеют аналогов в литературе для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

5.2 Разложения Тейлора-Ито и общие представления явных сильных численных методов порядка r/2

Предположим, что условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R:\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, а $\mathbf{x}_s$-решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) разлагается в следующий унифицированный ряд Тейлора-Ито:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k)\in\mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!}\ {}^{(k)}G_{l_1}\dots G_{l_k}L^j\left\{\eta_t\right\} \stackrel{k}{\cdot}\ {}^{(k)}I_{l_1\dots l_{k_{s,t}}} + H_{r+1_{s,t}}, \tag{5.1}$$

причем $\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\} \le C_{r+1}(s-t)^{r+1};\ C_{r+1} = const < \infty$, где равенство (5.1) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$
{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} = \left\| I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} \right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1},
$$

$$
I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} = \begin{cases} \int_t^s (t-\tau_k)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_2}(t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_1}\ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_k} & \text{при } k>0 \\ 1 & \text{при } k=0 \end{cases},
$$

$\mathcal{D}_q = \left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k):\ k+2\left(j+\sum\limits_{p=1}^{k} l_p\right) = q\right\}$, а остальные обозначения такие же, как в теоремах 3.1, 3.2 и 3.3.

Пусть $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x},\ s=\tau_{p+1},\ t=\tau_p,\ p\Delta \stackrel{def}{=} \tau_p,\ \Delta>0,\ p\in\{0,1,\ldots,N\}$, $T=\tau_N$. Тогда из (5.1) с вероятностью 1 получаем общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36):

$$
\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^{r}\ \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q} \frac{\Delta^j}{j!}\ {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\} \stackrel{k}{\cdot}\ {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}, \tag{5.2}
$$

где ${}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}} = \left\|\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}$, где $\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}$-аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}$, которая удовлетворяет следующему условию на точность аппроксимации:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}} - \hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}\right)^2\right\} \le C\Delta^{r+1},\ C = const < \infty,
$$

где $(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{D}_q$ и $\hat{I}^{(i_1\ldots i_0)}_{l_1\ldots l_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}} = I^{(i_1\ldots i_0)}_{l_1\ldots l_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}} \stackrel{def}{=} 1$.

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}}$ можно, например, воспользоваться методом, основанным на приближении интегральными суммами. Согласно этому методу имеем:

$$
\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}} = \delta^{k/2}\sum_{j_k=0}^{M-1}(-j_k\delta)^{l_k}\mathbf{u}^{(i_k)}_{j_k,p}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}(-j_1\delta)^{l_1}\mathbf{u}^{(i_1)}_{j_1,p},
$$

где $s_{j,p}=\tau_p+j\delta;\ j=0,1,\ldots,M;\ s_{M,p}=\tau_{p+1},\ \delta>0;\ i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ и

$$\mathbf{u}_{j,p}^{(i)}=\begin{cases}\frac{\mathbf{f}^{(i)}_{\tau_p+(j+1)\delta}-\mathbf{f}^{(i)}_{\tau_p+j\delta}}{\sqrt{\delta}} & \text{при } i=1,\ldots,m\\ \\ \sqrt{\delta} & \text{при } i=0\end{cases}.$$

В главе 4 также было показано, что для метода, основанного на приближении интегральными суммами при достаточно малом $\Delta=\tau_{p+1}-\tau_p$ справедлива оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le\frac{H_k\Delta^2}{M},\ H_k=const<\infty.$$

Определение 5.1 *Численная схема $\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=F(\mathbf{y}_{\tau_p},\omega)$ сходится к решению стохастического дифференциального уравнения (1.36) сильно с порядком точности $\gamma>0$ в момент $T=\tau_N$, если существует положительная постоянная C, которая не зависит от Δ и такая, что $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_T|\right\}\le C\Delta^\gamma$.*

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 5.1 *Пусть условия теоремы 3.1 выполнены при $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x}$. Пусть также выполнены следующие условия:*

1. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re^n$, $\forall i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$, $\forall(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{D}_q$ *и* $\forall t\in[0,T]$

$$\left|G^{(i_1)}_{l_1}\ldots G^{(i_k)}_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}\right\}-G^{(i_1)}_{l_1}\ldots G^{(i_k)}_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}\right\}\right|\le K_1\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|.$$

2. $\forall(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{D}_q$, $\forall i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ *и* $\forall p\in\{0,\ 1,\ldots,N\}$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le C\Delta^{r+1},\ C=const<\infty. \qquad (5.3)$$

3. $\forall(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{A}_q$, $\forall\mathbf{x}\in\Re^n$, $\forall t\in[0,T]$ *и* $\forall i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$

$$\left|HG^{(i_1)}_{l_1}\ldots G^{(i_k)}_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}\right\}\right|\le K_0\left(1+\mid\mathbf{x}\mid\right),$$

где $H\{\cdot\}=\cdot,\ L\{\cdot\}$ *или* $G^{(q)}_0\{\cdot\};\ q=1,\ldots,m.$

4. $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\right\}\le K_2\Delta^r,\ \mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}<\infty,$
где постоянные $K_0,\ K_1,\ K_2,\ C$ *не зависят от* Δ.

Тогда

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{x}_t-\mathbf{y}_t|^2\right\}\le K_3\Delta^r,$$

где постоянная K_3 *не зависит от* Δ.

Доказательство: Идея доказательства заимствована из [38]. При $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x},\ s=\tau_{p+1},\ t=\tau_p,\ \tau_p\stackrel{def}{=}p\Delta,\ \Delta>0,\ p\in\{0,1,\ldots,N\},\ T=\tau_N$ получаем с вероятностью 1 из (5.1) следующее точное представление:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}=\sum_{q=0}^{r}\ \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q}\frac{\Delta^j}{j!}\ {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}_{\tau_p}\right\}\stackrel{k}{\cdot}\ {}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+H_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}},\tag{5.4}$$

причем $\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)^2\right\}\le C_{r+1}\Delta^{r+1},\ C_{r+1}=const<\infty$. Нетрудно видеть, что $\forall s\in[0,T]$ из (5.2) и (5.4) с вероятностью 1 получаем:

$$\mathbf{x}_s-\mathbf{y}_s=\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0+\sum_{q=1}^{r}\ \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q}\frac{\Delta^j}{j!}\times$$

$$\times\left\{\sum_{p=0}^{n_s-1}\left[{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}\stackrel{k}{\cdot}\left({}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}-{}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left({}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}_{\tau_p}\right\}-{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}\right)\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}\right\}\stackrel{k}{\cdot}\left({}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k s,\tau_{n_s}}}-{}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k s,\tau_{n_s}}}\right)+$$

$$\left.+\left({}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}\right\}-{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}\right\}\right)\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_{k s,\tau_{n_s}}}\right\}+$$

$$+\sum_{p=0}^{n_s-1}H_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}+H_{r+1_{s,\tau_{n_s}}}.\tag{5.5}$$

Из (5.5), предположений теоремы 5.1, оценки (4.5.16) ([38], с.138) и леммы 10.8.1 ([38], с.368) имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0\le s\le T}|\mathbf{x}_s-\mathbf{y}_s|^2\right\}\le\tilde{C}_1\Delta^r+\tilde{C}_2\int_0^T\mathsf{M}\left\{\sup_{0\le s\le u}|\mathbf{x}_s-\mathbf{y}_s|^2\right\}du,\tag{5.6}$$

где постоянные $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ не зависят от Δ. Используя неравенство Гронуолла [38] и (5.6) получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0\le s\le T}|\mathbf{x}_s-\mathbf{y}_s|^2\right\}\le K_3\Delta^r, \tag{5.7}$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ. Теорема доказана.

Из неравенства (5.7) и неравенства Ляпунова следует, что явный одношаговый численный метод (5.2) сходится сильно, в условиях теоремы 5.1, с порядком точности $r/2$ к решению стохастического дифференциального уравнения (1.36). Далее такие численные методы будем называть явными одношаговыми сильными численными методами порядка $r/2$.

Предположим, что условия теоремы 3.6 выполнены. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R:\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^1$, где $\mathbf{x}_s-$решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) разлагается в ряд Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида:

$$\eta_s=\eta_t+\sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}}{}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\}\overset{(p_k)}{\cdot}{}^{(p_k)}J_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)s,t}+H_{r+1_{s,t}}, \tag{5.8}$$

где равенство справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле, причем

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}}\le C_{r+1}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где $C_{r+1}=const<\infty$ и ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}=\left\|J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}\right\|^{m\lambda_1\quad m\lambda_l}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}$, где $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}=\int_t^s\ldots\int_t^{\tau_2}\ d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k}$, $\mathcal{E}_{qk}=\{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\ 2k-\lambda_1-\ \ldots\ -\lambda_k=q\}$, а остальные обозначения такие же как в теоремах 3.5 и 3.6.

Пусть $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x},\ s=\tau_{p+1},\ t=\tau_p,\ \Delta>0,\ p\in\{0,1,\ldots,N\}$, $T=\tau_N$. Тогда из (5.8) получаем общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36), основанной на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{y}_{\tau_p}+$$

$$+\sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}}{}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_{\tau_p}\}\overset{(p_k)}{\cdot}{}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{5.9}$$

где ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\|\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right\|^{m\lambda_1 \qquad m\lambda_l}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}$, а $\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$- аппроксимация повторного стохастического интеграла $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$, которая удовлетворяет условию:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\} \le C^*\Delta^{r+1},\ C^* = const < \infty,$$

где $(\lambda_k\ldots\lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,g=1}^{r}\mathcal{E}_{qg}$, $\hat{J}^{(i_0\ldots i_1)}_{(\lambda_0\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \stackrel{def}{=} 1.$

Для аппроксимации стохастических интегралов Ито $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ можно, например, воспользоваться методом, основанным на приближении интегральными суммами. Согласно этому методу имеем:

$$\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \delta^{k/2}\sum_{j_k=0}^{M-1}\mathbf{u}^{(i_k)}_{j_k,p}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\mathbf{u}^{(i_1)}_{j_1,p},$$

где $\delta = \Delta/M;\ j = 0,1\ldots,M;\ \Delta = \tau_{p+1}-\tau_p;\ \delta > 0;\ i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ и

$$\mathbf{u}^{(i)}_{j,p} = \begin{cases} \frac{\mathbf{f}^{(i)}_{\tau_p+(j+1)\delta}-\mathbf{f}^{(i)}_{\tau_p+j\delta}}{\sqrt{\delta}} & \text{при } i = 1,\ldots,m \\ \\ \sqrt{\delta} & \text{при } i = 0 \end{cases}.$$

В главе 4 было показано, что для метода, основанный на приближении интегральными суммами при достаточно малом $\Delta = \tau_{p+1}-\tau_p$ справедлива оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\} \le \frac{H_k\Delta^2}{M},\ H_k = const < \infty.$$

Теорема 5.2 *Пусть условия теоремы 3.6 выполнены при* $R(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{x}$. *Пусть также выполнены следующие условия:*

1. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^n$, $\forall(\lambda_k\ldots\lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,g=1}^{r}\mathcal{E}_{qg}$, *и* $\forall t \in [0,T]$

$$\left|Q^{(i_k)}_{\lambda_k}\ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1}\{\mathbf{x}\} - Q^{(i_k)}_{\lambda_k}\ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1}\{\mathbf{y}\}\right| \le K_1\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|.$$

2. $\forall(\lambda_k\ldots\lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,g=1}^{r}\mathcal{E}_{qg}$, *и* $\forall p \in \{0,\ 1,\ldots,N\}$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\} \le C^*\Delta^{r+1},\ C^* = const < \infty. \qquad (5.10)$$

3. $\forall(\lambda_k\ldots\lambda_1)\in\bigcup\limits_{g=1}^{r+1}\mathcal{M}_g,\quad \mathcal{M}_q=\{(\lambda_g,\ldots,\lambda_1):\quad \lambda_g=1,\ 0;\ l=1,\ldots,g\},$ $\forall\mathbf{x}\in\Re^n$, $\forall t\in[0,T]$

$$\left|Q_{\lambda_k}^{(i_k)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\{\mathbf{x}\}\right|\le K_2\,(1+\mid\mathbf{x}\mid)\,.$$

4. $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\right\}\le K_3\Delta^r,\ \mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}<\infty.$
Тогда

$$\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_T|^2\right\}\le K_4\Delta^r,$$

где постоянные $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ C^*$ *не зависят от* Δ.

Доказательство теоремы 5.2 можно найти в [38].

Из теоремы 5.2 следует, что численная схема (5.9) является явной сильной одношаговой численной схемой порядка $r/2$.

5.2.1 Метод Мильштейна

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r=2$. Тогда из (5.2) при $r=2$ получаем метод Мильштейна:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)},\tag{5.11}$$

где здесь и далее в этом параграфе приняты следующие сокращенные обозначения: $\Sigma_i(\mathbf{x},t)$-i-ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\stackrel{def}{=}\mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p)\stackrel{def}{=}\Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{def}{=}\mathbf{y}_p$.

Согласно формулам связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (теорема 4.1) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}=I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)},\tag{5.12}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}=I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2i_1)}-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta,\tag{5.13}$$

где

$$I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)}=\begin{cases}\int\limits_t^{*s}(t-\tau_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*\tau_2}(t-\tau_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k>0\\ 1 & \text{при } k=0\end{cases}.$$

Согласно формулам для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученным в главе 4, имеем следующие формулы для совместного моделирования интегралов Ито $I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)}$:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.14}$$

$$\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}^{00}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.15}$$

где $C_{j_2 j_1}^{00} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{00}(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$, $K_{00}(t_1,t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$; $t_1,t_2 \in [\tau_p,\tau_{p+1}]$; $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{def}{=} \zeta_j^{(i)}$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ –полная ортонормированная система функций на промежутке $[\tau_p,\tau_{p+1}]$, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.3. В (5.14), (5.15) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, что справедливо, в частности для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций на промежутке $[\tau_p,\tau_{p+1}]$. Число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.3) в теореме 5.1 при $r = 2$. Пусть в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ на промежутке $[\tau_p,\tau_{p+1}]$ взята тригонометрическая система. Тогда формулы (5.14)-(5.15) преобретут согласно разложениям, полученным в главе 4, следующий вид:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.16}$$

$$\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right] - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.17}$$

где число q при $i_1 \neq i_2$ выбирается из следующего условия:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right)^2\right\} = \frac{3\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right) \leq C\Delta^3,$$

где постоянная C входит в условие (5.3) теоремы 5.1.

Для полиномиальной системы функций, согласно результатам главы 4, имеем следующие соотношения:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} = \frac{\Delta}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}\right\}\right] - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta,$$

где число q выбирается при $i_1 \neq i_2$ из следующего условия:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^2}{4}\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1} =$$

$$= \frac{\Delta^2}{4}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right) \leq C\Delta^3,$$

где постоянная C входит в условие (5.3) теоремы 5.1.

Необходимо отметить, что на каждом шаге интегрирования с номером p система случайных гауссовских величин $\zeta_j^{(i)}$ должна генерироваться так, чтобы она была независимой относительно аналогичных систем гауссовских величин на всех предшествующих шагах интегрирования.

Согласно определению 5.1 метод Мильштейна является явным одношаговым сильным методом порядка 1.0.

5.2.2 Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 3$. Тогда из (5.2) при $r = 3$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 1.5 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) - L\Sigma_{i_1}\hat{I}_1^{(i_1)}\right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}. \qquad (5.18)$$

Согласно формулам (5.12) и (5.13) и соотношениям:

$$I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \qquad (5.19)$$

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} = I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta I^{*(i_3)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+I^{*(i_3)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right), \tag{5.20}$$

которые вытекают с вероятностью 1 из теорем о замене порядка интегрирования (см. главу 2) и теоремы 4.1, а также согласно формулам для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича $I^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, полученным в главе 4, имеем следующие формулы для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$:

$$I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.21}$$

$$I^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^1\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.22}$$

$$\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}C_{j_2j_1}^{00}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.23}$$

$$\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}^{000}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^1\zeta_{j_1}^{(i_1)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_3)}+\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3}^1\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right), \tag{5.24}$$

где введены обозначения:

$$C_{j_1}^1=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1, K(t_1)=\tau_p-t_1,$$

$$C_{j_2j_1}^{00}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{00}(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2,$$

$$K_{00}(t_1,t_2)=\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}},$$

$$C_{j_3j_2j_1}^{000}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{000}(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3,$$

$$K_{000}(t_1,t_2)=\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}};$$

$$t_1,t_2,t_3\in[\tau_p,\tau_{p+1}],$$

$$\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{def}{=} \zeta_j^{(i)},$$

$\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций на промежутке $[\tau_p, \tau_{p+1}]$, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.3. В (5.21)-(5.24) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, что справедливо, в частности для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций на промежутке $[\tau_p, \tau_{p+1}]$. Число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.3) в теореме 5.1 при $r = 3$. Пусть в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ на промежутке $[\tau_p, \tau_{p+1}]$ взята тригонометрическая система. Тогда формулы (5.21)-(5.24) преобретут согласно разложениям, полученным в главе 4, следующий вид:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.25}$$

$$\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right], \tag{5.26}$$

$$\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right] - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.27}$$

$$\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} = \Delta^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} + \right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\} + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\right\} + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} -$$

$$\left.-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right] +$$

$$
+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_1)}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_1)}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_2)}+\right.
$$

$$
\left.\left.+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_1)}\right\}\right]+
$$

$$
+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\left\{\sum_{r,m=1}^{q}\frac{2}{rm}\left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+
$$

$$
+\sum_{l,m=1}^{q}\frac{1}{m(l+m)}\left[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.
$$

$$
\left.-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+
$$

$$
+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\frac{1}{m(l-m)}\left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.
$$

$$
\left.-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+
$$

$$
+\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=l+1}^{q}\frac{1}{m(m-l)}\left[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.
$$

$$
\left.\left.\left.-\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]\right\}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\Delta^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_{0}^{(i_1)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right]-
$$

$$
-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_{0}^{(i_3)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right]. \qquad (5.28)
$$

Рассмотрим более подробно вопрос о выборе числа q. Вычисляя при $i_1\neq i_2,\ i_2\neq i_3,\ i_1\neq i_3$ величины $\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)^2\right\}$,

$\mathsf{M}\left\{\left(I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)^2\right\}$, $\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)^2\right\}$ и подставляя их в условие (5.3) теоремы 5.1 при $r=3$ получим:

$$\frac{3\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\le C\Delta^4, \tag{5.29}$$

$$\frac{\Delta^3}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\le C\Delta^4, \tag{5.30}$$

$$\Delta^3\left\{\frac{5}{36}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\frac{79}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2(r^2-l^2)^2}\right\}\le C\Delta^4. \tag{5.31}$$

Число q в (5.29)-(5.31) должно быть выбрано таким, чтобы оно одновременно удовлетворяло всем трем условиям (5.29)-(5.31). Допускается также, что в каждом из условий (5.29)-(5.31) число q может быть свое.

Отметим, что если $i_1=i_2$, то справедлива с вероятностью 1 хорошо известная формула:

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_1)}=\frac{1}{2}\left(I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta,$$

которая может быть получена без разложений в ряды, хотя и следует из (5.27). Условие типа (5.31) может быть получено и в том случае, когда i_1,i_2,i_3 не являются попарно различными. Если речь идет об аппроксимации повторных стохастических интегралов кратности выше третьей, то получение условий типа (5.29)-(5.31) становится затруднительным. Поэтому целесообразно воспользоваться более грубыми, но вместе с тем более простыми условиями выбора верхних пределов суммирования в рядах, аппроксимирующих повторные стохастические интегралы. Для получения таких простых условий воспользуемся рекомендациями, приведенными в [38]. В главе 4 было показано, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2i_1)}-\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2i_1)}\right)^2\right\}=\frac{3\Delta^2}{2\pi^2}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}. \tag{5.32}$$

Поскольку $\sum\limits_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \le \int_p^{\infty} \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{q}$, то условие (5.32) может быть переписано в виде:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)}\right)^2\right\} \le \frac{C_0\Delta^2}{q}, \qquad (5.33)$$

где $C_0 = 3\frac{1}{2\pi^2}$. Далее очевидно, что при достаточно малом Δ найдется такая постоянная C_1, что справедлива оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1\ldots i_k)} - \hat{I}_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1\ldots i_k)}\right)^2\right\} \le \frac{C_1\Delta^2}{q}, \qquad (5.34)$$

где $\hat{I}_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \sum\limits_{j_1=0}^{q} \ldots \sum\limits_{j_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1} \prod\limits_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_l)}$; $C_{j_k\ldots j_1}$, $\zeta_{(j_l)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_l)}$ такие же, как в теореме 4.5; $(l_1,\ldots,l_k,j,k) \in \bigcup\limits_{g=1}^{r} \mathcal{D}_g;\ r = 2,\ 3,\ldots$.

Можно показать, что в силу связи между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича существует такая постоянная $C' < \infty$, что выполнено условие:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_k)} - \hat{I}_{l_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_k)}\right)^2\right\} \le \frac{C'\Delta^2}{q}, \qquad (5.35)$$

где $(l_1,\ldots,l_k,j,k) \in \bigcup\limits_{g=1}^{r} \mathcal{D}_g;\ r = 2,\ 3,\ldots$. Поскольку должно выполняться условие (5.3) в теореме 5.1 при выполнении условия (5.35), то

$$q \ge \frac{C'}{C}\Delta^{1-r};\ r = 2,\ 3,\ldots \qquad (5.36)$$

Условие (5.36) достаточно грубое, но вместе с тем очень простое и универсальное.

Полностью аналогичными рассуждениями приходим к тому, что найдутся такие постоянные C^{**} и C'', что для всех $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,g=1}^{r} \mathcal{E}_{qg}$; $(\mu_k,\ldots,\mu_1) \in \bigcup\limits_{q,g=1}^{r} \mathcal{B}_{qg}$; $r = 2,\ 3,\ldots$ выполнены следующие условия:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_k\ldots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_k\ldots i_1)}\right)^2\right\} \le C^{**}\frac{\Delta^2}{q}, \qquad (5.37)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le C''\frac{\Delta^2}{q}. \tag{5.38}$$

Из (5.37) и (5.10) получаем, что

$$q\ge\frac{C^{**}}{C^{*}}\Delta^{1-r};\ r=2,\ 3,\ldots . \tag{5.39}$$

5.2.3 Явный сильный одношаговый численный метод порядка 2.0

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r=4$. Тогда из (5.2) при $r=4$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.0 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-L\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \tag{5.40}$$

Согласно соотношениям (5.12), (5.13), (5.19), (5.20), а также соотношениям:

$$I^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}=I^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2, \tag{5.41}$$

$$I^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}=I^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2, \tag{5.42}$$

$$I^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}=I^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}I^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\left(-I^{*(i_4i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+I^{*(i_4i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta I^{*(i_4i_3)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+I^{*(i_4i_3)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\Delta^2, \tag{5.43}$$

которые вытекают с вероятностью 1 из теорем о замене порядка интегрирования (см. главу 2) и теоремы 4.1 делаем вывод, что для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ необходимо уметь совместно моделировать повторные стохастические интегралы Стратоновича $I^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $I^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$.

Согласно методу разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанному на кратных рядах Фурье, в предположении, что $\phi_0(s)\equiv\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ имеем следующие формулы для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (5.40):

$$I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sqrt{\Delta}\zeta^{(i_1)}_0, \tag{5.44}$$

$$I^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}C^1_{j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}, \tag{5.45}$$

$$\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}C^{00}_{j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.46}$$

$$\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C^{000}_{j_3j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}C^1_{j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta\sqrt{\Delta}\zeta^{(i_3)}_0+\sum_{j_3=0}^{q}C^1_{j_3}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\right), \tag{5.47}$$

$$\hat{I}^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}C^{10}_{j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2, \tag{5.48}$$

$$\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}C_{j_2 j_1}^{01}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2, \tag{5.49}$$

$$\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}C_{j_2 j_1}^{10}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\left(-C_{j_4 j_1}^{01}+C_{j_4 j_1}^{10}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\left(\Delta C_{j_4 j_3}^{00}+C_{j_4 j_3}^{01}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\Delta^2, \tag{5.50}$$

где $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}\stackrel{def}{=}\zeta_j^{(i)}$, $C_{j_1}^{1}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1$, $K(t_1)=\tau_p-t_1$, $C_{j_2 j_1}^{00}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{00}(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$, $K_{00}(t_1,t_2)=\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$, $C_{j_3 j_2 j_1}^{000}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{000}(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3$, $K_{000}(t_1,t_2)=\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}$, $C_{j_2 j_1}^{10}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{10}(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$, $K_{10}(t_1,t_2)=(\tau_p-t_1)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$, $C_{j_2 j_1}^{01}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{01}(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$, $K_{01}(t_1,t_2)=(\tau_p-t_2)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$, $C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{0000}(t_1,\ldots,t_4)\prod_{l=1}^{4}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_4$, $K_{0000}(t_1,\ldots,t_4)=\prod_{l=1}^{3}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$; $t_1,\ldots,t_4\in[\tau_p,\tau_{p+1}]$, $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций на промежутке $[\tau_p,\tau_{p+1}]$, удовлетворяющая условию 2 теоремы 4.3. Число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.36) при $r=4$. Следует отметить, что (5.40), (5.44)-(5.50) определяют явный одношаговый сильный метод порядка 2.0. Этот метод является новым, поскольку в литературе [35], [38], [45] присутствуют представления аналогичного метода с общими рекомендациями по аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 4-й кратности, входящих в указанный метод, а собственно аппроксимации таких интегралов в литературе неизвестны.

5.2.4 Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 5$. Тогда из (5.2) при $r = 5$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.5 вида:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] + \\
+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} + \\
+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \right. \\
\left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) \right] + \\
+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) \right] + \\
+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) + \right. \\
+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) + \\
+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \\
\left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] + \\
+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}.
\end{aligned}
\qquad (5.51)
$$

С помощью теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах (см. главу 2) и с помощью связи между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича (теорема 4.1) можно получить с вероятностью 1 следующие соотношения:

$$I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.52}$$

$$I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} = I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)} + I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.53}$$

$$I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} = I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2 I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)} - I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.54}$$

$$I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} = I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2 I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)} - I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.55}$$

$$I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} = I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\left(-I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_2 i_1)} + I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_2 i_1)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\left(I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_1)} - I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_1)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3)} + I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3)}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)} + I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3)}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(2\Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5)} + I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5)} + \Delta^2 I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5)}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}. \tag{5.56}$$

С помощью формул (5.52)-(5.56), а также согласно методу разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанному на кратных рядах Фурье получаем:

$$\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^{2}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.57}$$

$$\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}^{100}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\sum_{j_3=0}^{q}\left(\Delta C_{j_3}^{1}+C_{j_3}^{2}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^{2}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.58}$$

$$\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}^{010}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_3)}-\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3}^{2}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^{2}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.59}$$

$$\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}^{001}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_3)}-\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3}^{2}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^{2}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.60}$$

$$\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{00000}\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}^{100}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}\left(-C_{j_5j_2j_1}^{010}+C_{j_5j_2j_1}^{100}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}\left(C_{j_5j_4j_1}^{010}-C_{j_5j_4j_1}^{001}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}\left(\Delta C_{j_5j_4j_3}^{000}+C_{j_5j_4j_3}^{001}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_3=0}^{q}\left(\Delta C_{j_3}^{1}+C_{j_3}^{2}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\sum_{j_5=0}^{q}\left(2\Delta C_{j_5}^{1}+C_{j_5}^{2}\right)\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\Delta^2\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_5)}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\Delta C_{j_1}^{2}\zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (5.61)$$

где

$$C_{j_1}^{2}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1,$$

$$C_{j_3j_2j_1}^{100}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{100}(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3,$$

$$C_{j_3j_2j_1}^{010}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{010}(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3,$$

$$C_{j_3j_2j_1}^{001}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{001}(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3,$$

$$C_{j_5j_4j_3j_2j_1}^{00000}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K_{00000}(t_1,\ldots,t_5)\prod_{l=1}^{5}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_5,$$

где $K_2(t_1)=(\tau_p-t_1)^2$, $K_{100}(t_1,t_2,t_3)=(\tau_p-t_1)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}$, $K_{010}(t_1,t_2,t_3)$ $=(\tau_p-t_2)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}$, $K_{00000}(t_1,\ldots,t_5)=\prod_{l=1}^{4}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$, $K_{001}(t_1,t_2,t_3)=$

$(\tau_p - t_3)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}},\ t_1,\ldots,t_5 \in [\tau_p,\tau_{p+1}]$, а остальные обозначения такие же, как в (5.44)-(5.50). Совокупность соотношений (5.51), (5.44)-(5.50), (5.57)-(5.61) определяет явный сильный одношаговый метод порядка 2.5. Этот метод является новым, поскольку он основывается на унифицированном разложении Тейлора-Ито и кроме того в литературе [35], [38], [45] есть лишь представление метода такого же порядка, основанного на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, с общими рекомендациями по аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 4-й и 5-й кратности, входящих в него, а собственно сами аппроксимации не получены. Число q в (5.44)-(5.50), (5.57)-(5.61) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.36) при $r = 5$.

5.3 Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена

5.3.1 Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r = 3$ явный сильный одношаговый метод порядка 1.5, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и следующий из (5.9) при $r = 3$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta +$$

$$+{}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}. \qquad (5.62)$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито: $J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p};\ i_1,i_2,i_3 = 1,\ldots,m$. Для этого рассмотрим, вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta,$$

$$J^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}, \quad J^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}J^{*(i_3)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}J^{*(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p},$$

где $J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^{*s}\ldots\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k}$; $k\ge 1$, $i_l=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1$ и $i_l=0$ при $\lambda_l=0$, $(i_k,\ldots,i_{l+1},0,i_{l-1},\ldots,i_1)\stackrel{def}{=}(i_k,\ldots,i_{l+1},i_{l-1},\ldots,i_1)$. Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s)\equiv\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\zeta^{(i_1)}_0, \tag{5.63}$$

$$\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{5.64}$$

$$\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}, \tag{5.65}$$

$$\hat{J}^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}, \tag{5.66}$$

$$\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_3)}_{j_3} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(i_1)}_{j_1}, \tag{5.67}$$

где $C_{j_k\ldots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1,\ldots,t_k)\prod\limits_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k$, $K(t_1,\ldots,t_k) = \prod\limits_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$; $k=2,\ 3$, а остальные обозначения такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в соотношениях (5.63)-(5.67) выбирается из условия (5.39) при $r=3$.

Совокупность соотношений (5.62), (5.63)-(5.67) и (5.39) при $r=3$ определяют явный сильный одношаговый метод порядка 1.5.

Замечание *Следует отметить, что при $r=2$ из (5.9) следует метод Мильштейна, который был подробно рассмотрен ранее.*

5.3.2 Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r = 4$ явный сильный одношаговый метод порядка 2.0, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и следующий из (5.9) при $r = 4$:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\
+ {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ L^2\{\mathbf{y}_p\}\frac{\Delta^2}{2} + {}^{(2)}G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ {}^{(2)}G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(2)}LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ {}^{(4)}G_0G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{4}{\cdot} {}^{(4)}\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}. \qquad (5.68)
\end{gathered}
$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито $J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}$; $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m$. Для этого рассмотрим, вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$
J^{(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p},
$$

$$
J^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2,
$$

$$
J^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_3i_2i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\Delta^2,
$$

$$
\begin{gathered}
J^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}J^{*(i_4i_3)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} - \\
- \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}J^{*(i_4i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}J^{*(i_2i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ \frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\Delta^2,
\end{gathered}
$$

Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$
\hat{J}^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3j_2j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\Delta^2, \qquad (5.69)
$$

$$\hat{J}^{(i_3 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}, \tag{5.70}$$

$$\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2, \tag{5.71}$$

$$\hat{J}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\prod_{l=1}^{4}\zeta^{(i_l)}_{j_l}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(i_4)}_{j_4}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}+$$

$$+\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\Delta^2, \tag{5.72}$$

где $C_{j_k\ldots j_1}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K(t_1,\ldots,t_k)\prod\limits_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k$, $K(t_1,\ldots,t_k)=\prod\limits_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$, $k=3,\ 4$, а остальные обозначения такие же как и предыдущих параграфах этой главы. Соотношения (5.68), (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), где в (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72) число q выбирается из условия (5.39) при $r=4$, определяют явный сильный одношаговый метод порядка 2.0. Выражение (5.68) является известным [38], однако описанный в этом параграфе метод можно считать новым, так как в литературе неизвестны аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}$; $i_1,\ldots,i_4=1,\ldots,m$, необходимые для реализации этого метода.

5.3.3 Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r=5$ явный сильный одношаговый метод порядка 2.5, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме

Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+{}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}+L\{\mathbf{y}_p\}\Delta+$$

$$+{}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+L^2\{\mathbf{y}_p\}\frac{\Delta^2}{2}+{}^{(2)}G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(2)}G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(2)}LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(4)}G_0G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{4}{\cdot}{}^{(4)}\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}G_0L^2\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(1)}LG_0L\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}L^2G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(3)}G_0G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(3)}G_0G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(3)}G_0LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(3)}LG_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+{}^{(3)}G_0G_0G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{5}{\cdot}{}^{(5)}\hat{J}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{5.73}$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито $J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_4i_3i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_4i_2i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_4i_3i_2)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}$.

Для этого рассмотрим, вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$J^{(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}=J^{*(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p},\quad J^{(i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}=J^{*(i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}=J^{*(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_4i_3i_2)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}=J^{*(i_4i_3i_2)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}J^{*(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}J^{*(i_4)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_4i_3i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}=J^{*(i_4i_3i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}J^{*(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_4 i_2 i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_4 i_2 i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} J^{*(i_4)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_3 i_2 i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J^{*(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J^{*(i_3)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$J^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p} = J^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} J^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} J^{*(i_5 i_2 i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J^{*(i_5 i_4 i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J^{*(i_5 i_4 i_3)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J^{*(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J^{*(i_3)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J^{*(i_5)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$\hat{J}^{(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}, \tag{5.74}$$

$$\hat{J}^{(i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}, \tag{5.75}$$

$$\hat{J}^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}, \tag{5.76}$$

$$\hat{J}^{(i_4 i_3 i_2)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q} C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}, \qquad (5.77)$$

$$\hat{J}^{(i_4i_3i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(0)}, \qquad (5.78)$$

$$\hat{J}^{(i_4i_2i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(0)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}, \qquad (5.79)$$

$$\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(0)}, \qquad (5.80)$$

$$\hat{J}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5j_4j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5j_4j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(0)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5j_4j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}\sum_{j_4=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5j_4j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}, \tag{5.81}$$

где $C_{j_k\ldots j_1}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K(t_1,\ldots,t_k)\prod\limits_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k$, $K(t_1,\ldots,t_k)=\prod\limits_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$; $k=3,\ 4,\ 5$, а остальные обозначения такие же, как в предыдущих параграфах этой главы. Соотношения (5.73), (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), (5.74)-(5.81), где в (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), (5.74)-(5.81) число q выбирается из условия (5.39) при $r=5$ определяют явный овношаговый сильный метод порядка 2.5.

Выражение (5.73) является известным [38], однако описанный в этом параграфе метод можно считать новым, так как в литературе неизвестны аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4i_3i_2i_1)}$, $J_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}$; $i_1,\ldots,i_5=1,\ldots,m$, необходимые для реализации этого метода.

5.3.4 Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена

Рассмотрим некоторые особенности численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Ранее отмечалось, что численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито содержат меньшее число различных повторных стохастических интегралов нежели методы основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. В этом заключается некоторое преимущество первых методов перед вторыми. Однако при детальном сравнении этих двух семейств численных методов можно прийти к выводу, что аппроксимация повторных стохастических интегралов $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$, входящих в численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена несколько проще, чем аппроксимация повторных стохастических интегалов $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$, из численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито. Так, для реализации явного сильного одношагового метода, порядка 2.5, основанного на унифицированном разложении Тейлора-Ито в предположении, что $\phi_0(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ требуется вычисление одиннадцати различных коэффициентов Фурье: $C^{1}_{j_1}$, $C^{00}_{j_2j_1}$, $C^{000}_{j_3j_2j_1}$, $C^{01}_{j_2j_1}$, $C^{10}_{j_2j_1}$, $C^{0000}_{j_4j_3j_2j_1}$, $C^{2}_{j_1}$, $C^{100}_{j_3j_2j_1}$, $C^{010}_{j_3j_2j_1}$, $C^{001}_{j_3j_2j_1}$, $C^{00000}_{j_5j_4j_3j_2j_1}$. Для реализации аналогичного численного метода, основанного на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена требуется вычисление четырех коэффициентов Фурье: $C_{j_2j_1}$, $C_{j_3j_2j_1}$, $C_{j_4j_3j_2j_1}$, $C_{j_5j_4j_3j_2j_1}$. Таким образом, на основе приведенного примера видно, что хотя численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито и содержат меньшее число различных повторных стохастических интегралов, но затраты на их аппроксимацию несколько больше (за счет необходимости вычисления большего количества коэффициентов Фурье), чем для повторных стохастических интегралов, входящих в численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. По-другому обстоит дело, если для аппроксимации повторных стохастических интегралов используется метод, основанный на их приближении интегральными суммами. Этот метод не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье и поэтому его использование в сочетании с унифицированными разложениями Тейлора-Ито может дать выигрыш за счет необходимости аппроксимировать меньшее число различных повторных стохастических интегралов.

5.4 Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича

5.4.1 Явный сильный одношаговый метод порядка r/2

Пусть процесс $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$, где $R:\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^1$, $\mathbf{x}_s$–решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.36). Тогда согласно теореме 3.8 он разлагается при всех $s, t \in [0, T]$: $s \geq t$ в ряд Тейлора-Стратоновича вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\mu_k,\ldots,\mu_1)\in\mathcal{B}_{qk}} {}^{(p_k)}B_{\mu_k\ldots\mu_1}\{\eta_t\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t} + H_{r+1_{s,t}}, \quad (5.82)$$

где равенство (5.82) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле, причем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}} \leq C_{r+1}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где $C_{r+1} = const < \infty$, множество $\mathcal{B}_{qk}$ имеет вид: $\mathcal{B}_{qk} = \{(\mu_k, \ldots, \mu_1) : 2k - \delta_1 - \ldots - \delta_k = q\}$; $\mu_l = \alpha,\ \beta$; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\mu_l = \beta$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l} \delta_j$; $\overset{0}{\cdot}$-умножение на скаляр; $(i_k, \ldots, i_{l+1}, 0, i_{l-1} \ldots, i_1) \overset{def}{=} (i_k, \ldots, i_{l+1}, i_{l-1} \ldots, i_1)$; ${}^{(p_k)}J^*_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t} = \left\|J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t}\right\|^{m\delta_1 \quad m\delta_k}_{i_1=\delta_1,\ldots,i_l=\delta_k}$, $J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t} = \int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1} \ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k}$; производные по Стратоновичу при $k = 2,\ 3, \ldots, r$ покомпонентно определяются рекуррентными соотношениями

$$B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\alpha\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} = LB^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i_k=1}^{m} G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\},$$

$$B^{(i_k i_{k-1}\ldots i_1)}_{\beta\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_k)} B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\eta_\tau\},$$

а при $k = 1$ соотношениями:

$$B_\alpha\{\eta_\tau\} = L\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\};\ B_\beta^{(i_1)}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\},$$

где операторы $L\{\cdot\}$ и $G_0^{(i)}\{\cdot\}$; $i = 1, \ldots, m$ такие же, как в лемме 3.1.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\Delta > 0$, $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (5.82) получаем с вероятностью 1 общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36):

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\mu_k,\ldots,\mu_1)\in\mathcal{B}_{qk}} {}^{(p_k)}B_{\mu_k\ldots\mu_1}\{\mathbf{y}_p\} \overset{(p_k)}{\cdot} {}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}, \quad (5.83)$$

где обозначено: $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{def}{=} \mathbf{y}_p$, ${}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\|\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right\|^{m\delta_1 \qquad m\delta_k}_{i_1=\delta_1,\ldots,i_l=\delta_k}$, а $\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ – аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}$.

Теорема 5.3 *Пусть условия теоремы 3.8 выполнены при $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x}$. Пусть также выполнены следующие условия:*

1. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re^n$, $\forall(\mu_k,\ldots,\mu_1)\in\bigcup\limits_{q,g=1}^{r}\mathcal{B}_{qg}$ *и* $\forall t\in[0,T]$

$$\left|B^{(i_k,\ldots,i_1)}_{\mu_k\ldots\mu_1}\{\mathbf{x}\}-B^{(i_k,\ldots,i_1)}_{\mu_k\ldots\mu_1}\{\mathbf{y}\}\right|\le K_1\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|.$$

2. $\forall(\mu_k,\ldots,\mu_1)\in\bigcup\limits_{q,g=1}^{r}\mathcal{B}_{qg}$, $\forall p\in\{0,\ 1,\ldots,N\}$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le C'\Delta^{r+1},\ C'=const<\infty. \qquad (5.84)$$

3. $\forall(\mu_k,\ldots,\mu_1)\in\bigcup\limits_{g=1}^{r+1}\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_g=\{(\mu_g,\ldots,\mu_1):\ \mu_l=\alpha,\ \beta;\ l=1,\ldots,g\}$, $\forall\mathbf{x}\in\Re^n$, $\forall t\in[0,T]$

$$\left|B^{(i_k,\ldots,i_1)}_{\mu_k\ldots\mu_1}\{\mathbf{x}\}\right|\le K_0\left(1+\mid\mathbf{x}\mid\right),$$

4. $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\right\}\le K_2\Delta^r$, $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}<\infty$,

где постоянные $K_0,\ K_1,\ K_2,\ C$ не зависят от Δ.

Тогда

$$\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_T|^2\right\}\le K_3\Delta^r,$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ.

Доказательство теоремы 5.3 можно найти в [38].

Таким образом, если условия теоремы 5.3 выполнены, то численный метод (5.83) является явным одношаговым сильным методом порядка $r/2$.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (5.83), методом, основанным на кратных рядах Фурье:

$$\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta^{(i_l)}_{(j_l)\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (5.85)$$

где $\zeta^{(i_l)}_{(j_l)\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$, $K(t_1, \ldots, t_k) = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}$ при $k \geq 2$ и $K(t_1) \equiv 1$, $C_{j_k \ldots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \ldots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \ldots, t_k) \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\, dt_1 \ldots dt_k$, $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная на промежутке $[\tau_p, \tau_{p+1}]$ система функций, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.3. Это может быть, например, тригонометрическая или полиномиальная система функций.

Поскольку, как уже отмечалось ранее, для достаточно малых Δ существует такая постоянная C'', что

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(i_k \ldots i_1)}_{(\mu_k \ldots \mu_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{*(i_k \ldots i_1)}_{(\mu_k \ldots \mu_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\} \leq \frac{C''\Delta^2}{q}, \tag{5.86}$$

то согласно (5.84), (5.86) получаем следующее условие для выбора q:

$$q \geq \frac{C''\Delta^{1-r}}{C'};\ r = 2,\ 3, \ldots . \tag{5.87}$$

Таким образом соотношения (5.83), (5.85) и (5.87) определяют явный одношаговый сильный метод численного решения стохастического дифференциального уравнения (1.36) порядка $r/2$. Этот метод является новым, так как в литературе отсутствуют аппроксимации повторных стохастических интегралов кратностей выше третьей, необходимые для реализации численной схемы (5.83).

5.4.2 Явный сильный одношаговый метод порядка 1.0

Пусть условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 2$. Тогда из (5.83) при $r = 2$ получаем следующий явный одношаговый сильный метод порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_{\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^{*}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + B_{\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\Delta +$$

$$+ {}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^{*}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{5.88}$$

где

$$B_{\alpha}\{\cdot\} = L\{\cdot\} - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\{\cdot\},\ B_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_1)}\{\cdot\}, \tag{5.89}$$

$$B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_2)} B_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}. \tag{5.90}$$

Аппроксимируем следующие повторные стохастические интегралы Стратоновича $J^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2 i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$; $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$ согласно методу, основанному на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.91}$$

$$\hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.92}$$

где $C_{j_2 j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ dt_2$, $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{def}{=} \zeta_j^{(i)}$, $K(t_1,t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$.

Число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.87) при $r = 2$.

5.4.3 Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 3$. Тогда из (5.83) при $r = 3$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 1.5:

$$\begin{gathered}\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_\beta\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + B_\alpha\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ + {}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^*_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + \\ + {}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p},\end{gathered} \tag{5.93}$$

где

$$B^{(i_1)}_{\alpha\beta}\{\cdot\} = LB^{(i_1)}_\beta\{\cdot\} - \frac{1}{2}\sum_{i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}G_0^{(i_2)}B^{(i_1)}_\beta\{\cdot\},\ B^{(i_1)}_{\beta\alpha}\{\cdot\} = G_0^{(i_1)}B_\alpha\{\cdot\}, \tag{5.94}$$

$$B^{(i_3 i_2 i_1)}_{\beta\beta\beta}\{\cdot\} = G_0^{(i_3)}B^{(i_2 i_1)}_{\beta\beta}\{\cdot\}, \tag{5.95}$$

где $B_\alpha\{\cdot\}$, $B^{(i_1)}_\beta\{\cdot\}$ $B^{(i_2 i_1)}_{\beta\beta}\{\cdot\}$ определяются соотношениями (5.89), (5.90). Аппроксимируем повторные стохастические интегралы Стратоновича $J^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2 i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_1)}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2)}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$ методом, основанным на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.96}$$

$$\hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}, \tag{5.97}$$

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}, \tag{5.98}$$

$$\hat{J}^{*(i_2)}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}, \tag{5.99}$$

$$\hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}, \tag{5.100}$$

где $C_{j_3 j_2 j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3$, $K(t_1,t_2,t_3) = \mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\times \mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}$, а остальные обозначения, входящие в (5.96)-(5.100) такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.96)-(5.100) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.87) при $r=3$.

5.4.4 Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r=4$. Тогда из (5.83) при $r=4$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_\beta\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + B_\alpha\{\mathbf{y}_p\}\Delta +$$

$$+{}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^*_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(2)}B_{\beta\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^*_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(2)}B_{\alpha\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^*_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(2)}B_{\beta\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} + B_{\alpha\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\frac{\Delta^2}{2} +$$

$$+{}^{(4)}B_{\beta\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \overset{4}{\cdot} {}^{(4)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{5.101}$$

где

$$B_{\alpha\alpha}\{\cdot\} = LB_{\alpha}\{\cdot\} - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)}G_0^{(i_1)}B_{\alpha}\{\cdot\},$$

$$B_{\alpha\beta\beta}^{(i_2i_1)}\{\cdot\} = LB_{\beta\beta}^{(i_2i_1)}\{\cdot\} - \frac{1}{2}\sum_{i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)}G_0^{(i_3)}B_{\beta\beta}^{(i_2i_1)}\{\cdot\},$$

$$B_{\beta\beta\alpha}^{(i_3i_2)}\{\cdot\} = G_0^{(i_3)}B_{\beta\alpha}^{(i_2)}\{\cdot\}, \quad B_{\beta\alpha\beta}^{(i_3i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_3)}B_{\alpha\beta}^{(i_1)}\{\cdot\},$$

$$B_{\beta\beta\beta\beta}^{(i_4i_3i_2i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_4)}B_{\beta\beta\beta}^{(i_3i_2i_1)}\{\cdot\},$$

где $B_{\alpha}\{\cdot\}$, $B_{\beta\beta}^{(i_2i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta\alpha}^{(i_2)}\{\cdot\}$, $B_{\alpha\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta\beta\beta}^{(i_3i_2i_1)}\{\cdot\}$, определяются соотношениями (5.89), (5.90), (5.94), (5.95).

Аппроксимируем повторные стохастические интегралы Стратоновича $J^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_1)}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2)}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_3i_2i_1)}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_3i_2)}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_3i_1)}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2i_1)}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}$, $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m$ методом, основанным на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.102}$$

$$\hat{J}^{*(i_2i_1)}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.103}$$

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}, \tag{5.104}$$

$$\hat{J}^{*(i_2)}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.105}$$

$$\hat{J}^{*(i_3i_2i_1)}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.106}$$

$$\hat{J}^{*(i_3i_2)}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(0)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.107}$$

$$
\hat{J}^{*(i_3 i_1)}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.108}
$$

$$
\hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(0)}, \tag{5.109}
$$

$$
\hat{J}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}, \tag{5.110}
$$

где $C_{j_4j_3j_2j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1,\ldots,t_4)\prod\limits_{l=1}^{4}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_4,\ K(t_1,\ldots,t_4) = \prod\limits_{l=1}^{3}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$, а остальные обозначения, входящие в (5.102)-(5.110) такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.102)-(5.110) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.87) при $r=4$.

Совокупность соотношений (5.101)-(5.110) и (5.87) при $r=4$ определяет явный одношаговый сильный метод порядка 2.0. Он является новым, так как аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 4-й кратности отсутствуют в литературе, хотя соотношение (5.101) содержится, например, в [38].

5.4.5 Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r=5$. Тогда из (5.83) при $r=5$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.5:

$$
\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+{}^{(1)}B_\beta\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}^{*}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+B_\alpha\{\mathbf{y}_p\}\Delta+
$$
$$
+{}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}^{*}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}B_{\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}^{*}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+
$$
$$
+{}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}^{*}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{3}{\cdot}{}^{(3)}\hat{J}^{*}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+
$$
$$
+{}^{(2)}B_{\beta\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}^{*}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(2)}B_{\alpha\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}^{*}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+
$$
$$
+{}^{(2)}B_{\beta\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{2}{\cdot}{}^{(2)}\hat{J}^{*}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}+B_{\alpha\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\frac{\Delta^2}{2}+
$$
$$
+{}^{(4)}B_{\beta\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{4}{\cdot}{}^{(4)}\hat{J}^{*}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}B_{\beta\alpha\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\stackrel{1}{\cdot}{}^{(1)}\hat{J}^{*}_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}+
$$

$$+{}^{(1)}B_{\alpha\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{\alpha\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}\hat{J}^*_{(\alpha\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(3)}B_{\beta\beta\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{\beta\beta\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(4)}B_{\beta\alpha\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{\alpha\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{3}{\cdot} {}^{(3)}\hat{J}^*_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+{}^{(5)}B_{\beta\beta\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \stackrel{5}{\cdot} {}^{(5)}\hat{J}^*_{(\beta\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (5.111)$$

где при $k = 2,\ 3, \ldots$

$$B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\alpha\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\cdot\} = LB^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\cdot\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i_k=1}^{m} G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\cdot\},$$

$$B^{(i_k i_{k-1}\ldots i_1)}_{\beta\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\cdot\} = G_0^{(i_k)} B^{(i_{k-1}\ldots i_1)}_{\mu_{k-1}\ldots\mu_1}\{\cdot\},$$

а при $k = 1$:

$$B_\alpha\{\cdot\} = L\,\{\cdot\} - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\,\{\cdot\}\,,\ B_\beta^{(i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_1)}\,\{\cdot\}\,.$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящих в (5.111) воспользуемся соотношениями (5.102)-(5.110), а также следующими разложениями:

$$\hat{J}^{*(i_3)}_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}, \qquad (5.112)$$

$$\hat{J}^{*(i_2)}_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}, \qquad (5.113)$$

$$\hat{J}^{*(i_1)}_{(\alpha\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\sum_{j_2=0}^{q}\sum_{j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(0)}_{j_2}\zeta^{(0)}_{j_3}, \qquad (5.114)$$

$$\hat{J}^{*(i_4 i_3 i_2)}_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_4=0}^{q} C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\zeta^{(0)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}, \qquad (5.115)$$

$$\hat{J}^{*(i_4 i_3 i_1)}_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(0)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}, \tag{5.116}$$

$$\hat{J}^{*(i_4 i_2 i_1)}_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(0)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}, \tag{5.117}$$

$$\hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_4=0}^{q}C_{j_4 j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(0)}, \tag{5.118}$$

$$\hat{J}^{*(i_5\ldots i_1)}_{(\beta\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{j_1=0}^{q}\ldots\sum_{j_5=0}^{q}C_{j_5\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}, \tag{5.119}$$

где $K(t_1,\ldots,t_5)=\prod\limits_{l=1}^{4}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}$, $C_{j_5\ldots j_1}=\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\ldots\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}K(t_1,\ldots,t_5)\prod\limits_{l=1}^{5}\phi_{j_l}(t_l)\times$ $dt_1\ldots dt_5$, а остальные обозначения, входящие в (5.112)-(5.119) такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.102)-(5.110), (5.112)-(5.119) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.87) при $r=5$.

Совокупность соотношений (5.111), (5.102)-(5.110), (5.112)-(5.119) и (5.87) при $r=5$ определяет явный одношаговый сильный метод порядка 2.5. Он является новым, так как аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 4-й и 5-й кратности отсутствуют в литературе, несмотря на то, что соотношение (5.111) содержится, например, в [38].

Замечание *Отметим, что если в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ на промежутке $[\tau_p,\tau_{p+1}]$ взята тригонометрическая или полиномиальная системы, то $\zeta_j^{(0)}=0$ при $j\neq 0$ и $\zeta_0^{(0)}=\sqrt{\Delta}$, что существенно упрощает формулы, для аппроксимаций повторных стохастических интегралов.*

5.5 Конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито

В этом параграфе будут рассматриваться явные одношаговые сильные конечно-разностные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Идея построения таких методов заключается в конечно-разностной аппроксимации частных производных $H_l^{(i_l)}\ldots H_1^{(i_1)}\{\mathbf{y}_p\}$, где $H_j^{(0)}\{\cdot\}=L\{\cdot\}$, $H_j^{(i_j)}\{\cdot\}=G_0^{(i_j)}\{\cdot\}$ при $i_j=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,l$, входящие в унифицированное разложение Тейлора-Ито и разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Для осуществления этих конечно-разностных аппроксимаций нам потребуются некоторые соотношения, основывающиеся на формуле Тейлора.

5.5.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

Рассмотрим функции $\mathbf{f},\mathbf{g}:\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^n$. Через $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x},t)$ будем обозначать $i-$ые компоненты $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$; $i=1,\ldots,n$. Для произвольного $\Delta>0$ с помощью формулы Тейлора получаем следующие соотношения:

$$\Delta\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i'=\sum_{i=1}^{2}\pi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\sigma_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^2), \tag{5.120}$$

$$\Delta\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i'=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\beta_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^3), \tag{5.121}$$

$$\Delta\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i'=\sum_{i=1}^{4}\eta_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\omega_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^4), \tag{5.122}$$

$$\Delta\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i'=\sum_{i=1}^{4}\theta_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\varepsilon_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^5), \tag{5.123}$$

$$\Delta^2\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}\mathbf{f}_{ij}''=\sum_{i=1}^{3}\varrho_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\varpi_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^3), \tag{5.124}$$

$$\Delta^2\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}\mathbf{f}_{ij}''=\sum_{i=1}^{4}\mu_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\lambda_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^4), \tag{5.125}$$

$$\Delta^2\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}\mathbf{f}_{ij}''=\sum_{i=1}^{5}\psi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\phi_i\Delta\mathbf{g},t)+O(\Delta^5), \tag{5.126}$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}'_i)=\sum_{i=1}^{2}\zeta_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\delta_i\Delta\mathbf{g},t+\gamma_i\Delta)+O(\Delta^2), \tag{5.127}$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}'_i)=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\chi_i\Delta\mathbf{g},t+\kappa_i\Delta)+O(\Delta^3), \tag{5.128}$$

$$2\mathbf{f}+\Delta(\dot{\mathbf{f}}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}'_i)=\sum_{i=1}^{2}\rho_i\mathbf{f}(\mathbf{x}+\nu_i\Delta\mathbf{g},t+\xi_i\Delta)+O(\Delta^2), \tag{5.129}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\stackrel{def}{=}\mathbf{f}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\stackrel{def}{=}\mathbf{g}$, $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\stackrel{def}{=}\dot{\mathbf{f}}$, $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}\stackrel{def}{=}\mathbf{u}'_i$, $\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^{(i)}\partial\mathbf{x}^{(j)}}\stackrel{def}{=}\mathbf{u}''_{ij}$, где $\mathbf{u}=\mathbf{f},\mathbf{g}$ и коэффициенты π_i, σ_i, α_i, β_i, η_i, ω_i, θ_i, ε_i, μ_i, λ_i, ψ_i, ϕ_i, ζ_i, δ_i, γ_i, φ_i, χ_i, κ_i, ρ_i, ν_i, ξ_i, ϱ_i, ϖ_i удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\lambda_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{\lambda_i^2}{2}&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\lambda_i^3&=&0\end{array}\right.,\quad
\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{4}\eta_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\eta_i\omega_i&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\eta_i\omega_i^2&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\eta_i\omega_i^3&=&0\end{array}\right.,\quad
\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_i&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_i^2&=&0.\end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{5}\psi_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\psi_i\phi_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\frac{\psi_i\phi_i^2}{2}&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\psi_i\phi_i^3&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\psi_i\phi_i^4&=&0\end{array}\right.,\quad
\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i\varepsilon_i&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i\varepsilon_i^2&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i\varepsilon_i^3&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i\varepsilon_i^4&=&0\end{array}\right.,\quad
\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_j&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_j\kappa_j&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_j\kappa_j^2&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\chi_j\varphi_j&=&1\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_j\chi_j\kappa_j&=&0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_j\chi_j^2&=&0\end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{2}\zeta_j & = & 0\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\zeta_j\gamma_j & = & 1\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\zeta_j\delta_j & = & 1\end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{2}\rho_j & = & 2\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\xi_j\rho_j & = & 1\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\nu_j\rho_j & = & 1\end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{3}\varrho_j & = & 0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varrho_j\varpi_j & = & 0\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\varrho_j\frac{\varpi_j{}^2}{2} & = & 1\end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{2}\pi_i & = & 0\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\pi_i\sigma_i & = & 1\end{array}\right..$$

В частности, решением этих систем уравнений служит следующий набор коэффициентов: $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_1 = \frac{1}{2},\ \beta_2 = -\frac{1}{2},\ \mu_1 = \mu_2 = 1,\ \mu_3 = -2,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0,\ \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 2,\ \varepsilon_3 = -2,\ \varepsilon_4 = -1,\ \theta_1 = \frac{2}{3},\ \theta_2 = -\frac{1}{12},\ \theta_3 = \frac{1}{12},\ \theta_4 = -\frac{2}{3},\ \eta_1 = \frac{1}{48},\ \eta_2 = -\frac{1}{48},\ \eta_3 = \frac{27}{48},\ \eta_4 = -\frac{27}{48},\ \omega_1 = -3,\ \omega_2 = 3,\ \omega_3 = 1,\ \omega_4 = -1,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2},\ \varphi_3 = -1,\ \kappa_1 = 1,\ \kappa_2 = \kappa_3 = -1,\ \chi_1 = 1,\ \chi_2 = \chi_3 = -1,\ \rho_1 = \rho_2 = 1,\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \nu_1 = 0;\ \nu_2 = 1,\ \zeta_1 = 1,\ \zeta_2 = -1,\ \gamma_1 = \frac{1}{2},\ \gamma_2 = -\frac{1}{2},\ \delta_1 = \frac{1}{2},\ \delta_2 = -\frac{1}{2},\ \psi_1 = -\frac{65}{60},\ \psi_2 = \frac{66}{60},\ \psi_3 = -\frac{14}{60},\ \psi_4 = -\frac{1}{60},\ \psi_5 = \frac{14}{60},\ \phi_1 = 1,\ \phi_2 = 2,\ \phi_3 = 3,\ \phi_4 = -3,\ \phi_5 = -2,\ \pi_1 = \frac{1}{2},\ \pi_2 = -\frac{1}{2},\ \sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = 0,\ \varrho_1 = \varrho_2 = 1,\ \varrho_3 = -2,\ \varpi_1 = 0,\ \varpi_2 = 2,\ \varpi_3 = 1.$

5.5.2 Явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0

В качестве основы для построения явного сильного конечно-разностного метода порядка 1.0 возьмем соотношение (5.11) (метод Мильштейна). Аппроксимируем величину $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, где $p\Delta \overset{def}{=} \tau_p$ с помощью соотношения (5.120) следующим образом:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.130}$$

где $\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta}\sigma_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Подставляя (5.130) в (5.11) и отбрасывая величину большего порядка малости, чем $O(\Delta)$, получаем явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \tag{5.131}$$

где аппроксимации $\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}$ определяются соотношениями (5.14), (5.15), в которых число q выбирается из условия (5.36) при $r=2$.

5.5.3 Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5

Согласно (5.18) или аналогичному представлению, основанному на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена следует, что для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных методов порядка 1.5 необходимо аппроксимировать конечными разностями величины $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)}\mathbf{a}$, $L\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$ в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)}=\mathbf{y}_p+\sqrt{\Delta}r_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p),\ \mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}=\mathbf{y}_p+\Delta\delta_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)}=\mathbf{y}_p+\Delta\sigma_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p),\ \Delta_{p\gamma}^{(j)}=\tau_p+\gamma_j\Delta,$$

где $r_j=\beta_j,\sigma_j,\varpi_j$. С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее имеем:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\Delta), \tag{5.132}$$

$$G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.133}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.134}$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.135}$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.132)-(5.135) в (5.18) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^{3/2})$ получаем следующий явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)},\tag{5.136}$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p),$$

где в (5.136) аппроксимации $\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}$, $\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}$ определяются соотношениями (5.21)-(5.24), в которых число q выбирается из условия (5.36) при $r=3$.

Рассмотрим численный метод, аналогичный (5.136) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}+$$

$$
+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}\right]+
$$

$$
+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (5.137)
$$

где

$$
\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p),
$$

где в (5.137) аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$, определяются соотношениями (5.63)-(5.67), в которых число q выбирается из условия (5.39) при $r=3$.

5.5.4 Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0

Согласно соотношениям (5.40), (5.68) для построения явного сильного одношагового конечно-разностного метода порядка 2.0 необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$ следующие величины:

$$
G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \qquad (5.138)
$$

$$
\mathbf{a}\Delta+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a},\ G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}. \qquad (5.139)
$$

Введем следующие обозначения:

$$
\mathbf{y}_{pr}^{(ji)}=\mathbf{y}_p+\sqrt{\Delta}r_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p);\ \mathbf{z}_{pq}^{(j)}=\mathbf{y}_p+\Delta q_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p),
$$

$$
\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)}=\mathbf{y}_p+\Delta\sigma_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p),\ \Delta_{ph}^{(j)}=\tau_p+h_j\Delta,
$$

где $r_j=\beta_j,\omega_j,\lambda_j,\sigma_j,\varpi_j$; $q_j=\delta_j,\nu_j$ и $h_j=\gamma_j,\xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций полученных ранее имеем следующие аппроксимации для величин (5.138):

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\Delta^{3/2}),\tag{5.140}$$

$$G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)+O(\Delta)\tag{5.141}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right]+O(\Delta),\tag{5.142}$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\Delta),\tag{5.143}$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p).$$

Рассмотрим аппроксимации величин (5.139) с помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее:

$$\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=$$

$$=\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+O(\Delta^3),\tag{5.144}$$

$$G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}),\tag{5.145}$$

где

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})$$

$$G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.146}$$

где

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)$$

$$LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.147}$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.148}$$

где

$$\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.140)-(5.148) в (5.40) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^2)$ получим явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.0 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)},\qquad(5.149)$$

где аппроксимации $\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}$, $\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}$, $\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}$, $\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}$, $\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}$ определяются соотношениями (5.44)-(5.50), где число q выбирается из условия (5.36) при $r=4$.

Рассмотрим численный метод, аналогичный (5.149) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Biggl[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{J}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{5.150}$$

где аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}$ определяются соотношениями (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), где число q выбирается из условия (5.39) при $r=4$.

Представленные в параграфе 5.6.4 методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) с учетом слагаемых 2-го порядка малости по систематической составляющей. Поэтому эти методы могут рассматриваться как обобщения метода Рунге-Кутта 2-го порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

5.5.5 Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5

Для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных методов порядка 2.5 необходимо аппроксимировать, согласно (5.51) и (5.73), конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$ следующие величины:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \tag{5.151}$$

$$\mathbf{a}\Delta+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a},\ G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},$$

$$G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \tag{5.152}$$

$$G_0^{(i_1)}L\mathbf{a},\ L^2\Sigma_{i_1},\ LG_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}. \tag{5.153}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta s_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j\Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \varepsilon_j, \lambda_j, \phi_j;\ q_j = \chi_j, \nu_j, \delta_j;\ s_j = \sigma_j, \beta_j;\ h_j = \gamma_j, \chi_j, \xi_j.$

С помощью тейлоровских аппроксимаций (5.120)-(5.129), полученных в начале параграфа имеем:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^2), \tag{5.154}$$

$$G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \tag{5.155}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right] + O(\Delta^{3/2}), \tag{5.156}$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \tag{5.157}$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{4}\eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим тейлоровские аппроксимации величин (5.152) с помощью соотношений (5.120)-(5.129):

$$\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) =$$

$$= \frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+O(\Delta^3), \qquad (5.158)$$

$$G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\Delta), \qquad (5.159)$$

где

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)+O(\Delta), \qquad (5.160)$$

где

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p),$$

$$LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+O(\Delta), \qquad (5.161)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)},\tau_p)+O(\Delta), \qquad (5.162)$$

где

$$\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p),$$

Рассмотрим конечно-разностные аппроксимации величин (5.153) с помощью тейлоровских аппроксимаций (5.120)-(5.129):

$$L^2\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\Bigg]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.163}$$

$$LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.164}$$

$$G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.165}$$

где

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.166}$$

где

$$\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.167}$$

где

$$\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{o}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p),$$

$$\mathbf{o}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.168}$$

где

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.169}$$

где

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{5.170}$$

где

$$\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.154)-(5.170) в (5.51) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^{5/2})$ получаем явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.5 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\frac{1}{2}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{\Delta^2}{2}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}, \qquad (5.171)$$

где аппроксимации $\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\hat{I}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ определяются соотношениями (5.44)-(5.50), (5.57)-(5.61), в которых число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.36) при $r = 5$.

Рассмотрим теперь метод, аналогичный (5.171) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\lambda}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2}\rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\nu}, \Delta^{(j)}_{p\xi})\right] +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\varepsilon}, \tau_p)\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}^{(ji_1)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\phi}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\chi}, \Delta^{(j)}_{p\kappa})\right)\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}^{(ji_3)}_{p\varepsilon}, \tau_p)\hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\varepsilon}, \tau_p)\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\varepsilon}, \tau_p)\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\phi}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\chi}, \Delta^{(j)}_{p\kappa})\right)\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3 i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}^{(ji_4)}_{p\varepsilon}, \tau_p)\hat{J}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}^{(ji_1)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{J}^{(i_1)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Biggl[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(1011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{J}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p},\tag{5.172}$$

где аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_4i_3i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_4i_2i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_2)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_4i_3i_2)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}$, определяются соотношениями (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), (5.74)-(5.81). Соотношения (5.172), (5.63)-(5.67), (5.69)-(5.72), (5.74)-(5.81), в которых число q выбирается из условия (5.39) при $r=5$ определяют явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.5.

Полученнные в параграфах 5.6.4 и 5.6.5 методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.36) с учетом слагаемых 2-го порядка малости по систематической составляющей. Поэтому эти методы могут рассматриваться как обобщения метода Рунге-Кутта 2-го порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Следует отметить, что приведенные параграфах 5.6.3, 5.6.4 и 5.6.5 явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядков 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем два последних из них не имеют аналогов в литературе для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

Литература к главе 5

Maruyama G.(1955), Clements D.J., Anderson B.D.O.(1973), Wright D.J. (1974), Rumelin W.(1982), Platen E.(1984), Gard T.C.(1988), Chang C.C.(1987), Talay D.(1982), Talay D., Tubaro L.(1990), Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N.(1995), Hernandez D.B., Spigler R.(1993), Мильштейн Г.Н.(1974), Wagner W., Platen E.(1978), Platen E.(1981), Platen E., Wagner W.(1982), Platen E.(1982(I),1982(II)), Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E.(1991), Pettersson R. (1992), Kloeden P.E., Platen E.(1992), Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.(1994), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1993,1996(I),1996(II),1997, 1997(I)), Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. (1992), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1994,1995), Кузнецов Д.Ф.(1996,1997(I), 1997(II),1998(I)), Kuznetsov D.F.(1988(II)), Chung K.L., Williams R.J.(1983), Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.(1997(II),1997(III)), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1998(I)).

Глава 6

Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных линейных систем основывается на аналитических представлениях решений в общем случае и допускает применение специальных, особенно эффективных методов численно-статистического моделирования. В связи с этим, настоящая глава посвящена специальным методам численного моделирования линейных стационарных стохастических систем и их практической реализации. Параграфы 6.1 и 6.2 этой главы являются, с незначительными изменениями, содержанием работы [85].

6.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений (СЛСДУ) вида:

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \mathbf{g}(t)dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{6.1}$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t,\omega) \in \Re^n-$ случайный процесс, являющийся решением СЛСДУ (6.1) с начальным условием $\mathbf{x}(0,\omega)$; $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t,\omega) \in \Re^m-$ винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}(i = 1,...,m)$: $\mathsf{M}\{\mathbf{f}_t\} \equiv 0,\ \mathsf{M}\{\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^T\} = \Sigma_f^2 = diag\{\sigma_{f_i}^2\}_{i=1}^m$; $\mathbf{g}(t) \in \Re^k-$ детерминированное возмущение системы; $\Sigma(t) \in \Re^{n\times m}, A(t) \in \Re^{n\times n}$ и $\mathbf{g}(t) \in \Re^n-$ матричные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения СЛСДУ (6.1).

Систему (6.1) можно рассматривать как систему уравнений Ито или Стратоновича, или в другом смысле, поскольку нетрудно показать, что система (6.1) в силу своей структуры имеет одно и то же решение в каком бы смысле она не рассматривалась. В связи с этим, часто применяемая в технической литературе форма описания системы (6.1) в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\dot{\mathbf{f}}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega),$$

с белым шумом $\dot{\mathbf{f}}_t$ в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (6.1).

Линейные стохастические дифференциальные уравнения (ЛСДУ) рассматривались рядом авторов. Так, в работах Арнольда [74], Ричардсона [75], Маккенна и Моррисона [76], [77], а также Клоедена и Платена [38] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение, изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Аналитические решения некоторых простейших скалярных ЛСДУ можно найти у Арнольда [74], Гарда [63], Хорстхемке и Лофевера [78], Пугачева и Синицина [79], Клоедена и Платена [38]. В работах Микулевичуса [80], Струка и Варадана [81], Клоедена и Платена [38], Пугачева и Синицина [79] рассматривались СЛСДУ. Для них дано интегральное представление решения через фундаментальную матрицу решений, а также аналитически решены некоторые простейшие СЛСДУ. В книге Арато [14] рассматривались стационарные СЛСДУ. Для них дано представление решения через матричную экспоненту и рассмотрены их основные свойства. Кроме этого изучены дискретные стационарные линейные стохастические системы, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы численного моделирования СЛСДУ рассматривались также в работе Шкурко [82].

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ, основанных на точном интегральном представлении их решений. При этом рассматривается ряд вопросов, связанных непосредственно с особенностями численной реализации построенных численных методов.

6.1.1 Интегральное представление решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см. например [79], [38], [14]) по интегральному представлению решений СЛСДУ.

Общий случай. Будем говорить, что $n{\times}n$ - матричная функция $X(t,\tau)$ является фундаментальной матрицей системы (6.1), если:

1. $X(\tau,\tau)=I$ при всех $\tau\geq 0$.
2. $\frac{\partial}{\partial t}X(t,\tau)=A(t)X(t,\tau)$ при $t\geq\tau\geq 0$.
3. $X(\tau,t)=X^{-1}(t,\tau)$ при $\tau\leq t,\ \tau\geq 0$.

Известно, (см., например, [83]), что $X(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1. $X(t,\tau)=X(t,s)X(s,\tau)$ для любых $\tau,\ s,\ t\geq 0$.
2. $\frac{\partial}{\partial\tau}X(t,\tau)=-X(t,\tau)A(\tau)$ при любых $t,\tau\geq 0$.

Воспользовавшись описанными свойствами $X(t,\tau)$, нетрудно получить с вероятностью 1 интегральное соотношение для решений СЛСДУ (6.1) известное под названием формулы Коши:

$$\mathbf{x}_t=X(t,\tau)\mathbf{x}_\tau+\int_\tau^t X(t,s)\mathbf{g}(s)ds+\int_\tau^t X(t,s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s, \tag{6.2}$$

где $t\geq\tau\geq 0$.

Если задать временную сетку t_i :

$$0=t_0<t_1<t_2<...<t_k<...,$$

то из (6.2) с вероятностью 1 следует рекуррентная формула для значений вектора решений $\mathbf{x}_t$ в моменты времени t_k :

$$\mathbf{x}_{t_{k+1}} = X(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\mathbf{g}(s)ds + \tag{6.3}$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Для упрощения дальнейших выкладок примем следующие обозначения:

$$\mathbf{x}_k \overset{def}{=} \mathbf{x}_{t_k}; \quad \tilde{A}(k) \overset{def}{=} X(t_{k+1}, t_k);$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k) \overset{def}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\mathbf{g}(s)ds; \quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1} \overset{def}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s. \tag{6.4}$$

Тогда рекуррентное уравнение (6.3) с вероятностью 1 примет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(k)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \tag{6.5}$$

По своему построению (6.4) случайное возмущение $\tilde{\mathbf{f}}_k$ является гауссовским дискретным векторным случайным процессом таким, что:

$$\mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k\} \equiv 0; \quad \mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k \tilde{\mathbf{f}}_r^T\} = 0 \ \text{ при } k \neq r;$$

$$\mathsf{D}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\} \overset{def}{=} \mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T\right\} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)\Sigma_f^2\Sigma^T(s)X^T(t_{k+1}, s)ds.$$

Дисперсионная матричная функция $\mathsf{D}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\}$ является симметричной неотрицательно-определенной и представима в виде:

$$\mathsf{D}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\} = D_f(t_{k+1}),$$

где матричная функция $D_f(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{D}_f(t) = A(t)D_f(t) + D_f(t)A^T(t) + \Sigma(t)\Sigma_f^2\Sigma^T(t); \quad D_f(t_k) = 0 \tag{6.6}$$

Стационарный случай. Систему (6.1) будем называть стационарной, если: $A(t) \equiv A, \ \Sigma(t) \equiv \Sigma$:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + \mathbf{g}(t)dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \tag{6.7}$$

В этом случае фундаментальная матрица решений $X(t,\tau)$ представляет собой матричную экспоненту:

$$X(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k(t-\tau)^k}{k!}.$$

Формула Коши (6.2) запишется при этом с вероятностью 1 в виде:

$$\mathbf{x}_t=e^{A(t-\tau)}\mathbf{x}_\tau+\int_\tau^t e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds+\int_\tau^t e^{A(t-s))}\Sigma d\mathbf{f}_s.$$

Если в случае стационарной системы (6.7) взять регулярную сетку:

$$t_{i+1}=t_i+\Delta;\quad t_0=0;\ i=0,\ 1,\dots,$$

где $\Delta-$ шаг сетки, то обозначения (6.4) несколько упростятся:

$$\tilde{A}=e^{A\Delta};$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k)\overset{def}{=}\int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)}\mathbf{g}(k\Delta+s)ds;\quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\overset{def}{=}\int_0^\Delta e^{A(t-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s}.$$

и система (6.5) превращается в систему с постоянной матрицей $\tilde{A}$:

$$\mathbf{x}_{k+1}=\tilde{A}\mathbf{x}_k+\tilde{\mathbf{g}}(k)+\tilde{\mathbf{f}}_{k+1},\quad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0,\omega),\tag{6.8}$$

где векторный гауссовский дискретный случайный процесс $\tilde{\mathbf{f}}_k$ имеет дисперсионную матрицу:

$$\mathsf{D}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\}=D_f(\Delta)=\int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)}\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T e^{A^T(\Delta-s)}ds,\tag{6.9}$$

равную решению матричного дифференциального уравнения (6.6) при $t=\Delta$, которое с учетом сделаных допущений принимает вид:

$$\dot{D}_f\ (t)=AD_f(t)+D_f(t)A^T+\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T;\quad D_f(0)=0.\tag{6.10}$$

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости: $Re\lambda_i(A)<0$, то уравнение (6.10) имеет стационарное решение $D(\infty)$, удовлетворяющее следующей алгебраической системе линейных уравнений:

$$0=AD(\infty)+D(\infty)A^T+\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T.\tag{6.11}$$

Однако, в задачах моделирования шаг Δ обычно нельзя считать достаточно большим по сравнению с $\frac{1}{\lambda_{min}(A)}$ и, следовательно, матрица $D_f(\Delta)$ не может определяться из уравнения (6.11).

6.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем сводку известных в литературе (см., например, [79], [14]) уравнений, которым удовлетворяют математические ожидания и корреляционные функции решений СЛСДУ. Введем обозначения:

$$\mathbf{m}_x(t) \overset{def}{=} \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_t\right\}; \quad \overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t);$$

$$R_x(t,\tau) = \mathsf{M}\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_\tau^T\right\}; \quad D_x(t) = R_x(t,t).$$

В общем случае из (6.1) с учетом введенных обозначений получаем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\dot{\mathbf{m}}_x(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_0\right\},$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{m}_x(t) = X(t,0)\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t X(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau.$$

2. Для $D_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\dot{D}_x(t) = A(t)D_x(t) + D_x(t)A(t)^T + \Sigma(t)\Sigma_f^2\Sigma^T(t); \quad D_x(0) = \mathsf{M}\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T\right\}$$

3. Для $R_x(t,\tau)$ при $t,\tau \geq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t,\tau) = A(t)R_x(t,\tau)\ (t \geq \tau), \quad R_x(\tau,\tau) = D(\tau),$$

$$R(t,\tau) = R^T(\tau,t)\ (t \leq \tau).$$

В стационарном случае эти уравнения принимают вид:

$$\dot{\mathbf{m}}_x(t) = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{m}(t);\ \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_0\right\},$$

$$\mathbf{m}_x(t) = e^{At}\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau.$$

$$\dot{D}_x(t) = AD_x(t) + D_x(t)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T; \quad D_x(0) = \mathsf{M}\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T\right\}. \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t,\tau) = AR_x(t,\tau); \quad R_x(\tau,\tau) = D(\tau) \text{ при } t \geq \tau,$$
$$R(t,\tau) = R^T(\tau,t) \text{ при } t \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае:

$$R_x(t,\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(t)e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}.$$

Для гурвицевой матрицы A матричное уравнение (6.12) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$0 = AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(t) = D_x(\infty) = const$. Тогда

$$R_x(t,\tau) \equiv R_x(t-\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\infty) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(\infty)e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}. \tag{6.13}$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_x(t) \to D_x(\infty)$ при $t \to \infty$ и формула (6.13) оказывается справедливой асимптотически при $t,\tau \to \infty$, $\mid t-\tau \mid < \infty$:

$$\lim_{\substack{t,\tau\to\infty \\ |t-\tau|<\infty}} R_x(t,\tau) = R_x(t-\tau).$$

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (6.7) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

Пусть выходными переменными СЛСДУ являются линейные комбинации координат вектора состояния:

$$\mathbf{y}_t = H^T\mathbf{x}_t \in \Re^l,$$

где $H \in \Re^{n\times l}$. Тогда моментные характеристики процесса $\mathbf{y}_t$ определяются по формулам:

$$m_y(t) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{y}_t\right\} = H^T\mathbf{m}_x(t);$$

$$D_y(t) = \mathsf{M}\left\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t^{\,2}\right\} = H^TD_x(t)H; \quad R_y(t,\tau) = H^TR_x(t,\tau)H. \tag{6.14}$$

В установившемся режиме для гурвицевой матрицы A формулы (6.14) при $\tau, t \to \infty, \mid t-\tau \mid < \infty$ принимают вид:

$$D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H; \quad R_y(t,\tau) \to R_y(t-\tau) = H^T R_x(t-\tau) H.$$

Спектральная плотность центрированной составляющей стационарного выходного процесса $\mathbf{y}_t$ представима в виде:

$$S_{\overset{\circ}{y}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) e^{-i\omega t} dt = H^T (i\omega I - A)^{-1} \Sigma \Sigma_f^2 \Sigma^T (-i\omega I - A^T)^{-1} H =$$

$$= G(i\omega) G^T(-i\omega),$$

где $I-$ единичная матрица, а $i-$ мнимая единица; $G(p) = H^T(pI - A)^{-1}\Sigma\Sigma_f$- матричная передаточная функция системы от входа $\mathbf{f}_t^{\cdot}$ к $\mathbf{y}_t$.

6.1.3 Свойства дискретной системы стохастических уравнений в стационарном случае

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (6.8) в предположении, что:

$$\tilde{\mathbf{g}}(k) = \tilde{B}\mathbf{u}(k); \quad \tilde{\mathbf{f}}_k = \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_k; \quad \mathbf{y}_k = H^T \mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{u}(k) \in \Re^r-$ детерминированные возмущения; $\mathbf{v}_k \in \Re^m-$ белошумный векторный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей, равной единичной матрице:

$$\mathsf{M}\left\{\mathbf{v}_k\right\} \equiv 0; \quad \mathsf{M}\left\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\right\} = I; \quad \tilde{\Sigma} = \sqrt{D_{\tilde{f}}},$$

$\mathbf{y}_k \in \Re^l-$ выходная переменная.

С учетом принятых обозначений система (6.8) запишется в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}\mathbf{x}_k + \tilde{B}\mathbf{u}(k) + \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_{k+1}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{y}_k = H^T \mathbf{x}_k. \tag{6.15}$$

Рассмотрим моментные характеристики решения системы (6.15) (см., например, [79], [14]).

1. Для $\mathbf{m}_x(k)$ и $\mathbf{m}_y(k)$:

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}\mathbf{m}_x(k) + \tilde{B}\mathbf{u}(k), \;\; \mathbf{m}_x(0) = M\left\{\mathbf{x}_0\right\};$$

$$\mathbf{m}_y(k) = H^T \mathbf{m}_x(k)$$

или

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}^k \mathbf{m}_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{A}_{k-s-1} \tilde{B} \mathbf{u}(s),$$

$$\mathbf{m}_y(k+1) = H^T \tilde{A}^k \mathbf{m}_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1} H^T \tilde{A}_{k-s-1} \tilde{B} \mathbf{u}(s).$$

2. Для $D_x(k)$ и $D_y(k)$:

$$D_x(k+1) = \tilde{A} D_x(k) \tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2; \quad D_x(0) = \mathsf{M} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T \right\}, \tag{6.16}$$

$$D_y(k) = H^T D_x(k) H.$$

3. Для $R_x(k,r)$ и $R_y(k,r)$:

$$R_x(k,r) = \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(r) & \text{при } k \geq r \\ D_x(k) e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases}, \tag{6.17}$$

$$R_y(k,r) = \begin{cases} H^T e^{A(k-r)} D_x(r) H & \text{при } k \geq r \\ H^T D_x(k) e^{A^T(r-k)} H & \text{при } r \geq k \end{cases}.$$

Если матрица A гурвицева, то матрица $\tilde{A}$ имеет все собственные числа внутри единичного круга и уравнение (6.16) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_x(\infty) = \tilde{A} D_x(\infty) \tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2; \quad D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(k) = D_x(\infty) = const$. Тогда

$$R_x(k,r) \equiv R_x(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(\infty) & \text{при } k \geq r \\ D_x(\infty) e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases}. \tag{6.18}$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_x(k) \to D_x(\infty)$ при $k \to \infty$ и формула (6.18) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \to \infty$, $\mid k - r \mid < \infty$:

$$\lim_{\substack{k,r \to \infty \\ |k-r| < \infty}} R_x(k,r) = R_x(k-r).$$

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (6.15) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

6.2 Точный метод моделирования решений СЛСДУ

В этом разделе будет рассматриваться метод численного решения СЛСДУ, основанный на представлении решений СЛСДУ по формуле Коши. Поскольку формула Коши является точным интегральным представлением решения СЛСДУ, то численный метод, основанный на ее применении, будем называть точным численным методом.

6.2.1 Общий подход к моделированию и структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (6.1) в предположениях:

$$A(t) \equiv A; \ \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t); \ \Sigma(t) \equiv \Sigma. \tag{6.19}$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (6.19) интересующая нас система уравнений (6.1) может быть переписана в виде:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B\mathbf{u}(t)dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega); \tag{6.20}$$

$$\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t,\omega) \in \Re^n$– решение СЛСДУ; $\mathbf{u}(t) \in \Re^k$– детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \Re^l$– выходной процесс, численная реализация которого является финальной целью моделирования; $H \in \Re^{n\times l}$, $A \in \Re^{n\times n}$, $\Sigma \in \Re^{n\times m}$, $B \in \Re^{n\times k}$– числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$– винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Рассмотрим временную сетку с узлами t_k, $k = 0, \ 1, \ldots$ с постоянным шагом $\Delta > 0$ такую, что:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta = t_0 + (k+1)\Delta.$$

Решение системы (6.20) на временной сетке с постоянным шагом Δ запишется с вероятностью 1 в форме Коши в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau + k\Delta)d\tau + \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \qquad (6.21)$$

где $\mathbf{x}_k \overset{def}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$.

Исходя из содержательного смысла слагаемых, входящих в правую часть (6.21), будем называть первое слагаемое **переходной** или **динамической** составляющей, второе - **систематической** составляющей, а третье - **случайной** составляющей векторного случайного процесса $\mathbf{x}_k$. Рассмотрим отдельно проблемы моделирования каждой из этих составляющих.

6.2.2 Алгоритм моделирования динамической составляющей решения СЛСДУ

Вычисление динамической составляющей процесса $\mathbf{x}_k$ на каждом шаге моделирования требует знания матрицы $e^{A\Delta}$. По определению матричная экспонента задается в виде ряда:

$$e^{A\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s\Delta^s}{s!}. \qquad (6.22)$$

Однако непосредственное использование формулы (6.22) для вычисления $e^{A\Delta}$ не рационально, т.к. достижение приемлемой точности вычисления требует в этом случае выполнения большого количества операций матричных умножений и сложений. Для эффективного вычисления матричной экспоненты в литературе [84] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого"вычисления, основанный на формуле:

$$e^{A\Delta} = \left(e^{A\frac{\Delta}{2^M}}\right)^{2^M} \simeq \left(\sum_{s=0}^{N} \frac{A^s}{s!}\left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^s\right)^{2^M}, \qquad (6.23)$$

где $N \geq 1,\ M \geq 0-$некоторые целые числа.

Отметим, что, если $M = 0,\ n = \infty$, то формула (6.23) полностью совпадает с формулой (6.22). При $M = 2,\ 3, \ldots$ величина $\frac{\Delta}{2^M} << \Delta$ и потому для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ количество $N + 1$ членов ряда в (6.23) может быть взято значительно меньшим, чем при $M = 0$. Причем это различие будет тем значительней, чем больше берется значение M. Учитывая, что в диапазоне $M \in [10,\ 20]$ величина 2^M примерно находится в диапазоне $[10^3,\ 10^6]$, число N в (6.23), необходимое для достижения одной и той же точности вычисления $e^{A\Delta}$ резко уменьшается с увеличением M.

В работе [86], (см.также [87, гл.8]) показано, что для того, чтобы вычислить матричную экспоненту $e^{A\Delta}$ по формуле (6.23) с точностью не большей ε :

$$\|e^{A\Delta} - D\| \le \varepsilon, \tag{6.24}$$

достаточно взять такие целые $N \ge 1$ и $M \ge 0$, при которых выполняется условие:

$$\frac{e^{\|A\|\Delta(\|A\|\Delta)^{N+1}}}{2^{MN}(N+1)!} \le \varepsilon, \tag{6.25}$$

где

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid A^{(ij)} \mid,$$

где $A^{(ij)}$–компонента матрицы A.

В [86] поставлены и решены задачи об определении оптимальной пары (M, N), используемой в формуле (6.23). Оказалось, что соотношения, связывающие оптимальные M и N в задаче об определении минимума вычислительных затрат при фиксированной точности вычисления матричной экспоненты и в задаче минимизации погрешности вычисления матричной экспоненты при фиксированных вычислительных затратах эквивалентны. Приведем эти соотношения:

$$M = \begin{cases} [z] + 1 & \text{при} \ \ \|A\|\Delta > v \\ \\ 0 & \text{при} \ \ \|A\|\Delta \le v, \end{cases} \tag{6.26}$$

где

$$z = \frac{1}{ln2}\left(ln\frac{\|A\|\Delta}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)} \right) + N;$$

$$v = \frac{1}{2^N}(N+1)e^{\frac{1}{2(N+1)}}.$$

В [86] также даны практические рекомендации по выбору M и N. Так, например, перебор натуральных N следует начинать с 4-5 при $\|A\|\Delta \le 1,3$

и с 2-3 при $\|A\|\Delta \geq 1,3$. После фиксации конкретного N определяется M, удовлетворяющее (6.25). Таким образом, алгоритм вычисления матричной экспоненты может быть записан в следующей рекуррентной форме:

Алгоритм 6.1. Вычисление матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ с точностью ε.

1. Вычисляется $\|A\|\Delta$.

2. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираются значения M и N из соотношения (6.26) и условия (6.25).

3. $i := 0$.

4. $G := \sum\limits_{s=0}^{N} \frac{A^s}{s!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^s$.

5. $i := i + 1$.

6. $G := G^2$.

7. Если $i < M$, то переход к пункту 3.

8. Если $i = M$, то полагается: $e^{A\Delta} \approx G$.

9. Конец работы алгоритма 6.1.

6.2.3 Алгоритм моделирования систематической составляющей решения СЛСДУ

Проблема моделирования систематической составляющей сводится к вычислению интеграла

$$J_\Delta = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B\mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau. \tag{6.27}$$

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла J_Δ. Будем считать, что векторная функция $\mathbf{u}(k\Delta + \tau)$ при $k = 0,\ 1, \ldots$ и $\tau \in [0, \Delta]$ аппроксимируется с точностью ρ некоторой полиномиальной функцией вида:

$$\mathbf{u}(k\Delta + \tau) = \sum_{j=0}^{l} \mathbf{v}_j(k)\tau^j + \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau), \tag{6.28}$$

где $\mid \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau) \mid \leq \rho\tau^{l+1}$ при $k = 0,\ 1, \ldots$ и $\tau \in [0, \Delta]$, а векторные коэффициенты $\mathbf{v}_j(k)$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$ могут быть выбраны различными способами. Ниже будут рассмотрены некоторые из них.

Достаточным условием, обеспечивающим возможность аппроксимаций вида (6.28) является $l+1$ кратная непрерывная дифференцируемость функции $\mathbf{u}(t)$ с ограниченной $l+1$–й производной. Однако возможны и другие менее ограничительные условия.

Подставим (6.28) в (6.27). В результате получим следующее выражение:

$$J_\Delta = \sum_{j=0}^{l} J_{\Delta,j} B\mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1}, \tag{6.29}$$

где

$$\|R_{\Delta,l+1}\| = \left\| \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B\mathbf{r}_{l+1}(k,\tau)d\tau \right\| \le \rho \|J_{\Delta,l+1}\| \|B\|, \tag{6.30}$$

$$J_{\Delta,j} = \int_0^\Delta \tau^j e^{A(\Delta-\tau)} d\tau.$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов $J_{\Delta,j};\ j=0,\ 1,\dots,l$. Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta,0} = A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right); \tag{6.31}$$

$$J_{\Delta,j} = -A^{-1}\left(\Delta^j I - jJ_{\Delta,j-1}\right);\ j=1,\ 2,\dots,l. \tag{6.32}$$

Применяя многократно формулу (6.32) саму к себе придем к следующему выражению:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[AJ_{\Delta,0} - \sum_{s=1}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right];\ j \ge 1. \tag{6.33}$$

Подставляя (6.31) в (6.33) получим окончательное выражение для интеграла $J_{\Delta,j};\ j \ge 1$:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right];\ j \ge 0. \tag{6.34}$$

Из (6.30) и (6.34) следует, что

$$\|R_{\Delta,l+1}\| \le const \Delta^{l+2} \rho. \tag{6.35}$$

Подставляя (6.34) в (6.29) и отбрасывая остаточный член $R_{\Delta,l+1}$ придем к следующему приближенному представлению:

$$J_\Delta \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^{l} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B\mathbf{v}_j(k). \tag{6.36}$$

Рассмотрим некоторые случаи выбора коэффициентов $\mathbf{v}_j(k)$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$ в соответствии с формулой (6.28) и соответствующие этим случаям приближенные представления для J_Δ.

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\mathbf{v}_j(k) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^{(j)}\mathbf{u}_k}{\partial t^j}; \quad \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau) = \frac{\partial^{(l+1)}\mathbf{u}(\theta(\tau))}{\partial t^{l+1}}\frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!},$$

где $\theta(\tau) \in]k\Delta, k\Delta + \tau[$;

$$J_\Delta \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^{l} \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B\frac{\partial^{(j)}\mathbf{u}_k}{\partial t^j}.$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация (l=0):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \tag{6.37}$$

где $\mathbf{u}_k \stackrel{def}{=} \mathbf{u}(k\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right) B\mathbf{u}_k.$$

3. Линейная интерполяция (l=1):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta}\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+1} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}((k+1)\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right) B\mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right] B\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\right).$$

4. Квадратичная интерполяция (l=2):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta}\left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}\right);$$
$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2}\left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}((k+\frac{1}{2})\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)B\mathbf{u}_k +$$
$$+\frac{A^{-2}}{\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right]B\left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}\right) +$$
$$+\frac{4A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2}\right]B\left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right).$$

5. Кубическая интерполяция (l=3):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$
$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{2\Delta}\left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k\right),$$
$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{9}{2\Delta^2}\left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k\right),$$
$$\mathbf{v}_3(k) = \frac{9}{2\Delta^3}\left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}((k+\frac{1}{3})\Delta)$, $\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}((k+\frac{2}{3})\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)B\mathbf{u}_k +$$
$$+\frac{A^{-2}}{2\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right]B\left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k\right) +$$
$$+\frac{9A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2}\right]B\left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k\right) +$$
$$+\frac{27A^{-4}}{\Delta^3}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} - \frac{\Delta^3 A^3}{6}\right]\times$$
$$\times B\left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k\right).$$

Из (6.36) следует, что проблема моделирования систематической составляющей практически сводится к вычислению матриц $\tilde{B}_j$ вида:

$$\tilde{B}_j = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!}\right] B, \qquad (6.38)$$

где $j = 0,\ 1, \ldots, l$. Если матрица A неособенная, то матрицы $\tilde{B}_j$ могут быть вычислены непосредственно по формуле (6.38) с использованием алгоритма вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$. Однако, матрицы $\tilde{B}_j$ могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы A, поскольку $\tilde{B}_j$ представимы в виде:

$$\tilde{B}_j = j! A^{-(j+1)} \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{\Delta^s}{s!} A^s B; \quad j = 0,\ 1, \ldots, l. \tag{6.39}$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела левой части (6.39) при $det(A) \to 0$. Для вычисления матриц $\tilde{B}_j$ в случае вырожденной матрицы A рассмотрим обобщение подхода, предложенного в [86].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k); \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0, \tag{6.40}$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \Re^n$.

Нетрудно видеть, что решение системы (6.40) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^{l} J_{t,j} B \mathbf{v}_j(k).$$

Откуда следует, что:

$$\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = e^{A\Delta}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^{l} \tilde{B}_j \mathbf{v}_j(k).$$

Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_{n+1}(t) \\ \ldots \\ \mathbf{x}_{n+l+1}(t) \\ \mathbf{x}_{n+l+2}(t) \end{bmatrix},$$

которая является решением однородной системы уравнений вида:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = A_1 \hat{\mathbf{y}}(t); \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{bmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2!\mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l!\mathbf{v}_l(k) \end{bmatrix}, \tag{6.41}$$

где

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+p+1}(t) = \mathbf{x}_{n+p+2}(t); \quad p = 0,\ 1, \dots, l$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+l+2}(t) = 0;$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \dots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \dots & O_k & O_k \\ & & & \dots & & & \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & O_k \end{bmatrix};$$

O_k-нулевая матрица размера $k \times k$; I_k−единичная матрица размера $k \times k$; $O_{n,k}$−нулевая матрица размера $n \times k$.

Решением системы (6.41) является матричная функция:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t} \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{bmatrix} e^{At} & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \dots & \frac{1}{l!} J_{t,l}B \\ \\ & & \dots & & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2!\mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l!\mathbf{v}_l(k) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вычислив матричную экспоненту $e^{A_1 \Delta}$, можно получить сразу как матрицу $e^{A\Delta}$ так и матрицы $\tilde{B}_j$; $j = 0,\ 1, \dots, l$. Сформулируем полученный результат в форме специального алгоритма.

Алгоритм 6.2. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $\tilde{B}_j$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$.

1. Из матрицы A и B системы (6.20) формируется матрица A_1 системы (6.41).

2. К матрице $A_1\Delta$ применяется алгоритм 6.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью ε, оказывается матрица:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} e^{A\Delta} & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \ldots & \frac{1}{l!}J_{\Delta,l}B \\ & & \ldots & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера $n \times n$) матрицы $\tilde{A}_1$ является матрицей $e^{A\Delta}$.

4. $j := 1$.

5. $j + 1$-й левый верхний блок (размера $n \times k$) матрицы $\tilde{A}_1$ является матрицей: $\hat{B}_j = \frac{1}{j!}J_{\Delta,j}B$.

6. $\tilde{B}_j := j!\hat{B}_j$.

7.Если $j < l + 1$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 5.

8. Конец работы алгоритма 6.2.

6.2.4 Алгоритм моделирования случайной составляющей решения СЛСДУ.

Сначала рассмотрим основные идеи, которые будут положены в основу построения алгоритма моделирования случайной составляющей решения СЛСДУ, а затем приведем непосредственно сам алгоритм.

Найдем такое представление случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_k \in \Re^n$, которое было бы удобно для моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$:

$$D_f(\Delta) = \mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T\right\}.$$

Спектральное разложение дисперсионной матрицы $D_f(\Delta)$ имеет вид:

$$D_f(\Delta) = S_D\Lambda_D^2 S_D^{-1}, \tag{6.42}$$

где S_D– матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$, а Λ_D– диагональная матрица. Отметим, что $D_f(\Delta)$– симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ в виде:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} = S_D \Lambda_D \tilde{\mathbf{f}}^*_{k+1}, \tag{6.43}$$

где $\tilde{\mathbf{f}}^*_{k+1}$– случайный столбец, такой, что компоненты $\tilde{\mathbf{f}}^{*(i)}_{k+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и единичной дисперсией.

Таким образом, при представлении (6.43) справедливо соотношение (6.42). Для того, чтобы смоделировать случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ необходимо найти матрицу $D_f(\Delta)$, ее собственные числа и собственные векторы, а также смоделировать n независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, которые будут являться элементами $\tilde{\mathbf{f}}^*_{k+1}$. Выражение для матрицы $D_f(\Delta)$ и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (6.9) и (6.10). Отметим, что так как матрица $D_f(\Delta)$ симметричная, то полезную информацию несут $\frac{n^2+n}{2}$ элементов, расположенных над(под) главной диагональю $D_f(\Delta)$, включая главную диагональ. Для нахождения матрицы $D_f(\Delta)$ необходимо решить уравнение (6.10). С этой целью оно приводится к виду:

$$\frac{d\mathbf{d}_f(\Delta)}{d\Delta} = A^*\mathbf{d}_f(\Delta) + \mathbf{b}, \tag{6.44}$$

где столбцы $\mathbf{d}_f(\Delta)$, $\mathbf{b} \in \Re^{\frac{n^2+n}{2}}$ и имеют вид:

$$\mathbf{d}_f^T(\Delta) = \left[\mathbf{d}_{f_1}^T(\Delta), \ldots, \mathbf{d}_{f_n}^T(\Delta)\right], \quad \mathbf{b}^T = \left[\mathbf{b}_1^T \ \ldots \ \mathbf{b}_n^T\right], \tag{6.45}$$

где

$$\mathbf{d}_{f_j}^T(\Delta) = \left[D_f^{(1j)}(\Delta) \ \ldots \ D_f^{(n-j+1 \ n)}(\Delta)\right], \quad \mathbf{b}_j^T = \left[S^{(1j)} \ \ldots \ S^{(n-j+1 \ n)}\right],$$

где $j = 1, \ldots, n$, $S \stackrel{def}{=} \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T$.

Матрица A^* (размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$), входящая в (6.44), строится следующим образом. Сначала строятся матрицы Q_{ip}; $p = 0, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n-p$ размера $n \times n$ с элементами $Q_{ip}^{(kl)}$ вида:

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = i, \quad l = i + p \\ 1, & \text{при} \quad k = i + p, \ l = i, \\ & 0, \quad \text{иначе} \end{cases}.$$

Затем рассматриваются матрицы: R_{ip}; $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$ вида:

$$R_{ip} = Q_{ip}A^T + AQ_{ip}.$$

Далее нетрудно заметить, что первые n столбцов матрицы A^* строятся из матриц $R_{i0}(i = 1, \dots, n)$ подобно тому, как строится столбец $\mathbf{d}_f(\Delta)$ из матрицы $D_f(\Delta)$ по правилу (6.45). Затем из матриц $R_{i1}(i = 1, \dots, n-1)$ получаем следующие $n-1$ столбец матрицы A^* по тому же правилу и т.д. Теперь, после того, как определены $\mathbf{d}_f(\Delta)$, $\mathbf{b}$ и A^* можно найти решение уравнения (6.44):

$$\mathbf{d}_f(\Delta) = A^{*-1}\left(e^{A^*\Delta} - I\right)\mathbf{b}. \tag{6.46}$$

Следует отметить, что при переходе от (6.10) к (6.44) резко возрастает размерность задачи.

Далее после перехода от $\mathbf{d}_f(\Delta)$ к $D_f(\Delta)$ могут быть определены матрицы S_D и Λ_D. После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения СЛСДУ.

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

Алгоритм 6.3 Преобразование симметричной $n \times n$ матрицы A в столбец $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q\ q+j-1)}$.
5. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 4.
6. $i := i + n - j + 1$.
7. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 3.
8. Конец работы алгоритма 6.3.

Алгоритм 6.4 Преобразование столбца $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$ в симметричную матрицу A размера $n \times n$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $A^{(q\ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.

5. $A^{(q+j-1\ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.

6. Если $q < n-j+1$, то $q := q+1$ и перейти к пункту 4.

7. $i := i+n-j+1$.

8. Если $j < n$, то $j := j+1$ и перейти к пункту 3.

9. Конец работы алгоритма 6.4.

Алгоритм 6.5 Преобразование симметричной матрицы A размера $n \times n$ в матрицу A^* размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$.

1. $Q := O_n$

2. $r := 1$.

3. $j := 1$.

4. $q := 1$.

5. $i := q+j-1$.

6. $Q^{(qi)} := 1$.

7. $Q^{(iq)} := 1$.

8. $R := QA^T + AQ$.

9. $m := 0$.

10. $s := 1$.

11. $l := 1$.

12. $A^{*(l+m\ r)} := R^{(l\ l+s-1)}$.

13. Если $l < n-s+1$, то $l := l+1$ и перейти к пункту 12.

14. $m := m+n-s+1$.

15. Если $s < n$, то $s := s+1$ и перейти к пункту 11.

16. $Q := O_n$.

17. $r := r+1$.

18. Если $q < n-j+1$, то $q := q+1$ и перейти к пункту 5.

19. Если $j < n$, то $j := j+1$ и перейти к пункту 4.

20. Конец работы алгоритма 6.5.

Алгоритм 6.6 Алгоритм моделирования случайной составляющей.

1. Формирование столбца $\mathbf{b}$ из матрицы $\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T$ по алгоритму 6.3.

2. Формирование матрицы A^* из матрицы A по алгоритму 6.5.

3. Определение столбца $\mathbf{d}_f(\Delta) = A^{*-1}\left(e^{A^*\Delta} - I\right)\mathbf{b}$ по алгоритму 6.2.

4. Формирование матрицы $D_f(\Delta)$ из столбца $\mathbf{d}_f(\Delta)$ по алгоритму 6.4.

5. Осуществление спектрального разложения матрицы $D_f(\Delta)$ и определение матриц S_D, Λ_D^2.

6. Определение матрицы Λ_D.

7. $i := 1$.

8. Моделирование случайной величины $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{*(i)}$.

9. Если $i < n$, то $i := i + 1$ и перейти к пункту 7.

10. $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} := S_D \Lambda_D \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{*}$.

11. Конец работы алгоритма 6.6.

6.2.5 Алгоритм моделирования решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Приведем алгоритм моделирования решения СЛСДУ.

Алгоритм 6.7. Моделирование решения СЛСДУ.

1. Определение матриц $\tilde{A} = e^{A\Delta}$ и $\tilde{B}_j = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\tau^j d\tau B;\ j = 0,\ 1, \ldots, l$ по алгоритму 6.2.

2. $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$.

3. $k := 1$.

4. Моделирование случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ по алгоритму 6.6.

5. $\mathbf{x}_{k+1} := \tilde{A}\mathbf{x}_k + \sum\limits_{j=0}^{l} \tilde{B}_j \mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$.

6. $\mathbf{y}_k := H^T \mathbf{x}_k$.

7. Если $k < N$, то $k := k + 1$ и перейти к пункту 4.

8. Конец работы алгоритма 6.7.

6.3 Приближенный метод численного решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений

6.3.1 Введение

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод численного решения СЛСДУ позволяет точно моделировать случайную составляющую решения СЛСДУ, однако обладает недостатком, связанным с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы и последующего ее спектрального разложения. Вычисление дисперсионной матрицы является алгоритмически достаточно трудоемким и приводит, в силу проводимых преобразований, к резкому повышению размерности задачи. В этом параграфе будет рассмотрен приближенный метод численного решения СЛСДУ. Идея этого метода заключается в том, что белый шум $\dot{\mathbf{f}_t}$ заменяется на промежутке $[k\Delta, (k+1)\Delta]$; $k = 0,\ 1, \ldots$ кусочно постоянным случайным процессом $\mathbf{v}_t$ с достаточно малым шагом дискретизации δ. Рассмотрим этот подход подробнее.

Рассмотрим следующее приближенное представление СЛСДУ вида (6.1):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t = A\tilde{\mathbf{x}}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{v}_t; \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}(0,\omega); \tag{6.47}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = H^T\tilde{\mathbf{x}}_t,$$

где $\mathbf{v}_t$-кусочно постоянный на промежутках времени $[r\Delta, (r+1)\Delta)$; $r = 0,\ 1, \ldots\ ;\ \delta = \frac{\Delta}{N}$; $N \geq 1$ случайный процесс с независимыми значениями на этих промежутках, т.е.

1. $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{r\delta} = const$ при $t \in [r\delta, (r+1)\delta)$.
2. $\mathsf{M}\{\mathbf{v}_{r\delta}\} \equiv 0$.
3. $\mathsf{M}\left\{\mathbf{v}_{r\delta}\mathbf{v}_{r\delta}^T\right\} = \frac{1}{\delta}\Sigma_f^2$.

Нетрудно показать, что корреляционная функция и спектральная плотность случайного процесса $\mathbf{v}_t$ имеют вид:

$$R_v(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right)\Sigma_f^2 & \text{при } \mid \tau \mid \leq \delta \\ 0 & \text{при } \mid \tau \mid > \delta \end{cases}; \tag{6.48}$$

$$S_v(\omega) = \frac{2}{\omega^2\delta^2}\left(1 - cos\omega\delta\right)\Sigma_f^2 \underset{\delta\to 0}{\mathrm{sim}} \left(1 - \frac{\omega^2\delta^2}{12}\right)\Sigma_f^2. \tag{6.49}$$

Таким образом, при $\delta \to 0$ корреляционная функция процесса $\mathbf{v}_t$ стремится к δ-функции, а спектральная плотность $\mathbf{v}_t$ к постоянной величине. Это позволяет предполагать, что при уменьшении шага дискретизации δ процесс $\mathbf{v}_t$ приближается по своим свойствам к белому шуму.

Из (6.49) следует, что при $\omega_{max}\delta \le \frac{2\pi}{8}$, где ω_{max}-максимальная частота, наблюдаемая в системе, справедливо соотношение:

$$0.95\Sigma_f^2 \le S_v(\omega) \le \Sigma_f^2,$$

т.е. спектральная плотность процесса $\mathbf{v}_t$ с погрешностью не более 5% может считаться постоянной, а значит приближенно соответствовать спектральной плотности белого шума. Из вышесказанного следует, что оценка сверху для шага дискретизации δ имеет вид:

$$\delta \le \frac{2\pi}{8\omega_{max}} = \frac{T_{min}}{8}. \tag{6.50}$$

Таким образом, на минимальном периоде должно быть не менее восьми точек, что обычно выполняется.

6.3.2 Алгоритм моделирования решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений приближенным методом

С помощью формулы Коши из уравнения (6.47) нетрудно получить следующее приближенное представление процессов $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{y}_t$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{B}\mathbf{u}_k + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\tilde{\Sigma}\mathbf{w}_k; \quad \tilde{\mathbf{y}}_k = H^T\tilde{\mathbf{x}}_k, \tag{6.51}$$

где $\tilde{A} = e^{A\Delta}$, $\tilde{B} = A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)B$, $\tilde{\Sigma} = A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)\Sigma\Sigma_f$, $\mathbf{w}_k = \sqrt{\delta}\Sigma^{-1}\mathbf{v}_k$, $\tilde{\mathbf{x}}_k \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta}$, $\tilde{\mathbf{y}}_k \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{y}}_{k\Delta}$, $\tilde{\mathbf{u}}_k \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{u}}(k\Delta)$, где $\mathbf{w}_k$-столбец независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Воспользовавшись результатами параграфа 6.1 запишем соотношения для моментных характеристик случайных процессов $\tilde{\mathbf{x}}_k$, $\tilde{\mathbf{y}}_k$.

1. Для $\mathbf{m}_{\tilde{x}}(k)$ и $\mathbf{m}_{\tilde{y}}(k)$:

$$\mathbf{m}_{\tilde{x}}(k+1) = \tilde{A}\mathbf{m}_{\tilde{x}}(k) + \tilde{B}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{m}_{\tilde{x}}(0) = \mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{x}}_0\right\}, \tag{6.52}$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{y}}(k) = H^T\mathbf{m}_{\tilde{x}}(k)$$

или

$$\mathbf{m}_{\tilde{x}}(k+1) = \tilde{A}^k \mathbf{m}_{\tilde{x}}(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{A}_{k-s-1} \tilde{B} \mathbf{u}(s), \tag{6.53}$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{y}}(k+1) = H^T \tilde{A}^k \mathbf{m}_{\tilde{x}}(0) + \sum_{s=0}^{k-1} H^T \tilde{A}_{k-s-1} \tilde{B} \mathbf{u}(s). \tag{6.54}$$

2. Для $D_{\tilde{x}}(k)$ и $D_{\tilde{y}}(k)$:

$$D_{\tilde{x}}(k+1) = \tilde{A} D_{\tilde{x}}(k) \tilde{A}^T + \frac{1}{\delta} \tilde{\Sigma}^2; \quad D_{\tilde{x}}(0) = \mathsf{M} \left\{ \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_0 \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}{}_0^T \right\}, \tag{6.55}$$

$$D_{\tilde{y}}(k) = H^T D_{\tilde{x}}(k) H.$$

3. Для $R_{\tilde{x}}(k,r)$ и $R_{\tilde{y}}(k,r)$:

$$R_{\tilde{x}}(k,r) = \begin{cases} e^{A(k-r)\Delta} D_{\tilde{x}}(r) & \text{при } k \geq r \\ D_{\tilde{x}}(k) e^{A^T(r-k)\Delta} & \text{при } r \geq k \end{cases}, \tag{6.56}$$

$$R_{\tilde{y}}(k,r) = \begin{cases} H^T e^{A(k-r)\Delta} D_{\tilde{x}}(r) H & \text{при } k \geq r \\ H^T D_{\tilde{x}}(k) e^{A^T(r-k)\Delta} H & \text{при } r \geq k \end{cases}.$$

При этом в (6.52)-(6.54) предполагается, что внешнее возмущение $\mathbf{u}(t)$ аппроксимировано кусочно-постоянной функцией.

Если матрица A гурвицева, то матрица $\tilde{A}$ имеет все собственные числа внутри единичного круга и уравнение (6.55) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_{\tilde{x}}(\infty) = \tilde{A} D_{\tilde{x}}(\infty) \tilde{A}^T + \frac{1}{\delta} \tilde{\Sigma}^2; \quad D_{\tilde{y}}(\infty) = H^T D_{\tilde{x}}(\infty) H.$$

Если $D_{\tilde{x}}(0) = D_{\tilde{x}}(\infty)$, то $D_{\tilde{x}}(k) = D_{\tilde{x}}(\infty) = const$. Тогда

$$R_{\tilde{x}}(k,r) \equiv R_{\tilde{x}}(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)\Delta} D_{\tilde{x}}(\infty) & \text{при } k \geq r \\ D_{\tilde{x}}(\infty) e^{A^T(r-k)\Delta} & \text{при } r \geq k \end{cases}. \tag{6.57}$$

Если $D_{\mathbf{x}}(0) \neq D_{\mathbf{x}}(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_{\mathbf{x}}(k) \to D_{\mathbf{x}}(\infty)$ при $k \to \infty$ и формула (6.57) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \to \infty$, $\mid k-r \mid < \infty$:

$$\lim_{\substack{k,r\to\infty \\ |k-r|<\infty}} R_{\tilde{x}}(k,r) = R_{\tilde{x}}(k-r).$$

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (6.47) $\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{m}_{\tilde{x}}(k)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_{\tilde{x}}(0) = D_{\tilde{x}}(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_{\tilde{x}}(0) \neq D_{\tilde{x}}(\infty)$.

Воспользовавшись рекуррентным соотношением (6.51) сформулируем алгоритм численного моделирования решений СЛСДУ приближенным методом.

Алгоритм 6.8 численного моделирования решений СЛСДУ приближенным методом.

1. Вычисление матриц $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\Sigma}$ по алгоритму 6.2.
2. $\tilde{\mathbf{x}}_1 := \mathbf{x}(0)$.
3. k:=1.
4. Моделирование столбца $\mathbf{v}_k$.
5. $\mathbf{w}_k := \sqrt{\delta}\Sigma_f^{-1}\mathbf{v}_k$.
6. $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{B}\mathbf{u}_k + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\tilde{\Sigma}\mathbf{w}_k; \quad \tilde{\mathbf{y}}_k = H^T\tilde{\mathbf{x}}_k$.
7. Если $k < N$, то $k := k+1$ и перейти к пункту 4.
8. Если $k = N$ то перейти к пункту 9.
9. Конец работы алгоритма 6.8.

6.3.3 Теоретическое сравнение точного и приближенного методов численного моделирования решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Произведем сравнение моментных характеристик случайных процессов $\mathbf{x}_t$ и $\tilde{\mathbf{x}}_t$, являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений (6.1) и (6.47) соответственно.

Рассмотрим рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции процесса $\mathbf{x}_t$:

$$D_x(k+1) = \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^T + \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^T(\Delta-\tau)}d\tau =$$

$$= \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^T + \sum_{i=1}^{N}\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^T(\Delta-\tau)}d\tau =$$

$$= \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^T + \sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\int_{0}^{\delta} e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^T(\delta-\tau)}d\tau e^{A^T(\Delta-i\delta)}, \qquad (6.58)$$

где $\tilde{A} \stackrel{def}{=} e^{A\Delta}$, $\tilde{\Sigma} \stackrel{def}{=} \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T$.

Запишем рекуррентное соотношение для центрированной составляющей решения стохастического дифференциального уравнения (6.47) с помощью формулы Коши:

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1} = \tilde{A}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{v}_{\tau+k\Delta}d\tau =$$

$$= \tilde{A}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^{N}\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\tau\mathbf{v}_{(i-1)\delta+k\Delta} =$$

$$= \tilde{A}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k - A^{-1}\sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right)\Sigma\mathbf{v}_{(i-1+kN)\delta}. \qquad (6.59)$$

С помощью (6.59) нетрудно получить следующее рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции процесса $\tilde{\mathbf{x}}_t$:

$$D_{\tilde{x}}(k+1) = \tilde{A}D_{\tilde{x}}(k)\tilde{A}^T +$$

$$+\frac{1}{\delta}A^{-1}\sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right)\tilde{\Sigma}\left(e^{A^T\delta}-I\right)e^{A^T(\Delta-i\delta)}A^{-1^T}. \qquad (6.60)$$

Вычитая (6.60) из (6.58) и учитывая, что

$$A^{-1}C_i = C_iA^{-1}, \quad A^{-1^T}C_i^T = C_i^TA^{-1^T},$$

где $C_i \stackrel{def}{=} e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right)$, получим следующее рекуррентное соотношение для ошибки $E_D(k) \stackrel{def}{=} D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k)$ в дисперсионной матричной функции:

$$E_D(k+1) = \tilde{A}E_D(k)\tilde{A}^T + \sum_{i=1}^{N} Q_i(\delta), \qquad (6.61)$$

где

$$Q_i(\delta) = e^{A(\Delta - i\delta)} \left[\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\delta-\tau)} d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\delta} \left(e^{A\delta} - I \right) A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1^T} \left(e^{A^T\delta} - I \right) \right] e^{A^T(\Delta - i\delta)}. \qquad (6.62)$$

С помощью формулы Тейлора имеем:

$$\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\delta-\tau)} d\tau = \int_0^\delta e^{Au} \tilde{\Sigma} e^{A^T u} du =$$

$$= \int_0^\delta \left[I + Au + \frac{A^2u^2}{2} + O(u^3) \right] \tilde{\Sigma} \left[I + A^T u + \frac{A^{T^2} u^2}{2} + O(u^3) \right] du =$$

$$= \tilde{\Sigma}\delta + \left(A\tilde{\Sigma} \right)^s \delta^2 + \frac{1}{3} \left[A\tilde{\Sigma}A^T + \left(A^2 \tilde{\Sigma} \right)^s \right] \delta^3 + O(\delta^4), \qquad (6.63)$$

$$\frac{1}{\delta} \left(e^{A\delta} - I \right) A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1^T} \left(e^{A^T\delta} - I \right) =$$

$$= \frac{1}{\delta} \left[I + A\delta + \frac{A^2\delta^2}{2} + \frac{A^3\delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1^T} \times$$

$$\times \left[I + A^T\delta + \frac{A^{T^2}\delta^2}{2} + \frac{A^{T^3}\delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] =$$

$$= \tilde{\Sigma}\delta + \left(A\tilde{\Sigma} \right)^s \delta^2 + \left[\frac{1}{4} A\tilde{\Sigma}A^T + \frac{1}{3} \left(A^2 \tilde{\Sigma} \right)^s \right] \delta^3 + O(\delta^4), \qquad (6.64)$$

где $B^s \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \left(B + B^T \right)$ –симметричная часть матрицы B.

Подставляя (6.63) и (6.64) в (6.62), а затем (6.62) в (6.61) получаем:

$$E_D(k+1) = \tilde{A} E_D(k) \tilde{A}^T + \frac{\delta^3}{12} \sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta - i\delta)} A\tilde{\Sigma}A^T e^{A^T(\Delta - i\delta)} + O(\delta^4).$$

Оценим норму $\|E_D(k+1)\|$:

$$\|E_D(k+1)\| \leq \left\| \tilde{A} \right\|^2 \|E_D(k)\| +$$

$$+\frac{\delta^3}{12}\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|\sum_{i=1}^{N}e^{2\|A\|(N-i)\delta}+O(\delta^4)=$$

$$=\left\|\tilde{A}\right\|^2\|E_D(k)\|+\frac{\delta^3}{12}\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}+O(\delta^4),\qquad(6.65)$$

где под нормой матрицы понимается ее максимальное по модулю собственное число. Поскольку

$$\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}\le N(1+O(\delta)),$$

то из (6.65) имеем:

$$\|E_D(k+1)\|\le\left\|\tilde{A}\right\|^2\|E_D(k)\|+\frac{\Delta\delta^2}{12}\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|+O(\delta^4).\qquad(6.66)$$

Если матрица A гурвицева, то матрица $\tilde{A}$ имеет все собственные числа внутри единичного круга и следовательно $\left\|\tilde{A}\right\|<1$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (6.66) получим следующую оценку для установившегося значения нормы ошибки по дисперсионной матричной функции:

$$\|E_D(\infty)\|\le\frac{\Delta\delta^2}{12}\frac{\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|}{1-\left\|\tilde{A}\right\|^2}+O(\delta^4)\le C\Delta\delta^2,\qquad(6.67)$$

где $C<\infty$-постоянная.

Рассмотрим ошибку $E_R(k,r)\overset{def}{=}R_x(k,r)-R_{\tilde{x}}(k,r)$ в корреляционной матричной функции. Согласно (6.17) имеем:

$$E_R(k,r)=\begin{cases}e^{A(k-r)\Delta}E_D(r) & \text{при } k\ge r\\ E_D(k)e^{A^T(r-k)\Delta} & \text{при } r\ge k\end{cases}.\qquad(6.68)$$

Переходя к пределу в (6.68) при $k,r\to\infty$, при условии, что $\mid k-r\mid=p=const$, получим согласно (6.67) следующую оценку:

$$\|E_R(\infty,\infty)\|\le C\Delta\delta^2e^{\|A\|p\Delta}.\qquad(6.69)$$

Рассмотрим ошибку $E_M(k)\overset{def}{=}m_x(k)-m_{\tilde{x}}(k)$ в математическом ожидании. Согласно (6.53) и (6.1) будем иметь:

$$E_M(k+1)=\tilde{A}^{k+1}E_M(0).$$

Очевидно всегда можно считать, что $E_M(0) = 0$. Поэтому приближенный метод численного решения СЛСДУ не дает отклонения в математическом ожидании по сравнению с точным методом.

В заключение отметим, что точный метод моделирования решений СЛСДУ позволяет точно моделировать случайную составляющую решения СЛСДУ. Однако этот метод имеет недостаток, связанный с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы решения СЛСДУ с последующим спектральным разложением. Вычисление дисперсионной матрицы СЛСДУ является алгоритмически достаточно трудоемким и приводит, в силу проводимых преобразований, к резкому повышению размерности задачи. Рассмотренный в настоящем параграфе приближенный метод численного моделирования решений СЛСДУ позволяет избежать этого недостатка, хотя стохастическая составляющая решения СЛСДУ вычисляется этим методом приближенно.

Литература к главе 6

Arnold L.(1974), Richardson J.M. (1964), McKenna J., Morrison J.A.(1970, 1971), Horsthemke W., Lofever R. (1984), Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.(1987), Mikulevicius R.(1983), Strook D.W., Varadhan S.R.S.(1982), Shkurko I.O.(1987), Понтрягин Л.С.(1982), Бахвалов Н.С.(1973), Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.(1996), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.(1998(II)).

Глава 7

Примеры моделирования стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений

7.1 Выбор числа q при моделировании повторных стохастических интегралов

7.1.1 Выбор числа q в случае тригонометрического базиса

Рассмотрим вопрос о выборе числа q в суммах, аппроксимирующих некоторые повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае тригонометрического базиса. Для этого рассмотрим полученные в главе 4 соотношения:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{1_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{2_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{2_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^5}{2}\left\{\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\right\},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^3\left\{\frac{5}{36}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{79}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\right\},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\left\{\frac{2}{9}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\frac{k^2+l^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}\right\},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\left\{\frac{5}{9}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}\right\}.$$

Пусть число $q \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{k_{T,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)}-I_{l_1\ldots l_{k_{T,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)q}\right)^2\right\}\leq C(T-t)^{\gamma}, \qquad (7.1)$$

где $C,\ \gamma$-ограниченные положительные постоянные. Будем обозначать число q, удовлетворяющее условию (7.1) следующим образом:

$$q \stackrel{def}{=} q_{l_1\ldots l_k}(T-t,\gamma).$$

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1\ldots l_k}(T-t,\gamma)$ с помощью приведенных выше соотношений при $i_1\neq i_2$, $i_2\neq i_3$, $i_1\neq i_3$, $C=1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.1–7.3.

7.1.2 Выбор числа q в случае полиномиального базиса

Рассмотрим вопрос о выборе числа q в суммах, аппроксимирующих некоторые повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае полиномиального базиса.

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
$q_0(T-t,3)$	1	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T-t,3)$	2	5	10	19	39	78	156

Таблица 7.1

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
$q_0(T-t,4)$	1	1	1	1	1
$q_{00}(T-t,4)$	39	156	623	2490	9960
$q_1(T-t,4)$	1	2	3	6	13
$q_{000}(T-t,4)$	2	3	6	13	26

Таблица 7.2

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$q_0(T-t,5)$	1	1	1
$q_{00}(T-t,5)$	623	4980	39841
$q_1(T-t,5)$	13	52	208
$q_{000}(T-t,5)$	26	104	416
$q_{10}(T-t,5)$	1	1	2
$q_{01}(T-t,5)$	1	3	5

Таблица 7.3

В главе 4, в частности, были получены следующие соотношения в случае полиномиального базиса при $i_1 \neq i_2$:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right),$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{(T-t)^4}{16}\left\{\frac{7}{9}-\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{1}{4i^2-1}+\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}+\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right)\right\}.$$

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1 \ldots l_k}(T-t,\gamma)$ с помощью этих соотношений, т.е. для полиномиальной системы функций в предположении, что $i_1 \neq i_2$, $C = 1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.4–7.7.

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
$q_0(T-t,3)$	1	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T-t,3)$	1	2	4	8	16	32	64

Таблица 7.4

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
$q_0(T-t,4)$	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T-t,4)$	16	64	256	1024	4096	16384
$q_1(T-t,4)$	2	2	2	2	2	2

Таблица 7.5

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$q_0(T-t,5)$	1	1	1	1
$q_{00}(T-t,5)$	256	2048	16384	131072
$q_1(T-t,5)$	2	2	2	2
$q_{10}(T-t,5)$	0	1	2	4
$q_{01}(T-t,5)$	0	1	2	4

Таблица 7.6

$T-t$	2^{-4}	2^{-5}
$q_0(T-t,6)$	1	1
$q_{00}(T-t,6)$	4096	65536
$q_1(T-t,6)$	2	2
$q_{10}(T-t,6)$	9	39
$q_{01}(T-t,6)$	9	39
$q_2(T-t,6)$	3	3

Таблица 7.7

Сопоставляя результаты, приведенные в таблицах 7.1–7.7, можно прийти к выводу о том, что для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью полиномиальной системы функций требуется генерировать существенно меньшее число независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, чем при аппроксимации этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций. Кроме этого, непосредственно сами выражения для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича (см. главу 4), полученные с помощью полиномиальной системы функций значительно проще, чем выражения для аппроксимаций этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций.

7.2 Моделирование динамики стоимости ценных бумаг

Рассмотрим математическую модель динамики цены акции S_t в виде стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dS_t = \mu S_t dt + \lambda S_t df_t, \tag{7.2}$$

где $\mu,\ \lambda,\ S_t \in \Re^1$; $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс.

Точное решение уравнения (7.2) имеет вид:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\right)t + \lambda f_t}, \tag{7.3}$$

где $t \in [0, T]$.

Введем в рассмотрение дискретную сетку $\{t_j\}_{j=0}^{N}$, такую, что $t_j = j\Delta$, $t_N = N\Delta = T$. Очевидно, что решение уравнения (7.2) может быть записано на сетке $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ следующим образом:

$$S_{k+1} = S_k e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\right)\Delta + \lambda\sqrt{\Delta}\zeta_{0_{k+1,k}}}, \tag{7.4}$$

где $S_{t_k} \stackrel{def}{=} S_k$; $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(f_{t_{k+1}} - f_{t_k}\right) \stackrel{def}{=} \zeta_{0_{k+1,k}}$-гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Смоделируем решение уравнения (7.2) с помощью представления (7.4) при $\mu = 0.15,\ \lambda = 0.2,\ \Delta = 2^{-10},\ T = 1.2,\ S_0 = 10$. При этом на каждом шаге интегрирования для моделирования $\zeta_{0_{k+1,k}}$ необходимо осуществлять однократное обращение к генератору гауссовких случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1. Результат моделирования представлен на рис.7.1. На нем отчетливо отражена тенденция возрастания стоимости ценной бумаги, что соответствует выбору коэффициентов μ и λ. Выберем теперь коэффициенты следующим образом:$\mu = -0.3$, $\lambda = 0.2$.

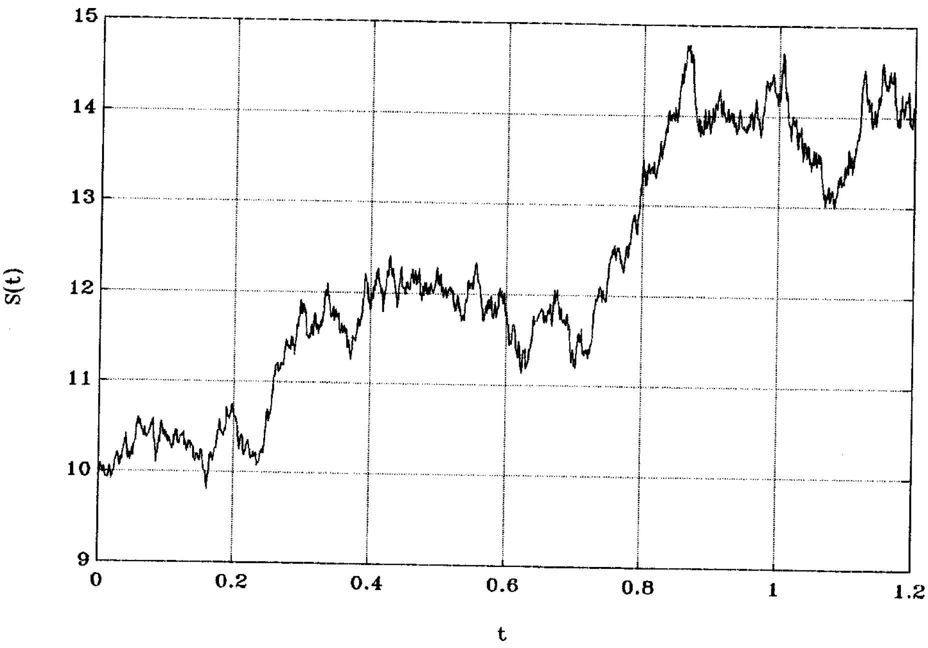

Рис.7.1

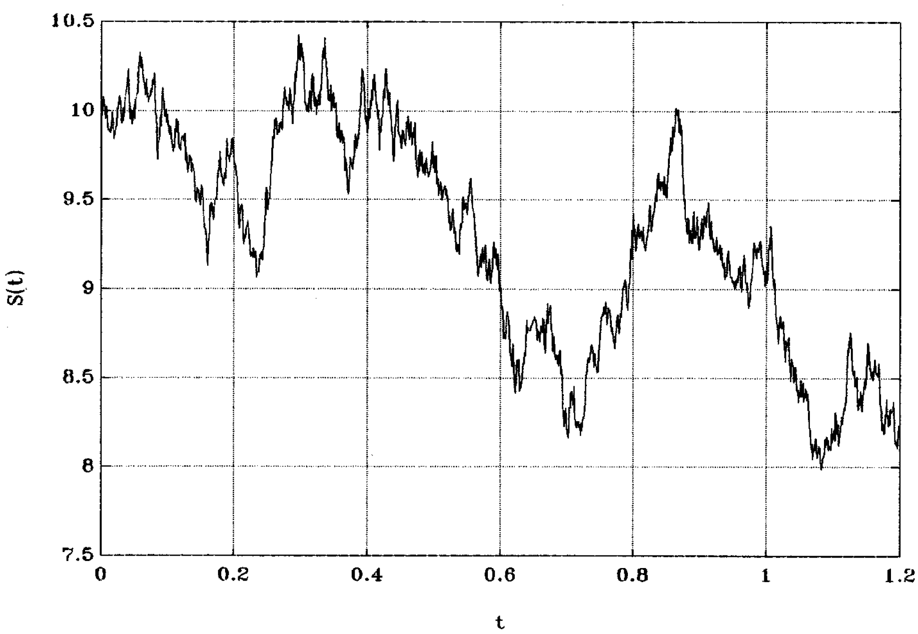

Рис.7.2

Результат моделирования решения уравнения (7.2) на той же реализации последовательности случайных величин $\zeta_{0_{k+1,k}}$ представлен на рис.7.2. На нем видна общая тенденция убывания стоимости ценной бумаги.

7.3 Исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца

Всвязи с проблемой турбулентности жидкостей, газов и плазмы значительный интерес вызвала трехмерная дискретная модель конвективной турбулентности Лоренца, описываемая следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t)&=-a\mathbf{x}^{(1)}(t)+a\mathbf{x}^{(2)}(t)\\ \mathbf{x}^{(2)}(t)&=r\mathbf{x}^{(1)}(t)-\mathbf{x}^{(2)}(t)-\mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(3)}(t).\\ \mathbf{x}^{(3)}(t)&=-b\mathbf{x}^{(3)}(t)+\mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(2)}(t)\end{aligned} \tag{7.5}$$

Известно, что в системе (7.5) при определенном сочетании параметров $a,\ r,\ b$ могут возникнуть хаотические движения вокруг двух состояний равновесия. Эти движения можно трактовать как переброс от одного состояния равновесия к другому состоянию равновесия в результате нарастания колебаний возле каждого из них. Эти колебания могут происходить не только от одного неустойчивого состояния равновесия к другому, но и от одного неустойчивого периодического движения к другому. Одно из таких хаотических движений возникает в системе (7.5) при возрастании параметра r и переходе его через значение 24.06 при $b = 8/3,\ a = 10.00$. Это движение носит название странного аттрактора Лоренца.

Произдедем численное моделирование системы (7.5) с помощью метода тьетьего порядка при следующих данных: $t \in [0, 100.00],\ \Delta = 5\cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$. Эволюция фазовых траекторий системы (7.5) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ при значениях $r = 19.8,\ 20.00,\ 20.10,\ 20.30$ показана на рис.7.3-7.6 соответственно. При этом на графиках выводилась каждая пятая точка, которая соединялась с предыдущей и последующей точками ломаной.

Интересным представляется вопрос о поведении системы (7.5) при действии на нее стохастического возмущения. Рассмотрим такую возмущенную систему, понимаемую как систему стохастических дифференциальных

уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\mathbf{x}_t^{(1)}+a\mathbf{x}_t^{(2)}\\ r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\\ -b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\\ \mathbf{f}_t^{(3)}\end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$–компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \Re^3$ уравнения (7.6); $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ –скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a, r, b, c-постоянные.

Представляется естественным, что стохастическое возмущение будет усиливать случайным образом колебания вокруг двух положений равновесия, в результате чего движение, напоминающее странный аттрактор Лоренца будет рождаться вообще говоря при $r < 24.06$. Среднее пороговое значение параметра r при котором будет рождаться стохастический аналог аттрактора Лоренца очевидно будет зависеть как от интенсивности стохастического возмущения, т.е. от величины параметра c, так и от промежутка времени наблюдения за системой.

В качестве численного метода для моделирования системы (7.6) возьмем соотношения (3.67)-(3.69) на равномерной дискретной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ такой, что $t_j = j\Delta$, $t_N = N\Delta = T$, а также формулы (4.107)-(4.109) для моделирования стохастических интегралов. В результате получим следующую явную численную схему:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(1)} + a\Delta\left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}\right) + \\
+a\frac{\Delta^2}{2}\left[-a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}\right) + r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right] - \\
-ac\mathbf{x}_k^{(1)}\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}\right] + \\
+a\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(a + r - \mathbf{x}_k^{(3)}\right) - (a+1)\times\right. \\
\left.\times\left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right) - \mathbf{x}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\right], \qquad (7.7)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{x}_k^{(2)} + \Delta\left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right) - \\
-c\mathbf{x}_k^{(1)}\Delta^{3/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}\right] + \\
+\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(r - \mathbf{x}_k^{(3)}\right) - r\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} + \right. \\
\left.+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\right] + \left(a\left(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)}\right) + \right.
\end{gathered}
$$

$$+(1+b)\mathbf{x}_k^{(1)}\Big)\,c\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta^{(3)}_{0_{k+1,k}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta^{(3)}_{1_{k+1,k}}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta^{(3)}_{2_{k+1,k}}\right]+$$

$$+ac\Delta^{3/2}\left(-\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left[-\frac{1}{6}\zeta^{(3)}_{0_{k+1,k}}+\frac{1}{3\sqrt{20}}\zeta^{(3)}_{2_{k+1,k}}\right]+$$

$$+\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(-(a+1)\left(r-\mathbf{x}_k^{(3)}\right)+b\mathbf{x}_k^{(3)}-2\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)+\right.$$

$$+\left(r\mathbf{x}_k^{(1)}-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right)\left(\left(r-\mathbf{x}_k^{(3)}\right)a+1-\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)^2\right)+$$

$$\left.+\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)}+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(a\left(\mathbf{x}_k^{(1)}-\mathbf{x}_k^{(2)}\right)+\mathbf{x}_k^{(1)}(1+b)\right)\right], \tag{7.8}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(3)}=\mathbf{x}_k^{(3)}+cI^{(3)}_{0_{s,t}}+\Delta\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)}+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)-$$

$$-bc\Delta^{3/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta^{(3)}_{1_{k+1,k}}-\frac{1}{2}\zeta^{(3)}_{0_{k+1,k}}\right]+$$

$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\mathbf{x}_k^{(2)}+\left(r\mathbf{x}_k^{(1)}-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right)\mathbf{x}_k^{(1)}-\right.$$

$$\left.-b\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)}+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\right]+$$

$$+c\left(b^2-\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)^2\right)\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta^{(3)}_{0_{k+1,k}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta^{(3)}_{1_{k+1,k}}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta^{(3)}_{2_{k+1,k}}\right]+$$

$$+\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(-a\mathbf{x}_k^{(2)}+r\mathbf{x}_k^{(1)}-\mathbf{x}_k^{(2)}-\right.\right.$$

$$\left.-\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}+\mathbf{x}_k^{(1)}\left(r-\mathbf{x}_k^{(3)}\right)-b\mathbf{x}_k^{(2)}\right)+$$

$$+\left(r\mathbf{x}_k^{(1)}-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}\right)\left(-a\mathbf{x}_k^{(1)}+2a\mathbf{x}_k^{(2)}-(1+b)\mathbf{x}_k^{(1)}\right)+$$

$$\left.+\left(-b\mathbf{x}_k^{(3)}+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\left(b^2-\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)^2\right)\right]. \tag{7.9}$$

где $\zeta^{(3)}_{0_{k+1,k}},\ \zeta^{(3)}_{1_{k+1,k}},\ \zeta^{(3)}_{1_{k+1,k}}$-стандартные независимые гауссовские величины с нулевым средним и единичной дисперсией, являющиеся независимыми со случайными величинами $\zeta^{(3)}_{0_{p+1,p}},\ \zeta^{(3)}_{1_{p+1,p}},\ \zeta^{(3)}_{1_{p+1,p}}$ при $k\neq p$.

Произведем моделирование решения системы (7.6) с помощью численного метода (7.7)-(7.9) при следующих данных: $t\in[0,100.00]$, $\Delta=5\cdot10^{-3}$,

$b = 8/3$, $a = 10.00$, $c = 2.00$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.25$. Эволюция фазовых траекторий системы (7.6) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)})$ полученная на одной реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.7)-(7.9), при $r = 20.00,\ 21.00,\ 23.00$ и 24.30 изображена на рис.7.7-7.10.

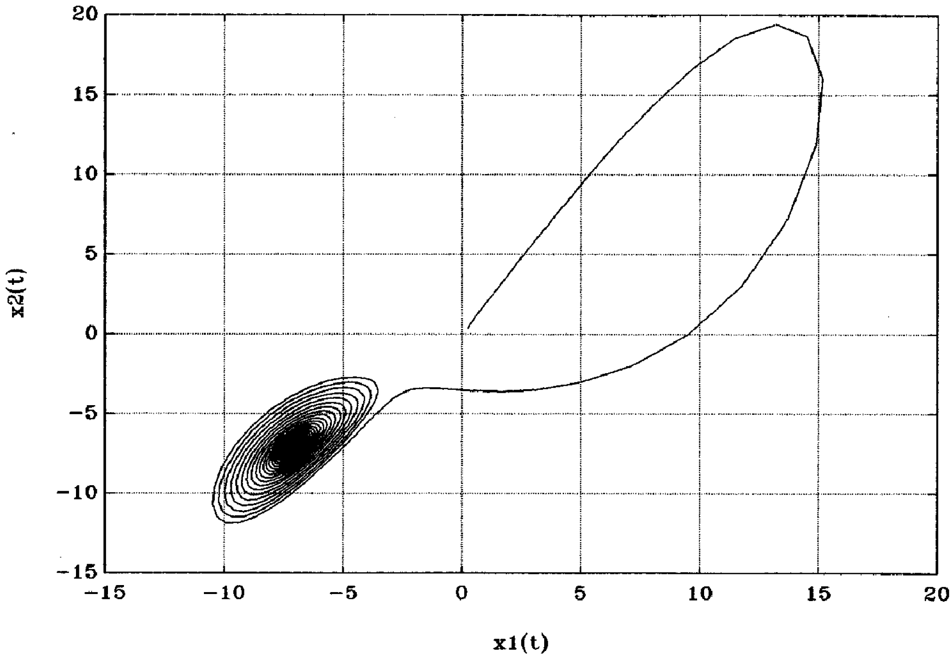

Рис.7.3

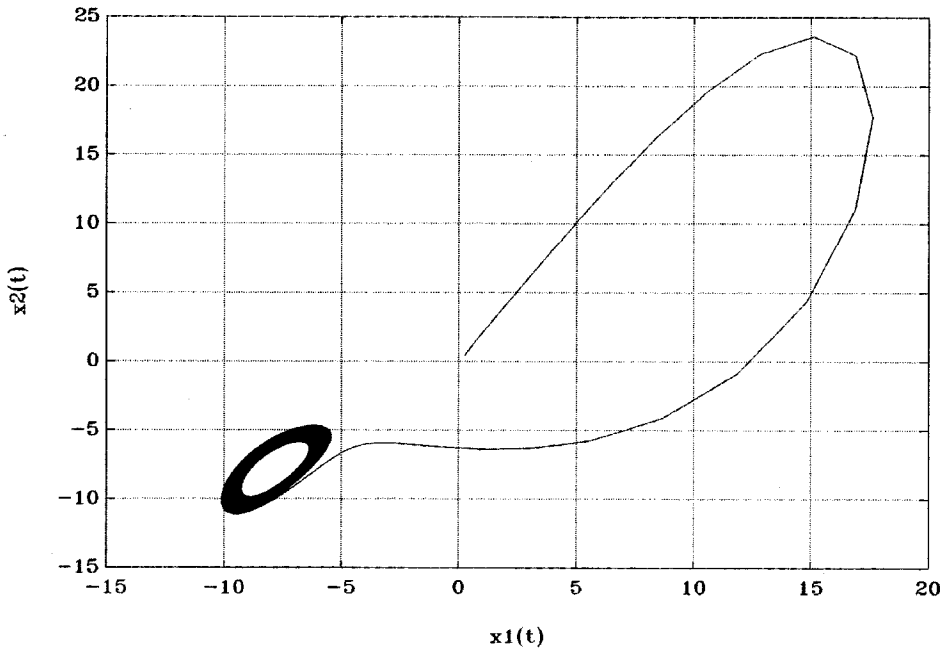

Рис.7.4

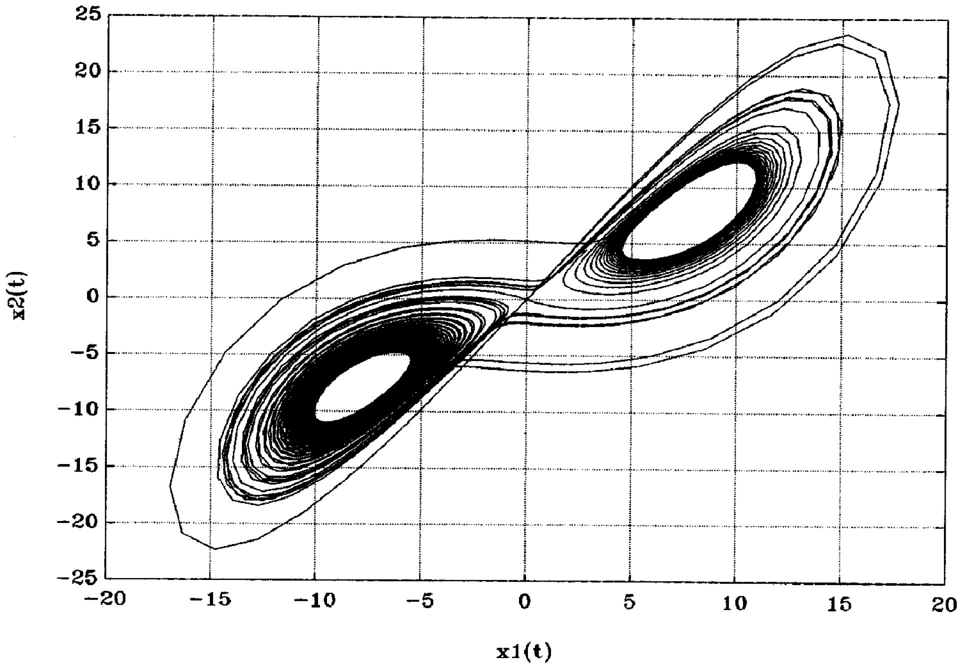
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
x2(t)
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
x1(t)

Рис.7.5

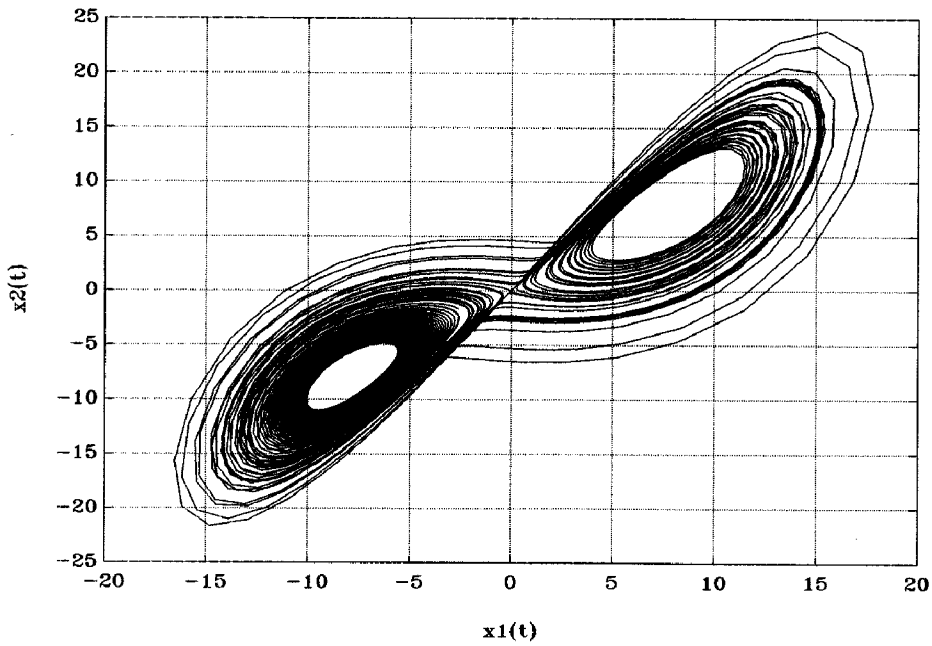
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
x2(t)
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
x1(t)

Рис.7.6

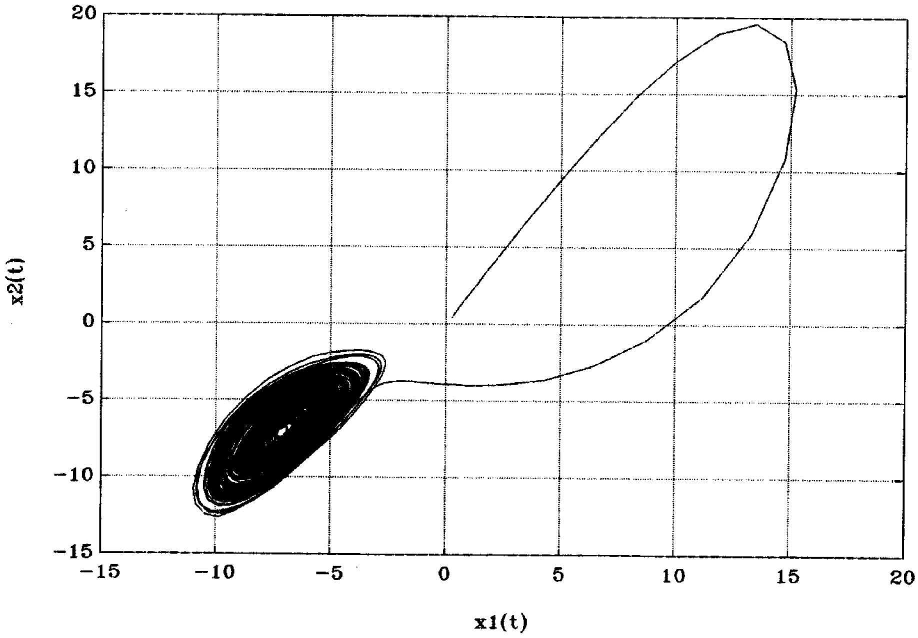
x2(t)
x1(t)
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−15
−10
−5
0
5
10
15
20

Рис.7.7

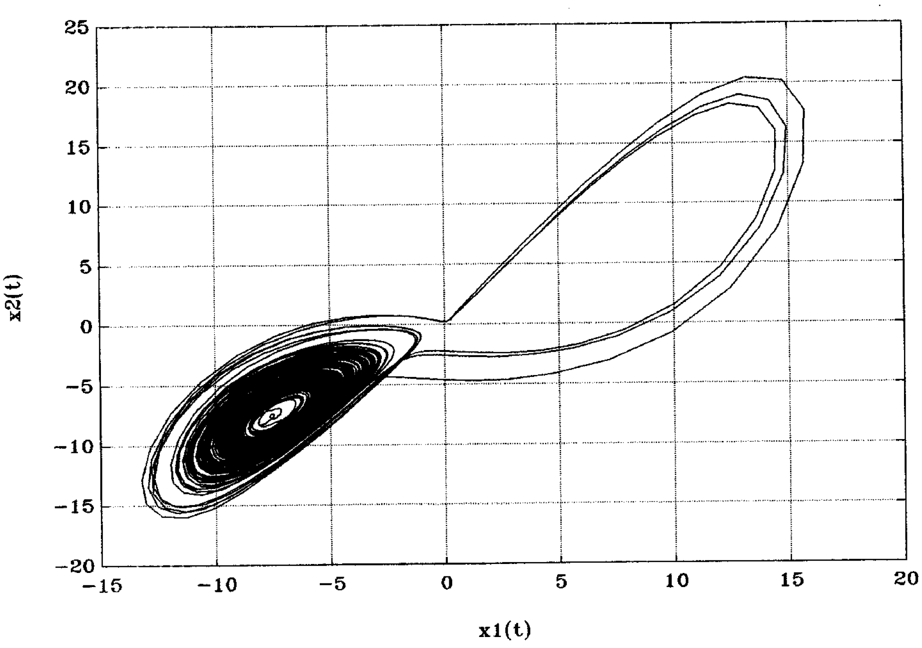
x2(t)
x1(t)
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20

Рис.7.8

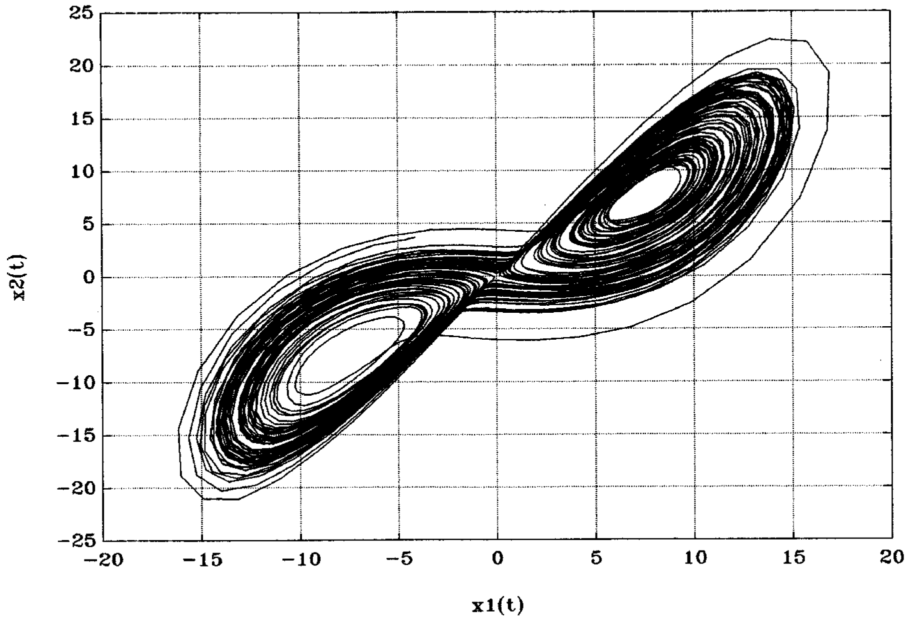

Рис.7.9

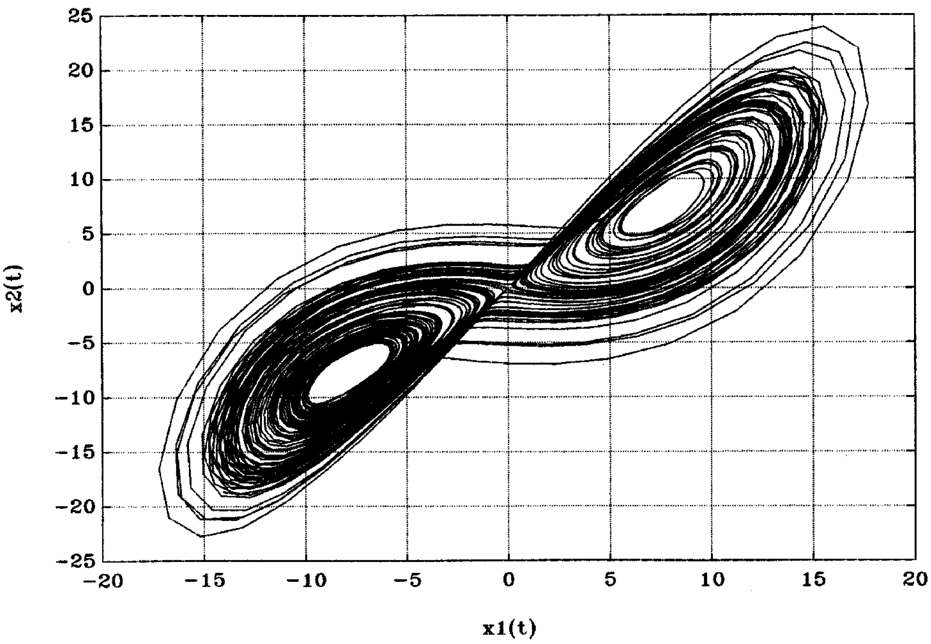

Рис.7.10

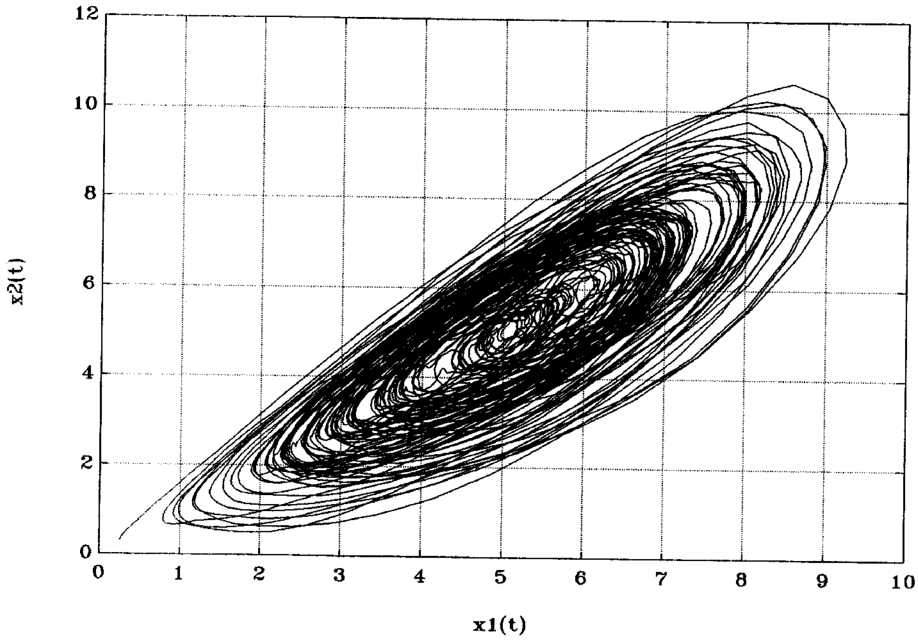

Рис.7.11

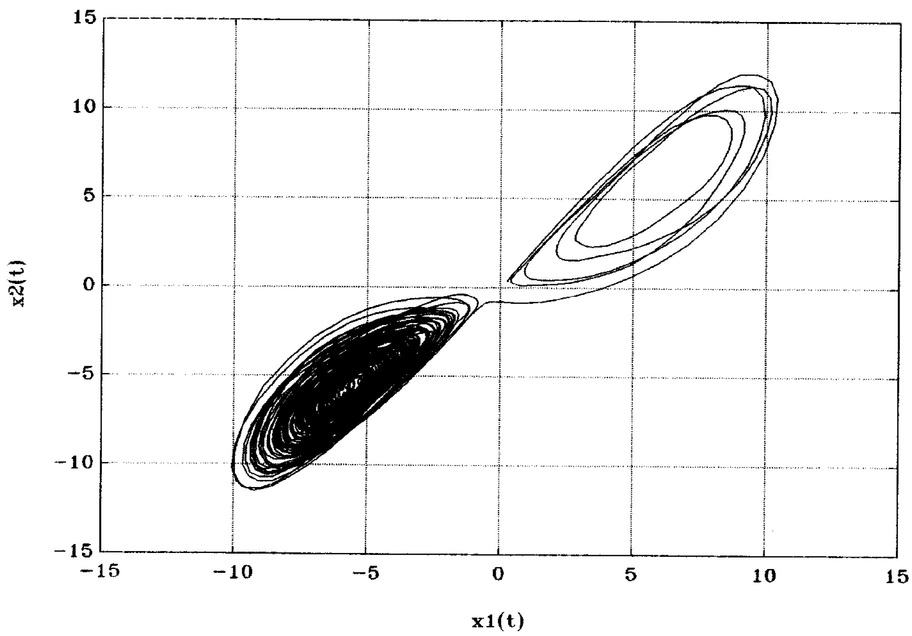

Рис.7.12

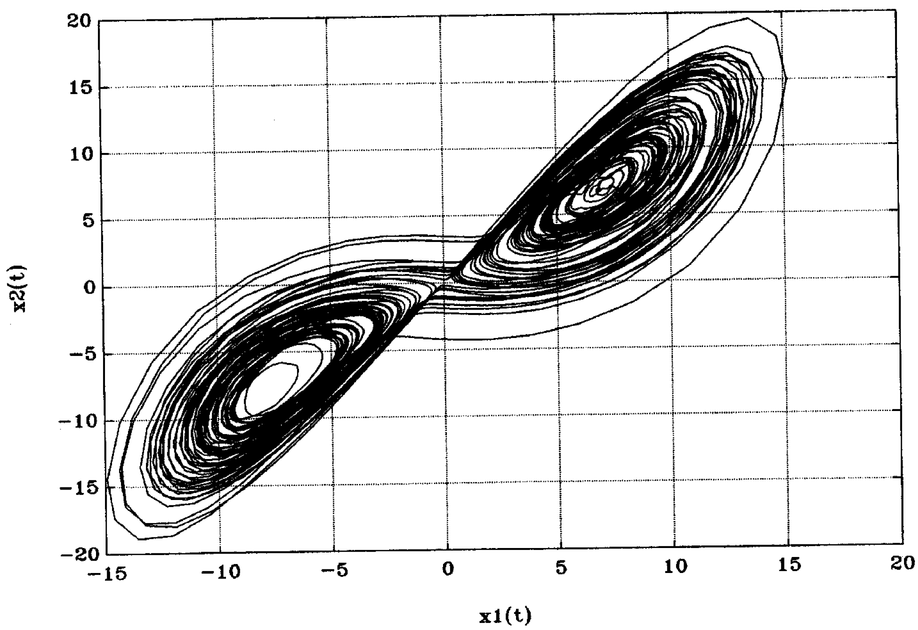

Рис.7.13

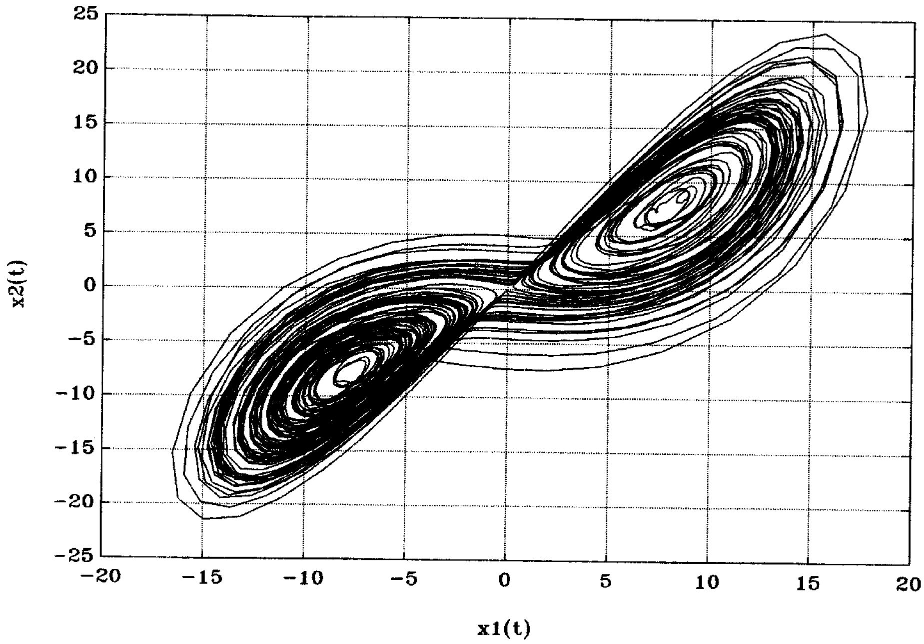

Рис.7.14

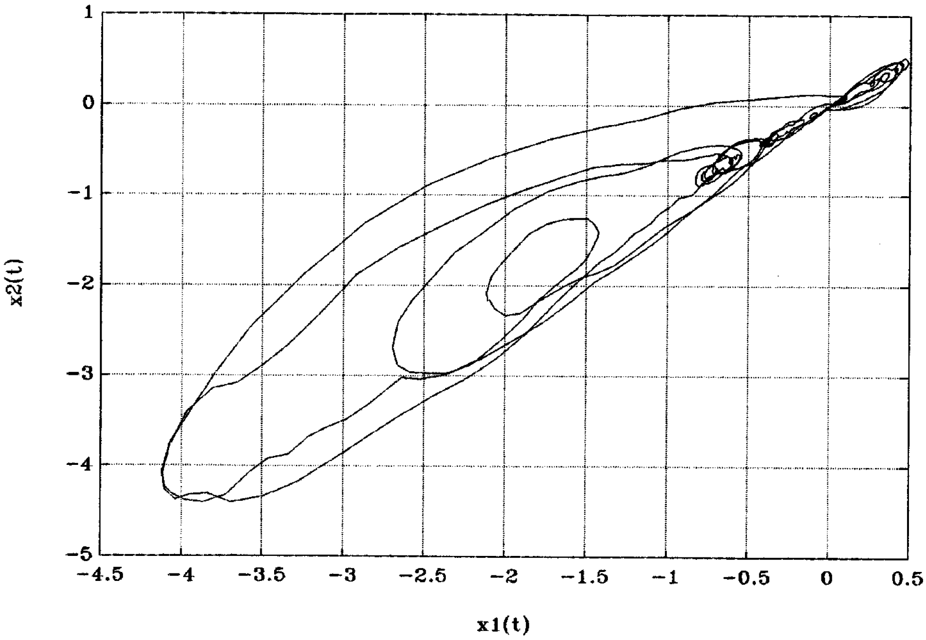

Рис.7.15

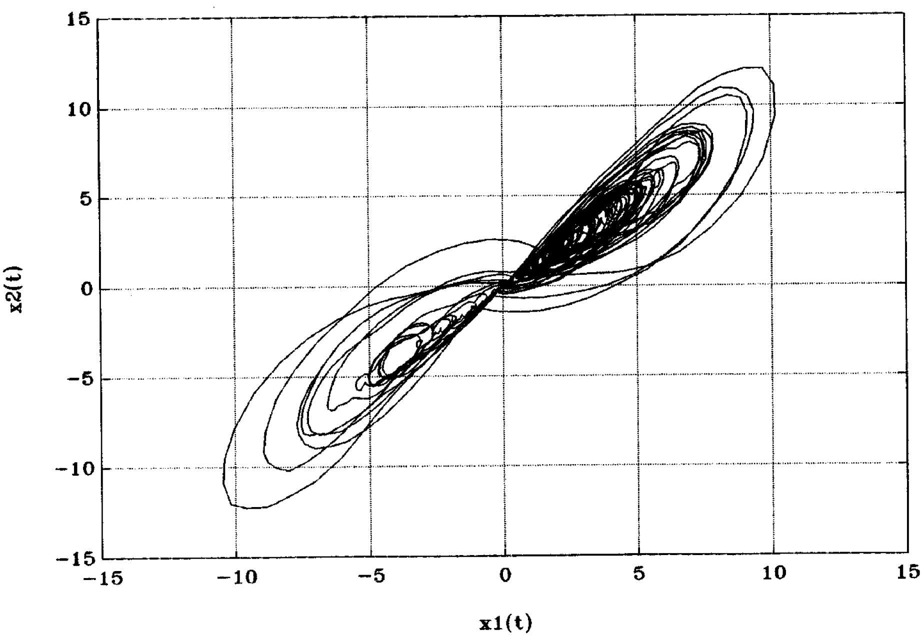

Рис.7.16

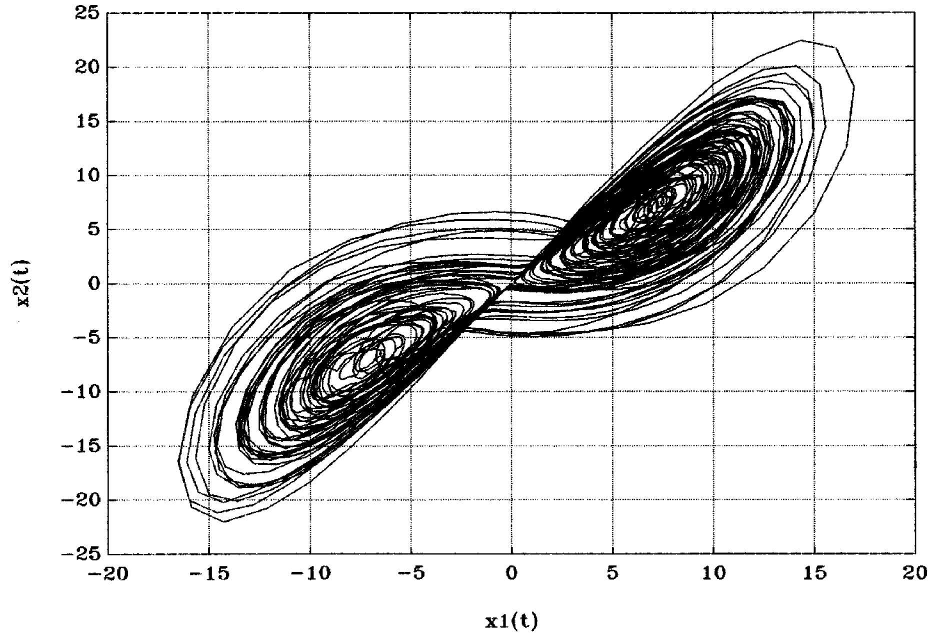

Рис.7.17

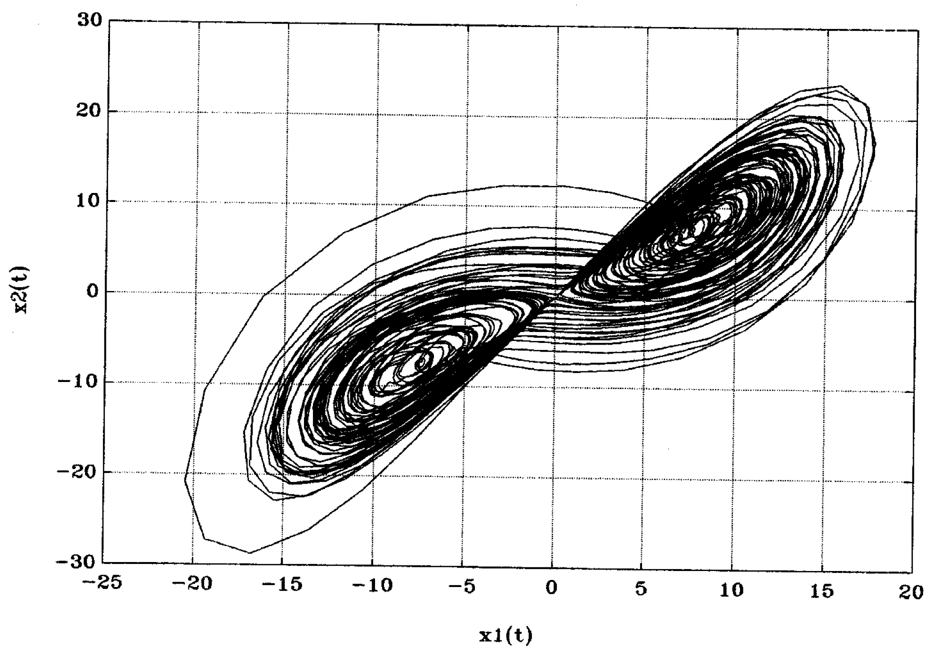

Рис.7.18

На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца возникают при значениях $r < 24.06$. Кроме этого фазовые траектории становятся менее регулярными из-за воздействия случайного возмущения на систему (7.6).

Повторим моделирование решения системы (7.6) с помощью численного метода (7.7)-(7.9) при тех же исходных данных, за исключением параметра c, который увеличим до значения 4.00. Эволюция фазовых траекторий системы (7.6) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)})$ полученная на одной (и той же самой, что и в случае $c = 2.00$) реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.7)-(7.9), при $r = 11.00,\ 13.00,\ 20.00$ и 24.30 изображена на рис.7.11-7.14. На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца возникают при значениях r еще более меньших, чем в случае $c = 2.00$ и становятся еще менее регулярными.

Увеличим теперь значение параметра c до 8.00 и повторим моделирование решения системы (7.6) с помощью численного метода (7.7)-(7.9) при тех же значениях остальных параметров, что и предыдущих случаях и на той же реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.7)-(7.9). Результат моделирования при $r = 1.50,\ 5.00,\ 20.00$ и 24.30 представлен на рис.7.15-7.18. На этих рисунках в еще большей степени, чем при $c = 2.00$ и $c = 4.00$ проявляется нерегулярность фазовых траекторий. Кроме этого фазовые траектории напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца наблюдаются даже при $r = 5.00$ (рис.7.16).

7.4 Моделирование колебательных химических реакций и численности двух конкурирующих видов

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки-Вольтерра для динамики численностей двух конкурирующих видов или для динамики концентраций двух реагирующих химических веществ:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(k_1 + a_1\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \left(k_2 + a_2\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix}\sigma_1\mathbf{x}_t^{(1)} & 0\\ 0 & \sigma_2\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix} d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\end{bmatrix}, \tag{7.10}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)}$-численности двух конкурирующих видов (концентрации двух реагирующих веществ); k_1, k_2-коэффициенты роста численности видов (коэффициенты роста концентрации веществ); a_1, a_2-коэффициенты гибели конкурирующих видов (коэффициенты уменьшения концентрации реагирующих веществ);

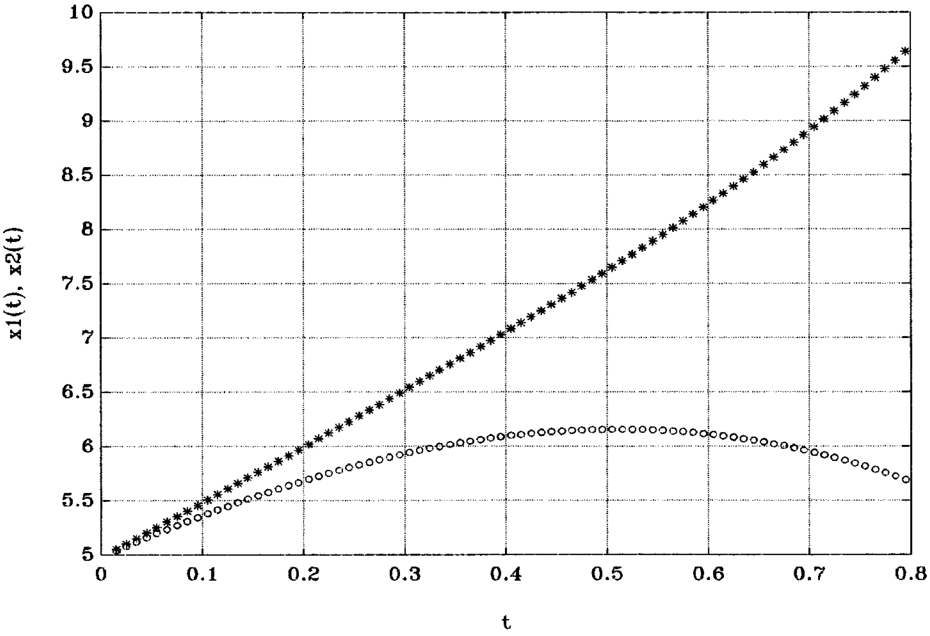

Рис.7.19

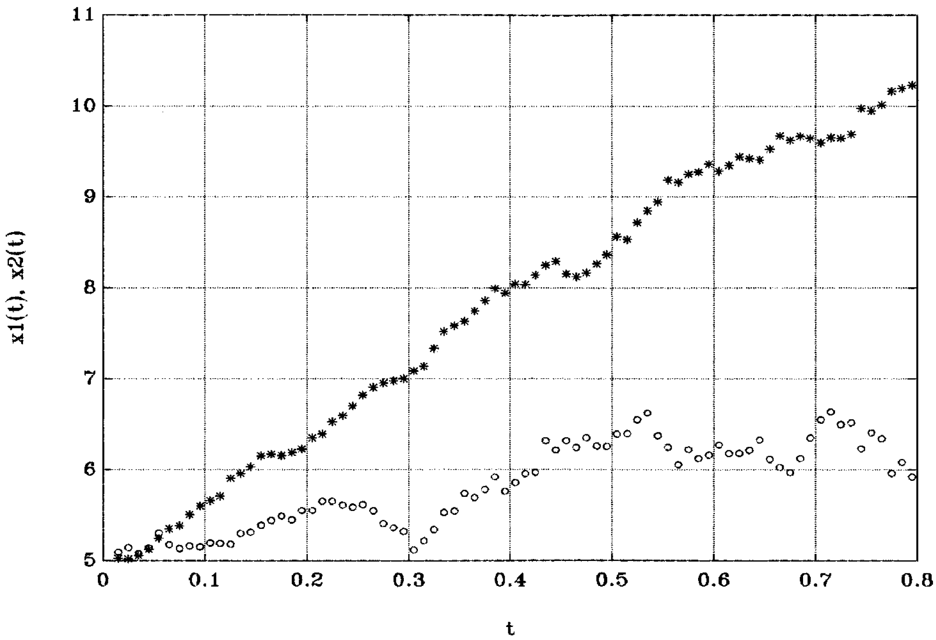

Рис.7.20

σ_1, σ_2-коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$-скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Запишем унифицированное разложение Тейлора-Ито до малых 2-го порядка для процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ в окрестности момента времени t:

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} \Biggl[1 + \left(k_1 + a_1\mathbf{x}_t^{(2)}\right)(s-t) +$$
$$+\sigma_1\left(k_1 + a_1\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left((s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)} + 2I_{1_{s,t}}^{(1)}\right) +$$
$$+a_1\sigma_2\mathbf{x}_t^{(2)}\left((s-t)I_{0_{s,t}}^{(2)} + I_{1_{s,t}}^{(2)}\right) + \sigma_1 I_{0_{s,t}}^{(1)} +$$
$$+\sigma_1^2 I_{00_{s,t}}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000_{s,t}}^{(111)}\Biggr], \tag{7.11}$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} \Biggl[1 + \left(k_2 + a_2\mathbf{x}_t^{(1)}\right)(s-t) +$$
$$+\sigma_2\left(k_2 + a_2\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left((s-t)I_{0_{s,t}}^{(2)} + 2I_{1_{s,t}}^{(2)}\right) +$$
$$+a_2\sigma_1\mathbf{x}_t^{(1)}\left((s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)}\right) + \sigma_2 I_{0_{s,t}}^{(2)} +$$
$$+\sigma_2^2 I_{00_{s,t}}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000_{s,t}}^{(222)}\Biggr]. \tag{7.12}$$

Используя разложения повторных стохастических интегралов Ито $I_{0_{s,t}}^{(i)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i)}$, $I_{2_{s,t}}^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$ с помощью полиномиального базиса и формулы разложения повторных стохастических интегралов Ито $I_{00_{s,t}}^{(ii)}$, $I_{000_{s,t}}^{(iii)}$, $(i = 1,\ 2)$ с помощью полиномов Эрмита получаем при $s = (k+1)\Delta$, $t = k\Delta$, $k = 0,\ 1, \ldots$ следующую численную схему:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(1)} \Biggl[1 + \left(k_1 + a_1\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\Delta - \frac{\sigma_1\Delta^{3/2}}{\sqrt{3}}\left(k_1 + a_1\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\zeta_1^{(1)} +$$
$$+a_1\sigma_2\mathbf{x}_k^{(2)}\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(2)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sigma_1\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(1)} +$$
$$+\frac{\sigma_1^2\Delta}{2}\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2 - 1\right) + \frac{\sigma_1^3\Delta^{3/2}}{6}\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^3 - 3\zeta_0^{(1)}\right)\Biggr], \tag{7.13}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{x}_k^{(2)} \Bigg[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_k^{(1)}\right)\Delta - \frac{\sigma_2 \Delta^{3/2}}{\sqrt{3}} \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_k^{(1)}\right)\zeta_1^{(1)} +$$

$$+ a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_k^{(1)} \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)}\right) + \sigma_2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)} +$$

$$+ \frac{\sigma_2^2 \Delta}{2} \left(\left(\zeta_0^{(2)}\right)^2 - 1\right) + \frac{\sigma_2^3 \Delta^{3/2}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(2)}\right)^3 - 3\zeta_0^{(2)}\right) \Bigg], \tag{7.14}$$

где также, как и в предыдущем параграфе $\mathbf{x}_{k\Delta}^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_k^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$; Δ-шаг интегрирования; $\zeta_0^{(i)},\ \zeta_1^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$-независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предшествующих шагах интегрирования по отношению к k-му шагу интегрирования.

Смоделируем решение системы (7.10) при следующих данных: $k_1 = 2.0,\ k_2 = 2.3,\ a_1 = -0.2, a_2 = -0.3,\ \mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = 5,\ \sigma_1 = 0.0,\ \sigma_2 = 0.0,$ $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $t \in [0, 0.8]$. Результат моделирования представлен на рис.7.19. Введем теперь стохастическое возмущение, т.е. положим $\sigma_1 = 0.1,\ \sigma_2 = 0.2$ и повторим моделирование системы (7.10) оставив другие исходные данные прежними. На рис.7.20 изображено поведение обоих компонент решения системы (7.10) в зависимости от времени.

7.5 Моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг

В финансовой математике, наряду с многочисленными математическими моделями, встречается следующая модель динамики доходности портфеля ценных бумаг в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} + e^{\frac{\gamma}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} \dots B^{(1m)} \\ \dots \\ B^{(n1)} \dots B^{(nm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ \dots \\ d\mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix}, \tag{7.15}$$

где $\mathbf{x}_t^{(i)}$-доходность i-й ценной бумаги; $\mathbf{m}^{(i)}$-средний уровень доходности i-й ценной бумаги; γ-импирический коэффициент; $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_t^{(i)}$-средняя доходность по множеству ценных бумаг; $\left\|B^{(ij)}\right\|_{i,j=1}^{n,m}$-числовая матрица, характеризующая перемешивание; $\mathbf{f}_t^{(i)}(i = 1, \dots, m)$-независимые стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим модель вида (7.15) при $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ d\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \mathbf{m}^{(2)} \end{bmatrix} + e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)} \begin{bmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ d\mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{7.16}$$

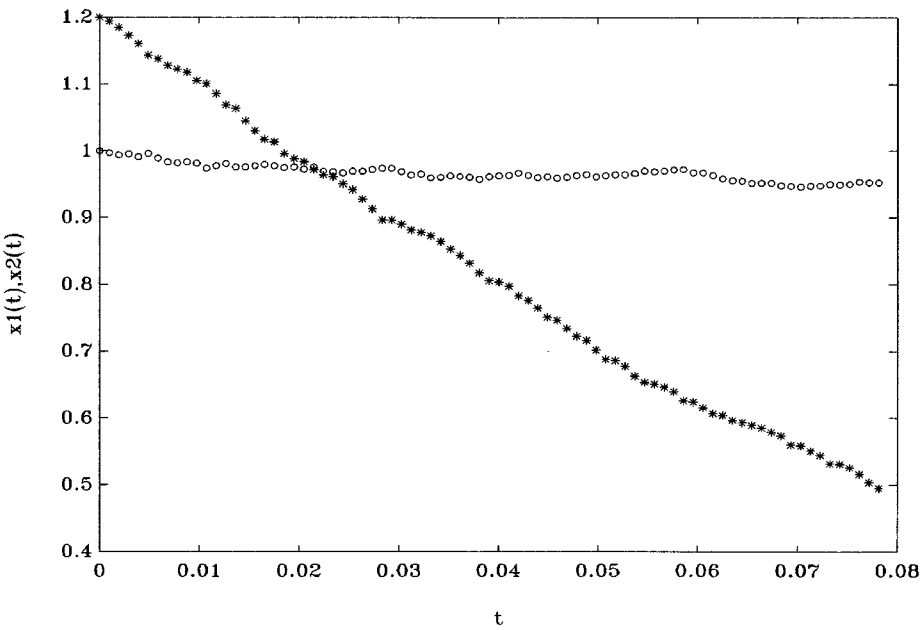

Рис.7.21

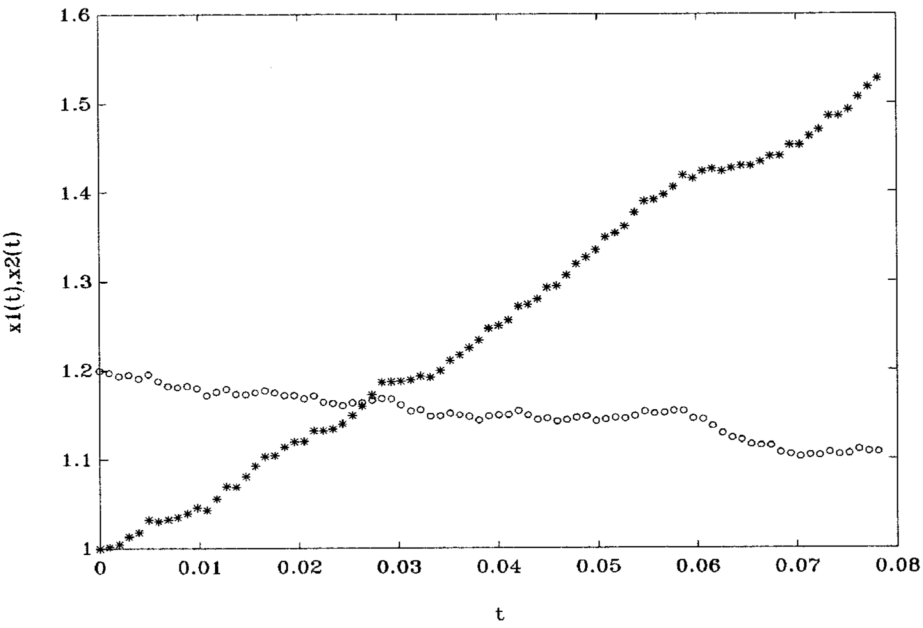

Рис.7.22

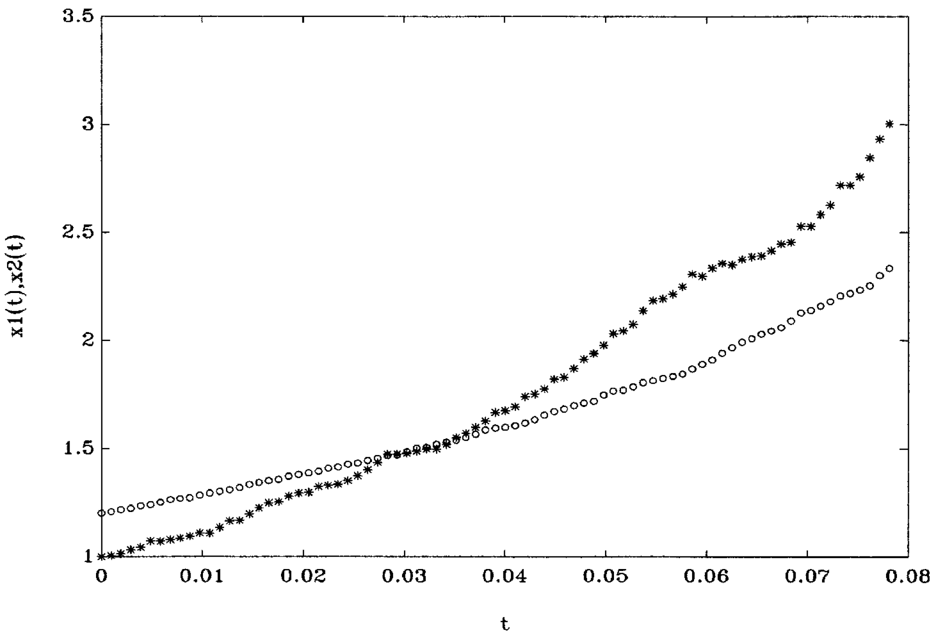

Рис.7.23

Запишем метод Мильштейна для системы (7.16):

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(1)}=\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{m}^{(1)}\Delta+e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)}\left(B^{(11)}I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}+B^{(12)}I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{\gamma}{2}e^{\gamma\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)}\left[B^{(11)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right)^2-\Delta\right)+\right.$$

$$+B^{(11)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)q}+B^{(12)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)q}+$$

$$\left.+B^{(12)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)}\right)^2-\Delta\right)\right],\tag{7.17}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{x}_k^{(2)}+\mathbf{m}^{(2)}\Delta+e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)}\left(B^{(21)}I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}+B^{(22)}I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{\gamma}{2}e^{\gamma\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)}\left[B^{(21)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right)^2-\Delta\right)+\right.$$

$$+B^{(21)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)q}+B^{(22)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)q}+$$

$$\left.+B^{(22)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)}\right)^2-\Delta\right)\right],\tag{7.18}$$

где

$$I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}=\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(1)},\ I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)}=\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(2)},\tag{7.19}$$

$$I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)q}=\frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(1)}\zeta_{2r-1}^{(2)}-\zeta_{2r-1}^{(1)}\zeta_{2r}^{(2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(1)}\zeta_0^{(2)}-\zeta_0^{(1)}\zeta_{2r-1}^{(2)}\right)\right)\right],\tag{7.20}$$

$$I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)q}=\frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(2)}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(2)}\zeta_{2r-1}^{(1)}-\zeta_{2r-1}^{(2)}\zeta_{2r}^{(1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(2)}\zeta_0^{(1)}-\zeta_0^{(2)}\zeta_{2r-1}^{(1)}\right)\right)\right]\tag{7.21}$$

или

$$I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)q}=\frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4r^2-1}}\left(\zeta_{r-1}^{(2)}\zeta_r^{(1)}-\zeta_r^{(2)}\zeta_{r-1}^{(1)}\right)\right],\tag{7.22}$$

$$I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)q} = \frac{1}{2}\Delta\left[\zeta_0^{(2)}\zeta_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4r^2-1}}\left(\zeta_{r-1}^{(1)}\zeta_r^{(2)} - \zeta_r^{(1)}\zeta_{r-1}^{(2)}\right)\right], \tag{7.23}$$

$\mathbf{x}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_k^{(i)} (i = 1,\ 2)$; $k\Delta \stackrel{def}{=} \tau_k$; $\zeta_j^{(i)}$ $(j = 0,\ 1, \ldots, 2q;\ i = 1,\ 2)$-независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; Δ-шаг интегрирования численного метода.

Число q в соотношениях (7.20), (7.21) выбирается из условия:

$$\frac{3\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right) \le C\Delta^3, \tag{7.24}$$

где $C = const < \infty$.

Если для аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)}$, $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)}$ используются соотношения (7.22), (7.23), то число q в них должно выбираться из следующего условия:

$$\frac{\Delta^2}{4}\left(\frac{1}{2} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4r^2-1}\right) \le C\Delta^3, \tag{7.25}$$

где $C = const < \infty$.

Следует отметить, что на шаге интегрирования с номером k система случайных величин $\zeta_j^{(i)}$ $(j = 0,\ 1, \ldots, 2q;\ i = 1,\ 2)$ в случае (7.20), (7.21) или система случайных величин $\zeta_j^{(i)}$ $(j = 0,\ 1, \ldots, q;\ i = 1,\ 2)$ в случае (7.22), (7.23) должна генерироваться независимой по отношению к аналогичным системам случайных величин на всех предшествующих шагах интегрирования с номерами $1,\ 2, \ldots, k-1$.

Величина $C\Delta^3$ в правой части условий (7.24), (7.25) оценивает снизу второй момент отброшенного остаточного члена разложения Тейлора-Ито. Предположим, что постоянная C, определяемая информацией о $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$, известна и равна для простоты единице.

Произведем моделирование решения системы (7.16) с помощью метода Мильштейна (7.17), (7.18) и соотношений (7.19), (7.22), (7.23) при следующих данных: $\Delta = 2^{-10}$, $C = 1.0$, $\gamma = 1$, $\mathbf{m}^{(1)} = 1.0$, $\mathbf{m}^{(2)} = 1.0$, $B^{(11)} = -0.1$, $B^{(22)} = -0.2$, $B^{(12)} = 0.05$, $B^{(21)} = -0.05$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 1.0$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1.2$, число итераций $n = 80$. Результат моделирования представлен на рис.7.21. На этом рисунке видно уменьшение доходности ценных бумаг. Повторим моделирование решения системы (7.16) при тех же условиях, за исключением значений $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$, $B^{(22)}$, которые выберем следующими: $\mathbf{x}_0^{(1)} = 1.2$,

$\mathbf{x}_0^{(2)} = 1.0$, $B^{(22)} = 0.15$. На рис.7.22 отражена динамика системы (7.16) при этих начальных данных. Изменим значения $B^{(11)}$, $B^{(22)}$, по сравнению с предыдущим случаем, положив: $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.3$. При этом значения остальных начальных данных оставим такими же, как в предыдущем случае. Результат моделирования системы (7.16) при этих условиях изображен на рис.7.23. На нем отражена тенденция роста доходности ценных бумаг. Во всех трех рассмотренных случаях для моделирования решения системы (7.16) бралась одна и таже реализация случайных величин.

Запишем СЛСДУ, которая описывает чандлеровские колебания:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ d\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ d\mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{7.26}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)} \in \Re^1$-случайные процессы, определяющие положение полюса Земли; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)} \in \Re^1$-независимые стандартные винеровские процессы; $\frac{\omega}{2\pi}$ (циклы в год)-частота; $\frac{1}{\lambda}$(годов)-релаксация; a-интенсивность случайных возмущений.

Согласно оценкам, полученным в работах [16], [14], параметры λ, a, ω имеют следующие значения:

$$\lambda = 0.06 \left(\frac{1}{\text{год}}\right), \; a = 0.035'', \; \omega = 5.274.$$

Выберем следующие начальные (на начало 1968 года) данные, которые зарегистрированы Международной Службой Широты: $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}(0) = -0.03''$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}(0) = -0.27''$.

Произведем моделирование решения системы (7.26) на временном интервале в 35 лет с шагом 0.01 года с помощью точного предсталения решения СЛСДУ и алгоритмов, полученных в главе 6, которые основываются на этом точном представлении. На рис.7.24, 7.25 показано поведение процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ с течением времени, а на рис.7.26 показаны фазовые траектории системы (7.26). Если положить $a = 0.00''$, то фазовые траектории системы (7.26) примут вид, изображеный на рис.7.27.

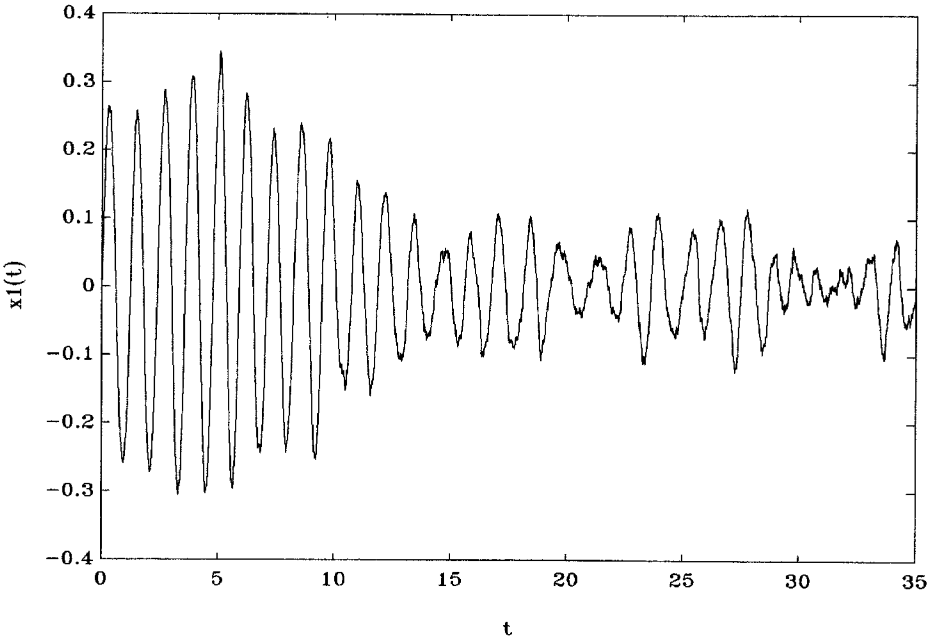

Рис.7.24

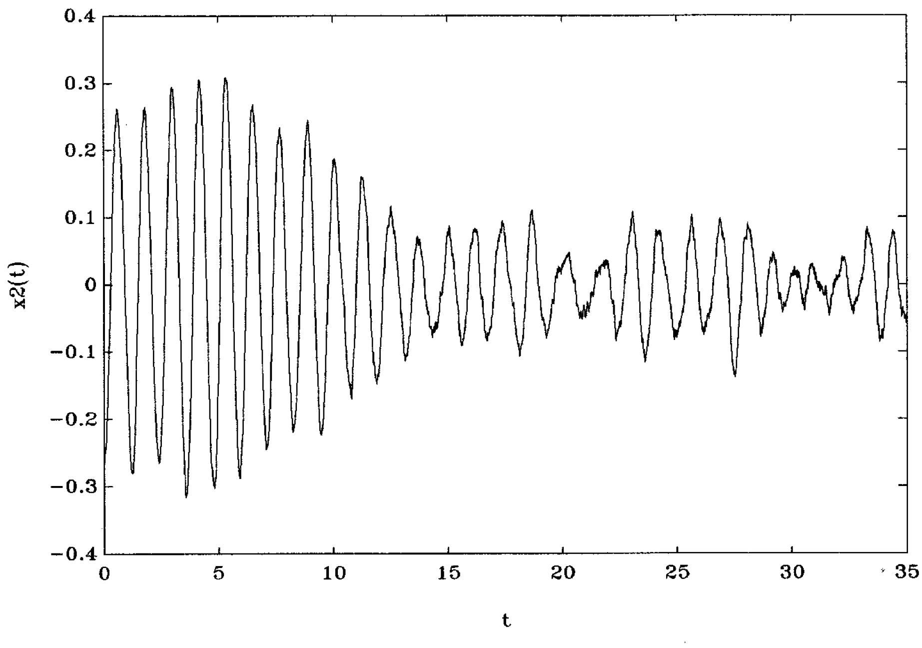

Рис.7.25

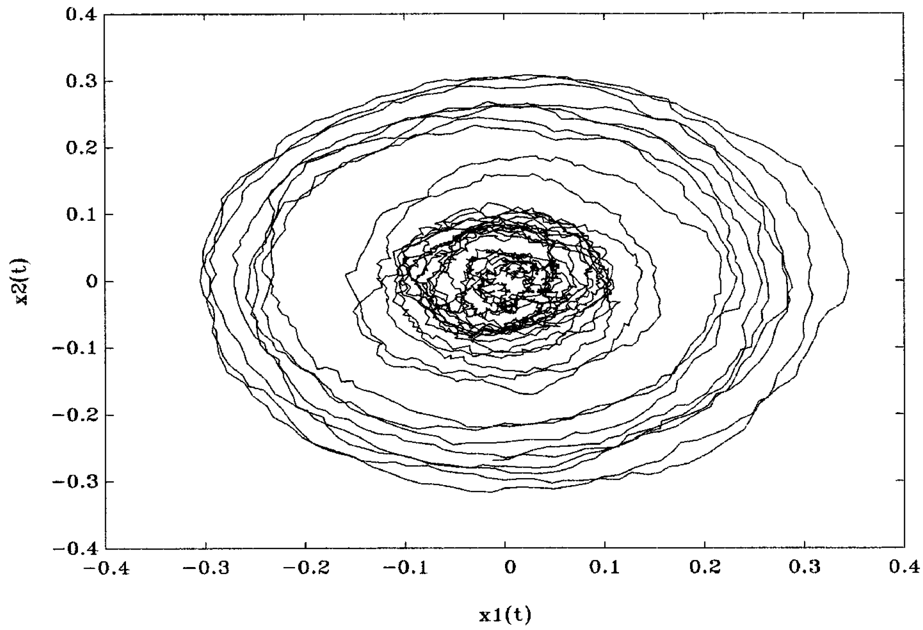

Рис.7.26

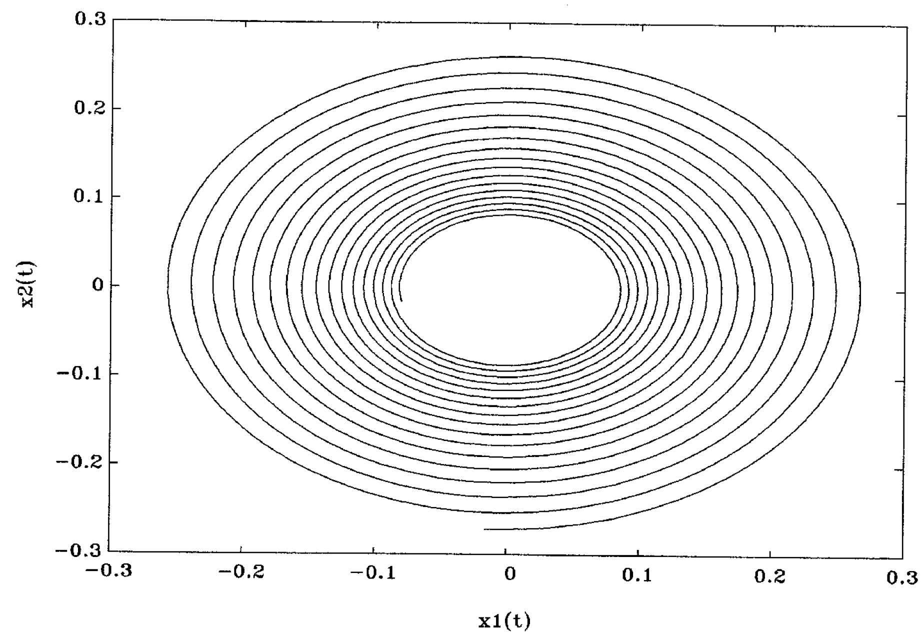

Рис.7.27

7.6 Численное моделирование солнечной активности

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, описывающую [14] солнечную активность без учета ее среднего значения:

$$d\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \tag{7.27}$$

где x_t-количество солнечных пятен, $f_t \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс; $a_1,\ a_2,\ c$-постоянные.

По данным Е.Е.Слуцкого [25] период T_0 колебаний солнечной активности равен 11.103 лет; $\sqrt{a_2} = \frac{2\pi}{T_0} = 0.5661$; $\lambda = \frac{a_1}{2} = 0.07$. Параметр c определен в [14] и равен 5.08. Согласно числам Вольфера (см. рис.1.4, [14]) на начало 1821г. приходилось порядка 7 солнечных пятен. Это число примем за $x_0 = x(0)$. Примем также $y_0 = y(0) = -0.25$. Произведем моделирование решения уравнения (7.27) на временном интервале с 1821 по 1921 гг. с шагом 0.1 года. Результат моделирования представлен на рис.5.28,5.29. На рис.7.28 показана зависимость количества солнечных пятен, без учета среднего значения, от времени. На этом рисунке просматривается периодичность колебаний приблизительно равная 11 годам.

7.7 Исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера

Рассмотрим систему уравнений Ресслера со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \tag{7.28}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)},\ \mathbf{x}_t^{(3)} \in \Re^1$-компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \Re^3$ системы (7.28); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \Re^1$-стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c-параметры.

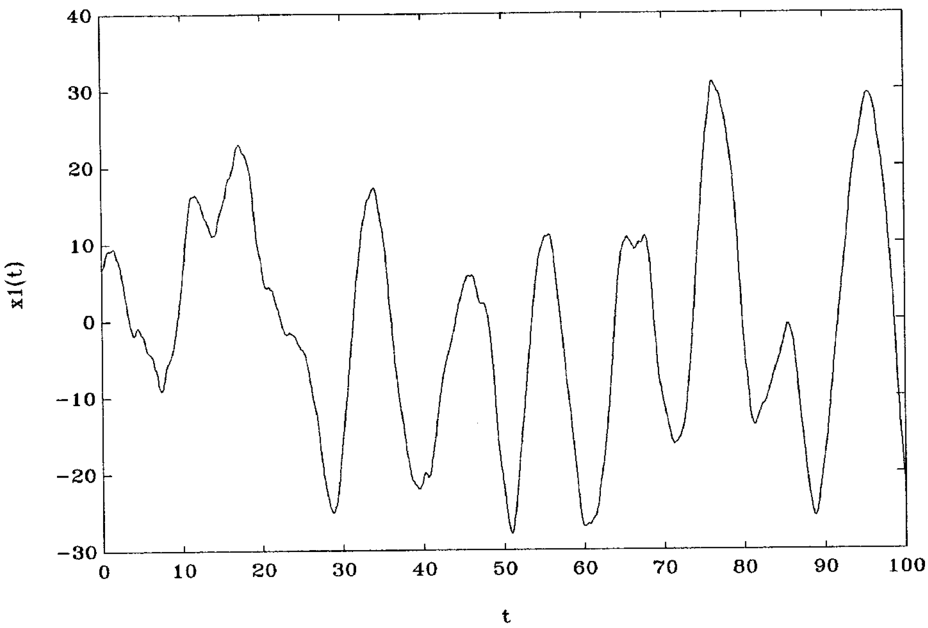

Рис.7.28

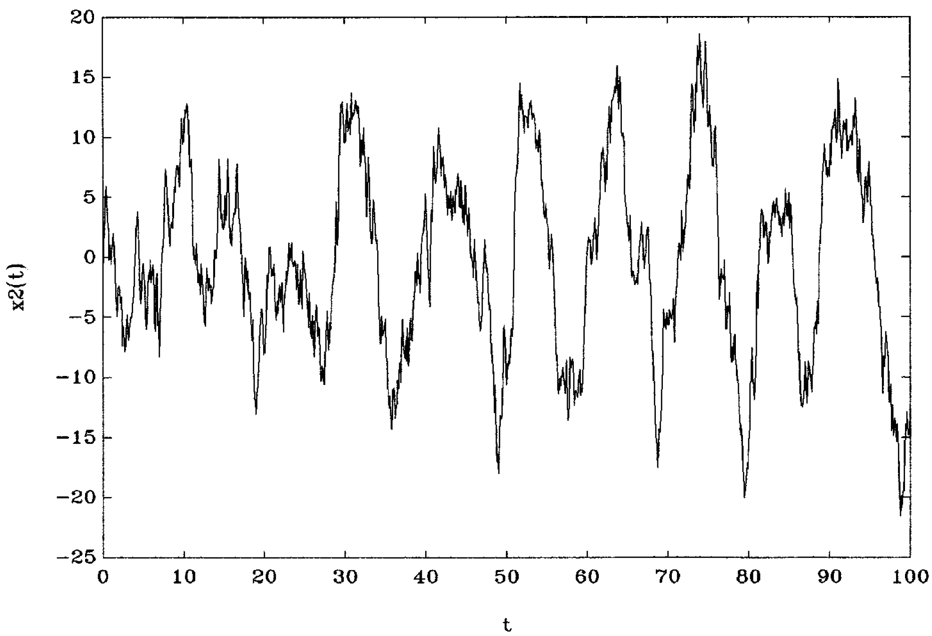

Рис.7.29

В конце главы 3 были приведены унифицированные разложения Тейлора-Ито (3.71)-(3.73) для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (7.28) до малых $O\left((s-t)^{5/2}\right)$. Положим в этих разложениях $s=(k+1)\Delta;\ t=k\Delta;$ $k=0,\ 1,\ldots$ и аппроксимируем повторные стохастические интегралы Ито, входящие в (3.71)-(3.73), с помощью методов, изложенных в главе 4. В результате получим следующие выражения для численного метода, основанные на представлениях (3.71)-(3.73):

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(1)}=\mathbf{x}_k^{(1)}+\Delta\left(-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(3)}\right)+c\mathbf{x}_k^{(3)}\left[\Delta I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}+I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right]+$$

$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[-\mathbf{x}_k^{(1)}-e\mathbf{x}_k^{(2)}-f-\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}+\mu\mathbf{x}_k^{(3)}\right]-$$

$$-c^2\mathbf{x}_k^{(3)}\left[I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}+\Delta I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)}\right], \tag{7.29}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{x}_k^{(2)}+\Delta\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+e\mathbf{x}_k^{(2)}\right)+\frac{\Delta^2}{2}\left[-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(3)}+\right.$$

$$\left.+e\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+e\mathbf{x}_k^{(2)}\right)\right], \tag{7.30}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(3)}=\mathbf{x}_k^{(3)}-c\mathbf{x}_k^{(3)}I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}+\Delta\left(f+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}-\mu\mathbf{x}_k^{(3)}\right)+$$

$$+c^2\mathbf{x}_k^{(3)}I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)}+c\mathbf{x}_k^{(3)}\left(\mu-\mathbf{x}_k^{(1)}\right)\left[\Delta I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}+I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right]+$$

$$+c\left(f+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}-\mu\mathbf{x}_k^{(3)}\right)I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}-c^3\mathbf{x}_k^{(3)}I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(111)}+$$

$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[\left(-\mathbf{x}_k^{(2)}-\mathbf{x}_k^{(3)}\right)\mathbf{x}_k^{(3)}+\left(f+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}-\mu\mathbf{x}_k^{(3)}\right)\left(\mathbf{x}_k^{(1)}-\mu\right)\right]+$$

$$+c^2\mathbf{x}_k^{(3)}\left(\mathbf{x}_k^{(1)}-\mu\right)\left[I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}-I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}\right]-$$

$$-c^2\left(f+\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)}-\mu\mathbf{x}_k^{(3)}\right)I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}-$$

$$-c^2\mathbf{x}_k^{(3)}\left(\mu-\mathbf{x}_k^{(1)}\right)\left[I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}+\Delta I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)}\right]+$$

$$+c^4\mathbf{x}_k^{(3)}I_{0000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1111)}, \tag{7.31}$$

где

$$I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}=\sqrt{\Delta}\zeta_0,$$

$$I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} = \frac{1}{2}\Delta\left[(\zeta_0)^2 - 1\right],$$

$$I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left[\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right],$$

$$I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(111)} = \frac{\Delta^{3/2}}{6}\left[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0\right],$$

$$I_{0000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1111)} = \frac{\Delta^2}{24}\left[(\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3\right],$$

$$I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4}\left[\frac{4}{3}(\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0\zeta_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i\zeta_{i+2} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}(\zeta_i)^2\right\} - 2\right],$$

$$I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{2}\zeta_0\left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right) - I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}, \tag{7.32}$$

где $\tau_k \stackrel{def}{=} k\Delta$; $\mathbf{x}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_k^{(i)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$; ζ_j $(i = 0,\ 1, \ldots, q+2)$-система независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, которая генерируется на шаге интегрирования с номером k и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования по отношению к шагу интегрирования с номером k; число q выбирается из условия:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} - I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^4}{16}\left[\frac{3}{16}\left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)^2\right] \le C\Delta^5,$$

где $0 < C = const < \infty$; величина $C\Delta^5$ оценивает снизу второй момент отброшенного остаточного члена в разложении Тейлора-Ито (для простоты будем считать, что $C = 1.0$).

Следует отметить, что соотношение (7.32) следует из соотношения:

$$I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} + I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} = I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)},$$

которое может быть получено, например, с помощью теоремы о замене порядка интегрирования (см. главу 2).

Положим $c = 0.00$, $e = f = 0.20$, $\mu = 5.7$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$. Результат моделирования системы (7.28) на промежутке $t \in [0, 300.00]$ с шагом интегрирования $\Delta = 0.03$ изображен на фазовой плоскости $\big(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\big)$ на рис.5.30. На этом рисунке изображен аттрактор Рёсслера, который был

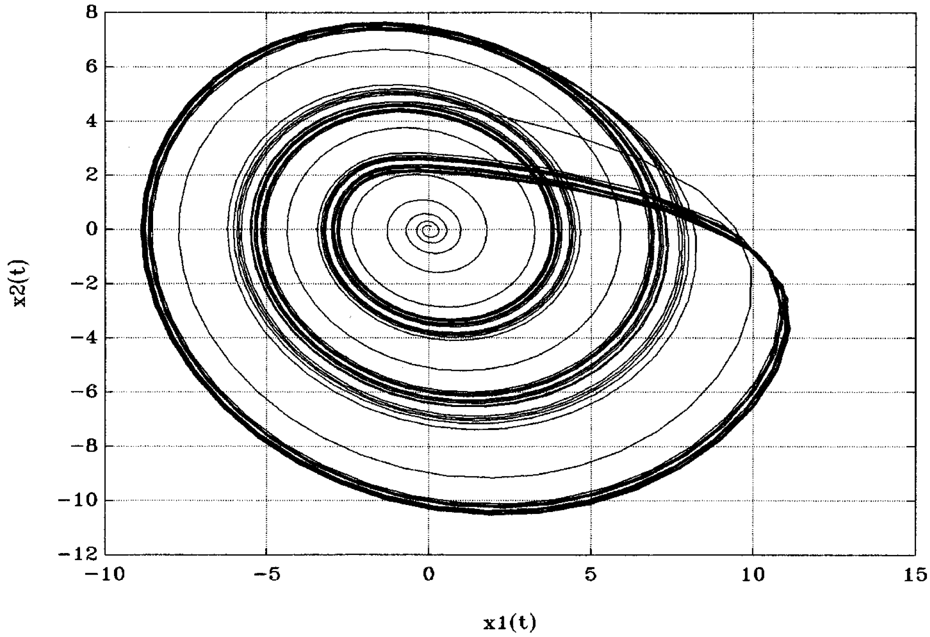

Рис.7.30

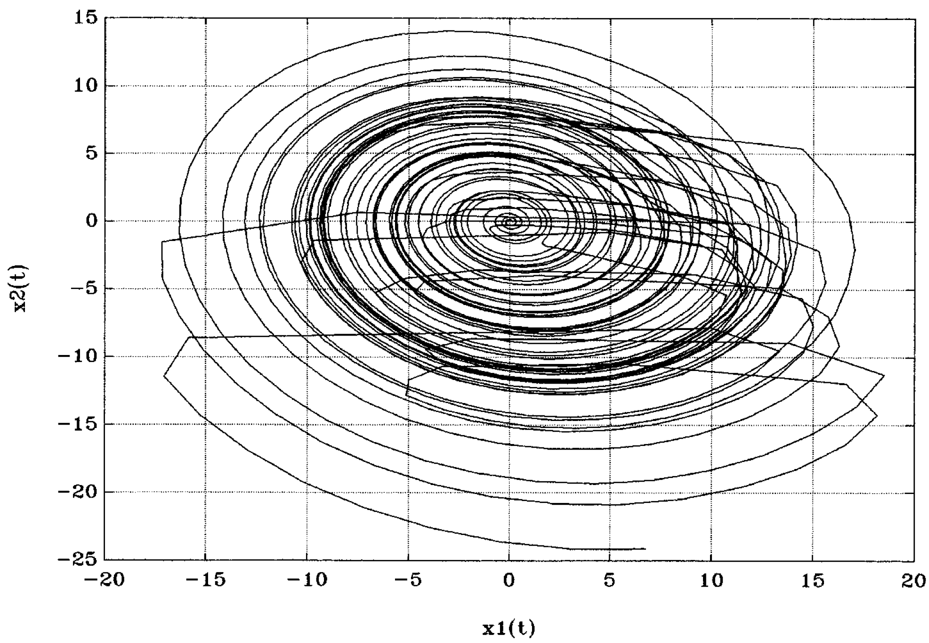

Рис.7.31

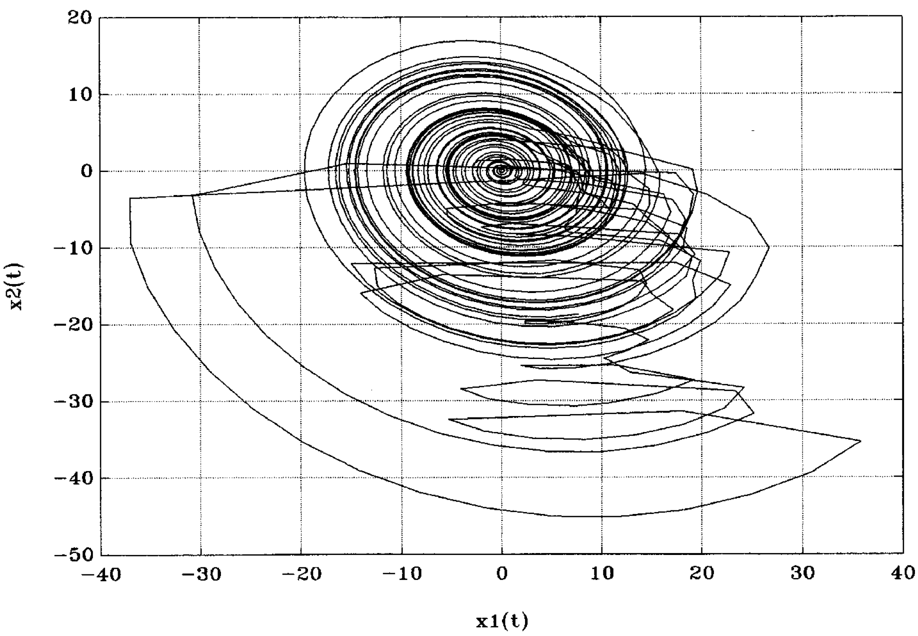

Рис.7.32

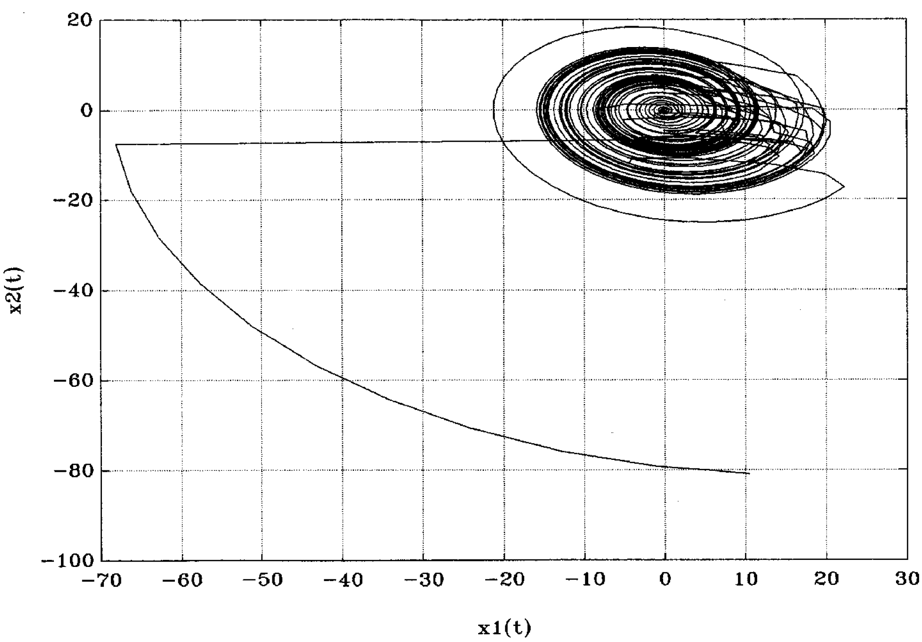

Рис.7.33

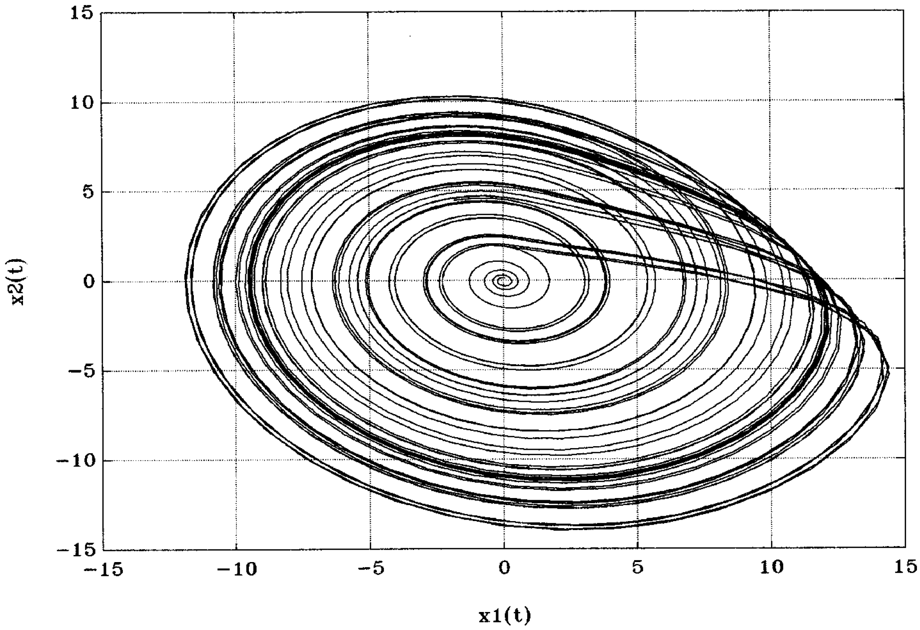

Рис.7.34

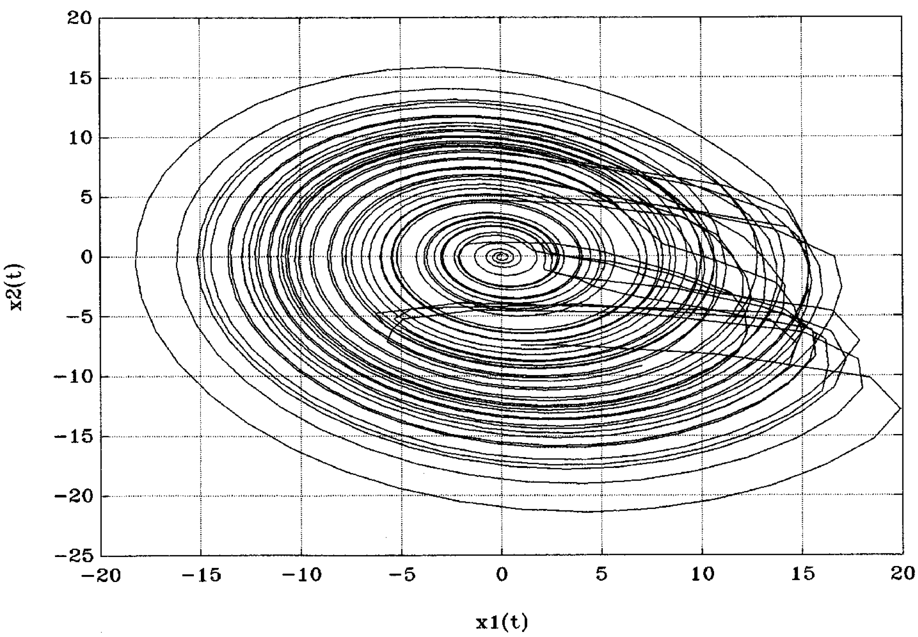

Рис.7.35

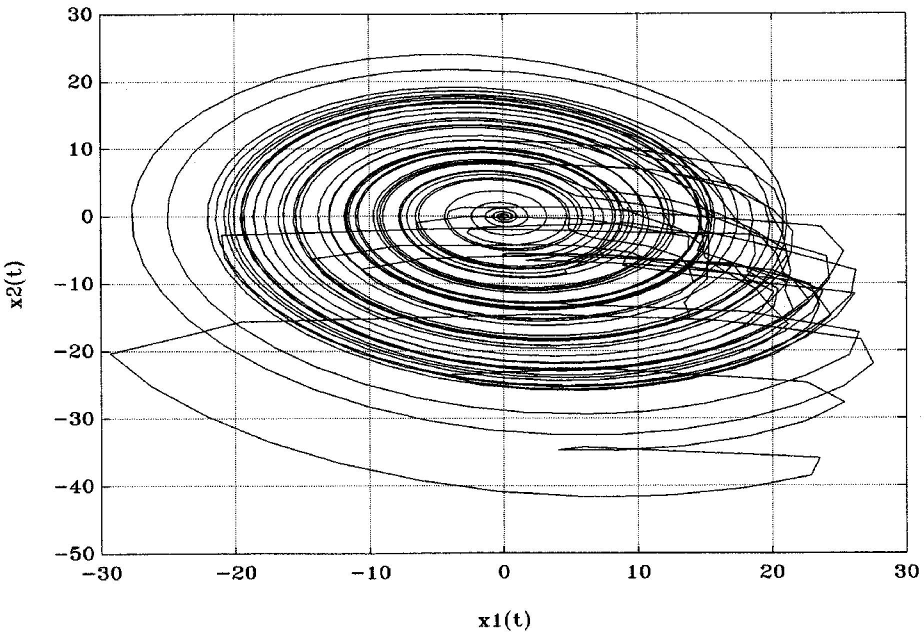

Рис.7.36

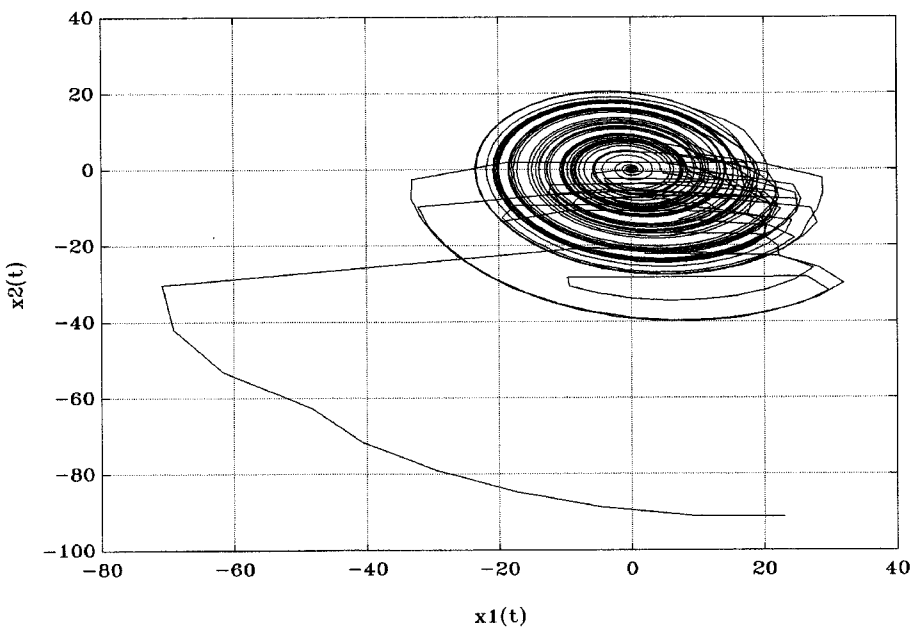

Рис.7.37

назван им „слоистым". Как известно [17], этот аттрактор возникает в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, которая начинается при $\mu = 3.50$ [17] и приводит при $\mu = 4.20$ [17] к возникновению аттрактора. Будем теперь увеличивать параметр c и произведем моделирование системы (7.28) с помощью соотношений (7.29)-(7.31) при $c = 2.00,\ 3.2,\ 3.46$, сохранив при этом значения остальных параметров, шага и промежутка интегрирования. На рис.7.31-7.33 изображены фазовые траектории системы (7.28) на фазовой плоскости $\left(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}\right)$. На этих рисунках с ростом c видна тенденция фазовых траекторий к уходу из области притяжения аттрактора, которая заканчивается этим уходом при достижении c значения 3.46.

При изменении значений $e,\ f,\ \mu$ внешний вид аттрактора меняется. Так при $e = 0.19,\ f = 0.40,\ \mu = 8.5,\ c = 0.00$ проекция аттрактора на плоскость $\left(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right)$ изображена на рис.7.34. На рис.7.35-7.37 показаны фазовые траектории системы (7.28) при тех же значениях параметров $e,\ f,\ \mu$ и $c = 2.00,\ 3.75,\ 3.88$ соответственно. На этих рисунках с ростом c также видна тенденция фазовых траекторий к уходу из области притяжения аттрактора, которая заканчивается этим уходом при достижении c значения 3.88.

Отметим, что при получении рис.7.30-7.37 полагалось $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1,\ t \in [0, 300.00],\ \Delta = 0.03$ и бралась одна и таже реализация случайных гауссовских величин ζ_j (рис.7.31-7.33, 7.35-7.37).

Литература к главе 7

Стратонович Р.Л. (1961), Arato M. (1982), Орлов А. (1958), Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. (1962), Неймарк Ю.И., Ланда П.С. (1987), Lotka A.J. (1920), Вольтерра В. (1976), Белоусов Б.П. (1959), Жаботинский А.М. (1974), Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. (1984), Первозванский А.А. (1994), Wolf J.R. (1852), Слуцкий Е.Е. (1935), Rössler O.E. (1950), Мильштейн Г.Н. (1974), Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E. (1992). Maruyama G. (1955), Clements D.J., Anderson B.D.O. (1973), Wright D.J. (1974), Rumelin W. (1982), Platen E. (1984), Gard T.C. (1988), Chang C.C. (1987), Talay D. (1982), Talay D., Tubaro L. (1990), Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N. (1995), Hernandez D.B., Spigler R. (1993), Wagner W., Platen E. (1978), Platen E. (1981), Platen E., Wagner

W. (1982), Platen E. (1982(I), 1982(II)), Мильштейн Г.Н. (1988), Kloeden P.E., Platen E. (1991), Pettersson R. (1992), Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. (1994), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. (1993, 1996(I), 1996(II)), Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F. (1997, 1997(I)), Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. (1992), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. (1994, 1995), Кузнецов Д.Ф. (1996, 1997(I), 1997(II), 1998(I)), Kuznetsov D.F. (1988(II)), Chung K.L., Williams R.J. (1983), Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F. (1997(II), 1997(III)), Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. (1998(I), 1998(II)). Arnold L. (1974), Richardson J.M. (1964), McKenna J., Morrison J.A. (1970, 1971), Horsthemke W., Lofever R. (1984), Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. (1987), Mikulevicius R. (1983), Strook D.W., Varadhan S.R.S. (1982), Shkurko I.O. (1987), Понтрягин Л.С. (1982), Бахвалов Н.С. (1973).

Заключение

В последние годы интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям значительно возрос, о чем свидетельствует количество публикаций по этой тематике. Особое место в теории стохастических дифференциальных уравнений занимает проблема их численного решения, которой посвящена настоящая монография. В книге рассматривается численный подход к стохастическим дифференциальным уравнениям, который основывается на моделировании их решений в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора и специальных методов аппроксимации повторных стохастических интегралов. Предлагаются также методы численного решения систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, которые основываются на представлении их решений в форме Коши.

Кратко сформулируем в чем заключается новизна результатов, полученных в монографии.

1. Впервые сформулированы и доказаны теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

2. С помощью этих теорем получены новые представления разложения Тейлора-Ито — унифицированные разложения Тейлора-Ито. Унифицированные разложения Тейлора-Ито являются, в ряде случаев, более удобными для построения численных методов для стохастических дифференциальных уравнений, чем классическое представление Тейлора-Ито.

3. Предложен новый метод аппроксимации повторных стохастических

интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. Этот метод обладает рядом преимуществ перед известным методом Г.Н.Мильштейна аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича.

4. Предложен новый метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, который основывается на приближении этих интегралов кратными интегральными суммами.

5. С помощью упомянутых выше результатов в монографии построен ряд новых одношаговых сильных численных методов для систем нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

6. Разработаны новые эффективные алгоритмы численного решения систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, в основу которых положено представление решений этих систем уравнений в форме Коши.

7. Численно решен ряд задач стохастической динамики систем различной физической природы. Для решения этих задач впервые был применен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

Необходимо отметить, что монографию следует расценивать как попытку углубления и развития лишь некоторых вопросов теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений, которые рассматривались, наряду с другими вопросами, в монографиях [35] (Г.Н.Мильштейн), [38] (P.E.Kloeden, E.Platen), [39] (P.E.Kloeden, E.Platen and H.Shurz).

В книге содержится значительное количество теоретического материала, который может представить интерес для специалистов в области случайных процессов. Монография также окажется полезной для математиков-вычислителей, программистов и инженеров, поскольку в ней разработан и доведен до уровня практической реализации ряд алгоритмов для численного решения нелинейных и линейных систем стохастических дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Boyce W.E. *Approximate solution of random ordinary differential equations.* Adv.Appl. Prob., **10**, 1978, pp.172-184.

[2] Kushner J.H. *Probubility Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations.* Academic Press., New York, 1977.

[3] Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов.* М.: Наука, 1977, 660с.

[4] Ширяев А.Н. *Вероятность.* М.: Наука, 1989, 640 с.

[5] Розанов Ю.А. *Стационарные случайные процессы.* М.: Физматгиз, 1963, 284 с.

[6] Стратонович Р.Л. *Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.* М: Изд-во МГУ, 1966, 320с.

[7] Bachelier L. *Théorie de la spèculation.* Ann. Sci. Norm. Sup., 1900, **17**.

[8] Эйнштейн А., Смолуховсий М. *Броуновское движение.* Сб. статей, перевод с немецкого, 1936.

[9] Андронов А.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С. *О статистичесом рассмотрении динамических систем.* ЖЭТФ, 1933, **3**.

[10] Ван-дер-Зил А. *Флуктуации в радиотехнике и физике.* М-Л: Госэнергоиздат, 1958.

[11] Стратонович Р.Л., Полякова М.С. *Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики.* М.: МГУ, 1981.

[12] Nyquist H. *Thermal agittation of Electric Charge in Conductors.* Physical Review, 1928, **32**, July, 110.

[13] Стратонович Р.Л. *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.* М: Советское радио, 1961, 556с.

[14] Arato M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach.* Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1982, 289p.

[15] Орлов А. *Служба широты.* М: Изд-во АН СССР, 1958, 126с.

[16] Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. *Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.* ДАН СССР, 1962, т.146, **4**, с.747-750.

[17] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания.* М: Наука, 1987.

[18] Lotka A.J. *Undamped oscillations derived from the law of mass action.* J. Amer. Chem. Soc., 1920, v.42, **8**, pp.1595-1599.

[19] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование.* М: Наука, 1976.

[20] Белоусов Б.П. *Периодически действующая реакция и ее механизм.* Сб. рефератов по радиационной медицине. М: Медгиз, 1959, с.145-148.

[21] Жаботинский А.М. *Концентрационные автоколебания.* М: Наука, 1974.

[22] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. *Математическая биофизика.* М: Наука, 1984.

[23] Первозванский А.А. *Рынок: Расчет и Риск.* Изд-во ИНФРА, 1994, 210с.

[24] Wolf J.R. *Neue Untersuchungen uber die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung.* Mitteilungen der Naturforschungen Gessellschaft in Bern, 1852, B.255, s.249-270.

[25] Слуцкий Е.Е. *О 11-летней периодичности солнечных пятен.* ДАН СССР, 1935, т.4(**9**), вып.1-2, с.35-38.

[26] Rössler O.E. *An equation for continious chaos.* Phys. Lett., v.57A, **5**, pp.397-398.

[27] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Повторные стохастические интегралы и их свойства.* Деп. в ВИНИТИ, 1996, **3506-В96** от 03.12.96, 29с.

[28] Кузнецов Д.Ф. *Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах.* Деп. в ВИНИТИ, 1997, **3607-В97** от 10.12.97, 31с.

[29] Milstein G.N. *Approximate integration of stochastic differential equations.* Theor. Prob. Appl., 1974, **19**, pp.557-562.

[30] Wagner W., Platen E. *Approximation of Ito integral equations.* Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978.

[31] Platen E. *A Taylor-Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation.* Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sc., 1981, Vol. 36, pp.157-164.

[32] Platen E., Wagner W. *On a Taylor formula for a class of Ito processes.* Prob. Math. Statist., 1982, **3**, pp.37-51.

[33] Platen E. *A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations.* Sankhua 44A, 1982(I), pp.163-172.

[34] Platen E. *An approximation method for a class of Ito processes with jump component.* Lietuvos Matem. Rink., 1982(II), **22**, pp.124-136.

[35] Мильштейн Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 225с.

[36] Kloeden P.E., Platen E. *The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions.* Math. Nachr., 1991, **151**, pp.33-50.

[37] Pettersson R. *The Stratonovich-Taylor expansion and numerical methods.* Stoch. Anal. And Applicat., 1992, 10 (**5**), pp.603-612.

[38] Kloeden P.E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations.* Berlin: Springer-Verlag, 1992, 632p.

[39] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments.* Berlin: Springer-Verlag, 1994, 292p.

[40] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Разложение процессов Ито в ряд Тейлора-Ито в окрестности фиксированного момента времени.* Деп. в ВИНИТИ, 1993, **2637-В93** от 26.10.93, 26с.

[41] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Обобщение разложения Тейлора на класс случайных процессов, порожденных решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито.* Деп. в ВИНИТИ, 1996(I), **3507-В96** от 03.12.96, 25с.

[42] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Обобщение разложения Тейлора на класс дифференцируемых по Ито случайных процессов.* Деп. в ВИНИТИ, 1996(II), **3508-В96** от 03.12.96, 24с.

[43] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Унифицированное разложение Тейлора-Ито.* Записки научных семинаров ПОМИ. Вероятность и статистика 2, 1997(I), т.244, с.186-204.

[44] Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F. The unified Taylor-Ito expansion. Electr. J. Differential Equations and Control Processes, 1997(II), **1** (http://www.neva.ru/journal).

[45] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. *The Approximation of multiple stochastic integrals.* Stoch. Anal. And Applicat., 1992, 10 (**4**), pp.431-441.

[46] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито.* Деп. в ВИНИТИ, 1994, **1678-В94** от 15.08.94, 42с.

[47] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *О проблеме корректного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито.* Механ. и проц. управл. Сб. научн. трудов Труды СПбГТУ, 1995, **458**, с.162-168.

[48] Кузнецов Д.Ф. *Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики.* Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. СПб: СПбГТУ, 1996, 19с.

[49] Кузнецов Д.Ф. *Теоретическое обоснование метода разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрическим и сферическим функциям.* Деп. в ВИНИТИ, 1997(I), **3608-В97** от 10.12.97, 27с.

[50] Кузнецов Д.Ф. *Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций.* Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., 1997(II), **1** (http://www.neva.ru/journal).

[51] Кузнецов Д.Ф. *Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному решению стохастических дифференциальных уравнений.* Труды конфер. Средства мат. моделир. Изд-во СПбГТУ, 1998(I), с.135-160. Санкт-Петербург.

[52] Kuznetsov D.F. *Method of expansion and approximation of repeated stochastic Stratonovich integrals, which is based on multiple Fourier series on full orthonormal systems.* Proceedings of the international conference "Asimptotical methods of the probubility theory and mathematical statistics", St.-Petersburg, June, 24-28, 1998(II) (to appear).

[53] Скороход А.В. *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М.: Наука, 1964, 280с.

[54] Харди Г.Х., Рогозинский В.В. *Ряды Фурье.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963, 156с.

[55] Гобсон Е.В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций.* М.: ИЛ, 1952, 476с.

[56] Chung K.L., Williams R.J. *Introduction to Stochastic Integration.* Progress in Probubility and Stochastics Vol.4 (Edited by Huber P. and Rosenblatt M.) Birkhäuser Boston Basel Stuttgart, 1983.

[57] Coddington E.A. *An Introduction to Ordinary Differential equations.* New Jersey: Prentice-Hall, 1961.

[58] Maruyama G. *Continuous Markov processes and stochastic equations.* Rend. Circolo Math. Palermo, 1955, **4**, pp.48-90.

[59] Clements D.J., Anderson B.D.O. *Well behaved Ito equations with simulations that always misbehave.* IEEE Trans. Autom. Control, 1973, **AC-18**, pp.676-677.

[60] Wright D.J. *The digital simulation of stochastic differential equations.* IEEE Trans. Autom. Control, 1974, **AC-19**, pp.75-76.

[61] Rumelin W. *Numerical treatment of stochastic differential equations.* SIAM, J. Numer. Anal., 1982, **19**, pp.604-613.

[62] Platen E. *Zur zietdiskreten Approximation von Ito prozessen.* Diss. B., I Math., Akad. der Wiss. der DDR, 1984, Berlin.

[63] Gard T.C. *Introduction to Stochastic Differential Equations.* New York: Marcel Dekker, 1988.

[64] Chang C.C. *Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients.* Math. Comput., 1987, **49**, pp.523-542.

[65] Talay D. *Analise Numerique des Equations Differentielles Stochastiques.* These 3eme cycle, 1982, Univ. Provence.

[66] Talay D., Tubaro L. *Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations.* Stoch. Anal. Appl., 1990, **8**, pp.483-509.

[67] Kloeden P.E., Platen E. *Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations.* J. Statist. Phisics, 1992, **66**, pp.283-314.

[68] Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N. *Extrapolation methods for the weak approximation of Ito diffusions.* SIAM, J. Numer. Anal., 1995 (to appear).

[69] Hernandez D.B., Spigler R. *Convergence and Stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise.* BIT, 1993, **33**, pp.654-669.

[70] Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F. *Numerical simulation of nonlinear oscillatory systems under stochastic perturbations.* Proceedings of IC COC'97, 1997(III), vol.2, pp.242-245.

[71] Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F. *Numerical simulation of stochastic control systems.* Proceedings of IC I&C'97, 1997(IV), vol.1, pp. 368-376.

[72] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Численное моделирование стохастических систем управления, описываемых системами дифференциальных уравнений Ито.* 3-я Українська конференцiя з автоматичного керування. Автоматика 96, 1996(III), т.1, с.162-163, Севастополь.

[73] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями.* Пробл. управл. и информат., **2**, 1998(I), с.57-72.

[74] Arnold L. *Stochastic Differential Equations,* New York: Wiley, 1974.

[75] Richardson J.M. *The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Phisics and Engineering.* Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 16, 1964 (R. Bellman, editor) Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 290-302.

[76] McKenna J., Morrison J.A. *Moments and correlation functions of a stochastic differential equation.* J. Math. Phys., **11**, 1970, pp. 2348-2360.

[77] McKenna J., Morrison J.A. *Moments of solutions of a class of stochastic differential equations.* J. Math. Phys., **12**, 1971, pp. 2126-2136.

[78] Horsthemke W., Lofever R. *Noise Induced Transitions*, Springer, 1984.

[79] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stochastic Differential Systems: Analisis and Filtering,* New York: Wiley, 1987.

[80] Mikulevicius R. *On some properties of solutions of stochastic differential equations.* Lietuvos Matem. Rink, **4**, 1983, pp. 18-31.

[81] Strook D.W., Varadhan S.R.S. *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer, 1982.

[82] Shkurko I.O. *Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations.* Numerical Methods for Statistics and Modeling. Collected Scientific Works. Novosibirsk, 1987, pp. 101-109 (In Russian)

[83] Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Изд.5-е. М.:Наука, 1982, 331с.

[84] Бахвалов Н.С. *Численные методы.* М.: Физматгиз, 1973, 631 с.

[85] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Численное моделирование решений стохастических систем линейных стационарных дифференциальных уравнений.* Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., **1**, 1998(II) (http://www.neva.ru/journal)

[86] Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю. *Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.* Деп. в ВИНИТИ, 1986, **732-В86** от 31.01.86, 32с.

[87] Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю. *Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант.* СПб.: Наука, 1996, 366 с.

Обозначения.

$a \in \mathcal{A}$ $\quad a$ является элементом множества $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ $\quad$ объединение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ $\quad$ множество, элементы которого являются элементами множества $\mathcal{A}$ и не являются элементами множества $\mathcal{B}$

$\equiv$ $\quad$ тождественно равно

$\stackrel{def}{=}$ $\quad$ равно по определению

$\Re^n$ $\quad n-$мерное евклидово пространство

$[a, b]$ $\quad$ закрытый интервал $a \leq x \leq b$ в $\Re^1$

(a, b) $\quad$ открытый интервал $a < x < b$ в $\Re^1$

$[a, b)$ $\quad$ полуоткрытый интервал $a \leq x < b$ в $\Re^1$

$(a, b]$ $\quad$ полуоткрытый интервал $a < x \leq b$ в $\Re^1$

$n!$ $\quad$ факториал натурального числа n

$n!!$ $\quad$ двойной факториал натурального числа n

$\mathcal{N}$ $\quad$ множество натуральных чисел

$\mathcal{Z}$ $\quad$ множество целых чисел

$\emptyset$ $\quad$ пустое множество

$[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x

$|\, x\,|$ модуль числа x

$\forall x$ для всех x

∞ бесконечность

$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ индикатор множества $\mathcal{A}$

$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x)$ индикаторная функция множества $\mathcal{A}$

$F:\ G_1 \to G_2$ функция F из G_1 в G_2

$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\right)^{\mathsf{T}}$ вектор $\mathbf{x} \in \Re^n$ с компонентами $\mathbf{x}^{(i)}$; $i = 1, \dots, n$

$|\, \mathbf{x}\,|$ евклидова норма вектора $\mathbf{x}$

$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$ частная производная функции $F:\ \Re^n \to \Re^1$ по переменной $\mathbf{x}^{(i)}$

$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}$ смешанная частная производная функции $F:\ \Re^n \to \Re^1$ по переменным $\mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(i)}$

$A = \left\| A^{(ij)} \right\|_{i,j=1}^{n,m}$ матрица A размера $n \times m$ с элементами $A^{(ij)}$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$

$diag\,\{a_i\}_{i=1}^{n}$ диагональная матрица с диагональю $a_1, \dots, a_n$

$det(A)$ определитель матрицы A

$\{a_n\}_{n=0}^{N}$ последовательность a_n; $n = 1,\ 2, \dots, N$; $N \le \infty$

$\sup\limits_{x\in\mathcal{X}}$ супремум по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\max\limits_{x\in\mathcal{X}}$ максимум по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\min\limits_{x\in\mathcal{X}}$ минимум по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ $x_1 + \ldots + x_n$

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$

$\sum\limits_{x\in\mathcal{X}}$ сумма по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\sum\limits_{i_1,\ldots,i_k}^{n}$ $\sum\limits_{i_1=1}^{n} \ldots \sum\limits_{i_k=1}^{n}$

$A\{\cdot\}$ оператор A

ω элементарное событие

$\mathsf{M}\{\cdot\}$ математическое ожидание

$\mathsf{D}\{\cdot\}$ дисперсия

$\mathsf{P}\{x\}$ вероятность случайного события x

$\mathsf{M}\{x|y\}$ условное математическое ожидание

$l.i.m.$ предел в среднем квадратическом

x_t случайный процесс $x(t,\omega)$

$O(x^p)$ величина того же порядка малости, что и x^p

$\int$ интеграл

$f_t,\ f(t,\omega)$ скалярный винеровский процесс

$\int \ldots dt$ интеграл Римана или стохастический интеграл

$\int \ldots df_t$ стохастический интеграл Ито

$\overset{*}{\int} \ldots df_t$ стохастический интеграл Стратоновича

w_t f_t или t в компактных обозначениях

$\mathbf{f}_t$ векторный винеровский процесс

$\mathbf{f}_t^{(i)}$ $i-$я компонента $\mathbf{f}_t$

$\mathbf{w}_t^{(0)}$ время t в компактных обозначениях

$\mathbf{w}_t^{(i)}$ компонента $\mathbf{f}_t^{(i)}$ векторного винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при $i = 1, \ldots, m$ в компактных обозначениях

$\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ $i-$ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$

$\Delta\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ приращение $\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$

$L\{\cdot\},\ G_0\{\cdot\}$ дифференциальные операторы сноса и диффузии

${}^{(k)}A,\ \left\|A^{(i_1 \ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m_1,\ldots,m_k}$ матрица $k-$го ранга с элементами $A^{(i_1 \ldots i_k)}$; $i_l = 1, \ldots, m_l;\ l = 1, \ldots, k$

$\overset{k}{\cdot}$ свертка матриц

$J_{l_1 \ldots l_{k s,t}}^{(i_1 \ldots i_k)}$ повторный стохастический интеграл Ито

$I_{l_1 \ldots l_{k s,t}}^{(i_1 \ldots i_k)}$ повторный стохастический интеграл Ито

$J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}$ повторный стохастический интеграл Ито

$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\mu_k\ldots\mu_1)s,t}$ повторный стохастический интеграл Стратоновича

$J^{(k)}_{T,t}$ повторный стохастический интеграл Ито

$J^{*(k)}_{T,t}$ повторный стохастический интеграл Стратоновича

$J^{(k)s_l\ldots s_1}_{T,t}$ повторный стохастический интеграл

$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}$ повторный стохастический интеграл Стратоновича

$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}$ повторный стохастический интеграл Стратоновича

$C^{\mathcal{A}}$ множество вида $\left\{{}^{(k)}C_{j_1\ldots j_k}:\ (k, j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{A}\right\}$

$\left(A^{\mathcal{C}} \odot B^{\mathcal{C}}\right)$ операция, определенная на стр.64

$(s \ominus t)^{\mathcal{C}}$ обозначение, введенное на стр.64

$D_{r+1_{s,t}},\ H_{r+1_{s,t}}$ остаточные члены в стохастических разложениях

$(s\hat{\ominus}t)^{\mathcal{C}}$ обозначение, введенное на стр.71

$\sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)}$ сумма по всем возможным перестановкам

$[t,T]^k$ гиперкуб $[t,T]\underbrace{\times\ldots\times}_{k-1}[t,T]$

${}^{(r_l)}H_l \ldots H_1\{\cdot\}$ матричный дифференциальный оператор

$\mathcal{B}^+_{k-1}\{\cdot\},\ \mathcal{A}^*_l\{\cdot\},\ \mathcal{A}^+_l\{\cdot\}$ операторы, определенные на стр.94, 95

$C_{j_k\ldots j_1}$ коэффициент кратного ряда Фурье

$\int_t^T \ldots \int_t^T \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$ кратный стохастический интеграл

$\int \ldots \int_{\Gamma_k} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$ стохастический интеграл по границе гиперкуба $[t, T]^k$

$\mathbf{I}_{\{j_l=j_{l+1}\}}(\ldots)$ обозначение, введенное на стр.99

$C_l^*\{\cdot\},\ C_l^+\{\cdot\}$ операторы, определенные на стр.99,100

$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)},\ \zeta_j^{(i)}$ стандартные гауссовские независимые величины

$\hat{I}_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито

$\hat{J}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{(i_k \ldots i_1)}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито

$\hat{J}_{(\mu_k \ldots \mu_1)s,t}^{*(i_k \ldots i_1)}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича

$I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_k \ldots i_1)q}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича

$J_{T,t}^{*(k)q}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича