

Министерство образования и науки Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.Д.МАЗИН

ДАТЧИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
2011

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее второе издание практически повторяет первое. Отличие заключается в расширенном п. 1.9, посвящённом использованию метода Монте-Карло. За время с момента первого издания возможности вычислительной техники увеличились настолько, что практически исчезли ограничения, накладываемые ранее на мощность генераторов случайных чисел и требуемую скорость обработки информации. Благодаря этому метод Монте-Карло приобрёл черты метода, пригодного для использования в широкой повседневной практике.

ВВЕДЕНИЕ

Справедливо сказать, что настоящее пособие является ответом на неперенный студенческий вопрос, задаваемый во время курсового и дипломного проектирования: «Какие погрешности считать?». Отчасти он возникает от недостаточного знания совокупности причин, обуславливающих появление погрешностей, отчасти ввиду отсутствия формализованных методик метрологического анализа, однозначно устанавливающих перечень подлежащих учету погрешностей. В лучшем случае, когда есть достаточное знание и ясна методика, данный вопрос представляет попытку с помощью преподавателя заранее выделить из всего многообразия составляющих погрешности значимые и отсеять несущественные.

Как бы то ни было, проблематика, связанная с возникновением и оценкой погрешности датчика, сложна и многогранна. Датчики используют самые различные физические принципы, они часто работают в сложных условиях эксплуатации. Физика происходящих в них процессов с учетом различных побочных эффектов и взаимодействия с окружающей средой сложна, в отличие от электронных узлов, составляемых из ограниченного набора стандартных элементов, они плохо структурируются, практически все их части находятся во взаимодействии. К этому следует добавить, что все конструктивные параметры (КП) датчиков – характеристики материалов и размеры деталей, значения величин, характеризующих элементы встроенных электрических цепей – обладают изначальным технологическим разбросом.

В этих условиях проведение эффективного анализа возможно лишь при помощи математических моделей, обладающих достаточной представительностью, чтобы охватывать весь диапазон приложений, т.е. любые датчики, и полностью, чтобы отображать их адекватно. В одной из методик, предлагаемых в настоящем пособии, используется предложенная автором векторно-аналитическая модель.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 230400 «Информационные системы и технологии». Однако, по мнению автора, оно может быть также полезным специалистам, занимающимся проектированием столь важных и необходимых в самых различных областях средств измерений, какими являются датчики физических величин.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДАТЧИКА

1.1. Необходимые сведения из геометрии

Эти сведения даются ввиду того, что соответствующий материал почти не преподается в курсе высшей математики. Он касается свойств евклидовых и римановых пространств. Нижеприводимые определения не претендуют на математическую строгость. Автор стремился максимально использовать имеющиеся у студентов представления и по возможности ограничить число новых понятий, оставляя «за кадром» те из них, незнание которых не влияет существенно на результаты решения данных практических задач.

Мы будем называть совокупность всех векторов, которые могут быть заданы в некоторой координатной системе, **векторным пространством (ВП)**. Единичные векторы, совпадающие по направлению с координатными осями, образуют **базис** и называются **базисными векторами**. Если эти векторы взаимно ортогональны, базис носит название **ортонормированного**.

Способ измерения расстояний между точками такого пространства называется **метрикой**. Она может быть различной в одном и том же пространстве.

Евклидовой называется метрика, определяемая **метрическим тензором (МТ) G** , представляющим тензор коэффициентов квадратичной формы

$$l^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i x_j,$$

где l – длина (норма) вектора; n – мерность пространства, x_i, x_j – координаты вектора. В последнем выражении знак суммы можно опустить, т.к. встречающиеся по два раза в каждом слагаемом индексы i и j указывают на наличие суммирования по этим индексам:

$$l^2 = g_{ij} x_i x_j. \quad (1)$$

Координаты МТ g_{ij} имеют смысл косинусов углов между координатными осями. Очевидно, при ортонормированном базисе все g_{ij} при $i = j$ равны единице, а прочие – 0. Следовательно, в этом случае

$$l^2 = \sum_1^n x_i^2.$$

Метрика данного вида является наиболее привычной и отличается от обычного способа измерения расстояний в нормальном трехмерном пространстве разве что наличием в общем случае большего числа координат.

Существует и иная разновидность евклидовой метрики, выделяющаяся тем, что часть координат МТ вида g_{ii} (с одинаковыми индексами) имеют значение -1 . Эта разновидность получила название **псевдоевклидовой метрики**. Соответственно случай, когда все g_{ii} равны $+1$, называется **собственно евклидовой метрикой**. Поскольку каждая координата тензора g_{ii} характеризует i -тую координату пространства, псевдоевклидову метрику имеет смысл вводить, если все пространственные координаты можно разделить на две части, чётко различающиеся по физическому смыслу.

Соответствие между двумя любыми векторами \mathbf{X} и \mathbf{Y} устанавливается тензором \mathbf{A} , носящим название **аффинор**, т.е. имеет место векторное равенство

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Пространство может обладать кривизной, т.е. его координаты могут быть криволинейными. В таком пространстве нет векторов в обычном понимании. Однако, если выделить некоторую бесконечно малую область пространства Q (рис. 1), соответствующие ей участки координат dx_i можно в первом приближении считать прямолинейными. В таком подпространстве существуют бесконечно малые векторы, причем (1) выглядит как

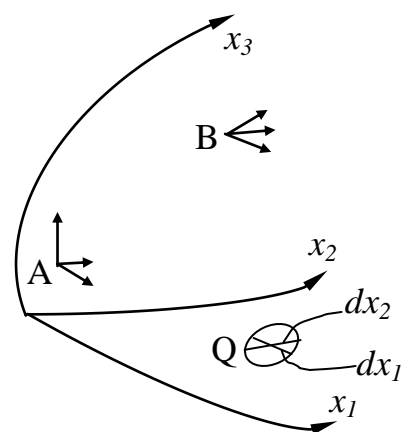


Рис. 1

$$dl^2 = g_{ij}dx_i dx_j. \quad (2)$$

В кривом пространстве базис меняется от точки к точке, при этом базисные векторы откладываются каждый раз от нового начала. Таким образом, каждой точке соответствует свой **локальный базис** (точки A и B на рис. 1). В соответствии с этим МТ также меняется от точки к точке. Пространство с переменным МТ носит название **риманова пространства**, в отличие от **евклидова пространства**, МТ которого постоянен.

Наконец, как евклидово, так и риманово пространства могут быть **комплексными**. В таком пространстве векторы, а также оба тензора – метрический и аффинор – имеют в общем случае комплексные координаты.

1.2. Геометрическое представление физических величин

Ни одна величина, характеризующая некоторый физический объект, строго говоря, не может быть представлена единственным значением. Ему всегда сопутствует некоторый интервал возможного изменения, происходящего либо при переходе от одного экземпляра данного типа к другому, либо вследствие изменения внешних условий, либо из-за погрешности определения значения. Фиксированное значение физической величины есть абстракция.

Пусть значение некоторой физической величины x с определенной вероятностью P_δ находится в доверительном интервале x_a, x_b . В логарифмическом масштабе этим границам соответствуют $a_a = \ln x_a$ и $a_b = \ln x_b$. Обозначим логарифм математического ожидания значений x через a_0 . Очевидно, x как случайная величина характеризуется двумя основными независимыми параметрами – показателями положения и рассеяния. Первый из них – a_0 . Второй выражается разностью $a_b - a_a$, а точнее полуразностью

$$a = \frac{a_b - a_a}{2},$$

имеющей смысл отклонения в одну сторону.

Параметры a_0 и a можно представить как две координаты двумерного пространства, где любая точка A выражает величину x как по положению, так и по рассеянию. Эти координаты в общем случае криволинейны, а пространство представляет кривую поверхность. Выделим на этой поверхности некоторую бесконечно малую область Q , характеризуемую участками координат da_0 и

$$da = \frac{1}{2}(da_b - da_a). \quad (3)$$

В первом приближении ее можно считать плоскостью, на которой задана ортогональная координатная система (в силу независимости da_0 и da (рис. 2)).

Поскольку a_0 – логарифмическая координата, da_0 означает бесконечно малое относительное приращение x . В самом деле,

$$da_0 = d(\ln x_0) = \frac{dx_0}{x_0}, \quad (4)$$

где $x_0 = M\{x\}$. Конечный участок пути вдоль координатной линии (КЛ) a_0

$$\Delta a_0 = a_{02} - a_{01} = \ln x_{02} - \ln x_{01} = \ln \frac{x_{02}}{x_{01}} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x_0}{x_{01}} \right),$$

где $\Delta x_0 = x_{02} - x_{01}$. При $\frac{\Delta x_0}{x_{01}} \ll 1$, что имеет место, например, если Δx_0 вызвано погрешностью, получается

$$\Delta a_0 \cong \frac{\Delta x_0}{x_{01}} = \gamma_c, \quad (5)$$

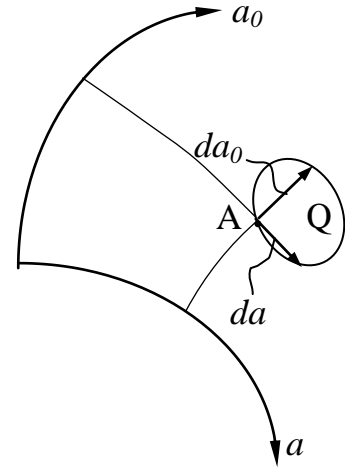


Рис. 2

что выражает **систематическую относительную погрешность**.

В свою очередь

$$a = \frac{\ln x_b - \ln x_a}{2} = \frac{\ln x_b - \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_a}{2} = \frac{\ln \frac{x_b}{x_0} - \ln \frac{x_a}{x_0}}{2}. \quad (6)$$

Обозначая $x_b - x_0 = \Delta x_b$ и $-x_0 + x_a = \Delta x_a$ и полагая Δx_b и Δx_a по абсолютной величине малыми по сравнению с x_0 , получаем подобно (5)

$$a \cong \frac{\frac{\Delta x_b}{x_0} - \frac{\Delta x_a}{x_0}}{2} = \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{2} = \gamma_\delta, \quad (7)$$

где γ_+ и γ_- – соответственно положительная и отрицательная случайные погрешности, $(\gamma_+ - \gamma_-)$ – доверительный интервал, γ_δ – доверительное значение погрешности.

Таким образом, как γ_c , так и γ_δ могут быть определены как соответствующие отрезки координатных линий a_0 и a .

Зададим координату a параметрически как функцию доверительной вероятности $P_\delta : a = f(P_\delta)$. Для этого, исходя из (6), достаточно выразить в функции P_δ квантили x_a и x_b . x_a представляет корень уравнения

$$P(x) = P_a, \quad (8)$$

где $P(x)$ – интегральная функция распределения вероятностей x . Как известно, доверительный интервал представляет разность между $(1 - P_a)$ - процентной и P_a - процентной квантилями. В таком случае

$$P_{\partial} = 1 - 2P_a, \quad (9)$$

и

$$P_a = \frac{1 - P_{\partial}}{2}. \quad (10)$$

С учетом этого уравнение (8) принимает вид

$$1 - 2P(x_a) = P_{\partial}. \quad (11)$$

x_b является корнем уравнения $P(x) = P_b$, а

$$P_b = P_a + P_{\partial} = \frac{1 - P_{\partial}}{2} + P_{\partial} = \frac{1 + P_{\partial}}{2}. \quad (12)$$

Отсюда уравнением, связывающим x_b с P_{∂} , будет

$$2P(x_b) - 1 = P_{\partial}. \quad (13)$$

Если задана плотность распределения вероятностей $p(x)$, то в уравнения (11) и (13) следует подставить

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx.$$

В результате x_a и x_b определяются соответственно из уравнений

$$2 \int_{-\infty}^{x_a} p(x) dx = 1 - P_{\partial}$$

и

$$2 \int_{-\infty}^{x_b} p(x) dx = 1 + P_{\partial}.$$

Таким образом, можно заключить следующее: любая физическая величина, характеризующая некоторую физическую систему, может быть представлена точкой некоторой поверхности. Координатами, определяющими положение точки, служат логарифмическое матожидание a_0 и половина логарифмического доверительного интервала a . Следовательно, любую физическую величину можно считать вектором (в общем случае криволинейным). При наличии систематической погрешности в значении величины она выражается соответствующим отрезком КЛ a_0 .

1.3. Датчик как векторное пространство

Из вышесказанного ясно, что датчик, описываемый множеством параметров, может быть представлен в виде ВП. Однако он представляет интерес не сам по себе, а с учетом взаимодействия с объектом измерения и окружающей средой (ОС) (рис. 3). На рис. 3 $x_1 \div x_k$ – измеряемые величины, которых в общем случае может быть не одна (комбинированные датчики); $x_{k+1} \div x_l$ – неинформативные параметры объекта; $x_{l+1} \div x_m$ – конструктивные параметры датчика; $x_{m+1} \div x_n$ – влияющие факторы ОС. Все взаимодействия являются двунаправленными, т.е. датчик, с одной стороны, воспринимает воздействие измеряемой величины, неинформативных параметров объекта, факторов ОС, а с другой – сам оказывает влияние на объект и ОС. Последнее чаще всего можно считать пренебрежимо малым, но не всегда. Так, неучет влияния на ОС датчиков, являющихся источниками радиоактивного излучения, может дорого обойтись персоналу, работающему в непосредственной близости. Таким образом, датчик

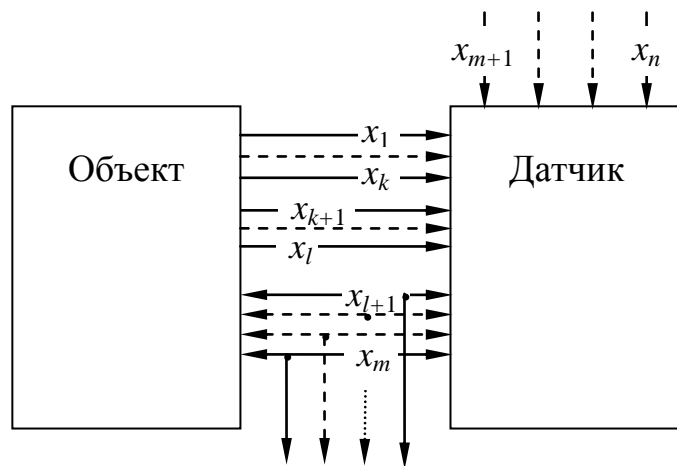


Рис. 3

оказывается практически неотделим от объекта и ОС и потому не может рассматриваться изолированно. Следовательно, математическому моделированию в виде ВП подлежит фактически система «объект измерения – датчик – ОС».

В дальнейшем мы будем иллюстрировать теоретические положения примерами на базе гидроакустического векторного приемника (трехкомпонентного гидрофона ускорения), принцип действия и конструкция которого дают возможность хорошо продемонстрировать предлагаемые методики.

1.3.1. Пример – гидроакустический векторный приемник

Главной частью данного приемника является сейсмическая система 1 (рис. 4). Нормально граням кубического инерционного элемента 2 жестко прикреплены плоские биморфные пьезоэлементы 3 (см. также рис. 5), электрически соединенные попарно параллельно и через наконечники 4 жестко связанные свободными концами с серединами струн 5, которые попарно закреплены накладками 6 в раме 7 по трем взаимно перпендикулярным направлениям относи-

тельно плоскостей пьезоэлементов.

При воздействии на корпус 8 датчика ускорений каждая пара пьезоэлементов, расположенных на противоположащих гранях инерционного элемента, чувствительна к ускорению, направленному перпендикулярно плоскости этой пары. Остальные пьезоэлементы, плоскости которых параллельны вектору ускорения, испытывают при этом меньшие напряжения, поскольку концы элементов, укрепленные на струнах, могут перемещаться в направлении ускорения. Так как продольная жесткость струн существенно больше, чем изгибная жесткость чувствительных элементов, те из них, плоскости которых ориентированы перпендикулярно к направлению ускорения, ведут себя почти так же, как если бы их концы находились на жестких опорах. Остальные элементы, которые вследствие меньшей поперечной жесткости струн испытывают меньшие напряжения, обеспечивают малую поперечную чувствительность.

В корпусе гидрофона расположены предварительные усилители заряда 9.

Выходное напряжение компоненты х

$$\begin{aligned}\dot{U}_x &= k_{on} \dot{S}_m \dot{k}_y (k_{qxx} \dot{A}_x + k_{qxy} \dot{A}_y + k_{qxz} \dot{A}_z) = \dot{K} (k_{qxx} \dot{A}_x + k_{qxy} \dot{A}_y + k_{qxz} \dot{A}_z) = \\ &= \dot{K}_x \dot{A}_x + \dot{U}_{x0},\end{aligned}\quad (14)$$

где k_{on} – коэффициент, учитывающий влияние датчика на объект, \dot{S}_m – коэффициент, учитывающий механическую инерционность, \dot{k}_y – коэффициент усиления усилителя заряда, k_{qxx} , k_{qxy} , k_{qxz} – основной и два паразитных коэффициента преобразования ускорения в заряд, \dot{A}_x , \dot{A}_y , \dot{A}_z – составляющие вектора ускорения.

Из /1/ следует

$$k_{on} = \frac{3\rho_0}{2\bar{\rho} + \rho_0},$$

где ρ_0 – плотность среды, $\bar{\rho}$ – средняя плотность гидрофона. Как известно,

$$\dot{S}_m = \frac{-\omega_0^2}{-\omega^2 + j2\beta\omega\omega_0 + \omega_0^2},$$

где ω_0 – круговая собственная частота, ω – круговая частота ускорения,

$$\beta = \frac{P}{2\sqrt{C_{э\kappa\beta}} m_{э\kappa\beta}}, C_{э\kappa\beta} \text{ – суммарная жесткость сейсмической системы, } m_{э\kappa\beta} \text{ – мас-}$$

са, нагружающая пьезоэлементы. Из /2/ следует

$$\dot{k}_y \cong -\frac{1}{C_{oc}} \frac{j\omega\tau_{oc}}{1+j\omega\tau_{oc}},$$

где C_{oc} – ёмкость обратной связи, τ_{oc} – постоянная времени цепи обратной связи.

Определим основной и паразитные коэффициенты преобразования ускорения в заряд. Для биморфного пьезоэлемента в виде балки, свободно опертой по краям и нагруженной в центре силой $F/3$

$$\frac{U_{\text{вых}}}{F} = \frac{3}{8} g_{31} \frac{l}{bh}, \quad (15)$$

где $U_{\text{вых}}$ – напряжение на электродах пьезоэлемента, g_{31} – коэффициент, характеризующий чувствительность пьезоэлемента по напряжению, l , b и h – соответственно длина, ширина и толщина пьезоэлемента. Рассматриваемая конструкция, очевидно, ведет себя практически так же, как эта балка, разрезанная посередине, куда вставлен груз. При этом

$$l = 2l_{\bar{o}},$$

где $l_{\bar{o}}$ – длина реального биморфа. Сила инерции, деформирующая пьезоэлементы, распределяется между двумя биморфами и восемью струнами, поперечные жёсткости которых берут на себя часть нагрузки. Таким образом, на каждый пьезоэлемент приходится ее часть, определяемая отношением

$$\frac{C_{\bar{o}}}{2C_{\bar{o}} + 8C_{non}}, \text{ где } C_{\bar{o}} - \text{изгибная жесткость биморфа, } C_{non} - \text{поперечная жест-}$$

кость струны. С учетом этого, исходя из (15), получаем

$$k_{qxx} = \frac{3\bar{d}_{31}m_{\text{экс}}C_{\bar{o}}l_{\bar{o}}^2}{2(C_{\bar{o}} + 4C_{non})h^2} = k_1 \frac{C_{\bar{o}}}{2(C_{\bar{o}} + 4C_{non})},$$

где \bar{d}_{31} – средний пьезомодуль пьезопластин, составляющих биморфы.

Поперечная чувствительность возникает вследствие неправильной ориентации пьезоэлементов и технологического разброса значений пьезомодуля отдельных пьезопластин, составляющих биморфы. Так, коэффициент k_{qxy} оказывается не равным нулю, если груз с пьезоэлементами при сборке разворачивается в плоскости xy на некоторый угол α_1 (рис. 5). Тогда на конец пьезоэлемента $X1$, активного в направлении x , будет действовать равнодействующая сил реакции струн F_y , направленная противоположно составляющей F_{iy} силы инерции (рис. 6). Из составляющих F_y , F_{y1} и F_{y2} вторая вызывает в пьезоэлементе деформацию сдвига по длине, чувствительность к которой отсутствует. Состав-

ляющая же F_{y1} деформирует пьезоэлемент в рабочем направлении, вызывая паразитный заряд

$$q_{xy} = 3\bar{d}_{31} \frac{l_6^2}{h^2} F_{y1}.$$

Очевидно, $F_{y1} = F_y \sin \alpha_1$, а F_y , в свою очередь, уравнивает лишь часть силы F_{uy} , поскольку последняя приложена в основном к пьезоэлементам, активным в направлении y :

$$F_y = F_{uy} \frac{2C_{non}}{C_{эКВ}} = 2F_{uy} k_C.$$

Поскольку $F_{uy} = m_{эКВ} a_y$, получается

$$k_{qxy} = 6m_{эКВ} \frac{C_{non}}{C_{эКВ}} \bar{d}_{31} \frac{l_6^2}{h^2} \sin \alpha_1.$$

Обозначая $2k_C = k_2$ и $k_1 k_2 = k$, находим

$$k_{qxy} = k \cdot \sin \alpha_1. \quad (16)$$

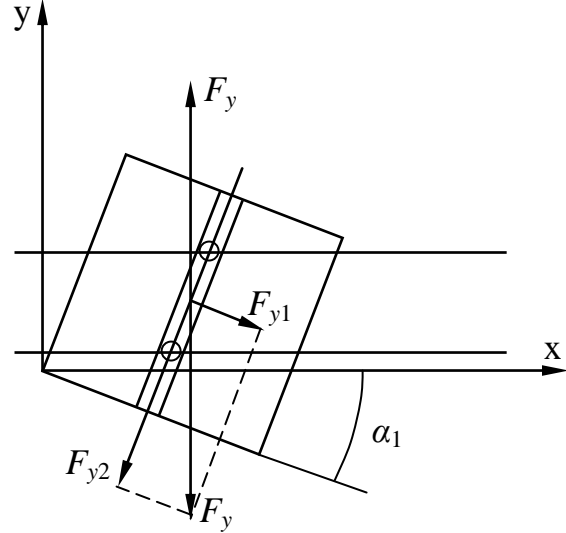


Рис. 6

Чувствительность компоненты x к ускорению a_z вызывается как поворотом груза с пьезоэлементами в плоскости xz , так и разбросом значений пьезомодуля отдельных пластин (рис. 7). Действие первой причины аналогично ее действию в предыдущем случае, ввиду чего соответствующая часть паразитного заряда q_{xz}

$$q'_{xz} = 6m_{эКВ} \times \frac{C_{non}}{C_{эКВ}} \bar{d}_{31} \frac{l_6^2}{h^2} \sin \alpha_2 \cdot a_z. \quad (17)$$

Если пьезомодули отдельных пластин не равны, то сила F_{z2} приводит к появлению разностного заряда

$$\Delta q = q_1 - q_2 = F_{z2}(d_1 - d_2),$$

где d_1 и d_2 – значения пьезомодуля d_{31} для двух пластин биморфа. Поскольку сила F_{z2} вызывает у обоих биморфов противоположные по знаку деформации, суммарный заряд от её воздействия

$$q''_{xz} = q_1 - q_2 - q_3 + q_4,$$

причем имеется в виду, что на одной паре электрически соединенных между собой пластин возникают заряды q_1 и q_3 , а на другой – q_2 и q_4 . Таким образом,

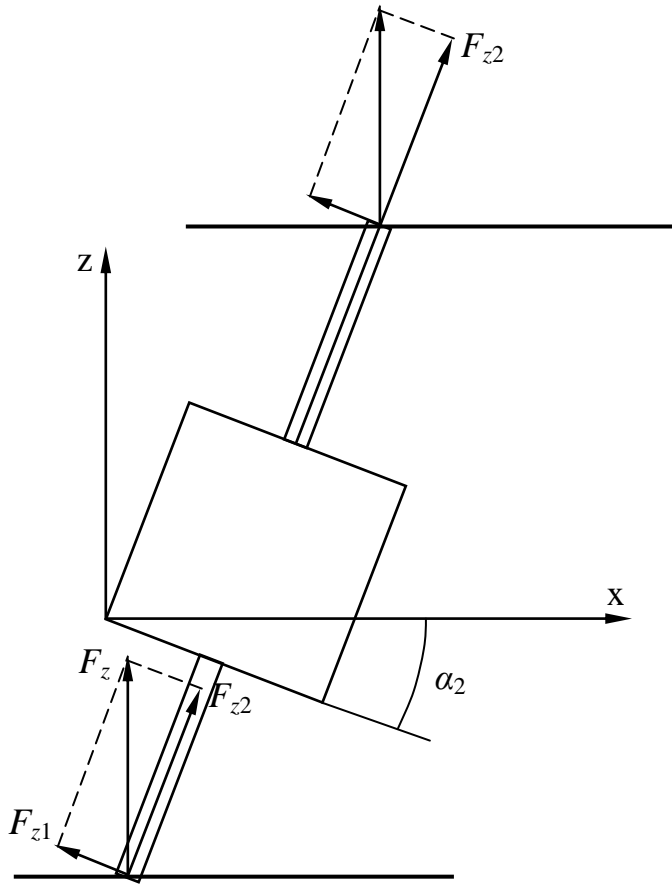


Рис. 7

$$q''_{xz} = F_{z2}(d_1 - d_2 - d_3 + d_4) = F_{z2}\Delta_d \quad (18)$$

Очевидно,

$$F_{z2} \cong F_z = F_{uz} \frac{2C_{non}}{C_{эКВ}}, F_{uz} = m_{эКВ} a_z.$$

Величина Δ_d имеет случайный характер. Подразумевая под Δ_d доверительное значение, имеем

$$\Delta_d = k_{\Delta d} \sigma_{\Delta d} = k_{\Delta d} \sqrt{D_{\Delta d}},$$

где $k_{\Delta d}$ – квантильный множитель, $\sigma_{\Delta d}$ – среднеквадратическое значение, $D_{\Delta d}$ – дисперсия. Поскольку $D_{\Delta d} = 4D_d$, где D_d – дисперсия пьезомодуля, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_d &= k_{\Delta d} \sqrt{4D_d} = 2k_{\Delta d} \sigma_d = \\ &= 2 \frac{k_{\Delta d}}{k_d} \Delta d, \end{aligned}$$

где σ_d – среднеквадратическое отклонение пьезомодуля, k_d – его квантильный множитель, Δd – доверительное значение. Окончательно

$$\Delta_d = 2 \frac{k_{\Delta d}}{k_d} (d_{31} - d_0),$$

где d_{31} и d_0 – соответственно доверительное значение и матожидание пьезомодуля отдельной пьезопластины. С учетом этого мы можем (18) записать в виде

$$q''_{xz} \cong 4m_{эКВ} \frac{C_{non}}{C_{эКВ}} \frac{k_{\Delta d}}{k_d} (d_{31} - d_0) a_z. \quad (19)$$

Теперь объединим (17) и (19):

$$q_{xz} = q'_{xz} + q''_{xz} \cong 2m_{эКВ} \frac{C_{non}}{C_{эКВ}} \left(2 \frac{k_{\Delta d}}{k_d} (d_{31} - d_0) + 3\overline{d_{31}} \frac{l_0^2}{h^2} \sin \alpha_2 \right) a_z,$$

откуда

$$k_{qxz} \cong 2m_{\text{эКВ}} \frac{C_{\text{non}}}{C_{\text{эКВ}}} \left(2 \frac{k_{\Delta d}}{k_d} (d_{31} - d_0) + 3 \overline{d_{31}} \frac{l_{\bar{\delta}}^2}{h^2} \sin \alpha_2 \right) =$$

$$= 4m_{\text{эКВ}} k_C \frac{k_{\Delta d}}{k_d} (d_{31} - d_0) + k \cdot \sin \alpha_2.$$

Раскроем значения конструктивных параметров, входящих в вышеприведенные формулы. Собственная частота $\omega_0 \cong \sqrt{C_{\text{эКВ}} / m_{\text{эКВ}}}$, где значение $C_{\text{эКВ}}$ поясняется рис. 8, на котором показана схема упругого подвеса груза 2. Здесь C_{np} – продольная жесткость струны. Отсюда

$$C_{\text{эКВ}} = C' + C'' = \frac{2C_{\bar{\delta}} \cdot 4C_{\text{np}}}{2C_{\bar{\delta}} + 4C_{\text{np}}} + 8C_{\text{non}} = 4 \left(\frac{C_{\bar{\delta}} C_{\text{np}}}{C_{\bar{\delta}} + 2C_{\text{np}}} + 2C_{\text{non}} \right).$$

Жесткость

$$C_{\bar{\delta}} = 3 \frac{E_{\bar{\delta}} J_{\bar{\delta}}}{l_{\bar{\delta}}^3},$$

где $E_{\bar{\delta}}$ – модуль упругости, $J_{\bar{\delta}} = bh^3/12$ – момент инерции. Жёсткость

$$C_{\text{np}} = 2E_c \frac{S}{l_c},$$

где E_c – модуль упругости, $S = \pi R^2$, R и l_c – радиус и длина струны. Здесь учитывается то, что биморфы крепятся к струнам посередине. Поперечная жесткость

$$C_{\text{non}} = 192 E_c \frac{J_c}{l_c^3},$$

где $J_c = 0,5\pi R^4$.

$m_{\text{эКВ}}$ состоит из массы груза 2, массы неактивных в данном направлении пьезоэлементов, части массы активных пьезоэлементов и массы 4-х наконечников 4, крепящих неактивные пьезоэлементы. Отсюда

$$m_{\text{эКВ}} = m_z + 4,5m_{\bar{\delta}} + 4m_n,$$

где m_z – масса груза, $m_{\bar{\delta}}$ – масса биморфа, m_n – масса наконечника. Очевидно, $m_{\bar{\delta}} = \rho_{\bar{\delta}} b h l_{\bar{\delta}}$, где $\rho_{\bar{\delta}}$ – плотность биморфа.

Постоянная времени $\tau_{oc} = R_{oc} C_{oc}$, где R_{oc} – сопротивление резистора, включенного параллельно C_{oc} .

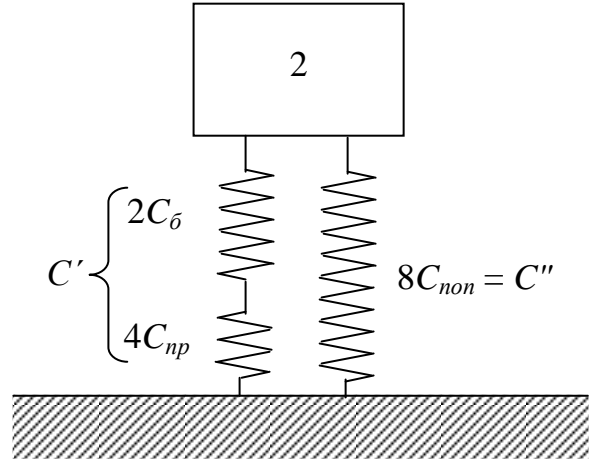


Рис. 8

1.3.2. Координатная система

Каким образом должна выбираться координатная система в ВП, моделирующем датчик? Ответ на этот вопрос фактически содержит рис. 3. Поскольку свойства и поведение датчика полностью описываются его конструктивными параметрами (КП) и взаимодействием с объектом и ОС, в качестве координат должны выбираться измеряемые величины, неинформативные параметры объекта, КП датчика, влияющие факторы (ВФ) окружающей среды. Поскольку каждая из этих величин согласно п. 1.2 представляет двумерный вектор, общее число координат (мерность пространства) удваивается, т.е. равняется $2n$. Правда, в подавляющем большинстве случаев, когда датчик измеряет лишь одну величину, последняя должна восприниматься детерминированной, т.е. точно определенной в каждой точке диапазона, ввиду чего мерность пространства получается $2n - 1$. Если датчик воспринимает более чем одну величину, эти величины должны восприниматься случайными и представляться двумерными векторами, поскольку для каждой из них остальные играют роль неинформативных параметров объекта.

Важным является вопрос, какие конструктивные параметры принимать в качестве координат. Так как речь идёт о метрологическом анализе, прежде всего, очевидно, те, которые определяют функцию преобразования. Так, у пьезоэлектрического векторного приёмника, рассмотренного в предыдущем разделе, чувствительность \dot{K}_x , определяемая конструкцией, является конструктивным параметром. В свою очередь, $\dot{K}_x = \dot{K}k_{qxx}$, и \dot{K} , k_{qxx} , k_{on} , \dot{S}_m , \dot{K}_y суть тоже КП. Последовательно раскрывая значение конструктивных параметров, мы приходим к таким, которые далее не раскрываются, т.е. не являются функциями других параметров и потому могут быть названы «простыми». В нашем примере к ним относятся: $\rho_{\bar{o}}$, $E_{\bar{o}}$, d_{31} , E_c , b , h , $l_{\bar{o}}$, l_c , R_c , α_1 , α_2 , C_{oc} , R_{oc} . Их можно разбить на 4 группы: характеристики материалов ($\rho_{\bar{o}}$, $E_{\bar{o}}$, d_{31} , E_c), размеры деталей (b , h , $l_{\bar{o}}$, l_c , R_c), показатели качества сборки (α_1 , α_2), паспортные параметры электронных компонентов (C_{oc} , R_{oc}).

Выбирая в качестве координат параметры «высокого уровня», например, \dot{K}_x , мы уменьшаем мерность моделирующего пространства. Однако ориентироваться в таком пространстве оказывается сложно, т.к. неизвестна его геометрия (метрический тензор). Последняя, как будет показано ниже, определяется взаимной корреляцией величин-координат, и, если они являются функциями мно-

жества других величин, установить степень такой корреляции порою оказывается практически невозможным.

Если координатами служат простые параметры, мерность пространства существенно увеличивается, однако проясняются и корреляционные связи: как правило, простые параметры оказываются взаимно некоррелированными. Между ними часто отсутствуют и детерминированные взаимосвязи, определяемые другим тензором – аффинором (см. п. 1.3.6). при этом матрица последнего становится максимально простой – диагональной.

Вопрос выбора координат среди КП должен решаться в значительной степени неформально, исходя из практического удобства. Среди них могут оказаться как простые, так и сложные параметры, если при этом не возникают существенные трудности, связанные с определением их взаимосвязей.

Устанавливая в качестве координат влияющие факторы ОС, не следует забывать о времени, обладающем всеми свойствами физической величины. «Всё течёт, всё изменяется», и хорошо известно, что все характеристики датчиков со временем «уходят» (старение). Кроме того, влияние времени на процессы в датчике проявляется через динамические свойства последнего.

Вернёмся к нашему примеру. Удобной координатной системой в данном случае могла бы быть следующая:

- измеряемые величины: A_x, A_y, A_z ;
- неинформативные параметры объекта: A_y, A_z, A_x, f (частота), ρ_0, t . Каждая из составляющих вектора ускорения является, с одной стороны, измеряемой, а с другой – неинформативным параметром объекта для двух других составляющих, поскольку она влияет на результат их измерения вследствие наличия поперечной чувствительности;
- конструктивные параметры: $\rho_{\bar{o}}, E_{\bar{o}}, \overline{d_{31}}, d_{31}, E_c, b, h, l_{\bar{o}}, l_c, R_c, \beta, m_z, m_n, \bar{\rho}, \alpha_1, \alpha_2, C_{oc}, R_{oc}$. Здесь также необходимы некоторые пояснения:
 - 1) $\overline{d_{31}}$ и d_{31} отнесены к двум разным координатам, т.к. они имеют разный случайный разброс значений и, очевидно, некоррелированы между собой;
 - 2) сложными параметрами являются $\beta, m_z, m_n, \bar{\rho}$, выбранные по той причине, что все они могут контролироваться непосредственно в процессе изготовления и испытания датчика, причем успешнее, нежели при определении через простые параметры – их аргументы. Так, β успешно определяется по результатам динамических испытаний (см. п. 1.3.7), в то время

как коэффициент успокоения P лишь в редких случаях поддаётся относительно простому расчёту. m_z , m_n , $\bar{\rho}$ находятся путём взвешивания.

- влияющие факторы окружающей среды: ими по смыслу являются A_y , A_z , A_x , ρ_0 , t . но они уже названы в числе неинформативных параметров объекта. Дело в том, что объект (водное пространство) и окружающая среда в данном случае совпадают, что характерно для измерений характеристик полей. К какой группе координат отнести вышеупомянутые величины – «дело вкуса».

1.3.3. Входной вектор

Координатами входного вектора (ВВ) мы будем называть «самопроизвольные» (вызванные неизвестными причинами) изменения всех тех величин, которые вызывают изменение выходной величины. Таким образом, если измеряемых величин не одна, то каждой из них соответствует свой ВВ. Мерность ВВ зависит от того, предполагается ли индивидуальная калибровка датчика. Если нет, и датчику приписывается типовая градуировочная характеристика, полученная как средняя на множестве датчиков данного типа, то технологический разброс КП отдельных экземпляров обусловит погрешность. В этом случае колебания значений КП в пределах допусков должны входить в состав ВВ, и мерность последнего будет равна $2n - 1$. Если каждый экземпляр датчика калибруется индивидуально, то при этом учитываются все отклонения КП от номинала, и, следовательно, последние должны быть исключены из ВВ.

В римановом пространстве ВВ образуется бесконечно малыми отрезками координат. Для измеряемой величины x имеем

$$\begin{bmatrix} da_{10} \\ \vdots \\ da_{n0} \\ da_2 \\ \vdots \\ da_n \end{bmatrix}.$$

При этом согласно (4)

$$da_{i0} = \frac{dx_{i0}}{x_{i0}}, \quad (20)$$

а согласно (3)

$$da_i = \frac{1}{2}(da_{ib} - da_{ia}).$$

Разделим и умножим правую часть последнего равенства на dP_δ :

$$da_i = \frac{1}{2} \left(\frac{da_{ib}}{dP_\delta} - \frac{da_{ia}}{dP_\delta} \right) dP_\delta. \quad (21)$$

Из (9) и (12) следует, что

$$dP_\delta = -2dP_a = 2dP_b, \quad (22)$$

откуда после подстановки в (21) получаем:

$$da_i = \frac{1}{4} \left(\frac{da_{ia}}{dP_a} + \frac{da_{ib}}{dP_b} \right).$$

Здесь $\frac{da_{ia}}{dP_a}$ и $\frac{da_{ib}}{dP_b}$ – производные функции $\ln x_i = f(P)$, являющейся обратной интегральной функцией распределения $\ln x_i$ в точках P_a и P_b соответственно. Они представляют величины, обратные соответствующим плотностям распределения p_{ia} и p_{ib} .

Как известно, если $z = f(x)$, то

$$p_z(Z) = p_x(x(Z)) \left| \frac{dx}{dz} \right|_{z=Z}. \quad (23)$$

Полагая $z = \ln x_i$, находим

$$p(z) = p(x_i) |x_i|. \quad (24)$$

В таком случае

$$da_i = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p(x_{ia}) |x_{ia}|} + \frac{1}{p(x_{ib}) |x_{ib}|} \right) dP_\delta = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{|x_{ia}|} \frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{1}{|x_{ib}|} \frac{dx_{ib}}{dP_b} \right) dP_\delta, \quad (25)$$

где $\frac{dx_{ia}}{dP_a}$ и $\frac{dx_{ib}}{dP_b}$ – производные функции $x_i = \psi(P)$, являющейся обратной интегральной функцией распределения x_i , в точках P_a и P_b .

В частном случае, если $x_{ia} \cong x_{ib} \cong x_i$ (разброс значений в пределах технологического допуска),

$$da_i \cong \frac{1}{4|x_i|} \left(\frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{dx_{ib}}{dP_b} \right) dP_\delta. \quad (26)$$

Если при этом x_i описывается симметричным законом распределения (ЗР), то $\frac{dx_{ia}}{dP_a} = \frac{dx_{ib}}{dP_b}$. В самом деле, площадь под кривой плотности распределения справа от x_{ib} ((1- P_a)-процентная квантиль) равна P_a – площади слева от x_{ia} (P_a -процентная квантиль) рис. 9. Но вследствие симметрии кривой фигуры с этими

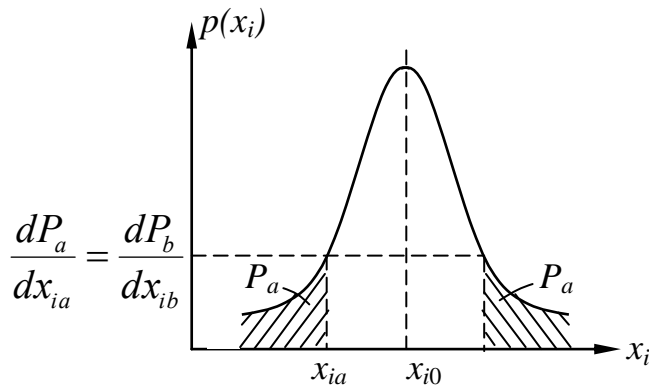


Рис. 9

площадями одинаковы. Следовательно, одинаковы и ординаты обеих квантилей (плотности распределения), и их обратные величины. Таким образом, в данном случае

$$\begin{aligned} da_i &\cong \frac{1}{2|x_i|} \frac{dx_{ia}}{dP_a} dP_\delta = \\ &= \frac{1}{2|x_i|} \frac{dx_{ib}}{dP_b} dP_\delta \end{aligned} \quad (27)$$

Как видно, для задания ВВ требуются законы распределения параметров и факторов. Их задание является наиболее трудным этапом метрологического анализа. Что касается неинформативных параметров входного сигнала и внешних влияющих факторов, то их ЗР должны указываться в техническом задании. Если такие сведения отсутствуют, то разработчик сам решает вопрос о ЗР, либо используя другие, более доступные характеристики /4/, либо руководствуясь собственным опытом. При отсутствии всякой априорной информации о ЗР разумно, исходя из концепции максимальной неопределенности, принять его равномерным.

Распределения значений КП в пределах их технологических допусков определяются принятыми технологиями и используемой при этом контрольно-измерительной аппаратурой. Вместе с тем следует указать три наиболее употребительных для данного случая вида распределения (рис. 10). Все они обладают четкими границами, за пределами которых изделия бракуются. В первом случае мы имеем нормальный закон, усекаемый в пределах допуска. Во втором случае (рис. 10б) распределение считается равномерным в пределах $\pm \Delta x_i$, одна-

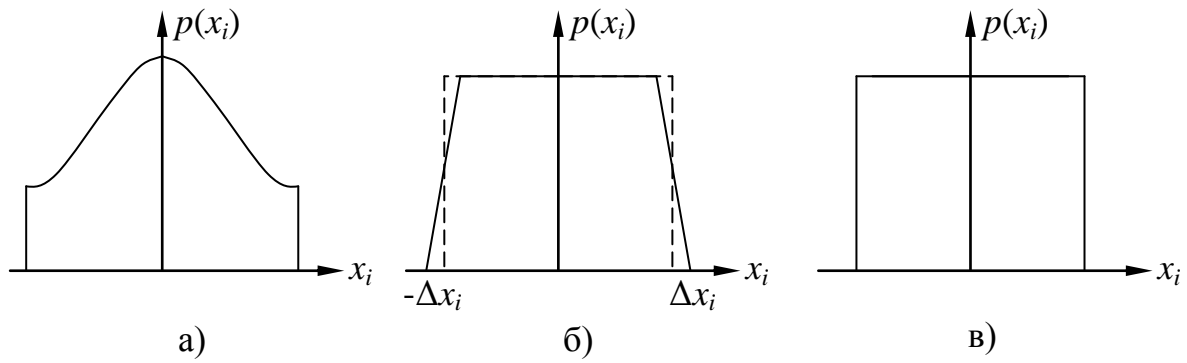


Рис. 10

ко учитывается, что отбраковка производится с помощью измерительной аппаратуры, которая сама обладает погрешностями. Последнее обстоятельство «размывает» границы распределения, которые можно представить скошенными. Наконец, в третьем случае (рис. 10в) распределение считается просто равномерным.

Можно рекомендовать следующий практический прием: если имеются основания считать, что плотность вероятности убывает с удалением от центра распределения, последнее принимается нормальным, в противном случае оно считается равномерным (разумеется, если отсутствуют данные, позволяющие указать ЗР более точно).

Риманово пространство, в котором задается криволинейная координатная система, является весьма полной математической моделью, такой, которая способна описать реальные ситуации практически любой степени сложности. Однако при этом она и сама становится весьма сложной. Для упрощения модели можно рекомендовать спрямление координат в определенной ограниченной области, что эквивалентно усреднению МТ, или замене риманова пространства евклидовым. В евклидовом пространстве в целом ряде случаев удобнее оперировать векторами конечной длины, т.е. рассматривать вместо da_{i0} (см. (20))

$$\Delta a_{i0} = \frac{\Delta x_{i0}}{x_0},$$

а вместо da_i

$$a_i = \frac{1}{2}(a_{ib} - a_{ia}). \quad (28)$$

Координатами входного вектора в этом случае становятся относительные от-

клонения (систематические и случайные) соответствующих величин от номинала. Правда, такой способ задания не может быть применен, если в числе координат есть величины, в диапазоне изменения которых имеется 0. В этом случае одна из логарифмических границ диапазона становится неопределенной.

Случайные отклонения задаются, как правило, со 100%-ной вероятностью. Так, если для датчика указывается диапазон частот 0,5 – 300 Гц, это означает, что иные частоты либо не могут иметь места, либо не представляют интереса. Однако если входной вектор составить из максимально возможных отклонений, результирующая погрешность тоже будет определена с вероятностью 100%. Это кажется желательным, но не следует забывать, что такой результат представляет арифметическую сумму частных погрешностей, которая использовалась, когда отсутствовал вероятностный подход к оценке погрешностей. Случаи, когда все частные погрешности совпадают по знакам, т.е. образуют арифметическую сумму, чрезвычайно редки, а получающаяся сумма настолько велика, что «вогнать» ее в заданные пределы можно лишь ценой больших затрат. Поэтому вероятность 100% используется редко, в наиболее ответственных случаях.

Для того, чтобы на основе заданных максимально возможных отклонений получить результирующую погрешность с вероятностью, меньшей 100%, можно в принципе поступить двояко. Можно получить результат с вероятностью 100% и из него, используя вид результирующего распределения, определить погрешность с нужной вероятностью. Однако найти вид результирующего распределения оказывается почти непреодолимо сложным уже при 3-х – 4-х составляющих /5/. Поэтому более эффективен иной путь: определить координаты входного вектора, соответствующие нужной вероятности, а затем использовать их для нахождения длины результирующего вектора. Последняя автоматически будет соответствовать заданной вероятности, при этом знания результирующего распределения не требуется. Наиболее просто необходимые доверительные границы находятся при равномерном распределении: если отклонения величины x_i распределены равномерно в пределах $\pm\Delta x_i$, то доверительные границы при вероятности P_d будут $\pm P_d \Delta x_i$.

В таблице 1 представлены диапазоны значений величин, образующих входной вектор в нашем примере, когда измеряется составляющая ускорения A_x , а также вид их распределений. При этом величины, меняющиеся в широких пределах (в основном, измеряемая величина и неинформативные параметры объек-

та), представлены непосредственно диапазоном значений, а остальные величины (в основном, конструктивные параметры) – средним значением (матожиданием) и размером отклонений. ЗР выбраны из нижеследующих соображений. Для составляющих измеряемого ускорения, меняющихся в широком диапазоне, они приняты логарифмически нормальными как по амплитуде, так и по частоте, т.к., во-первых, на крайних амплитудах и частотах должен наблюдаться спад плотности вероятности, во-вторых, изменения этих составляющих порождены многими причинами, в-третьих, при широких диапазонах изменения ощутимую асимметрию должен вносить априорный закон распределения (в данном случае закон Коши). Все конструктивные параметры, кроме $\overline{d_{31}}$, приняты распределенными равномерно внутри своих технологических допусков. Распределения плотности среды (морской воды) и температуры предполагаются нормальными ввиду значительного количества ва влияющих на них факторов.

Вероятность данных табл. 1 принята равной 0,95.

Модуль упругости материала струн $E_c = 180$ ГПа не включен в состав входного вектора (принят константой) по причине малой неопределенности его значения. Значения констант $k_{\Delta d}$ и k_d определяются видом вероятностных распределений Δ_d и d_{31} и доверительной вероятностью P_δ . Распределение Δ_d правомерно принять нормальным, поскольку оно представляет композицию 4-х одинаковых равномерных распределений, распределение d_{31} – равномерное. При этих условиях и $P_\delta = 0,95$ получается $k_{\Delta d} = 1,96$, $k_d = 1,64$.

1.3.4. Геометрический образ измерительного преобразования, осуществляемого датчиком

Наряду с ВВ мы должны рассматривать **выходной вектор**, составленный из бесконечно малых относительных изменений выходной величины, вызванных изменениями входных координат. Входной и выходной векторы связаны матричным равенством

Т а б л и ц а 1

Погрешности гидрофона ускорения и их источники

i	x_i		Распределение	α_i, K^{-1}	γ_i
	Величина	Значение			
1	$A_x, м/с^2$	$2 \cdot 10^{-3} - 1,5$	-	-	-
2	$A_y, м/с^2$	$2 \cdot 10^{-3} - 1,5$	логарифмически нормальное	0	0,0247

3	$A_z, \text{м/с}^2$	$2 \cdot 10^{-4} - 1,5$	логарифмически нормальное	0	0,0124
4	$f, \text{Гц}$	$0,1 - 100$	логарифмически нормальное	0	-
5	$\rho_0, \text{т/м}^3$	$1,03 \pm 0,02$	нормальное	$-2,1 \cdot 10^{-4}$	0,00817
6	$t, ^\circ\text{C}$	$-5 - +40$	нормальное	-	0,0517
7	$\rho_6, \text{т/м}^3$	$7,54 \pm 0,2$	равномерное	$-2 \cdot 10^{-5}$	0,00456
8	$E_6, \text{ГПа}$	$110,5 \pm 1,5$	равномерное	$-6 \cdot 10^{-4}$	0,0128
9	$\overline{d_{31}}, \text{пКл/Н}$	$-122 \pm 2,2$	нормальное	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0,00947
10	$d_{31}, \text{пКл/Н}$	-122 ± 3	равномерное	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0,000171
11	$b, \text{мм}$	$39,92 \pm 0,08$	равномерное	$6,5 \cdot 10^{-6}$	0,00223
12	$h, \text{мм}$	$3,34 \pm 0,04$	равномерное	$6,5 \cdot 10^{-6}$	0,0128
13	$l_6, \text{мм}$	$25 \pm 0,2$	равномерное	$6,5 \cdot 10^{-6}$	0,0062
14	$l_c, \text{мм}$	$90 \pm 0,25$	равномерное	$2,6 \cdot 10^{-5}$	0,00808
15	$R_c, \text{мм}$	$0,8 \pm 0,008$	равномерное	$2,9 \cdot 10^{-5}$	0,0393
16	β	$0,022 \pm 0,011$	равномерное	$1,8 \cdot 10^{-2}$	0,000458
17	$m_r, \text{г}$	498 ± 6	равномерное	0	0,00894
18	$m_n, \text{г}$	$8,74 \pm 0,87$	равномерное	0	0,00517
19	$\overline{\rho}, \text{т/м}^3$	$1,03 \pm 0,02$	равномерное	$-7,2 \cdot 10^{-5}$	0,0126
20	$\alpha_1, \text{град}$	$0 \pm 0,1$	равномерное	0	0,00229
21	$\alpha_2, \text{град}$	$0 \pm 0,1$	равномерное	0	0,000699
22	$C_{oc}, \text{нФ}$	$18 \pm 0,1$	равномерное	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	0,00053
23	$R_{oc}, \text{ГОм}$	$4,7 \pm 0,24$	равномерное	10^{-3}	$3,24 \cdot 10^{-9}$

$$\begin{bmatrix} da_{y10} \\ \vdots \\ da_{yn0} \\ da_{y2} \\ \vdots \\ da_{yn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} da_{10} \\ \vdots \\ da_{n0} \\ da_2 \\ \vdots \\ da_n \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где $[a_{ij}]$ – матрица аффинора – тензора, связывающего оба вектора. Интегрирование векторов превращает их в общем случае в кривые линии, которые по аналогии могут быть названы криволинейными векторами.

Таким образом, геометрически измерительное преобразование, осуществляемое датчиком, выглядит как взаимное соответствие двух в общем криволинейных векторов, один из которых (входной), кроме измеряемой величины, содержит изменения неинформативных параметров входного сигнала, конструктивных параметров датчика и внешних влияющих факторов, а второй состоит из соответствующих изменений выходной величины.

1.3.5. Метрический тензор

Как следует из п. 1.1, метрический тензор, называемый также **фундаментальным**, полностью определяет геометрию пространства. Для данного случая, когда пространство является моделью датчика, первостепенная роль МТ сводится к определяемому им правилу сложения погрешностей. Действительно, последние представляют координатные векторы, сложение которых производится согласно (1).

В римановом пространстве любая координата МТ g_{ij} естественным образом определяется из выражения для квадрата длины двумерного вектора, представляющего случайную величину $x = x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j}$ ($\ln x = \alpha_i \ln x_i + \alpha_j \ln x_j$), причем x_i и x_j в данном случае – соответствующие друг другу результаты совместных измерений. Дифференцируя равенство в скобках, мы с учетом п. 1.2 получаем векторное равенство

$$\frac{dx}{x} = \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} + \alpha_j \frac{dx_j}{x_j}$$

(векторами являются именно относительные изменения). На основании этого мы можем записать равенство (2):

$$da^2 = \alpha_i^2 da_i^2 + 2g_{ij}\alpha_i\alpha_j da_i da_j + \alpha_j^2 da_j^2,$$

где a – длина криволинейного вектора, представляющего величину x . Отсюда

$$g_{ij} = \frac{da^2 - \alpha_i^2 da_i^2 - \alpha_j^2 da_j^2}{2\alpha_i\alpha_j da_i da_j},$$

а после деления числителя и знаменателя на $\alpha_i^2 da_i^2$

$$g_{ij} = \frac{\frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{da}{da_i} \right)^2 - 1 - \frac{\alpha_j^2}{\alpha_i^2} \left(\frac{da_j}{da_i} \right)^2}{2 \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{da_j}{da_i}} = \frac{\frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{da}{da_i} \right)^2 - 1 - \kappa_{ij}^2}{2\kappa_{ij}}, \quad (30)$$

где с учетом (25)

$$\frac{da}{da_i} = \frac{\frac{1}{|x_a|} \frac{dx_a}{dP_a} + \frac{1}{|x_b|} \frac{dx_b}{dP_b}}{\frac{1}{|x_{ia}|} \frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{1}{|x_{ib}|} \frac{dx_{ib}}{dP_b}}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{da_j}{da_i}, \quad \frac{da_j}{da_i} = \frac{\frac{1}{|x_{ja}|} \frac{dx_{ja}}{dP_a} + \frac{1}{|x_{jb}|} \frac{dx_{jb}}{dP_b}}{\frac{1}{|x_{ia}|} \frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{1}{|x_{ib}|} \frac{dx_{ib}}{dP_b}}.$$

В частном случае, если $|\alpha_i| = |\alpha_j| = 1$,

$$g_{ij} = \frac{\left(\frac{da}{da_i} \right)^2 - 1 - \left(\frac{da_j}{da_i} \right)^2}{2 \frac{da_j}{da_i}} = \frac{\left(\frac{da}{da_i} \right)^2 - 1 - \kappa_{ij}^2}{2\kappa_{ij}}. \quad (31)$$

Если при этом $x_{ia} \cong x_{ib} \cong x_i$, $x_{ja} \cong x_{jb} \cong x_j$, и, следовательно, $x_a \cong x_b \cong x$, то согласно (26), поскольку $\frac{x}{x_i} = x_j$,

$$\frac{da}{da_i} = \frac{1}{|x_j|} \frac{\frac{dx_a}{dP_a} + \frac{dx_b}{dP_b}}{\frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{dx_{ib}}{dP_b}}, \quad \frac{da_j}{da_i} = \left| \frac{x_i}{x_j} \right| \frac{\frac{dx_{ja}}{dP_a} + \frac{dx_{jb}}{dP_b}}{\frac{dx_{ia}}{dP_a} + \frac{dx_{ib}}{dP_b}}.$$

Если добавить условие симметрии законов распределения x_i и x_j (а, следовательно, и x), то из (27) следует

$$\frac{dx_a}{dP_a} = \frac{dx_b}{dP_b}, \quad \frac{dx_{ia}}{dP_a} = \frac{dx_{ib}}{dP_b}, \quad \frac{dx_{ja}}{dP_a} = \frac{dx_{jb}}{dP_b}.$$

Тогда

$$\frac{da}{da_i} = \frac{1}{|x_j|} \frac{\frac{dx_a}{dP_a}}{\frac{dx_{ia}}{dP_a}}, \quad \frac{da_j}{da_i} = \left| \frac{x_i}{x_j} \right| \frac{\frac{dx_{ja}}{dP_a}}{\frac{dx_{ia}}{dP_a}}.$$

Если x_i и x_j однозначно связаны, они представляют одну координату, и тогда $g_{ij} = 1$, поскольку, как отмечено в п. 1.1, она является косинусом соответствующего угла. Может быть предпринято и более строгое доказательство.

Для определения погрешности по выходной величине необходимо производить сложение составляющих \mathbf{da}_{yi} в каждой точке криволинейного вектора выходной величины. МТ в этих точках будет, очевидно, в общем случае иным, нежели в точках входного вектора. При этом следует иметь в виду, что составляющие \mathbf{da}_{yi} представляют иную координатную систему, нежели \mathbf{da}_i , т.к. согласно (29)

$$\mathbf{da}_{yi} = a_{ij} \mathbf{da}_j.$$

Таким образом, для сложения \mathbf{da}_{yi} и вычисления длины результирующего вектора по правилу (2) требуется определить МТ не только в другой точке по сравнению с (30), но и в другой координатной системе, где

$$da_{yi} = \left(\sum_{k=2}^n a_{ki} \right) da_i, \quad (32)$$

причем суммирование может производиться не обязательно по всем координатам, а лишь по тем, которые представляют интерес. В результате в точках криволинейного вектора выходной величины согласно (31) координата метрического тензора

$$g_{ij} = \frac{\frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{da'}{da_{yi}} \right)^2 - 1 - \kappa_{ij}^2}{2\kappa_{ij}}, \quad (33)$$

где $da' = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right) dP_\delta$ (см. (25)), $y' = (y(x_i))^{\alpha_i} (y(x_j))^{\alpha_j}$ – величина,

зависимая от взаимной корреляции x_i и x_j , $y(x_i)$ и $y(x_j)$ – значения y при самопроизвольных изменениях соответственно x_i и x_j и отсутствии таковых у остальных

аргументов, $\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{da_{yj}}{da_{yi}}$, $da_{yj} = \left(\sum_{k=2}^n a_{kj} \right) da_j$.

Следует иметь в виду, что, если определяется погрешность от неустойчивости единственного конструктивного параметра, $y(x_i)$ и $y(x_j)$ суть значения, принимаемые y при изменениях данного параметра под влиянием x_i и x_j .

В евклидовом пространстве, где координаты прямолинейны, мы можем дифференциалы длин заменить самими длинами, которые, как следует из (7), представляют доверительные относительные отклонения. Тогда (30) примет вид

$$g_{ij} = \frac{\frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma_i} \right)^2 - 1 - \left(\frac{\alpha_j \gamma_j}{\alpha_i \gamma_i} \right)^2}{2 \frac{\alpha_j \gamma_j}{\alpha_i \gamma_i}} = \frac{\gamma_0^2 - 1 - \kappa_{ij}^2}{2 \kappa_{ij}}, \quad (34)$$

где γ – доверительное отклонение величины x , $\gamma_0 = \frac{\gamma}{\alpha_i \gamma_i}$, $\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j \gamma_j}{\alpha_i \gamma_i}$.

Практически важно найти условие, при котором моделирующее пространство является евклидовым, т.е. обладает постоянным МТ. Для этого, очевидно, должны быть постоянными производные, входящие в (30), а это, в свою очередь, требует пропорциональности составляющих их дифференциалов. Мы будем рассматривать только те изменения координат, которые вызваны изменением доверительной вероятности. Поскольку da , da_i и da_j суть изменения соответствующих доверительных отклонений, пропорциональность между ними будет сохраняться только в том случае, если соответствующие законы распределения однотипны. Но это означает, что при образовании композиции двух случайных величин, каковую представляет координата a , не должна изменяться форма распределения. Таким образом, моделирующее пространство является евклидовым, если все образующие его случайные величины распределены по одному закону, причем по такому, который не меняется при образовании композиции. Среди симметричных распределений это имеет место лишь у нормального распределения и распределения Коши /6/.

Если использовать последнюю формулу в римановом пространстве, получающееся значение g_{ij} будет иметь смысл некоторого среднего для области пространства, ограниченной координатами γ_i и γ_j , причем последние представляют доверительные отклонения у при изменении соответственно x_i и x_j , т.е.

$$\gamma_i = \frac{y_b(x_i) - y_a(x_i)}{2|y|},$$

где знак модуля необходим, т.к. доверительное отклонение в целом оценивается по модулю. Отсюда

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{y_b(x_j) - y_a(x_j)}{y_b(x_i) - y_a(x_i)}.$$

Если функции $y(x_i)$ и $y(x_j)$ в заданных диапазонах изменения аргументов монотонны, что имеет место в подавляющем большинстве случаев, то

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \left| \frac{y(x_{jb}) - y(x_{ja})}{y(x_{ib}) - y(x_{ia})} \right|,$$

где знак модуля учитывает то, что отношение доверительных отклонений может быть только положительным.

Приведем пример подобного определения МТ, причем для простоты область усреднения ограничим координатами входного вектора. Пусть многократное совместное измерение толщины h и радиуса R мембраны датчика давления дало следующие результаты:

$10^4 h$	м	1,6024	1,6041	1,6047	1,5925	1,6029	1,5954	1,5929	1,6077
$10^2 R$	м	1,0069	1,0001	1,0002	1,0046	1,004	1,004	0,9904	1,0037

$10^4 h$	м	1,5948	1,5959
$10^2 R$	м	1,0068	0,9993

Нетрудно установить, что законы распределения h и R не совпадают ни с нормальным законом, ни с законом Коши, а близки к равномерному. Следовательно, моделирующее пространство не является евклидовым.

Приведенной таблице соответствует следующий ряд значений произведения $hR \cdot 10^6$ (м²):

1,6135; 1,6043; 1,605; 1,5998; 1,6093; 1,6018; 1,5776; 1,6136; 1,6056; 1,5948.

Крайние относительные отклонения от средних составляют: для h – $4,27 \cdot 10^{-3}$ и $5,25 \cdot 10^{-3}$; для R – $11,6 \cdot 10^{-3}$ и $4,89 \cdot 10^{-3}$; для hR – $15,6 \cdot 10^{-3}$ и $6,91 \cdot 10^{-3}$. Присваивая координатам h и R соответственно номера 1 и 2, получаем:

$$\gamma_1 = \frac{5,25 \cdot 10^{-3} + 4,27 \cdot 10^{-3}}{2} = 4,76 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_2 = \frac{4,89 \cdot 10^{-3} + 11,6 \cdot 10^{-3}}{2} = 8,24 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma = \frac{6,91 \cdot 10^{-3} + 15,6 \cdot 10^{-3}}{2} = 1,13 \cdot 10^{-2}.$$

Отсюда $\gamma_0 = \frac{1,13 \cdot 10^{-2}}{4,76 \cdot 10^{-3}} = 2,37; \kappa_{12} = \frac{8,24 \cdot 10^{-3}}{4,76 \cdot 10^{-3}} = 1,73$. В результате

$$g_{12} = \frac{2,37^2 - 1 - 1,73^2}{2 \cdot 1,73} = 0,47.$$

Подобное усреднённое значение МТ при некоррелированных составляющих и известных законах их распределения может быть определено с помощью интеграла свёртки [5], дающего закон распределения суммы γ_Σ независимых случайных величин:

$$p(\gamma_\Sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i(z) p_j(\gamma_\Sigma - z) dz.$$

γ является корнем уравнения

$$2 \int_0^\gamma p(\gamma_\Sigma) d\gamma_\Sigma = P_\delta. \quad (35)$$

Для примера предположим, что i -тая погрешность распределена равномерно в пределах $\pm \gamma_m$, а j -тая – по закону Коши с параметром A . Тогда

$$p_i(z) = \begin{cases} 1 / 2\gamma_m & \text{при } -\gamma_m \leq z \leq \gamma_m \\ 0 & \text{при } -\gamma_m > z > \gamma_m \end{cases},$$

$$p_j(\gamma_\Sigma - z) = \frac{A}{\pi(A^2 + (\gamma_\Sigma - z)^2)}.$$

Отсюда

$$p(\gamma_\Sigma) = \frac{A}{2\pi\gamma_m} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \frac{dz}{A^2 + (\gamma_\Sigma - z)^2},$$

откуда после интегрирования получаем

$$p(\gamma_\Sigma) = \frac{1}{2\pi\gamma_m} \left(\arctg \frac{\gamma_\Sigma + \gamma_m}{A} - \arctg \frac{\gamma_\Sigma - \gamma_m}{A} \right). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (35) и производя интегрирование, имеем

$$\frac{1}{\pi\gamma_m} \left((\gamma_\Sigma + \gamma_m) \operatorname{arctg} \frac{\gamma_\Sigma + \gamma_m}{A} - (\gamma_\Sigma - \gamma_m) \operatorname{arctg} \frac{\gamma_\Sigma - \gamma_m}{A} - \frac{A}{2} \ln \frac{A^2 + (\gamma_\Sigma + \gamma_m)^2}{A^2 + (\gamma_\Sigma - \gamma_m)^2} \right) = P_\delta. \quad (37)$$

Очевидно,

$$\gamma_m = \gamma_i / P_\delta, \quad (38)$$

поскольку при равномерном распределении доверительная погрешность пропорциональна доверительной вероятности. В то же время

$$\int_0^{\gamma_j} p_j(\gamma) d\gamma = P_\delta / 2,$$

т.е.

$$\int_0^{\gamma_j} \frac{A}{\pi(A^2 + \gamma^2)} d\gamma = \frac{P_\delta}{2}.$$

Отсюда получается

$$A = \gamma_j / \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} P_\delta \right). \quad (39)$$

Подставляя (38) и (39) в (37), находим

$$\frac{1}{\pi} \left((B+1) \operatorname{arctg} \frac{B+1}{A'} - (B-1) \operatorname{arctg} \frac{B-1}{A'} - \frac{A'}{2} \ln \frac{(A')^2 + (B+1)^2}{(A')^2 + (B-1)^2} \right) - P_\delta = 0,$$

где $A' = A / \gamma_m$, $B = \gamma_0 P_\delta$.

Из этого уравнения непосредственно находится γ_0 .

На рис. 11 ÷ 14 приведены определённые в соответствии с данной методикой зависимости $g_{ij} = f(\kappa_{ij})$ при различных P_δ . При этом кривые соответствуют композициям следующих ЗР (первым назван ЗР γ_i):

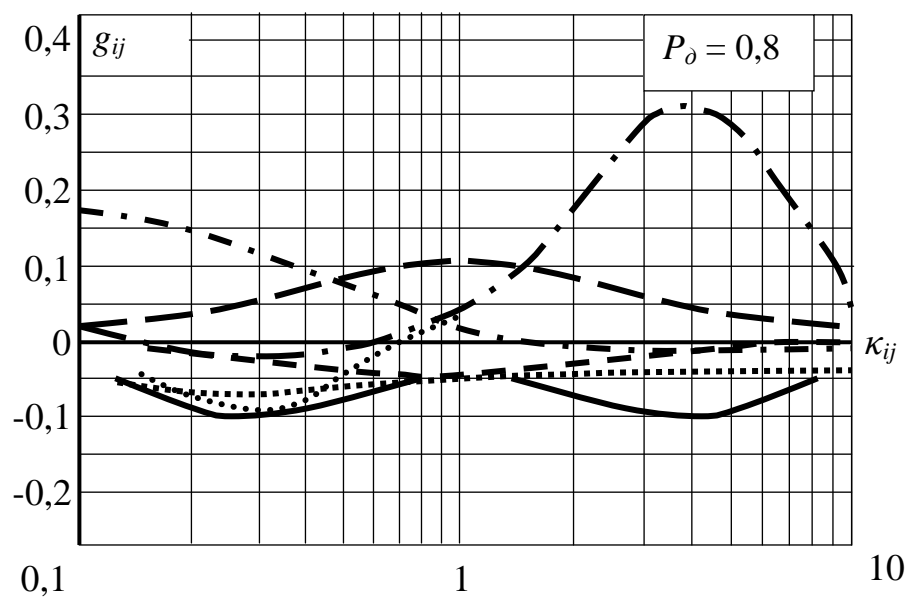


Рис. 11

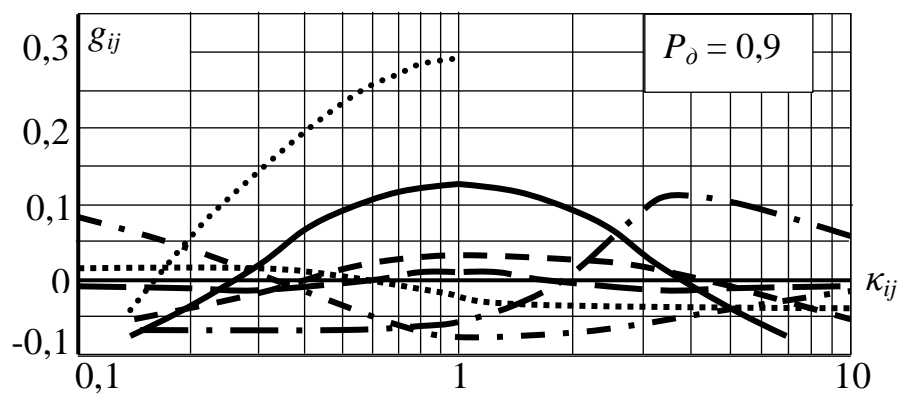


Рис. 12

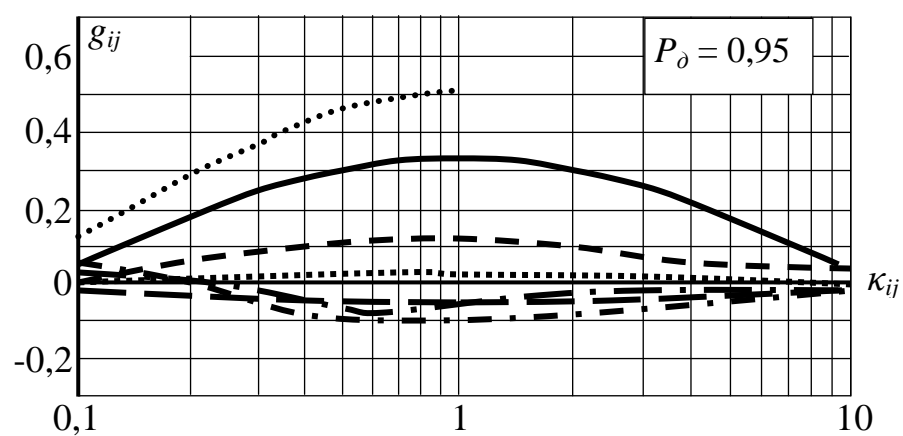


Рис. 13

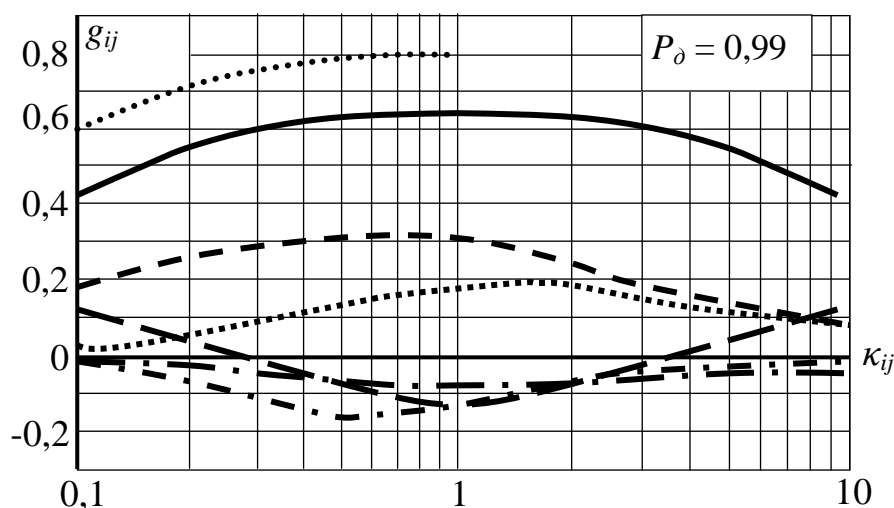


Рис. 14

- равномерного с равномерным,
- равномерного с арксинусоидальным,
- равномерного с законом Лапласа,
- - - равномерного с нормальным,
- . - . равномерного с Законом Коши,
- — . двух законов Лапласа,
- . — закона Лапласа с нормальным.

Как видно, эти зависимости недалеко уходят от нуля при значениях P_δ 0,8 и 0,9, если оба закона распределения экспоненциальные. Это согласуется с тем известным фактом [5], что при $P_\delta \cong 0,9$ интегральные кривые для широкого класса распределений, построенные в зависимости от квантильного множителя, пересекаются между собой в очень узком интервале его значений. При $P_\delta = 0,9$ для тех случаев, когда меньшая погрешность практически значима по сравнению с большей ($0,2 \leq \kappa_{ij} \leq 5$), для экспоненциальных законов соблюдается $-0,1 \leq g_{ij} \leq 0,15$, что при обычных невысоких требованиях к точности расчета погрешностей позволяет принять $g_{ij} \cong 0$.

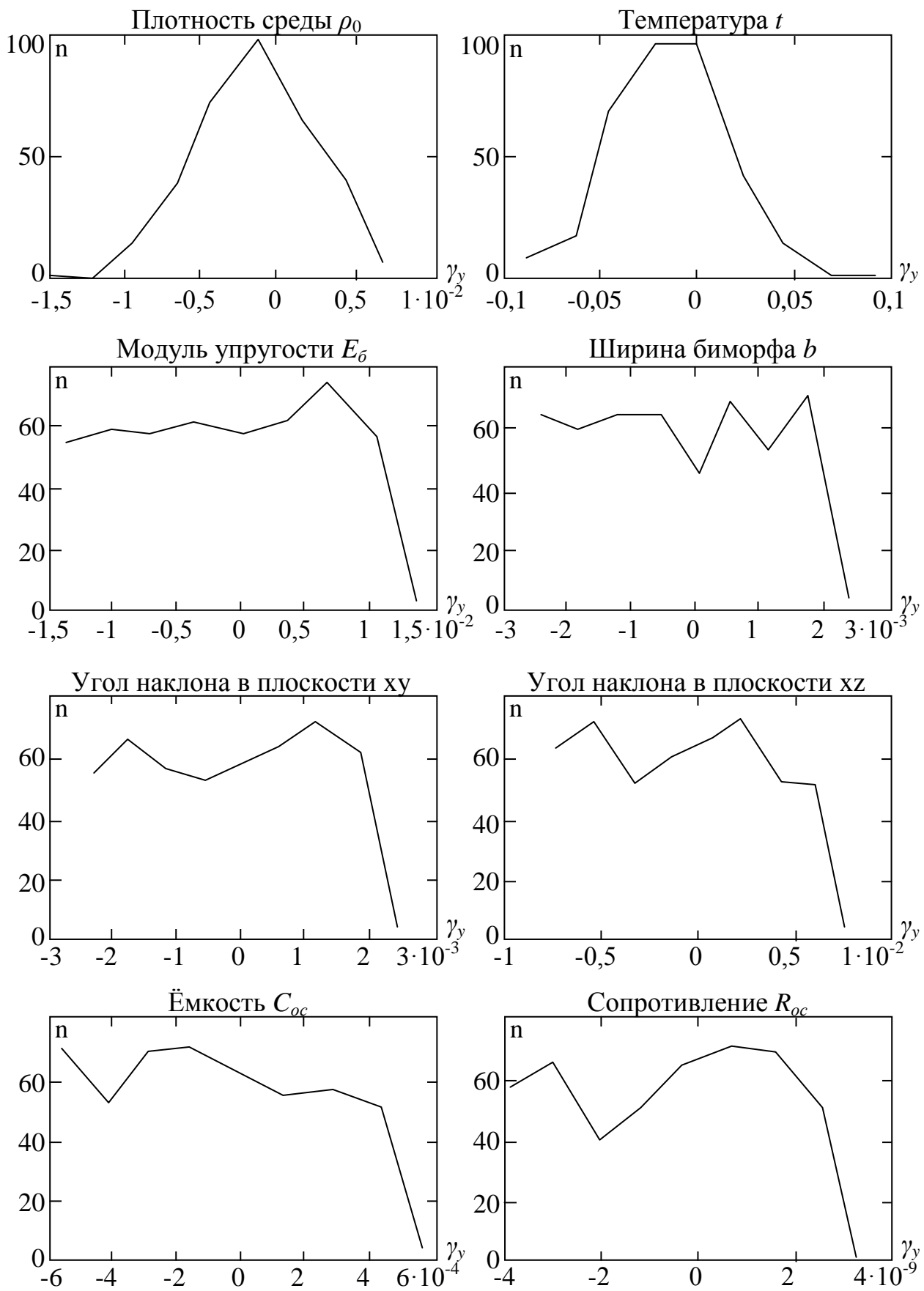
Чтобы на основании заданных распределений величин, представляющих входной вектор, определить соответствующие распределения на выходе, можно либо использовать формулу (23), либо применить статистическое моделирование, задавая на входе соответствующие статистические выборки. Последнее без труда осуществляется в системе MathCAD, где для генерирования совокупности равномерно распределенных чисел имеется функция `runif`, а для нормальной

совокупности – *погрн*. Очевидно, что при линейной зависимости между входной и выходной величинами закон распределения не меняется.

При оценке выходных распределений нужно иметь в виду, что они представляют частные сечения полного многомерного распределения, для каждого из которых значения остальных величин остаются постоянными. Если эти значения меняются, может меняться и вид частных одномерных распределений. В вопросе о том, какие же значения наиболее представительны, следует, очевидно, придерживаться «золотой середины» и выбирать средние значения за одним исключением. Исключение касается часто встречающихся случаев, когда среднее значение равно нулю, причём величина является множителем по отношению к другой величине, также обладающей неопределённостью. Тогда при нулевом значении первой величины эта последняя, очевидно, никак не сможет проявиться на выходе. Примером может послужить слагаемое $k_{qxy}\dot{A}_y$ в формуле (14). Коэффициент $k_{qxy} = k \sin \alpha_1$ (16), причём среднее значение угла α_1 равно нулю. При этом значения изменения \dot{A}_y никак не скажутся на выходе, что естественно, поскольку отсутствует данная боковая чувствительность. В подобных случаях следует принимать иные значения множителей, например, крайние.

На рис. 15 приведены полигоны некоторых выходных распределений для рассматриваемого нами векторного приёмника, помеченные названиями и обозначениями соответствующих влияющих величин. Здесь γ – относительная погрешность по выходу, а n – число точек, попавших в соответствующий интервал. В соответствии с вышерекомендованным практическим приёмом можно, очевидно, считать 2 первых распределения нормальными, а остальные – равномерными. Также распределены и сами влияющие величины, хотя во всех приведённых случаях зависимости между последними и выходной величиной нелинейны (см. п. 1.3.1). Причина несомненно в том, что изменения влияющих величин (за исключением температуры) малы, а потому соответствующие участки зависимостей можно считать линейными. Это обстоятельство всегда следует принимать в расчёт при определении выходных распределений и экономить таким образом «трудозатраты».

Для использования зависимостей на рис. 11 – 14 необходимы также значения k_{ij} – соотношения частных погрешностей. Они находятся естественным путем, если известны сами погрешности, методика определения которых описана ни-



же, в п. 2. Для нашего примера и $P_\delta = 0,95$ они представлены в табл. 1 (γ_y), причем погрешности от A_y и A_z определены при крайних значениях углов α_1 и α_2 . Динамическая погрешность (f) отсутствует, поскольку в датчике использовалась частотная коррекция, параметры которой для простоты не приводятся.

Ниже приведена программа определения метрического тензора в среде «MathCAD 7 Professional» для $P_\delta = 0,95$, если отдельные составляющие погрешности распределены либо по нормальному, либо по равномерному закону. Векторы vk , vg_{gn} и vg_{gg} суть табулированные кривые — — и — на рис. 13. Чтобы программа могла обращаться к нужному вектору, погрешности, распределенные по нормальному закону, условно приняты мнимыми, и введена вспомогательная переменная $\alpha_{jk} = \arg(\gamma_{yj} + \gamma_{yk})$, меняющая свое значение в зависимости от сочетания погрешностей. Если $\alpha_{jk} = 0$, обе погрешности вещественны, и программа обращается к вектору vg_{gg} , содержащему значения МТ для двух равномерных законов. Если $0 < \alpha_{jk} < \frac{\pi}{2}$, одна из погрешностей распределена по равномерному закону, а другая – по нормальному, и программа обращается к вектору vg_{gn} . Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, обе погрешности мнимые, что соответствует двум нормальным распределениям. В этом случае $g_{jk} = 0$.

В программе учтено, что вектор vg_{gn} соответствует случаю, когда j -тая составляющая распределена по равномерному закону, а k -тая – по нормальному. Для этого используется знак отношения погрешностей β_{jk} , который оказывается отрицательным, если в числителе находится погрешность, распределенная равномерно. В этом случае программа просто обращается к вектору vg_{gn} . В противоположном случае ($\beta_{jk} > 0$) меняются местами индексы.

Если отношение двух составляющих находится за пределами диапазона 0,1 – 10, для которого даны значения МТ, меньшая из них, очевидно, пренебрежимо мала по сравнению с большей. В этом случае значение g_{jk} полагается равным 0.

Функция WRITEPRN осуществляет печать вычисленных значений МТ в файл данных g.prn.

Для примера в программе дан вектор составляющих погрешности из табл. 1 (значение динамической погрешности 0,01 поставлено условно). Для пользования программой достаточно заменить этот вектор, изменив соответствующим образом область изменения индексов j и k .

Программа определения метрического тензора

Метрический тензор

$j := 2..23$ $k := 2..23$ Ввод значений составляющих погрешности и зависимости метрического тензора от их отношения

$$\beta_{j,k} := \frac{\gamma_{y_j}}{\gamma_{y_k}} \quad \gamma_{y_j} :=$$

i·0.0247
i·0.0124
0.01
i·0.00817
i·0.0517
0.00456
0.0128
i·0.00947
0.000171
0.00223
0.0128
0.0062
0.00808
0.0393
$4.58 \cdot 10^{-4}$
0.00894
0.00517
0.0126
0.00229
0.000699
0.00053
$3.24 \cdot 10^{-9}$

$$v_k :=$$

0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

$$vg_{gn} :=$$

0
0.055
0.085
0.1
0.115
0.12
0.12
0.12
0.12
0.12
0.12
0.1
0.075
0.06
0.05
0.045
0.04
0.04
0.04
0.04

$$vg_{gg} :=$$

0.05
0.18
0.25
0.28
0.3
0.315
0.325
0.33
0.33
0.33
0.3
0.24
0.2
0.18
0.13
0.105
0.085
0.065
0.05

Вычисление значений метрического тензора при любом соотношении погрешностей

$$vs_{gg} := pspline(vk, vg_{gg}) \quad g_{gg_{j,k}} := \begin{cases} \text{interp}(vs_{gg}, vk, vg_{gg}, |\beta_{j,k}|) & \text{if } 0.1 \leq |\beta_{j,k}| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$vs_{gn} := pspline(vk, vg_{gn}) \quad g_{gn_{j,k}} := \begin{cases} \text{interp}(vs_{gn}, vk, vg_{gn}, |\beta_{j,k}|) & \text{if } 0.1 \leq |\beta_{j,k}| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$ggn_{j,k} := \begin{cases} g_{gn_{j,k}} & \text{if } \text{Im}(\beta_{j,k}) < 0 \\ g_{gn_{k,j}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \alpha_{j,k} := \arg(\gamma_{y_j} + \gamma_{y_k})$$

α – вспомогательная переменная

$$G_{j,k} := \begin{cases} g_{gg_{j,k}} & \text{if } \alpha_{j,k} = 0 \\ ggn_{j,k} & \text{if } 0 < \alpha_{j,k} < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{if } k = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad G_{j,k} := \text{if}(k < j, G_{k,j}, G_{j,k})$$

WRITEPRN(,g.prn“) := G Печать в файл данных g.prn

На рис. 16 представлена матрица МТ для векторного приемника. Пустые строки и столбец соответствуют 4-й координате – частоте.

1.3.6. Аффинор

Координаты аффинора в соответствии с их двухиндексным обозначением имеют вид

$$a_{ij} = \frac{\partial a_y}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial a_j} \quad (40)$$

и смысл относительных чувствительностей к воздействию j -той координаты через i -тую. Таким образом, в общем предполагается взаимозависимость всех координат, вполне естественная, если номер j принадлежит влияющему фактору, а i – конструктивному параметру, и достаточно гипотетическая, если обе координаты – конструктивные параметры. При $j = i$ речь идет о непосредственном влиянии соответствующей переменной на выходную величину.

1	0	*	0	0	0,05	0,12	0	0	0	0,12	0,07	0,09	0,11	0	0,09	0,06	0,12	0	0	0	0
0	1	*	0	0	0,1	0,12	0	0	0,05	0,12	0,12	0,12	0,07	0	0,12	0,1	0,12	0,05	0	0	0
*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0	0	*	1	0	0,12	0,11	0	0	0,08	0,11	0,12	0,12	0,05	0	0,12	0,12	0,11	0,08	0	0	0
0	0	*	0	1	0	0,07	0	0	0	0,07	0,01	0,03	0,12	0	0,04	0	0,07	0	0	0	0
0,05	0,1	*	0,12	0	1	0,27	0,11	0	0,3	0,27	0,33	0,31	0,08	0,04	0,3	0,33	0,27	0,3	0,11	0,07	0
0,12	0,12	*	0,11	0,07	0,27	1	0,12	0	0,14	0,33	0,3	0,32	0,26	0	0,32	0,27	0,33	0,15	0	0	0
0	0	*	0	0	0,11	0,12	1	0	0,07	0,12	0,12	0,12	0,06	0	0,12	0,12	0,12	0,07	0	0	0
0	0	*	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,27	0	0	0	0	0,22	0,26	0
0	0,05	*	0,08	0	0,3	0,14	0,07	0	1	0,15	0,27	0,24	0	0,16	0,22	0,29	0,16	0,33	0,23	0,2	0
0,12	0,12	*	0,11	0,07	0,27	0,33	0,12	0	0,15	1	0,3	0,32	0,26	0	0,32	0,27	0,33	0,15	0	0	0
0,07	0,12	*	0,12	0,01	0,33	0,3	0,12	0	0,27	0,3	1	0,33	0,13	0	0,32	0,33	0,3	0,26	0,07	0	0
0,09	0,12	*	0,12	0,03	0,31	0,32	0,12	0	0,24	0,32	0,33	1	0,19	0	0,33	0,32	0,32	0,21	0	0	0
0,11	0,07	*	0,05	0,12	0,08	0,26	0,06	0	0	0,26	0,13	0,19	1	0	0,19	0,09	0,23	0	0	0	0
0	0	*	0	0	0,04	0	0	0,27	0,16	0	0	0	0	1	0	0	0	0,16	0,32	0,33	0
0,09	0,12	*	0,12	0,04	0,3	0,32	0,12	0	0,22	0,32	0,32	0,33	0,19	0	1	0,31	0,33	0,2	0	0	0
0,06	0,1	*	0,12	0	0,33	0,27	0,12	0	0,29	0,27	0,33	0,32	0,09	0	0,31	1	0,28	0,29	0,1	0,05	0
0,12	0,12	*	0,11	0,07	0,27	0,33	0,12	0	0,16	0,33	0,3	0,32	0,23	0	0,33	0,28	1	0,16	0	0	0
0	0,05	*	0,08	0	0,3	0,15	0,07	0	0,33	0,15	0,26	0,21	0	0,16	0,2	0,29	0,16	1	0,23	0,19	0
0	0	*	0	0	0,11	0	0	0,22	0,23	0	0,07	0	0	0,32	0	0,1	0	0,23	1	0,33	0
0	0	*	0	0	0,07	0	0	0,26	0,2	0	0	0	0	0,33	0	0,05	0	0,19	0,33	1	0
0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 16

Аффино́р весьма информативен, поскольку прямо показывает, какой частью (или во сколько раз увеличенным) входит изменение того или иного параметра в результат. Если соответствующая координата меньше 1, это изменение лишь частично отражается в результате, если больше 1 – входит увеличенным. Если координата равна 1, относительная погрешность равна относительному изменению параметра.

В аффино́ре не должны содержаться одновременно ненулевые a_{ij} и a_{ji} , поскольку каждая из них определяет составляющую выходного вектора, получающуюся вследствие взаимосвязи x_i и x_j . Такая взаимосвязь не должна учитываться дважды. В принципе безразлично, какую из двух координат положить равной нулю, следует исходить из практического удобства: какая из них проще интерпретируется, в каком случае проще получается расчет. Если принять равными нулю все a_{ij} или a_{ji} , матрица аффино́ра получается треугольной.

матрица $[a_{ij}]$ в соответствии с тем, что как входной, так и выходной векторы состоят из систематической и случайной частей, включает 4 подматрицы (рис. 17). Подматрица 1 связывает систематические изменения входных переменных

1	2
3	4

Рис. 17

и выходной величины. Подматрица 4 связывает соответствующие случайные изменения. Подматрицы 2 и 3 выражают “перекрёстные” связи систематических и случайных изменений. Такие связи имеют место, например, если выходная величина представляет случайный процесс (шумовые термодатчики). С другой стороны случайные изменения входных переменных могут быть причиной систематических изменений на выходе, если соответствующие зависимости нелинейны.

На рис. 18 представлена подматрица 1 для случая, когда датчик измеряет одну величину. Рассмотрим функциональное назначение ее отдельных частей. Часть 1 содержит единственный элемент a_{11} и выражает чувствительность датчика к измеряемой величине. Часть 2 характеризует влияние неинформативных параметров входного сигнала. Часть 3 означает влияние датчика на объект, а часть 5 – влияние объекта на датчик. Таким образом, мы здесь различаем координаты a_{ij} и a_{ji} по причинно-следственной направленности взаимодействия датчика с объектом. Второй индекс координаты выражает причину, первый – след-

a_{11}	a_{12}	\cdot	\cdot	a_{1l}	$a_{1(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{1m}	$a_{1(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{1n}
a_{21}				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
\cdot	2			\cdot	\cdot	3			\cdot	\cdot	4			\cdot
\cdot				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
a_{l1}	\cdot	\cdot	\cdot	a_{ll}	$a_{l(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{lm}	$a_{l(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{ln}
$a_{(l+1)1}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(l+1)l}$	$a_{(l+1)(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(l+1)m}$	$a_{(l+1)(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(l+1)n}$
\cdot				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
\cdot	5			\cdot	\cdot	6			\cdot	\cdot	7			\cdot
\cdot				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
a_{m1}	\cdot	\cdot	\cdot	a_{ml}	$a_{m(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{mm}	$a_{m(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{mn}
$a_{(m+1)1}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(m+1)l}$	$a_{(m+1)(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(m+1)m}$	$a_{(m+1)(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	$a_{(m+1)n}$
\cdot				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
\cdot	8			\cdot	\cdot	9			\cdot	\cdot	10			\cdot
\cdot				\cdot	\cdot				\cdot	\cdot				\cdot
a_{n1}	\cdot	\cdot	\cdot	a_{nl}	$a_{n(l+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{nm}	$a_{n(m+1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	a_{nn}

Рис. 18

ствие. Хотя формально и в данном случае безразлично, какой из двух координат воспользоваться, проще интерпретируется, очевидно, координата, отвечающая здравому смыслу.

Производные $\partial a_i / \partial a_j$, которые выражают влияние внешних факторов на объект (через параметры входного сигнала), как правило, должны полагаться равными нулю, поскольку это влияние обычно учтено в ∂a_i , считающихся заданными до установки датчика. Аналогично нулевым следует признать влияние объекта на окружающую среду, поскольку оно уже учтено в изменениях влияющих факторов. Таким образом, координаты аффинора, заполняющие части подматрицы 4 и 8, оказываются равными нулю.

Часть 6 характеризует погрешности от несоответствия значений конструктивных параметров номинальным.

Часть 7 описывает воздействие влияющих факторов на конструктивные параметры. Часть 9 характеризует влияние датчика на окружающую среду, которое обычно не учитывается. Однако датчик находится с окружающей средой в том же соотношении, что и с объектом, и способен изменить ее характеристики. В особых случаях (высокие требования к точности, экологический фактор, электромагнитная совместимость) это изменение следует учитывать.

Наконец, часть 10 описывает непосредственное влияние внешних факторов на выходную величину датчика, включая их взаимодействие.

Аналогичную структуру имеет подматрица 4 полной матрицы, которая наряду с подматрицей 1 является наиболее употребительной.

Элементы подматрицы 1, связывающей систематические изменения, получаются, если вместо дифференциалов, входящих в (40), подставить их выражения вида (20). При этом для простоты мы опустим индекс «0» в обозначениях величин. Тогда

$$a_{ij} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{x_j}{y}. \quad (41)$$

При $i = j$ (диагональный элемент)

$$a_{ii} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y}. \quad (42)$$

Для получения выражений, характеризующих элементы подматрицы 4, связывающей случайные изменения, используем (25). Тогда

$$\frac{\partial a_y}{\partial a_i} = \frac{(p(y_{ib})|y_{ib}|)^{-1} + (p(y_{ia})|y_{ia}|)^{-1}}{(p(x_{ib})|x_{ib}|)^{-1} + (p(x_{ia})|x_{ia}|)^{-1}}, \quad (43)$$

где $p(y_{ib})$ и $p(y_{ia})$ – плотности распределения y в предположении случайного изменения только одного из его аргументов – x_i ; y_{ib} и y_{ia} – соответствующие доверительные границы. В соответствии с (23)

$$p(y) = p(x_i) \left| \frac{\partial x_i}{\partial y} \right|.$$

Отсюда

$$\frac{\partial a_y}{\partial a_i} = \frac{\frac{1}{|y_{ib}|p(x_{ib})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right| + \frac{1}{|y_{ia}|p(x_{ia})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right|}{(p(x_{ib})|x_{ib}|)^{-1} + (p(x_{ia})|x_{ia}|)^{-1}}, \quad (44)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x_{ib}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{ib}}$; $\frac{\partial y}{\partial x_{ia}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{ia}}$, если $y_{ib} = y(x_{ib})$ и $y_{ia} = y(x_{ia})$ (y – возрастающая функция x_i) или

$$\frac{\partial a_y}{\partial a_i} = \frac{\frac{1}{|y_{ib}|p(x_{ia})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right| + \frac{1}{|y_{ia}|p(x_{ib})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right|}{(p(x_{ib})|x_{ib}|)^{-1} + (p(x_{ia})|x_{ia}|)^{-1}}, \quad (45)$$

если $y_{ib} = y(x_{ia})$ и $y_{ia} = y(x_{ib})$ (y – убывающая функция x_i). Случай немонотонности $y = y(x_i)$ не рассматривается. Однако формулы (44) и (45) можно заменить одной, если обозначить $y_{in} = y(x_{ia})$ и $y_{ik} = y(x_{ib})$ в независимости от вида функции:

$$\frac{\partial a_y}{\partial a_i} = \frac{\frac{1}{|y_{in}|p(x_{ia})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right| + \frac{1}{|y_{ik}|p(x_{ib})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right|}{(p(x_{ia})|x_{ia}|)^{-1} + (p(x_{ib})|x_{ib}|)^{-1}}.$$

Вместе с тем по аналогии с (43)

$$\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \frac{(|x_{ia}|p(x_{ia}))^{-1} + (|x_{ib}|p(x_{ib}))^{-1}}{(|x_{ja}|p(x_{ja}))^{-1} + (|x_{jb}|p(x_{jb}))^{-1}},$$

причем не следует забывать, что параметры, стоящие в числителе (доверительные границы и значения плотности распределения) характеризуют такое изменение x_i , которое вызвано изменением x_j . Учитывая, что $p(x_i) = p(x_j) \left| \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right|$, и обозначая $x_{in} = x_i(x_{ja})$, $x_{ik} = x_i(x_{jb})$ (случай немонотонности $x_i = x_i(x_j)$ также не рассматривается), $y_{in} = y(x_{in})$, $y_{ik} = y(x_{ik})$, мы получаем для произведения производных согласно (40)

$$a_{ij} = \frac{\frac{1}{|y_{in}|p(x_{ja})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{1}{|y_{ik}|p(x_{jb})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right|}{\left(|x_{ja}|p(x_{ja}) \right)^{-1} + \left(|x_{jb}|p(x_{jb}) \right)^{-1}}. \quad (46)$$

При $i = j$ (диагональный элемент)

$$a_{ii} = \frac{\frac{1}{|y_{in}|p(x_{ia})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right| + \frac{1}{|y_{ik}|p(x_{ib})} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right|}{\left(|x_{ia}|p(x_{ia}) \right)^{-1} + \left(|x_{ib}|p(x_{ib}) \right)^{-1}}. \quad (47)$$

Формула (46) при $i \neq j$ может быть упрощена с учетом того, что изменения x_i и y невелики, поскольку представляют собой погрешности. При этом $y_{in} \cong y_{ik} \cong y_0$ и $x_{in} \cong x_{ik} \cong x_0$, $\frac{\partial y}{\partial x_{in}} \cong \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \cong \frac{\partial y}{\partial x_{i0}}$. Вынося за скобки и сокращая, получим

$$a_{ij} \cong \left| \frac{1}{y_0} \frac{\partial y}{\partial x_{i0}} \right| \frac{\frac{1}{p(x_{ja})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \right| + \frac{1}{p(x_{jb})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \right|}{\left(|x_{ja}|p(x_{ja}) \right)^{-1} + \left(|x_{jb}|p(x_{jb}) \right)^{-1}}.$$

В качестве примера на рис. 19 представлена левая верхняя часть матрицы аффинора для векторного приемника. Температурные коэффициенты α_i , необходимые для определения 6-го столбца, приведены в табл. 1.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$1,42 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$3,39 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$0,02 + 4,14 \cdot 10^{-3}i$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0,67	$2,29 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$5,7 \cdot 10^{-5} - 9,1 \cdot 10^{-8}i$	$0,18 + 2,8 \cdot 10^{-4}i$	0	0	0
0	0	0	0	0	$9,6 \cdot 10^{-3} + 2,07 \cdot 10^{-7}i$	0	$0,99 + 2,13 \cdot 10^{-5}i$	0	0
0	0	0	0	0	-0,07	0	0	1	0
0	0	0	0	0	$-5,18 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	$7,61 \cdot 10^{-3}$
0	0	0	0	0	$1,23 \cdot 10^{-4} - 2,73 \cdot 10^{-8}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$1,2 \cdot 10^{-4} - 2,28 \cdot 10^{-8}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$1,25 \cdot 10^{-4} - 3,18 \cdot 10^{-8}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$1,26 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-6}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-1,87 \cdot 10^{-3} + 2,98 \cdot 10^{-6}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-2,94 \cdot 10^{-6} - 9,26 \cdot 10^{-4}i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-7,78 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 19

1.3.7. Описание динамических свойств датчиков

Динамику датчика в данной модели представим как в частотной, так и во временной области. Представление в частотной области эквивалентно использованию комплексного векторного пространства. В последнем, как было отмечено выше, в п. 1.1, векторы имеют комплексные координаты. Действительно, комплексная величина

$$\dot{X} = X_m \exp(j\varphi),$$

где X_m – амплитуда, φ – фаза. Но тогда

$$\ln \dot{X} = \ln X_m + j\varphi. \quad (48)$$

Величина \dot{X} в общем случае случайна как по амплитуде, так и по фазе. Это означает, что обе координаты, \dot{a}_0 и \dot{a} (см. п. 1.2), отражающие положение и рассеяние, являются комплексными.

Фаза $\varphi_1 = j\omega t + \varphi_0$ входного сигнала обычно принимается нулевой. В таком случае, чтобы «не потерять» частоту, при изменении которой и проявляются динамические свойства датчика, её следует учесть в качестве неинформативного параметра объекта и представить одной из координат входного вектора. При таком подходе входной вектор в целом оказывается вещественным.

Координату аффинора (комплексную), выражающую чувствительность к частоте при её систематическом изменении, получим, исходя из (42), где $x_i = \omega$:

$$\dot{a}_{ii} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} \frac{\omega}{\dot{y}}. \quad (49)$$

С учетом (48)

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = d(\ln \dot{y}) \cong d(\ln Y_m) + jd\varphi_y = \frac{dY_m}{Y_m} + jd\varphi_y(\omega).$$

Так как $Y_m = S(\omega)X_m$, где $S(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), то $dY_m = X_m dS(\omega)$, и

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = \frac{dS(\omega)}{S(\omega)} + jd\varphi_y.$$

Подставляя в (49), имеем

$$\dot{a}_{ii} = \omega \left(\frac{1}{S(\omega)} \frac{\partial S(\omega)}{\partial \omega} + j \frac{\partial \varphi_y}{\partial \omega} \right).$$

Для получения выражения соответствующей координаты аффинора при случайном изменении ω следовало бы использовать (47), но это неприемлемо уже потому, что координата a_{ii} должна быть комплексной. Поэтому вернемся к (43), где в числителе произведем обратные преобразования $p(y_{ib})|y_{ib}| = p(a_{yb})$ и $p(y_{ia})|y_{ia}| = p(a_{ya})$. Координата a_y теперь является комплексной, т.е. (см. (48))

$$\dot{a}_y = \ln Y_m + j\varphi_y = \alpha_y + j\varphi_y,$$

где $\alpha_y = \ln Y_m$. Введем комплексную плотность вероятности

$$\dot{p}(\dot{a}_y) = \frac{dP}{d\dot{a}_y} = \frac{dP}{d\alpha_y + jd\varphi_y}.$$

Деля числитель и знаменатель на dP , получаем:

$$\dot{p}(\dot{a}_y) = \frac{1}{p^{-1}(\alpha_y) + jp^{-1}(\varphi_y)},$$

где $p(\alpha_y)$ и $p(\varphi_y)$ – плотности распределения α_y и φ_y . На основании этого (43) записывается как

$$\frac{\partial \dot{a}_y}{\partial a_\omega} = \frac{p^{-1}(a_{ya}) + p^{-1}(a_{yb}) + j(p^{-1}(\varphi_{ya}) + p^{-1}(\varphi_{yb}))}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}},$$

где a_ω – координата, соответствующая частоте, а с учетом (24)

$$\frac{\partial \dot{a}_y}{\partial a_\omega} = \frac{(Y_{ma} p(Y_{ma}))^{-1} + (Y_{mb} p(Y_{mb}))^{-1} + j(p^{-1}(\varphi_{ya}) + p^{-1}(\varphi_{yb}))}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}}.$$

Поскольку $Y_{ma} \cong Y_{mb} \cong Y_m$,

$$\frac{\partial \dot{a}_y}{\partial a_\omega} = \frac{Y_m^{-1}(p^{-1}(Y_{ma}) + p^{-1}(Y_{mb})) + j(p^{-1}(\varphi_{ya}) + p^{-1}(\varphi_{yb}))}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}}.$$

Если функции $Y_m(\omega)$ и $\varphi_y(\omega)$ монотонны, то в соответствии с (23)

$$p(Y_m) = p(\omega) \left| \frac{d\omega}{dY_m} \right|,$$

и

$$p(\varphi_y) = p(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\varphi_y} \right|.$$

Монотонность $\varphi_y(\omega)$ соблюдается безусловно, т.к. инерционность означает отрицательный сдвиг по фазе, увеличивающийся с ростом частоты (убывающая функция). Таким образом,

$$\frac{\partial \dot{a}_y}{\partial a_\omega} = \frac{Y_m^{-1} \left(p^{-1}(\omega_a) \left| \frac{dY_m}{d\omega_a} \right| + p^{-1}(\omega_b) \left| \frac{dY_m}{d\omega_b} \right| \right) + j \left(p^{-1}(\omega_a) \left| \frac{d\varphi_y}{d\omega_a} \right| + p^{-1}(\omega_b) \left| \frac{d\varphi_y}{d\omega_b} \right| \right)}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}}.$$

Наконец, вводя АЧХ $S(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{a}_y}{\partial a_\omega} = & \frac{S^{-1}(\omega) \left(p^{-1}(\omega_a) \left| \frac{dS(\omega)}{d\omega_a} \right| + p^{-1}(\omega_b) \left| \frac{dS(\omega)}{d\omega_b} \right| \right)}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}} + \\ & + \frac{j \left(p^{-1}(\omega_a) \left| \frac{d\varphi_y}{d\omega_a} \right| + p^{-1}(\omega_b) \left| \frac{d\varphi_y}{d\omega_b} \right| \right)}{(\omega_a p(\omega_a))^{-1} + (\omega_b p(\omega_b))^{-1}}. \end{aligned}$$

Во временной области координатой входного вектора, ответственной за погрешность, является время t . Координата аффинора, соответствующая его систематическому изменению, должна также находиться в соответствии с (41), где $x_i = x_1 = x$, $x_j = t$. Однако вместо $\frac{\partial y}{\partial x}$ в формулу (41) следует подставить $\frac{\partial(\Delta y)}{\partial x}$, где $\Delta y(t)$ – динамическая погрешность. Поскольку

$$y(t) = S_0 \int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

где S_0 – абсолютная статическая чувствительность, $g(t - \tau)$ – весовая функция,

$$\Delta y(t) = S_0 \left(\int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau - x(t) \right), \quad (50)$$

и

$$\frac{\partial(\Delta y)}{\partial x} = S_0 \left(\int_0^t g(t - \tau) d\tau - 1 \right).$$

Поскольку идеальное значение $y = S_0 x$, получаем

$$a_{1j} = \frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} \left(\int_0^t g(t - \tau) d\tau - 1 \right).$$

Произведем в интеграле замену переменных $t - \tau = t'$. Тогда

$$\int_0^t g(t - \tau) d\tau = - \int_t^0 g(t') dt' = \int_0^t g(t') dt' = h(t),$$

где $h(t)$ – переходная функция. Таким образом,

$$a_{1j} = \frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} (h(t) - 1).$$

Последняя формула теряет смысл, если определяется только динамическая погрешность, которая непосредственно находится по (50). Однако если проводится более или менее полный метрологический анализ, то для составления надлежащих вычислительных программ требуется формализация, подразумевающая единый подход ко всем составляющим погрешности. Такой подход при использовании данной модели требует вычисления координат аффинора.

В большом числе случаев датчики ведут себя как динамические звенья 1-го и 2-го порядка (апериодические и колебательные). Для апериодического звена переходная функция

$$h(t) = 1 - e^{-t/T},$$

где T – постоянная времени.

Для колебательного звена выражения переходной функции различаются в зависимости от значения степени успокоения β . При $\beta < 1$ [7]

$$h(t) = 1 - \frac{1}{(1 - \beta^2)^{0,5}} \exp(-\beta\omega_0 t) \cos\left((1 - \beta^2)^{0,5} \omega_0 t + \arcsin \beta\right),$$

где ω_0 – собственная частота. При $\beta = 1$

$$h(t) = 1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t).$$

При $\beta > 1$

$$h(t) = 1 - \frac{1}{2(\beta^2 - 1)^{0,5}} \left(\frac{1}{c} \exp(-c\omega_0 t) - \frac{1}{d} \exp(-d\omega_0 t) \right),$$

где $c = \beta - (\beta^2 - 1)^{0,5}$, $d = \beta + (\beta^2 - 1)^{0,5}$. С учётом вышеизложенного получаются следующие выражения координаты a_{ij} :

для апериодического звена –

$$a_{1j} = \frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} e^{-t/T};$$

для колебательного звена при $\beta < 1$ –

$$a_{1j} = -\frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{1}{(1 - \beta^2)^{0,5}} \exp(-\beta\omega_0 t) \cos\left((1 - \beta^2)^{0,5} \omega_0 t + \arcsin \beta\right) \right);$$

для колебательного звена при $\beta = 1$ –

$$a_{1j} = -\frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t);$$

для колебательного звена при $\beta > 1$ –

$$a_{1j} = \frac{t}{x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{2(\beta^2 - 1)^{0,5}} \left(\frac{1}{d} \exp(-d\omega_0 t) - \frac{1}{c} \exp(-c\omega_0 t) \right).$$

2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ ДАТЧИКОВ

Любая погрешность датчика, а также любая совокупность погрешностей в используемой векторно-аналитической модели определяется как длина некоторого в общем криволинейного вектора (см. п. 1.3.3). Таким образом, методика расчета любых погрешностей оказывается единой. На практике наиболее часто приходится выделять следующие виды погрешностей:

- погрешность, получающуюся от отклонения одного из аргументов функции преобразования, происходящего по неизвестной причине, либо из-за отклонения другого аргумента, от которого зависит первый. Её мы будем называть элементарной составляющей полной погрешности. Типичными примерами такой погрешности являются динамическая погрешность и погрешность от температурного ухода отдельного конструктивного параметра;
- погрешность, вызванную воздействием внешнего влияющего фактора (на датчик в целом);
- погрешность, вызванную общей нестабильностью отдельного конструктивного параметра под влиянием суммы причин;
- погрешность, вызванную технологическими допусками на изготовление (отклонения от номинала характеристик материалов и размеров деталей, нарушение местоположения отдельных частей);
- погрешность, вызванную суммой внешних факторов;
- погрешность линейности;
- погрешность гистерезиса;
- суммарную эксплуатационную погрешность.

Рассмотрим последовательно все эти виды погрешностей, относя каждую из них к произвольной точке диапазона преобразования.

1.4. Элементарная составляющая полной погрешности датчика

В соответствии с п. 1.3 эта составляющая должна вычисляться как координата, соответствующая аргументу, отклонение которого служит причиной возникновения погрешности:

$$\gamma_{ij} = 0,5 \int_{a_{ja}}^{a_{jb}} a_{ij} da_j .$$

(551)

Если речь идёт о систематической составляющей, то a_{ij} и da_j должны соответствовать (40) и (20), т.е.

$$\gamma_{cij} = \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+\Delta x_j} \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j \cong \frac{1}{y} \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+\Delta x_j} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{y_{ij}(x_{j0} + \Delta x_j) - y_{ij}(x_{j0})}{y}, \quad (552)$$

где y_{ij} – выходная величина, изменяющаяся только от изменения x_i (значения остальных аргументов фиксированы). Здесь учтено, что y при изменении x_j меняется мало (в пределах погрешности). При $i = j$

$$\gamma_{ci} = \frac{1}{y} (y(x_{i0} + \Delta x_i) - y(x_{i0})).$$

Если $\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = const$, что обычно имеет место, когда постоянны обе производные, то

$$\gamma_{cij} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Delta x_j.$$

Если искомая погрешность случайна, то a_{ij} в (51) определяется согласно (46) а da_j – согласно (25). В результате получаем

$$\gamma_{\partial ij} = \frac{1}{4} \int_0^{P_\partial} \left(\frac{1}{|y_{in}| p(x_{ja})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{1}{|y_{ik}| p(x_{jb})} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right) dP_\partial.$$

Учитывая, что $y_{in} \cong y_{ik} \cong y$, где y – в данном случае матожидание, и заменяя $p(x_{ja})$ и $p(x_{jb})$ на их выражения подобно тому, как это сделано в (25), имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{\partial ij} &= \frac{1}{4|y|} \int_0^{P_\partial} \left(\frac{\partial x_{ja}}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{\partial x_{jb}}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right) dP_\partial = \\ &= \frac{1}{4|y|} \left(\int_0^{P_\partial} \frac{\partial x_{ja}}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| dP_\partial + \int_0^{P_\partial} \frac{\partial x_{jb}}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| dP_\partial \right). \end{aligned}$$

(553)

Выразим dP_∂ в первом интеграле через dP_a , а во втором – через dP_b согласно (22). Соответственно изменим пределы интегрирования (см. (10) и (12)). Тогда окончательно

$$\gamma_{\partial ij} = \frac{1}{2|y|} \left(\int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{\partial x_{jb}}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| dP_b - \int_{0,5}^{(1-P_0)/2} \frac{\partial x_{ja}}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| dP_a \right).$$

Как легко увидеть, выражение в скобках последней формулы представляет абсолютный доверительный интервал величины y . Два его слагаемых суть отклонения доверительных границ y (по модулю) от его значения, соответствующего вероятности 0,5, т.е. от медианы. Поскольку погрешности, как правило, распределены симметрично /5/, эти отклонения можно считать одинаковыми. В таком случае, удваивая первое слагаемое за счёт второго и устраняя индексы « b » и « k », которые теперь теряют смысл, получаем, если изменение y в зависимости от x_i также оказывается монотонным,

$$\gamma_{\partial ij} = \frac{1}{|y|} \int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{\partial x_j}{\partial P} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| dP = \left| \frac{y_{ij}(x_{jb}) - y_{ij}(x_{ja})}{2y} \right|.$$

(554)

При $i = j$

$$\gamma_{\partial ij} = \left| \frac{y(x_{jb}) - y(x_{ja})}{2y} \right|.$$

Если можно принять $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \text{const}$, то

$$\gamma_{\partial ij} = \left| \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| \int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{dx_i}{dP} dP,$$

что при исходном условии симметрии распределения погрешности подразумевает симметрию распределения x_i , а отсюда

$$\gamma_{\partial ij} = \left| \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| \Delta x_j,$$

где Δx_j – доверительное отклонение величины x_j .

Для лучшей ориентировки читателя полученные формулы для общего случая сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Формулы элементарной составляющей γ_{ij} полной погрешности датчика

Характер формулы и особые условия	Систематическая	Случайная
Общий случай: геометрическая	$\gamma_{ij} = 0,5 \int_{a_{ja}}^{a_{jb}} a_{ij} da_j$	
Общий случай: Аналитическая	$\frac{y_{ij}(x_{j0} + \Delta x_j) - y_{ij}(x_{j0})}{y}$	$\left \frac{y_{ij}(x_{jb}) - y_{ij}(x_{ja})}{2y} \right $
$i = j$	$\frac{y(x_{i0} + \Delta x_i) - y(x_{i0})}{y}$	$\left \frac{y(x_{ib}) - y(x_{ia})}{2y} \right $
$\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = const$	$\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Delta x_j$	$\left \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Delta x_j \right $

Все элементарные составляющие погрешности для примера – векторного приёмника приведены в табл. 1. Нетрудно видеть, что в этом случае матрица аффинора диагональна, т.е. нет взаимного влияния координат входного вектора. Возникает вопрос о температуре. Её влияние оценено сразу по всем температурозависимым параметрам. Это означает, что $a_{66} \neq 0$ в противоположность рис. 19, где $a_{66} = 0$, но имеются иные ненулевые координаты 6-го столбца, т.е. температурная зависимость оценивается по каждому температурозависимому параметру в отдельности.

1.5. Погрешность, вызванная воздействием внешнего фактора

Общая формула этой погрешности получается суммированием выражений вида (51) по i , что означает суммарный эффект от воздействия внешнего фактора, представляемого j -той координатой, на все переменные-координаты, т.е. на датчик в целом:

$$\gamma_j = 0,5 \int_{a_{ja}}^{a_{jb}} \left(\sum_{i=2}^n a_{ij} \right) da_j,$$

где суммирование проводится, начиная с индекса 2, поскольку индекс 1 принадлежит измеряемой величине.

Для систематической составляющей, суммируя (52), получаем

$$\gamma_{cj} \cong \frac{1}{y} \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+\Delta x_j} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \frac{1}{y} \sum_{i=2}^n (y_{ij}(x_{j0} + \Delta x_j) - y_{ij}(x_{j0})).$$

Пусть

$$x_i = x_{i0} (1 + \alpha_{ij}(x_j - x_{j0})),$$

(555)

где x_{i0} – значение x_i при $x_j = x_{j0}$, α_{ij} – коэффициент влияния j -того влияющего фактора на i -тую переменную (например, температурный коэффициент). Тогда

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \alpha_{ij} x_{i0}, \text{ и}$$

$$\gamma_{cj} \cong \frac{1}{y} \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+\Delta x_j} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) dx_j.$$

Если можно считать, что все $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ в пределах изменения x_j постоянны, то

$$\gamma_{cj} \cong \frac{1}{y} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) \Delta x_j.$$

Если внешний влияющий фактор представляет случайную величину, и, следовательно, соответствующая погрешность случайна, если при этом опять-таки зависимость y от x_j монотонна, следует просуммировать по i (54):

$$\gamma_{\partial j} = \frac{1}{|y|} \int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{\partial x_j}{\partial P} \left| \sum_{i=2}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| dP = \frac{1}{2|y|} \left| \sum_{i=2}^n (y_{ij}(x_{jb}) - y_{ij}(x_{ja})) \right|.$$

При выполнении для всех i условия (55) получается

$$\gamma_{\partial j} = \frac{1}{|y|} \int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{\partial x_j}{\partial P} \left| \sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right| dP.$$

Если можно принять, что все $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \text{const}$, то

$$\gamma_{\partial j} \cong \left| \frac{1}{y} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) \right| \Delta x_j.$$

(556)

Чаще всего плотность распределения внешних факторов x_j спадает по краям, но в некоторых случаях может быть принято и равномерным. В последнем случае

$$\frac{dx_j}{dP} = \frac{1}{p(x_j)} = 2\Delta x_{jm},$$

где Δx_{jm} – предельное отклонение x_j . Отсюда

$$\gamma_{\partial j} \cong \frac{2\Delta x_{jm}}{|y|} \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+P_0\Delta x_{jm}} \left| \sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| dx_j.$$

Как и в предыдущем случае, полученные формулы сведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Формулы погрешности γ_j , вызванной воздействием внешнего фактора x_j

Характер формулы и особые условия	Систематическая	Случайная
Общий случай: геометрическая	$0,5 \int_{a_{ja}}^{a_{jb}} \left(\sum_{i=2}^n a_{ij} \right) da_j$	
Общий случай: аналитическая	$\frac{1}{y} \sum_{i=2}^n (y_{ij}(x_{j0} + \Delta x_j) - y_{ij}(x_{j0}))$	$\frac{1}{2 y } \left \sum_{i=2}^n (y_{ij}(x_{jb}) - y_{ij}(x_{ja})) \right $
$x_i =$ $= x_{i0} (1 + \alpha_{ij}(x_j - x_{j0}))$	$\frac{1}{y} \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+\Delta x_j} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) dx_j$	$\frac{1}{ y } \int_{0,5}^{(1+P_0)/2} \frac{\partial x_j}{\partial P} \left \sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right dP$
$x_i =$ $= x_{i0} (1 + \alpha_{ij}(x_j - x_{j0}))$, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = const$	$\frac{1}{y} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) \Delta x_j$	$\left \frac{1}{y} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \alpha_{ij} x_{i0} \right) \right \Delta x_j$
x_j распределен равномерно	—	$\frac{2\Delta x_{jm}}{ y } \int_{x_{j0}}^{x_{j0}+P_0\Delta x_{jm}} \left \sum_{i=2}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right dx_j$

Погрешность данного вида тоже может быть получена путем статистического моделирования, как и все последующие (подробнее об этом – в п. 2.9).

В качестве примера определим температурную погрешность векторного приёмника. Поскольку для всех его параметров выполняются условия (55), и их температурные изменения невелики, можно использовать формулу (56), принимающую вид

$$\gamma_{\partial 6} \cong \left| \frac{1}{\dot{U}_x} \left(\sum_{i=2}^{23} \frac{\partial \dot{U}_x}{\partial x_i} \alpha_{j6} x_{i0} \right) \right| \Delta t . \quad (557)$$

Так как в этом случае $\alpha_{ij} x_{i0} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$, то после внесения u под знак суммы мы с

учётом (41) получаем под этим знаком $\frac{a_{ij}}{x_j}$, где a_{ij} – координата аффинора для

систематических изменений. Следовательно, мы можем воспользоваться данными рис. 19, где приведена часть аффинора, связывающая именно систематические изменения. На рис. 19 отсутствуют координаты $a_{22\ 6}$ и $a_{23\ 6}$, соответствующие $i = 22$ и $i = 23$. Для этих слагаемых используем непосредственно формулу (57). В результате температурная погрешность векторного приёмника оказывается с вероятностью 0,95, не превышающей 5%.

1.6. Погрешность, вызванная нестабильностью конструктивного параметра

В этом случае (51) следует просуммировать по j , т.е. учесть влияние на i -тый конструктивный параметр всех возможных причин:

$$\gamma_i = 0,5 \int \sum_{a_{ja}}^{a_{jb}} \sum_{j=2}^n a_{ij} da_j . \quad (558)$$

Ситуация, в которой задаётся совокупность систематических, т.е. детерминированных отклонений различных факторов, влияющих на x_i , представляется маловероятной, ввиду чего рассмотрение соответствующей систематической погрешности вряд ли имеет смысл. Поэтому будем считать данную погреш-

ность случайной. При этом сумму (58) следует определять как геометрическую, поскольку суммирование по j означает сложение векторов.

Запишем (2) для элемента длины выходного вектора da_{yi} , порожденного суммарной нестабильностью i -того конструктивного параметра:

$$da_{yi}^2 = \sum_{k,l=2}^n g_{kl} da_{yik} da_{yil}, \quad (559)$$

где $da_{yik} = a_{ik} da_k$, $da_{yil} = a_{il} da_l$. Отсюда, используя (58) и подразумевая интегрирование по доверительной вероятности, получим

$$\gamma_i = \int_0^{P_\partial} \left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} a_{ik} a_{il} da_k da_l \right)^{0,5}. \quad (60)$$

Для получения развернутого аналитического вида последней формулы учтем, что в (33) $y' = (y(x_k))^{\alpha_k} (y(x_l))^{\alpha_l}$, где $y(x_k)$ и $y(x_l)$ – значения y при изменении параметра x_i под влиянием самопроизвольных изменений x_k и x_l , и что вместо da_{yi} и da_{yj} должны быть подставлены соответственно da_{yik} и da_{yil} . Далее подставим в (60) a_{ik} согласно (46) и da_k согласно (25). Тогда после сокращения получим

$$da_{yik} = \frac{1}{4|y|} \left(\frac{\partial x_k}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{\partial x_k}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right) dP_\partial = \frac{A_k}{4|y|} dP_\partial, \quad (61)$$

где $A_k = \frac{\partial x_k}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{\partial x_k}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right|$. Необходимая для вычисления значения g_{kl} (см. (33)) производная

$$\frac{da'}{da_{yik}} = \frac{|y|}{A_k} \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right).$$

Для κ_{kl} , исходя из (61), имеем

$$\kappa_{kl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \left(\frac{\partial x_l}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \frac{\partial x_l}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right).$$

В результате для МТ получается

$$g_{kl} = \frac{1}{2\kappa_{kl}} \left(\frac{y^2}{\alpha_k^2 A_k^2} \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - 1 - \kappa_{kl}^2 \right).$$

Оставшаяся часть выражения под знаком суммы в (60) представляет произведение $(a_{ik} da_k)(a_{il} da_l)$, где каждый сомножитель, взятый в скобки, повторяет (61). Таким образом, окончательно

$$\gamma_i = \frac{1}{4|y|} \int_0^{P_\delta} \left(\frac{1}{2} \sum_{k,l=2}^n \frac{1}{\alpha_l} \left(y^2 \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_k A_k^2 (1 - \kappa_{kl}^2) \right) \right)^{0,5} dP_\delta, \quad (62)$$

где зависимость подынтегрального выражения от P_δ выражается тем, что все производные, а также y'_a и y'_b определяются в точках, соответствующих

$$P_a = \frac{1 - P_\delta}{2} \text{ и } P_b = \frac{1 + P_\delta}{2}.$$

Произведем возможные упрощения (62). Предположим, что распределения всех переменных - координат входного вектора, определяющих нестабильность i -того конструктивного параметра, симметричны. Это означает,

что $\frac{dx_k}{dP_a} = \frac{dx_k}{dP_b}$ и $\frac{dx_l}{dP_a} = \frac{dx_l}{dP_b}$. При этом

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{dx_k}{dP_a} \left(\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right), \\ \kappa_{kl} &= \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \frac{dx_l}{dP_a} \left(\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right). \end{aligned} \quad (63)$$

При равномерном распределении всех переменных

$$\begin{aligned} A_k &= 2\Delta x_{km} \left(\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right), \\ \kappa_{kl} &= \frac{2\alpha_l \Delta x_{lm}}{\alpha_k A_k} \left(\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right). \end{aligned}$$

Второе упрощение получается, если для всех переменных x_i можно принять линейную взаимосвязь вида (55). Тогда $\frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} = \alpha_{ik} x_{i0}$,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} = \alpha_{il} x_{i0}, \text{ и}$$

$$A_k = \alpha_{ik} x_{i0} \left(\left| \frac{dx_k}{dP_a} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{dx_k}{dP_b} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right),$$

$$\kappa_{kl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \alpha_{il} x_{i0} \left(\left| \frac{dx_l}{dP_a} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{dx_l}{dP_b} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right).$$

При выполнении обоих условий – симметричности распределений и линейности зависимостей

$$A_k = \alpha_{ik} x_{i0} \frac{dx_k}{dP_a} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right),$$

$$\kappa_{kl} = \frac{\alpha_l \alpha_{il} x_{i0}}{\alpha_k A_k} \frac{dx_l}{dP_a} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right| \right) = \frac{\alpha_l \alpha_{il}}{\alpha_k \alpha_{ik}} \frac{dx_l}{dP_a} \bigg/ \frac{dx_k}{dP_a}.$$

Наиболее радикальное упрощение достигается при использовании евклидова приближения, когда МТ в области интегрирования принимает постоянное значение. В этом случае он определяется по (34), где в качестве γ_i , γ_j и γ выступают соответствующие погрешности по выходной величине у γ_{yi} , γ_{yj} и γ_y . Если последние некоррелированы между собой (а это в принятой модели почти всегда так), и их ЗР соответствуют рис. 11 ÷ 14, значения МТ могут быть взяты непосредственно из этих графиков. Выражение искомой погрешности в этом случае легко получается из (60):

$$\gamma_i = \left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} \gamma_{ik} \gamma_{il} \right)^{0,5}, \quad (64)$$

а при монотонности зависимостей $x_i = x_i(x_k)$, $y = y(x_k)$

$$\gamma_i = \frac{1}{2|y|} \left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} |y_{ik}(x_{kb}) - y_{ik}(x_{ka})| |y_{il}(x_{lb}) - y_{il}(x_{la})| \right)^{0,5}.$$

Формулы, полученные для данной погрешности, сведены в табл. 4.

Для примера найдём погрешность от общей нестабильности степени успокоения β векторного приемника. Эта нестабильность складывается из температурных $\gamma_{16\ 6}$ и технологических $\gamma_{16\ 16}$ колебаний β . Используем формулу (64), которая в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\gamma_{16} = \left(\gamma_{166}^2 + 2g_{616}\gamma_{166}\gamma_{1616} + \gamma_{1616}^2 \right)^{0,5}.$$

Поскольку увеличение степени успокоения всегда ведёт к снижению чувствительности, т.е. зависимость $U_x = f(\beta)$ монотонна, мы можем для определения $\gamma_{16\ 6}$ применить формулу (54):

$$\gamma_{166} = \left| \frac{U_{x166}(t_b) - U_{x166}(t_a)}{2U_x} \right| = 2,67 \cdot 10^{-2}\%.$$

Из табл. 1 следует, что $\gamma_{16\ 16} = 4,58 \cdot 10^{-2}\%$.

Т а б л и ц а 4

Формулы погрешности γ_i от нестабильности конструктивного параметра x_i

Характер формулы и особые условия	Формула
Общий случай: геометрическая	$\int_0^{P_0} \left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} a_{ik} a_{il} da_k da_l \right)^{0,5}$
Общий случай: аналитическая	$\frac{1}{4 y } \int_0^{P_0} \left(\frac{1}{2} \sum_{k,l=2}^n \frac{1}{\alpha_l} \left(y^2 \left(\frac{1}{ y'_a } \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{ y'_b } \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_k A_k^2 (1 - \kappa_{kl}^2) \right) \right)^{0,5} dP_0,$ $A_k = \frac{\partial x_k}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \frac{\partial x_k}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right , \quad \kappa_{kl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \left(\frac{\partial x_l}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \frac{\partial x_l}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right)$
Распределения аргументов параметра x_i симметричны	То же при $A_k = \frac{dx_k}{dP_a} \left(\left \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right), \kappa_{kl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \frac{dx_l}{dP_a} \left(\left \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right).$
Распределения аргументов параметра x_i равномерны	То же при $A_k = 2\Delta x_{km} \left(\left \frac{\partial x_i}{\partial x_{ka}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{kb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right), \kappa_{kl} = \frac{2\alpha_l \Delta x_{lm}}{\alpha_k A_k} \left(\left \frac{\partial x_i}{\partial x_{la}} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{\partial x_i}{\partial x_{lb}} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right).$
Взаимосвязь переменных линейна	То же при $A_k = \alpha_{ik} x_{i0} \left(\left \frac{dx_k}{dP_a} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{dx_k}{dP_b} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right), \kappa_{kl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_k A_k} \alpha_{il} x_{i0} \left(\left \frac{dx_l}{dP_a} \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{dx_l}{dP_b} \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right).$
Одновременное выполнение двух последних условий	То же при $A_k = \alpha_{ik} x_{i0} \frac{dx_k}{dP_a} \left(\left \frac{\partial y}{\partial x_{in}} \right + \left \frac{\partial y}{\partial x_{ik}} \right \right), \kappa_{kl} = \frac{\alpha_l \alpha_{il}}{\alpha_k \alpha_{ik}} \frac{dx_l}{dP_a} \bigg/ \frac{dx_k}{dP_a}.$

Продолжение табл. 4

Характер формулы и особые условия	Формула
Евклидово приближение	$\left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} \gamma_{ik} \gamma_{il} \right)^{0,5}$
Евклидово приближение при монотонности зависимостей $x_i = x_i(x_k), y = y(x_k)$	$\frac{1}{2 y } \left(\sum_{k,l=2}^n g_{kl} y_{ik}(x_{kb}) - y_{ik}(x_{ka}) y_{il}(x_{lb}) - y_{il}(x_{la}) \right)^{0,5}$

Для γ_{16} будет достаточным приближением считать, что её распределение совпадает с нормальным распределением вызвавшей её температуры. γ_{16} распределена равномерно (см. табл. 1).

Отношение погрешностей

$$\kappa = \frac{\gamma_{166}}{\gamma_{1616}} = 0,58.$$

По кривой — — — рис. 13 находим:

$$g_{616} = 0,12.$$

Окончательно

$$\gamma_{16} = ((2,67 \cdot 10^{-2})^2 + 2 \cdot 0,12 \cdot 2,67 \cdot 10^{-2} \cdot 4,58 \cdot 10^{-2} + (4,58 \cdot 10^{-2})^2)^{0,5} \cong 0,06\%.$$

1.7. Погрешность, вызванная технологическими допусками

Выражение этой погрешности γ_m должно отличаться от (58) дополнительным суммированием по i , причём суммирование как по i , так и по j необходимо осуществлять в пределах номеров, представляющих конструктивные параметры, т.е. в соответствии с рис. 3 $i, j = l + 1 \div m$. Таким образом,

$$\gamma_m = \int \sum_{i,j=l+1}^m a_{ij} da_j.$$

В данном случае погрешность, разумеется, случайна. При этом для элемента длины выходного вектора da_{ym} по аналогии с (59) имеем

$$da_{ym}^2 = \sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} da_{yi} da_{yj},$$

где $da_{yi} = \left(\sum_{p=l+1}^m a_{pi} \right) da_i$, $da_{yj} = \left(\sum_{p=l+1}^m a_{pj} \right) da_j$, a_{pi} и a_{pj} — элементы части 6 подматрицы 4 аффинора. Отсюда

$$\gamma_m = \int \left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} da_{yi} da_{yj} \right)^{0,5}.$$

Используя в качестве g_{ij} (33), подставим в da_{yi} a_{pi} согласно (46) и da_i согласно (25). Тогда после сокращения получим

$$da_{yi} = \frac{1}{4|y|} \sum_{p=l+1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right) dP_\partial = \frac{A_i}{4|y|} dP_\partial, \quad (65)$$

где $A_i = \sum_{p=l+1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right)$. Необходимая для вычисления

значения g_{ij} (см. (33)) производная

$$\frac{da'}{da_{yi}} = \frac{|y|}{A_i} \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right).$$

Для κ_{ij} , исходя из (65), имеем

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=l+1}^m \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right).$$

В результате для МТ получается

$$g_{ij} = \frac{1}{2\kappa_{ij}} \left(\frac{y^2}{\alpha_i^2 A_i^2} \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - 1 - \kappa_{ij}^2 \right).$$

Искомая погрешность имеет точно такой же вид, что и (62):

$$\gamma_m = \frac{1}{4|y|} \int_0^{P_\delta} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=l+1}^m \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_\delta.$$

Произведем возможные упрощения. При симметричных распределениях всех допусков

$$A_i = \frac{dx_i}{dP_a} \sum_{p=l+1}^m \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \frac{dx_j}{dP_a} \sum_{p=l+1}^m \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right).$$

Если эти распределения равномерны,

$$A_i = 2\Delta x_{im} \sum_{p=l+1}^m \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{2\alpha_j \Delta x_{jm}}{\alpha_i A_i} \sum_{p=l+1}^m \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right).$$

Далее, поскольку взаимные влияния конструктивных параметров маловероятны, следует, как правило, ожидать, что все a_{ij} при $i \neq j$ окажутся нулевыми, и

останутся только диагональные координаты аффинора a_{ii} . В этом случае $da_{yi} = a_{ii}da_i$, $da_{yj} = a_{jj}da_j$, откуда

$$A_i = \frac{dx_i}{dP_a} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right| + \frac{dx_i}{dP_b} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right|,$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \left(\frac{dx_j}{dP_a} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ja}} \right| + \frac{dx_j}{dP_b} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{jb}} \right| \right).$$

При симметричности распределений и диагональности матрицы аффинора

$$A_i = \frac{dx_i}{dP_a} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{dx_j}{dP_a} \bigg/ \frac{dx_i}{dP_a}.$$

Наконец, в евклидовом приближении

$$\gamma_m = \left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}, \quad (66)$$

где γ_i , γ_j – погрешности по выходу от «самопроизвольного» технологического разброса i -того и j -того параметров, а при монотонности зависимостей $y = y(x_i)$, $y = y(x_j)$

$$\gamma_m = \frac{1}{2|y|} \left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} |y(x_{ib}) - y(x_{ia})| |y(x_{jb}) - y(x_{ja})| \right)^{0,5}. \quad (67)$$

Формулы, полученные для данной погрешности, сведены в табл. 5.

При использовании для датчика-примера формулы (66) получаем

$$\gamma_m = \left(\sum_{i,j=7}^{23} g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5} \cong 7,2\%.$$

1.8. Погрешность, вызванная суммой внешних факторов

Общая формула этой погрешности по виду должна совпадать с первой формулой табл. 4, т.к. механизм влияния внешних факторов в принципе тот же, что и технологических допусков. Измениться должны лишь координаты, по которым производится суммирование. Тогда геометрическая формула погрешности будет

Т а б л и ц а 5

Формулы погрешности γ_m , вызванной технологическими допусками

Характер формулы и особые условия	Формула
Общий случай: геометрическая	$\int_0^{P_0} \left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} \left(\sum_{p=l+1}^m a_{pi} \right) \left(\sum_{p=l+1}^m a_{pj} \right) da_i da_j \right)^{0,5}$
Общий случай: аналитическая	$\frac{1}{4 y } \int_0^{P_0} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=l+1}^m \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{ y'_a } \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{ y'_b } \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_0,$ $A_i = \sum_{p=l+1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right),$ $\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=l+1}^m \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right)$
Отсутствуют взаимные влияния конструктивных параметров	То же при $A_i = \frac{dx_i}{dP_a} \left \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right + \frac{dx_i}{dP_b} \left \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right $, $\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \left(\frac{dx_j}{dP_a} \left \frac{\partial y}{\partial x_{ja}} \right + \frac{dx_j}{dP_b} \left \frac{\partial y}{\partial x_{jb}} \right \right)$.
Предыдущее условие при симметричности распределений	То же при $A_i = \frac{dx_i}{dP_a} \left(\left \frac{\partial y}{\partial x_{ia}} \right + \left \frac{\partial y}{\partial x_{ib}} \right \right)$, $\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{dx_j}{dP_a} / \frac{dx_i}{dP_a}$.
Евклидово приближение	$\left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}$

Продолжение табл. 5

Характер формулы и особые условия	Формула
Евклидово приближение при монотонности зависимостей $y = y(x_i), y = y(x_j)$	$\frac{1}{2 y } \left(\sum_{i,j=l+1}^m g_{ij} y(x_{ib}) - y(x_{ia}) y(x_{jb}) - y(x_{ja}) \right)^{0,5}$

$$\gamma_\phi = \int_0^{P_\phi} \left(\sum_{i,j=m+1}^n g_{ij} \left(\sum_{p=2}^n a_{pi} \right) \left(\sum_{p=2}^n a_{pj} \right) da_i da_j \right)^{0,5}. \quad (68)$$

Отсюда по аналогии с п. 2.4 получаем

$$\gamma_\phi = \frac{1}{4|y|} \int_0^{P_\phi} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^n \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_\phi, \quad (69)$$

$$\text{где } A_i = \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^m \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right).$$

Произведём возможные упрощения. При выполнении для всех p, i и j условия (55) (линейная зависимость)

$$A_i = \sum_{p=2}^n \left| \alpha_{pi} x_{p0} \left(\frac{dx_i}{dP_a} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{dx_i}{dP_b} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right) \right|,$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left| \alpha_{pj} x_{p0} \left(\frac{dx_j}{dP_a} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{dx_j}{dP_b} \left| \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right) \right|.$$

Если при этом можно принять, что все $\frac{\partial y}{\partial x_p} = \text{const}$, то

$$A_i = \left(\frac{dx_i}{dP_a} + \frac{dx_i}{dP_b} \right) \sum_{p=2}^n \left| \alpha_{pi} x_{p0} \frac{\partial y}{\partial x_p} \right|,$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \left(\frac{dx_j}{dP_a} + \frac{dx_j}{dP_b} \right) \sum_{p=2}^n \left| \alpha_{pj} x_{p0} \frac{\partial y}{\partial x_p} \right|.$$

В евклидовом приближении

$$\gamma_\phi = \left(\sum_{i,j=m+1}^n g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}, \quad (70)$$

где γ_i, γ_j – погрешности по выходу от влияния i -того и j -того факторов, определяемые по правилам п. 2.2 (3-й столбец табл. 3).

Формулы, полученные для данной погрешности, сведены в табл. 6.

Как указывалось в п. 1.3.2, к внешним факторам, влияющим на работу датчика-примера, относятся поперечные составляющие ускорения A_y и A_z , а также плотность и температура окружающей водной среды. В соответствии с этим, при использовании формулы (70) индексы суммирования принимают значения 2, 3, 5 и 6 (см. табл. 1). Тогда для искомой погрешности получаем: $\gamma_\phi = 5,9\%$.

1.9. Погрешность линейности

Абсолютное значение этой погрешности в точке x диапазона преобразования определяется как

$$\Delta y_l(x) = y_p(x) - y_n(x),$$

где y_p и y_n – соответственно реальная и номинальная (линейная) функции преобразования, а относительное значение

$$\gamma_l(x) = \frac{y_p(x) - y_n(x)}{y_n(x)}. \quad (71)$$

$y_p(x)$ может быть представлено степенным рядом $y_p(x) = \sum_0^q b_k x^k$. Что касается $y_n(x)$, то, поскольку эта функция линейна, $y_n(x) = b_{0n} + b_{1n}x$, где b_{0n} и b_{1n} – коэффициенты, определяемые из условия минимума погрешности линейности, например, методом наименьших квадратов.

Поскольку данная погрешность имеет единственное значение в каждой точке диапазона преобразования, она является систематической.

Как и динамическая погрешность, погрешность линейности определяется непосредственно и достаточно просто. Однако единый подход к погрешностям любого вида, обеспечиваемый используемой векторно-аналитической моделью, требует и здесь определенной «жертвы», вполне оправданной достоинствами формализованной схемы. Эта «жертва» заключается в необходимости представления погрешности линейности с помощью соответствующих координат входного вектора и аффинора.

Число необходимых координат входного вектора определяется числом независимых переменных, входящих в (71) и по своему характеру являющихся конструктивными параметрами. Подставляя в эту формулу выражения $y_p(x)$ и $y_n(x)$,

Т а б л и ц а 6

Формулы погрешности γ_ϕ , вызванной суммой внешних факторов

Характер формулы и особые условия	Формула
Общий случай: геометрическая	$\int_0^{P_\partial} \left(\sum_{i,j=m+1}^n g_{ij} \left(\sum_{p=2}^n a_{pi} \right) \left(\sum_{p=2}^n a_{pj} \right) da_i da_j \right)^{0,5}$
Общий случай: аналитическая	$\frac{1}{4 y } \int_0^{P_\partial} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^n \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{ y'_a } \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{ y'_b } \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_\partial,$ $A_i = \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right), \kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right)$
Линейная зависимость от внешних факторов	<p>То же при</p> $A_i = \sum_{p=2}^n \left \alpha_{pi} x_{p0} \left(\frac{dx_i}{dP_a} \left \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{dx_i}{dP_b} \left \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right) \right , \kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left \alpha_{pj} x_{p0} \left(\frac{dx_j}{dP_a} \left \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{dx_j}{dP_b} \left \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right) \right $
Предыдущее условие и $\frac{\partial y}{\partial x_p} = const$	<p>То же при $A_i = \left(\frac{dx_i}{dP_a} + \frac{dx_i}{dP_b} \right) \sum_{p=2}^n \left \alpha_{pi} x_{p0} \frac{\partial y}{\partial x_p} \right ; \kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \left(\frac{dx_j}{dP_a} + \frac{dx_j}{dP_b} \right) \sum_{p=2}^n \left \alpha_{pj} x_{p0} \frac{\partial y}{\partial x_p} \right .$</p>
Евклидово приближение	$\left(\sum_{i,j=m+1}^n g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}$

получим

$$\gamma_{\text{л}}(x) = \frac{\Delta b_0 + \Delta b_1 x + \sum_0^q b_k x^k}{y_{\text{н}}(x)}, \quad (72)$$

где $\Delta b_0 = b_0 - b_{0\text{н}}$, $\Delta b_1 = b_1 - b_{1\text{н}}$. Если Δb_0 , Δb_1 и все b_k взаимно независимы, то координатами входного вектора являются $\frac{d(\Delta b_0)}{\Delta b_0}$, $\frac{d(\Delta b_1)}{\Delta b_1}$ и все $\frac{db_k}{b_k}$.

Соответствующие координаты аффинора в данном случае являются диагональными и должны определяться по (42), где $\frac{\partial y}{y} = \partial \gamma_{\text{л}}(x)$, т.е.

$$a_{ii} = \frac{\partial \gamma_{\text{л}}(x)}{\partial x_k} x_k.$$

Используя (72) и считая условно, что первая из координат входного вектора, ответственных за нелинейность, имеет номер 2, получаем

$$a_{22} = \frac{\Delta b_0}{y_{\text{н}}(x)}, a_{33} = \frac{\Delta b_1 x}{y_{\text{н}}(x)}, a_{ii}|_{i=4 \div q+2} = \frac{b_k x^k}{y_{\text{н}}(x)}.$$

В силу постоянства этих координат геометрическое выражение погрешности линейности получается в виде

$$\gamma_{\text{л}}(x) = \sum_i a_{ii} \Delta a_i,$$

где Δa_i – координаты входного вектора. Поскольку все коэффициенты при степенях x в числителе (72) в идеале должны равняться нулю, их отклонения, определяющие погрешность, равны самим значениям этих коэффициентов. Но в таком случае все Δa_i принимают значение 1, и

$$\gamma_{\text{л}}(x) = \sum_i a_{ii}.$$

1.10. Погрешность гистерезиса

Гистерезис реальной функции преобразования в той или иной мере присущ всем датчикам, в структуре которых содержатся упругие или магнитные элементы. Он характерен также для датчиков, содержащих кинематические цепи. Гистерезис проявляется в вариации показаний при медленном подходе к заданной точке функции преобразования, который осуществляется со стороны больших и меньших значений входной величины. Вследствие этого градуировочные

характеристики, полученные при последовательном увеличении значений входной величины (прямая ветвь) и при их уменьшении (от верхней границы диапазона преобразования до нижней), не совпадают (рис. 20).

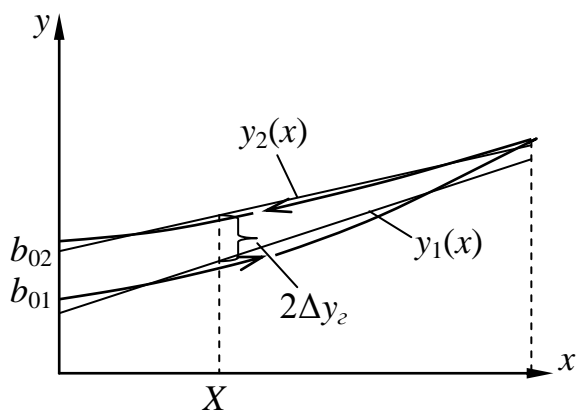


Рис. 20

Погрешность данного вида выделяется среди прочих тем, что наиболее частая причина ее возникновения – внутреннее трение – не поддается математическому описанию, вследствие чего погрешность носит феноменологический характер. Ввиду этого не может быть указана координата входного вектора, «ответственная» за эту погрешность. Она должна определяться эксперимен-

тальным путем.

Для этого реальную функцию преобразования аппроксимируют двумя прямыми y_1 и y_2 , соответствующими прямому и обратному ходу градуировки (рис. 20) /8/. Пусть уравнения этих прямых имеют вид

$$y_1(x) = b_{01} + b_{11}x; \quad y_2(x) = b_{02} + b_{12}x.$$

На практике (в процессе измерения) изменение измеряемой величины в прямом направлении происходит так же часто, как и в обратном. Изменение выходного сигнала в функции от входной величины происходит по частным гистерезисным циклам, которые лежат внутри области, ограниченной ветвями реальной градуировочной характеристики. Таким образом, можно предположить, что значения выходного сигнала при конкретном значении $x = X$ с равной вероятностью (равномерное распределение) могут попасть в любую точку интервала $2\Delta y_2$ (рис. 20). Этот интервал неопределенности, вызванной гистерезисом, приблизительно можно определить как разность спрямлённых градуировочных характеристик прямого и обратного хода:

$$2\Delta y_2 = b_{02} + b_{12}x - b_{01} - b_{11}x = b_{02} - b_{01} + (b_{12} - b_{11})x.$$

Интервал абсолютных погрешностей от гистерезиса определится как

$$\Delta y_2 = \pm 0,5(b_{02} - b_{01} + (b_{12} - b_{11})x),$$

а максимальная относительная погрешность –

$$\gamma_{em} = \frac{1}{2y} (b_{02} - b_{01} + (b_{12} - b_{11})x).$$

Доверительная погрешность от гистерезиса (ср. 38)

$$\gamma_{\varepsilon} = \frac{P_{\partial}}{2y} (b_{02} - b_{01} + (b_{12} - b_{11})x).$$

Данная погрешность, очевидно, не коррелирована ни с одним из входных воздействий, ввиду чего ее учет должен производиться с использованием кривых на рис. 11 ÷ 14, для которых одно из распределений равномерное.

Несмотря на вышеупомянутый особый характер этой погрешности, может быть предложен формальный путь ее включения в общую схему, в результате чего она может вычисляться по формуле (51). При этом в качестве da_j может

быть взят $d\gamma_{\varepsilon} = \frac{1}{2y} (b_{02} - b_{01} + (b_{12} - b_{11})x)dP_{\partial}$, а координата аффинора

$a_{jj} = 1$. По виду дестабилизирующего воздействия данная погрешность относится к конструктивным параметрам.

1.11. Суммарная эксплуатационная погрешность

Данный раздел по сути не должен содержать ничего нового, он является обобщающим итогом предыдущих. Общая формула суммарной погрешности γ_{Σ} совпадает по виду с (68), отличаясь лишь областью суммирования: в данном, общем случае оно должно проводиться по всему моделирующему пространству, т.е. все индексы суммирования обязаны пробегать значения от 2 до n :

$$\gamma_{\Sigma} = \int_0^{P_{\partial}} \left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} \left(\sum_{p=2}^n a_{pi} \right) \left(\sum_{p=2}^n a_{pj} \right) da_i da_j \right)^{0,5}.$$

Отсюда (ср. (69))

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{1}{4|y|} \int_0^{P_{\partial}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{|y'_a|} \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{|y'_b|} \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_{\partial},$$

$$\text{где } A_i = \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| \right).$$

Данный случай является максимально общим, поэтому возможные упрощения могут быть лишь минимальными. Одно из них – принятие для всех независимых переменных равномерного закона распределения, что, как отмечалось выше (п. 1.3.3), целесообразно, если отсутствуют какие-либо сведения о соот-

ветствующих законах. Тогда $\frac{dx_i}{dP_a} = \frac{dx_i}{dP_b} = 2\Delta x_{im}$, $\frac{dx_j}{dP_a} =$
 $= \frac{dx_j}{dP_b} = 2\Delta x_{jm}$, откуда

$$A_i = 2\Delta x_{im} \sum_{p=2}^n \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{2\alpha_j \Delta x_{jm}}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left(\left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right| + \left| \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right| \right).$$

Другим возможным упрощением является евклидово приближение:

$$\gamma_{\Sigma} \cong \left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}, \quad (73)$$

где γ_i, γ_j – погрешности по выходу от влияния i -той и j -той независимых переменных. Так как каждая из последних в самом общем случае влияет на все переменные, эти погрешности должны определяться по формулам 3-го столбца табл. 3. Если зависимости $y = y(x_i)$, $y = y(x_j)$ монотонны, мы имеем подобно (67)

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{1}{2|y|} \left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} |y(x_{ib}) - y(x_{ia})| |y(x_{jb}) - y(x_{ja})| \right)^{0,5}.$$

Формулы суммарной эксплуатационной погрешности сведены в табл. 7.

Т а б л и ц а 7

Формулы суммарной эксплуатационной погрешности γ_Σ

Характер формулы и особые условия	Формула
Общий случай: геометрическая	$\int_0^{P_\partial} \left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} \left(\sum_{p=2}^n a_{pi} \right) \left(\sum_{p=2}^n a_{pj} \right) da_i da_j \right)^{0,5}$
Общий случай: аналитическая	$\frac{1}{4 y } \int_0^{P_\partial} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \frac{1}{\alpha_j} \left(y^2 \left(\frac{1}{ y'_a } \frac{dy'}{dP_a} + \frac{1}{ y'_b } \frac{dy'}{dP_b} \right)^2 - \alpha_i A_i^2 (1 - \kappa_{ij}^2) \right) \right)^{0,5} dP_\partial,$ $A_i = \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_i}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right), \kappa_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial P_a} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \frac{\partial x_j}{\partial P_b} \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right)$
Все распределения равномерны	<p style="text-align: center;">То же при</p> $A_i = 2\Delta x_{im} \sum_{p=2}^n \left(\left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ia}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ib}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right), \kappa_{ij} = \frac{2\alpha_j \Delta x_{jm}}{\alpha_i A_i} \sum_{p=2}^n \left(\left \frac{\partial x_p}{\partial x_{ja}} \frac{\partial y}{\partial x_{pn}} \right + \left \frac{\partial x_p}{\partial x_{jb}} \frac{\partial y}{\partial x_{pk}} \right \right).$
Евклидово приближение	$\left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)^{0,5}$
Евклидово приближе- ние при монотоннос- ти зависимостей $y = y(x_i), y = y(x_j)$	$\frac{1}{2 y } \left(\sum_{i,j=2}^n g_{ij} y(x_{ib}) - y(x_{ia}) y(x_{jb}) - y(x_{ja}) \right)^{0,5}$

Для нашего примера, осуществляя суммирование всех составляющих по формуле (73), находим: $\gamma_{\Sigma} \cong 10\%$.

1.12. Статистическое моделирование погрешностей (метод Монте-Карло)

В заключение покажем, как для метрологического анализа может быть использован метод статистических испытаний, именуемый также методом Монте-Карло.

В этом случае на вход модели подаются не оценки, а сами случайные величины. Они либо моделируются с помощью генератора случайных чисел, либо принадлежат (правда, редко) реальным экспериментальным статистикам. С помощью функциональных взаимосвязей между входными и выходными величинами могут быть определены рассеяния последних, вызываемые различными факторами, а также полное, результирующее рассеяние.

Метод подразумевает наличие эффективного генератора случайных чисел, причем важно, чтобы он был способен генерировать достаточно много некоррелированных случайных выборок, подчиняющихся одному и тому же распределению. Такой генератор содержится, например, в системе MathCAD, являющейся одной из наиболее мощных и универсальных систем, которая ориентирована на IBM-совместимые компьютеры и предназначена для проведения математических и инженерно-технических расчётов. MathCAD содержит мощный вычислитель, очень простой в применении графический процессор и текстовый редактор.

При реализации метода выполняются следующие этапы.

1. *Задание вида входных вероятностных распределений и определение их параметров.* О виде входных распределений говорилось выше (п. 1.3.3). Их параметры нужны для указания генератору случайных чисел, который в общем случае требует показателей положения μ и рассеяния r . Эти показатели у распределений, не имеющих чётких границ, находятся из системы уравнений

$$F(x_{\min}, \mu, r) = \frac{1 - P_d}{2},$$
$$F(x_{\max}, \mu, r) = \frac{1 + P_d}{2},$$

где F – функция распределения, x_{\min} и x_{\max} – доверительные границы параметра, P_d – доверительная вероятность. Справедливость этих уравнений подтверждает

рис. 21. Например, для нормального распределения второе уравнение выглядит как

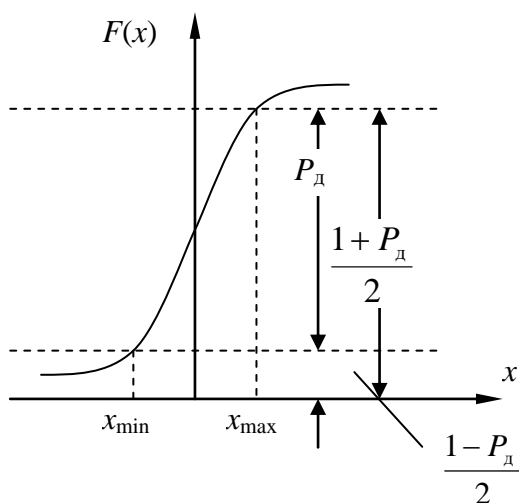


Рис. 21

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_{\max}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = \frac{1+P_d}{2}.$$

Если границы распределения заданы безоговорочно, из этого логически следует, что $P_d = 1$, чего не может быть у распределений с плавными «хвостами». В этом случае разумно принять наиболее «популярное» значение $P_d = 0,95$.

Если заданы номинальные значения, они и выбираются в качестве показателей положения. В противном случае правильное

всего брать среднее из двух граничных значений. Показателем рассеяния чаще всего служит среднеквадратическое отклонение (как, например, при нормальном законе распределения). Если распределение имеет чёткие границы (как, например, при равномерном законе), показателями рассеяния являются сами границы.

2. Ввод соответствующих входным распределениям случайных выборок, включая экспериментальные статистики. Для этого в MathCAD'е, например, для нормального закона существует функция $X = \text{norm}(n, \mu, \sigma)$. Число членов статистического ряда m должно определяться необходимой доверительной вероятностью, т.к. согласно [5]

$$m \geq \frac{2(1 + m_{\text{отб}})}{1 - P_d},$$

где $m_{\text{отб}}$ – число членов, отбрасываемых с каждого конца вариационного ряда для повышения достоверности оценки. Так, при $m_{\text{отб}} = 1$ и $P_d = 0,95$ $m = 80$.

3. Получение выходных статистических распределений. Векторы X_i подставляются в функцию преобразования $f(x_1, \dots, x_n)$, в результате чего получаются статистики выходной величины. Если требуется определить влияние одного i -того фактора, то членами «выходной» статистики оказываются

$$y_{ik} = f(x_{10}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{n0}),$$

где все факторы, кроме i -того, принимают свои номинальные (средние) значения. Если требуется учесть суммарное влияние нескольких факторов, то в функцию преобразования поэлементно и одновременно подставляются все соответствующие векторы.

4. Нахождение по выходным статистикам необходимых оценок, например, доверительных значений погрешностей.

Вначале вычисляются отдельные погрешности по выходу

$$\Delta y_k = y_k - y_0,$$

где y_0 – значение выходной величины в конкретной точке диапазона преобразования при номинальных значениях влияющих факторов. В качестве этого значения, как правило, может приниматься среднее значение статистической выборки. Из полученных чисел составляется вариационный ряд, который, как предполагается в [5], разбивает весь диапазон на статистически эквивалентные блоки, вероятность попадания в каждый из которых одинакова. Вследствие этого k -тый член ряда оказывается оценкой $\frac{k}{m+1}$ -той квантили распределения.

Квантили, соответствующие доверительной вероятности P_d , суть $\frac{1 - P_d}{2}$ и $\frac{1 + P_d}{2}$, т.е.

$$\frac{k}{n+1} = \frac{1 - P_d}{2}, \quad \frac{l}{n+1} = \frac{1 + P_d}{2}.$$

Отсюда номера членов вариационного ряда, представляющих доверительные границы погрешности, суть

$$k = \frac{(n+1)(1 - P_d)}{2}, \quad l = \frac{(n+1)(1 + P_d)}{2}.$$

Поскольку знак случайной погрешности не важен, за результирующую оценку разумно принять наибольший модуль (они, как правило, близки по значению).

Рис. 22 иллюстрирует вышесказанное.

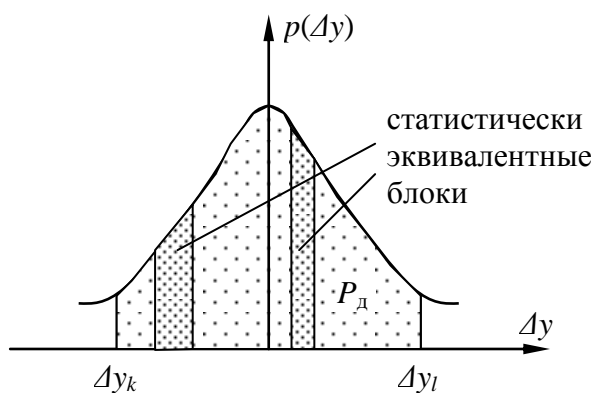


Рис. 22

Статистический ряд случаен и дискретен, ввиду чего оценка с его помощью доверительных значений погрешности является приближённой. Степень этого приближения зависит от объёма выборки: чем больше последний, тем ближе оценка к доверительному значению. Для современной вычислительной техники не представляет труда генерация очень

больших выборок (например, в 1000000 значений), при которых оценки оказываются вполне корректными.

Достоинствами метода Монте-Карло являются:

- относительная простота,
- полная информация о неопределённости выходной величины – её распределение,
- возможность получения оценок, соответствующих всему суммарному многомерному распределению, а не его отдельным сечениям. Последнее иллюстрируется рис. 23, на котором представлено возможное двумерное распределение Δy .

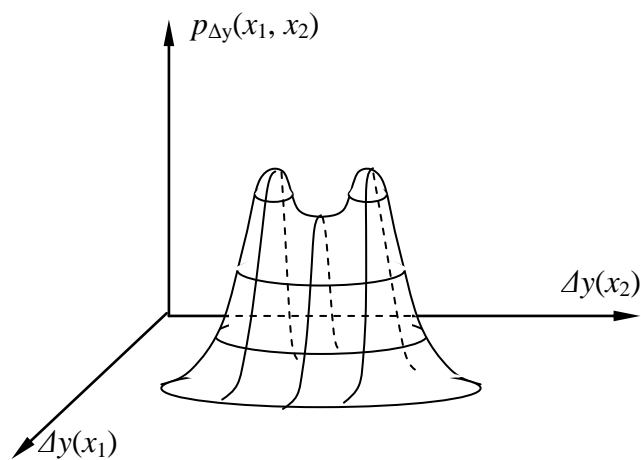


Рис. 23

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е м е ц С. В. Пьезоэлектрические датчики градиента давления и давления с многомодовыми колебательными системами: Дис...канд. техн. наук. Л., 1986. 225 с.
2. Г у т н и к о в В. С. Интегральная электроника в измерительных устройствах. – 2-е изд., перераб. и доп. Л., 1988. 303 с.
3. Н у б е р т Г. П. Измерительные преобразователи неэлектрических величин. Л., 1970. 360 с.
4. Проектирование датчиков для измерения механических величин / Е.П.Осадчий, А.И.Тихонов, В.И.Карпов и др. М., 1979. 480 с.
5. Н о в и ц к и й П. В., З о г р а ф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. 2-е изд., перераб. и доп. Л., 1991. 303 с.
6. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. 5-е изд. М., 1984. 831 с.
7. Электрические измерения / Под ред. Е.Г.Шрамкова. М., 1972. 518 с.
8. Погрешности датчиков: Учеб. пособие / Е.П.Осадчий, К.Н.Чернецов, В.И.Карпов, В.М.Спиридонов; под ред. Е.П.Осадчего. Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1983. 84 с.

Оглавление

Предисловие ко второму изданию.....	3
Введение.....	4
1. Математическая модель датчика.....	5
1.1. Необходимые сведения из геометрии.....	5
1.2. Геометрическое представление физических величин.....	7
1.3. Датчик как векторное пространство.....	10
1.3.1. Пример – гидроакустический векторный приемник.....	10
1.3.2. Координатная система.....	17
1.3.3. Входной вектор.....	19
1.3.4. Геометрический образ измерительного преобразования, осуществляемого датчиком.....	24
1.3.5. Метрический тензор.....	26
1.3.6. Аффинор.....	39
1.3.7. Описание динамических свойств датчиков.....	47
2. Методика расчета погрешностей датчиков.....	52
2.1. Элементарная составляющая полной погрешности датчика.....	52
2.2. Погрешность, вызванная воздействием внешнего фактора.....	55
2.3. Погрешность, вызванная нестабильностью конструктивного парамет- ра.....	58
2.4. Погрешность, вызванная технологическими допусками.....	65
2.5. Погрешность, вызванная суммой внешних факторов.....	67
2.6. Погрешность линейности.....	72
2.7. Погрешность гистерезиса.....	74
2.8. Суммарная эксплуатационная погрешность.....	76
2.9. Статистическое моделирование погрешностей (метод Монте-Кар- ло).....	79
Литература.....	83