## Министерство образования и науки Российской Федерации

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# В.В. Шаляпин

## УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2011

УДК 681.5.01(075.8)

ББК 32.965 я 73

Ш 189

Шаляпин В.В. Управление в технических системах. / учеб. пособие. — СПб, 2011. - 253c.

В пособие включены основные вопросы, изучаемые в рамках дисциплины «Управление в технических системах». Рассматриваются статические свойства элементов, применение преобразования Лапласа для описания динамики. Изучаются основные соединения и методы преобразования структурных схем, расчет частотных и временных характеристик, показатели качества переходных процессов и методы их оценки. Приводятся различные критерии устойчивости автоматических систем, алгебраические и частотные критерии обеспечения запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Дается классификация корректирующих цепей, рассматриваются их свойства. Материал каждого раздела иллюстрирован примерами.

Данное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника» - 230100, по специальностям: 230102 и 230105.

<sup>©</sup> Шаляпин В. В., 2011

<sup>©</sup> Санкт- Петербургский государственный политехнический университет, 2011

# Содержание

Введ	цение	5
Γ.	лава 1. Принципы и виды автоматического управления	6
1.1	Основные понятия и определения	6
1.2	Принципы автоматического управления	10
1.3	Виды автоматического управления	10
1.4	Представление сигналов	20
1.5	Примеры систем управления	25
Гла	ава 2. Математическое описание автоматических систем управлени	я28
2.1	Уравнения динамики и статики	28
2.2	Преобразование Лапласа	35
2.3	Передаточные функции	39
2.4	Частотные характеристики	46
2.5.	Реакция системы на гармоническое воздействие	53
2.6.	Временные характеристики	56
2.7.	Элементарные звенья и их характеристики	61
2.8.	Структурные схемы	75
2.9.	Законы регулирования	84
Гл	тава 3. Устойчивость линейных систем автоматического управления	н93
3.1	Понятие устойчивости	93
3.2.	Общая постановка задачи по А.М. Ляпунову	96
3.3.	Теорема А.М. Ляпунова об устойчивости движения по первому	
приб	ближению	100
3.4.	Условия устойчивости линейных систем автоматического	
упра	вления	102
3.5.	Алгебраические критерии устойчивости	110
3.6.	Частотные критерии устойчивости	119
3.7.	Критерий устойчивости Михайлова	122
3.8.	Критерий устойчивости Найквиста	129
3.9.	Астатические системы	134

3.10	Запас устойчивости	138
3.11.	Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характерис	стикам
		143
3.12	Построение областей устойчивости в плоскости параметров	
систе	емы	145
3.13	Устойчивость систем с запаздыванием и систем с иррациональны	МИ
3	веньями	153
Гла	ава 4. Методы оценки качества регулирования линейных систем	164
4.1.	Общие положения	164
4.2.	Оценка качества регулирования в установившемся режиме	166
4.3.	Оценка качества регулирования переходного процесса при воздей	і́ствии
ступе	енчатой функции	171
4.4.	Корневые методы оценки качества регулирования	174
4.5.	Среднегеометрический корень	180
4.6.	Диаграмма Вышнеградского	182
4.7.	Интегральные оценки качества	185
4.8.	Частотные критерии качества	192
4.9.	Точность в типовых режимах	201
Гла	ава 5. Повышение качества систем регулирования	209
5.1.	Общие положения	209
5.2.	Виды коррекции	211
5.3.	Корректирующие звенья последовательного типа	212
5.4.	Параллельно-встречное корректирующее устройство	219
5.5.	Согласно - параллельное корректирующее устройство	226
5.6.	Преобразовательные элементы	227
5.7.	Повышение точности в установившихся режимах	233
5.8.	Способы увеличения запаса устойчивости САУ	244
	Библиографический список	252

#### Введение

Окружающая нас повседневная действительность содержит множество устройств и систем, в работе которых при внимательном рассмотрении обнаруживаются признаки автоматического регулирования. Вот мчится автомобиль: водитель, видя искривление дороги, машинально поворачивает руль ровно на такой угол, чтобы плавно вписаться в поворот. Сам автомобиль напичкан разнообразной электроникой, обеспечивающей оптимальные режимы работы агрегатов при различных нагрузках. Организм человека прилагает все усилия для поддержания множества своих жизненно важных параметров (температуры тела, давления крови, уровня иммунитета, диаметра зрачков глаз и т. п.) в необходимых интервалах изменения. И таких примеров автоматической регуляции процессов в технике, живых организмах и обществе можно привести огромное количество. Общее, что их объединяет, – это выработка органом, ответственным за поведение регулируемой величины, специального сигнала, уменьшающего отклонение этой величины от желаемого уровня. Ключевую роль в осуществлении этой функции играет возможность получения информации о выходной переменной и использования ее в качестве обратной связи для формирования сигнала отклонения.

В число научных дисциплин, образующих науку об управлении, входит теория автоматического управления и регулирования. По своей сути теория управления, как одна из ветвей технической кибернетики, является междисциплинарным предметом. Значение теории автоматического управления в настоящее время переросло рамки только технических систем. Динамические управляемые процессы имеют место в живых организмах, экономических и организационных человеко-машинных системах.

При подготовке учебного пособия были использованы материалы лекций, читаемых автором в течение ряда лет в Санкт-Петербургском Государственном Политехническом Университете.

# Глава 1. Принципы и виды автоматического управления

#### 1.1. Основные понятия и определения

Управление и информатика в технических системах - область науки и техники, которая включает в себя совокупность средств, способов и методов человеческой деятельности, направленных на создание и применение информационного, алгоритмического, аппаратного, программного и методического обеспечения для систем и средств управления техническими объектами, технологическими линиями и производственными процессами. Теория автоматического управления и регулирования — наука, которая изучает процессы управления, методы их исследования и основы проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу, в любой области техники. Термин «управление» является более общим, чем термин «регулирование».

Задача управления заключается в формировании такого закона изменения управляющих воздействий, при котором достигается желаемое поведение объекта независимо от наличия возмущений.

**Возмущение** — неуправляемое воздействие извне на любой элемент системы, как правило, затрудняющее достижение цели управления. Примеры возмущений:

- --- боковой ветер или течение, сносящее самолет или корабль с заданного курса;
- --- утечка тепла через открытые окна, двери, щели в стенах в системе стабилизации комнатной температуры;
- --- инструментальные погрешности настройки датчиков, из-за чего последние сообщают недостоверную информацию о состоянии системы.

Учет возмущений, возможность их измерить и использовать для корректировки управления, позволяют противодействовать их вредному влиянию на объект.

Задача регулирования заключается в поддержании выходных величин

объекта равными (или пропорциональными) некоторым эталонным функциям времени — задающим воздействиям. Задающие воздействия могут быть постоянными или изменяться во времени по заданному закону.

Необходимость поддержания постоянного значения или желаемого закона изменения какой-либо величины возникает в различных отраслях техники:

- --- электроснабжении постоянство частоты и напряжения в сети;
- --- атомной энергетике устойчивый и безопасный уровень мощности реактора;
- --- авиации и судовождении движение самолета или судна по заданному курсу, стабилизация крена;
- --- космонавтике выведение летательного аппарата на орбиту и его ориентация в космическом пространстве;
- --- локации наведение оси монитора на неподвижную цель или сопровождение движущейся цели.
- --- робототехнике движение рабочего органа по заданной траектории в пространстве;
- --- металлургической промышленности поддержание толщины проката в пределах установленного допуска.

**Объект управления** - техническое устройство (часть окружающего мира) или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам. Управление - процесс воздействия на объект управления с целью изменения его поведения нужным образом.

**Регулирование** - частный случай управления, целью которого является приведение объекта к заданному состоянию.

**Автоматический процесс** - процесс, который совершается без участия человека.

**Система** - совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования. При этом элементом можно называть любое техническое устройство.

**Динамическая система** - система, процессы в которой изменяются с течением времени в силу собственных свойств.

Система автоматического управления (САУ) - динамическая система, которая работает без участия человека.

Основными элементами САУ (рис. 1.1) являются:

- --- объект управления (ОУ);
- --- управляющее устройство или регулятор (P), который сравнивает выход управляемого объекта с желаемым и в зависимости от результата вырабатывает управляющий сигнал на объект.



Рис. 1.1. Функциональная схема замкнутой системы

Рассмотрим подробнее объект управления (рис. 1.2) и выделим характеризующие его переменные.

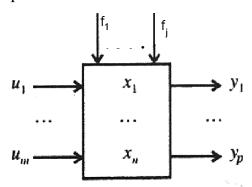


Рис. 1.2. Функциональная схема объекта управления

К таким переменным относятся:

- управляющие воздействия  $(u_1...u_m)$  это такие переменные, с помощью которых можно влиять на поведение объекта;
- выходные переменные  $(y_1,...,y_p)$  доступные измерению величины, которые отражают реакцию объекта на управляющие воздействия;

- переменные состояния  $(x_1,...,x_n)$  внутренние и часто недоступные измерению переменные, которые определяют состояние объекта в каждый момент времени, причем  $n \ge m$ ;
- возмущающие воздействия  $(f_1,...,f_j)$  отражают случайные воздействия окружающей среды на объект управления и обычно недоступны измерению. Требование парирования их вредного влияния приводит к необходимости создания систем автоматического управления.

Все переменные, которые характеризуют объект, удобно представить в векторной форме:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_j \end{bmatrix}.$$

Входные воздействия на систему (или задание на регулятор) будем обозначать буквой g. Их число обычно совпадает с числом выходных переменных:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_p \end{bmatrix}$$

В зависимости от числа входных и выходных переменных выделяют:

- --- одноканальные объекты (или системы) объекты, в которых есть только одна выходная переменная (y = 1);
- --- многоканальные (многосвязные, многомерные, взаимосвязанные) объекты (или системы) объекты, в которых число выходных переменных больше единицы ( y > 1).

В зависимости от того, входит или нет время явно в уравнение, системы разделяют на стационарные и нестационарные.

Автоматические системы управления (звенья) называют стационарными, если они при постоянных внешних воздействиях описываются уравнениями, не

зависящими явно от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются. В противном случае система называется нестационарной.

Для линейных систем ОНЖОМ лать также следующее определение: стационарными линейными системами (звеньями) называют системы (звенья), линейными которые описываются уравнениями c постоянными коэффициентами; нестационарными линейными системами (звеньями) или системами с переменными параметрами — системы (звенья), которые описываются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.

#### 1.2. Принципы автоматического управления

В основе построения любой системы автоматического управления (САУ) лежит один из общих принципов управления, определяющий, каким образом осуществляется увязка алгоритмов функционирования и управления с фактическим функционированием или причинами, вызывающими его отклонение от заданного.

Под управляемой системой подразумевается техническая система, предназначенная для управления показателями, характеризующими протекание технического процесса. Значения показателей  $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ называются выходными переменными, иногда координатами процесса. Управляемые переменные по условиям технологии должны изменяться в соответствии с заданным алгоритмом функционирования системы. В процессе эксплуатации на систему воздействует ряд возмущений  $f = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ (нагрузка, помехи). Для поддержания заданного функционирования осуществляется управление выходными переменными. Управление состоит в приложении к регулирующим органам (входам) системы управляющих воздействий  $g = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ , которые должны изменяться в соответствии с алгоритмом управления, вырабатываемым по тому или иному принципу управления.

Известны три основных принципа управления (рис.1.3):

- --- разомкнутого управления;
- --- компенсации;
- --- обратной связи.

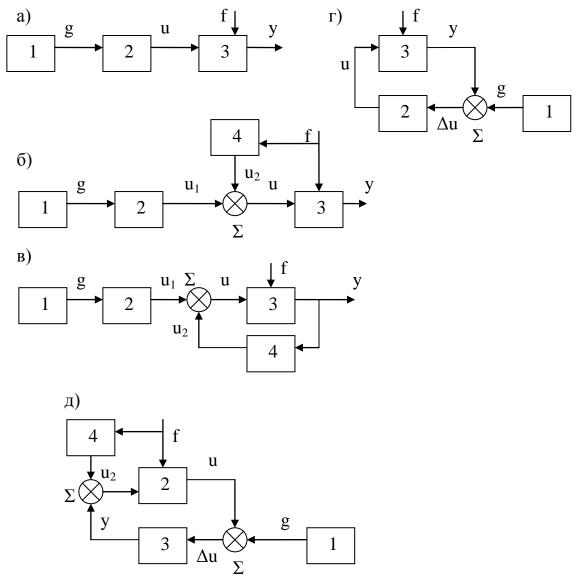


Рис.1.3. Функциональные схемы систем, построенных по основным принципам управления.

На рис.1.3. используются следующие обозначения:

- 1- задатчик программы;
- 2 регулятор;
- 3 объект;
- 4 блок обработки возмущений;

- g алгоритм функционирования (входное воздействие на систему);
- и управляющее воздействие на объект;
- f возмущение;
- у выходные переменные.
- 1. Принцип разомкнутого управления. Сущность принципа состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами возмущениями или выходными координатами процесса. Общая функциональная схема системы показана на рис. 1.3a. Задание g(t) алгоритма функционирования может вырабатываться как специальным техническим устройством - задатчиком программы 1, так и выполняться заранее при проектировании системы и затем непосредственно использоваться при конструировании регулятора 2. В последнем случае блок 1 на схеме отсутствует. В обоих случаях схема имеет вид разомкнутой цепочки, в которой основное воздействие передается от входного элемента к объекту 3, как показано стрелками. Это и дало основание названию принципа. Близость у и д в разомкнутых системах обеспечивается только конструкцией и подбором физических закономерностей, действующих во всех элементах. Несмотря на очевидные недостатки, этот принцип используют очень широко. Элементы, представляемые разомкнутой цепью, входят в состав любой системы, поэтому принцип представляется настолько простым, что его не всегда выделяют как один из фундаментальных принципов. способствует и то, что общих правил построения разомкнутых цепей можно выделить немного. Основные правила, полезные конструктору, существенно зависят от частных свойств конкретных устройств и изучаются
- **2.** Принцип компенсации (управление по возмущению). Если возмущающие воздействия настолько велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма

специальных прикладных курсах по приборостроению и машиностроению.

функционирования, то для повышения точности, иногда возможно, измерив возмущение, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования.

Так как отклонение регулируемой величины зависит не только от управляющего u, но и от возмущающего f воздействия, т. е.  $y = \Psi_1(u_1, f)$ , то в принципе можно подобрать управление  $u = \Psi_2(f)$  таким образом, чтобы в установившемся режиме отклонение отсутствовало, т. е.

$$\Delta u = g - \Psi_1(u_1, f). \tag{1.1}$$

Так, в простейшем линейном случае, если характеристика объекта с  $g=k_0-k_ff \ , \ \text{то, выбирая} \ u=g/k_0+k_ff/k_0, \ \text{получим} \ \ y=g=const \, .$ 

Функциональная схема регулирования по возмущению показана на рис.1.3б. Примером системы компенсации может служить биметаллическая система стержней с разными коэффициентами теплового расширения в маятнике хронометра, обеспечивающая постоянство длины маятника при колебаниях температуры.

3. Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению. Систему можно построить и так, чтобы точность выполнения алгоритма функционирования обеспечивалась и без измерения возмущений. На рис.1.3в показана схема, в которой коррективы в алгоритм управления вносятся по фактическому значению координат в системе. Для этой цели в конструкцию системы вводят дополнительный блок 4, в которую могут входить элементы для измерения у и для выработки корректирующих воздействий на управляющее устройство. Схема имеет вид замкнутой цепи, что дало основание назвать осуществляемый в ней принцип принципом управления по замкнутому контуру. Введенную дополнительную цепь называют цепью обратной связи, так как направление передачи воздействий в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на объект.

Схема, изображенная на рис.1.3в, представляет собой наиболее общий вид замкнутых систем. В управлении же наиболее широко распространен частный вид замкнутых систем, в которых коррекцию алгоритма управления осуществляют не непосредственно по значениям координат у, а по их отклонениям от значений, определяемым алгоритмом функционирования g, т. е,  $\Delta u = g - y$ .

Схема, реализующая эту разновидность управления с обратной связью, показана на рис. 1.3г, в которой: элемент 1 задает алгоритм функционирования, а элемент сравнения (сумматор  $\Sigma$ ) - осуществляет вычитание у из g, т. е. вырабатывает величину  $\Delta$ u, называемую отклонением или ошибкой управления. Часто оказывается целесообразным вырабатывать управляющее воздействие в функции не только  $\Delta$ u, но также его производных и интегралов по времени:

$$U = \Psi(\Delta u, \Delta u', \dots, \int_{0}^{t} \Delta u dt, \dots), \quad \Delta u = g - y.$$
 (1.2)

Функция  $\Psi$  должна быть неубывающей функцией  $\Delta u$  и одного с ней знака. Относительно других аргументов ее знак определяется из анализа.

Управление в функции отклонения при упомянутых требованиях к функции Ψ называют регулированием. Объект 3 и регулятор 2 (рис.1.3г) образуют замкнутую систему, называемую системой автоматического регулирования (САР). Регулятор, вырабатывающий управляющее воздействие и в соответствии с алгоритмом управления (1.2), образует по отношению к выходу объекта отрицательную связь, поскольку знак Δи как следует из (1.2), обратен знаку у. Обратную связь, образуемую регулятором, называют главной обратной связью. Кроме нее внутри регулятора могут быть и другие местные обратные связи.

Принцип обратной связи широко распространен не только в технике, но и в процессах управления, осуществляемых в живых организмах (системы регуляции различных функций температуры, ритма кровообращения и др.). В управлении общественными организациями этот принцип реализуется в виде

проверки исполнения принятых решений и распоряжений, играющих роль управляющих воздействий.

В ряде случаев эффективно применение комбинированного регулирования по возмущению и отклонению (рис.1.3д). Комбинированные регуляторы объединяют достоинства обоих принципов - быстроту реакции на изменение возмущений и точное регулирование независимо от того, какая причина вызвала отклонение.

#### 1.3. Виды автоматического управления

На первом этапе развития техники управления использовался практически лишь один вид автоматического управления — поддержание заданного постоянного значения регулируемой величины. Долгое время под системами автоматического регулирования понимался именно этот вид. В дальнейшем число видов увеличилось и мы рассмотрим три из них.

**1.** Стабилизация. Системы поддержания постоянства управляемой величины называют также системами стабилизации. Желаемый закон в них имеет вид g(t) = const.

Известна важная особенность систем регулирования по отклонению: если в них использовать регуляторы, состоящие только из элементов, осуществляющих обычные аналитические преобразования, т. е. обладающих аналитическими статическими характеристиками, то регулирование по отклонению может уменьшить, но не устранить ошибку.

Рассмотрим схему с простейшими линейными преобразовательными звеньями, в которой в качестве возмущения f принята нагрузка z (рис. 1.3г).

Уравнения статики для такой схемы будут:

$$y = k_0 u - k_z z$$
;  $u = k_p \Delta u = k_p (g - y)$ , (1.3)

где  $k_0$ ,  $k_p$ ,  $k_z$  — постоянные коэффициенты, называемые соответственно коэффициентами передачи объекта, регулятора и нагрузки.

Из (1.3) получаем

$$y = \frac{k_0 k_p}{1 + k_0 k_p} g - \frac{k_z}{1 + k_0 k_p} z, \qquad (1.4)$$

т.е. значение регулируемой величины у зависит от нагрузки z, уменьшаясь с ее ростом.

Регулирование, в котором установившаяся ошибка при постоянном заданном значении  $g_0$  зависит от нагрузки, называют статическим. Установившаяся статическая ошибка:

$$\Delta \varepsilon_{ct} = g - y = \frac{1}{1 + k_0 k_p} y + \frac{k_z}{1 + k_0 k_p} z.$$
 (1.5)

Выражение это громоздко, и для оценки степени зависимости статической ошибки от нагрузки z переходят к уравнениям, связывающим относительные безразмерные отклонения  $\varphi = \Delta y / y_{\min}$  и  $\lambda = \Delta z / z_{\text{ном}}$ , где абсолютные значения  $\Delta y = y - y_{\min}$ ,  $\Delta z = z - z_{\text{ном}}$  отнесены к базовым значениям, соответствующим номинальной нагрузке  $z_{\text{ном}}$  (рис.1.4). Статизм  $\delta$  равен относительной крутизне регулировочной характеристики y = F(z):

$$\delta = -\partial \varphi / \partial \lambda \tag{1.6}$$

Если регулировочная характеристика прямолинейна, то:

$$\delta = -\frac{\Delta \varphi_{\text{max}}}{\Delta \lambda_{\text{max}}} = \frac{(y_{\text{max}} - y_{\text{min}}) / y_{\text{min}}}{(z_{\text{HOM}} - 0) / z_{\text{HOM}}} = \frac{(y_{\text{max}} - y_{\text{min}})}{y_{\text{min}}}$$
(1.7)

Статический регулятор поддерживает постоянное значение регулируемой величины с ошибкой.

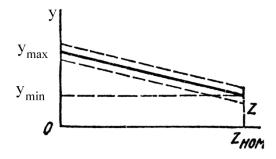


Рис.1.4. Зависимость статической ошибки от нагрузки z

Статизм — это величина относительной статической ошибки при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной. В некоторых системах статическая ошибка нежелательна. Тогда переходят к регулированию, в котором она в силу структуры системы равна нулю, т.е. к астатическому регулированию. Регулировочная характеристика идеального астатического регулирования представляет собой прямую линию, параллельную оси нагрузки (рис. 1.5).

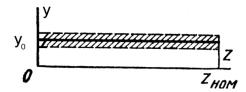


Рис.1.5. Регулировочная характеристика идеального астатического регулирования

Вследствие величина может неточности регулятора регулируемая любое значение внутри некоторой принимать 30НЫ заштрихована), но ошибка при этом не будет зависеть от нагрузки. Для получения астатического регулирования в регуляторе нужно устранить зависимость между положением регулирующего значением регулируемой величины, с тем, чтобы одно и то же значение регулируемой величины можно было поддерживать при любой нагрузке. Для регулирования вводят астатическое Примером цепь звено. астатического звена является интегрирующее звено, описываемое уравнением

$$u = k \int_{0}^{t} \Delta y dt$$
,  $du/dt = k\Delta y$  (1.8)

Регулятор при этом будет находиться в равновесии только в том случае, когда  $du/dt = \Delta y = 0$ , т.е, когда регулируемая величина будет равна заданному значению. Электрический двигатель является примером астатического звена.

**2. Программное управление.** При программном управлении алгоритм функционирования задан и можно построить специальное устройство —

датчик программы, — вырабатывающее g(t). Таким образом, все схемы, показанные на рис.1.3, в которых g(t) есть заданная функция, а звенья 1 представляют собой датчики программы, вырабатывающие эту функцию, относятся к классу систем программного управления. Программное управление можно осуществить по любому из фундаментальных принципов или с помощью их комбинации.

В практике используют два вида систем программного управления: системы с временной программой и системы с пространственной программой.

В системах первого вида датчик программы вырабатывает непосредственно функцию g(t). Примерами могут служить устройства, в которых движение часового механизма или двигателя с равномерным ходом преобразуется с помощью функциональных преобразователей (профилированных кулачков, реостатов и т. п.) в движение g(t).

К таким устройствам относятся устройства для изменения температуры закалочных печей, заводные игрушки, магнитофоны, проигрыватели и т. д. Системы второго вида используют В программном управлении металлообрабатывающими станками. В них движение исполнительного (инструмента) осуществляется ПО заданной пространстве траектории, закон же движения по траектории во времени мало существенен и в широких пределах может быть произвольным.

Используются два способа пространственного программного управления. **Первый** состоит в том, что движение по каждой из координатных пространственных осей выполняется отдельным приводом, движение по одной из осей задается произвольно (обычно равномерным), а остальные движения увязываются с первым так, чтобы инструмент двигался по заданной траектории.

Примером может служить копировальный палец  $\Pi$ , скользящий по шаблону 3 в системе управления 1 копировальным станком 2 (рис.1.6). Одно движение — подача по оси х двигателем  $Д_x$  — происходит равномерно, второе —

движение по оси у — задается профилем кулачка (шаблона 3). При обработке изделия 4 инструмент Ф станка 2 повторяет движение пальца П.

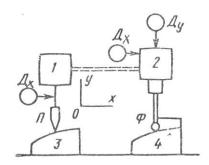


Рис.1.6. Принцип работы копировального станка

Второй способ состоит в том, что заданная траектория описывается с помощью системы параметрических уравнений, в которых параметром является время, а затем строится контроллер, задающий движение приводам по отдельным осям в соответствии с этими параметрическими уравнениями. Системы управления по своей программного структуре также могут быть статическими и астатическими, однако, поскольку величины g(t) и z в них непостоянны, статическая ошибка не устраняется, так как возникают установившиеся ошибки, зависящие от скорости и высших производных. Для устранения этих составляющих ошибки онжом вводить систему дополнительные астатические звенья (повышать порядок астатизма).

3. Следящие системы. В следящих системах алгоритм функционирования заранее не известен. Обычно регулируемая величина в таких системах должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. Так, автоматически управляемое зенитное орудие должно поворачиваться, следя за полетом цели. Следящая система может быть выполнена в соответствии с любым фундаментальным принципом управления и будет отличаться от соответствующей системы программного управления тем, что вместо датчика программы в ней будет помещено устройство слежения за изменениями внешнего фактора.

#### 1.4. Представление сигналов

Сигналы могут быть представлены различным образом, при этом входной сигнал линейных систем всегда является непрерывным. Представлению подлежит сигнал на выходе.

Один и тот же сигнал может иметь различную физическую природу - электрическую, звуковую световую и т.д.

В теории управления наибольшее распространение получило математическое представление сигналов. Все виды математических представлений сигналов делятся на три основные группы:

- 1) непрерывное представление выходной сигнал определен в любой момент времени (рис. 1.7 а);
- 2) дискретно-непрерывное представление выходной сигнал является квантованным по времени: непрерывно изменяется только по уровню (рис. 1.7 в):
- 3) дискретное представление выходной сигнал квантован как по времени, так и по уровню (рис. 1.7г).

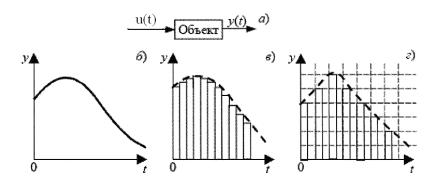


Рис. 1.7. Виды математических представлений сигналов:

а - блок-схема системы; б — непрерывное; в - дискретно-непрерывное;  $\Gamma$  — дискретное.

В результате квантования сигнала по времени при дискретно-непрерывном и дискретном представлениях может произойти потеря информации, так как остаются значения сигнала только в дискретные моменты времени. Однако

благодаря одному из свойств реальных систем в них при определенных условиях сохраняется полная информация о сигнале, если последний известен, лишь в дискретные моменты времени. Это свойство известно как теорема Котельникова: сигнал, описываемый функцией с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервал времени

$$\Delta t = \frac{1}{2} F_C , \qquad (1.9)$$

где  $F_{c}$  - ширина спектра сигнала.

Смысл теоремы Котельникова состоит в том, что, если требуется передавать сигнал, описываемый функцией f(t) с ограниченным спектром, то достаточно передавать отдельные мгновенные значения, отсчитанные через конечный промежуток времени (1.9). По этим значениям непрерывный сигнал может быть полностью восстановлен на выходе системы.

Математические представления сигналов на практике чаще всего реализуются в виде модуляции. Под модуляцией понимают изменение одного из параметров какого-либо физического процесса по представляемого сообщения. Так, в системах с электрическими сигналами модуляцией понимают ПОД изменение одного ИЗ параметров высокочастотного электрического сигнала ПО закону передаваемого низкочастотного сообщения. В случае модуляции гармонического сигнала различают два основных вида модуляции: амплитудная модуляция и угловая модуляция, которая подразделяется на частотную и фазовую. На практике чаше всего встречаются смешанные виды модуляции – амплитудно-фазовая или амплитудно-частотная.

Наиболее часто в теории автоматического управления используются следующие сигналы.

**1.** Единичный скачок **1(t)** (рис. 1.8) называется также функцией Хэвисайда. Функция Хэвисайда физически нереализуема. Однако, если, к примеру, на исследуемом объекте резко открыть вентиль, в результате чего расход подаваемого вещества изменится скачком с  $F_1$  до  $F_2$ , то



Рис. 1.8. Единичный скачок

Рис. 1.9 Единичный импульс

говорят, что на входе объекта реализован скачкообразный сигнал величиной  $F_1$ -  $F_2$ , и если последняя разность равна единице, то на входе реализуется единичный скачок.

**2**. **Единичный импульс**. Единичная импульсная функция - дельта-функция (рис.1.9) - это функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \neq 0 \\ \infty \text{ при } t = 0 \end{cases}$$
 (1.10)

Дельта - функцию называют также функцией Дирака. Эту физически также нереализуемую функцию можно представить как импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды, т.е. как предел, к которому стремится прямоугольный импульс с основанием  $\Delta t$  и площадью, равной единице (рис. 1.10 а), если  $\Delta t \rightarrow 0$  так, чтобы площадь импульса сохранялась равной единице. Также  $\delta$  - функцию можно представить как предел некоторой функции (рис. 1.10б):

$$\delta(t) = \lim_{\beta \to x} \delta(t, \beta) = \lim_{\beta \to x} \frac{\beta}{\pi(\beta^2 t^2 + 1)}$$
 (1.11)

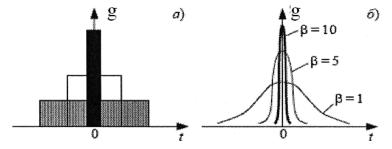


Рис. 1.10. Представление δ -функции

Основное свойство дельта - функции заключается в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{1.12}$$

т. е. она имеет единичную площадь.

Размерность единичной дельта - функции равна [ceк<sup>-1</sup>].

 $\delta$  - функция является четной функцией:

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{1.13}$$

Также

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$
 (1.14)

т.е. из непрерывной функции можно "вырезать" одну ординату.

Последнее соотношение, используя рассмотренные уже свойства δ-функции доказывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{0-} x(t)\delta(t)dt + \int_{0-}^{0+} x(t)\delta(t)dt + \int_{0+}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) * \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = x(0) (1.15)$$

Между функцией Хэвисайда и функцией Дирака существует связь, выражаемая соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt = I(\tau) \quad \text{или} \quad \delta(t) = I'[t]$$
 (1.16)

На практике считается, что на вход объекта подана  $\delta$  - функция, если время действия прямоугольного импульса намного меньше времени переходного процесса.

#### 3.Гармонический сигнал

$$g(t) = A\sin\omega t. (1.17)$$

Синусоидальный гармонический сигнал (рис. 1.11) можно представить как вращение вектора длиной A вокруг начала координат с некоторой угловой скоростью ω рад/с. Гармонический сигнал характеризуется такими параметрами, как амплитуда – A, период – T, фаза - φ.

Между периодом и угловой скоростью справедливо соотношение

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.18}$$

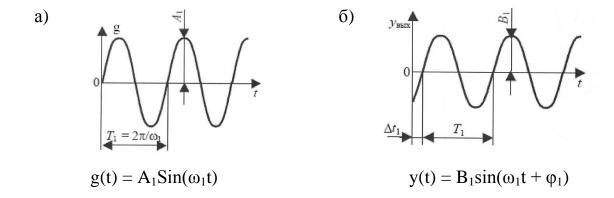


Рис. 1.11. Гармонический сигнал:

а — гармонический сигнал без сдвига фазы;

б — гармонический сигнал со сдвигом фазы

Если колебания начинаются не из нуля, то они характеризуются фазой колебаний, которая во временной области характеризуется отрезком  $\Delta t_1$ . Обычно фазу выражают в радианах -  $\phi$  (рис. 1.11б). Перевод осуществляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} \tag{1.19}$$

**4.** Сдвинутые элементарные функции. К этим функциям относятся функции Хэвисайда и Дирака с запаздыванием, т.е.  $1(t-\tau)$  и  $\delta(t-\tau)$  (рис. 1.12).

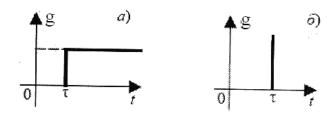


Рис. 1.12. Сдвинутые элементарные функции

Причем 
$$\begin{cases} 0, t \neq \tau \\ \delta(t-\tau) = \infty, t = \tau \end{cases} \tag{1.20}$$

Все свойства  $\delta$  - функции сохраняются, но записываются в виде:

$$\int_{\tau^{-}}^{\tau^{+}} \delta(t-\tau)dt = 1 \tag{1.21}$$

$$\delta(t-\tau) = \delta(\tau-t) = \delta(-(t-\tau)) \tag{1.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t-\tau)dt = u(\tau)$$
(1.23)

#### 1.5. Примеры систем управления

При обсуждении свойств автоматических устройств очень полезно обращаться к реальным примерам, которые достаточно распространены, и по ним можно представить себе поведение технической системы.

Рассмотрим несколько характерных примеров систем автоматического управления.

**Пример 1.1.** Одна из самых распространенных систем автоматики - система стабилизации скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Цель ее работы заключается в поддержании заданной скорости вращения двигателя при действии «нагрузки» на валу. Системы подобного типа используют, например, в металлорежущих станках, где независимо от глубины резания металла нужно выдерживать заданную скорость вращения. На рис. 1.13 представлена упрощенная схема реализации такой системы.

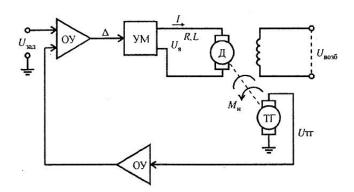


Рис. 1.13. Функциональная схема системы стабилизации скорости вращения двигателя постоянного тока.

Здесь введены следующие обозначения:

 $U_{3ал}$  — задающее воздействие на систему (напряжение задания);

ОУ — операционные усилители для согласования электрических цепей на входе и выходе;

 $\Delta$  — разница между напряжением задания и напряжением тахогенератора (сигнал рассогласования);

УМ — усилитель мощности для преобразования маломощного сигнала  $\Delta$  в силовое напряжение (напряжение на якоре двигателя);

Д — электродвигатель;

I — ток в цепи электродвигателя;

R, L- сопротивление и индуктивность в якорной цепи;

U<sub>я</sub> - напряжение на обмотке якоря электродвигателя;

U<sub>возб</sub> — напряжение возбуждения;

ТГ — тахогенератор (маломощный генератор электрического напряжения), используется в качестве датчика скорости вращения двигателя;

 $U_{T\Gamma}$  — напряжение тахогенератора;

М<sub>н</sub> — момент нагрузки.

В этой системе организована отрицательная обратная связь, при которой

$$\Delta = \mathbf{U}_{\text{3a},\text{T}} - \mathbf{U}_{\text{T},\text{T}}. \tag{1.24}$$

Если нагрузка  $M_H$  возрастает, то падает  $U_{TT}$  и, как следствие, возрастает  $U_g$ , что позволяет «удержать» обороты двигателя при увеличенной нагрузке на двигатель. Если  $M_H$  уменьшается, происходит обратный процесс, который не дает возможности двигателю слишком увеличить скорость вращения.

При описании этого примера введены переменные, которые используются для описания динамических систем: вход -  $U_{\text{зад}}$  , выход -  $U_{\text{тг}}$  , возмущение -  $M_{\text{н}}$  , состояние - I,  $U_{\text{я}}$ , параметры - L, R.

**Пример 1.2.** Рассмотрим теперь пример из области бытовой техники - систему стабилизации температуры в холодильнике. В каждом холодильнике применяется достаточно простая система автоматического регулирования, цель функционирования которой состоит в стабилизации температуры в камере холодильника при изменении массы и температуры закладываемых

продуктов или при открывании дверей. На рис. 1.14 приведена упрощенная схема системы стабилизации температуры.

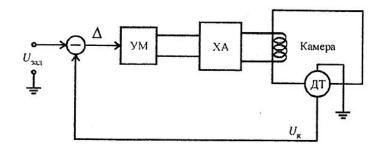


Рис. 1.14. Функциональная схема системы стабилизации температуры.

Здесь  $U_{\text{зад}}$  - сигнал, соответствующий заданной температуре;

УМ - усилитель мощности с релейной характеристикой, который используется в качестве управляющего устройства, он включает или отключает холодильный агрегат (ХА), «прокачивающий» хладаагент через трубки камеры; ДТ - датчик температуры, выходной сигнал  $U_K$  которого пропорционален температуре камеры.

Как правило, в холодильнике не применяются операционные усилители; сравнение заданной и действительной температур происходит непосредственно. На схеме это показано соответствующим элементом.

Система работает следующим образом: если открыть камеру и положить некоторую массу теплых продуктов, то сразу повышается температура в камере и возрастает разница  $\Delta$  между заданной (низкой) и повышенной действительной температурами, включается УМ с релейной характеристикой и работает холодильный агрегат. Через некоторое время разница  $\Delta$  становится меньше порогового значения и реле отключается. Такая система работает только в «одну сторону» - на охлаждение. Ее поведение характеризуют величины: вход -  $U_{\rm 3ad}$ , выход - напряжение с датчика температуры; состояние - температура внутри камеры, возмущение - количество тепла в закладываемом продукте.

# Глава 2. Математическое описание автоматических систем управления.

#### 2.1. Уравнения динамики и статики

На определенном этапе разработки и исследования автоматической системы управления получают ее математическое описание — описание процессов, проистекающих в системе, на языке математики. Математическое описание может быть аналитическим (с помощью уравнений), графическим (графики, структурные схемы и графы) и табличным (с помощью таблиц).

Для получения математического описания системы обычно составляют описание ее отдельных элементов. Для получения уравнений системы составляют уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность всех уравнений элементов и дает уравнения системы.

Уравнения (а также структурные схемы) автоматической системы управления называют ее математической моделью.

Процедуру получения математической модели объекта можно разбить на следующие этапы:

- --- составление гносеологической (мысленной) модели объекта. Исходя из технического задания и изучения режимов работы объекта, инженер создает приближенную мысленную модель, которая в дальнейшем уточняется и приобретает вид математической модели.
- --- определение независимых переменных, которые характеризуют объект, и уточнение их размерностей. При этом число управляющих воздействий не может быть меньше числа выходных переменных (dim  $g \ge dim y$ ). Размерность вектора переменных состояния не может быть меньше размерности вектора выходных переменных (dim  $x \ge dim y$ ). Размерность возмущающих воздействий f может быть произвольной и никак не связана с размерностью y, x, g.
- --- запись физических законов, в силу которых развиваются процессы в объекте.

--- приведение уравнений объекта к удобному с точки зрения теории автоматического управления виду.

Математическая модель одной и той же системы в зависимости от цели исследования может быть разной. Более того, иногда полезно при решении одной и той же задачи на разных этапах принимать разную математическую модель: начать исследование с простейшей модели, а затем ее постепенно усложнять, с тем, чтобы учесть дополнительные явления и связи, которые на начальном этапе были отброшены как несущественные. Сказанное обусловливается тем, что к математической модели предъявляются противоречивые требования: она должна, с одной стороны, как можно полнее отражать свойства оригинала, а с другой стороны, быть по возможности простой, чтобы не усложнять исследование.

Система управления и любой ее элемент производят преобразование входного сигнала g(t) в выходной сигнал y(t). С математической точки зрения они осуществляют отображение

$$y(t) = A * g(t)$$
 (2.1)

согласно которому каждому элементу g(t) из множества G входных сигналов  $(g(t) \in G)$  ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент y(t) из множества Y выходных сигналов  $(y(t) \in Y)$ . В приведенном соотношении A называется оператором. Оператор, определяющий соответствие между входным и выходным сигналами системы управления (элемента), называется оператором этой системы (элемента). Задать оператор системы — это значит задать правило определения выходного сигнала этой системы по ее входному сигналу.

Рассмотрим математическое описание непрерывных систем управления с помощью дифференциальных уравнений. В большинстве случаев звенья и системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка. Под звеном понимается математическая модель элемента. Для примера рассмотрим звено (рис.2.1), которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка

$$F(y, y', y'', g, g') + f = 0, (2.2)$$

где: у — выходная величина; g и f — входные величины; y' и g' — первые производные по времени; у" — вторая производная по времени.

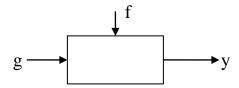


Рис.2.1. Структурная схема звена.

Уравнение (2.2), описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называют уравнением динамики. Пусть при постоянных входных величинах  $g = g^0$  и  $f = f^0$  процесс в звене с течением времени установится: выходная величина примет постоянное значение  $y = y^0$ . Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$F = (y^{0}, 0, 0, g^{0}, 0) + f^{0} = 0$$
(2.3)

Это уравнение описывает статический или установившийся режим и его называют уравнением статики.

Статический режим можно описать графически с помощью статических характеристик. Статической характеристикой звена или элемента (а также системы) называют зависимость выходной величины от входной в статическом режиме. Статическую характеристику можно построить экспериментально, подавая на вход элемента постоянное воздействие и измеряя выходную величину после окончания переходного процесса, или расчетным путем, используя уравнение статики.

Если звено имеет несколько входов, то оно описывается с помощью семейства или семейств статических характеристик. Например, звено, характеризующееся в статическом режиме уравнением (2.3), можно описать графически с помощью семейства статических характеристик, представляющих собой кривые зависимости выходной величины у от одной

входной величины g (или f) при различных фиксированных значениях другой — f (или g).

**Пример 2.1.** Рассмотрим в качестве примера составление математической модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис.2.2), который часто используется в системах автоматического управления.

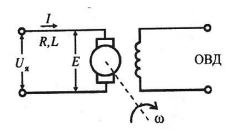


Рис.2.2. Схема двигателя постоянного тока

Здесь:  $U_{\pi}$  - напряжение, подаваемое на якорь двигателя, которое будем считать входным воздействием; I - ток в цепи якоря, представляющий собой внутреннюю переменную объекта; R, L - сопротивление и индуктивность цепи якоря; E — противо - ЭДС, т. е. напряжение, возникающее в обмотке якоря в результате его вращения в магнитном поле;  $\omega$  - скорость вращения двигателя, которую будем считать выходной переменной; ОВД - обмотка возбуждения двигателя.

Запишем основные уравнения, характеризующие процессы в двигателе. Уравнение электрического равновесия якорной цепи имеет вид

$$L\frac{dI}{dt} + RI + E = U_{\mathfrak{A}} \tag{2.4}$$

Уравнение равновесия моментов на валу двигателя следующее:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{\rm II} - M_{\rm C} \tag{2.5}$$

где J - приведенный момент инерции;  $M_{\mbox{\tiny {\rm J}}}$  - вращающий момент;

 $M_{\rm c}$  - момент сопротивления на валу двигателя, который является возмущающим воздействием.

С достаточной степенью точности во многих случаях можно считать, что  $E = C_1 \omega$ ,  $M_{\pi} = C_2 I$ ,  $M_c = M_c(t)$ , где  $C_1$  и  $C_2$  постоянны.

В результате уравнения двигателя принимают вид:

$$\begin{cases}
L\frac{dI}{dt} + RI + c_1 \omega = U_{\mathfrak{A}} \\
J\frac{d\omega}{dt} = c_2 I - M_{\mathcal{C}}
\end{cases} \tag{2.6}$$

Введем следующие обозначения:  $u=U_{\mathfrak{s}}$  - управление;  $x_1=\omega$  ,

 $x_2 = I$  - переменные состояния;  $M = M_c$  - возмущение.

Запишем уравнения двигателя в переменных состояния:

$$\begin{cases} x_1' = -a_{12}x_2 + hM \\ x_2' = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + bu \end{cases}$$

$$y = x_1 \tag{2.7}$$

где: 
$$a_{12} = \frac{c_2}{J}$$
,  $h = \frac{1}{J}$ ,  $a_{21} = \frac{c_1}{L}$ ,  $a_{22} = \frac{R}{L}$ ,  $b = \frac{1}{L}$ . (2.8)

Часто модель двигателя представляют в виде одного дифференциального уравнения

$$T_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{M}}y'' + T_{\mathcal{M}}y' + y = ku - k_{\mathcal{M}}(T_{\mathcal{A}}p + 1)M$$
 (2.9)

Здесь  $T_{\scriptscriptstyle M} = \frac{RL}{c_1 c_2}$  - электромеханическая постоянная времени двигателя;

$$T_{\mathrm{g}} = \frac{L}{R}$$
 - электромагнитная постоянная времени якорной цепи;  $k = \frac{1}{c_{\mathrm{1}}}$ 

- коэффициент усиления;  $k_M = \frac{R}{c_1c_2}$ .

**Линеаризация.** Исходные нелинейные уравнения автоматической системы во многих случаях можно линеаризовать, т. е. заменить линейными, приближенно описывающими процессы в системе. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют линеаризацией.

В автоматических системах должен поддерживаться некоторый заданный режим. При этом режиме входные и выходные величины звеньев системы изменяются по определенному закону. В частности, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Но из-за различных возмущающих факторов, фактический режим отличается от требуемого

(заданного). Поэтому текущие значения входных и выходных величин не равны значениям, соответствующим заданному режиму. В нормально функционирующей автоматической системе фактический режим немного отличается от требуемого режима и отклонения входных и выходных величин входящих в нее звеньев от требуемых значений малы. Это позволяет про-извести линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора. Линеаризацию можно производить по звеньям.

Линеаризованное уравнение может быть получено при следующих предположениях:

- 1) отклонения выходной  $\Delta y$  и входной  $\Delta g$  величин достаточно малы;
- 2) функция F обладает непрерывными частными производными по всем своим аргументам в окрестности точек, соответствующих заданному режиму.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то линеаризацию производить нельзя. По поводу первого условия необходимо отметить следующее: нельзя раз и навсегда установить, какие отклонения считать малыми. Это зависит от вида нелинейности. Часто нелинейную зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задают в виде кривой. В этих случаях линеаризацию можно произвести графически.

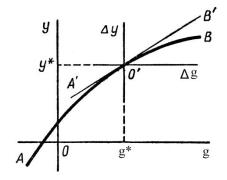


Рис.2.3. Линеаризация нелинейной зависимости.

Геометрически линеаризация нелинейной зависимости между двумя переменными (рис. 2.3) означает замену исходной кривой АВ (функции F) отрезком ее касательной А'В' в точке О', соответствующей заданному режиму, и параллельный перенос начала координат в эту точку.

**Пример 2.2**. Уравнение моментов на валу электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением:

$$J\frac{d\omega}{dt} = m - m_c \tag{2.10}$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $m=m\ (\omega,i)$  — вращающий момент; i — ток в обмотке якоря;  $m_c=m_c\ (t)$  — момент сопротивления вращению; J — момент инерции вращающихся масс.

В установившемся режиме  $\omega = \omega^0$  ,  $m = m^0$ ,  $m_c = m_c$ , и уравнение моментов имеет следующий вид:

$$0 = m^0 - m_c^0. (2.11)$$

Разлагая функцию  $m(\omega, i)$  в ряд Тейлора и пренебрегая членами высшего порядка малости, получим

$$m = m^{0} + \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^{0} \Delta \omega + \left(\frac{\partial m}{\partial i}\right)^{0} \Delta i \tag{2.12}$$

Затем, подставив в уравнение моментов полученное значение m, а также

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\Delta\omega)}{dt} \tag{2.13}$$

$$m_c = m_c^0 + \Delta m_c \tag{2.14}$$

найдем

$$J\frac{d(\Delta\omega)}{dt} = m^0 + \left(\frac{\partial m}{\partial\omega}\right)^0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial m}{\partial i}\right)^0 \Delta i - m_c^0 - \Delta m_c$$
 (2.15)

Принимая во внимание уравнение установившегося режима, получаем линеаризованное уравнение моментов на валу электродвигателя:

$$J\frac{d(\Delta\omega)}{dt} - \left(\frac{\partial m}{\partial\omega}\right)^0 \Delta\omega = \left(\frac{\partial m}{\partial i}\right)^0 \Delta i - \Delta m_c \tag{2.16}$$

Здесь  $\Delta i$  — управляющее воздействие и  $\Delta m_c$  — возмущение. Частные производные  $\left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^0\langle 0$  и  $\left(\frac{\partial m}{\partial i}\right)^0$  определяются по характеристикам электродвигателя, которые задаются в виде графиков.

### 2.2. Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа называется соотношение:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} X(t)e^{-st}dt, \qquad (2.17)$$

ставящее функции X(t) вещественного переменного в соответствие функции X(s) комплексного переменного. При этом X(t) называется оригиналом, а X(s) изображением или изображением по Лапласу.

Символические записи преобразования Лапласа

$$X(t) \Leftrightarrow X(s)$$
 или  $X(s) \Leftrightarrow X(t)$ ;

$$X(s) = L\{X(t)\},$$
 L - оператор Лапласа.

Функция, которая подвергается преобразованию Лапласа, должна иметь следующие свойства:

- 1. X(t) определена и кусочно-дифференцируема на всей положительной числовой полуоси  $[0;\infty]$ ;
- 2. X(t) = 0 при t < 0;
- 3. Существуют такие положительные числа М и С, что

$$|X(t)| \le Me^{ct}$$
 , при  $0 \le t < \infty$ . (2.18)

Функции, обладающие указанными свойствами, называются функциямиоригиналами.

Соотношение

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - j\omega}^{\sigma_0 + j\omega} X(s) e^{st} ds, \qquad (2.19)$$

называется обратным преобразованием Лапласа. В нем интеграл решается вдоль любой прямой  $Res = \sigma_0 > C$ .

Символическая запись обратного преобразования Лапласа:

Основными свойствами преобразования Лапласа являются:

1. Свойство линейности.

Для любых постоянных α и β выполняется равенство:

$$L\{\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)\} = \alpha L\{X_1(t)\} + \beta L\{X_2(t)\}$$
 (2.21)

2. Дифференцирование оригинала.

Если производная X(t) является функцией-оригиналом, то

$$L\{X'(t)\} = sX(s) - X(0), \tag{2.22}$$

где:

$$X(s) = L\{X(t)\}, X(0) = \lim_{t \to +0} X(t)$$
 (2.23)

Если n-я производная X(t) является функцией-оригиналом, то

$$L\{X^{n}(t)\} = S^{n}X(s) - S^{n-1}X(0) - \dots - X^{(n-1)}(0)$$
(2.24)

где: 
$$X^k(0) = \lim_{t \to +0} X^{(k)}(t)$$
, где  $k=0,1,...,n-1$ . (2.25)

Если начальные условия нулевые, то последняя формула принимает вид

$$L\{X^n(t)\} = S^n X(s) \tag{2.26}$$

3. Интегрирование оригинала.

$$L\left\{\int_{0}^{t} X(t)dt\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$
 (2.27)

4. Теорема запаздывания. Для любого положительного числа  $\, au$ 

$$L\{X(t-\tau)\} = L\{X(t)\} = e^{-s\tau}X(s)$$
 (2.28)

5. Теорема о свертке (теорема умножения изображений).

Если  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  - оригиналы, а  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  - их изображения, то

$$X_1(s) \cdot X_2(s) \Leftrightarrow \int_0^t X_1(\tau) \cdot X_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t X_2(\tau) \cdot X_1(t-\tau) d\tau. \tag{2.29}$$

Интеграл в правой части равенства называют сверткой функций и обозначают

$$X_1(t) * X_2(t) = \int_0^t X_1(\tau) \cdot X_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t X_2(\tau) \cdot X_1(t-\tau) d\tau.$$
 (2.30)

6. Теоремы о предельных значениях.

Если X(t)- оригинал, а X(s)-его изображение, то

$$X(0) = s \lim_{s \to \infty} X(s) \tag{2.31}$$

и при существовании предела

$$X(\infty) = \lim_{t \to \infty} X(t) \tag{2.32}$$

будет существовать предел

$$X(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s). \tag{2.33}$$

**Пример 2.3**. Найти оригиналы по заданным изображениям, используя преобразование Лапласа:

$$F_1(s) = \frac{4e^{-s}}{(s+3)^2} \qquad F_2(s) = \frac{3s+7}{s^3(s^2+6s+13)}$$
 (2.34)

По таблице преобразования Лапласа и свойствам преобразования Лапласа найдем

$$F_1(t) = 4I(t-1)te^{-3(t-1)}$$
(2.35)

где I - единичная функция.

Для определения преобразования Лапласа от дроби  $F_2(s)$  необходимо эту правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей. Суммы дробей определяются в соответствии с корнями характеристического уравнения и, по которым можно найти преобразование Лапласа, используя таблицы преобразования. Рассматриваемая дробь имеет три нулевых корня и пару комплексно-сопряженных корней, поэтому она разлагается на простейшие дроби следующим образом:

$$F_{2}(s) = \frac{3s+7}{s^{3}(s^{2}+6s+13)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^{2}} + \frac{C}{s^{3}} + \frac{Ds+E}{s^{2}+6s+13} =$$

$$= \frac{As^{2}(s^{2}+6s+13) + Bsp(s^{2}+6s+13) + C(s^{2}+6s+13) + (Ds+E)s^{3}}{s^{3}(s^{2}+6s+13)}$$
(2.36)

В результате разложения получена сумма простейших дробей, коэффициенты которых определяются методом неопределенных коэффициентов, для чего рассматривается равенство двух дробей. Две правильные рациональные дроби равны между собой, если равны их числители и знаменатели. Так как знаменатели равны, то, следовательно, необходимо приравнять друг к другу и числители. Приравняв в числителях

коэффициенты при одинаковых степенях параметра s, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$A + D = 0$$

$$6A + B + E = 0$$

$$13A + 6B + C = 0$$

$$13B + 6C = 3$$

$$13C = 7$$
(2.37)

Решение системы дает следующие корни:

$$A = -73/2197$$
;  $B = -3/169$ ;  $C = 7/13$ ;  $D = 73/2197$ ;  $E = 477/2197$ . (2.38)

Таким образом, исходная дробь записывается в виде

$$F_2(s) = \frac{7}{13} \frac{1}{s^3} - \frac{3}{169} \frac{1}{s^2} - \frac{73}{2197} \frac{1}{s} + \frac{1}{2197} \frac{73s + 477}{s^2 + 6s + 13}$$
 (2.39)

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа оригинал имеет вид

$$F_2(t) = \frac{7}{26}t^2 - \frac{3}{169}t - \frac{73}{2179}e^{-3t}\cos 2t + \frac{129}{2197}e^{-3t}\sin 2t$$
 (2.40)

**Пример 2.4.** С помощью преобразования Лапласа решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями:

$$y''' - y'' = e^{-2t} (2.41)$$

При решении уравнения с использованием преобразования Лапласа необходимо его преобразовать по Лапласу с учетом начальных условий:

$$y(s)s^{3} - y(s)s^{2} = \frac{1}{s+2}$$
 (2.42)

Из последнего выражения определяется y(s), которое и является решением уравнения, но оно записано в терминах преобразования Лапласа. Для получения решения уравнения во временной области полученная дробь разлагается на простейшие дроби, от которых по таблицам необходимо взять обратное преобразование Лапласа. В результате разложения получаем следующее выражение:

$$y(s) = \frac{1}{(s+2)s^{2}(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^{2}} + \frac{D}{s-1} =$$

$$= \frac{As^{2}(s-1) + Bs(s+2)(s-1) + C(s+2)(s-1) + Ds^{2}(s+2)}{s^{2}(s+2)(s-1)}$$
(2.43)

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в числителе, записываем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$A + B + D = 0$$
- A + B + C + 2D = 0
-2B + C = 0
-2C = 1
$$(2.44)$$

Решение системы:

$$C = -1/2$$
,  $B = -1/4$ ,  $A = -1/12$ ,  $D = 1/3$ . (2.45)

Таким образом, дробь разложена на следующие простейшие дроби:

$$y(s) = -\frac{1}{12(s+2)} - \frac{1}{4s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3(s-1)}$$
 (2.46)

Взяв обратное преобразование Лапласа от последнего выражения, получим

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^{t}$$
 (2.47)

Функция y(t) является решением дифференциального уравнения.

## 2.3. Передаточные функции

При описании автоматических систем управления широко используют символическую форму записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее на примере уравнения

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1 u + c_0 f$$
 (2.48)

Введем для операции дифференцирования обозначение р, т. е.

$$d/dt \equiv p; (2.49)$$

$$\frac{d^i}{dt^i} \equiv p^i \tag{2.50}$$

Используя его, уравнение (2.48) можно записать в виде:

$$a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p u + b_1 u + c_0 f$$
 (2.51)

При записи и преобразовании дифференциальных уравнений оператор (операцию дифференцирования) р можно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение ру — как произведение, не обладающее свойством

коммутативности: нельзя вместо ру писать ур. Учитывая это замечание, перепишем (2.51), вынеся у и и за скобки:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y = (b_0 p + b_1) u + c_0 f$$
(2.52)

Введем обозначения:

$$Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2 , (2.53)$$

$$R_1(p) = b_0 p + b_1, (2.54)$$

$$R_2(p) = c_0 (2.55)$$

С помощью этих обозначений уравнение (2.53) можно записать в более компактной форме:

$$Q(p)y = R_1(p)u + R_2(p)f (2.56)$$

В уравнении (2.56) Q(p) (дифференциальный оператор при выходной величине) называют собственным оператором, а  $R_1(p)$  и  $R_2(p)$  (дифференциальные операторы при входных величинах) — операторами воздействия.

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют **передаточной функцией** или передаточной функцией в операторной форме.

Звено, описываемое уравнением (2.48) или, что, то же самое, уравнениями (2.49) — (2.56), можно характеризовать двумя передаточными функциями: передаточной функцией  $W_1(p)$  по входной величине и т. е.

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) = (b_0 p + b_1)/(a_0 p_2 + a_1 p + a_2),$$
(2.57)

и передаточной функцией  $W_2(p)$  по входной величине f, т.е.

$$W_2(p) = R_2(p)/Q(p) = c_0/(a_0p_2 + a_1p + a_2)$$
(2.58)

Используя передаточные функции, уравнение (2.48) записывают в виде

$$y = W_1(p)u + W_2(p)f (2.59)$$

Это уравнение представляет собой условную, более компактную форму записи исходного уравнения (2.48). Уравнения (2.52), (2.56) и (2.59) называют уравнениями в символической или операторной форме записи.

На рис. 2.4 изображена система автоматического регулирования по замкнутому циклу. Предположим вначале, что чувствительный элемент (ЧЭ)

отсоединен от регулируемого объекта (РО), и рассмотрим разомкнутую систему автоматического регулирования.

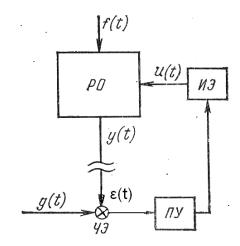


Рис. 2.4. Система автоматического регулирования по замкнутому циклу.

Управляющее (или регулирующее) воздействие, которое прикладывает исполнительный элемент (ИЭ) к регулируемому объекту, определяется выражением

$$u(t) = W_{per}(\mathbf{p})\mathcal{E}(\mathbf{t}), \qquad (2.60)$$

где  $\varepsilon(t)$  — рассогласование на выходе чувствительного элемента,

 $W_{per}\left( p\right)$ — передаточная функция цепи регулирования.

Регулируемая величина может быть найдена из выражения

$$y(t) = W_0(p)u(t) + W_f(p)f(t),$$
 (2.61)

где  $W_0(p)$ — передаточная функция регулируемого объекта по регулирующему воздействию,  $W_f(p)$ — передаточная функция регулируемого объекта по возмущающему воздействию f(t).

Предполагается, что на объект регулирования (или на систему регулирования) действует одно возмущающее воздействие f(t). При наличии нескольких возмущений на основании принципа суперпозиции необходимо будет просуммировать члены вида  $W_k(p)f_k(t)$ , где  $f_k(t)$ 

 $W_k(p)$  — возмущение и соответствующая ему передаточная функция по возмущению. Подставляя (2.60) и (2.61), получаем

$$y(t) = W(p)\varepsilon(t) + W_f(p)f(t) , \qquad (2.62)$$

Здесь введена так называемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_0(p)W_{pez}(p) = R(p)/Q(p),$$
 (2.63)

где R(p) и Q(p) представляют собой некоторые полиномы от p.

Передаточную функцию разомкнутой системы можно определить как отношение изображений регулируемой величины и ошибки при нулевых начальных условиях и возмущающих воздействиях, равных нулю:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} \tag{2.64}$$

Применительно к функциям времени, которые использовались в формулах (2.60) — (2.62), передаточная функция разомкнутой системы дает возможность в символической или операторной форме записать дифференциальное уравнение, связывающее регулируемую величину y(t) с ошибкой  $\varepsilon(t)$  в разомкнутой системе:

$$y(t) = W(p)\varepsilon(t) \tag{2.65}$$

где: p = d/dt — алгебраизированный оператор дифференцирования. Учитывая (2.63), формулу (2.65) можно также записать в виде

$$Q(p)y(t) = R(p)\varepsilon(t)$$
 (2.66)

Передаточная функция разомкнутой системы имеет весьма большое знамение в теории автоматического регулирования, так как многие методы анализа и синтеза основаны на использовании именно этой функции.

Рассмотрим теперь замкнутую систему, т. е. предположим, что чувствительный элемент соединен с регулируемым объектом. При этом можно записать так называемое **уравнение замыкания**:

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) \tag{2.67}$$

Решая (2.62) и (2.67) совместно, получаем для регулируемой величины

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g(t) + \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} f(t)$$
(2.68)

и для ошибки

$$\varepsilon(t) = \frac{g(t)}{1 + W(p)} - \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} f(t)$$
 (2.69)

Выражение

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{R(p)}{R(p) + Q(p)}$$
(2.70)

называется передаточной функцией замкнутой системы или главным оператором. Передаточная функция замкнутой системы дает связь между регулируемой величиной и задающим воздействием при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$y(t) = \Phi(t)g(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}g(t)$$
 (2.71)

Выражение

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{Q(p)}{R(p) + Q(p)}$$
(2.72)

называют передаточной функцией замкнутой системы по ошибке. Оно дает связь между ошибкой и задающим воздействием в замкнутой системе при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$\varepsilon(t) = \Phi_{\varepsilon}(p)g(t) = \frac{g(t)}{1 + W(p)}$$
(2.73)

Более строго передаточную функцию замкнутой системы можно определить как отношение изображений регулируемой величины Y(p) и управляющего воздействия G(p) при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} \tag{2.74}$$

а передаточную функцию по ошибке — как отношение изображений ошибки  $\epsilon(p)$  и управляющего воздействия G(p):

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = \frac{X(p)}{G(p)} \tag{2.75}$$

также при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений.

Из формул (2.68) и (2.69) видно, что введение автоматического регулирования «уменьшает» отклонение регулируемой величины под действием возмущающих воздействий в [1 + W (p)] раз по сравнению с отклонением в разомкнутой системе (2.62), когда цепь регулирования разорвана и автоматическое регулирование отсутствует.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде дробно-рациональной функции от оператора р.

#### Полином

$$D(p) = R(p) + Q(p)$$
 (2.76)

называется характеристическим.

Приравнивание нулю характеристического полинома дает характеристическое уравнение системы:

$$D(p) = R(p) + Q(p) = 0 (2.77)$$

Оно, может быть, записало в более удобной форме, которая непосредственно получается из (2.68) или (2.69):

$$1 + W(p) = 0, (2.78)$$

так как характеристическое уравнение системы есть знаменатель операторного решения, приравненный нулю.

Из рассмотренного видно, что знание передаточной функции разомкнутой системы позволяет найти выражение для ошибки и регулируемой величин в функции задающего и возмущающих воздействий, а также характеристическое уравнение системы.

Передаточная функция разомкнутой системы может находиться непосредственно по структурной схеме и передаточным функциям входящих в нее звеньев или по какому-либо соотношению, связывающему передаточную функцию разомкнутой системы с другими функциями:

--- по передаточной функции замкнутой системы (2.70)

$$W(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)}$$
; (2.79)

--- по передаточной функции для ошибки (2.72)

$$W(p) = \frac{1 - \Phi_{\varepsilon}(p)}{\Phi_{\varepsilon}(p)}.$$
 (2.80)

Наряду с передаточной функцией в операторной форме широко используют передаточную функцию в форме изображений Лапласа.

Передаточной функцией или передаточной функцией в форме изображений Лапласа называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях. Если звено (система) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной величины остальные величины полагают равными нулю.

Передаточную функцию в форме изображения Лапласа можно получить из передаточной функции в операторной форме, если в последней сделать подстановку р = s. В общем случае это следует из того, что дифференцированию оригинала — символическому умножению оригинала на р — при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на комплексное число s.

Сходство между передаточными функциями в форме изображения Лапласа и в операторной форме чисто внешнее. Оно имеет место только в случае стационарных звеньев (систем).

Возьмем то же дифференциальное уравнение (2.48):

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1 u + c_0 f$$
(2.81)

Выполним преобразование Лапласа:

$$L\{a_0y'' + a_1y' + a_2y\} = L\{b_0u' + b_1u + c_0f\}$$
(2.82)

$$a_0 L\{y''\} + a_1 L\{y'\} + a_2 L\{y\} = b_0 L\{u'\} + b_1 L\{u\} + c_0 L\{f\}$$
(2.83)

$$a_0 s^2 Y + a_1 s Y + a_2 Y = b_0 s U + b_1 U + c_0 F$$
 (2.84)

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)Y = (b_0 s + b_1)U + c_0 F$$
(2.85)

$$Q(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2; (2.86)$$

$$R_1(s) = b_0 s + b_1;$$
 (2.87)

$$R_2(s) = c_0. (2.88)$$

Изображения есть функции комплексной переменной s и полученное уравнение алгебраическое

$$Y(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)F(s)$$
 (2.89)

Таким образом, дифференциальному уравнению в вещественной области соответствует алгебраическое уравнение в комплексной области. Это соответствие определяется преобразованием Лапласа. Это уравнение адекватно исходному дифференциальному уравнению (2.48) только при нулевых начальных условиях. Если начальные условия не равны нулю, то уравнениями (2.85) и (2.89) как математическими описаниями исходного звена пользоваться нельзя.

Передаточные функции системы наряду с дифференциальными уравнениями широко используются для описания систем автоматического управления (САУ). Но при ненулевых начальных условиях они не всегда являются их исчерпывающими характеристиками. Если собственный оператор и оператор воздействия системы имеют общие множители (нули), то они при вычислении передаточной функции сокращаются. И в этом случае по передаточной функции системы нельзя восстановить ее дифференциальное уравнение и получить описание процессов в ней при произвольных начальных условиях.

## 2.4. Частотные характеристики

Важное значение при описании линейных стационарных систем (звеньев) имеют частотные характеристики. Они получаются при рассмотрении вынужденных движений системы (звена) при подаче на ее вход гармонического воздействия.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, который можно сформулировать следующим образом: реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на

каждое воздействие в отдельности. Это позволяет ограничиться изучением систем только с одним входом.

В общем случае уравнение линейной стационарной системы с одним входом можно записать так:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g$$
(2.90)

Ее передаточная функция по определению:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$
(2.91)

Функцию  $W(j\omega)$ , которую получают из передаточной функции (2.91) при подстановке в нее  $p=j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}$$
(2.92)

называют **частотной передаточной функцией**. Частотная передаточная функция является комплексной функцией от действительной переменной ω. Функцию W(jω) можно представить в виде:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (2.93)$$

где:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
 (2.94)

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) \tag{2.95}$$

Если

$$|\arg W(j\omega)| \le \pi/2, \tag{2.96}$$

ТО

$$\varphi(\omega) = arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \tag{2.97}$$

На комплексной плоскости (рис. 2.5) частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  определяет вектор ОС, длина которого равна  $A(j\omega)$ , а аргумент (угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью) -  $\phi(\omega)$ .

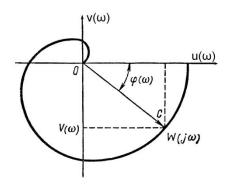


Рис. 2.5. Частотная передаточная функция

Кривую, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от 0 до  $\infty$  (иногда от —  $\infty$  до  $\infty$ ), называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).

Частотную передаточную функцию будем называть также амплитудно-фазовой частотной функцией. Ее действительную часть  $U(\omega) = \text{ReW}(\omega)$  и мнимую часть  $V(\omega) = \text{ImW}(\omega)$  будем называть соответственно вещественной и мнимой частотной функцией. График вещественной частотной функции [кривая зависимости  $U=U(\omega)$ ] называют вещественной частотной характеристикой, а график мнимой частотной функции — мнимой частотной характеристикой.

Модуль  $A(\omega) = |W(\omega)|$  называют амплитудной частотной функцией, ее график — амплитудной частотной характеристикой.

Аргумент  $\phi(\omega) = \arg W(\omega)$  называют фазовой частотной функцией, ее график — фазовой частотной характеристикой.

Кроме перечисленных частотных характеристик используют еще логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) — логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ).

**Логарифмические частотные характеристики** (ЛЧХ) включают в себя построенные отдельно на одной плоскости логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФЧХ).

Для построения ЛАХ находится величина:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg A(\omega) \tag{2.98}$$

Эта величина выражается в децибелах. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Один Бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 Бела — в 100 раз, 3 Бела — в 1000 раз и т. д.

Децибел равен одной десятой части Бела. Если бы  $A(\omega)$  было отношением мощностей, то перед логарифмом в правой части (2.98) должен был бы стоять множитель 10. Так как  $A(\omega)$  представляет собой отношение не мощностей, а выходной и входной величин (перемещений, скоростей, напряжений, токов и т. п.), то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в сто раз, что соответствует двум белам или двадцати децибелам. Поэтому в правой части (2.98) стоит множитель 20. Необходимость логарифмировать модуль частотной передаточной функции (2.98) приводит к тому, что, строго говоря, ЛАХ может быть построена только для тех звеньев, у которых передаточная функция представляет собой безразмерную величину. Это возможно при одинаковых размерностях входной и выходной величии звена. В дальнейшем изложении будет подразумеваться именно этот случай.

Однако ЛАХ может условно строиться и для тех звеньев, у которых передаточная функция имеет какую-либо размерность. В этом случае некоторая исходная величина, соответствующая размерности передаточной функции, принимается за единицу (например,  $1 \, \Gamma^* \, \text{см/град}$ ,  $1 \, \text{сек}^{-1}$ ,  $1 \, \text{в/рад}$  и т. п.) и под значением  $A(\omega)$  понимается отношение модуля частотной передаточной функции к этой исходной единице.

Это же замечание относится и к угловой частоте ω, которая имеет размерность [ceк-1] и которую приходится логарифмировать в соответствии с вышеизложенным.

Для построения ЛАХ и ЛФХ используется стандартная сетка (рис. 2.6). По оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе,

т. е. наносятся отметки, соответствующие  $\omega$ , а около отметок пишется значение частоты  $\omega$  в рад/сек.

По оси ординат откладывается модуль в децибелах (дб). Для этой цели на ней наносится равномерный масштаб. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 дб, что соответствует значению модуля  $A(\omega) = 1$ , так как логарифм единицы равен нулю.

Следует учесть, что точка  $\omega = 0$  лежит на оси частот слева в бесконечности, так как  $\log 0 = -\infty$ . Поэтому ось ординат проводят так, чтобы с права от нее можно было показать весь ход ЛАХ.

Для построения ЛФХ используется та же ось абсцисс (ось частот). По оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе. Для практических расчетов удобно совместить точку нуля децибел с точкой, где фаза равна —180°. Отрицательный сдвиг по фазе откладывается по оси ординат вверх, а положительный — вниз.

Иногда по оси абсцисс указывается не сама частота, а ее десятичный логарифм. Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т. е. удесятерению частоты.

Использование на оси абсцисс декад значительно менее удобно, так как при этом оцифровка шкалы получается не в единицах частоты, а в единицах логарифма частоты, что в сильной степени снижает преимущества применения логарифмических частотных характеристик.

Главным логарифмических достоинством амплитудных частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы. Это особенно проявляется в тех случаях, когда частотная передаточная функция может быть представлена в виде произведения сомножителей. Тогда результирующая ЛАХ может быть найдена суммированием ординат л. а. х., соответствующих отдельным Часто не требуется сомножителям. даже такого суммирования результирующая ЛАХ может быть приближенно построена в виде так называемой асимптотической ЛАХ, представляющей собой совокупность

отрезков прямых линий с наклонами, кратными величине 20 дб/дек. Для иллюстрации простоты построения ЛАХ рассмотрим несколько примеров (рис. 2.6).

1. Пусть модуль частотной передаточной функции равен постоянному числу

$$A(\omega) = k_0; \tag{2.99}$$

Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 k_0.$$
 (2.100)

ЛАХ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (прямая 1 на рис. 2.6).

2. Рассмотрим случай, когда

$$A(\omega) = k_1 / \omega. \tag{2.101}$$

Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg A(k_1/\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega$$
 (2.102)

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1 ce \kappa^{-1}$  и  $L(\omega) = 1 g k_1$  и имеющая отрицательный наклон 20 дб/дек, так как каждое удесятерение частоты вызовет увеличение  $1 g \omega$  на одну единицу, т. е. уменьшение  $1 g \omega$  на 20 дб (прямая 2 на рис. 2.6).

Точку пересечения прямой с осью нуля децибел (осью частот) можно найти, положив  $L(\omega)=0$  или, соответственно,  $A(\omega)=1$ . Отсюда получаем так называемую частоту среза ЛАХ, равную в данном случае  $\omega_{cp}=k_1$ . Очевидно, что размерность коэффициента  $k_1$  должна быть [cek<sup>-1</sup>].

- **3.** Аналогичным образом можно показать, что в случае  $A(\omega) = k_2/\omega^2$  л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном 40 дб/дек (прямая 3 на рис. 2.6). Вообще для  $A(\omega) = k_n/\omega^n$  л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном n20 дб/дек. Эта прямая может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке  $\omega = 1$  сек  $^{-1}$  и  $L(\omega)=201$ gk<sub>n</sub>. Очевидно, что размерность коэффициента  $k_n$  должна быть[сек $^{-1}$ ].
- **4.** Рассмотрим случай, когда  $A(\omega) = k_3 \omega$ .

Тогда

$$L(\omega) = 20\lg k_3 \omega = 20\lg k_3 + 20\lg \omega$$
 (2.103)

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку  $\omega = 1ce\kappa^{-1}$  и  $L(\omega) = \lg k_3$  и имеющая положительный наклон 20 дб/дек. Эта прямая может быть построена также по частоте среза  $\omega_{\rm cp} = 1/k_3$ , полученной приравниванием  $A(\omega) = 1$  (прямая 4 на рис. 2.6).

Аналогичным образом можно показать, что в случае, когда  $A(\omega) = k_m \omega^m$ , ЛАХ представляет собой прямую линию с положительным наклоном m20дб/дек. Эта прямая также может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке  $\omega = 1$  сек<sup>-1</sup> и  $L(\omega) = 20$ lg $k_m$ .

Иногда при расчете автоматических систем употребляются логарифмические амплитудно-фазовые характеристики (ЛАФХ). Они строятся в координатах «модуль в децибелах – фаза».

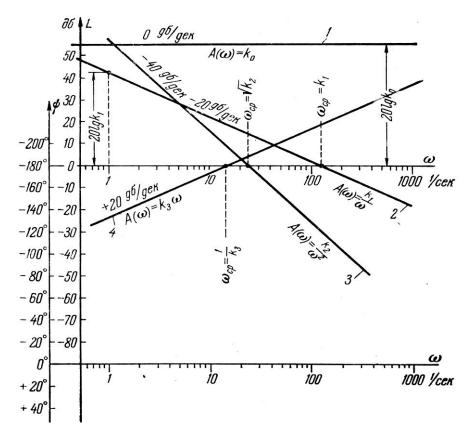


Рис. 2.6. Типовые ЛАХ.

### 2.5. Реакция системы на гармоническое воздействие

Найдем математическое описание вынужденного движения системы при подаче на ее вход гармонического воздействия, например

$$g = g_m \cos \omega t \tag{2.104}$$

Для этого решим уравнение (2.48), подставив в правую часть выражение (2.104). Общее решение имеет вид

$$y(t) = y_c(t) + y_e(t),$$
 (2.105)

где  $y_c$  — общее решение однородного уравнения, а  $y_B(t)$  — частное решение неоднородного уравнения.

Составляющая  $y_c(t)$  определяет свободные движения (переходный процесс). В устойчивых системах она со временем затухает:  $y_c(t) \to 0$  при  $t \to \infty$ . Вынужденное движение описывается частным решением  $y_B(t)$ . Чтобы найти его, представим входное воздействие (2.104) с помощью формулы Эйлера в виде суммы:

$$g = g_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = g_1 + g_2 \tag{2.106}$$

где 
$$g_1 = \frac{g_m}{2} e^{j\omega t}, \quad g_2 = \frac{g_m}{2} e^{-j\omega t},$$
 (2.107)

Используя принцип суперпозиции, решение уравнения (2.48) можно также представить в виде суммы  $y = y_1 + y_2$ , где  $y_1$  — решение при  $g = g_1$  а  $y_2$  — решение при  $g = g_2$ . Найдем отдельно каждое из этих решений. Подставим выражение для  $g_1$  в правую часть уравнения (2.48) вместо g. Так как

$$pg_{1} = \frac{g_{m}}{2} p e^{j\omega t} = \frac{g_{m}}{2} (j\omega) e^{j\omega t} = (j\omega) g_{1}$$

$$p^{2} g_{1} = p(pg_{1}) = p(j\omega_{1}) = (j\omega)^{2} g_{1}, \dots$$

$$p^{m} g_{1} = (j\omega)^{m} g_{1}$$
(2.108)

уравнение (2.48) примет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_1 = [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] g_1$$
(2.109)

Частное решение последнего уравнения будем искать в виде

$$y_1 = A_1 g_1 = A_1 \frac{g_m}{2} e^{j\omega t}, (2.110)$$

где  $A_1$  не зависит от времени. При подстановке этого выражения в (2.109) получим

$$[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n]A_1g_1 = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m]g_1 \qquad (2.111)$$

откуда

$$A_{1} = \frac{b_{0}(j\omega)^{m} + b_{1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b^{m}}{a_{0}(j\omega)^{n} + a_{1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n}}$$
(2.112)

Очевидно, это выражение совпадает с частотной передаточной функцией (2.92) рассматриваемой системы:

$$A_{1} = W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$
 (2.113)

Подставив это выражение в формулу (2.110), получим

$$y_1 = A(\omega) \frac{g_m}{2} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}$$
(2.114)

Теперь найдем частное решение  $y_2$  исходного уравнения, подставив вместо g выражение для  $g_2$  из (2.107). Так как

$$pg_2 = \frac{g_m}{2} p e^{-j\omega t} = (-j\omega) \frac{g_m}{2} e^{-j\omega t} = (-j\omega) g_2$$
 (2.115)

$$p^{2}g_{2} = p(pg_{2}) = (-j\omega)^{2}g_{2}...p^{m}g_{2} = (-j\omega)^{m}g_{2}$$
 (2.116)

то (2.48) в этом случае

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_2 = [b_0 (-j\omega)^m + b_1 (-j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] g_2$$
 (2.117)

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_2 = A_2 g_2 = A_2 \frac{g_m}{2} e^{-j\omega t}$$
 (2.118)

Проделав те же выкладки, что и при нахождении частного решения  $y_1$  получим

$$A_2 = W(-j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$
(2.119)

$$y_2 = W(\omega) \frac{g_m}{2} e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}$$
(2.120)

Сложив (2.114) и (2.120) для  $y_1$  и  $y_2$ , найдем математическое описание вынужденного движения:

$$y = y_1 + y_2 = A(\omega)g_m \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$
 (2.121)

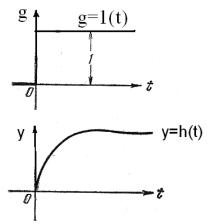
Таким образом, при гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса, выходная величина также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг фазы — аргументу частотной передаточной функции. Следовательно, амплитудная частотная характеристика показывает изменение отношения амплитуд, а фазовая частотная характеристика—сдвиг фазы выходной величины относительно входной в зависимости от частоты входного гармонического воздействия.

Частотные характеристики используют для описания как устойчивых, так и неустойчивых систем. Но в последнем случае они не имеют такого ясного физического смысла.

# 2.6. Временные характеристики

Динамические свойства звена могут быть определены по его переходной функции и функции веса.

**Переходная функция** (кривая разгона) или переходная характеристика h(t) представляет собой переходный процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице (рис. 2.7). Такое входное воздействие называется единичной ступенчатой функцией и обозначается g = l(t), что соответствует g = 0 при  $t \le 0$  и g = 1 при  $t \ge 0$ . Предполагается, что единица имеет ту же размерность, что и физическая величина на входе звена.



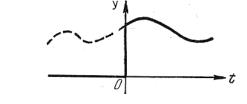


Рис. 2.7. Переходная функция

Рис. 2.8. Функция времени y(t)

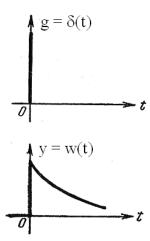
Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию g = N\*1(t), выходная величина будет равна y = N\*h(t).

Более строго переходную функцию можно определить как отношение выходной величины звена y(t) к высоте ступенчатого скачка g(t) = N\*1(t) на его входе, т. е.  $h(t) = N^{-1} * y(t)$ . При этом размерность h(t) соответствует размерности передаточной функции звена.

Ступенчатая функция представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот входного валика следящей системы и т. п.

Умножение какой-либо функции времени y(t) на единичную ступенчатую функцию 1(t) означает, что функция времени y(t) будет существовать только при  $t \ge 0$ , а при t < 0 она обращается в нуль (рис. 2.8).

**Функция веса** w(t) представляет собой реакцию звена на единичную импульсную функцию, поданную на его вход (рис. 2.9). Единичная импульсная функция, или дельта-функция, представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:  $\delta(t) = 1'(t)$ . Дельта-функция тождественно равна нулю повсюду, кроме точки t = 0, где она стремится к бесконечности.





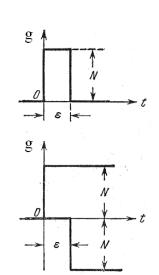


Рис. 2.10. Входное воздействие на звено в виде импульса

Нетрудно установить связь между переходной функцией и функцией веса. Рассмотрим входное воздействие звена в виде конечного по высоте и ширине импульса с площадью  $N\epsilon = 1$ , прикладываемого при t = 0 (рис. 2.10).

Такой импульс может быть заменен двумя ступенчатыми функциями N\*1(t) и -  $N*l(t-\epsilon)$ , прикладываемыми к входу звена со сдвигом во времени  $\epsilon$ . Тогда выходная величина звена будет равна

$$y = N * [h(t) - h(t - \varepsilon)]$$
(2.122)

Будем теперь увеличивать высоту импульса N, одновременно уменьшая его ширину  $\epsilon$ , но так, чтобы все время площадь импульса равнялась единице, т. е. N  $\epsilon = 1$ . Помножив и поделив правую часть равенства (2.122) на  $\epsilon$  и перейдя к пределу, получим функцию веса

$$w(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N\varepsilon[h(t) - h(t - \varepsilon)]}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt}$$
 (2.123)

Таким образом, функция веса может быть получена дифференцированием по времени переходной функции. В случае, если на вход звена поступает неединичная импульсная функция  $g(t) = G\delta(t)$ , на выхода звена получится

$$y(t) = Gw(t) \tag{2.124}$$

Более строго функцию веса можно определить как отношение выходной величины звена y(t) к площади поданного на его вход импульса  $g(t) = G\delta(t)$ ,

т. е.  $w(t) = G^{-1}y(t)$ . При этом размерность w(t) соответствует размерности передаточной функции звена, деленной на время.

Импульсная функция также представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду можно свести, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора, отключаемый плавкими предохранителями, и т. п. В действительности реальные импульсные воздействия на автоматическую систему всегда будут конечными по величине и продолжительности. Однако в случае, если их продолжительность весьма мала по сравнению со временем переходного процесса звена или автоматической системы, то с большой степенью точности реальный импульс может дельта функцией с некоторым масштабирующим коэффициентом, что позволяет оценить переходный процесс по виду функции веса.

Функция веса звена связана с его передаточной функцией преобразованием Лапласа, а именно: передаточная функция есть изображение функции веса и связана с ней интегральным преобразованием

$$W(p) = \int_{0}^{+\infty} w(t)e^{-pt}dt$$
 (2.125)

В свою очередь переходная функция звена связана с его передаточной функцией преобразованием Карсона, т. е. имеет место интегральное преобразование

$$W(p) = p \int_{0}^{+\infty} h(t)e^{-pt}dt$$
 (2.126)

Для входного воздействия произвольного типа, прикладываемого в момент t=0, переходный процесс на выходе звена при нулевых начальных условиях может быть определен на основании интеграла Дюамеля — Карсона по переходной функции:

$$y(t) = g(0)h(t) + \int_{0}^{t} g'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
 (2.127)

или по функции веса:

$$y(t) = \int_{0}^{t} g'(\tau)w(t-\tau)d\tau$$
 (2.128)

где  $\tau$  — вспомогательное время интегрирования, изменяющееся в пределах от нуля до рассматриваемого текущего момента времени t.

Весовая и переходная функции, как и передаточная функция, являются исчерпывающими характеристиками системы (звена) при нулевых начальных условиях.

**Пример 2.5**. По известной кривой разгона и весовой функции линейного элемента найти:

- 1) реакцию на входной сигнал g(t);
- 2) весовую функцию или кривую разгона соответственно;
- 3) передаточную функцию элемента.

Задано:

кривая разгона - h(t) = 2t;

весовая функция - 
$$\omega(t) = 1 - te^{-t}$$
; (2.129)

входной сигнал - 
$$g(t) = 1 - e^{-t} \sin t$$
. (2.130)

1) Реакция элемента на входной сигнал определяется по интегралу Дюамеля, который может быть записан через кривую разгона или через весовую функцию.

Если известна кривая разгона, то интеграл Дюамеля записывается следующим образом

$$y(t) = g(0)h(t) + \int_{0}^{t} h(t-\tau)\frac{dg}{dt}d\tau$$
 (2.131)

Следовательно

$$y(t) = 2t + \int_{0}^{t} 2(t - \tau)(e^{-\tau}\sin(t) - e^{-\tau}\cos(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(-2e^{-t}\sin t + 2e^{-t}\cos t)t^{2} + 2t^{2}(e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t)$$
(2.132)

Если известна весовая функция, то интеграл Дюамеля имеет вид

$$y(t) = \int_{0}^{t} \omega(t - \tau)g(\tau)d\tau$$
 (2.133)

И тогда выходной сигнал в данной задаче будет записан как

$$y(t) = \int_{0}^{t} (1 - (t - \tau)e^{-(t - \tau)})(1 - e^{-\tau}\sin\tau d\tau =$$

$$= t - 1 + e^{-t}\sin t + te^{-t} + e^{-t} - te^{-2t}\sin t + e^{-2t}\sin t$$
(2.134)

2) Между кривой разгона и весовой функцией существует взаимная связь. Если известна кривая разгона, то весовая функция определяется как  $\omega(t) = h'(t)$ , т.е.  $\omega(t) = (2t)' = 2$ .

Если же известна весовая функция, то кривая разгона:

$$h(t) = \int_{0}^{t} \omega(t)dt, \qquad (2.135)$$

следовательно, в нашем случае

$$h(t) = \int_{0}^{t} \omega(1 - te^{-t})dt = t + te^{-t} + e^{-t} - 1$$
 (2.136)

3) Передаточная функция, которая представляет собой отношение преобразованного по Лапласу выходного сигнала к преобразованному по Лапласу входному сигналу при нулевых начальных условиях, может быть определена как через кривую разгона, так и через весовую функцию:

$$W(s) = sh(s), W(s) = \omega(s) (2.137)$$

Для нашей задачи:

$$W(s) = sL(2t) = s \left[ \frac{2}{s^2} \right] = \frac{2}{s}$$
 (2.138)

$$W(s) = L(1 - te^{-t}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)^2}$$
 (2.139)

## 2.7. Элементарные звенья и их характеристики

Звенья, как и системы, могут быть описаны дифференциальными уравнениями достаточно высокого порядка, и в общем случае их передаточные функции имеют вид:

$$W(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) / (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)$$
 (2.140)

Всегда их можно представить как соединение типовых или элементарных звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Из курса алгебры известно, что полином произвольного порядка можно разложить на простые множители - множители вида

$$k_1 S$$
,  $(d_1 S + d_2)$ ,  $(d_1 S^2 + d_2 S + d_3)$  (2.141)

поэтому передаточную функцию (2.140) можно представить как произведение простых множителей вида (2.141) и простых дробей вида

$$k/s$$
,  $k/(d_1s+d_2)$ ,  $k/(d_1s^2+d_2s+d_3)$  (2.142)

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей (2.141) или простых дробей (2.142), называют типовыми или элементарными звеньями.

При рассмотрении свойств звеньев предполагается, что на вход звена подается управляющее воздействие u(t).

**1. Пропорциональное звено.** Пропорциональным называют звено, которое описывается уравнением

$$y(t) = ku(t) \tag{2.143}$$

или передаточной функцией

$$W(s) = k \tag{2.144}$$

или частотной функцией

$$W(j\omega) = k; (2.145)$$

Модуль частотной функции: 
$$A(ω) = k;$$
 (2.146)

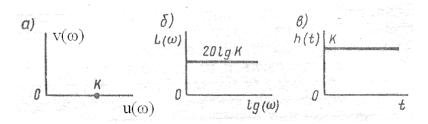


Рис. 2.11. Характеристики пропорционального звена

На рис. 2.11 показаны характеристики пропорционального звена: амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 2.11а) есть точка на действительной оси  $U(\omega) = k$ ; ее мнимая часть  $V(\omega) = 0$ . Сдвиг фаз отсутствует  $\phi(\omega)=0$ ; Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (рис. 2.11б) паралельна оси частот и проходит на уровне  $L(\omega)=20$ lgk и совпадает с положительной полуосью частот; Переходная характеристика (рис. 2.11в) паралельна оси времени и проходит на уровне h=k. Функция веса описывается уравнением:

$$w(t) = \delta(t). \tag{2.147}$$

**2. Интегрирующее звено.** Интегрирующим называют звено, которое описывается уравнением

$$py = ku (2.148)$$

или передаточной функцией

$$W(s) = k/s.$$
 (2.149)

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k / j\omega = -jk / \omega. \qquad (2.150)$$

Модуль частотной функции:

$$A(\omega) = k/\omega. \tag{2.151}$$

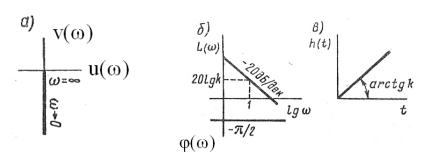


Рис. 2.12. Характеристики интегрирующего звена

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис.212а) интегрирующего звена совпадает с отрицательной мнимой полуосью:

 $V(\omega) = -k/\omega$  и  $U(\omega) = 0$ . ЛФЧХ (рис. 2.12,б) паралельна оси частот и проходит на уровне  $\varphi = -\pi/2$ ; сдвиг фазы не зависит от частоты и равен  $-\pi/2$ . ЛАЧХ (рис. 2.12б) - наклонная прямая, проходящая через точку с координатами  $\omega$ =1 и  $L(\omega)$ =20lgk. Как видно из уравнения

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega \tag{2.152}$$

при увеличении частоты на одну декаду ордината  $L(\omega)$  уменьшается на 20дб. Поэтому наклон ЛАЧХ равен -20дб/дек. Переходная характеристика h(t) = kt представляет собой прямую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом наклона, равным k (рис. 2.12в).

Функция веса является постоянной величиной и равна k.

**3.** Дифференцирующее звено. Дифференцирующим называют звено, которое описывается уравнением

$$y = kpu \tag{2.153}$$

или передаточной функцией

$$W(s) = ks.$$
 (2.154)

Частотная передаточная функция звена

$$W(j\omega) = jk\omega. (2.155)$$

Модуль частотной функции:

$$A(\omega) = k\omega; \qquad (2.156)$$

$$a) \qquad \delta \qquad (2.156)$$

$$V(\omega) \qquad L(\omega) \qquad \pi/2 \qquad 20 \log k \qquad (2.156)$$

Рис. 2.13. Характеристики дифференцирующего звена

 паралельна оси частот и проходит на уровне  $\varphi = \pi/2$ ; сдвиг фазы не зависит от частоты и равен -  $\pi/2$ . ЛАЧХ (рис. 2.13б)- прямая, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L(\omega) = 20$ lgk и имеющая наклон 20дб/дек:

$$L(\omega) = 20lgk + 20lg\omega \tag{2.157}$$

Выражения для переходной характеристики и функции веса совпадают

$$h(t) = \delta(t);$$
  $w(t) = \delta(t).$  (2.158)

**4. Апериодическое звено 1-го порядка.** Апериодическим звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением

$$(Tp+1)y = ku (2.159)$$

или передаточной функцией

$$W(s) = k/(Ts+1). (2.160)$$

Это звено также называют инерционным звеном или инерционным звеном первого порядка. Апериодическое звено в отличие от выше рассмотренных звеньев характеризуются двумя параметрами: постоянной времени Т и передаточным коэффициентом k.

Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = k / (Tj\omega + 1)$$
 (2.161)

Умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное число, получим

$$U(\omega) = k/[(T\omega)^2 + 1]; \quad V(\omega) = -kT\omega/[(T\omega)^2 + 1]$$
 (2.162)

Амплитудную и фазовую частотные функции можно определить, воспользовавшись правилом модулей и аргументов.

Так как модуль числителя частотной передаточной функции (2.161) равен k, а модуль знаменателя  $\sqrt{(T\omega)^2+1}$ , то

$$A(\omega) = k / \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$
 (2.163)

Аргумент числителя  $W(j\omega)$  равен нулю, а аргумент знаменателя  $arctg\omega T$ , поэтому

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctan \omega T. \tag{2.164}$$

Из (2.163) имеем

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$
 (2.165)

Решив дифференциальное уравнение (2.159) при U=1(t) и нулевом начальном условии (x(0)=0), получим

$$h(t) = (1 - e^{-t/T}).$$
 (2.166)

Весовая функция:

$$\omega(t) = h'(t) = (k/T)e^{-t/T}. \tag{2.167}$$

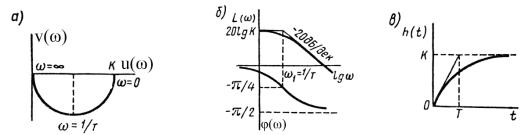


Рис. 2.14. Характеристики апериодического звена.

АФЧХ апериодического звена (рис. 2.14а) есть полуокружность, в чем нетрудно убедиться, исключив из параметрических уравнений (2.162) АФЧХ частоту. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 2.14б. На практике обычно ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ (ломаная линия на том же рис. 2.14б). Только в критических случаях, когда небольшая погрешность может повлиять на выводы, рассматривают точную ЛАЧХ.

Частоту  $\omega_1 = 1/T$ , при которой пересекаются асимптоты, называют сопрягающей. Точная и асимптотическая ЛАЧХ наиболее сильно отличаются при сопрягающей частоте; отклонение при этой частоте примерно равно 3дБ. Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид:

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 lgk & \text{при } \omega < \omega_1 \\ 20 lgk - 20 lgT\omega & \text{при } \omega \geq \omega_1 \end{cases} . \tag{2.168}$$

Оно получается из уравнения (2.165), если в нем под корнем при  $\omega < \omega_1$  пренебречь первым слагаемым, а при  $\omega \geq \omega_1$  - вторым слагаемым. Согласно полученному уравнению, асимптотическую ЛАЧХ можно строить

следующим образом:  $L(\omega)=20lgk$  на уровне до частоты  $\omega=\omega_1$  провести прямую, параллельно оси. частот, а далее через точку с координатами  $\omega=\omega_1$  и  $L(\omega)=20lgk$  - прямую под наклоном - 20 дБ/дек.

По АФЧХ или ЛАЧХ ,легко определить параметры T и k апериодического звена (рис. 2.14).

Логарифмическая фазовая частотная характеристика изображена на рис.2.14б. Эта характеристика асимптотически стремится к нулю при  $\omega \to 0$  и к  $-\pi/2$  при  $\omega \to \infty$ . При  $\omega = \omega_1$  фазовая частотная функция принимает значение -  $\pi/4$ , т. е.  $\varphi(\omega) = -\pi/4$ . ЛФЧХ всех апериодических звеньев имеют одинаковую форму. Они могут быть получены по какой-либо одной характеристике параллельным сдвигом вдоль оси частот влево или вправо в зависимости от постоянной времени Т.

Переходная характеристика апериодического звена (рис. 2.14в) представляет собой экспоненциальную кривую. По ней можно определить параметры: передаточный коэффициент, равный установившемуся значению  $h(\infty)$ ; постоянную времени, равную значению t, соответствующему точке пересечения касательной к характеристике в начале координат c ее асимптотой (рис. 2.14в).

**5. Форсирующее звено.** Форсирующим звеном, или форсирующим звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением

$$y = k(Tp+1)u$$
 (2.169)

или передаточной функцией

$$W(s) = k(Ts+1).$$
 (2.170)

Это звено, как и апериодическое, характеризуется двумя параметрами: постоянной времени Т и передаточным коэффициентом k.

Частотная передаточная функция звена:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1) \tag{2.171}$$

АФЧХ (рис. 2.15а) есть прямая, параллельная мнимой оси и пересекающая действительную ось в точке  $U(\omega)=k$ , а  $V(\omega)=kT\omega$ . ЛАЧХ изображена на рис. 2.15б:

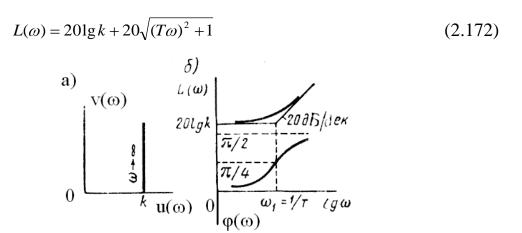


Рис. 2.15. Характеристика форсирующего звена

Как и в случае апериодического звена, на практике ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ (ломаная линия). Частоту  $\omega_1 = 1/T$ , соответствующую точке излома этой характеристики, называют сопрягающей частотой.

Уравнение асимптотической ЛАЧХ форсирующего звена имеет вид:

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 lgk & \omega < \omega_1 \\ 20 lgk + 20 lgT\omega & \omega \ge \omega_1 \end{cases} \tag{2.173}$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ при  $\omega < \omega_1$  параллельна оси частот и проходит на уровне  $L(\omega) = 20 lgk$ , а при  $\omega \geq \omega_1$  имеет наклон 20 дБ/дек. ЛФЧХ форсирующего звена можно получить зеркальным отражением относительно оси частот ЛФЧХ апериодического и определяется равенством:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\omega T.$$
 (2.174)

Переходная характеристика

$$h(t) = k[T\delta(t)+1(t)]$$
 (2.175)

Функция веса

$$\omega(t) = k[T\delta(t) + \delta(t)] \tag{2.176}$$

**6. Колебательное, консервативное и апериодическое второго порядка звенья.** Звено, которое можно описать уравнением

$$(T_0^2 + T_1 p + 1)y = ku (2.177)$$

ИЛИ

$$(T^{2}p^{2} + 2\xi Tp + 1)y = ku, \qquad (2.178)$$

где  $T = T_0$ ,  $\xi = T_1/(2T)$ ,

или передаточной функцией

$$W(s) = k/(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1), \qquad (2.179)$$

называют колебательным, если  $0<\xi<1$ , консервативным, если  $\xi=0$  ( $T_1=0$ ), и апериодическим звеном второго порядка, если  $\xi\geq 1$ .

Коэффициент ξ называется коэффициентом демпфирования.

**Колебательное звено** ( $0 < \xi < 1$ ). Частотная передаточная функция имеет вид:

$$W(j\omega) = k/[(1-T^2\omega^2) + j2\xi T\omega]. \tag{2.180}$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно — сопряженное знаменателю выражение, получим вещественную и мнимую частотные функции:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2 \omega^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2};$$
 (2.181)

$$V(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$
 (2.182)

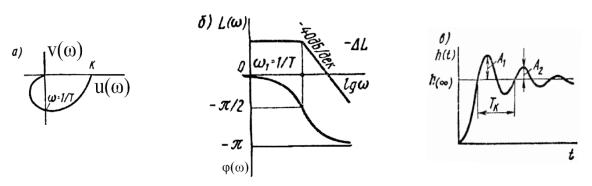


Рис. 2.16. Характеристики колебательного звена.

Фазовая частотная функция, как это видно из АФЧХ (рис. 2.16а), изменяется монотонно от 0 до  $-\pi$  и выражается формулой:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2 \omega^2} \\ -\pi - arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2 \omega^2} \end{cases}$$

$$(2.183)$$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (рис. 2.16б) при  $\omega \to 0$  асимптотически стремится к оси частот, а при  $\omega \to \infty$  - к прямой  $\phi = -\pi$ . Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}, \qquad (2.184)$$

логарифмическая амплитудная функция

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} . \tag{2.185}$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид:

где  $\omega_1 = 1/T$  является сопрягающей частотой. Оно получается из уравнения (2.185), если под корнем при  $\omega < \omega_1$  оставить только единицу, а при  $\omega \ge \omega_1$  слагаемое  $T^4\omega^4$ . Асимптотическая ЛАЧХ (рис. 2.16б) при  $\omega < \omega_1$  параллельна оси частот, а при  $\omega \ge \omega_1$  имеет наклон - 40дБ/дек.

Следует иметь в виду, что асимптотическая ЛАЧХ (рис. 2.16б) при малых значениях коэффициента демпфирования довольно сильно отличается от точной ЛАЧХ.

Решив дифференциальное уравнение (2.178) колебательного звена при u = 1(t) и нулевых начальных условиях [y(0) = y'(0) = 0], найдем переходную функцию:

$$h(t) = k[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-at} Sin(\beta t + \varphi_0)], \qquad (2.187)$$

где 
$$\alpha = \xi / T;$$
  $\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$   $\varphi_0 = arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi};$  (2.188)

Весовая функция

$$\omega(t) = h'(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} Sin\beta t. \qquad (2.189)$$

По переходной характеристике (рис.2.16в) можно определить параметры колебательного звена следующим образом.

Передаточный коэффициент определяют по установившемуся значению  $h(\infty)$  переходной функции. Постоянную времени T и коэффициент демпфирования  $\xi$  можно найти из уравнений

$$\beta T_k = 2\pi \,; \qquad A_1 / A_2 = e^{\alpha T_k} \,, \qquad (2.190)$$

где  $T_{\kappa}$  – период колебаний;  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды двух соседних колебаний относительно установившегося значения (рис. 2.16в).

**Консервативное звено** ( $\xi = 0$ ). Передаточная функция звена:

$$W(s) = k/(T^2s^2 + 1)$$
 (2.191)

и частотная передаточная функция:

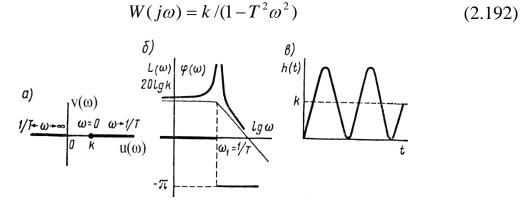


Рис. 2.17. Характеристики колебательного звена.

Фазовая частотная функция, как это следует из АФЧХ (рис. 2.17а)

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при} & \omega < 1 / T \\ -\pi & \text{при} & \omega > 1 / T \end{cases}$$
 (2.193)

Это выражение можно получить из фазовой частотной функции колебательного звена предельным переходом при  $\xi \to 0$ . Нетрудно выписать выражения для остальных частотных функций; ЛЧХ приведены на рис. 2.17б. Сопрягающая частота:

$$\omega_1 = 1/T \tag{2.194}$$

Переходная функция

$$h(t) = k(1 - Cos\omega_1 t) \tag{2.195}$$

Переходная характеристика (рис. 2.17в) представляет собой график гармонических колебаний с постоянной амплитудой.

**7. Апериодическое звено второго порядка (\xi \ge 1).** Передаточную функцию (2.180) при  $\xi \ge 1$  можно преобразовать к виду

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$
 (2.196)

где 
$$T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$$
. (2.197)

Апериодическое звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка. Оно не относится к числу элементарных звеньев.

**8. Неминимально – фазовые звенья.** Звено называют минимально – фазовым, если все нули и полюсы его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части. Звено называют неминимально – фазовым, если хотя бы один нуль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Напомним, что нулями передаточной функции

$$W(s) = R(s)/Q(s),$$
 (2.198)

где R(s) и Q(s) — полиномы от s, называются корни уравнения R(s) = 0, т. е. значения s, при которых передаточная функция обращается s нуль, а полюсами - корни уравнения Q(s) = 0, т. е. значения s, при которых передаточная функция обращается s бесконечность.

Все рассмотренные выше элементарные звенья относятся к минимально – фазовым. Примерами неминимально – фазовых элементарных звеньев являются звенья с передаточными функциями:

$$W(s) = k/(Ts-1)$$
 (2.199)

$$W(s) = k(Ts-1) (2.200)$$

$$W(s) = k/(T^2 s^2 - 2\xi T s + 1)$$
 (2.201)

$$W(s) = k(T^2 s^2 - 2\xi T s + 1)$$
 (2.202)

Для неминимально – фазового звена характерно, что у него сдвиг фазы по модулю больше, чем у минимально – фазового звена, имеющего одинаковую с неминимально – фазовым звеном АЧХ.

На рис.2.18 приведены ЛЧХ неминимально – фазовых звеньев с передаточной функцией (рис.2.18a):

$$W(s) = 1/(Ts-1)$$
 (2.203)

и с передаточной функцией (рис.2.18,б):

$$W(s) = k(Ts-1)$$
 (2.204)

ЛАЧХ этих звеньев совпадают с ЛАЧХ апериодического (рис. 2.14б) и форсирующего (рис. 2.15б) звеньев. Сдвиг фазы у последних меньше: фазовые частотные функции апериодического и форсирующего звеньев по абсолютной величине не превышают значения  $\pi/2$ , а фазовые частотные функции соответствующих неминимально – фазовых звеньев достигают по

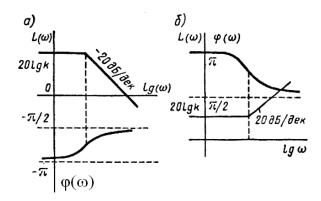


Рис.2.18. Характеристики неминимально – фазовых звеньев.

абсолютной величине значения  $\pi$ .

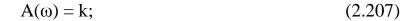
К неминимально – фазовым звеньям относят также звено чистого запаздывания с передаточной функцией:

$$W(s) = ke^{-s\tau} \tag{2.205}$$

Частотная передаточная функция определяется выражением:

$$W(s) = ke^{-j\tau\omega} = k(Cos\omega\tau - jSin\omega\tau)$$
 (2.206)

а ее модуль:



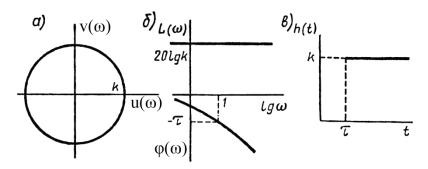


Рис. 2.19. Характеристики звена чистого запаздывания

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена чистого запаздывания приведена на рис.2.19а. Это окружность с центром в начале координат и радиусом k:

$$U(\omega) = k\cos\omega\tau \tag{2.208}$$

$$V(\omega) = -k\sin\omega\tau \tag{2.209}$$

Каждой точке этой характеристики соответствует бесконечное множество значений частот. ЛАЧХ (рис.2.19б) совпадает с ЛАЧХ пропорционального звена с передаточной функцией k

$$L(\omega) = 20 \lg k , \qquad (2.210)$$

а ЛФЧХ (рис.2.19б)

$$\varphi(\omega) = -\omega \tau \tag{2.211}$$

Переходная характеристика приведена на рис.2.19в:

$$h(t) = k1(t-\tau)$$
 (2.212)

Функция веса:

$$w(t) = k\delta(t-\tau). \tag{2.213}$$

**9. Изодромные звенья.** Изодромное звено первого порядка имеет следующие характеристики:

передаточная функция:

$$W(s) = [k(\tau s+1)]/s; (2.214)$$

переходная характеристика

$$h(t) = k_1 + kt \,; \tag{2.215}$$

функция веса:

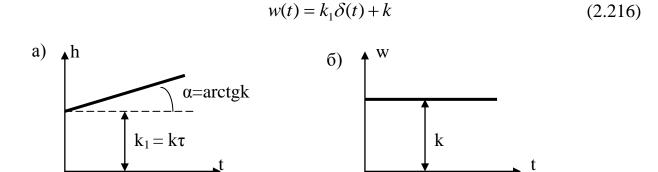


Рис. 2.20. Характеристики изодромного звена 1-го порядка: а) переходная характеристика; б) функция веса.

Изодромное звено второго порядка имеет следующие характеристики: передаточная функция:

$$W(s) = [k(\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1)]/s^2; \qquad (2.217)$$

переходная характеристика

$$h(t) = k_2 + k_1 + kt^2; (2.218)$$

где: 
$$k_1 = 2\xi \tau$$
,  $k_2 = k\tau^2$ ; (2.219)

функция веса:

$$w(t) = k_2 \delta(t) + k_1 + 2kt. (2.220)$$

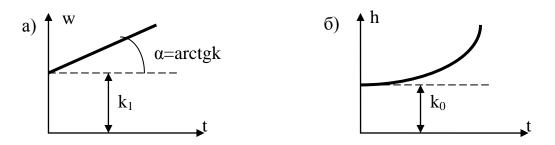


Рис. 2.21. Характеристики изодромного звена 2-го порядка а) переходная характеристика; б) функция веса.

В изодромных звеньях имеется некоторый начальный скачок выходной величины, затем она неограниченно нарастает. Передаточный коэффициент k изодромного звена первого порядка определяет скорость

последующего нарастания выходной величины, второго порядка – постоянное ускорение, с которым нарастает выходная величина.

### 2.8. Структурные схемы

Структурной схемой в теории автоматического управления называют графическое изображение математической модели автоматической системы управления в виде соединений звеньев. Звено на структурной схеме условно обозначают в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин, а также передаточной функции внутри него. Иногда вместо передаточной функции указывают уравнение или характеристику. Звено на структурной схеме не обязательно изображает модель какого-либо отдельного элемента. Оно может быть моделью элемента, соединения элементов или вообще любой части системы.

Входные и выходные величины записывают в виде изображений, если передаточные функции заданы в форме изображений. Если же передаточные функции заданы в операторной форме или звенья описывают дифференциальными уравнениями, то входные и выходные переменные записывают в виде оригинала.

Сравнивающее (рис. 2.22а) и суммирующее (рис. 2.22б) звенья изображают в виде круга, разделенного на секторы. В сравнивающем звене сектор, на который подается «вычитаемое», перед соответствующим входом ставят знак минус (рис. 2.22а).

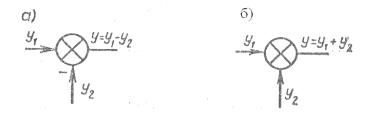


Рис.2.22. Изображение сравнивающих и суммирующих звеньев.

Структурную схему широко используют на практике при исследовании и проектировании автоматических систем управления, так как она дает

наглядное представление о связях между звеньями, о прохождении и преобразовании сигналов в системе.

Рассмотрим основные правила преобразования структурных схем.

1. При последовательном соединении (рис. 2.23а) выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего звена. При преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном (рис. 2.23б) с передаточной функцией W(s), равной произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s).$$
 (2.221)

Запишем уравнения звеньев

$$y_1 = W_1 g, \quad y_2 = W_2 y_1, \dots, y_n = W_n y_{n-1}$$
 (2.222)

Исключив из этой системы переменные  $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$  получим:

$$y_n = W_1 W_2, \dots W_n g,$$
 (2.223)

откуда

$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i \tag{2.224}$$

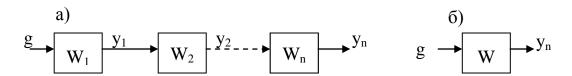


Рис. 2.23. Последовательное соединение звеньев

2. При параллельном соединении (рис. 2.24а) на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные величины складываются. Цепь из параллельно соединенных звеньев можно заменить одним звеном (рис. 2.24б) с передаточной функцией W(s), равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев:

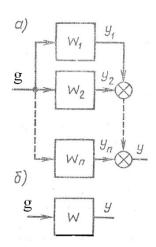
$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)$$
 (2.225)

Для вывода этой формулы составим уравнения для каждых звеньев:

$$y_1 = W_1 g; \quad y_2 = W_2 g, ..., \quad y_n = W_n g.$$
 (2.226)

Сложив эти уравнения и учитывая, что  $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ , получим искомую формулу.

**3.** Принято считать, что звено охвачено обратной связью, если его выходной сигнал через какое-либо другое звено подается на вход (рис. 2.25а). При этом если сигнал  $y_1$  обратной связи вычитается из входного воздействия g, t. e.  $e_1 = g - y_1$ , то обратную связь называют отрицательной. Если сигнал  $y_1$  обратной связи складывается с входным воздействием  $y_0$ , t. e.  $e_1 = g + y_1$  то обратную связь называют положительной.



g  $\overset{e_1}{\underset{(+)}{\bigvee}} \overset{y}{\underset{w_n}{\bigvee}} \overset{y}{\underset{w_n}{\bigvee}}$   $\overset{g}{\underset{(+)}{\bigvee}} \overset{\varphi_1}{\underset{w_n}{\bigvee}} \overset{\varphi_1}{\underset{w_n}{\bigvee}} \overset{\varphi_1}{\underset{w_n}{\bigvee}} \overset{\varphi_1}{\underset{w_n}{\bigvee}}$ 

Рис. 2.24.Параллельное соединение звеньев

Рис.2.25.Звенья с обратной связью

Разомкнем обратную связь перед сравнивающим звеном (рис. 2.25а). Тогда получим цепь из двух последовательно соединенных звеньев. Поэтому передаточная функция W разомкнутой цепи (рис. 2.25а) равна произведению передаточной функции  $W_{\rm n}$  прямой цепи и передаточной функции  $W_{\rm oc}$  обратной связи:  $W = W_{\rm n} \ W_{\rm oc}$  (рис.2.25б).

Передаточная функция  $W_a$  замкнутой цепи с отрицательной обратной связью — звена, охваченного отрицательной обратной связью, — равна передаточной

функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутой цепи:  $W_3 = W_{\pi}/(1+W)$ 

Для вывода этой формулы напишем уравнения каждого звена:

$$y = W_n e_1; \quad y_1 = W_{oc}y; \quad e_1 = g - y_1.$$
 (2.227)

В этой системе последнее уравнение — уравнение сравнивающего звена — называют уравнением замыкания.

Исключив переменные е<sub>1</sub> и у<sub>1</sub>, из приведенной системы, получим уравнение

$$y = W_{\Pi}(g - W_{oc}y) \tag{2.228}$$

или

$$(1+W_n W_{oc})y = W_n g.$$
 (2.229)

Отсюда

$$W_3 = W_{II}/(1+W_{II}W_{oc}) = W_{II}/(1+W)$$
 (2.230)

Если обратная связь положительна, то аналогично получим:

$$W_3 = W_{II}/(1 - W) \tag{2.231}$$

Передаточная функция замкнутой цепи с положительной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция разомкнутой цепи. Если передаточная функция  $W_{oc}=1$ , то обратная связь называется единичной и структурная схема изображается так, как показано на рис. 2.25в. Передаточная функция  $W_3$  при этом принимает вид при отрицательной обратной связи

$$W_3 = W_{\Pi}(1 + W_{\Pi}) \tag{2.232}$$

и при положительной обратной связи

$$W_3 = W_{\Pi}(1 - W_{\Pi}) \tag{2.233}$$

**4.** При преобразовании структурных схем возникает необходимость переноса и перестановки сумматоров и узлов. При переносе сумматора по ходу сигнала необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 2.26а). Если сумматор переносится против хода сигнала, то необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена,

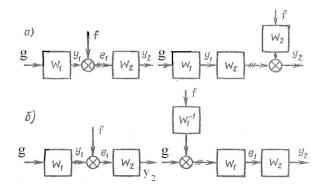


Рис. 2.26. Перенос сумматора

через которое переносится сумматор (рис. 2.26б).

При переносе сумматора возникают неэквивалентные участки линии связи (на рис. 2.26 заштрихованы).

5. При переносе узла (рис. 2.27а) также необходимо добавить звено. Если узел переносится по ходу сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 2.27б). Если узел переносится против хода сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 2.27в).

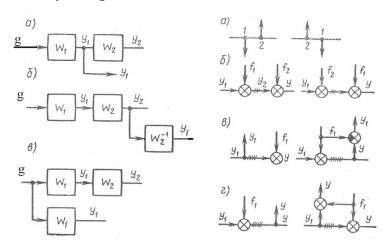


Рис. 2.27. Перенос узла

Рис. 2.28. Перестановка узлов и сумматоров

**6.** Перестановка узлов и сумматоров (рис. 2.28). Узлы можно переставлять местами (рис. 2.28а). Точно так же можно переставлять сумматоры, не добавляя звена (рис. 2.28б). При перестановке узла и сумматора (перенос узла

через сумматор) необходимо добавить звено — суммирующее или сравнивающее (рис. 2.28в, г).

При переносе узла через сумматор, а также при перестановке сумматоров возникают неэквивалентные участки линии связи. Эти участки на рисунке заштрихованы.

**Вычисление передаточной функции одноконтурной системы.** Замкнутую систему (структурную схему) называют одноконтурной, если при ее размыкании в какой-либо точке получается цепочка из последовательно соединенных звеньев или цепь, не содержащая параллельных и обратных связей.

Рассмотрим одноконтурную систему, приведенную на рис. 2.29а. Найдем передаточную функцию системы по входу g и выходу у. Участок по ходу сигнала от точки приложения входного воздействия до точки съема выходного сигнала назовем прямой цепью (рис. 2.29а), а цепь из последовательно соединенных звеньев, входящих в замкнутый контур (рис. 2.29б), — разом-кнутой цепью.

Справедливо следующее правило: передаточная функция одноконтурной системы с отрицательной (положительной) обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (минус) передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_{yg} = \frac{W_0 W_1 W_2}{1 \pm W_1 W_2 W_3} = \frac{W_n}{1 \pm W}, \qquad (2.234)$$

где  $W_{\pi}$  — передаточная функция прямой цепи;

W — передаточная функция разомкнутой цени.

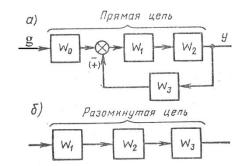


Рис. 2.29. Одноконтурная система.

Сформулированное правило справедливо для любой одноконтурной системы.

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы. Замкнутую систему (структурную схему) называют многоконтурной, если при ее размыкании получается цепь, содержащая параллельные или обратные связи, или, иначе, замкнутую систему называют многоконтурной, если она главной обратной содержит местные обратные помимо СВЯЗИ параллельные связи. Многоконтурная система имеет перекрещивающиеся связи, если контур обратной или параллельной связи охватывает участок цепи, содержащий только начало или конец другой цепи обратной или параллельной связи (рис. 2.30 а, б).

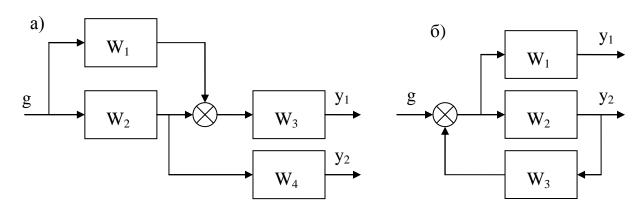


Рис. 2.30. Примеры многоконтурных систем

Для вычисления передаточной функции многоконтурной системы необходимо, прежде всего, перестановкой и переносом узлов и сумматоров освободиться перекрещивающихся связей. Затем, необходимо OTпреобразовать ее в одноконтурную систему, передаточную функцию которой легко вычислить. Следует иметь в виду, что при преобразовании структурной схемы нельзя переносить сумматор через точку съема выходного сигнала, так как при этом точка съема оказывается на неэквивалентном участке.

**Пример 2.6.** Необходимо получить эквивалентное представление структурной схемы изображенной на рис. 2.31.

Преобразование включает в себя несколько этапов.

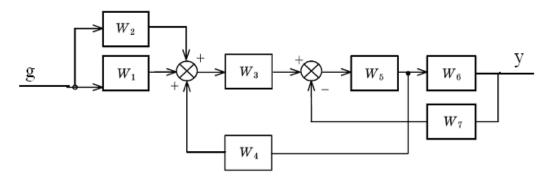


Рис. 2.31. Исходная структурная схема.

**1-й этап**. Вход блока 4 переносим через блок 6 по ходу прохождения сигналов (вправо). При этом последовательно с блоком 4 должен быть введен блок с передаточной функцией  $1/W_6$  (рис.2.32).

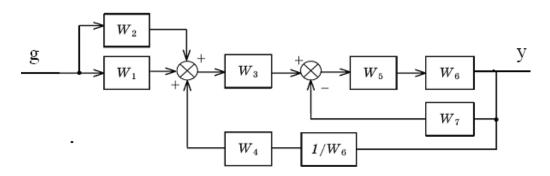


Рис. 2.32. Перенос входа блока 4 через блок 6

**2-й этап**. Разделяем 3-х входовой сумматор (левый) на два 2-х входовых. Правый сумматор, блоки с передаточными функциями  $W_5$ ,  $W_6$  и  $W_7$  объединяем в один блок с передаточной функцией  $W_9$ . Объединяем блоки с передаточными функциями  $W_4$  и  $1/W_6$  в один блок с передаточной функцией  $W_8$  (рис.2.33).

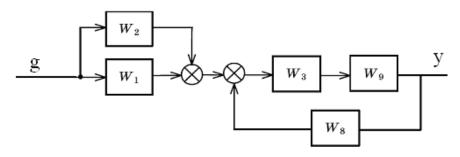


Рис. 2.33. Свертывание обратной связи и последовательного соединения

$$W_9 = \frac{W_5 W_6}{1 + W_7 W_6 W_5} \tag{2.235}$$

$$W_8 = \frac{W_4}{W_6} \tag{2.236}$$

**3 - й этап.** Блоки с передаточными функциями  $W_1$  и  $W_2$  и левый сумматор преобразуем в блок с передаточной функцией  $W_{11}$ . Правый сумматор и блоки с передаточными функциями  $W_3$ ,  $W_9$ , $W_8$  преобразуем в блок с передаточной функцией  $W_{10}$  (рис.2.34).

$$g \longrightarrow W_{11} \longrightarrow W_{10} \longrightarrow$$

Рис. 2.34. Свертывание обратной связи и параллельного соединения

$$W_{10} = \frac{W_3 W_9}{1 - W_8 W_3 W_9} \tag{2.237}$$

$$W_{11} = W_1 + W_2 \tag{2.238}$$

**4-й этап** Последовательное соединение блоков с передаточными функциями  $W_{10}$ ,  $W_{11}$  преобразуем в блок с передаточной функцией  $W_{9KB}$  (рис.2.35)

$$W_{3KB} = W_{10}W_{11} = \frac{W_1W_3W_5W_6 + W_2W_3W_5W_6}{1 - W_5W_6W_7 - W_3W_4W_5}$$
(2.239)



Рис. 2.35. Свертывание последовательного соединения

### 2.9. Законы регулирования

Под законом регулирования или — в более общем случае — законом управления понимается алгоритм или функциональная зависимость, в соответствии с которыми регулятор формирует управляющее воздействие u(t). Эта зависимость может быть представлена в виде

$$u(t) = F(\varepsilon, g, f), \tag{2.240}$$

где F — некоторая, в общем случае нелинейная, функция от ошибки є задающего воздействия g и возмущающего воздействия f, а также от их производных и интегралов по времени.

Формула (2.240) обычно может быть записана следующим образом:

$$U(t) = F_1(\varepsilon) + F_2(f) + F_3(g) \tag{2.241}$$

Первое слагаемое (2.241) соответствует регулированию по отклонению (принцип Ползунова — Уатта), второе и третье — регулированию по внешнему воздействию (принцип Понселе).

Здесь мы рассмотрим только линейные законы, когда управляющее устройство вырабатывает величину u(t) в функции ошибки в соответствии с линейной формой

$$U(t) = k_1 \varepsilon + k_2 \int \varepsilon dt + k_3 \iint \varepsilon dt^2 + \dots + k_4 \varepsilon' + k_5 \varepsilon'' + \dots$$
 (2.242)

или в операторной записи

$$u(t) = k_1 \varepsilon + \frac{k_2}{p} \varepsilon + \frac{k_3}{p^2} \varepsilon + \dots + k_4 p \varepsilon + k_5 p^2 \varepsilon + \dots$$
 (2.243)

Предположим вначале, что регулируемый объект представляет собой звено статического типа. Это означает, что в установившемся состоянии между регулируемой величиной и управляющим воздействием существует пропорциональная зависимость, вытекающая из выражения 2.61 раздела 2.3 при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$y_{ycm} = \mathbf{k}_0 u_{ycm}, \qquad (2.244)$$

где  $k_0 = W_0(0)$  — коэффициент передачи объекта.

**1. Пропорциональное регулирование.** В случае пропорционального регулирования выражение 2.60 раздела 2.3 для простейшей безынерционной цепи регулирования (рис.2.4 раздела 2.3) приобретает вид

$$U(t) = W_{per}(p)\varepsilon(t) = k_1 \varepsilon(t)$$
(2.245)

Передаточная функция W  $_{per}(p)$  может иметь, более сложный вид, например:

$$W_{pec}(p) = k_1 \frac{A(p)}{B(p)},$$
 (2.246)

где A(p) и B(p) — некоторые полиномы от оператора p.

Однако существенным здесь является то обстоятельство, что цепь регулирования представляет собой позиционное (статическое) звено и при  $p \to 0$  передаточная функция  $W_{per}(p) \to k_1$ , где  $k_1$  — коэффициент передачи цепи регулирования .

Здесь и далее ради облегчения анализа рассматривается упрощенное выражение (2.245), которое является справедливым, по крайней мере, для медленных изменений величины є.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_{per}(p)W_0(p) = k_1W_0(p). (2.247)$$

В установившемся состоянии передаточная функция стремится к значению:

$$\lim_{p \to 0} W(p) = k_1 k_0 = K. \tag{2.248}$$

Эта величина называется общим коэффициентом усиления разомкнутой системы. Коэффициент усиления является безразмерной величиной, так же как и передаточная функция разомкнутой системы. Это вытекает из соотношения (2.64) раздела 2.3.

Коэффициент усиления разомкнутой цепи (рис. 2.4, раздела 2.3) физически представляет собой отношение установившегося значения регулируемой величины к постоянному значению ошибки  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ , если цепь регулирования совместно с регулируемым объектом рассматривать как некоторый усилитель, на входе которого действует сигнал в виде ошибки  $\mathcal{E}$ , а на выходе — усиленный сигнал у.

Таким образом, для коэффициента усиления можно записать

$$K = \frac{y_{ycm}}{\varepsilon_0} \,. \tag{2.249}$$

Для установившегося состояния замкнутой системы при постоянном задающем воздействии  $g = g_0$  из формулы (2.75) раздела 2.3 может быть получено следующее соотношение:

$$\varepsilon_{ycm} = \frac{g_0}{1+K} + \frac{\varepsilon_{fycm}}{1+K}, \qquad (2.250)$$

где  $\varepsilon_{\text{уст}}$  — установившаяся (статическая) ошибка,  $\varepsilon_{\text{fycr}}$  — установившееся значение ошибки от возмущающих воздействий в объекте без регулирования. Таким образом, пропорциональное регулирование позволяет уменьшить установившиеся ошибки в объекте в 1+K раз. Регулирование в этом случае получается статическим, так как при любом конечном значении коэффициента усиления цепи установившаяся ошибка будет отличной от нуля.

Передаточная функция разомкнутой системы для этого случая может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_m + b_{m-1}p + \dots + b_0p^m}{c_n + c_{n-1}p + \dots + c_0p^n} = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{1 + C_{n-1}p + \dots + C_0p^n},$$
 (2.251)

$$\Gamma$$
де  $K = \frac{b_m}{c_n}$ .

**2. Интегральное регулирование.** При интегральном регулировании осуществляется пропорциональная зависимость между скоростью изменения регулирующего воздействия и ошибкой:

$$du/dt = k_2 \varepsilon \tag{2.252}$$

при этом регулирующее воздействие получается пропорциональным интегралу от ошибки по времени:

$$u = k_2 \int \varepsilon dt \,. \tag{2.253}$$

В операторной форме это можно записать в виде

$$u = W_{pez}(\mathbf{p})\varepsilon = \frac{k_2}{p}\varepsilon$$
. (2.254)

Интегральное регулирование может быть осуществлено при помощи какихлибо интегрирующих звеньев, которые были рассмотрены в разделе 2.7. Передаточная функция цепи регулирования имеет более сложный вид, чем при пропорциональном регулировании:

$$u = W_{pee}(p) \frac{k_2}{p} \frac{A(p)}{B(p)}.$$
 (2.255)

Существенным здесь является то, что цепь регулирования представляет собой или имеет в своем составе интегрирующее звено. Поэтому выражение (2.254) будет справедливым, по крайней мере, для медленных изменений ошибки.

Передаточная функция разомкнутой системы регулирования

$$W(p) = W_{pee}(p)W_0(p) = \frac{k_2}{p}W_0(p)$$
 (2.256)

В установившемся состоянии (p = 0) передаточная функция стремится к бесконечности:  $W(p) \to \infty$ . В результате первая составляющая ошибки (формула (2.69), раздела 2.3) при  $g = g_o = \text{const}$  обращается в нуль. Вторая составляющая, определяемая наличием возмущающих воздействий, может не обращаться в нуль, так как в установившемся состоянии числитель ее может также стремиться к бесконечности. Поэтому должен быть найден предел выражения при  $f = f_0 = \text{const}$ :

$$\varepsilon_{ycm} = \lim_{p \to 0} \frac{W_f(p) f_0}{1 + W(p)}, \qquad (2.257)$$

который может быть как равным нулю, так и отличным от нуля.

Таким образом, при интегральном регулировании получается система, астатическая по отношению к задающему воздействию. Она может быть при этом как статической, так и астатической по отношению к возмущающим воздействиям.

Передаточная функция разомкнутой системы для случая интегрального регулирования может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_{\nu}(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})},$$
(2.258)

где  $K_V[1/\text{сек}]$  — коэффициент усиления разомкнутой системы. Физически он представляет собой отношение установившейся скорости изменения регулируемой величины к постоянной по величине ошибки  $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$  в разомкнутой системе (рис.2.4 раздела 2.3):

$$K_{v} = \frac{(dy/dt)_{ycm}}{\varepsilon_{0}}, \qquad (2.259)$$

если цепь регулирования совместно с регулируемым объектом представить себе в виде некоторого усилителя с входной величиной  $\varepsilon$  и выходной у. Коэффициент  $K_V$  часто называют добротностью по скорости системы регулирования. В дальнейшем, при рассмотрении вопросов точности, будет показано, что он равен отношению постоянной скорости изменения задающего воздействия

$$\frac{dg}{dt} = v = const \tag{2.260}$$

к установившейся ошибке:

$$K_{v} = \frac{v}{\varepsilon_{vcm}} \tag{2.261}$$

то и определило подобное название.

Регулирование может осуществляться и по второму интегралу от ошибки по времени

$$u = k_3 \iint \varepsilon dt^2 \tag{2.262}$$

или

$$u = W_{pee}(p)\varepsilon = \frac{k_3}{p^2}\varepsilon \tag{2.263}$$

В этом случае передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K_{\theta}(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})},$$
(2.264)

где  $K_{\theta}[1/ce\kappa^2]$ - коэффициент усиления разомкнутой системы, представляющий собой отношение установившегося ускорения изменения регулируемой величины к постоянной по величине ошибки  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  в разомкнутой системе (рис.2.4 раздела 2.3):

$$K_{\theta} = \frac{(d^2 y/dt^2)_{ycm}}{\varepsilon_0} \ . \tag{2.265}$$

В этом случае установившееся значение (p = 0) передаточной функции  $W(p) \to \infty$ . Система также будет обладать астатизмом относительно задающего воздействия. Однако это будет уже астатизм второго порядка. Ошибка, определяемая задающим воздействием в выражении (2.69) раздела 2.3, будет равна нулю не только при g = const, но и при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью dg / dt = const.

Аналогичным образом можно получить астатизм третьего и выше порядков, вводя регулирование по третьему и высшим интегралам, т. о. осуществляя регулирование по закону

$$u = W_{pee}(p)\varepsilon = \frac{k}{p^{\nu}}\varepsilon,$$
 (2.266)

где v — порядок астатизма.

Случай пропорционального регулирования (2.246) можно рассматривать как частный случай астатизма при v = 0.

Повышение порядка астатизма приводит к увеличению установившейся точности системы регулирования, но одновременно делает систему замедленной в действии, т. е. снижает ее быстродействие, а также приводит к ухудшению устойчивости. Для иллюстрации появления замедленности действия систем с интегральным регулированием рассмотрим рис. 2.36.

Предположим, что ошибка в системе регулирования начинает возрастать по линейному закону  $\epsilon = at$ . В системе пропорционального регулирования по такому же закону начнет создаваться регулирующее воздействие  $u = k_1 \epsilon = k_1 at$ . В системе интегрального регулирования регулирующее

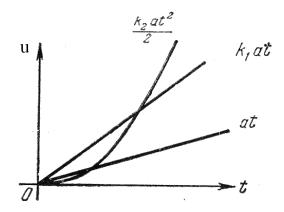


Рис. 2.36. Замедленность действия систем с интегральным регулированием

воздействие будет создаваться по закону

$$u = k_2 \int \varepsilon dt = k_2 a t^2 / 2. \tag{2.267}$$

При t=0 в этом случае в системе интегрального регулирования не только регулирующее воздействие равно нулю, но равна нулю также и его первая производная, что обусловливает весьма медленный рост в первые моменты времени. В системе пропорционального регулирования рост в первые моменты времени происходит более интенсивно, так как наличие ошибки сразу дает появление регулирующего воздействия, в то время как в системе интегрального регулирования должно пройти некоторое время, пока не «накопится» интеграл  $\int \mathcal{E} dt$ .

Если перейти к регулированию по второму интегралу, то снижение быстродействия станет еще более заметным.

**3. Изодромное регулирование.** При изодромном регулировании осуществляется регулирование по пропорциональному и интегральному законам:

$$u = k_1 \varepsilon + \frac{k_2}{p} \varepsilon = \frac{k_1 p + k_2}{p} \varepsilon. \tag{2.268}$$

В этом случае  $W(p) \to \infty$  при p=0 и регулирование оказывается астатическим относительно задающего воздействия. Изодромное регулирование может осуществляться при помощи использования двух параллельных ветвей

в цепи регулирования или при помощи установки изодромных звеньев, рассмотренных в разделе 2.8.

Изодромное регулирование сочетает в себе высокую точность интегрального регулирования (астатизм) с большим быстродействием пропорционального регулирования. В первые моменты времени при появлении ошибки система изодромного регулирования работает как система пропорционального регулирования. Это определяется первым слагаемым в правой части закона (2.268). В дальнейшем система начинает работать как система интегрального регулирования, так как с течением времени преобладающее значение зачинает приобретать второе слагаемое (2.268).

**4. Регулирование по производным.** При регулировании по первой производной от ошибки осуществляется зависимость

$$u = k_4 \frac{d\varepsilon}{dt} = k_4 p\varepsilon . {(2.269)}$$

Регулирование по производной не имеет самостоятельного значения, так как в установившемся состоянии производная от ошибки равна нулю и регулирование прекращается. Однако оно может играть весьма большую роль в переходных процессах и вообще в динамике в качестве вспомогательного средства, так как такое регулирование позволяет учитывать не только наличие ошибки, но и тенденцию к росту или уменьшению ошибки. При осуществлении регулирования по закону

$$u = k_1 \varepsilon + k_4 p \varepsilon \tag{2.270}$$

в системе образуется регулирующее воздействие даже в том случае, когда  $\epsilon=0$ , но  $d\epsilon/dt\neq0$ . Так, например, в рассмотренном выше случае (рис. 2.36) при  $\epsilon=$  at регулирующее воздействие, определяемое вторым слагаемым в правой части (2.270) , возникает уже при t=0. В результате введение регулирования по производной от ошибки увеличивает скорость реакции системы регулирования, повышает ее быстродействие, что приводит к снижению ошибок в динамике.

В некоторых случаях в закон регулирования могут вводиться производные более высоких порядков — вторая, третья и т. д. Это еще больше улучшает динамические качества системы автоматического регулирования. Однако в настоящее время техническая реализация производных выше второго порядка встречает значительные трудности.

В общем случае закон регулирования может иметь сложный вид и содержать кроме члена, пропорционального ошибке, также интегралы (для улучшения точности) и производные (для улучшения динамических свойств) от ошибки. Так, например, часто используется изодромное регулирование с введением первой производной

$$u = (k_1 + \frac{k_2}{p} + k_4 p)\varepsilon. (2.271)$$

Таким образом, передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в следующем общем виде:

$$W(p) = \frac{K_{\nu}(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^{\nu}(1 + C_{n-r-1}p + \dots + C_0p^{n-r})},$$
(2.272)

где  $K_{\nu}[1/\text{сек}^{\nu}]$  — коэффициент усиления разомкнутой системы,  $\nu$  — степень астатизма.

Для последующего использования при анализе и синтезе передаточную функцию разомкнутой системы удобно представлять в виде произведения сомножителей типа (1 + Tp).

# Глава 3. Устойчивость линейных систем автоматического управления

## 3.1. Понятие устойчивости

На любую автоматическую систему всегда действуют различные внешние возмущения, которые могут нарушить ее нормальную работу. Правильно

спроектированная система должна устойчиво работать при всех внешних возмущениях.

В простейшем случае понятие устойчивости системы связано со способностью ее возвращаться (с определенной точностью) в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Если система неустойчива, то она не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели, а либо удаляется от него, либо совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Наблюдения показывают, что некоторые положения равновесия системы устойчивы к небольшим возмущениям, а другие принципиально возможные равновесные положения практически не могут быть реализованы.

Наглядно устойчивость равновесия представлена на рис. 3.1, где изображен шар, расположенный в некотором углублении (рис. 3.1a), на некоторой выпуклой поверхности (рис. 3.1 б), на плоскости (рис. 3.1в).



Рис. 3.1. Возможные равновесные положения систем.

Положение равновесия шара характеризуется точкой  $A_0$ . В случае, изображенном на рис. 3.1а, при всяком отклонении шара от положения равновесия, например в точку  $A_1$ , он будет стремиться снова возвратиться к положению равновесия — в точку  $A_0$  (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области, окружающей положение равновесия, например в точку  $A_2$  (при наличии сил трения). Такое положение равновесия устойчиво. Случай, изображенный на рис. 3.16, соответствует неустойчивому положению равновесия. Рис.3.1в соответствует безразличному равновесию. На рис. 3.1г состояние равновесия устойчиво лишь до тех пор, пока отклонение не

вышло за некоторую границу определяемую, например, точкой В. Выйдя за эту границу, шар уже не вернется в точку  $A_0$ , а будет двигаться вправо от точки В либо все время удаляясь, либо до нового состояния равновесия в зависимости от формы поверхности, т. е. в конечном счете в зависимости от уравнений движения шара. Поэтому, рассматривая нелинейные системы, вводят понятие устойчивости «в малом», «в большом», «в целом». Система устойчива «в малом», если констатируют лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо образом ее границы. Систему называют устойчивой «в большом», когда определены границы области устойчивости, т. е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области. В том случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют устойчивой «в целом». Устойчивость «в целом» для определенного класса нелинейностей называют «абсолютной» устойчивостью. Так, например, случай, изображенный на рис. 3.1а, соответствует устойчивости «в Случай, изображенный на целом». рис. 3.1г, может соответствовать либо устойчивости «в большом», либо устойчивости «в малом». Очевидно, что система, устойчивая «в целом», будет устойчива «в большом» и «в малом». Система, устойчивая «в большом», будет устойчива и «в малом».

Для того чтобы дать определение устойчивости равновесия, вводят понятие о невозмущенном состоянии равновесия, соответствующем состоянию покоя в точке  $A_0$  на рис. 3.1а, и возмущенном состоянии, соответствующем, например, точке  $A_1$ , в которую внешняя сила привела шар и затем прекратила свое действие. Система будет устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую заданную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

В рассмотренном выше примере с шаром вопрос об устойчивости решается довольно просто. Однако следует заметить, что в общем случае далеко не

всегда ясно, при каких условиях равновесное положение системы будет устойчивым.

Понятие устойчивости можно распространить и на более общий случай, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривают не положение равновесия системы, а ее движение, например движения системы по некоторой наперед заданной траектории.

Допустим, что заданное движение системы при отсутствии возмущений должно определяться некоторым законом изменения независимых координат  $y_1^*(t), y_2^*(t), ..., y_n^*(t)$ . По аналогии со случаем равновесия положения, заданное движение называют невозмущенным движением. Внешние возмущения, действующие на систему, вызовут отклонение действительного движения системы от заданного. Действительное движение системы называют возмущенным движением.

Пусть действительное движение системы определяется независимыми координатами  $y_1(t), y_2(t)...y_n(t)$ . В общем случае

$$y_1(t) \neq y_1^*(t), y_2(t) \neq y_2^*(t), \dots, y_n(t) \neq y_n^*(t).$$
 (3.1)

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если после приложения внешних сил (возмущений), которые затем снимают, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область  $\left|y_i(t)-y_i^*(t)\right| \le \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i=\mathrm{const}$  — заданные величины, i=1,2,...,n. Чтобы проиллюстрировать сказанное, предположим, что невозмущенное движение происходит по траектории A, а возмущенное движение происходит по траектории Б (рис. 3.2a). Возьмем на этих траекториях две произвольные точки  $N^A$  и  $N^B$ , отвечающие одному и тому же моменту времени t. При устойчивом движении траектория Б должна быть близка к траектории A.

Следует заметить, однако, что близость траекторий A и B является необходимым условием устойчивости движения, но недостаточным. Действительно, расстояние между точками  $N^A$  и  $N^B$ , отвечающими одному и

тому же моменту времени, может возрастать не только для расходящихся, но и для близких траекторий (рис. 3.2б).

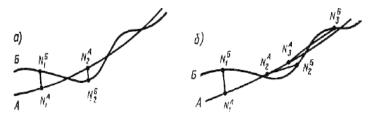


Рис.3.2. Траектории движения.

#### 3.2. Общая постановка задачи устойчивости по А.М. Ляпунову

Впервые строгое определение устойчивости было дано русским ученым А. М. Ляпуновым в 1892г. Отсутствие такого определения часто приводило к недоразумениям, так как движение, устойчивое в одном смысле, может оказаться неустойчивым при другом понимании этих слов, и наоборот. Определение устойчивости А. М. Ляпунова оказалось настолько удачным и наилучшим образом удовлетворяющим многим техническим задачам, что оно в настоящее время принято как основное.

Пусть движение системы автоматического управления описывается дифференциальными уравнениями, которые могут быть приведены к виду

$$dy_i / dt = Y_i(y_1, y_2, ..., y_n, t), (3.2)$$

где  $y_i$  -- вещественные переменные, характеризующие состояние системы управления (обобщенные координаты);  $Y_i$  — известные функции переменных  $y_1$   $y_2$ ,...,  $y_n$  и времени t, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения.

Исходное состояние системы, при  $t = t_0$ , однозначно определяется начальными значениями переменных  $y_i$ , которые обозначим как  $y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0}$ . Каждой совокупности начальных значений  $y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0}$  соответствует единственное решение (3.2) для всех  $t > t_0$ 

$$y_i = y_i(y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0}, t)$$
 (3.3)

Решение (3.3) описывает какое-либо движение системы, определяемое исходным состоянием.

Некоторое вполне определенное движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость, называют невозмущенным движением.

Заметим, что выбор невозмущенного движения является произвольным. Это может быть любое возможное движение системы, как установившееся, так и неустановившееся. Допустим, что в качестве невозмущенного движения выбрано такое, которое описывается заданными функциями времени

$$y_1 = y_1^*(t); \quad y_2 = y_2^*(t); \quad y_n = y_n^*(t)$$
 (3.4)

Предположим, что функции  $y_i^*(t)$  являются частным решением дифференциальных уравнений (3.2), т. е.

$$dy_i^*(t)/dt = Y_i(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, t)$$
(3.5)

удовлетворяющим начальным условиям при  $t = t_0$ 

$$y_1 = y_1^*(t_0); \quad y_2 = y_2^*(t_0); ...; \quad y_n = y_n^*(t_0).$$
 (3.6)

В частном случае, когда параметры системы не изменяются со временем и функции Y, не зависят явно от t, движения (3.4) являются установившимися. Им отвечают решения

$$Y_i^* = const., (3.7)$$

служащие корнями уравнений

$$Y_i(y_1, y_2, ..., y_n)$$
. (3.8)

Изменим условия (3.6), дав начальным значениям  $y_1, y_2, ..., y_n$ , переменных небольшие по модулю приращения  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2...\mathcal{E}_n$ , т. е. пусть при  $t = t_0$ 

$$y_1 = y_1^*(t_0) + \varepsilon_1; \quad y_2 = y_2^*(t_0) + \varepsilon_2; \quad y_n = y_n^*(t_0) + \varepsilon_n$$
 (3.9)

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям (3.9), называют возмущенным движением. Другими словами, возмущенным движением системы называют всякое иное движение системы, отличное от невозмущенного.

Введем новые переменные:

$$x_i = y_i(t) - y_i^*(t) (3.10)$$

равные разности переменных  $y_i$  в возмущенном и невозмущенном движении. Переменные  $x_i$  называют отклонениями или вариациями величин  $y_i$ . Если все отклонения равны нулю

$$x_1 = 0;$$
  $x_2 = 0;$  ... $x_n = 0;$  (3.11)

то возмущенное движение  $y_i(t)$  будет совпадать с невозмущенным движением  $y_i^*(t)$ , т. е. невозмущенному движению отвечают нулевые значения переменных  $x_i$ .

Пусть при  $t = t_0$  переменные  $x_i$  принимают какие-либо начальные значения  $x_0$ , из которых, по крайней мере, одно не равно нулю:

$$x_i = x_{i,0} = \mathcal{E}_i \tag{3.12}$$

Начальные значения отклонений (3.12) называют возмущениями.

А. М. Ляпуновым было дано следующее определение устойчивости: невозмущенное движение называют устойчивым по отношению к переменным  $x_i$ , если при всяком произвольно заданном положительном числе  $\varepsilon$ , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое такое положительное число  $\delta(\varepsilon)$ , что при всяких возмущениях  $x_{i0}$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^{2} \le \delta \tag{3.13}$$

и при любом  $t \ge t_0$  будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon \tag{3.14}$$

в противном случае движение неустойчиво.

Геометрическая интерпретация этого условия заключается в следующем. В пространстве координат  $x_i$  построим две сферы с радиусами  $\delta$  и  $\epsilon$  ( $\epsilon$  >  $\delta$ ). Система будет устойчивой, если при возмущениях, не выведших

изображающую точку  $M(x_1,...,x_n)$  из пределов сферы  $\delta$ , возмущенное движение будет таково, что, начиная с некоторого времени  $t \geq T$ , изображающая точка  $M(x_1,...,x_n)$  будет в пределах сферы  $\epsilon$ .

Практически устойчивость данного невозмущенного движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущенное движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущенного движения. Если невозмущенное движение неустойчиво, то возмущенное движение будет отходить от него, как бы малы ни были начальные возмущения.

Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущенному движению, т. е.

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0, \qquad (3.15)$$

то невозмущенное движение называют асимптотически устойчивым.

При асимптотической устойчивости изображающая точка с течением времени должна неограниченно стремиться к началу координат.

Отметим некоторые особенности определения устойчивости по А. М. Ляпунову.

**Во-первых**, предполагают, что возмущения налагаются только на начальные условия, иначе говоря, возмущенное движение происходит при тех же силах (источниках энергии), что и невозмущенное движение.

Во-вторых, устойчивость рассматривают на бесконечно большом промежутке времени.

В-третьих, возмущения предполагаются малыми.

Несмотря на эти ограничения, определение А. М. Ляпунова устойчивости движения является эффективным в приложениях.

## 3.3. Теорема А.М. Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению

Когда известно общее решение дифференциальных уравнений движения (3.2), можно непосредственно определить значения переменных  $y_i(t)$  в возмущенном движении и составить вариации  $x_i = y_i(t) - y_i^*(t)$ . Исследуя их, можно решить вопрос об устойчивости невозмущенного движения  $y_i^*(t)$ . Однако, как правило, исследование устойчивости движения производят не путем анализа общего решения, а методами, основанными на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущенного движения, которым удовлетворяют отклонения (вариации)  $x_i$ .

Чтобы вывести уравнения возмущенного движения, найдем из (3.9) переменные  $y_i(t) = y_i^*(t) + x_i(t)$  и подставим эти значения  $y_i(t)$  в дифференциальные уравнения движения (3.2).

Тогда

$$dy_i^*(t)/dt + dx_i(t)/dt = Y_i(y_1^* + x_1, y_2^* + x_2, ..., y_n^* + x_n, t)$$
(3.16)

Если правые части уравнений (3.16) допускают разложение в степенные ряды Тейлора, то после этого разложения по степеням  $x_i$  получим

$$\frac{dy_{i}^{*}(t)}{dt} + \frac{dx_{i}(t)}{dt} = Y_{i}(y_{1}^{*}, y_{2}^{*}, ..., y_{n}^{*}, t) + \left(\frac{\partial Y_{i}}{\partial x_{n}}\right)_{0} x_{1} + ... + \left(\frac{\partial Y_{i}}{\partial x_{n}}\right)_{0} x_{n} + R_{i}(x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}),$$
(3.17)

где  $R_i(x_1, x_2, ... x_n)$  — совокупность членов, зависящих от отклонений  $x_i$  в степени выше первой. Учитывая (3.5), будем иметь

$$dx_i(t)/dt = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + R_i(x_1, x_2, \dots x_n).$$
(3.18)

В уравнениях (3.18) коэффициенты

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_k}\right)_{x_k = 0} \tag{3.19}$$

в общем случае являются функциями времени t; в частности, они могут быть постоянными. В дальнейшем будем считать коэффициенты  $a_{i,n}$  постоянными.

Уравнения (3.18) называют дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Если отклонения  $x_i$  достаточно малы, то, пренебрегая  $R_i(x_1, x_2, ... x_n)$ , получим линеаризованные уравнения

$$dx_i / dt = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_{n,}, i = 1,2,\dots,$$
 (3.20)

называемые уравнениями первого приближения.

Во многих случаях устойчивость движения исследуют по уравнениям первого приближения. Это объясняется не только простотой этого метода, но также и тем, что знания процессов, происходящих в реальных системах, позволяют надежно определять только первые линейные члены. Однако на основании уравнений первого приближения можно дать иногда неверное заключение об устойчивости движения. Поэтому, естественно, возникает вопрос об определении условий, при выполнении которых по уравнениям первого приближения можно дать правильные ответы об устойчивости движения. Эту исключительно важную и принципиальную для теории автоматического впервые управления задачу поставил решил А. М. Ляпунов.

Системе уравнений (3.20) соответствует характеристическое уравнение, которое можно записать следующим образом:

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$
(3.21)

Из (3.21) можно найти его корни  $s_i$ , где i=1,2,...,n, которые в общем случае имеют вид:  $s_i=\alpha_i\pm j\omega_i$ , где  $\alpha_i$  и  $\omega_i$  — вещественные и мнимые части корней соответственно.

Для исследования устойчивости систем по их линеаризованным уравнениям принципиально важны следующие теоремы А. М. Ляпунова, которые приведем без доказательства.

**Теорема 1**. Если вещественные части всех корней  $S_i$  характеристического уравнения (3.21) первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

**Теорема 2**. Если среди корней  $S_i$  характеристического уравнения (3.21) первого приближения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько нулевых корней, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называют критическим. Как показал А. М. Ляпунов, в критическом случае устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения не может быть оценена по уравнениям первого приближения, так как она зависит от вида нелинейной функции  $R_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ , и поэтому в этом случае требуется рассмотрение дифференциальных уравнений возмущенного движения (3.18) в их исходном виде.

Теоремы А. М. Ляпунова имеют весьма важное значение, так как они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по их линеаризованным уравнениям (уравнениям первого приближения).

## 3.4. Условия устойчивости линейных систем автоматического управления

Покажем, как на основе изложенного выше определения устойчивости А.М. Ляпунова можно найти условия устойчивости линейных (линеаризованных) систем автоматического управления.

Дифференциальное уравнение линейной системы автоматического управления, записанное для регулируемой выходной величины у(t) при наличии управляющего воздействия g(t), имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t)$$
(3.22)

где  $a_0$ ,  $a_1$ ,...,  $a_n$  и  $b_0$ ,  $b_1$ ...,  $b_m$  — постоянные коэффициенты, a p = d/dt — оператор дифференцирования.

Изменение регулируемой величины y(t) при произвольном внешнем воздействии g(t) представляет собой решение уравнения (3.22):

$$y(t) = y_{g}(t) + g_{gg}(t)$$
 (3.23)

В (3.23) первое слагаемое  $y_B(t)$  — вынужденная составляющая, имеющая тот же характер, что и правая часть уравнения (3.21). Она определяется как частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3.21) с правой частью:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_{\epsilon}(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t)$$
(3.24)

Второе слагаемое  $y_{CB}(t)$ — свободная (переходная) составляющая, которая определяется общим решением однородного дифференциального уравнения (3.21) без правой части:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_{cs}(t) = 0 (3.25)$$

Обычно в теории автоматического управления интересуются устойчивостью вынужденной составляющей  $y_B(t)$  переходного процесса. Поэтому за невозмущенное движение системы необходимо принять вынужденную составляющую переходного процесса  $y_B(t)$ . Тогда возмущенным движением будет любое возможное в системе изменение регулируемой величины y(t), а отклонением или вариацией — свободная составляющая

$$y_{cg}(t) = y(t) - y_{g}(t)$$
 (3.26)

Возмущениями, по А. М. Ляпунову, являются начальные значения  $y_{CB}$ , которые возникли в момент  $t=t_0$  под действием внезапно подействовавших дополнительных внешних сил, т. е. начальные значения  $y_{CB0}$ . Дифференциальными уравнениями возмущенного движения первого приближения в данном случае будут уравнения (3.25).

В соответствии с определением устойчивости по А. М. Ляпунову система будет асимптотически устойчивой, если с течением времени при  $t \to \infty$  свободная составляющая будет стремиться к нулю, т. е.  $y_{CB}(t) \to 0$ . Чтобы найти эту составляющую, необходимо решить дифференциальное уравнение (3.25):

$$a_0 \frac{d^n y_{ce}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{ce}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{ce}(t) = 0$$
 (3.27)

Решение уравнения (3.27) находят как  $y_{cs}(t) = Ce^{st}$ . Дифференцируя это выражение п раз и подставляя в (3.27), после сокращения на общий множитель  $Ce^{st}$  получаем

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 (3.28)$$

Полученное алгебраическое уравнение (3.28) называют **характеристическим уравнением**. Его корни  $s_1$ ,  $s_2$ , ....  $s_n$  будут определять характер переходного процесса в системе. По своему виду левая часть уравнения (3.28) совпадает с дифференциальным оператором при выходной величине в уравнении (3.22), поэтому характеристическое уравнение получают обычно, приравнивая к нулю, дифференциальный оператор при выходной величине в исходном дифференциальном уравнении (3.22):

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 (3.29)$$

Следует заметить, однако, что в характеристическом уравнении (3.29), p = s означает уже не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число.

Решение характеристического уравнения степени п содержит п корней. Корни характеристического уравнения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами могут быть вещественными, комплексными попарно сопряженными, мнимыми попарно сопряженными, нулевыми. В общем случае

$$s_i = \alpha_i + j\omega_i \tag{3.30}$$

На рис. 3.3 показаны возможные положения корней в комплексной плоскости корней s:

$$s_{1} = \alpha_{1}; \qquad s_{2} = \alpha_{2} + j\omega_{2}; \quad s_{3} = \alpha_{3} - j\omega_{3}; \quad s_{4} = 0; \quad s_{5} = -\alpha_{5};$$

$$s_{6} = -\alpha_{6} + j\omega_{6}; \qquad s_{7} = -\alpha_{7} - j\omega_{7}. \qquad (3.31)$$

$$s_{6} = -\alpha_{6} + j\omega_{6}; \qquad s_{7} = -\alpha_{7} - j\omega_{7}. \qquad (3.31)$$

$$s_{7} = -\alpha_{7} - j\omega_{7} - s_{7} -$$

Рис.3.3. Возможные положения корней в комплексной плоскости корней s.

Если все корни разные, то их называют простыми. Если среди корней есть одинаковые, то их называют кратными.

Обычно корни с отрицательными вещественными частями принято называть левыми, поскольку они в комплексной плоскости корней расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями — правыми корнями.

Условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: для того чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (3.29) были левыми.

Указанное условие устойчивости легко пояснить, рассматривая решение однородного уравнения (3.27), которое при отсутствии кратных корней имеет вид

$$y_{ce}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} , \qquad (3.32)$$

где  $S_i$  — корни характеристического уравнения (3.29);  $C_i$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Заметим, что корни характеристического уравнения  $S_i$  зависят только от вида левой части дифференциального уравнения (3.22) линейной системы. Постоянные интегрирования  $C_i$  зависят и от вида правой ее части, поэтому быстрота затухания и форма переходного процесса определяются как левой, так и правой частями исходного дифференциального уравнения (3.22). Однако, поскольку в понятие устойчивости входит только факт наличии или отсутствия затухания переходного процесса, устойчивость линейной системы не зависит от вида правой части дифференциального уравнения (3.22) и определяется только характеристическим уравнением (3.29).

При составлении (3.22) предполагалось, что внешние возмущающие воздействия отсутствуют. Если записать дифференциальные уравнения движения системы относительно возмущающего воздействия, то в этом случае левая часть (3.22) остается без изменения, а правая будет иметь другой вид. Так как характер переходного процесса в линейной системе определяют только по виду левой части дифференциального уравнения (3.22), то для определения качественной картины переходных процессов практически безразлично, записать ли исходное дифференциальное уравнение для управляющего или возмущающего воздействия.

Вещественным корням характеристического уравнения  $s_i = \alpha_i$  в (3.32)

соответствуют слагаемые, представляющие собой экспоненты  $C_i e^{lpha_i t}$ .

Очевидно, что отрицательным (левым) корням  $a_i$  (0 соответствуют

затухающие экспоненты (рис.3.4а), система будет устойчивой. Положительным (правым) корням  $a_i > 0$ — возрастающие экспоненты (рис. 3.4б), система будет неустойчивой. При нулевых корнях  $a_i = 0$  слагаемые представляют собой прямые, параллельные оси времени (рис. 3.4в), система будет нейтральной.

Комплексные корни характеристического уравнения всегда бывают попарно сопряженными:  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  и  $s_i = \alpha_i - j\omega_i$ . Слагаемые, определяемые

этими корнями в (3.32), могут быть при использовании известной формулы Эйлера:

$$e^{\pm j\omega_i t} = Cos\omega_i t \pm jSin\omega_i t \tag{3.33}$$

представлены в виде

$$C_i e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\omega)t_i} = A e^{\alpha_i t} Sin(\omega_i t + \psi_i), \qquad (3.34)$$

где  $A_i$  и  $\psi_i$  - новые постоянные.

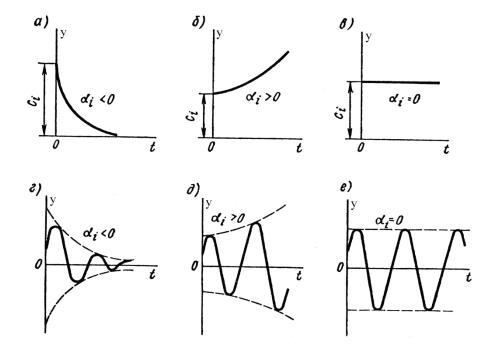


Рис. 3.4. Виды решений однородного уравнения

В этом случае при  $a_i \langle 0$  получаются затухающие колебания (рис. 3.4г), система будет устойчивой. При  $a_i \rangle 0$  — расходящиеся колебания (рис. 3.4д), система будет неустойчивой. При  $a_i = 0$  — незатухающие колебания (рис. 3.4e), система будет нейтральной. Для устойчивости и в этом случае необходимо выполнение условия  $a_i \langle 0$ . В самом общем случае среди корней характеристического уравнения (3.27) могут быть кратные корни. Если имеется г кратных корней  $s_i$ , то в (3.29) появятся слагаемые вида

$$(C_{i,r-1}t^{r-1} + \dots + C_{i,1}t + C_{i,0})e^{s_it}$$
 (3.35)

Если корень  $s_i = \alpha_i \pm j\omega_i$  имеет отрицательную вещественную часть  $a_i\langle 0$ , то множитель  $e^{s_it}$  будет с течением времени убывать. Множитель в скобках неограниченно растет, поэтому мы имеем неопределенность  $\infty 0$ . Однако известно, что  $e^{-|\alpha_i|t}$  быстрее стремится к нулю, чем выражение  $C_{i,r-1}t^{r-1}$  возрастает, поэтому при  $a_i\langle 0$  эта группа слагаемых с течением времени также стремится к нулю.

Таким образом, видно, что в самом общем случае для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.29) были левыми.

Если хотя бы один корень окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Таким образом, мнимая ось представляет собой граничную линию в плоскости корней, за которую не должны переходить корни характеристического уравнения. Вся левая полуплоскость представляет собой при этом область устойчивости.

Превращение устойчивой системы в неустойчивую произойдет в том случае, если хотя бы один вещественный корень или пара комплексных корней перейдет из левой полуплоскости в правую. Система будет находиться на границе устойчивости при наличии:

- 1. Нулевого корня;
- 2. Пары чисто мнимых корней;
- 3. Бесконечного корня.

Во всех трех случаях предполагается, что все остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

В первом случае вещественный корень попадает на границу устойчивости (ось Jm) в начале координат, то есть выполняется условие  $p_k = 0$ . Это означает, что в характеристическом уравнении будет отсутствовать свободный член  $a_n = 0$ . Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид:

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_n) p y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t)$$
(3.36)

и система будет устойчивой не относительно регулируемой величины «у» а относительно ее скорости изменения «ру». Величина же отклонения регулируемой величины может принимать произвольные значения. Такую систему называют нейтрально устойчивой, имея в виду ее безразличие к значению самой регулируемой величины.

На границе устойчивости второго типа, которая называется колебательной, два корня попадают на мнимую ось Jm. Система в этом случае будет иметь незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой.

Вещественный корень может попасть из левой части в правую, проходя через бесконечность. В этом случае соответствующее слагаемое  $C_i e^{\alpha_i t}$  обращается в нуль, что соответствует понижению порядка дифференциального уравнения на единицу ( $a_0 = 0$ ).

Граница устойчивости третьего типа встречается сравнительно редко. Вычисление корней просто лишь для характеристического уравнения первой и второй степеней. Существуют общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степеней, но эти выражения громоздки и практически малопригодны. Общие выражения для корней уравнений более высоких степеней вообще невозможно написать через коэффициенты характеристического уравнения. Поэтому, важное значение приобретают правила, которые позволяют определять устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют критериями устойчивости. С помощью критериев устойчивости можно не только установить, устойчива система или нет, но и выяснить, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Критерии устойчивости могут быть разделены на алгебраические и частотные. С математической точки зрения все критерии устойчивости эквивалентны, однако целесообразный выбор того или иного критерия

устойчивости при решении конкретных задач позволяет провести исследование устойчивости наиболее простым путем.

### 3.5. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения.

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$
 (3.37)

Из алгебраических критериев устойчивости наиболее широкое распространение получили критерии устойчивости Рауса и Гурвица.

Прежде чем познакомиться с ними, заметим, что необходимым условием устойчивости системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (3.37):

$$a_0 > 0; a_1 > 0; \dots a_n > 0.$$
 (3.38)

Действительно, в соответствии с теоремой Безу уравнение (3.37) можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни  $s_1, s_2, ..., s_n$ :

$$a_0(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n) = 0$$
 (3.39)

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательны, то все множители выражения (3.39) будут иметь вид

$$a_0(s+|a_1|)(s+|a_2|)...(s+|a_n|)$$
 , (3.40)

где  $s_i = -|a_i|$  — значения корней.

Производя перемножение в (3.40), получим (3.37), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами  $|a_i|$  выражения (3.40), т. е. будут положительны.

Если характеристическое уравнение (3.37) имеет комплексные корни с отрицательными вещественными частями, то оно может быть представлено в виде

$$a_0(s+|a_1|)(s+|a_2|-j\omega_2)(s+|a_3|-j\omega_3)...(s+|a_n|)=0$$
(3.41)

ИЛИ

$$a_0(s+|a_1|)[(s+|a_2|)^2+\omega_2^2]...(s+|a_n|)=0$$
(3.42)

Уравнение (3.42) также приводится к виду уравнения (3.37) с положительными коэффициентами.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако для систем третьего и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но не достаточным. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения (если они есть) левые, комплексные же корни могут быть и правыми.

Алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица позволяют по коэффициентам характеристического уравнения (3.37) без вычисления его корней сделать вывод об устойчивости системы.

**Критерий устойчивости Рауса**. Этот критерий устойчивости был в 1877г. предложен английским математиком Э. Раусом в виде некоторого правила (алгоритма), которое наиболее просто поясняется таблицей 3.1.

В первой строке табл.3.1 записывают в порядке возрастания индексов коэффициенты характеристического уравнения (3.37), имеющие четный индекс:  $a_0$ ,  $a_2$ ,  $a_4$ ,  $a_6$ , ...; во второй строке — коэффициенты (3.37) с нечетным индексом:  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ , ... .

Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как

$$C_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1} (3.43)$$

где

$$r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}} \tag{3.44}$$

Таблица 3.1 Таблица Рауса

Коэффициент <i>г<sub>і</sub></i>	Строка (i)	Столбец			
		1	2	3	
	1	$a_0 = c_{11}$	$a_2 = c_{21}$	$a_4 = c_{31}$	
_	2	$a_1 = c_{12}$	$a_3 = c_{22}$	$a_5 = c_{32}$	
$r_3 = a_0/a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_3  a_3$	$c_{23} = a_4 - r_3 \ a_5$	$c_{33} = a_6 - r_3  a_7$	
$r_4 = a_1/c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_4 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_4 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_4 c_{43}$	Option and the community of the communit
$r_5 = c_{13}/c_{14}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$	
***					
$i = c_{1, i-2}/c_{1, i-1}$	i	$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$	
100					The second secon

В (3.43) и (3.44) k — индекс, означающий номер столбца табл.3.1; i — индекс, означающий номер строки табл.3.1.

Число строк таблиц Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единица: (n+1).

После того как таблица Рауса заполнена, по ней можно судить об устойчивости системы. Условие устойчивости Рауса формулируется так: для того чтобы система автоматического управления была устойчива,

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т. е. при  $a_0 > 0$  были положительными:

$$c_{1,1} = a_0 \rangle 0; \quad c_{1,2} = a_1 \rangle 0; \quad c_{1,3} \rangle 0; \quad c_{1,n+1} \rangle 0$$
 (3.45)

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Критерий Рауса особенно удобен, когда заданы числовые значения коэффициентов характеристического уравнения (3.37). В этом случае определение устойчивости можно выполнить довольно быстро даже при характеристических уравнениях высокого порядка.

Форма алгоритма, с помощью которого составляют таблицу Рауса, очень удобна для программирования, поэтому критерий Рауса нашел широкое применение при исследовании влияния на устойчивость либо коэффициентов характеристического уравнения, либо отдельных параметров системы, не очень сложным образом входящих в эти коэффициенты.

**Критерий устойчивости Гурвица.** В 1895г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Из коэффициентов характеристического уравнения (3.37) строят сначала главный определитель Гурвица:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_0} & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ \frac{a_0}{0} & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

(3.46)

по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз — коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n — порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

Отчеркивая в главном определителе Гурвица, как показано пунктиром, диагональные миноры, получаем определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_{1} = a_{1}; \quad \Delta_{2} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} \\ a_{0} & a_{2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{3} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} & a_{5} \\ a_{0} & a_{2} & a_{4} \\ 0 & a_{1} & a_{3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{k} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} & a_{5} & \dots \\ a_{0} & a_{2} & a_{4} & \dots \\ 0 & a_{1} & a_{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 &$$

Номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляют данный определитель. Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения  $a_0$ , т. е. при  $a_0 > 0$  были положительными.

Таким образом, при  $a_0$   $\rangle 0$  для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_{1} = a_{1} > 0; \quad \Delta_{2} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} \\ a_{0} & a_{2} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_{3} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} & a_{5} \\ a_{0} & a_{2} & a_{4} \\ 0 & a_{1} & a_{3} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_{n} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{3} & a_{5} & \dots & 0 \\ a_{0} & a_{2} & a_{4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{1} & a_{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n} \end{vmatrix} > 0.$$

(3.48)

Раскрывая, например, определители Гурвица для характеристических уравнений первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков, можно получить следующие условия устойчивости:

1) для уравнения первого порядка (n = 1)

$$a_0 s + a_1 = 0 (3.49)$$

условия устойчивости

$$a_0\rangle 0; \qquad a_1\rangle 0; \tag{3.50}$$

2) для уравнения второго порядка (n = 2)

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 (3.51)$$

условия устойчивости

$$a_0 \rangle 0; \qquad a_1 \rangle 0; \qquad a_2 \rangle 0 \tag{3.52}$$

3) для уравнения третьего порядка (n = 3)

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 (3.53)$$

условия устойчивости

$$a_0 \rangle 0; \quad a_1 \rangle 0; \quad a_2 \rangle 0; \quad a_3 \rangle 0; \tag{3.54}$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$
; (3.55)

4) для уравнения четвертого порядка (n=4)

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 (3.56)$$

условия устойчивости

$$a_0 \rangle 0 \; ; \; a_2 \rangle 0 \; ; \; a_3 \rangle 0 \; ; \; a_4 \rangle 0 \; ;$$
 (3.57)

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4\rangle 0;$$
 (3.58)

5) для уравнения пятого порядка (n=5)

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0 (3.59)$$

условия устойчивости

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 \rangle 0$$
,  $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 \rangle 0$  (3.60)

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости для систем первого и второго порядков является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для уравнения третьего и четвертого порядков кроме положительности коэффициентов необходимо соблюдение дополнительных неравенств (3.55) и (3.58).

При  $n \geq 5$  число подобных дополнительных неравенств возрастает, процесс раскрытия определителей становится довольно трудоемким и громоздким. Поэтому критерий устойчивости Гурвица обычно применяют при  $n \leq 4$ . При

n ≥5 целесообразно применять критерий устойчивости Льенара — Шипара, либо при использовании критерия устойчивости Гурвица переходить к численным методам с использованием компьютера.

В последнем столбце главного определителя Гурвица отличен от нуля только один коэффициент  $a_n$ , поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \tag{3.61}$$

Из (3.61), видно, что при  $a_n > 0$  для проверки устойчивости системы достаточно найти только определители Гурвица от  $\Delta_1$  до  $\Delta_{n-1}$ . Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится на границе устойчивости, когда главный определитель равен нулю:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \tag{3.62}$$

Последнее равенство возможно в двух случаях:  $a_n = 0$  или  $\Delta_{n-1} = 0$ . В первом случае система находится на границе апериодической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю); во втором случае — на границе колебательной устойчивости (два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси).

Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо один параметр (например, коэффициент усиления, постоянную времени и т. д.) и определить его предельное (критическое) значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Критерий Гурвица можно получить из критерия Рауса, поэтому иногда критерий Гурвица называют критерием Рауса — Гурвица.

Пример 3.1. Пусть задано характеристическое уравнение системы

$$D(s) = (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) + K = 0,$$
(3.63)

где К — коэффициент усиления разомкнутой системы;

 $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  — постоянные времени отдельных динамических звеньев системы. Найдем, пользуясь критерием Гурвица, предельное значение коэффициента усиления разомкнутой системы  $K_{KP}$  как функцию постоянных времени  $T_1, T_2, T_3$ .

Перепишем характеристическое уравнение в виде:

$$D(s) = T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_3 = 0 (3.64)$$

$$\Gamma$$
Де:  $a_0 = T_1 T_2 T_3$ ,  $a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$ ,  $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$ ,  $a_3 = 1 + K$ . (3.65)

Согласно критерию устойчивости Гурвица, система третьего порядка будет устойчива, если выполняются следующие неравенства:

$$a_0 \rangle 0, \ a_1 \rangle 0, \ a_2 \rangle 0, \ a_3 \rangle 0, \ a_1 a_2 - a_0 a_3 \rangle 0.$$
 (3.66)

В данном случае все коэффициенты характеристического уравнения положительны, поэтому система будет устойчива, если

$$(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3) T_1T_2T_3(1+K)$$
. (3.67)

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$K\langle (1+\tau_2+\tau_3)(1+\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{\tau_3})-1,$$
 (3.68)

где: 
$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$$
,  $\tau_3 = \frac{T_3}{T_1}$ . (3.69)

Предельное (критическое) значение коэффициента усиления, при котором система будет находиться на границе устойчивости, равно

$$K_{KP} = (1 + \tau_2 + \tau_3)(1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}) - 1.$$
 (3.70)

Из последнего выражения следует, что предельный коэффициент усиления системы определяется не абсолютными значениями постоянных времени динамических звеньев, а их относительными значениями. Чем более резко отличаются постоянные времени друг от друга, тем больше  $K_{KP}$ . В частном случае, когда  $\tau_2 = \tau_3 = 1$ , т. е.  $T_1 = T_2 = T_3$ , значение  $K_{KP}$  минимально и равно всего лишь  $K_{KP} = 8$ .

**Пример 3.2**. Исследовать устойчивость системы автоматического регулирования (рис. 3.5) с помощью критерия Рауса — Гурвица.

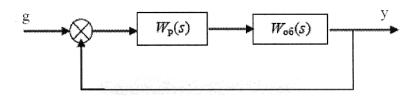


Рис. 3.5. Структурная схема системы автоматического регулирования

Заданы следующие исходные данные; передаточные функции объекта  $W_{ob}(s)$  и регулятора  $W_{p}(s)$ :

$$W_P(s) = \frac{5}{2s};$$
  $W_{OB}(s) = \frac{3s+2}{s^3+2s^2+s+3}$  (3.71)

Для исследования устойчивости систем автоматического регулирования с помощью критерия Рауса - Гурвица необходимо знать дифференциальное или характеристическое уравнение системы. Знаменатель передаточной функции всегда представляет собой характеристический полином, поэтому необходимо, прежде всего, записать передаточную функцию замкнутой одноконтурной системы (рис. 3.5):

$$W_{3C}(s) = \frac{W_{OE}(s)W_{PEF}(s)}{1 + W_{OE}(s)W_{PEF}(s)}$$
(3.72)

Характеристическое уравнение определяется путем приравнивания к нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы

$$W_{PEF}(s)W_{OE}(s) + 1 = 0 (3.73)$$

с учетом конкретных значений передаточных функций объекта и регулятора получим

$$\frac{2s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 21s + 10}{2s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 6s} = 0$$
 (3.74)

откуда характеристическое уравнение запишется в виде

$$2s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 21s + 10 = 0 (3.75)$$

Задачу будем решать с использованием формулировки критерия устойчивости по Гурвицу. Для этого необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить главный определитель Гурвица. Порядок определителя соответствует порядку характеристического

уравнения. Из этого определителя составляются диагональные миноры, которых должно быть n-1.

Система автоматического управления будет устойчивой тогда и только тогда, когда все диагональные миноры главного определителя будут положительны. Для нашей задачи главный определитель Гурвица имеет вид:

$$\begin{vmatrix}
4 & 21 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 10 & 0 \\
0 & 4 & 21 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 10
\end{vmatrix}$$
(3.76)

Вычислим последовательно диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 4 > 0$$
  $\Delta_2 = 8 - 42 = -34 < 0$  (3.77)

$$\Delta_3 = 4*(42-40) - 21*42 = -874 < 0; \ \Delta_4 = -874*10 = -8740 < 0$$
 (3.78)

Все диагональные миноры отрицательны, следовательно, система неустойчива. Следует отметить, что для исследования устойчивости не обязательно вычислять все миноры. Если при вычислении миноров получают, что его значение отрицательно, дальнейшие расчеты можно прекратить и сделать вывод, что система неустойчива.

## 3.6. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими **и** получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

**Принцип аргумента.** В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функций комплексного переменного принципа аргумента, который кратко излагается ниже.

Пусть дан некоторый полином п-й степени

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$
 (3.79)

Этот полином в соответствии с теоремой Безу можно представить в виде

$$D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$$
(3.80)

где  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  — корни уравнения D(s) = 0.

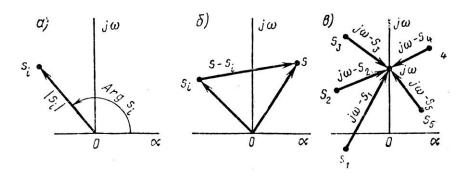


Рис. 3.6. Геометрическое изображение корней векторами.

На комплексной плоскости s каждый корень геометрически может быть изображен вектором, проведенным из начала координат к точке  $S_i$  (рис. 3.6a). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа  $S_i$ , т. е.  $|s_i|$ , а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, — аргументу или фазе комплексного числа  $S_i$ , т. е.  $Args_i$ .

Величины  $(s-s_i)$  геометрически изображаются векторами, проведенными из точки  $s_i$  к произвольной точке s (рис. 3.6б). В частном случае при  $s=j\omega$  получим

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - s_1)(j\omega - s_2),...(j\omega - s_n).$$
 (3.81)

Концы элементарных векторов  $(j\omega - s_i)$  будут находиться на мнимой оси в точке  $s = j\omega$  (рис. 3.6в).

В выражении (3.81)  $D(j\omega)$  представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов  $(j\omega - s_i)$  и действительного числа  $a_0$ . Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и  $a_0$ :

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - s_1| |j\omega - s_2| ... |j\omega - s_n|$$
 (3.82)

а аргумент или фаза его равна сумме аргументов элементарных векторов:

$$ArgD(j\omega) = Arg(j\omega - s_1) + Arg(j\omega - s_2), + \dots + Arg(j\omega - s_n). \tag{3.83}$$

Условимся считать вращение против часовой стрелки положительным. Тогда при изменении  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  каждый элементарный вектор повернется на угол  $\pi$ , если его начало, т. е. корень, расположено слева от мнимой оси, и на угол —  $\pi$ , если корень расположен справа от мнимой оси (рис. 3.7).

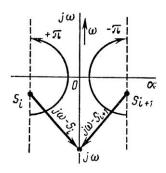


Рис. 3.7. Вращение векторов.

Предположим, что полином D(s) имеет m правых корней и n — m левых Тогда, при изменении  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$ , изменение (приращение) аргумента вектора D( $j\omega$ ), равно сумме углов поворота векторов ( $j\omega$  –  $s_i$ ):

$$|\omega = \infty$$
  
 $\Delta \operatorname{ArgD}(j\omega) = \pi(n-m) - \pi m = \pi (n-2m)$  (3.84)  
 $|\omega = -\infty$ 

Отсюда вытекает следующее правило: изменение (приращение) аргумента  $D(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  равно разности между числом левых и правых корней уравнения D(s) = 0, умноженной на  $\pi$ .

Очевидно, что при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  будет вдвое меньше:

$$|\omega = \infty$$
  
 $\Delta \operatorname{ArgD}(j\omega) = (\pi/2)(n-2m)$  (3.85)  
 $|\omega = 0$ 

Каждый из векторов  $(j\omega - s_i)$ , соответствующих вещественным корням, повернется теперь на угол  $\pi/2$  или  $-\pi/2$ .

Векторы[ $j\omega - (\alpha_i + j\omega_i)$ ] и [ $j\omega - (\alpha_i - j\omega_i)$ ], которые составляют пару, соответствующую двум комплексно-сопряженным корням, повернутся: один — на угол  $\pi/2 + \gamma$ , а другой — на  $\pi/2 - \gamma$ , где  $\gamma$  — угол, образованный вектором, проведенным от корня в начало координат, с осью абсцисс (рис. 3.8). Общее приращение аргумента произведения этих векторов при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  равно

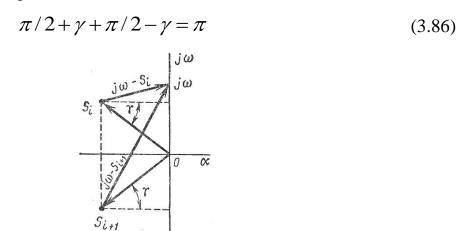


Рис.3.8. Произведение векторов

В основу всех частотных критериев устойчивости положено уравнение (3.84), определяющее приращение аргумента  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$ , или (3.85) — при, изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

## 3.7. Критерий устойчивости Михайлова

Этот критерий устойчивости, сформулированный в 1938г. советским ученым А.В. Михайловым, является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой кривой Михайлова.

Пусть дано характеристическое уравнение системы:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
(3.87)

Если подставить в полином

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$
 (3.88)

чисто мнимое значение  $s = j\omega$ , то получим комплексный полином

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}$$
 (3.89)

Функции:

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots,$$
 (3.90)

$$Y(\omega) = \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - ...)$$
 (3.91)

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова; функции  $D(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора  $D(j\omega)$  соответственно.

При изменении частоты  $\omega$  вектор  $D(j\omega)$ , изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую кривой (годографом) Михайлова.

В соответствии с (3.85) угол поворота вектора  $D(j\omega)$  вокруг начала координат при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  равен:

$$|\omega = \infty|$$
  
 $\Delta \operatorname{Arg} D(j\omega) = (\pi/2)(n-2m)$  (3.92)  
 $|\omega = 0|$ 

Отсюда определяем число правых корней полинома D(s), т. е.

$$m = \frac{\pi n/2 - \Delta ArgD(j\omega)|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{2}$$
 (3.93)

Из (3.93) видно, что число правых корней m будет равно нулю при одномединственном условии

$$|\omega = \infty|$$

$$\Delta \operatorname{ArgD}(j\omega) = \pi n/2$$

$$|\omega = 0$$
(3.94)

Условие (3.94) является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все п корней характеристического уравнения были левыми; иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексный полином  $D(j\omega)$ , т. е. должно выполняться еще одно условие

$$D(j\omega) \neq 0 \tag{3.95}$$

Формулы (3.94) и (3.95) представляют математическое выражение критерия устойчивости Михайлова. Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол  $\pi$ n/2, где п — порядок характеристического уравнения.

Заметим, что для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при  $\omega=0$  на вещественной положительной полуоси, поскольку при  $a_0>0$  все коэффициенты характеристического уравнения положительны и  $D(0)=a_n>0$ . Кроме того, для устойчивых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) -  $\psi(\omega)$  с ростом частоты  $\omega$  должна возрастать монотонно, т. е вектор  $D(j\omega)$  должен поворачиваться только против часовой стрелки, поскольку с ростом частоты монотонно возрастают имеющие одинаковые (положительные) знаки, фазы элементарных векторов  $(j\omega-s_i)$ , являющиеся слагаемыми фазы вектора  $D(j\omega)$  (3.83).

Учитывая сказанное выше, критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать так.

Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , начинаясь при  $\omega=0$  на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно п квадрантов координатной плоскости, где n — порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова устойчивых ДЛЯ систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том координатной плоскости, квадранте номер которого равен степени характеристического уравнения.

На рис. 3.9 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого (n=1) и кончая пятым (n=5) порядком. Для удобства сравнения коэффициенты  $a_n$  во всех случаях приняты одинаковыми.

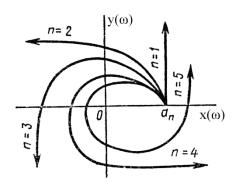


Рис. 3.9. Типичные кривые Михайлова для устойчивых систем

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора  $D(j\omega)$  оказывается меньше, чем  $\pi$ n/2. Число правых корней неустойчивой системы можно определить по формуле (3.93).

На рис. 3.10 показаны кривые Михайлова для неустойчивых систем.

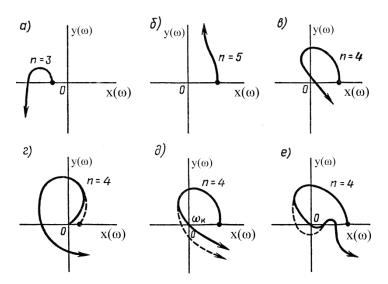


Рис. 3.10. Кривые Михайлова для неустойчивых систем.

Рис. 3.10a — при  $\omega = 0$  кривая Михайлова начинается на отрицательной вещественной полуоси; система неустойчива.

На рис. 3.10б порядок уравнения n=5. Кривая Михайлова вся находится в одном квадранте (этому соответствует характеристическое уравнение  $D(s) = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 = 0$ ); система неустойчива.

Рис. 3.10в — нарушена последовательность прохождения квадрантов; система неустойчива.

Рис. 3.10г—кривая Михайлова начинается в начале координат, т. е. в характеристическом уравнении имеется по крайней мере один нулевой корень; система находится на границе апериодической устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова (прерывистая линия) делает систему устойчивой.

Рис. 3.10д — кривая Михайлова проходит при некотором значении частоты  $\omega_k$  через начало координат, т. е. в характеристическом уравнении имеются чисто мнимые корни  $\pm j\omega_k$ ; система находится на границе колебательной устойчивости; небольшая деформация кривой Михайлова делает систему устойчивой (прерывистая линия).

Рис. 3.10 е — кривая Михайлова проходит через начало координат, но небольшой деформацией кривой Михайлова удовлетворить условиям устойчивости нельзя; система неустойчива.

Для границы устойчивости третьего типа (бесконечный корень) конец кривой Михайлова перебрасывается как на рис. 3.11.

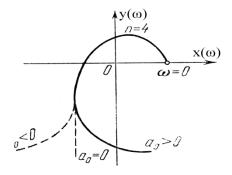


Рис. 3.11. Переход кривой Михайлова

При этом коэффициент  $a_0$  будет проходить через нуль, меняя знак плюс на минус.

Построение кривой Михайлова практически производится либо методом контрольных точек, либо методом вспомогательных годографов. Первый метод сводится к определению ряда точек кривой Михайлова, соответствующих фиксированным значениям частоты ω, включая (обязательно) частоты точек пересечения кривой с осями координат, которые находятся как корни уравнений:

$$X(\omega) = 0 \tag{3.96}$$

$$Y(\omega) = 0 \tag{3.97}$$

При втором методе предварительно определяют годографы отдельных звеньев системы и по ним строят искомую кривую Михайлова, применяя правила умножения и сложения векторов.

Анализируя годографы Михайлова, можно установить следующее следствие из критерия устойчивости Михайлова. При последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочередно. В точках пересечения кривой Михайлова с вещественной осью обращается в нуль мнимая функция Михайлова  $Y(\omega)$ , а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в нуль вещественная функция  $X(\omega)$ . Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений (3.96) и (3.97).

Вещественную  $X(\omega)$  и мнимую  $Y(\omega)$  функции Михайлова можно представить графически в виде кривых (рис. 3.12). Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают значения корней уравнений (3.96) и (3.97). Если значения  $\omega_0, \omega_2, \omega_4, \ldots$  есть корни уравнения (3.97), а  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots$  - уравнения (3.96), причем  $\omega_0 \langle \omega_2 \langle \omega_4 \langle \ldots, \omega_1 \langle \omega_3 \langle \omega_5 \ldots,$  то для устойчивой системы обязательно соблюдение неравенства

$$\omega_0 \langle \omega_1 \langle \omega_2 \langle \omega_3 \langle \omega_4 \langle \omega_5 \dots \rangle \rangle \rangle$$
 (3.98)

В связи с указанным следствием можно привести другую формулировку критерия устойчивости Михайлова: система автоматического управления будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная  $X(\omega)$  и мнимая  $Y(\omega)$  функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные и перемежающиеся корни. Общее число этих корней равно порядку характеристического уравнения n, и при  $\omega = 0$  удовлетворяются условия

$$X(0) > 0, \quad Y(0) > 0$$
 (3.99)

На рис. 3.12a приведен пример графиков  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$  для устойчивой системы, а на рис. 3.126 — для неустойчивой системы.

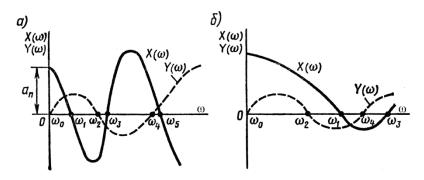


Рис. 3.12. Графики функций  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$ .

Для уравнений до шестого порядка включительно условие перемежаемости корней дает возможность легко провести аналитическое исследование устойчивости, не вычерчивая кривую Михайлова. При этом обычно определяют только корни уравнения  $Y(\omega) = 0$ . Перемежаемость корней уравнений  $X(\omega)=0$  и  $Y(\omega)=0$  можно проверить подстановкой в  $X(\omega)$  найденных корней уравнения  $Y(\omega)=0$ . Как видно на рис. 3.12 а, знаки  $X(\omega)$  при подстановке возрастающих по абсолютной величине корней должны чередоваться.

**Пример3.3.** Определить устойчивость системы, характеристическое уравнение которой

$$D(s) = s^{6} + 6s^{5} + 15s^{4} + 20s^{3} + 15s^{2} + 6s + 1 = 0$$
(3.100)

Подставляем  $s = i\omega$  и находим вещественную и мнимую функции Михайлова:

$$X(\omega) = -\omega^6 + 15\omega^4 - 15\omega^2 + 1 = 0 \tag{3.101}$$

$$Y(\omega) = \omega(6\omega^4 - 20\omega^2 + 6) = 0 \tag{3.102}$$

Находим корни уравнения  $Y(\omega) = 0$ :

$$\omega_0 = 0$$
;  $\omega^4 - 3.33\omega^2 + 1 = 0$  (3.103)

$$\omega_{2.4}^2 = 1.67 \pm \sqrt{2.78 - 1}, \quad \omega_2^2 = 0.36, \quad \omega_4^2 = 2.96.$$
 (3.104)

Если перемежаются корни, то перемножаются и их квадраты, поэтому нахождение  $\omega_2$  и  $\omega_4$  не обязательно.

Проверим, чередуются ли знаки  $X(\omega)$  при подстановке  $\,\omega_{_2}^{_2}\,$  и  $\,\omega_{_4}^{_2}\,$ .

Имеем

$$X(\omega_2) = -0.36^2 + 15 * 0.36^2 - 15 * 0.36 + 1 = -2.51$$
 (3.105)

$$X(\omega_4) = -2.96^2 + 15 * 2.96^2 - 15 * 2.96 + 1 > 0$$
(3.106)

Так как все корни  $Y(\omega)$  вещественны и знаки ординат  $X(\omega)$ , соответствующие этим корням, чередуются, то система устойчива.

#### 3.8. Критерий устойчивости Найквиста

Этот частотный критерий устойчивости, разработанный в 1932г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n}, \quad m \le n.$$
 (3.107)

Подставляя в (3.107)  $s=j\omega$ , получаем частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{c_0(j\omega)^n + c_1(j\omega)^{n-1} + \dots + c_n} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (3.108)$$

где:  $U(\omega)$  и  $Y(\omega)$  — действительная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно; модуль  $A(\omega)$  и фаза  $\psi(\omega)$  частотной передаточной функции равны:

$$A(\omega) = \sqrt{U^{2}(\omega) + V^{2}(\omega)} \; ; \qquad \psi(\omega) = Arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \, . \tag{3.109}$$

Если изменять частоту  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , то вектор  $W(j\omega)$  будет меняться по величине и фазе. Кривую, описываемую концом этого вектора в комплексной плоскости, называют амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы (рис. 3.13).

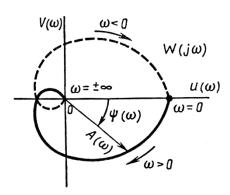


Рис. 3.13. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы

Амплитудно-фазовая характеристика симметрична относительно вещественной оси, поэтому обычно вычерчивают только ту часть ее, которая соответствует положительным частотам  $\omega > 0$  (сплошная линия на рис. 3.13), а ветвь этой характеристики, соответствующая отрицательным частотам  $\omega < 0$  (пунктирная линия на рис. 3.13), может быть найдена как зеркальное отражение ветви, соответствующей положительным частотам, относительно вещественной оси. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\rho(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s) + R(s)}{Q(s)} = \frac{D(s)}{Q(s)}$$
(3.110)

 $D(s) = Q(s) + R(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n$  - характеристический полином замкнутой системы;

 $Q(s) = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + ... + c_n$  — характеристический полином разомкнутой системы;

$$R(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m$$
 — полином степени m.

Так как в реальных системах степень полинома R(s) не выше степени полинома Q(s), т. е.  $m \le n$ , то степени числителя и знаменателя дроби (3.110) одинаковы и равны n.

Подставляя в (3.110)  $s = j\omega$ , получим

$$\rho(s) = 1 + W(j\omega) = 1 + \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}$$
(3.111)

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы D(s) = 0 имеет m правых корней и n—m левых корней, а характеристическое уравнение разомкнутой системы Q(s) = 0 имеет l правых и n—l левых корней.

При изменении частоты  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  изменение угла поворота вектора  $\rho(j\omega)$  на основе принципа аргумента будет

$$|\omega = \infty$$

$$\Delta \text{Arg } \rho(j\omega) = \Delta \text{Arg } D(j\omega) - \Delta \text{Arg } Q(j\omega) = \pi[(n-m)-m]-\pi[(n-l)-l] =$$

$$|\omega = -\infty$$

$$= 2\pi(l-m)$$
(3.112)

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т. е. m=0. Отсюда суммарный поворот вектора  $\rho(j\omega)$  устойчивой системы вокруг начала координат должен быть равен

$$|\omega = \infty$$

$$\Delta \text{Arg } \rho(j\omega) = 2\pi l, \qquad (3.113)$$

$$|\omega = -\infty$$

где 1 — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Обычно рассматривают только положительные частоты ( $\omega > 0$ ), в этом случае угол поворота вектора  $\rho(j\omega)$  будет вдвое меньше, т. е.

$$|\omega = \infty$$
 
$$\Delta \text{Arg } \rho(j\omega) = \pi l = 2\pi l/2 , \qquad (3.114)$$
 
$$|\omega = 0$$

Рассмотрим следующие случаи:

**1.** Если разомкнутая система является неустойчивой и имеет 1 правых корней, то замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика вспомогательной функции  $\rho(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  охватывает начало координат в положительном направлении l/2 раз.

Число оборотов вектора  $\rho(j\omega)$  вокруг начала координат равно числу оборотов вектора  $W(j\omega)$  вокруг точки (—1, j0).

На основании сказанного вытекает следующая формулировка критерия устойчивости Найквиста: если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то, для того чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  охватывала точку (—1, j0) в положительном направлении 1/2 раз, где 1 — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

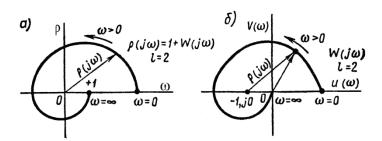


Рис. 3.14. Амплитудно-фазовые характеристики функций  $\rho(j\omega)$  (a) и  $W(j\omega)$  (б).

На рис. 3.14а показана амплитудно-фазовая характеристика, а на рис. 3.14б — амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$ , соответствующие устойчивой замкнутой системе, которая в разомкнутом состоянии была неустойчива и имела число правых корней l=2. Обычно в реальных системах

$$W(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = 0$$
, и поэтому,  $\rho(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = 1$ . (3.115)

При сложной форме характеристики  $W(j\omega)$  могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг критической точки (—1, j0). В этом случае для суждения об устойчивости удобно применять «правило переходов». Назовем переход характеристики  $W(j\omega)$  через отрезок вещественной оси слева от точки (—1, j0), т. е. через отрезок (—  $\infty$ , —1) при возрастании  $\omega$  положительным, если он происходит сверху вниз, и отрицательным, если он происходит снизу вверх. Если характеристика  $W(j\omega)$  начинается на отрезке (—  $\infty$ , —1) при  $\omega$  = 0 или заканчивается на нем, при  $\omega$  =  $\infty$ , то в этих случаях считают, что она совершает полперехода (рис. 3.15):

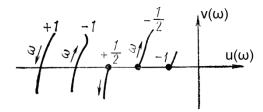


Рис. 3.15. Переходы характеристики W(jω)

Тогда критерий Найквиста можно сформулировать так.

Если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то, для того, чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$  через отрезок вещественной оси (— $\infty$ , — 1) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  была равна 1/2, где 1 — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

**2.** Если система автоматического управления в разомкнутом состоянии устойчива, т. е. 1 = 0, то приращение аргумента вектора  $\rho(j\omega)$  равно нулю:

$$|\omega = \infty$$

$$\Delta \text{Arg } \rho(j\omega) = 2\pi l = 0. \tag{3.116}$$

$$|\omega = -\infty$$

Это означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика  $\rho(j\omega)$  не охватывала начало координат

(рис. 3.16а), а амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  не охватывала точку с координатами (—1, j0), (рис. 3.16б).

Таким образом, для этого наиболее часто встречающегося на практике случая получаем следующую формулировку критерия Найквиста: если разомкнутая система автоматического управления устойчива, то замкнутая система

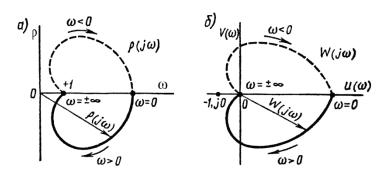


Рис. 3.16. Амплитудно-фазовые характеристики функций  $\rho(j\omega)$  (a), W(j\omega) (б).

автоматического управления будет устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  не охватывает точку (—1, j0).

#### 3. Разомкнутая система на границе устойчивости.

Пусть характеристический полином такой системы имеет нулевые или чисто мнимые корни, а у остальных корней отрицательные вещественные части. Если число нулевых корней k, то АФЧХ при  $\omega=0$  дугой бесконечно большого радиуса перемещается от положительной вещественной полуоси на угол 90°k (k = 1,2,3,...) по часовой стрелке. Если есть пара чисто мнимых корней (в знаменателе частотной передаточной функции имеется множитель  $(1-\omega^2T^2)$ ), то АФЧХ при частоте  $\omega_i=1/T_i$  дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол 180° по часовой стрелке.

В обоих случаях для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , дополненная на участке разрыва дугой бесконечно большого радиуса, не охватывала точку (—1, j0).

#### 3.9. Астатические системы

Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых статических систем автоматического управления при изменении частоты  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  образуют замкнутый контур. У астатических разомкнутых систем, которые содержат интегрирующие звенья, амплитудно-фазовые характеристики не образуют замкнутого контура. Для таких систем характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет корни, равные нулю, и может быть записано в виде

$$Q(s) = s^{\nu} Q_{1}(s) = 0, (3.117)$$

где  $\nu$  — порядок астатизма;  $Q_1(s)$  — полином, не имеющий корней, равных нулю.

Частотная передаточная функция разомкнутой астатической системы, содержащей интегрирующие звенья,

$$W(j\omega) = W(s) = R(s)/s^{\nu}Q_{1}(s) = R(j\omega)/[(j\omega)^{\nu}Q_{1}(j\omega)]$$
(3.118)

При  $\omega=0$  частотная передаточная функция астатической системы обращается в  $\infty$ , а ее амплитудно-фазовая характеристика претерпевает разрыв. Поэтому в этом случае трудно решить вопрос об устойчивости замкнутой системы, так как неясно, охватывает ли амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  точку (—1, j0).

Векторы ј $\omega$  при изменении частоты  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  изменяют при переходе через начало координат фазовый угол скачком с —  $\pi/2$  до  $\pi/2$ , но в каком направлении происходит их поворот в момент перехода через начало координат, сказать невозможно. Чтобы освободиться от этой неопределенности, обходят по мнимой оси, при изменении частоты от—  $\infty$  до  $\infty$ , начало координат в плоскости корней справа по полуокружности бесконечно малого радиуса г (рис. 3.17), т. е. считают не s = 0, а  $s = re^{j\nu}$  ( $r \to 0, -\pi/2 \le \gamma \le \pi/2$ ).

Тогда все нулевые корни дадут точно такой же угол поворота, как левые корни, т. е. каждый из векторов повернется на  $\pi$ , и формулы (3.84) и (3.85) из раздела 3.6 сохраняют свою силу.

Обходу начала координат по малой дуге  $re^{j\nu}$  в плоскости корней соответствует передаточная функция разомкнутой системы

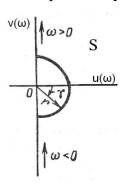


Рис. 3.17. Направление обхода особой точки.

$$W(s) = \frac{R(s)}{s^{\nu} Q_{1}(s)} \bigg|_{s=0} = \frac{R(0)}{Q_{1}(0)} \frac{1}{(re^{j\gamma})^{\nu}} = \frac{b_{m}}{c_{m}} \frac{1}{r^{\nu}} e^{-j\nu\gamma} = \operatorname{Re}^{-j\psi} , \qquad (3.119)$$

где  $b_m$  и  $c_m$  — свободные члены полиномов R(s) и  $Q_1(s)$ .

При  $r \to 0$  модуль  $R \to \infty$ , а аргумент  $\psi$  меняется от  $v\pi/2$  до  $-v\pi/2$  при изменении  $\gamma$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Таким образом, во время движения по полуокружности бесконечно малого радиуса в плоскости корней частотная передаточная функция разомкнутой системы  $W(j\omega)$  может быть представлена в виде вектора бесконечно большой длины, поворачивающегося на комплексной плоскости по часовой стрелке на угол, равный  $-v\pi$  (от  $v\pi/2$  до  $-v\pi/2$ ).

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , т. е. при  $r \to 0$  и  $0 \le \gamma \le \pi/2$ , частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  будет изменяться по дуге бесконечно большого радиуса, описывая угол от 0 до —  $v\pi/2$ .

На рис. 3.18 показана амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой астатической системы с астатизмом первого порядка  $\nu=1$ . На основе сказанного выше для определения устойчивости систем с астатизмом любого порядка  $\nu$  достаточно построить одну ветвь амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, соответствующую положительным частотам, дополнить ее дугой —  $\nu\pi/2$  окружности бесконечно большого радиуса и затем применить критерий устойчивости Найквиста.

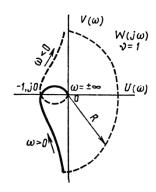


Рис. 3.18. А.Ф.Х. разомкнутой астатической системы с астатизмом первого порядка.

Пусть разомкнутая астатическая система неустойчива.

Замкнутая система будет устойчива, если при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой астатической системы  $W(j\omega)$ , дополненная дугой —  $v\pi/2$  бесконечно большого радиуса, охватит точку (—1, j0) в положительном направлении l/2, раз, где 1 — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

**Пример 3.4.** На рис. 3.19 приведена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с астатизмом второго порядка v = 2.

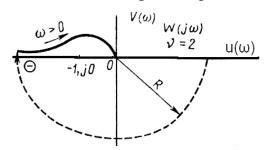


Рис. 3.19. А.Ф.Х. разомкнутой астатической системы с астатизмом второго порядка.

Замкнутая система в этом случае будет неустойчива, так как амплитуднофазовая характеристика  $W(j\omega)$ , дополненная дугой —  $v\pi/2$  —  $\pi$  бесконечно большого радиуса, всегда охватывает точку (—1, j0) в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

**Пример 3.5.** На рис. 3.20 приведена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с астатизмом второго порядка, которая после дополнения ее дугой —  $\nu\pi/2 = -\pi$  бесконечно большого радиуса не охватывает точку (—1, j0) (число положительных и отрицательных переходов через отрезок (— $\infty$ , —1) равно нулю).

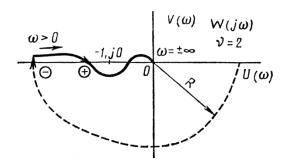


Рис. 3.20. А.Ф.Х. разомкнутой системы с дугой бесконечно большого радиуса

Следовательно, замкнутая система будет устойчива.

Одним из достоинств критерия Найквиста является то, что он может быть применен и в тех практически важных случаях, когда неизвестны уравнения некоторых звеньев системы либо даже неизвестно уравнение всей разомкнутой системы в целом, но амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы может быть получена экспериментально. Кроме того, критерий Найквиста позволяет довольно просто исследовать устойчивость систем с запаздыванием.

#### 3.10. Запас устойчивости.

Для нормального функционирования любая САР должна быть достаточно удалена от границы устойчивости и иметь достаточный запас устойчивости. Необходимость этого обусловлена следующими причинами:

- а) уравнения элементов САР, как правило, идеализированы, при их составлении не учитывают второстепенные факторы;
- б) при линеаризации уравнений погрешности приближения дополнительно увеличиваются;
- в) параметры элементов определяют с некоторой погрешностью;

г) параметры однотипных элементов имеют технологический разброс;

д) при эксплуатации параметры элементов изменяются вследствие старения. Следовательно, устойчивая по расчету САР, в действительности может неустойчивой. В следящих системах запас оказаться устойчивости необходим еще И ДЛЯ хорошего качества регулирования. 0 устойчивости запасе онжом ПО расположению корней судить характеристического уравнения системы: чем дальше отстоят они от мнимой оси (в левой полуплоскости), тем больший запас устойчивости. Каждый критерий устойчивости также позволяет определять запас устойчивости. Количественная оценка запаса устойчивости зависит от того, какой критерий устойчивости выбран. В практике инженерных расчетов наиболее широко используют определение запаса устойчивости на основании критерия Найквиста, по удалению АФЧХ разомкнутой системы от критической точки с координатами [-1, ј0], что оценивают двумя показателями: запасом устойчивости по фазе у и запасом устойчивости по модулю (по амплитуде) h. Запас устойчивости по фазе определяют как величину угла  $\varphi = \pi - |\psi(\omega_c)|$  для частоты  $\omega_c$ , при которой  $|W(\omega_c)|=1$ ; по амплитуде — как величину отрезка оси абсцисс h, заключенного между критической точкой (—1, j 0) и амплитуднофазовой характеристикой (рис. 3.21).

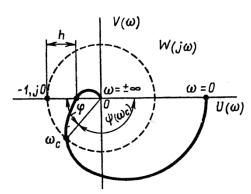


Рис. 3.21. Определение запаса устойчивости по АФЧХ системы

С ростом коэффициента усиления разомкнутой системы модуль амплитуднофазовой характеристики также растет и при некотором значении коэффици-

ента усиления  $K = K_{\kappa p}$ , называемого критическим коэффициентом усиления, амплитудно-фазовая характеристика пройдет через точку (—1, j0), т. е. система будет на границе устойчивости. При  $K \rangle K_{\kappa p}$  система будет неустойчива.

Однако встречаются системы (с внутренними обратными связями), в которых потеря устойчивости может произойти не только при увеличении коэффициента усиления, но также и при его уменьшении. Этим случаям могут соответствовать так называемые клювообразные амплитудно-фазовые характеристики (рис. 3.22). В этих случаях запас устойчивости по амплитуде определяется величинами двух отрезков h оси абсцисс, заключенных между критической точкой (—1, j0) и амплитудно-фазовой характеристикой.

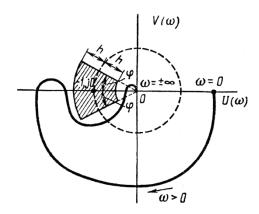


Рис. 3.22. Клювообразная амплитудно-фазовая характеристика.

Чтобы система обладала требуемым запасом устойчивости при заданных величинах h и  $\phi$ , около критической точки (—1, j0) вычерчивается некоторая запретная область в виде сектора, ограниченная величинами  $\pm$  h и  $\pm$   $\phi$ , в которую амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  не должна входить (рис. 3.22).

Запас по фазе:  $\gamma = 180^{0} + \psi(\omega_{c})$ , где  $\omega_{c}$  - частота среза, при которой L=0;

Необходимые значения запасов устойчивости зависят от класса САР и требований к качеству регулирования. Ориентировочно должно быть:

$$\gamma = 30 \div 60^{\circ}$$
 и  $h = 6 \div 20$ дб.

Для устойчивой системы запасы устойчивости  $\gamma$  и h определяют так, как показано на рис. 3.23.

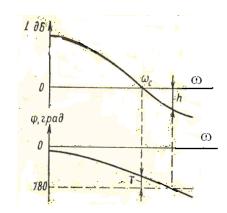


Рис. 3.23. Определение величин γ и h.

**Пример 3.6**. Исследовать на устойчивость одноконтурную САР с единичной обратной связью. Передаточная функция прямой цепи регулятора:

$$W_{P} = \frac{k_{P}(\tau s + 1)}{(T_{1}s + 1)(T_{2}s + 1)}$$
(3.120)

где  $k_p = 5$ ;  $\tau = 0.08c$ ;  $T_1 = 0.1c$ ;  $T_2 = 0.05c$ .

Корни характеристического полинома прямой цепи регулятора отрицательные: —10 и —20. Разомкнутая система устойчива и ее АФЧХ (рис. 3.24) не охватывает критической точки с координатами [— 1, j0]. Поэтому можно заключить, что в замкнутом состоянии рассматриваемая система будет устойчивой.

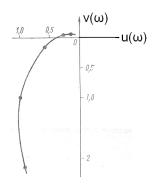


Рис. 3.24. АФЧХ разомкнутой системы.

**Пример 3.7.** Исследовать на устойчивость САР, разомкнутая цепь которой описывается передаточной функцией:

$$W_{P} = \frac{k_{P}(\tau s + 1)}{(T_{1}s + 1)(T_{2}s + 1)}$$
(3.121)

Прежде всего, можно заключить, что характеристический полином имеет чисто мнимые корни, т. е. разомкнутая система на границе устойчивости.

Затем определим частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W = \frac{20(1+j\omega 0.02)}{(1-\omega^2 0.0025)(1+j\omega 0.01)}$$
(3.122)

АФЧХ разомкнутой системы приведена на рис. 3.25.

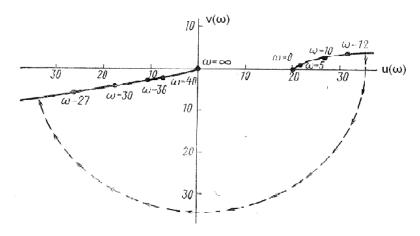


Рис. 3.25. АФЧХ разомкнутой цепи системы, находящейся на колебательной границе устойчивости

При  $\omega = 20c^{-1}$  она имеет разрыв. Если эту кривую дополнить дугой бесконечно большого радиуса, то критическая точка будет находиться вне получившегося контура. Следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

**Пример 3.8**. Выяснить устойчивость САР, у которой передаточная функция разомкнутого контура

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s - 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)}$$
(3.123)

где k = 40;  $\tau = 0.25$  c;  $T_1 = 0.5$ c;  $T_2 = 0.02$  c;  $\xi = 0.1$ .

Характеристический полином разомкнутой системы имеет один нулевой корень и один положительный вещественный корень  $s_1 = 2$ .

Составим частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W = \frac{40(1+j\omega 0.25)}{j\omega(-1+j\omega 0.5)(1+j\omega 0.004-0.004\omega^2)}$$
(3.124)

Теперь определен характер АФЧХ разомкнутой системы (рис. 3.26).

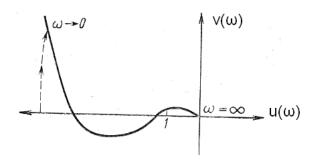


Рис. 3.26. АФЧХ рассматриваемой САР

При  $\omega = 0$  АФЧХ имеет разрыв, и поэтому ее нужно дополнить дугой бесконечно большого радиуса от отрицательной вещественной полуоси.

На участке от -1 до -  $\infty$  имеется один положительный переход и полтора отрицательных. Разность между положительными и отрицательными переходами равна - 1/2. Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы эта разность равнялась +1/2, так как характеристический полином разомкнутой системы имеет один положительный корень. Следовательно, рассматриваемая система в замкнутом состоянии будет неустойчивой.

# 3.11. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

В инженерной практике широкое применение получил анализ устойчивости систем автоматического управления, основанный на применении логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Это обусловлено, прежде всего, тем, что построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем, особенно асимптотических логарифмических частотных характеристик, значительно проще, чем построение годографа амплитудно-фазовых характеристик.

Покажем, каким требованиям должны удовлетворять логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАХ) и логарифмическая

фазочастотная характеристика (ЛФХ) разомкнутой системы, при которых обеспечивалась бы устойчивость системы в замкнутом состоянии.

Как было показано выше, устойчивость связана с числом переходов амплитудно-фазовой характеристики  $W(j\omega)$  отрезка (—  $\infty$  , —1) отрицательной вещественной полуоси. Когда амплитудно-фазовая характеристика  $W(j\omega)$  пересекает отрицательную вещественную полуось, ЛФХ пересекает одну из линий  $\pm \pi(2i+1)$ , где i=0,1,2,3,... (рис.3.27).

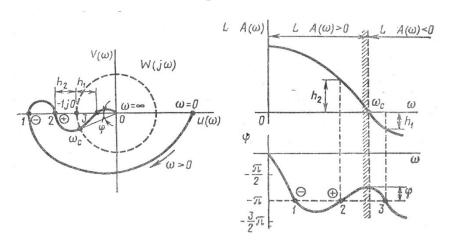


Рис. 3.27. Определение устойчивости по ЛАХ и ЛФХ.

Переходы через эти линии не опасны с точки зрения устойчивости, если они совершаются справа от точки (— 1, j0), т. е. если при этом модуль амплитуднофазовой характеристики меньше единицы  $|W(j\omega)| < 1$  и, следовательно, если ординаты ЛАХ отрицательны, т. е.  $LnA(\omega) = 20lg|W(j\omega)| < 0$ . Поэтому область отрицательных ЛАХ при исследовании устойчивости интереса не представляет.

Положительному переходу (сверху вниз) через отрезок (— $\infty$ , —1) характеристики W(j $\omega$ ) соответствует пересечение ЛФХ при LnA( $\omega$ ) > 0 прямых  $\pm \pi$  (2i + 1) снизу вверх (точка 2 на рис. 3.27), а отрицательному переходу — сверху вниз (точка 1 на рис. 3.27).

Критерий устойчивости Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам может быть сформулирован следующим образом.

Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и

отрицательных переходов логарифмической фазочастотной характеристикой прямых  $\pm$  (2i + 1), i = 0,1, 2,..., во всех областях, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика положительна  $LnA(\omega) > 0$ , была равна 1/2 (1 — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

На рис. 3.27 приведена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  и соответствующие ей ЛАХ и ЛФХ. Из анализа этих ЛАХ и ЛФХ видно, что разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФХ прямых —  $\pi$  при Ln  $A(\omega) > 0$  равна нулю. Таким образом, если разомкнутая система была устойчива (1 = 0), то и замкнутая система будет устойчива, при этом запасы устойчивости по амплитуде равны  $h_1$  и  $h_2$ , а запас устойчивости по фазе равен  $\phi$ .

## 3.12. Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы

При исследовании устойчивости большое практическое значение имеет построение областей устойчивости в плоскости одного или каких-либо двух параметров, влияние которых на устойчивость исследуют, а также построение семейства областей устойчивости в плоскости двух параметров при различных фиксированных значениях третьего параметра.

Уравнение границ областей устойчивости можно находить, пользуясь любым критерием устойчивости. Однако чаще всего на практике применяют наиболее общий метод построения областей устойчивости, который был предложен Ю. И. Неймарком и назван им методом D-разбиения.

**Понятие о D-разбиении.** Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы n-го порядка, которое делением на коэффициент при переменном s с наивысшей степенью всегда может быть приведено к виду

$$D(s) = s^{n} + a_{1}s^{n-1} + ... + a_{n} = 0, \quad a_{0} = 1$$
 (3.125)

Представим себе п-мерное пространство, по координатным осям которого отложены коэффициенты уравнения (3.125). Это пространство называют

пространством коэффициентов. Каждой точке пространства коэффициентов соответствуют конкретные числовые значения коэффициентов уравнения (3.125) и соответствующий им полином n-то порядка. Уравнение (3.125) имеет n корней, расположение которых на комплексной плоскости корней s зависит от числовых значений коэффициентов  $a_i$ .

Если изменять коэффициенты  $a_i$  уравнения (3.125), то его корни в силу их непрерывной зависимости от коэффициентов будут перемещаться в комплексной плоскости корней, описывая корневые годографы.

Чтобы представить сказанное выше геометрически, рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка (n = 3)

$$D(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 (3.126)$$

Если взять три взаимно перпендикулярные оси и откладывать по ним значения коэффициентов  $a_1$   $a_2$ ,  $a_3$ , то получим трехмерное пространство коэффициентов, каждой точке которого соответствуют вполне определенный полином третьей степени и вполне определенные три корня в комплексной плоскости корней s (рис. 3.28a).

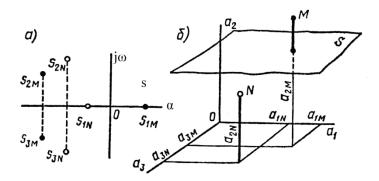


Рис. 3.28. Трехмерное пространство коэффициентов.

Например, точке M, имеющей координаты  $a_{1,M}, a_{2,M}, a_{3,M}$ , соответствует полином

$$D_{M}(s) = s^{3} + a_{1,M}s^{2} + a_{2,M}s + a_{3,M}$$
 (3.127)

имеющий три корня  $s_{1,M}$ ,  $s_{2,M}$ ,  $s_{3,M}$  в плоскости корней (рис. 3.27а). Другой точке, например N, имеющей координаты  $a_{1,N}$ ,  $a_{2,N}$ ,  $a_{3,N}$ , соответствует полином

$$D_N(s) = s^3 + a_{1N}s^2 + a_{2N}s + a_{3N}, (3.128)$$

корни, которого  $S_{1,N}, S_{2,N}, S_{3,N}$  и. т. д.

При некотором значении коэффициентов уравнения (3.126) один из корней попадает в начало координат или пара корней попадает на мнимую ось, т. е. корни его будут иметь вид 0 или  $\pm j\omega_k$  и, следовательно, соответствующая точка в пространстве параметров будет удовлетворять уравнению

$$D(j\omega_k) = (j\omega_k)^3 + a_1(j\omega_k)^2 + a_2(j\omega_k) + a_3 = 0$$
 (3.129)

Этому уравнению, при —  $\infty < \omega < \infty$ , соответствует некоторая поверхность S. Часть этой поверхности показана на рис. 3.28б.

При изменении коэффициентов  $a_i$  корни характеристического уравнения также изменяются и попадают на мнимую ось тогда, когда точка в пространстве коэффициентов попадет на поверхность S. При пересечении такой поверхности S корни переходят из одной полуплоскости корней в другую. Следовательно, поверхность S разделяет пространство коэффициентов на области, каждой точке которых соответствует определенное одинаковое число правых и левых корней. Эти области обозначают D(m), где m — число правых корней характеристического уравнения. Разбиение пространства коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называют методом D-разбиения.

Для характеристического уравнения третьего порядка в пространстве коэффициентов можно выделить четыре области: D(3), D(2), D(1), D(0). Последняя область D(0) будет областью устойчивости.

Если изменяются не все коэффициенты, а часть из них, например, два:  $a_1$  и  $a_2$  при  $a_3$  = const, то вместо поверхности получим линию, которая является

сечением поверхности S плоскостью  $a_3 = \text{const.}$  Эта линия разделит плоскость коэффициентов  $a_1 - a_2$  на области с одинаковым числом правых корней (рис. 3.29).

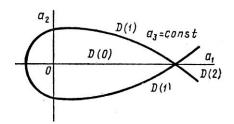


Рис. 3.29. Плоскость коэффициентов  $a_1 - a_2$ 

Для уравнений более высокого порядка (n > 3) вместо обычного трехмерного пространства получаются многомерное пространство и гиперповерхности, разбивающие это пространство на области, что сильно усложняет задачу, а рассмотрение теряет наглядность.

Так как переход через границу D-разбиения в пространстве коэффициентов соответствует переходу корней характеристического уравнения через мнимую ось, то уравнение границы D-разбиения в общем случае

$$D(j\omega) = (j\omega_k)^n + a_1(j\omega_k)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
(3.130)

Из (3.130) видно, что уравнение границы D-разбиения может быть получено из характеристического уравнения системы заменой  $s=j\omega$ . Границу D-разбиения можно строить не только в пространстве коэффициентов  $a_i$  характеристического уравнения, но и в пространстве параметров системы (постоянных времени, коэффициентов усиления и т. д.), от которых зависят коэффициенты характеристического уравнения.

**D-разбиение по одному (комплексному) параметру.** Предположим, что требуется выяснить влияние на устойчивость какого-либо параметра σ, линейно входящего в характеристическое уравнение. Для этого сначала характеристическое уравнение приводят к виду

$$D(s) = S(s) + \sigma N(s) = 0$$
 (3.131)

где S(s) — полином, не зависящий от  $\sigma$ ; N(s) — полином, содержащий  $\sigma$  множителем.

Так как изменяемый параметр  $\sigma$  в линейных системах является не комплексным, а вещественным числом (коэффициент усиления, постоянная времени и т. д.), то (3.133) следовало бы дополнить условием  $Y(\omega)=0$ . Однако при первоначальном построении не будем делать этого ограничения и будем временно считать изменяемый параметр комплексной величиной  $\overline{\sigma}$ , отмечая это чертой сверху, чтобы отличить ее от вещественного значения  $\sigma$ .

Граница D-разбиения определяется уравнением

$$D(j\omega) = S(j\omega) + \overline{\sigma}N(j\omega) = 0 \tag{3.132}$$

откуда

$$\overline{\sigma} = -\frac{S(j\omega)}{N(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega) \tag{3.133}$$

Давая  $\omega$  значения от—  $\infty$  до  $\infty$ , можно по (3.133) вычислить X ( $\infty$ ) и Y ( $\infty$ ) и построить на комплексной плоскости  $\overline{\sigma}$  границу D-разбиения.

При построении границы D-разбиения достаточно построить ее для положительных значений ω и затем дополнить зеркальным отображением построенного участка относительно действительной оси (рис. 3.30б).

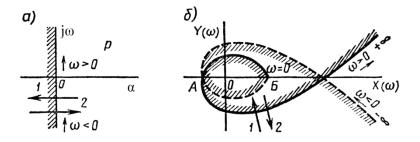


Рис. 3.30. Построение границы D-разбиения

Если при изменении  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  в плоскости корней двигаться по мнимой оси и штриховать ее слева (рис. 3.30а), то такому движению в плоскости  $\overline{\sigma}$  соответствует движение по границе — D-разбиения, которую также штрихуют слева по обходу при изменении  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$  (рис. 3.30б).

Если в плоскости  $\overline{\sigma}$  пересекать границу D-разбиения по направлению штриховки (стрелка 1), то в плоскости корней один из корней переходит из правой полуплоскости в левую. Если же в плоскости  $\overline{\sigma}$  пересекать границу

D-разбиения против штриховки (стрелка 2), то в плоскости корней, один из корней переходит из левой полуплоскости в правую.

Если штриховка двойная (например, в точке пересечения кривых), то мнимую ось пересекают два корня.

Для определения области D(m), и, в частности, области устойчивости D(0), достаточно знать распределение корней (т.е. число правых и левых корней) при каком-либо одном произвольном значении параметра  $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_0$ . Переходя в плоскости  $\overline{\sigma}$ , от этого параметра к любому другому, по числу пересечений границы D-разбиения, направлению и числу штриховок можно определить значение D(m) в любой другой точке.

Претендентом на область устойчивости является область, внутрь которой направлена штриховка и которая поэтому соответствует области с наибольшим числом левых корней. Чтобы установить, является ли эта область действительно областью устойчивости, необходимо задаться каким-либо значением  $\overline{\sigma}_0$ , лежащим в этой области. Подставив  $\overline{\sigma}_0$  в характеристическое уравнение, нужно, используя любой критерий устойчивости, установить, все ли корни характеристического уравнения будут при этом левыми. Если при этом не все корни будут левыми, то области устойчивости нет, т. е. изменением только параметра  $\sigma$  нельзя сделать систему устойчивой.

Так как изменяемый параметр является вещественным числом σ, то из полученной области устойчивости выделяют только отрезок устойчивости, т. е. отрезок вещественной оси, лежащий в области устойчивости, например отрезок АБ на рис. 3.30б.

**Пример 3.9.** Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы автоматического управления

$$D(s) = (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) + K = 0$$
(3.134)

где: К — коэффициент усиления разомкнутой системы;  $T_1, T_2, T_3$  — постоянные времени отдельных динамических звеньев.

Требуется построить границу D-разбиения в плоскости коэффициента усиления разомкнутой системы К.

Запишем характеристическое уравнение в виде

$$D(s) = S(s) + \overline{\sigma}N(s) = 0 \tag{3.135}$$

где 
$$S(s) = (1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)$$
,  $N(s) = 1$ ,  $\overline{\sigma} = K$ . (3.136)

Подставляя в характеристическое уравнение  $s=j\omega$ , получаем выражение для границы D-разбиения:

$$D(j\omega) = (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) + K = S(j\omega) + \overline{\sigma}N(j\omega) = 0 \quad (3.137)$$

откуда

$$\overline{\sigma} = K = -\frac{S(j\omega)}{N(j\omega)} = -(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) = X(\omega) + jY(\omega)$$
 (3.138)

где

$$X(\omega) = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 - 1 \tag{3.139}$$

$$Y(\omega) = \omega [T_1 T_2 T_3 \omega^2 - (T_1 + T_2 + T_3)]$$
 (3.140)

Задаваясь различными значениями частоты  $\omega > 0$ , определяем  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$  и строим на комплексной плоскости кривую D-разбиения, соответствующую положительным частотам (сплошная линия на рис. 3.31). Ветвь кривой D-разбиения, соответствующую отрицательным частотам  $\omega < 0$ , находим как зеркальное отображение относительной вещественной оси построенного участка для  $\omega > 0$  (пунктирная линия на рис. 3.31). Затем кривую D-разбиения штрихуем слева по обходу при изменении частоты  $\omega$  от —  $\infty$  до  $\infty$ .

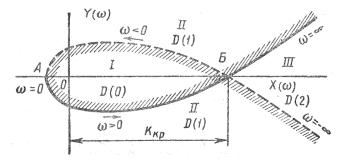


Рис. 3.31. Кривая D-разбиения

Кривая D-разбиения делит плоскость на три области: I, II и III. Претендентом на область устойчивости является область I, так как к ней направлена штриховка. Чтобы проверить, действительно ли эта область является областью устойчивости, задаемся значением  $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_0 = 0$ , лежащим в этой области, подставляем его в характеристическое уравнение и определяем корни получающегося при этом характеристического уравнения

$$D(s) = (1+T_1)(1+T_2)(1+T_3) = 0, (3.141)$$

Все корни  $s_1 = -1/T_1$ ,  $s_2 = -1/T_2$ ,  $s_3 = -1/T_3$  уравнения являются левыми; следовательно, область I является областью устойчивости D(0).

Так как коэффициент усиления K не является комплексной величиной, то нас будет интересовать только отрезок устойчивости АБ, совпадающий с действительной осью, находящейся в области устойчивости. Система будет устойчива, если значение K изменяется в пределах  $1 < K < K_{KP}$ . Отрицательным значениям K соответствует положительная обратная связь. Для нахождения  $K_{KP}$  следует определить сначала значение  $\omega$ , при котором  $Y(\omega) = 0$ . Если корень этого уравнения  $\omega = \omega_0$ , то  $K_{KP} = X(\omega_0)$ . Производя вычисления, получаем

$$\omega_0^2 = (T_1 + T_2 + T_3)/(T_1 T_2 T_3) \tag{3.142}$$

$$K_{KP} = X(\omega_0) = (1 + \tau_2 + \tau_3)(1 + 1/\tau_2 + 1/\tau_3) - 1$$
, (3.143)

где 
$$\tau_2 = T_2/T_1$$
,  $\tau_2 = T_3/T_1$ . (3.144)

На рис. 3.31 показаны области D(0), D(1) и D(2). Область D(3) в данном случае отсутствует. Это означает, что при положительных значениях  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  и любом значении K невозможно, чтобы все три корня характеристического уравнения одновременно были правыми.

### 3.13. Устойчивость систем с запаздыванием и систем с иррациональными звеньями

Системы автоматического управления могут содержать звенья, и которых зависимость между входной g(t) и выходной y(t) величинами имеет вид

$$y(t) = g(t - \tau) \tag{3.145}$$

где au — постоянная величина, называемая временем запаздывания. Такие звенья называют запаздывающими, так как они воспроизводят изменения входной величины без искажения, но с некоторым постоянным запаздыванием au .

Передаточная функция запаздывающего звена:

$$W(s) = e^{-s\tau} \tag{3.146}$$

Звенья с чистым запаздыванием часто встречаются в различных технологических процессах. Например, материал перемещается из одной точки в другую с помощью ленточных транспортеров; в системах регулирования толщины листа при прокатке; в системах магнитной записи и воспроизведения и т. д. Системы автоматического управления, содержащие хотя бы одно запаздывающее звено, называют системами с запаздыванием. Процессы в системах с запаздыванием описываются дифференциальноразностными уравнениями.

Во многих тепловых процессах, а также при передаче сигналов на расстояние по длинным электрическим, гидравлическим и другим линиям наблюдается запаздывание, распределенное по всей длине линии, которое в отличие от чистого запаздывания приводит к искажению передаваемых сигналов. Системы, содержащие звенья с распределенным запаздыванием, требуют для своего описания дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих случаях в результате решения указанных уравнений в частных производных с учетом граничных условий после некоторых упрощающих предположений для системы автоматического управления в

целом получают дифференциально-разностные уравнения такого же типа, как и для систем с чистым запаздыванием.

На практике широко применяют аппроксимацию передаточных функций сложных систем с распределением параметрами с помощью передаточных функций систем с сосредоточенными параметрами и эквивалентных постоянных времени чистого запаздывания. Иногда сложные системы высокого порядка с сосредоточенными параметрами, содержащие большое количество инерционных звеньев, также можно заменить для приближенного исследования более простой системой низкого порядка, но содержащей звенья с чистым запаздыванием. В дальнейшем будем рассматривать только системы с чистым запаздыванием.

Структурная схема одноконтурной системы автоматического управления, содержащей одно запаздывающее звено, может быть представлена либо так, как показано на рис. 3.32a, а, если запаздывающее звено находится в прямой цепи, либо так, как показано на рис. 3.32б, если запаздывающее звено находится в цепи обратной связи.

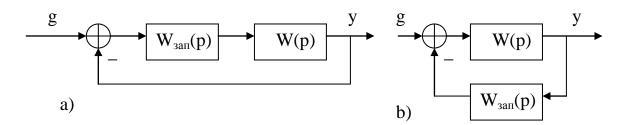


Рис.3.32. Структурная схема САУ с звеном запаздывания

Передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием равна

$$W_{\tau}(s) = W_{3an}(s)W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}e^{-s\tau}$$
 (3.147)

где W(s) = R(s) / Q(s) — передаточная функция разомкнутой системы без учета запаздывания, представляющая собой дробно-рациональную функцию оператора s.

Если в одноконтурной системе имеется несколько последовательно соединенных запаздывающих звеньев, то они могут быть заменены одним запаздывающим звеном с эквивалентной постоянной времени запаздывания. Эквивалентная постоянная времени равна сумме всех постоянных времен запаздывания.

Если запаздывающее звено находится в прямой цепи, то передаточная функция замкнутой системы

$$W_{gx}(p) = \frac{W_{\tau}(s)}{1 + W_{\tau}(s)} = \frac{R(s)e^{-s\tau}}{Q(s) + R(s)e^{-s\tau}} = \frac{R_{\tau}(s)}{D_{\tau}(s)}$$
(3.148)

Если же запаздывающее звено находится в цепи обратной связи, то передаточная функция замкнутой системы

$$W_{gx}(p) = \frac{W(s)}{1 + W_{\tau}(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)e^{-s\tau}} = \frac{R(s)}{D_{\tau}(s)}$$
(3.149)

Из (3.148) и (3.149) видно, что независимо от места включения запаздывающего звена характеристическое уравнение системы с запаздыванием имеет вид

$$D_{\tau}(s) = Q(s) + R(s)e^{-s\tau}$$
 (3.150)

Это характеристическое уравнение из-за наличия множителя  $e^{-s\tau}$  является не полиномом, а трансцендентной функцией оператора s и в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения имеет бесконечное множество корней. Так как

$$e^{-s\tau} = 1 - s\tau + \frac{s^2\tau^2}{2} - \frac{s^3\tau^3}{6} + \dots$$
 (3.151)

то (3.150) можно рассматривать как уравнение «бесконечной степени».

Для того чтобы линейная система с постоянным запаздыванием была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (3.150) были левыми. Нахождение корней уравнения (3.150) затруднительно, поэтому для исследования устойчивости систем с запаздыванием используют критерии устойчивости.

Следует иметь в виду, что алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица в их обычной форме для исследования систем с запаздыванием непригодны, причем для устойчивости линейных систем первого и второго запаздыванием, только положительности коэффициентов порядков характеристического уравнения уже становится недостаточно. Существуют алгебраические критерии устойчивости различные ДЛЯ систем cзапаздыванием, которые являются аналогами критериев Рауса и Гурвица, однако в инженерной практике они широкого применения не нашли из-за их относительной сложности.

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием можно применять основанные на принципе аргумента частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста либо метод D-разбиения.

Уравнение кривой (годографа) Михайлова системы с запаздыванием получают после подстановки  $s = j\omega$  в характеристическое уравнение (3.150):

$$D_{\tau}(j\omega, e^{j\omega\tau}) = Q(j\omega) + R(j\omega)e^{-j\omega\tau} = 0$$
 (3.152)

Наличие в (3.152) множителя  $e^{-j\omega\tau}$ делает очертания кривой Михайлова достаточно сложными, и формулировка этого критерия для систем с запаздыванием, становится не такой простой, как для обычных систем. Для исследования устойчивости систем с запаздыванием очень удобно применять критерий устойчивости Найквиста.

Заключение об устойчивости замкнутой системы с запаздыванием делается на основании исследования поведения амплитудно-фазовой характеристики  $W_{\tau}(j\omega)$  разомкнутой системы с запаздыванием относительно точки (—1, j0). Формулировка критерия устойчивости Найквиста для систем с запаздыванием в этом случае аналогична формулировке для обычных систем, имеющих дробно-рациональные передаточные функции.

Частотную передаточную функцию  $W_{\tau}(j\omega)$  разомкнутой системы с запаздыванием находят, подставляя  $s=j\omega$  в (3.147):

$$W_{\tau}(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\omega\tau} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}e^{-j\omega\tau}, \qquad (3.153)$$

где  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы без учета запаздывания;

$$A(\omega) = W(j\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
 —амплитудно-частотная характеристика;

 $\psi(\omega) = Arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$  - фазочастотная характеристика разомкнутой системы

без учета запаздывания;

$$\psi_{\tau}(\omega) = \psi(\omega) - \omega\tau \tag{3.154}$$

— фазочастотная характеристика разомкнутой системы с запаздыванием.

Из (3.153) и (3.154) видно, что наличие запаздывающего звена не меняет модуля  $A(\omega)$  амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$ , а вносит лишь дополнительный отрицательный фазовый сдвиг  $\omega \tau$ , пропорциональный частоте, причем коэффициентом пропорциональности является время запаздывания  $\tau$ .

Зная амплитудно-фазовую характеристику  $W(j\omega)$  разомкнутой системы без запаздывания, легко построить амплитудно-фазовую характеристику  $W_{\tau}(j\omega)$  разомкнутой системы с запаздыванием. Для этого каждый модуль  $A(\omega_i)$  вектора амплитудно-фазовой характеристики  $W(j\omega)$  нужно повернуть на угол  $\omega_i \tau$  по часовой стрелке. С ростом частоты  $\omega$  угол  $\omega \tau$  будет быстро расти, а модуль  $A(\omega)$  обычно уменьшается, поэтому амплитудно-фазовая характеристика  $W_{\tau}(j\omega)$  разомкнутой системы с запаздыванием имеет вид спирали, закручивающейся вокруг начала координат (рис. 3.33).

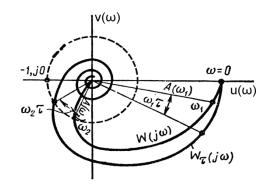


Рис. 3.33. АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием

«Закручивание» амплитудно-фазовой характеристики из-за наличия дополнительного фазового сдвига  $\omega \tau$ , вообще говоря, ухудшает условие устойчивости, так как вся амплитудно-фазовая характеристика приближается к критической точке (—1, j0). Однако иногда при сложной форме амплитудно-фазовой характеристики  $W(j\omega)$  введение постоянного запаздывания может улучшить условия устойчивости.

Изменяя время запаздывания  $\tau$  в широких пределах, можно найти такое его значение, при котором замкнутая система будет находиться на границе устойчивости. В этом случае характеристика  $W_{\tau}(j\omega)$  будет проходить через точку (—1, j0). Время запаздывания  $\tau_{\kappa p}$  и соответствующее ему значение частоты  $\omega_{\kappa p}$ , при которых  $W_{\tau}(j\omega)$  проходит через точку (—1,j0), называют критическими.

Для критического случая справедливо следующее условие:

$$W_{\tau}(j\omega_{\kappa p}) = W(j\omega_{\kappa p})e^{-j\omega_{\kappa p}\tau_{\kappa p}} = A(\omega_{\kappa p})e^{j[\psi(\omega_{\kappa p})-\omega_{\kappa p}\tau_{\kappa p}]} = -1 \quad (3.155)$$

Условие (3.155) можно записать раздельно для амплитуд и фаз вектора  $W_{\tau}(j\omega_{\kappa p}) = W(j\omega_{\kappa p}) :$ 

$$A(\omega_{\kappa p}) = \left| W_{\tau}(j\omega_{\kappa p}) \right| = 1; \qquad (3.156)$$

$$\psi_{\tau}(\omega_{\kappa p}) = \psi(\omega_{\kappa p}) - \omega_{\kappa p} \tau_{\kappa p}, \qquad (3.157)$$

где  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ 

Из (3.156) можно найти сначала  $\omega_{\text{кр}}$ , а затем из (3.157) найти  $\tau_{\text{кр}}$ , т. е.

$$\tau_{\kappa p} = \frac{\psi(\omega_{\kappa p}) + \pi(2i+1)}{\omega_{\kappa p}} = \frac{\pi + \psi(\omega_{\kappa p})}{\omega_{\kappa p}} + \frac{2\pi}{\omega_{\kappa p}}i$$
(3.158)

Для систем автоматического управления с запаздыванием основное значение имеет минимальное критическое время запаздывания (при i=0), которое является в то же время и граничным

$$\tau_{\kappa p} = \frac{\pi + \psi(\omega_{\kappa p})}{\omega_{\kappa p}} = \frac{\pi + arctg \frac{V(\omega_{\kappa p})}{U(\omega_{\kappa p})}}{\omega_{\kappa p}} = \frac{\varphi(\omega_{\kappa p})}{\omega_{\kappa p}}, \qquad (3.159)$$

где 
$$\varphi(\omega_{\kappa p}) = \pi + \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{V}(\omega_{\kappa p})}{\omega_{\kappa p}}$$
 - запас устойчивости по фазе.

При сложном выражении для частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  разомкнутой системы определение критического времени запаздывания просто выполнить графически. Условие  $A(\omega_{\kappa p}) = |W(j\omega_{\kappa p})| = 1$  определяется пересечением годографа  $W(j\omega)$  с окружностью единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.34). Точка пересечения определяет одновременно  $\omega_{\kappa p}$  и угол  $\varphi(\omega_{\kappa p})$ , который, будучи разделен на  $\omega_{\kappa p}$ , даст значение критического времени запаздывания.

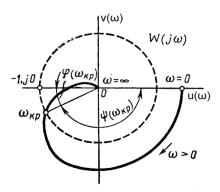


Рис. 3.34. Определение критического времени запаздывания.

Если имеется несколько точек пересечения годографа  $W(j\omega)$  с окружностью единичного радиуса, например при  $\omega_{1\kappa p}$ ,  $\omega_{2\kappa p}$ ,  $\omega_{3\kappa p}$  (рис. 3.35), то система будет иметь несколько критических граничных времен запаздывания:

$$au_{1\kappa p} = arphi(\omega_{1\kappa p})/\omega_{1\kappa p}\;;\;\; au_{2\kappa p} = arphi(\omega_{2\kappa p})/\omega_{2\kappa p}\;;\;\;\; au_{3\kappa p} = arphi(\omega_{3\kappa p})/\omega_{3\kappa p}\;,\;\;\; (3.160)$$
 причем минимальное время запаздывания равно  $au_{\kappa p min} = au_{1\kappa p}$ . Система будет устойчива при  $au\langle au_{1\kappa p} \rangle$ , а также при  $au_{2\kappa p}\langle au\langle au_{3\kappa p} \rangle$ . Система будет неустойчива при  $au_{1\kappa p}\langle au\langle au\langle au_{2\kappa p} \rangle$ , а также при  $au\langle au\langle au\langle au_{3\kappa p} \rangle$ . Наблюдаемое в этом случае чередование участков устойчивости и неустойчивости системы, при

непрерывном изменении au , а также других параметров системы), является характерной особенностью многих систем с постоянным запаздыванием.

Обычно для повышения быстродействия и точности системы время запаздывания au стремятся уменьшить, поэтому критерий устойчивости формулируется лишь для минимального времени запаздывания следующим образом.

Система автоматического управления будет устойчива, если время запаздывания au меньше минимального критического времени запаздывания:  $au \langle au_{\kappa p \min} .$ 

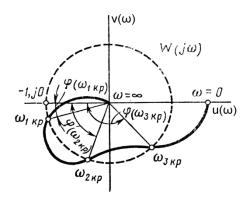


Рис. 3.35. Определение нескольких критических времен запаздывания

Критическое время запаздывания легко определяют и в том случае, когда для исследования системы с запаздыванием применяют логарифмические амплитудно-частотные (ЛАХ) и фазочастотные (ЛФХ) характеристики. В этом случае окружность единичного радиуса представляют осью абсцисс. ЛАХ системы с запаздыванием совпадает с ЛАХ исходной системы без запаздывания. Дополнительный фазовый сдвиг, который надо учесть при построении ЛФХ системы с запаздыванием, определяют из (3.157). Точки пересечения ЛАХ с осью абсцисс определяют критические частоты  $\omega_{i\kappa}$ , а запасы по фазе (с учетом кратности), отнесенные к соответствующим критическим частотам, определяют критические времена запаздывания

Звенья с распределенными параметрами, описываемые уравнениями в частных производных, имеют передаточные функции вида:

$$W(s) = K / \sqrt{s}$$

$$W(s) = K / (1 + \sqrt{sT}),$$

$$W(s) = e^{-\sqrt{s\tau}}$$
(3.161)

где: К — коэффициент усиления звена.

Первые два выражения из (3.160) отличаются от передаточных функций интегрирующего и инерционного звеньев только квадратным корнем. По аналогии с интегрирующими и инерционными звеньями такие звенья называют полуинтегрирующими и полуинерционными. Звенья, имеющие передаточные функции вида (3.161), называют иррациональными звеньями. Последнее выражение из (3.161) не только иррационально, но и трансцендентно. С иррациональными звеньями приходится встречаться, рассматривая различные диффузионные и тепловые объекты, линии связи с потерями, с распределенными сопротивлениями и емкостями и т. п.

Устойчивость замкнутых систем автоматического управления, содержащих иррациональные звенья, может быть исследована с помощью критерия устойчивости Найквиста. Формулировка критерия устойчивости Найквиста в этом случае аналогична формулировке для обычных систем автоматического управления, содержащих звенья с дробно-рациональными передаточными функциями.

**Пример 3.10**. Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием

$$W_{\tau}(s) = \frac{Ke^{-s\tau}}{1 + sT} \tag{3.162}$$

Необходимо определить критическое время запаздывания  $au_{\mathit{KP}}$ .

Частотная передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием

$$W_{\tau}(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega\tau}}{1 + j\omega T} \tag{3.163}$$

Следовательно, условие (3.156) в данном случае

$$|W_{\tau}(j\omega)| = |[K/(1+j\omega_{KP}T)]| = K\sqrt{1+\omega_{KP}^2T^2} = 1$$
 (3.164)

Из последнего выражения находим критическую частоту:

$$\omega_{KP} = \sqrt{K^2 - 1}/T, \quad K > 1$$
 (3.165)

Фазовый сдвиг на критической частоте

$$\psi(\omega_{KP}) = -Arctg\omega_{KP}T = -Arctg\sqrt{K^2 - 1}$$
 (3.166)

По (3.159) находим критическое время запаздывания:

$$\tau_{KP} = \frac{\pi - Arctg\sqrt{K^2 - 1}}{\omega_{KP}} = T \frac{\pi - Arctg\sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}}$$
(3.167)

**Пример 3.11**. Исследовать на устойчивость систему автоматического регулирования (рис. 3.36) с помощью критерия Найквиста.

Исходными данными являются передаточные функции объекта и регулятора:

$$W_P(s) = 7 + \frac{1}{s}; \qquad W_{OE}(s) = \frac{5}{3s+1}.$$
 (3.168)

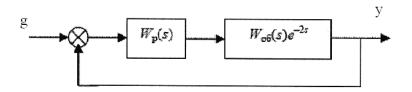


Рис. 3.36. Структурная схема САР с запаздыванием.

Прежде всего, необходимо ответить на вопрос об устойчивости разомкнутой системы.

Исследуем на устойчивость разомкнутую систему известными методами. Для записи передаточной функции разомкнутой системы разорвем обратную связь в замкнутой системе. Разомкнутая система представляет собой последовательно соединенные объект и регулятор. Ее передаточная функция запишется в виде

$$W_{PC} = W_P(s)W_{OB}e^{-2s} = \frac{7s+1}{s}\frac{5}{3s+1}e^{-2s}$$
(3.169)

Характеристическое уравнение разомкнутой системы - это знаменатель передаточной функции, приравненный к нулю:

$$s(3s+1) = 0 (3.170)$$

Корни характеристического уравнения  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1/3$ . В соответствии с необходимым и достаточным условием устойчивости разомкнутая система будет нейтральной. Критерий Найквиста в этом случае формулируется так: если разомкнутая система нейтральна, то для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы  $A\Phi X$  разомкнутой системы с добавлением в бесконечность не охватывала точку (-1, j0).

Для ответа на вопрос об устойчивости замкнутой системы по критерию Найквиста проще всего построить  $A\Phi X$  разомкнутой системы и посмотреть охватывает она точку (-1, j0) или нет, поэтому запишем выражение для  $A\Phi X$  разомкнутой системы:

$$W_{PC}(j\omega) = \frac{7j\omega + 1}{j\omega} \frac{5}{3j\omega + 1} e^{-2j\omega} = \frac{\sqrt{25 + (35\omega)^2} e^{arctg\frac{35\omega}{5}} e^{-2j\omega}}{\sqrt{1 + 9\omega^2} e^{arctg3\omega} \omega e^{\pi/2}}$$
(3.171)

откуда АЧХ: 
$$A_{PC}(\omega) = \frac{\sqrt{25 + (35\omega)^2}}{\sqrt{1 + 9\omega^2}}$$
 (3.172)

и ФЧХ:

$$\varphi_{PC} = -2\omega + arctg7\omega - arctg3\omega - \frac{\pi}{2}$$
 (3.173)

Задаваясь значениями частот, построим годограф AФX разомкнутой системы (рис. 3.37). Как видно из рисунка AФX разомкнутой системы охватывает точку (-1, j0), что говорит о том, что замкнутая система неустойчива.

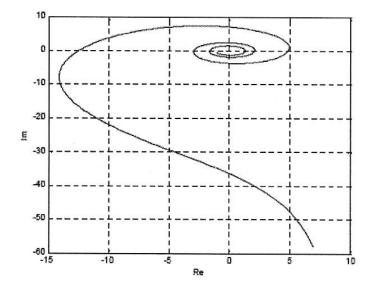


Рис. 3.37. Годограф АФХ разомкнутой системы

### Глава 4. Методы оценки качества регулирования линейных систем

#### 4.1. Общие положения

Качество работы любой системы регулирования, в конечном счете, определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемой величины:  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ . В системах стабилизации при g(t) = 0 ошибка  $\varepsilon(t) = -y(t)$ .

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы регулируемого объекта позволяет наиболее полно судить о свойствах системы регулирования. Однако в действительности, вследствие случайности задающего и возмущающего воздействий, такой подход не может быть реализован. Поэтому приходится оценивать качество системы регулирования по некоторым ее свойствам, проявляющимся при различных типовых воздействиях. Для определения качественных показателей системы регулирования в этом случае используются критерии качества.

В настоящее время разработано большое число различных критериев качества систем регулирования. Все их можно разбить на четыре группы.

**К первой группе** относятся критерии, в той или иной степени, использующие для оценки качества величину ошибки в различных типовых режимах. Эту группу назовем критериями точности систем регулирования.

**Ко второй группе** относятся критерии, определяющие величину запаса устойчивости, т. е. критерии, устанавливающие, насколько далеко от границы устойчивости находится система регулирования.

Почти всегда опасной для системы является колебательная граница устойчивости. Это определяется тем, что стремление повысить общий коэффициент усиления в системе, как правило, приводит к приближению системы именно к колебательной границе устойчивости и затем — к возникновению незатухающих автоколебаний.

**Третья группа** критериев качества определяет быстродействие систем регулирования. Под быстродействием понимается быстрота реагирования системы регулирования на появление задающих и возмущающих воздействий. Наиболее просто быстродействие может оцениваться по времени затухания переходного процесса системы.

**К четвертой группе** критериев качества относятся комплексные критерии, дающие оценку некоторых обобщенных свойств, которые могут учитывать точность, запас устойчивости и быстродействие. Обычно это делается при помощи рассмотрения некоторых интегральных свойств кривой переходного процесса.

При рассмотрении понятий запаса устойчивости и быстродействия можно исходить из двух существующих в настоящее время точек зрения.

**Во-первых**, можно основываться на характере протекания процессов, во времени и использовать для формирования критериев качества переходную или весовую функцию, расположение полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы и т. д.

**Во-вторых**, можно основываться на некоторых частотных свойствах рассматриваемой системы, характеризующих ее поведение в установившемся режиме при действии на входе гармонического сигнала. К ним относятся полоса пропускания, относительная высота резонансного пика и др.

Оба эти подхода имеют в настоящее время большое распространение и используются параллельно. И тот и другой подход требует изучения условий эксплуатации построенных систем автоматического регулирования, так как только на основании такого изучения можно правильно сформулировать количественные оценки, которые могут быть использованы в практике проектирования и расчета новых систем.

Связь между временными и частотными свойствами системы автоматического регулирования имеет сложный характер и может быть определена в общем виде только в простейших случаях, например для систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка.

Однако отсутствие зависимостей, связывающих в общей форме свойства системы во временном и частотном представлениях, не может служить препятствием для развития и независимого использования критериев качества того или иного направления.

Использование того или иного подхода при формулировании критериев качества определяется в настоящее время удобствами его применения в системах конкретного вида, а также, в известной мере, сложившимися в данной области традициями.

# 4.2. Оценка качества регулирования в установившемся режиме (коэффициенты ошибок)

Будем предполагать, что система автоматического регулирования (рис. 4.1) описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При изменении воздействия g(t) на входе системы (рис. 4.1) выходную величину y(t) можно записать так:

$$y(t) = y_{CB}(t) + y_{B}(t)$$
 (4.1)

где  $y_{CB}(t)$  — вынужденная составляющая переходного процесса, обусловленная законом изменения g(t).

 $\underbrace{g(t)}_{W(s)}\underbrace{\varepsilon(t)}_{W(s)}\underbrace{y(t)}_{S}$ 

Рис. 4.1. Система автоматического регулирования.

Если последнее не имеет кратных корней, то

$$y_{ce}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t},$$
 (4.2)

где  $C_i$  — постоянная интегрирования, значение которой определяют параметры системы и начальные условия;  $s_i$  — корни характеристического уравнения

замкнутой системы D(s) = 0;

Из (4.1) видно, что качество переходного процесса можно оценить по его составляющим  $y_{CB}(t)$  и  $y_{B}(t)$ .

Рассмотрим показатели качества, характеризующие вынужденную составляющую ошибки  $\mathcal{E}_B(t)$  системы. Если на входе системы (рис. 4.1) действует сигнал g(t), то установившаяся ошибка регулирования системы

$$\varepsilon_{R}(t) = g(t) - y_{R}(t) \tag{4.3}$$

где  $y_B(t)$  — вынужденная составляющая регулируемой величины (4.1).

Если g(t) дифференцируема во всем интервале  $0 \le t \le \infty$ , то ошибка системы  $\varepsilon_{\rm R}(t)$  может быть представлена в виде ряда:

$$\varepsilon_{g}(t) = C_{0}g(t) + C_{1}dg(t)/dt + (1/2!)C_{2}d^{2}g(t)/dt^{2} + \dots + (1/m!)C_{m}d^{m}g(t)/d^{m}, \qquad (4.4)$$

где коэффициенты  $C_0, C_1, C_2, \dots$  принято называть коэффициентами ошибок. Формула (4.4) получена следующим образом.

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки для системы на рис. 4.1.

$$W_{g\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{E_{\varepsilon}(s)}{G(s)}$$

$$\tag{4.5}$$

Из (4.5) можно найти выражение для изображения ошибки:

$$E_{B}(s) = \frac{G(s)}{1 + W(s)}$$
 (4.6)

Разложим передаточную функцию по ошибке  $W_{g\varepsilon}(s)$  (4.5) в ряд по возрастающим степеням s в окрестности точки  $\varepsilon=0$ , что соответствует большим значениям времени (t  $\to \infty$ ), т. е. значению установившейся ошибки при заданном управляющем воздействии.

В соответствии с (4.6) можно записать

$$E_{B}(s) = [C_{0} + C_{1}s + (1/2!)C_{2}s^{2} + (1/3!)C_{3}s^{3} + \dots + (1/m!)C_{m}s^{m}]G(s)$$
(4.7)

Если передаточная функция  $W_{g\varepsilon}(s)$  является дробно-рациональной функцией

$$W_{g\varepsilon}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1s} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$
(4.8)

то разложение в ряд  $W_{g\varepsilon}(s)$  можно осуществить делением числителя на знаменатель, располагая члены полинома в порядке возрастания степеней. Переходя в (4.7) от изображений к оригиналам, можно получить для  $\varepsilon_{\rm B}(t)$  выражение (4.4).

Коэффициенты ошибок  $C_0, C_1, C_2, ...$  определяют по формулам разложения функции  $W_{g\varepsilon}(s)$  в ряд Тейлора:

$$C_{0} = [W_{g\varepsilon}(s)]_{s=0}; \qquad C_{1} = \left[\frac{\partial W_{g\varepsilon}(s)}{\partial s}\right]_{s=0}; \qquad C_{2} = \left[\frac{\partial^{2}W_{g\varepsilon}(s)}{\partial s^{2}}\right]_{s=0}; \qquad C_{m} = \left[\frac{\partial^{m}W_{g\varepsilon}(s)}{\partial s^{m}}\right]_{s=0}. \qquad (4.9)$$

Если входное воздействие g(t) = 1(t), то все производные равны нулю:

$$dg(t) = d^2g(t)/dt^2 = \dots = d^mg(t)/dt^m = 0$$
 (4.10)

Тогда:  $C_0 = W_{g\varepsilon}(0)$ , а произведения будут равны нулю:

$$C_1[dg(t)/dt] = (C_2/2!)[d^2g(t)/dt^2] = \dots = (C_m/m!)[d^mg(t)/dt^m] = 0$$
(4.11)

 $C_0 = W_{g\varepsilon}(0)$  — значение установившейся ошибки в замкнутой системе.

Если входное воздействие g(t) = t, то dg(t)/dt = 1, а остальные производные

$$d^{2}g(t)/dt^{2} = \dots = d^{m}g(t)/dt^{m} = 0.$$
 (4.12)

Коэффициенты:  $C_0 = W_{g\varepsilon}(0)$ ,  $C_1 = \left[\frac{\partial W_{g\varepsilon}(s)}{\partial s}\right]_{s=0}$ . Произведения

$$C_2[d^2g(t)/dt^2] = \dots = C_m[d^mg(t)/dt^m] = 0$$
 (4.13)

ит. д.

Коэффициент  $C_0$  называют коэффициентом статической или позиционной ошибки; коэффициент  $C_1$  — коэффициентом скоростной ошибки,

 $C_2$  — коэффициентом ошибки от ускорения.

В статических системах коэффициент  $C_0$  отличен от нуля. В системах с астатизмом первого порядка

$$C_0 = 0, C_1 \neq 0. (4.14)$$

В системах с астатизмом второго порядка

$$C_0 = C_1 = 0, C_2 \neq 0. (4.15)$$

Увеличение числа интегрирующих звеньев приводит к повышению порядка астатизма системы, т. е. к нулевым значениям нескольких коэффициентов ошибок, но при этом усложняется обеспечение устойчивости системы.

Если на систему помимо задающего воздействия g(t) действует и возмущение f(t) (рис. 4.2), то астатизм системы относительно g(t) и f(t) зависит от места включения интегрирующего звена.

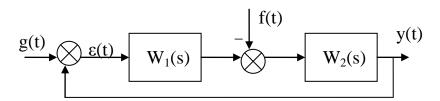


Рис. 4.2. Система автоматического регулирования с возмущением.

Пусть воздействия на САУ являются постоянными величинами и равны  $g(t) = g_0; f(t) = f_0$ . Рассмотрим несколько случаев.

1. В системе отсутствуют интегрирующие звенья. Элементы 1 и 2 системы (рис.4.2) являются инерционными звеньями и их передаточные функции соответственно равны

$$W_1(s) = \frac{k_1}{1 + sT_1} \tag{4.16}$$

$$W_2(s) = \frac{k_2}{1 + sT_2} \tag{4.17}$$

Тогда, на основании метода суперпозиции, установившаяся ошибка САУ

$$\varepsilon_B(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t),$$
 (4.18)

где  $\mathcal{E}_{g}(t)$  — ошибка отработки системой задающего воздействия:

$$\varepsilon_{g}(t) = \left[\frac{1}{1 + W_{1}W_{2}}\right]_{s=0} * g_{0} = \frac{1}{1 + k_{1}k_{2}} g_{0} \neq 0, \tag{4.19}$$

ошибка, вызванная действием помехи:

$$\varepsilon_f(t) = \left[ \frac{W_2}{1 + W_1 W_2} \right]_{s=0} * f_0 = \frac{k_2}{1 + k_1 k_2} f_0 \neq 0$$
 (4.20)

В данном случае САУ является статической относительно обоих воздействий, так как  $\mathcal{E}_g(t) \neq 0$  и  $\mathcal{E}_f(t) \neq 0$  .

**2.** Допустим, что в элемент 2 рассматриваемой системы (рис. 4.2) включено интегрирующее звено, а элемент 1 является инерционным звеном, как и в случае 1. При этом передаточная функция элемента 2

$$W_2(s) = \frac{k_2}{s(1+sT_2)} \tag{4.21}$$

Тогда составляющие  $\varepsilon_{g}(t)$  и  $\varepsilon_{f}(t)$  ошибки системы (рис. 4.2)

$$\varepsilon_{g}(t) = \left[\frac{1}{1 + W_{1}(s)W_{2}(s)}\right]_{s=0} * g_{0} = \left[\frac{s(1 + sT_{1})(1 + sT_{2})}{k_{1}k_{2} + s(1 + sT_{1})(1 + sT_{2})}\right]_{s=0} * g_{0} = 0$$
 (4.22)

$$\varepsilon_f(t) = \left[\frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}\right]_{s=0} * f_0 = \left[\frac{(1 + sT_1)}{k_1k_2 + s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}\right]_{s=0} * f_0 = \frac{f_0}{k_1k_2} \neq 0$$
 (4.23)

Следовательно, САУ является астатической относительно задающего воздействия g(t) и статической относительно возмущения f(t).

**3.** Пусть интегрирующее звено включено в элемент 1, передаточная функция его при этом равна

$$W_1(s) = \frac{k_1}{s(1+sT_1)} \tag{4.24}$$

Второе звено является инерционным звеном, а передаточная функция его та же, что и в случае 1. Рассчитаем составляющие ошибки  $\varepsilon_g(t)$ ,  $\varepsilon_f(t)$ :

$$\varepsilon_{g}(t) = \left[\frac{1}{1 + W_{1}(s)W_{2}(s)}\right]_{s=0} *g_{0} = \left[\frac{s(1 + sT_{1})(1 + sT_{2})}{k_{1}k_{2} + s(1 + sT_{1})(1 + sT_{2})}\right]_{s=0} *g_{0} = 0$$
 (4.25)

$$\varepsilon_f(t) = \left[ \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \right]_{s=0} * f_0 = \left[ \frac{(1 + sT_1)}{k_1k_2 + s(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \right]_{s=0} * f_0 = 0$$
 (4.26)

Поскольку и  $\varepsilon_g(t)$  и  $\varepsilon_f(t) = 0$ , система является астатической и относительно воздействия g(t), и относительно возмущения f(t).

Метод коэффициентов ошибок применяется при сравнительно медленно меняющихся воздействиях.

# 4.3. Оценка качества переходного процесса при воздействии ступенчатой функции

Переходный процесс в системе зависит не только от свойств САУ, но и от характера внешнего воздействия, которое в общем случае может быть сложной функцией времени. Поведение системы рассматривают при следующих типовых воздействиях: единичной ступенчатой функции 1(t), импульсной  $\delta(t)$  и гармонической функций. Прямые оценки качества получают по кривой переходной характеристики h(t), т. е. при воздействии единичной ступенчатой функции и нулевых начальных условиях.

Эту характеристику можно построить для выходной величины или для отклонения  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  (рис. 4.3 a, б).

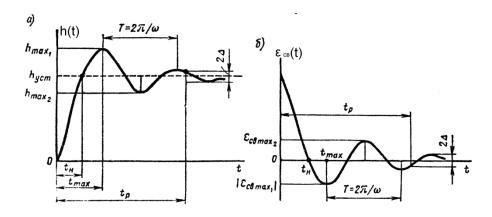


Рис. 4.3. Переходная характеристика h(t) (a) и переходная характеристика для отклонения  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  (б)

К прямым оценкам качества относят:

**1.** Время регулирования  $t_p$  — минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью

$$\left|\varepsilon_{CB}(t)\right| \le \Delta \qquad t \ge t_p \tag{4.27}$$

или

$$\left| \mathbf{h}(\mathbf{t}) - \mathbf{h}_{\text{ycr}} \right| \le \Delta, \tag{4.28}$$

где  $\Delta$  — постоянная величина, значение которой задается в процентах от установившегося значения выходной величины  $h_{ver}$ .

**2.** Перерегулирование σ — максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\text{max 1}} - h_{\text{ycm}}}{h_{\text{ycm}}} 100, \tag{4.29}$$

где  $h_{\max 1}$ — значение первого максимума, или

$$\sigma = \frac{|\varepsilon_{ce}(t)|_{\text{max}1}}{h_{vern}} 100 = \frac{|\varepsilon_{ce}(t)|_{\text{max}1}}{|\varepsilon_{ce}(0)|} 100. \tag{4.30}$$

Допустимое значение перерегулирования в каждом конкретном случае будет подсказано опытом эксплуатации системы, обычно  $\sigma = 10\%$  - 30%, но в некоторых случаях допускается и до 70%. Иногда перерегулирование недопустимо совсем.

- **3.** Частоту колебаний  $\omega = 2\pi/T$ , где Т период колебаний для колебательных переходных характеристик.
- **4.** Число колебаний n, которое имеет переходная характеристика h(t) или  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  за время регулирования  $t_{\it p}$  .

При проектировании систем чаще всего допускают n=1 - 2, а иногда и до 3 — 4. В некоторых случаях колебания в системе недопустимы.

- 5. Время достижения первого максимума  $t_{\rm max}$  .
- **6.** Время нарастания переходного процесса  $t_H$  абсцисса первой точки пересечения кривой переходной характеристики h(t) с уровнем установившегося значения  $h_{_{\rm VCT}}$  или кривой отклонения  $\varepsilon_{CB}(t)$  с осью абсцисс.
- **7.** Декремент затухания  $\chi$ , равный отношению модулей двух смежных перерегулирований:

$$\chi = \frac{|h_{\text{max}1} - h_{ycm}|}{|h_{\text{max}2} - h_{ycm}|} \tag{4.31}$$

Перечисленные показатели качества могут быть дополнены другими, но это обусловлено спецификой конкретной системы.

Определение приведенных выше прямых оценок качества переходного процесса проиллюстрировано на рис. 4.3а, б.

Переходные процессы, возникающие в системах при скачкообразных воздействиях, принято делить на три группы: монотонные, апериодические и колебательные. У монотонных процессов первая производная выходной величины y'(t) не меняет знак (кривая а на рис. 4.4), у апериодических знак производной y'(t) меняется не более одного раза (кривая б на рис. 4.4), а у колебательных — первая производная y'(t) меняет свой знак периодически (теоретически бесконечное число раз) (кривая в на рис. 4.4).

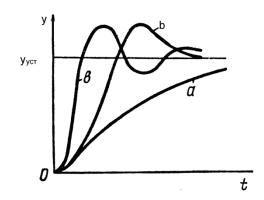


Рис.4.4. Типы переходных процессов.

При применении компьютеров трудности, связанные с расчетом переходных процессов и выбором возможных вариаций параметров системы, существенно уменьшаются, поэтому роль прямых оценок качества при проектировании САУ возрастает.

#### 4.4. Корневые методы оценки качества регулирования

Известно, что характер переходного процесса в системе определяют по ее реакции на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика h(t) системы может быть вычислена с помощью обратного преобразования Лапласа (по формулам разложения Хэвисайда):

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} W_{gy}(s) \right] = L^{-1} \frac{P(s)}{sD(s)}$$
 (4.32)

Если D(s) не имеет кратных корней, то

$$h(t) = \frac{P(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t}$$
(4.33)

где  $S_i$  — корни характеристического полинома замкнутой системы D(s)=0;  $D'(s_i)=dD(s)/ds$  — первая производная характеристического полинома  $D(s) \text{ по s при } s=s_i.$ 

Из (4.32) видно, что на характер переходного процесса влияют и числитель и знаменатель передаточной функции замкнутой системы  $W_{gy}(s)$ . Если числитель  $W_{gy}(s)$  не имеет нулей, т. е. представляет собой постоянную величину, то характер переходных процессов можно оценить по ее полюсам, т. е. корням характеристического уравнения замкнутой САУ D(s) = 0.

Для приближенной оценки качества переходного процесса в системе нужно на плоскости корней s выделить область, в которой располагаются корни ее характеристического уравнения. Чаще всего эту область представляют трапецией (рис. 4.5).

Корни характеристического уравнения располагаются внутри этой трапеции ABCD, на ее сторонах и основаниях хотя бы по одному корню, а вне неё — ни

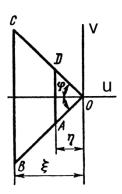


Рис. 4.5. Область, расположения корней характеристического уравнения

одного. После выделения этой области на плоскости корней вычисляют параметры:

- ---степень устойчивости η,
- --- колебательность µ,
- ---значение  $\xi$  вещественной части максимально удаленного корня от мнимой оси (V).

Степенью устойчивости η называют расстояние от мнимой оси до ближайшего корня или ближайшей пары сопряженных комплексных корней. Степень устойчивости η определяет ближайшее к мнимой оси основание трапеции AD (рис. 4.5).

Пусть общее решение дифференциального уравнения системы

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} , \qquad (4.34)$$

где  $S_i$  — корни характеристического уравнения D(s)=0.

Составляющая этого решения, определяемая степенью устойчивости, запишется в виде

$$y_{\eta}(t) = C_{\eta}e^{-\eta t} \tag{4.35}$$

для случая вещественных корней и

$$y_{\eta}(t) = C_{\eta} e^{-\eta t} Sin\beta t \tag{4.36}$$

для случая, когда среди корней есть пара комплексно-сопряженных.

В большинстве случаев переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет составляющая переходного процесса, определяемая степенью устойчивости, т. е. порядок величины времени затухания процесса можно грубо оценить по наиболее медленно затухающей составляющей  $y_{\eta}(t)$  [(4.35), (4.36)]. В случае, когда ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, из (4.35) можно получить следующую зависимость:

$$t_{\eta} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \tag{4.37}$$

Если принять, например,  $\Delta = 0.05$ , то время переходного процесса

$$t_{\eta} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx 3/\eta \tag{4.38}$$

Можно поставить две задачи:

- 1.По заданным параметрам системы коэффициентам D(s) определить степень устойчивости системы (задача анализа степени устойчивости).
- 2.По заданной степени устойчивости определить значение варьируемых параметров системы (задача синтеза САУ по заданной степени устойчивости).

Воспользуемся следующим методом. Предлагается сместить мнимую ось влево на величину  $\eta$ , тогда один корень окажется на мнимой оси, а система — на границе устойчивости. Это соответствует обращению в нуль старшего определителя Гурвица:  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$ . Это условие дает уравнение, по которому, задаваясь коэффициентами, можно определить  $\eta$  или решить обратную задачу.

Пусть характеристическое уравнение системы

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$
(4.39)

Введем новую переменную  $z = s + \eta$ . Подставив значение  $s = z - \eta$  в уравнение D(s) = 0, получим новое смещенное уравнение:

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0 , (4.40)$$

где 
$$A_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^{n-i} D}{\partial s^{n-i}} \right]_{s=-\eta}$$
 (4.41)

Если в смещенном уравнении окажется  $A_n = 0$ , то ближайшим к мнимой оси окажется нулевой корень, а если  $A_n \neq 0$ , то пара сопряженных комплексных корней.

Условие границы устойчивости для системы, описанной уравнением (4.40), по критерию Гурвица  $A_{n-1}=0$  при соблюдении всех остальных условий устойчивости Гурвица.

Колебательностью системы µ называют тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и лучом из начала координат к корню, у которого отношение мнимой части к действительной максимально (рис. 4.5):

$$\mu = tg\varphi = (\beta/\alpha)_{\text{max}}, \qquad (4.42)$$

где  $\beta$  — значение мнимой части корней D(s);  $\alpha$  — действительная часть. При известных параметрах системы ОНЖОМ определять значение колебательности µ, (задача анализа колебательности) или решать обратную задачу — задачу синтеза САУ по заданной колебательности. Для этого в системы вводится замена  $s = jze^{-j\varphi_M}$ , характеристическое уравнение равноценная повороту мнимой оси на угол  $(\pi/2 - \varphi_M)$ , при этом пара сопряженных комплексных корней окажется на мнимой оси, а фиктивная система на границе устойчивости. Колебательность ц, является оценкой переходного процесса сверху. При увеличении и возрастает число колебаний и за время регулирования и возрастает перерегулирование. Реальный переходный процесс может иметь значительно лучшее качество.

Колебательность связана с другим корневым показателем запаса устойчивости — затуханием. Комплексные сопряженные корни дают в выражении для переходного процесса член вида

$$y(t) = Ce^{-\alpha t} Sin(\beta t + \psi)$$
 (4.43)

Найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за один период. При некотором времени  $t=t_1$ амплитуда равна

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}. (4.44)$$

Через один период  $T = 2\pi/\beta$ 

$$C_2 = Ce^{-\alpha(t_1 + \frac{2\pi}{\beta})} = C_1 e^{-2\pi \frac{\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}} . \tag{4.45}$$

Затуханием за период называют величину

$$\zeta = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1} \ . \tag{4.46}$$

Эта величина обычно выражается в процентах. Подставляя значение амплитуды  $C_2$ , получаем

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} \tag{4.47}$$

ИЛИ

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\frac{1}{1-\zeta}} \tag{4.48}$$

Обычно в САУ допускается затухание за один период не менее чем 90-98%. При  $\zeta=98\%$  колебательность составит:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1,57. \tag{4.49}$$

Соответственно при  $\zeta = 90\%$  получаем  $\mu \approx 2,72$ .

Запишем смещенное характеристическое уравнение:

$$B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_{n-1} z + B_n = 0, (4.50)$$

где 
$$B_i = j^{n-1} e^{-j(n-i)\phi_M}$$
 (4.51)

В уравнении (4.50) часть коэффициентов — комплексные числа.

Так как фиктивная система находится на границе устойчивости, то уравнение (4.50) имеет пару сопряженных мнимых корней

$$s_i = \pm j\omega_i. \tag{4.52}$$

Если в (4.50) подставить  $j\omega$  вместо z и разделить смещенный характеристический полином на мнимую и действительную части, то их можно поочередно приравнять нулю, получив при этом систему двух уравнений

$$u(\varphi_M, \omega_i) = 0$$

$$v(\varphi_M, \omega_i) = 0$$

$$(4.53)$$

Исключив из этой системы  $\omega_{\rm i}$  ,получим искомое значение  $\varphi_{\rm M}$  и  $\mu=tg\varphi_{\rm M}$  .

Впервые анализ распределения корней в области устойчивости на примере САУ третьего порядка выполнил И. А. Вышнеградский.

Оценка прямых показателей качества переходного процесса ( времени регулирования  $t_p$  и перерегулирования  $\sigma$  (см. раздел 4.3)) по известным  $\eta$ ,  $\xi$  и  $\mu$  для любого распределения корней и любых начальных условий пока не найдена. Но для определенных классов распределения корней и начальных условий можно построить две кривые: мажоранту и миноранту (рис.4.6), которые ограничивают кривую переходного процесса сверху и снизу:

$$\mathbf{u}(t) \le \mathbf{x}(t) \le \mathbf{v}(t) , \qquad (4.54)$$

где u(t) — миноранта, а v(t) — мажоранта.

Для случая вещественных корней и нулевых начальных условий y(0) = 0,  $y'(0) = \dots y^{(n-1)}(0) = 0$  мажоранта и миноранта описываются соответственно уравнениями

$$\upsilon(t) = e^{-\eta t} \left[ 1 + \eta t + \dots + \frac{\eta^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$
(4.55)

$$u(t) = e^{-\eta t} \tag{4.56}$$

Перерегулирование для этого класса корней отсутствует.

Чем выше порядок системы n, тем  $\$ грубее оценка. Если учесть величину  $\xi$  , то можно сблизить миноранту и мажоранту.

Для систем, имеющих среди корней пару комплексно-сопряженных, при тех же начальных условиях мажоранта описывается уравнением (4.55), а миноранта

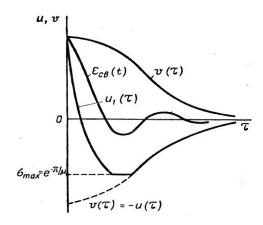


Рис. 4.6. Ограничение переходного процесса минорантой и мажорантой

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = -\mathbf{v}(\mathbf{t}). \tag{4.57}$$

При этом перерегулирование

$$\sigma \le e^{-\pi/\mu}.\tag{4.58}$$

Если  $y(0) = y_0$ , то  $\sigma \le y_0 e^{-\pi/\mu}$ , что проиллюстрировано на рис. 4.6, причем  $\tau = \eta t$  — относительное время. Используя мажоранту и миноранту, можно оценить время регулирования переходного процесса:

$$t_u \le t_p \le t_v, \tag{4.59}$$

где  $t_{\rm u}$  — время регулирования по миноранте;  $t_{\rm v}$  — время регулирования по мажоранте.

### 4.5. Среднегеометрический корень

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_k s^{n-k} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$
 (4.60)

где  $s = c + j\omega$  — комплексное число.

Используя понятие среднегеометрического корня

$$\Omega_0 = +\sqrt[n]{|s_1 s_2 ... s_n|} = +\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \qquad (4.61)$$

где  $s_1, s_2, \ldots, s_n$  — корни характеристического уравнения (4.60)

можно перейти к новой комплексной величине q путем подстановки  $s=\Omega_0 q$ . В результате получим уравнение

$$q^{n} + A_{1}q^{n-1} + \dots + A_{k}p^{n-k} + \dots + A_{n-1}q + 1 = 0, (4.62)$$

в котором безразмерные коэффициенты  $A_1,\ A_2,\ .,\ A_k,\ .\ .\ .,\ A_{n\text{--}1}$  определяются выражением

$$A_k = \frac{a_k \Omega_0^{n-k}}{a_0}, (4.63)$$

а его корни равны  $\,q_1 = s_1 \, / \, \Omega_0 \, , q_2 = s_2 \, / \, \Omega_0 \, \dots \,$  и т. д.

Исходное характеристическое уравнение (4.60) при возвращении к прежней комплексной величине получает вид

$$s^{n} + A_{1}\Omega_{0}s^{n-1} + \dots + A_{k}\Omega_{0}s^{n-k} + \dots + \Omega_{0}$$

$$(4.64)$$

Среднегеометрический корень  $\Omega_0$  может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Если в уравнении (4.64) увеличить  $\Omega_0$ , например, в 10 раз, то на основании теоремы подобия переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее. В связи с (4.62)ЭТИМ онжом рассматривать как некоторое нормированное характеристическое уравнение, которому соответствует переходный процесс, времени  $t_0 = \Omega_0 t$ . Если безразмерного построенный ДЛЯ переходного процесса является приемлемым с точки зрения допустимого запаса устойчивости, определяемого, например, перерегулированием, то требуемая быстрота протекания переходного процесса может быть обеспечена соответствующим выбором величины  $\Omega_0$ .

Для увеличения величины  $\Omega_0$ , как следует из (4.61), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения  $a_n$ . Напомним, что в статических системах  $a_n=1+K$ , а в астатических  $a_n=K$ , где K — общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи регулирования. Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения общего коэффициента усиления.

Для оценки быстродействия системы может использоваться понятие степени устойчивости.

Под степенью устойчивости  $\eta$  понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня. Здесь могут быть два случая: когда ближайший корень является вещественным и когда к оси мнимых ближе всего расположена пара комплексных корней. Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к мнимой оси, т. е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают в переходном процессе члены, которые затухают наиболее медленно. В большинстве случаев переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет член, определяемый ближайшим к мнимой оси корнем. Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то составляющая в переходном процессе, определяемая этим корнем, будет иметь вид  $x_{\eta} = C_{\eta} e^{-\eta t}$ .

### 4.6. Диаграмма Вышнеградского

Рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 (4.65)$$

Приведем его к нормированному виду. Для этого разделим все члены на  $a_3$  и введем новую переменную

$$q = s_3 \sqrt{\frac{a_0}{a_3}} = \frac{s}{\Omega_0} \tag{4.66}$$

Здесь использовано понятие среднегеометрического корня:  $\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$ 

В результате получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, (4.67)$$

где коэффициенты:

$$A = \frac{a_1 \Omega_0^2}{a_3} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}} \qquad B = \frac{a_2 \Omega_0}{a_3} = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$$
(4.68)

называются параметрами Вышнеградского.

На плоскости параметров A и B нанесем границу устойчивости. Условия устойчивости системы третьего порядка были впервые сформулированы Вышнеградским еще в 1876 году, до появления в 1895 году критерия Гурвица. Эти условия: A>0, B>0 и AB>1. Уравнение границы устойчивости (колебательной): AB=1 при A>0 и B>0. Это есть равнобокая гипербола, для которой оси координат служат асимптотами (рис. 4.7).

Область устойчивости системы, согласно написанным выше условиям, лежит выше этой кривой.

Разобьем область устойчивости на отдельные части, соответствующие различному расположению корней характеристического уравнения. Заметим, что в точке C, где A = 3 и B = 3, характеристическое уравнение (4.68) принимает вид  $(q+1)^3 = 0$ . Следовательно, в этой точке все три корня

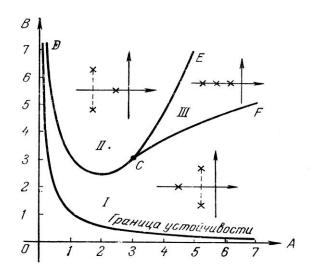


Рис. 4.7. Диаграмма Вышнеградского.

равны:  $q_1 = q_2 = q_3 = -1$ . При этом для исходного характеристического уравнения согласно (4.66) получаем:

$$p_1 = p_2 = p_3 = -\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} = -\Omega_0. \tag{4.69}$$

В общем случае возможны два варианта:

1) все три корня вещественные;

2) один корень вещественный и два комплексных.

Граница между этими двумя случаями определяется равенством нулю дискриминанта уравнения третьей степени (4.67), который может быть получен, например, из формулы Кардана для решения кубического уравнения  $A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0$ . Это уравнение дает на плоскости параметров A, B две кривые: СЕ и СF (рис. 4.7). Внутри области ЕСF дискриминант положителен. Следовательно, в этой области имеется три вещественных корня (область III). В остальной части плоскости дискриминант отрицателен, что соответствует наличию пары комплексных корней.

Существенное значение имеет взаимное расположение вещественного и комплексных корней. Будем различать здесь два случая: I — пара комплексных корней лежит ближе к мнимой оси, чем вещественный; II — вещественный корень лежит ближе к мнимой оси, чем пара комплексных. Границей между этими двумя случаями является расположение всех трех корней на одинаковом расстоянии от мнимой оси. Уравнение этой границы можно найти, положив значения корней  $q_1 = \alpha$  и  $q_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$ . Тогда характеристическое уравнение (4.67) будет

$$q^{3} + Aq^{2} + Bq + 1 = (q + \alpha)(q + \alpha - j\beta)(q + \alpha + j\beta) =$$

$$q^{3} + 3\alpha q^{2} + (3\alpha^{2} + \beta^{2})q + \alpha(\alpha^{2} + \beta^{2}) = 0$$
(4.70)

Уравнивание коэффициентов при одинаковых степенях дает

$$A = 3\alpha^2$$
,  $B = 3\alpha^2 + \beta^2$ ,  $1 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2)$  (4.71)

В результате совместного решения последних трех равенств получаем после исключения α и β искомое уравнение, соответствующее граничному случаю:

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0$$
,  $A < 3$ . (4.72)

Написанное равенство дает на плоскости параметров кривую CD.

В результате область устойчивости разбивается на три части: I, II, III (рис. 4.7). Этот график называется диаграммой Вышнеградского. Он построен им в 1876 году в работе, которая положила начало развитию теории

автоматического регулирования. На рис. 4.7 показан характер расположения корней внутри каждой из этих частей области устойчивости.

В области III, где все корни вещественные, в зависимости от начальных условий получим апериодический переходный процесс в одной из форм, показанных на третьем графике рис. 4.8. Область III носит название области апериодических процессов.

В областях I и II, где имеется один вещественный корень и два комплексных, переходный процесс будет иметь соответственно формы, показанные на первых двух графиках рис. 4.8. В области I быстрее затухает экспонента и переходный процесс в основном будет определяться колебательной составляющей. Это будет область колебательных процессов. В области II, наоборот, быстрее затухает колебательная составляющая. Это будет область монотонных процессов.



Рис. 4.8. Вид переходных процессов

Диаграмма Вышнеградского получила дальнейшее развитие. Для более точной оценки характера переходного процесса на ней можно нанести вспомогательные линии, разбивающие области I, II и III на еще более мелкие части.

## 4.7. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки качества являются интегралами по времени от некоторых функций переходного процесса свободной составляющей выходной величины  $y_{CB}(t)$  или ошибки  $\mathcal{E}_{CB}(t)$ . Цель использования таких критериев состоит в том, чтобы получить общую оценку быстродействия и отклонения регулируемой величины от установившегося значения. Широко используются линейные и квадратичные интегральные оценки.

Линейные оценки вычисляются по формулам:

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^n \varepsilon_{cs}(t) dt \tag{4.73}$$

Однако чаще используют моменты і - го порядка, т. е. оценки вида

$$J_{00} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon_{cs}(t) dt$$
 (4.74)

$$J_{01} = \int_{0}^{\infty} t \varepsilon_{cs}(t) dt$$
 (4.75)

.......

$$J_{0n} = \int_{0}^{\infty} t^{n} \varepsilon_{cs}(t) dt$$
 (4.76)

Простейшей из этих оценок является  $J_{00}$  (4.74). Если система устойчива, то  $\lim \mathcal{E}_{CB}(t)=0$ . Интеграл  $J_{00}$  стремится к конечному значению, равному площади под кривой  $\mathcal{E}_{CB}(t)$  (рис. 4.9). Чем выше быстродействие системы, тем меньше величина  $J_{00}$ , поэтому параметры системы следует выбирать так, чтобы  $J_{00}$  стремился к минимуму, т. е.  $dJ_{00}/dA=0$ , где A — варьируемый параметр системы.

Недостатком этой оценки является то, что она применима к монотонным или апериодическим процессам. При колебательном процессе (рис. 4.10) площади, ограниченные  $\varepsilon_{\it CB}(t)$ , складывают алгебраически, и минимуму  $J_{00}$  может соответствовать процесс с большим числом колебаний п, т. е., с малым быстродействием и даже с незатухающими колебаниями.

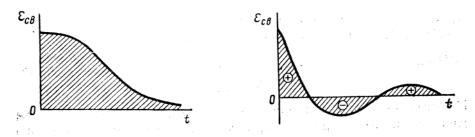


Рис. 4.9. Площадь под кривой  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  Рис. 4.10. Площади под кривой  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  при колебательном процессе

Найдем значения моментов  $J_{00} \dots J_{0n}$  .

Для  $\varepsilon_{\it CB}(t)$  изображение по Лапласу

$$E(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \varepsilon_{ce}(t) dt$$
 (4.77)

Разложим  $e^{-st}$  в ряд по степеням st:

$$e^{-st} = 1 - st + 0.5s^2t^2 \dots (4.78)$$

Подставим (4.78) в выражение для определения  $E_{\it CB}(s)$ , т. е.

$$E(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \varepsilon_{ce}(t) dt = \int_{0}^{\infty} \varepsilon_{ce}(t) dt - s \int_{0}^{\infty} t \varepsilon_{ce}(t) dt +$$
(4.79)

$$+0.5s^{2}\int_{0}^{\infty}t^{2}\varepsilon_{cs}(t)dt - \dots = J_{00} - sJ_{01} + 0.5s^{2}J_{02} - \dots$$
 (4.80)

Если разложить  $E_{CB}(s)$  по степеням s в ряд:

$$E_{ce}(s) = E_{ce}(0) + \left(\frac{\partial E_{ce}}{\partial s}\right)_{s=0} s - 0.5 \left(\frac{\partial^2 E_{ce}}{\partial s^2}\right)_{s=0} s^2 + ..., \tag{4.81}$$

то, сопоставляя (4.80) и (4.81), и приравнивая выражения при равных степенях s, получим:

$$J_{00} = E_{ce}(0); \qquad J_{01} = -\left(\frac{\partial E_{ce}}{\partial s}\right)_{s=0}$$
 (4.82)

$$J_{02} = -\left(\frac{\partial^2 E_{ce}}{\partial s^2}\right)_{s=0} \tag{4.83}$$

......

$$J_{0n} = -\left(\frac{\partial^n E_{cs}}{\partial s^n}\right)_{s=0} \tag{4.84}$$

Если сравнить результаты (4.82—4.84) с коэффициентами ошибок, приведенными ранее, то

$$J_{00} = C_0; \quad J_{01} = (-1)^1 C_1; \dots; \quad J_{0n} = (-1)^n C_n,$$
 (4.85)

где  $C_0, C_1...C_n$  — коэффициенты ошибок.

Квадратичные интегральные оценки вычисляются по формулам:

$$J_{20} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon^{2}_{cs}(t) dt \tag{4.86}$$

$$J_{21} = \int_{0}^{\infty} [\varepsilon^{2}_{cs}(t) + \tau_{1}^{2} \varepsilon_{cs}^{\prime 2}(t)] dt$$
 (4.87)

$$J_{2n} = \int_{0}^{\infty} \left[ \varepsilon^{2}_{ce}(t) + \tau_{1}^{2} \varepsilon_{ce}^{\prime 2}(t) + ... + \tau_{n}^{2} \varepsilon_{ce}^{(n)2} \right] dt, \qquad (4.88)$$

где  $\tau_1,...\tau_n$  — постоянные величины.

Оценки  ${J}_{21},...,{J}_{2n}$  называют обобщенными квадратичными оценками.

Геометрический смысл интегральной квадратичной оценки пояснен на рис. 4.11.

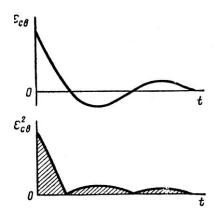


Рис. 4.11. Геометрический смысл интегральной квадратичной оценки

Выбирая параметры системы по минимуму квадратичной интегральной оценки  $J_{20}$ , приближаем кривую  $\mathcal{E}_{CB}(t)$ к осям  $\mathcal{E}_{CB}$  и t.

Рассмотрим метод вычисления квадратичных интегральных оценок

Пусть 
$$\varepsilon_{CB}(t) = h_{vcm} - h(t). \tag{4.89}$$

По определению,

$$L\{h(t)\} = H(s) = (1/s)W_{gh}(s)$$
(4.90)

По теореме о предельных переходах,

$$h_{ycm} = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} sH(s) = W_{gh}(0)$$
 (4.91)

следовательно,

$$E_{ce}(s) = W_{gh}(0) - \frac{1}{s}W_{gh}(s)$$
 (4.92)

Поскольку  $W_{gh}(s)$  — дробно-рациональная функция, то и H(s) можно записать в виде дробно-рациональной функции:

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$
(4.93)

При m < n оценку  $J_{20}$  (4.86) можно вычислить, используя коэффициенты  $b_0$ , ...,  $b_m$  и  $a_0$ , ....  $a_n$  в (4.93), по формулам, приведенным ниже без вывода:

$$J_{20} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon_{ce}^{2}(t)dt = \frac{1}{2a_{n}^{2}\Delta} (B_{0}\Delta_{0} + B_{1}\Delta_{1} + \dots + B_{m-2}\Delta_{m-2} + B_{m-1}\Delta_{m-1} + B_{m}\Delta_{m}) - \frac{b_{m}b_{m-1}}{a_{n}^{2}}$$
(4.94)

где  $\Delta$  — определитель Гурвица, составленный из коэффициентов:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{n} - a_{n-2} - a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} - a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & -a_{n} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1} \end{bmatrix},$$

$$(4.95)$$

в котором все коэффициенты с индексом меньшим 0 и большим n заменяют нулями. Определители  $\Delta_0,...,\Delta_m$  получают из (4.95) заменой столбца (v +1) столбцом  $a_{n-1},a_n,...,0$ , а  $\nu=0,1,...,m$ .

Коэффициенты  $B_0, B_1, ..., B_{m-1}, B_m$  определяют как:

$$B_{0} = b_{m}^{2}; B_{1} = b_{m-1}^{2} - 2b_{m}b_{m-2};$$

$$B_{v} = b_{m-v}^{2} - 2b_{m-v+1}b_{m-v-1} + \dots + 2(-1)^{v}b_{m}b_{m-2v}$$

$$B_{m} = b_{0}^{2} (4.96)$$

Интегральную квадратичную оценку  $J_{20}$  можно вычислять по заданной частотной характеристике замкнутой системы.

При выборе параметров системы по минимуму оценки  $I_{20}$ , часто получают нежелательную колебательность процесса. Приближение процесса h(t) к идеальному скачку вызывает резкое увеличение начальной скорости. Это, в свою очередь, может вызвать высокое перерегулирование, при этом запас устойчивости. В обобщенных квадратичных оценках  ${J}_{21},...,{J}_{2n}$  накладывают ограничение не только на величину отклонения  $\epsilon(t),$ но и на скорость отклонения  $\varepsilon'(t)$  в  $J_{21}$ , а также и на производные второго, третьего и высших порядков в  $J_{22}, \dots J_{2n}$ . Это означает приближение кривой не к ступенчатой функции, а к экспоненте, в случае  $J_{21}$ , и к более плавной, но сложной, кривой в случае использования  $J_{22},...,J_{2n}$ . При выборе параметров САУ по минимуму  $J_{21},...,J_{2n}$  существен выбор постоянных  $\tau_1,...\tau_n$ определяющих вес производных в обобщенных квадратичных оценках (4.87), Значительное увеличение  $\tau_1,...\tau_n$  приводит к отсутствию (4.88).перерегулирования, но увеличивает время регулирования. При малых  $\tau_1,...\tau_n$ Выбор  $\tau_1,...\tau_n$ колебательности будет незначительным. уменьшение осуществляется с учетом постоянной времени экстремали, к которой целесообразно приближать процесс.

Расчет системы по минимуму обобщенной квадратичной оценки. Пусть

$$J_{21} = \int_{0}^{\infty} [\varepsilon^{2}_{cs}(t) + \tau_{1}^{2} \varepsilon_{cs}^{\prime 2}(t)] dt$$
 (4.97)

Этот интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\boldsymbol{J}_{21} = \int_{0}^{\infty} [\boldsymbol{\varepsilon}_{cs}(t) + \tau_{1}\boldsymbol{\varepsilon}_{cs}'(t)]^{2} dt - 2\tau_{1} \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_{cs}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{cs}'(t) dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left[\varepsilon_{cs}(t) + \tau_{1}\varepsilon_{cs}'(t)\right]^{2} dt - 2\tau_{1}\int_{0}^{\infty} \varepsilon_{cs}'(t) d\varepsilon_{cs}(t)$$
(4.98)

Если система устойчива, то  $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_{cs}(t) = 0$ , тогда

$$2\tau_1 \int_0^\infty \varepsilon_{c\varepsilon}'(t) d\varepsilon_{c\varepsilon}(t) = \tau_1 \varepsilon_{c\varepsilon}^2(t) \Big|_0^\infty = \tau_1 \varepsilon_{c\varepsilon}^2(0). \tag{4.99}$$

Кроме того, интеграл  $J_{21}$  будет иметь минимально возможное значение

$$J_{21\,\text{min}}^* = \tau_1 \varepsilon_{CB}^2(0) \tag{4.100}$$

при

$$\varepsilon_{CB}(t) = \tau_1 \varepsilon_{CB}'(t) = 0. \tag{4.101}$$

Если

$$\tau_1 \frac{d\varepsilon_{CB}(t)}{dt} + \varepsilon_{CB}(t) = 0, \qquad (4.102)$$

то решение дифференциального уравнения (4.102):

$$\varepsilon_{CR}(t) = \varepsilon_{CR}(0)e^{-t/\tau_1} \tag{4.103}$$

является оптимальным по минимуму переходным процессом,

где  $\tau_1$  — постоянная времени этого процесса.

При выборе параметров системы по минимуму  $J_{21}$  обычно имеет место отклонение  $J_{21\,\mathrm{min}}^*$  от наименьшего значения  $J_{21\,\mathrm{min}}$  , т.е.

$$J_{21\min}^* - J_{21\min} = \delta \rangle 0$$
. (4.104)

Переходный процесс будет отличаться от минимального на величину, меньшую  $\sqrt{\delta/ au_1}$  , т. е.

$$|\Delta \varepsilon_{cs}(t)| \le \sqrt{\delta/\tau_1} \tag{4.105}$$

По величине  $\delta$  можно оценить отклонение истинного переходного процесса  $\varepsilon_{CB}(t)$  от минимального. При увеличении порядка системы увеличивается и ширина зоны  $\pm \sqrt{\delta/\tau_1}$  , при этом уменьшается точность оценки качества си-

стемы (приближения переходного процесса к экстремали); во избежание этого используют оценки вида (4.88). Величину  $\tau_1$  задают по требуемому времени регулирования  $t_p$ , т. е. в пределах

$$t_p / 6\langle \tau_1 \langle t_p / 3 \rangle \tag{4.106}$$

Следует заметить, что задача выбора параметров по минимуму  $J_{20}$  или  $J_{21}$  решается аналитически лишь в несложных случаях для САУ невысокого порядка. В противном случае расчеты существенно усложняются и задачу следует решать численно.

Интегральные оценки качества используются при синтезе оптимальных САУ в качестве критерия оптимальности.

Недостатком интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Различные по форме переходные процессы могут иметь одно и тоже значение квадратичной интегральной оценки. Часто оказывается, что выбранные по минимуму этой оценки параметры системы соответствуют слишком сильному колебательному процессу, ибо стремление приблизить процесс к идеальному скачку вызывает большую скорость процесса при подходе к установившемуся значению.

## 4.8. Частотные критерии качества

Под частотными критериями качества будем понимать такие критерии, которые не рассматривают вида переходного процесса, а базируются на некоторых частотных свойствах системы. Частотные критерии качества особенно удобно применять при использовании частотных методов расчета, так как при этом получается наиболее простое решение задачи.

Частотные критерии наиболее разработаны в отношении оценки запаса устойчивости. Запас устойчивости можно определять по удалению амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы (рис. 4.12a) от точки

(—1, j0). Для этой цели вводятся понятия запаса устойчивости по амплитуде (модулю) и запаса устойчивости по фазе.

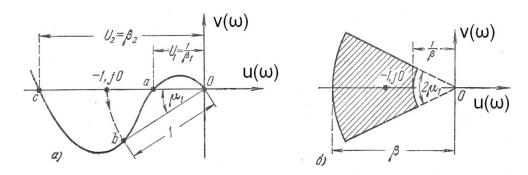


Рис. 4.12. Определение запаса устойчивости.

Для общего случая устойчивости, изображенного на рис. 4.12а, запас устойчивости по амплитуде определяется двумя точками а и с, и, соответственно, двумя величинами, выраженными обычно в децибелах:

$$L_1 = 20 \lg \beta_1 = 20 \lg (1/U_1), \quad L_2 = 20 \lg \beta_2 = 20 \lg U_2.$$
 (4.107)

Запас устойчивости по амплитуде тем больше, чем больше  $L_1$  и  $L_2$ . В хорошо демпфированных системах эти величины составляют примерно 6-20дб, что соответствует 2-10 в линейном масштабе.

Запасом устойчивости по фазе называется запас по фазе  $\mu = 180 + \psi$ , где  $\psi$  — аргумент частотной передаточной функции разомкнутой системы, соответствующий модулю, равному единице (точка b на рис. 4.12 a):

$$\mu_1 = 180^\circ + \psi_1 \tag{4.108}$$

сдвиг по фазе  $\psi_1$  определяется условием  $\psi_1 = \psi(\omega)$  при  $A(\omega) = 1$ .

В хорошо демпфированных системах запас по фазе составляет около 30-60°. В некоторых случаях вместо задания дискретных точек, определяющих запас устойчивости системы регулирования (точки a, b и c на рис. 4.12а), задают некоторую запретную область для амплитудно - фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта запретная область окружает точку (—1, j0) и может быть построена по заданным значениям запаса устойчивости по фазе  $\mu_1$  и запаса устойчивости по модулю  $\beta$  (рис. 4.12 б).

Недостатком рассмотренного критерия является то, что для определения запаса устойчивости необходимо задать два числа:  $\beta$  и  $\mu_1$ . В этом отношении более удобно определять запас устойчивости по показателю колебательности. Показателем колебательности называется максимальное значение ординаты  $M_{\rm max}$  амплитудной характеристики замкнутой системы (рис. 4.13) при начальной ординате, равной единице, т. е. относительная высота резонансного пика.

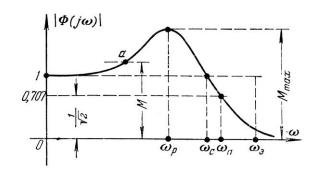


Рис. 4.13. Показатель колебательности

Физически эта характеристика представляет собой следующее. Если управляющий сигнал на входе системы регулирования меняется по закону

$$g = g_{\text{max}} Sin\omega t \tag{4.109}$$

то регулируемая величина в режиме установившихся вынужденных колебаний будет меняться по закону

$$y = y_{\text{max}} Sin(\omega t + \psi). \tag{4.110}$$

Отношение амплитуд  $y_{\text{max}}$  и  $g_{\text{max}}$  определяется модулем частотной передаточной функции замкнутой системы:

$$\frac{y_{\text{max}}}{g_{\text{max}}} = \text{mod}\,\Phi(j\omega) = \text{mod}\,\frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} , \qquad (4.111)$$

где  $W(j\omega)$  — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Максимальное значение этого модуля и представляет собой показатель колебательности (имеется в виду наибольший максимум)

$$M_{\text{max}} = |\Phi(j\omega)|_{\text{max}} = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|_{\text{max}}$$
 (4.112)

Как видно из этих рассуждений, показатель колебательности определяется посредством задания задающего воздействия  $g = g_{\max} Sin\omega t$ . В принципе возможно определение показателя колебательности системы посредством задания возмущающего воздействия  $f = f_{\max} Sin\omega t$  и отыскания относительной величины резонансного пика.

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем регулирования. Считается, что в хорошо демпфированных системах регулирования показатель колебательности не должен превосходить значений 1,1 - 1,5, хотя в некоторых случаях можно допускать величины до 2 - 2,5.

Для отыскания показателя колебательности системы регулирования нет необходимости строить амплитудную частотную характеристику (рис. 4.13) или отыскивать максимум (4.112). Возьмем на амплитудной характеристике (рис. 4.13) некоторую точку а, которой соответствует ордината М, и отобразим эту точку на комплексную плоскость частотной передаточной функции разомкнутой системы. Для этого рассмотрим уравнение

$$\operatorname{mod}\Phi(j\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right| = M. \tag{4.113}$$

Сделаем подстановки:  $U = ReW(j\omega)$  и  $V = ImW(j\omega)$ . Тогда

$$\left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + U)^2 + V^2}} = M.$$
 (4.114)

Возводя в квадрат правую и левую части и освобождаясь от знаменателя, после алгебраических преобразований получим

$$(U+C)^2+V^2=R^2, (4.115)$$

где

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1} , \qquad (4.116)$$

$$R = \frac{M}{M^2 - 1} \quad . \tag{4.117}$$

Это есть уравнение окружности с радиусом R и с центром, смещенным влево от начала координат на величину C.

Задаваясь различными значениями M от 1 до  $\infty$ , можно построить семейство таких окружностей (рис. 4.14).

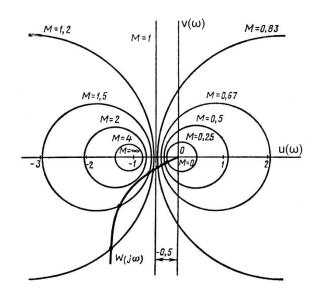


Рис. 4.14. Семейство окружностей для различных значений М

Над каждой окружности написано значение М. При M=1 окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и проходящую слева от нее на расстоянии 0,5. При  $M\to\infty$  окружность вырождается в точку, совпадающую с точкой (-1, j0).

Для значений ординат амплитудной характеристики, лежащих в пределах 0 < M < 1, получается семейство окружностей, расположенных справа от линии M = 1, симметрично с первым семейством. При M = 0 окружность вырождается в точку, совпадающую с началом координат.

В тех же координатах, где построены окружности M = const, можно нанести амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой характеристики с окружностями будут определять точки амплитудной характеристики с соответствующими значениями ординат, равными M. Для определения показателя колебательности можно не строить амплитудную характеристику, так как достаточно знать одно максимальное значение

ординаты  $M_{\text{max}}$ , определяемое по наименьшей окружности M = const, которой коснется амплитудно-фазовая характеристика.

Если при проектировании системы ставится условия, чтобы ее показатель колебательности был не больше некоторого заданного значения, например,  $M_{\rm max}=1.5$ , то для выполнения этого необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не заходила внутрь окружности, соответствующей этому значению M (рис. 4.15).

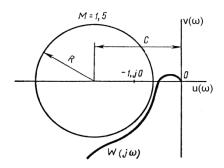


Рис.4.15. Определение показателя колебательности

Амплитудно-фазовая характеристика может только коснуться этой окружности. В этом случае показатель колебательности будет как раз равен заданному значению  $M_{\rm max}$ . Таким образом, окружность  $M_{\rm max}$  является запретной зоной для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта зона охватывает точку (—1, j0) и обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Величина показателя колебательности может быть определена и в случае использования логарифмических частотных характеристик.

Для оценки быстродействия по амплитудной частотной характеристике (рис. 4.13) могут использоваться следующие величины:

 $\omega_{\rm p}$  — резонансная частота, соответствующая пику AЧX;

 $\omega_{\Pi}$  — это интервал частот от  $\omega=0$  до  $\omega_{\Pi}$ , при котором выполняется условие

$$A_3(\omega_{\Pi}) \ge 0.707A_3(0) \tag{4.118}$$

или при  $A_3(0)=1$  величина  $A_3(\omega_0)\langle 0.707$ . Полоса пропускания не должна быть слишком широкой, иначе система будет воспроизводить высокочастотные помехи.

 $\omega_{\rm c}$  — частота, при которой амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное 1, т.е.  $A_3(\omega_{cp})=1$ . Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса.

Время регулирования обратно пропорционально частоте среза:

$$t_p \approx (1-2)2\pi/\omega_{cp} \tag{4.119}$$

Если переходный процесс имеет одно-два колебания, то время достижения переходной характеристикой первого максимума

$$t_{\text{MAX}} \cong \pi / \omega_{cp} \tag{4.120}$$

 $\omega_{\scriptscriptstyle 9}$  — эквивалентная полоса пропускания замкнутой системы, определяемая по выражению

$$\omega_{9} = \int_{0}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^{2} d\omega, \qquad (4.121)$$

где  $|\Phi(j\omega)| = A(\omega)$ .

Эквивалентная полоса пропускания представляет собой основание прямоугольника (рис. 4.13), высота которого равна единице, а площадь равна площади под кривой квадрата модуля  $\Phi(j\omega)$ .

В отличие от показателя колебательности, который является некоторой безразмерной характеристикой и лежит в сравнительно узких пределах, приведенные выше характерные частоты, определяющие быстродействие системы, имеют размерность и их допустимые значения могут сильно меняться в зависимости от типа и назначения системы регулирования. Здесь наблюдается полная аналогия с критериями качества, основанными на рассмотрении кривых переходного процесса. Допустимое значение перерегулирования о лежит в сравнительно узких пределах для систем самого различного

назначения, а допустимое время переходного процесса  $t_n$  может меняться от долей секунды до нескольких часов и более.

Допустимые для данной системы регулирования значения  $\omega_{\rm p}$ ,  $\omega_{\rm n}$ ,  $\omega_{\rm c}$  или  $\omega_{\rm 9}$  должны устанавливаться для каждой конкретной системы на основе изучения условий ее эксплуатации. При этом характеризовать быстродействие системы может как вся совокупность указанных выше величин, так и каждая из них в отдельности.

При определении быстродействия по частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  разомкнутой системы может использоваться частота среза  $\omega_{\rm cp}$ . Частота среза определяется из условия равенства модуля единице  ${\rm mod}W(j\omega_{\rm cp})=1$  или  $L(\omega_{\rm cp})=0$ . Определение частоты среза разомкнутой системы может быть сделано на диаграмме, изображенной на рис. 4.14, по точке пересечения а. ф. х. с окружностью единичного радиуса, центр которой расположен в начале координат.

Резонансная частота замкнутой системы  $\omega_{\rm p}$  близка к частоте колебаний системы в переходном процессе. Значение  $\omega_{\rm p}$  может быть приближенно определено по точке а. ф. х. (рис. 4.13), которая ближе всего расположена к точке (—1, j0). Частота среза  $\omega_{\rm cp}$  во многих случаях близка к резонансной частоте системы  $\omega_{\rm p}$ .

Удобной и наглядной мерой быстродействия системы является также частота  $\omega_{\rm k}$  , при которой задающее воздействие вида  $g=g_{\rm max}Sin\omega_{\rm k}t$  отрабатывается системой с амплитудой ошибки не более  $\mathcal{E}_{\rm max}$  .

Хотя приведенные выше частотные критерии запаса устойчивости и быстродействия могут рассматриваться независимо от свойств системы регулирования во временной области, представляется полезным провести некоторое приближенное сопоставление частотных и временных характеристик.

Если показатель колебательности M > 1, то замкнутую систему регулирования можно аппроксимировать колебательным звеном. Тогда передаточная функция замкнутой системы может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2} . \tag{4.122}$$

Для этой передаточной функции сравнительно просто найти, как зависят величины, которые определяют запас устойчивости. Это перерегулирование  $\sigma$  %. показатель колебательности M и запас устойчивости по фазе  $\mu_1$ , от параметра затухания  $\zeta$ . Соответствующие кривые приведены на рис. 4.16 а. На рис. 4.16 б дается зависимость между перерегулированием  $\sigma$  % и показателем колебательности M для той же передаточной функции (4.122).

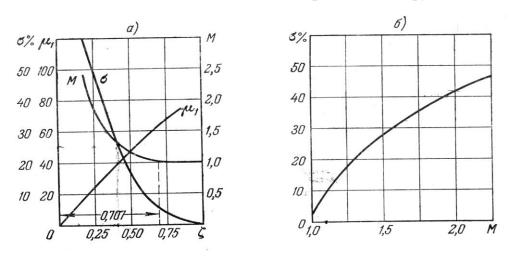


Рис. 4.16. Связь между показателями качества

Кривые, приведенные на рис. 4.16 в некоторой мере характеризуют связь между показателями качества и в более сложных случаях, чем выражение (4.122).

Так как резонансная частота  $\omega_{\rm p}$  приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума  $t_M$  на переходной характеристике может быть определено по приближенной зависимости

$$t_M \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_{cp}}$$
 (4.123)

Если переходный процесс в системе заканчивается за 1—2 колебания, то время переходного процесса можно определить по приближенной зависимости

$$t_n \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_p} \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}} \tag{4.124}$$

### 4.9. Точность в типовых режимах

Для оценки точности системы регулирования используется величина ошибки в различных типовых режимах. Рассмотрим наиболее употребительные режимы.

1. **Неподвижное состояние**. В качестве типового режима рассматривается установившееся состояние при постоянных значениях задающего и возмущающего воздействий. Ошибка системы в этом случае называется статической. Величина ошибки может быть найдена из общего выражения

$$D(p)\varepsilon(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t)$$
(4.125)

где D(p) – характеристический полином;

Q(p), N(p) – полиномы n-ой степени;

- $\varepsilon(t)$  ошибка;
- g(t) регулирующее воздействие;
- f(t) возмущающее воздействие.

Для этого необходимо положить  $g(t) = g_0 = const$ . Далее необходимо учесть действующие на систему возмущения. В общем случае их может быть несколько:  $f_1(t), f_2(t)$ , и т. д. Тогда в правой части предыдущего выражения будут несколько слагаемых, определяемых имеющимися возмущениями. В неподвижном состоянии необходимо положить  $f_1(t) = f_{10} = const$ ,  $f_2(t) = f_{20} = const$  и т. д. Затем можно использовать изображения функций по Лапласу или Карсону — Хэвисайду. Используем, например, изображения

Карсона — Хэвисайда. Тогда изображение постоянной величины равно ей самой, т. е.  $G(p) = g_0$ ,  $F_1(p) = f_{10}$ ,  $F_2(p) = f_{20}$  и т.д. Далее необходимо воспользоваться теоремой предельного перехода и получить установившееся значение ошибки (статическую ошибку):

$$\varepsilon_{CT} = \left[\frac{g_0}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0} + \left[\frac{\sum_{k=1}^{l} W_k(p) f_{k0}}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0} = \varepsilon_{CT}' + \varepsilon_{CT}'', \quad (4.126)$$

где l— число действующих на систему возмущений, а  $W_k(p) = -W_f(p)$ . Это же выражение может быть получено из операторного уравнения (2.69) из раздела 2.3, если оператор дифференцирования p = d/dt положить равным нулю.

Первое слагаемое (4.126) представляет собой составляющую статической ошибки, определяемую задающим воздействием. Эта составляющая может быть отличной от нуля только в следящих системах при статическом регулировании.

В статических системах W(0) = K представляет собой общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи. В этом случае первое слагаемое (4.126) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_{CT}' = \frac{g_0}{1 + W(0)} = \frac{g_0}{1 + K} \tag{4.127}$$

Однако эта составляющая ошибки практически всегда может быть сведена к нулю посредством использования неединичной обратной связи или путем масштабирования задающего воздействия или регулируемой величины.

При астатическом регулировании  $W(0) \to \infty$ . Поэтому первая составляющая (4.126) обращается в нуль.

В системах стабилизации g(t) = 0, что также обращает в нуль  $x'_{CT}$ . В связи с этим практически во всех случаях первая составляющая статической ошибки может быть принята равной нулю.

Второе слагаемое (4.126) никогда не обращается в нуль, так как даже использование регулирования с астатизмом высокого порядка и использование принципа регулирования по возмущению могут обратить в нуль лишь часть слагаемых, находящихся под знаком суммы (4.126).

При выводе выражения (4.126) предполагалось, что чувствительный элемент, определяющий разность между требуемым и действительным значениями регулируемой величины, является идеальным и определяет имеющуюся ошибку в соответствии с выражением  $\varepsilon(t) = g(t)$  — y(t). В действительности чувствительный элемент как измерительный орган имеет свои ошибки. Ошибку чувствительного элемента можно рассматривать также как некоторое возмущающее воздействие и считать, что она входит во второе слагаемое (4.126). Однако на практике удобнее эту ошибку учитывать отдельно и считать, что статическая ошибка равна (при  $\varepsilon'_{CT} = 0$ )

$$\varepsilon_{CT} = \varepsilon_{CT}'' + \varepsilon_{CT}''', \tag{4.128}$$

где  $\varepsilon_{\text{CT}}''(t)$  представляет собой второе слагаемое в выражении (4.126) и определяется внешними возмущениями,  $\varepsilon_{\text{ст}}''$  является ошибкой чувствительного элемента.

Рассмотрим теперь ошибку регулирования  $\varepsilon_{\rm CT}''(t)$ . Примем для простоты, что на систему действует одно возмущающее воздействие  $f_1(t)$  . Тогда в статической системе получим

$$\varepsilon_{CT}'' = \frac{W_1(0)f_{10}}{1 + W(0)} = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1 + K}.$$
(4.129)

В этом равенстве  $\gamma_1$  представляет собой отношение установившейся ошибки к постоянному возмущению (коэффициент статизма) в системе с разомкнутой цепью регулирования. Эта же величина, деленная на 1+K, соответствует коэффициенту статизма в замкнутой системе регулирования. Величина 1+K, по сути дела, показывает эффективность регулирования с точки зрения уменьшения установившейся ошибки.

В астатической системе  $W(0) \to \infty$ . Однако это еще не означает, что  $\varepsilon_{\rm CT}''(t) = 0$ , так как возможен случай, когда  $W_1(0) \to \infty$ . Вследствие этого для каждого действующего на систему возмущения необходимо определить факт наличия или отсутствия установившейся ошибки посредством нахождения значения (4.129).

Для иллюстрации этого на рис. 4.17 изображена структурная схема системы автоматического регулирования. Она содержит объект с передаточной функцией  $W_0(p)$  и астатический регулятор с передаточной функцией  $W_p(p) = k_p / p$ . Пусть объект не имеет интегрирующих свойств и  $W_0(0) = k_0$ .

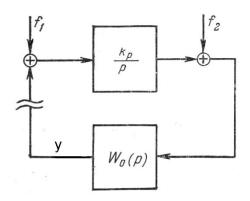


Рис. 4.17. Структурная схема системы автоматического регулирования.

На систему действуют два возмущения  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  . В разомкнутой системе (как показано на рис. 4.17)

$$y = W_0(p) \left[ \frac{k_p}{p} f_1 + f_2 \right]$$
 (4.130)

и в замкнутой

$$y = \frac{W_0(p) \left[ \frac{k_p}{p} f_1 + f_2 \right]}{1 + W(p)},$$
(4.131)

где  $W(p)=W_0(p)W_p(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Отсюда по теореме предельного перехода определяем установившуюся ошибку, положив  $\mathbf{p}=0,\ f_1(t)=f_{10}=const$  ,  $f_2(t)=f_{20}=const$  , имеем

$$\varepsilon_{CT}'' = \frac{W_0(p) \left[ \frac{k_p}{p} f_{10} + f_{20} \right]}{1 + W(p)} | p = 0.$$
 (4.132)

Таким образом, первое возмущение дает статическую ошибку, а второе не дает. Из рассмотрения рис. 4.17 видно, что возмущение  $f_1(t)$  приложено до интегрирующего звена, а  $f_2(t)$  — после. Из этого и вытекает правило, по которому можно определить, устраняет ли астатический закон регулирования статическую ошибку от какого-либо возмущения. Для выполнения этого необходимо, чтобы интегрирующий элемент был включен в цепь регулирования до места приложения данного возмущения. Это объясняет, в частности, тот факт, что включение интегрирующих элементов и повышение степени астатизма не дает возможности устранить ошибку чувствительного элемента  $\mathcal{E}_{CT}^{\prime\prime\prime}$ , которую можно рассматривать как возмущение.

2. Движение с постоянной скоростью. В качестве второго типового режима используется режим движения системы с постоянной скоростью v = const, который будет наблюдаться в установившемся состоянии. Задающее воздействие, изменяется по закону  $g(t) = \rho t$ , где  $\rho = const$ , и при постоянных значениях возмущающих воздействий  $f_1(t) = f_{10} = const$ ,  $f_2(t) = f_{20} = const$  и т. д. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного регулирования.

Используя изображения Карсона — Хэвисайда, в этом случае получаем  $G(p)=\rho/\,p\,,\;F_1(p)=f_{10}\,,\;F_2(p)=f_{20}\;\text{и т. д.}$ 

Из общего выражения для ошибки (2.69) из раздела 2.3, посредством теоремы о предельном переходе, может быть найдена установившаяся ошибка в этом режиме:

$$\varepsilon_{ycm} = \left[\frac{\frac{\rho}{p}}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0} + \left[\frac{\sum W_k(p) f_{k0}}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0}.$$
(4.133)

Второе слагаемое этого выражения дает статическую ошибку (при условии, что возмущающие воздействия такие же, как в неподвижном положении системы), в которой может быть также учтена ошибка чувствительного элемента.

Первое слагаемое (4.133) имеет смысл только при астатизме первого порядка, т. е. в том случае, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_{\rho}(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})}.$$
(4.134)

Тогда выражение (4.133) приводится к виду

$$\varepsilon_{ycm} = \rho / K_{\rho} + \varepsilon_{CT} = \varepsilon_C + \varepsilon_{CT} \tag{4.135}$$

Таким образом, в этом типовом режиме установившаяся ошибка будет слагаться из статической ошибки и добавочной скоростной ошибки, равной отношению скорости задания к добротности системы по скорости:

$$\varepsilon_c = \rho / K_{\rho} \tag{4.136}$$

Так как система может двигаться с различными скоростями, то качество ее удобнее характеризовать не самой скоростной ошибкой, которая является переменной величиной, а значением добротности по скорости

$$K_{\rho} = \rho / \varepsilon_{c} \tag{4.137}$$

В статических системах первое слагаемое (4.135) стремится к бесконечности; при астатизме выше первого порядка это слагаемое стремится к нулю. Поэтому режим движения с постоянной скоростью используется для оценки точности только систем с астатизмом первого порядка, главным образом следящих систем, для которых такой режим является характерным.

3. Движение с постоянным ускорением. В качестве третьего типового режима используется режим установившегося движения системы регулирования с постоянным ускорением  $\theta = \text{const.}$  В этом случае задающее воздействие

меняется по закону  $g(t) = \theta t^2 / 2$ . Возмущающие воздействия принимаются постоянными, как и во втором типовом режиме. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного регулирования. Аналогично изложенному выше, установившееся значение ошибки в этом режиме может быть найдено из выражения

$$\varepsilon_{ycm} = \left[\frac{\frac{\theta}{p^2}}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0} + \left[\frac{\sum W_k(p) f_{k0}}{1 + W(p)}\right]_{p \to 0}.$$
 (4.138)

Второе слагаемое (4.138), как и ранее, дает статическую ошибку. Первое слагаемое (4.138) имеет смысл только при астатизме второго порядка, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_{\theta}(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})}.$$
 (4.139)

Тогда выражение (4.138) приводится к виду

$$\varepsilon_{ycm} = \theta / K_{\theta} + \varepsilon_{CT} = \varepsilon_{y} + \varepsilon_{CT}. \tag{4.140}$$

Первое слагаемое (4.140) представляет собой добавочную ошибку от постоянного ускорения. Как и в предыдущем случае, качество системы может быть оценено величиной добротности по ускорению

$$\mathbf{K}_{\theta} = \theta / \varepsilon_{y}. \tag{4.141}$$

Этот типовой режим используется только для систем регулирования с астатизмом второго порядка, главным образом следящих систем.

4. **Движение по гармоническому (синусоидальному) закону**. Такой режим используется весьма часто, так как он позволяет наиболее полно оценить динамические свойства системы регулирования. Задающее воздействие принимается изменяющимся по закону

$$g(t) = g_{\text{max}} Sin\omega_k t. (4.142)$$

В зависимости от конкретного вида системы регулирования возмущающие

воздействия в рассматриваемом режиме могут оставаться постоянными или меняться.

Случай постоянства возмущающих воздействий приводит, как и в рассмотренных выше втором и третьем типовых режимах, к появлению некоторой постоянной ошибки  $\mathbf{x}_{cr}$ .

Более вероятным является случай, когда возмущающие воздействия при движении системы в этом режиме меняются во времени. Это объясняется тем, что при движении по гармоническому закону непрерывно будет меняться направление движения системы, следовательно, одновременно будет меняться направление действующих в системе сил сухого трения. Этот случай является довольно сложным, и он может рассматриваться только в приложении к конкретным системам регулирования. Рассмотрим ошибку, определяемую только первым слагаемым выражения (2.69) из раздела 2.3:

$$\varepsilon = \frac{g}{1 + W(p)} \tag{4.143}$$

В линеаризованной системе при гармоническом задающем воздействии (4.142) ошибка в установившемся режиме будет также меняться по гармоническому закону с частотой  $\omega_k$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{max}} Sin(\omega_k t + \psi) \tag{4.144}$$

Точность системы в этом режиме может быть оценена по амплитуде ошибки, которая может быть найдена из (4.143) на основании символического метода подстановкой  $p = j\omega_k$ :

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{g_{\text{max}}}{|1 + W(j\omega_k)|} \tag{4.145}$$

Так как предполагается, что амплитуда ошибки значительно меньше амплитуды входного воздействия:  $\varepsilon_{\text{max}} \langle \langle g_{\text{max}} \rangle$ , то, следовательно, модуль знаменателя (4.145) значительно больше единицы. Это позволяет с большой точностью выражение (4.145) заменить приближенным

$$\varepsilon_{\text{max}} \approx \frac{g_{\text{max}}}{|W(j\omega_k)|} = \frac{g_{\text{max}}}{A(\omega_k)} ,$$
 (4.146)

где  $A(\omega_k)$  — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы  $\mathrm{пр}_{W} \ \omega = \omega_k \ .$ 

Последняя формула позволяет легко вычислять амплитуду ошибки в Для необходимо установившемся режиме. ЭТОГО располагать выражением для передаточной функции разомкнутой аналитическим либо иметь, экспериментально снятую амплитудную амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы. Формула (4.146) широко используется также при расчете системы методом логарифмических амплитудных частотных характеристик (ЛАХ). Простота выражения (4.146) позволяет легко решить обратную задачу, т. е. сформулировать требования к ЛАХ, которые необходимо выполнить, чтобы амплитуда ошибки в установившемся режиме была не больше заданной.

# Глава 5. Повышение качества регулирования автоматических систем

#### 5.1. Общие положения

Первой проблемой, которая решалась теорией автоматического регулирования, было обеспечение устойчивости автоматических систем. Позднее центральной задачей стало достижение необходимого качества регулирования.

Проблема обеспечения требуемых свойств линейных автоматических систем весьма сложна. В ней могут быть выделены прежде всего следующие частные задачи:

- --- обеспечение устойчивости (стабилизация);
- --- повышение запаса устойчивости (демпфирование);

--- повышение точности регулирования в установившихся режимах (уменьшение или устранение статической ошибки воспроизведения задающего воздействия, уменьшение или устранение влияния постоянных возмущений);

--- улучшение переходных процессов (увеличение быстродействия, максимальное уменьшение динамических ошибок воспроизведения воздействия и от возмущений).

Иногда несколько частных задач могут быть решены совместно, в других случаях они оказываются противоречивыми. В зависимости от назначения системы и предъявляемых к ней требований одни задачи становятся основными, а другие отодвигаются на второй план или снимаются.

Всякая система автоматического регулирования должна быть устойчивой. Однако запас устойчивости в системе стабилизации (с постоянным или редко изменяемым задающим воздействием) может быть значительно меньше, чем в следящей системе (с непрерывно или часто изменяющимся задающим воздействием). Если параметры регулируемого объекта определены приближенно или могут изменяться в процессе эксплуатации системы, то необходим больший запас устойчивости, чем при точно установленных и неизменных параметрах.

В системах стабилизации обеспечивается максимально возможное или хотя бы необходимое уменьшение влияния возмущений. В следящих системах, кроме того, обеспечивается максимально возможное или необходимое быстродействие и уменьшение как статических, так и динамических ошибок воспроизведения задающего воздействия.

Требования в отношении быстродействия должны соответствовать мощности исполнительного элемента регулятора. Использование элементов для нужных преобразований сигнала управления не должно приводить к существенному повышению уровня помех, присутствующих в задающем воздействии.

Когда устойчивость и необходимое качество не могут быть достигнуты простым изменением параметров системы (коэффициентов передачи, постоянных

времени отдельных звеньев), тогда эта задача решается введением в систему дополнительных устройств (звеньев), называемых корректирующими.

Когда корректирующие устройства используются именно для получения устойчивости системы регулирования или для повышения ее запаса устойчивости, они называются иногда демпфирующими или стабилизирующими звеньями. При этом имеется в виду, что звенья демпфируют колебания, которые возникают в системе регулирования.

Проблема получения в САУ требуемых точности в типовых режимах, запасов устойчивости и быстродействия — является единой.

Корректирующие звенья в большинстве случаев представляют собой типовые динамические звенья, основное назначение которых изменять свойства САУ в нужном направлении, например, изменить качество переходного процесса.

Корректирующие звенья могут быть выполнены из различных по физической природе элементов: электрических, механических, гидравлических и т. д. Наиболее простой реализацией являются корректирующие звенья из RC и RL активных и пассивных элементов.

## 5.2. Виды коррекции

Корректирующие звенья могут включаться последовательно (рис. 5.1a), параллельно – встречно (рис. 5.1b) и согласно - параллельно (рис. 5.1б) с основными звеньями САУ.

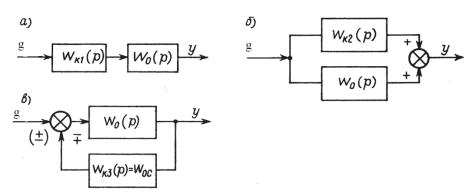


Рис. 5.1. Способы включения корректирующих звеньев (устройств)

Они представляют собой звенья, вводимые в САУ для изменения ее динамических и статических свойств.

Для линейных САУ все виды соединений корректирующих звеньев эквивалентны. Каждое из них дает полностью подобные в динамическом отношении САУ. Эквивалентность корректирующих звеньев может быть получена из условий равенства W(p):

$$W_{_{91}} = W_{_{92}} = W_{_{93}}$$
, или  $W_{_{K1}}W_{_0} = W_{_0} + W_{_{K2}} = \frac{W_{_0}}{1 \pm W_{_0}W_{_{K3}}}$ . (5.1)

Тогда можно получить шесть формул перехода от корректирующих звеньев одного типа к корректирующим звеньям другого типа:

$$W_{\kappa 1}(p) = \frac{1}{1 \pm W_0 W_{\kappa 3}} = \frac{W_0 + W_{\kappa 2}}{W_0}$$
 (5.2)

$$W_{\kappa 2}(p) = W_0(W_{\kappa 1} - 1) = \mp \frac{W_0^2 W_{\kappa 3}}{1 \pm W_0 W_{\kappa 3}}$$
 (5.3)

$$W_{\kappa 3}(p) = W_{oc}(p) = \pm \frac{1 - W_{\kappa 1}}{W_0 W_{\kappa 1}} = \mp \frac{W_{\kappa 2}}{W_0^2 + W_0 W_{\kappa 2}}$$
 (5.4)

Линейные корректирующие звенья (пассивные, активные) подразделяются на пять групп:

- --- с запаздыванием по фазе и изменением ЛАХ на 20 дБ/дек;
- --- с запаздыванием по фазе и изменением ЛАХ на -40дБ/дек;
- --- с опережением по фазе и изменением ЛАХ на +20 дБ/дек;
- --- с опережением или запаздыванием по фазе и изменением ЛАХ на  $\pm 20$  дБ/дек или  $\pm 40$ дБ/дек (корректирующие звенья комбинированного типа).

## 5.3. Корректирующие звенья последовательного типа

Корректирующие звенья последовательного типа применяются в САУ с электрическим сигналом в виде напряжения постоянного тока U, который функционально связан с ошибкой  $\varepsilon$ , т. е. U = f( $\varepsilon$ ) Например, U = k $\varepsilon$ . Корректирующее звено реализуется на пассивных или активных RLC-элементах (чаще на элементах RC).

Если сигнал - модулированное напряжение переменного тока, то применение пассивных RC-элементов, хотя принципиально и возможно, но практически затруднительно из-за их сложности.

Для модулирующего сигнала в настоящее время применяют обычно только последовательные корректирующие звенья, например, дифференцирующие звенья с симметричными характеристиками относительно несущей частоты. Звено должно подавлять несущую частоту, т. е. выделять полезную огибающую сигнала.

Широкое применение получили следующие последовательные корректирующие звенья: пропорционально-дифференцирующие (ПД), пропорционально-интегрирующие (ПИ), пропорционально – интегродифференцирующие (ПИД).

**1. Пропорционально-дифференцирующее звено**. Идеальное ПД - звено имеет следующую передаточную функцию:

$$W_{n\partial}(p) = k_n \pm k_{\partial} p = k_n \left( 1 \pm \frac{k_{\partial}}{k_n} p \right) = k_n (1 \pm T_{\partial} p)$$
 (5.5)

 $_{\Gamma \text{Д}e} T_{_{\text{Д}}} = k_{_{\text{Д}}}/k_{_{\text{П}}}.$ 

Выходная величина звена содержит две составляющие — пропорциональную входной величине с коэффициентом  $k_\Pi$  и пропорциональную с коэффициентом  $\pm\,k_\Pi$  ее первой производной.

Пропорционально-дифференцирующие (ПД) звенья, создающие на выходе, кроме того, составляющую, пропорциональную второй производной, являются ПДД или П $\mathbb{Z}^2$  -звеньями. Это соответствует последовательному включению двух П $\mathbb{Z}$  - звеньев:

$$W(p) = k_{n1}k_{n2}(1 + T_{\partial 1}p)(1 + T_{\partial 2}p) = k_n[T_{\partial 1}T_{\partial 2}p^2 + (T_{\partial 1} + T_{\partial 2})p + 1]$$
 (5.6)

 $\Gamma$ де  $k_{\pi} = k_{\pi 1} k_{\pi 2}$ .

Введение воздействия по производной с помощью ПД -звена изменяет значение коэффициента при р в первой степени в многочлене D(p) замкнутой САУ. Применение  $\Pi \Pi^2$  -звена (со второй производной) или двух  $\Pi \Pi$  - звеньев

приводит к изменению коэффициента при  $p^2$  и т. д. Это изменяет условия устойчивости и качество переходных процессов в САУ. Например, применение ПД - звеньев позволяет сделать структурно неустойчивые САУ структурно устойчивыми, т. е. обеспечивает устойчивость САУ с астатизмом выше первого порядка. Следовательно, САУ с астатизмом порядка v > 1 может быть сделана структурно устойчивой при введении положительных воздействий по производным от первого до (v - 1)-го порядка.

Можно аналогично показать, что с помощью ПД - воздействий можно сделать устойчивой САУ, структурно неустойчивую из-за наличия в ней неустойчивых звеньев (B D(p)есть члены отрицательными коэффициентами). Применение дополнительных воздействий ПО производным соответствующего порядка позволяет изменить в D(p) знак этих коэффициентов.

Если ПД - звено соединить со статическим звеном первого порядка, то получим

$$W_{_{91}}(p) = W_{_{0}}(p)W_{_{K1}}(p) = \frac{(k_{_{n}} \pm k_{_{\partial}}p)k_{_{0}}}{T_{_{0}}p + 1} = k_{_{0}}k_{_{n}}\frac{1 \pm Tp}{1 + T_{_{0}}p}$$
(5.7)

$$h(t) = k_{\pi} h_0(t) \pm k_{\pi} h_0'(t) , \qquad (5.8)$$

где  $h_0(t)$  — переходная функция статического звена.

Переходные характеристики такого соединения приведены на рис. 5.2.

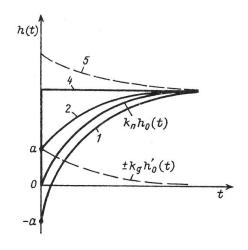


Рис. 5.2. Переходные характеристики.

Здесь характеристике 1 соответствует отрицательное воздействие по производной ( $k_{\rm g} < 0$ ), 2 — такое же, но положительное воздействие ( $k_{\rm g} > 0$ ). Положительное ПД - воздействие повышает быстродействие в САУ. При  $T_{\rm g}^{-1} T_0$  (характеристика 4) получается идеальное безынерционное звено, когда  $W_{\rm sl}(p) = k_{\rm n} k_0$ ; при  $T_{\rm g} > T_0$  — характеристика 5.

Влияние ПД - воздействий на переходную характеристику инерционного звена любого порядка аналогично выше рассмотренному случаю, но чем выше порядок  $W_0(p)$ , тем выше порядок производной, требуемый для полной компенсации инерционности (требуются дополнительные воздействия до соответствующей порядку  $W_0(p)$  производной). Практическое применение нашли дополнительные воздействия по производным первого и второго порядков. Более высокие производные используются редко.

Положительное ПД - воздействие форсирует течение переходного процесса (убыстряет его); отрицательное ПД - воздействие замедляет течение переходного процесса.

На рис. 5.3 приведены ЛАХ и ФЧХ ПД - звена, обратные частотным характеристикам статического звена первого порядка. ПД - звено является фильтром верхних частот, так как ЛАХ растет с увеличением частоты, и расширяет полосу пропускания САУ, т.е. повышает ее быстродействие. ФЧХ ПД - звена положительна; звено уменьшает суммарное запаздывание по фазе в САУ (до 90° при  $\omega \to \infty$ ).

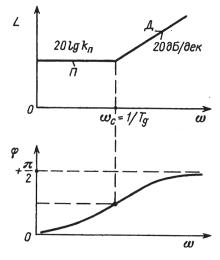


Рис. 5.3. ЛАХ и ФЧХ ПД - звена

Реальное ПД - звено обычно обладает инерционностью, его передаточная функция

$$W_{n\partial}(p) = \frac{k_n \pm k_{\partial} p}{T_{n\partial} p + 1} = k_n \frac{1 \pm T_{\partial} p}{1 + T_{n\partial} p}$$
 (5.9)

где 
$$T_{_{\! \varPi}} = k_{_{\! \varPi}}/k_{_{\! \varPi}}$$
;  $T_{_{\! \varPi} J} << T_{_{\! \varPi}}$ ;

 $k_{\rm n}\!\!=\!\!k_{\rm n}\!/T_{\rm n}$  - коэффициент передачи звена.

Инерционное ПД - звено представляет собой последовательное соединение идеального ПД - звена и статического звена первого порядка. Это звено влияет слабее на быстродействие и соответственно на область устойчивости САУ; при  $T_{\rm d} = T_{\rm nd}$  влияние уменьшается до нуля (рис. 5.4a).

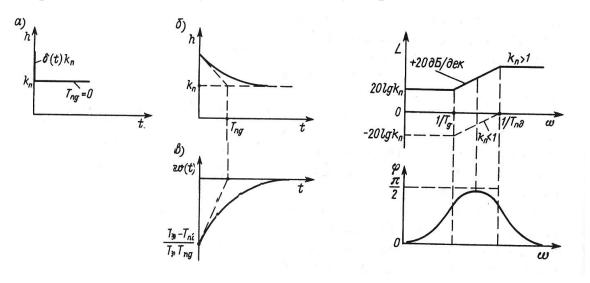


Рис. 5.4. Инерционное ПД - звено

Рис. 5.5. Частотные характеристики ПД - инерционного звена

Форсирующее действие звена происходит за счет начального всплеска характеристики:

$$h(t) = (k_n + (1 - k_n)e^{-t/T_{no}}) \cdot 1(t)$$
(5.10)

над уровнем ступеньки (рис. 5.4б).

Весовая функция

$$w(t) = \delta(t) - \left(\frac{T_{\delta} - T_{n\delta}}{T_{\delta}T_{n\delta}} e^{-t/T_{n\delta}}\right) \cdot 1(t) . \tag{5.11}$$

приведена на рис. 5.4в.

При  $T_{\text{пд}} = 0$  звено становится идеальным ПД - звеном.

Частотные характеристики ПД - инерционного звена представляют собой сумму характеристик идеального звена и инерционного звена первого порядка; ПД - звено подавляет нижние частоты (рис. 5.5).

# **2. Пропорционально-интегрирующее звено (ПИ-звено).** Идеальное ПИ-звено имеет передаточную функцию

$$W_{nu}(p) = \frac{k_u}{p} \pm k_n = k_n \frac{1 \pm T_u p}{T_u p} = \frac{k_u}{p} (1 \pm T_u p);$$
 (5.12)

реальное ПИ-звено —

$$W_{nu}(p) = \frac{\frac{k_u}{p} \pm k_n}{T_{nu}p + 1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{k_u \pm k_n p}{T_{nu}p + 1} = k_n \frac{1 \pm T_u p}{T_u p (1 + T_{nu} p)} = \frac{k_u}{p} \cdot \frac{1 \pm T_u p}{1 + T_{nu} p}, \quad (5.13)$$

где 
$$T_{_{\rm II}}=k_{_{
m II}}/k_{_{
m II}}$$

Таким образом, ПИ-звено эквивалентно последовательному соединению интегрирующего звена и ПД - звена.

ПИ-звено обычно применяют для повышения порядка астатизма при сохранении устойчивости и необходимого качества переходных процессов. При этом знак для воздействия по интегралу должен быть положительным; знак воздействия по производной может быть любым.

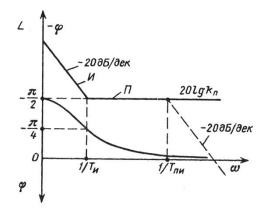


Рис. 5.6. Частотные свойства ПИ-звена

Частотные свойства ПИ-звена, как фильтра нижних частот, «обратные» таковым у ПД - звена (рис. 5.6). Здесь пунктиром показано изменение ЛАХ при наличии инерционности звена.

#### 3. Пропорциональное интегродифференцирующее (ПИД) звено. Идеальное

ПИД - звено имеет передаточную функцию

$$W_{nuo}(p) = \frac{k_u}{p} \pm k_n \pm k_o p = \frac{k_u}{p} \left( 1 \pm \frac{k_n}{k_u} p \pm \frac{k_o}{k_u} p^2 \right) = \frac{k_n (1 \pm T_u p \pm T_u T_o p^2)}{T_u p}$$
(5.14)

Реальное ПИД -звено-

$$W_{nu\partial}(p) = \frac{\frac{k_u}{p} \pm k_n \pm k_\partial p}{T_{nu\partial} p + 1} = \frac{k_u}{p} \left( \frac{\pm T_\partial T_u p^2 \pm T_u p + 1}{T_{nu\partial} p + 1} \right) = \frac{k_n}{T_u p} \cdot \frac{(1 \pm T_u p \pm T_\partial T_u p^2)}{(T_{nu\partial} p + 1)}$$
(5.15)

где  $T_{\scriptscriptstyle \text{II}} = k_{\scriptscriptstyle \text{II}}/k_{\scriptscriptstyle \text{II}}$  ,  $T_{\scriptscriptstyle \text{II}} = k_{\scriptscriptstyle \text{II}}/k_{\scriptscriptstyle \text{II}}$ 

ПИД - звено эквивалентно последовательному соединению либо интегрирующего звена и ПД - звена с воздействиями по двум производным, либо ПИ-звена и ПД -звена с одной производной. ПИД - звено повышает порядок астатизма (как и ПИ-звено); дает более сильную коррекцию динамических свойств САУ.

Выбирая параметры  $T_{u}$ ,  $T_{д}$ ,  $T_{пид}$ , можно получить временные характеристики звена, позволяющие отнести его к звеньям форсирующего типа. При этом ПИД - звено в области средних частот подавляет сигнал (рис. 5.7).

На частотах  $\omega \to 0$  и  $\omega \to \infty$  звено не вносит фазовых искажений, вносит отрицательный фазовый сдвиг в нижней части области средних частот, положительный фазовый сдвиг — в верхней части области средних частот.

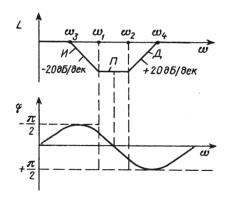


Рис. 5.7. Частотные свойства ПИД - звена

В общем случае реальное ПИД – звено имеет передаточную функцию вида:

$$W(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + 1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$
 (5.16)

где  $T_1, T_2, T_3, T_4$  определяются по формулам:

$$T_{1,2} = \frac{2b_0}{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}, \qquad T_{3,4} = \frac{2a_0}{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$
 (5.17)

ЛАХ звена имеют на средних частотах «корытообразную» форму. Обычно справедливы соотношения  $T_3 > T_1 > T_2 > T_4$ . Здесь  $T_1$ ,  $T_2$ — постоянные времени числителя,  $T_3$ ,  $T_4$  — знаменателя. Звено пропускает нижние и высокие частоты подавляя средние.

Для коррекции динамических свойств САУ используют также ПИДД - или  $\Pi U Д^2$ -звенья с воздействием по первой и второй производной.

# 5.4. Параллельно-встречное корректирующее устройство

показано на рис.5.1в. В данном случае корректирующее устройство (рис. 5.1в) является обратной связью, чаще всего отрицательной, которая охватывает один из элементов прямой цепи системы. Этим элементом обычно является исполнительный элемент или выходной каскад усилителя (усилитель мощности). Такое корректирующее устройство называют параллельным. Его передаточную функцию будем обозначать  $W_{k3}$ .

Передаточная функция участка цепи с параллельным корректирующим устройством

$$W_0' = \frac{W_0}{1 + W_0 W_{\kappa 3}} \tag{5.18}$$

Обычно в достаточно широком и существенном для качества системы диапазоне частот справедливо неравенство

$$|W(j\omega)W_{\kappa 3}(j\omega)|\rangle\rangle 1.$$
 (5.19)

Тогда в этом диапазоне частот

$$W_0'(j\omega) \approx 1/W_{\kappa 3}(j\omega) \tag{5.20}$$

Таким образом, при удовлетворении неравенства (5.19) свойства участка цепи с параллельным корректирующим устройством определяются только лишь свойствами этого корректирующего устройства.

Указанное обстоятельство является большим достоинством параллельного корректирующего устройства. При удовлетворении неравенства (5.19) $\mathbf{W}_0$ свойства участка прямой цепи, охваченного параллельным корректирующим устройством, и его изменения в процессе действия системы не влияют на ее свойства. Несущественные нелинейности этого участка и изменения его параметров (коэффициентов передаточной функции  $W_0$ ) не сказываются на динамических свойствах системы. Это справедливо только при неизменных параметрах самого параллельного корректирующего устройства. Достоинство данного корректирующего устройства также в том, что его вход подключен к выходу исполнительного элемента или усилителя мощности, т. е. к выходу мощного элемента с высоким уровнем сигнала. Поэтому в качестве параллельных корректирующих устройств могут быть использованы даже достаточно мощные элементы. Но широко используют и пассивные четырехполюсники постоянного тока, и тогда весьма просто обеспечить сложное преобразование сигнала участком параллельным цепи  $\mathbf{c}$ корректирующим устройством. Следует заметить, что влияние местных обратных связей, реализующих параллельные корректирующие устройства, весьма разнообразно.

**Корректирующие обратные связи делятся на жесткие и гибкие.** Жесткая обратная связь действует на систему, как в переходном, так и в установившемся режиме, т.е.  $W_{\mathcal{H}OC}(0) \neq 0$ , и реализуется она безынерционным или инерционным звеном. Гибкая обратная связь действует лишь в переходных режимах, реализуется она или чисто дифференцирующим с передаточной функцией

$$W_0(s) = k_0 s (5.21)$$

или инерционно-дифференцирующим звеном

$$W_0(s) = \frac{k_0 s}{T_0 s + 1} . {(5.22)}$$

Предположим, что звено с передаточной функцией W охвачено отрицательной обратной связью с передаточной функцией  $W_0$ . Тогда эквивалентная передаточная функция этого участка цепи

$$W_3 = W/(1 + WW_0) \tag{5.23}$$

**Пример 5.1.** Пусть апериодическое звено охвачено жесткой обратной связью, т. е.

$$W = k/(Ts+1)$$
  $W_0 = k_0$ . (5.24)

В этом случае

$$W_{9} = \frac{k}{T_{8} + 1 + kk_{0}} = \frac{k_{9}}{T_{9}s + 1} , \qquad (5.25)$$

где  $k_{\ni} = k/(1 + kk_0)$  и  $T_{\ni} = T/(1 + kk_0)$ .

Таким образом, жесткая отрицательная обратная связь не изменяет структуру апериодического звена, но уменьшает его инерционность, т. е. уменьшает постоянную времени. Одновременно уменьшается передаточный коэффициент звена.

Если обратная связь гибкая, т. е.  $W_0 = k_0 s$ , то

$$W_{9} = \frac{k}{Ts + 1 + kk_{0}s} = \frac{k}{T_{3}s + 1},$$
 (5.26)

где  $T_{\mathfrak{B}} = T + kk_0$ .

Следовательно, гибкая отрицательная обратная связь не изменяет структуру и не влияет на передаточный коэффициент апериодического звена. Она лишь увеличивает его инерционность — его постоянную времени.

**Пример 5.2.** Пусть интегрирующее звено охвачено жесткой обратной связью W = k/s и  $W_0 = k_0$ . В этом случае

$$W_{9} = \frac{k}{s + kk_{0}} = \frac{k_{9}}{T_{9}s + 1} , \qquad (5.27)$$

где  $k_{\mathfrak{I}} = 1/k_{\mathfrak{I}}$ ;  $T_{\mathfrak{I}} = 1/(kk_{\mathfrak{I}})$ .

Таким образом, жесткая отрицательная обратная связь превращает интегрирующее звено в апериодическое.

Если обратная связь гибкая, т. е.  $W_0 = k_0 s$ , то

$$W_{9} = \frac{k}{s + kk_{0}s} = \frac{k_{9}}{s} , \qquad (5.28)$$

где  $k_{9} = k/(1 + kk_{0})$ .

Гибкая обратная связь не изменяет структуру интегрирующего звена, но уменьшает его передаточный коэффициент (увеличивает постоянную времени интегрирования  $T_9 = 1/k_9$ ).

**Пример 5.3.** Предположим, что колебательное звено охвачено жесткой обратной связью, т. е.

$$W = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad \text{if } W_0 = k_0.$$
 (5.29)

При этом

$$W_{9} = \frac{k}{T^{2}s^{2} + 2\xi Ts + 1 + kk_{0}} = \frac{k_{9}}{T_{2}^{2}s^{2} + 2\xi_{9}T_{9}s + 1},$$
 (5.30)

где 
$$k_{9} = \frac{k}{1 + kk_{0}}$$
;  $T_{9} = \frac{T}{\sqrt{1 + kk_{0}}}$ ;  $\xi_{9} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + kk_{0}}}$  (5.31)

Жесткая отрицательная обратная связь не изменяет структуру колебательного звена, но уменьшает постоянную времени и коэффициент демпфирования. Уменьшается также передаточный коэффициент звена.

При гибкой обратной связи возможны два варианта.

Если 
$$k_0 \langle 2T(1-\xi)/k, \qquad (5.32)$$

TO 
$$W_{\mathfrak{I}} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 + k k_0 s} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi_{\mathfrak{I}} T s + 1} , \qquad (5.33)$$

где  $\xi_{\vartheta} = \xi + kk_0/(2T)$ 

Слабая отрицательная гибкая связь не изменяет структуру колебательного звена и лишь увеличивает его коэффициент демпфирования.

Если же 
$$k_0 \rangle 2T(1-\xi)/k$$
, (5.34)

TO 
$$W_{9} = \frac{k}{(T_{1}s+1)(T_{2}s+1)} , \qquad (5.35)$$

где 
$$T_1 = 0.5(r + \sqrt{r^2 - 4T^2});$$
  $T_2 = 0.5(r - \sqrt{r^2 - 4T^2});$   $r = 2\xi T + kk_0.$  (5.36)

Сильная отрицательная гибкая связь превращает колебательное звено в последовательное соединение двух апериодических звеньев.

**Пример 5.4.** Предположим, что идеальное усилительное звено охвачено инерционной обратной связью, т. е.

$$W = k, W_0 = \frac{k_0}{T_0 s + 1} . (5.37)$$

Тогда

$$W_{\mathcal{I}} = \frac{k(T_0 s + 1)}{T_0 s + 1 + k k_0} = k_{\mathcal{I}} (T_0 s + 1)$$
 (5.38)

где 
$$k_9 = k/(1 + kk_0)$$
;  $T_9 = T_0/(1 + kk_0)$ . (5.39)

Таким образом, инерционная отрицательная обратная связь (OOC) превращает идеальное усилительное звено в реальное форсирующее звено, создающее производные от входного сигнала.

Из рассмотренных примеров можно заключить, что даже простейшие отрицательные обратные связи могут существенно изменить свойства типовых динамических звеньев. Еще больший эффект дают сложные отрицательные и положительные обратные связи. Если основные элементы регулятора по своей физической природе позволяют создать обратные связи, то динамические свойства этих элементов зачастую могут быть изменены в нужном направлении.

Корректирующие устройства (звенья) в виде обратной связи (ОС) находят наиболее широкое распространение вследствие удобства технической реализации и обладают следующими достоинствами:

--- простота — вследствие того, что на вход элемента ОС поступает обычно сигнал высокого уровня с выхода САУ, что не только не требует применения

усилителей, но, напротив, требует ослабления сигнала для его согласования с входным сигналом;

--- в реальной САУ, как правило, всегда имеют место нелинейности (силы трения, люфт, зазор, зона нечувствительности и т. д.), которые при охвате САУ отрицательной ОС (ООС) существенно ослабляют свое влияние на процессы управления. Поэтому использование ООС с  $W_{K3}(p) = W_{oc}(p)$  по сравнению с  $W_{K1}$  и  $W_{K2}$  дает возможность улучшить переходный процесс в САУ;

--- ООС дает лучший эффект, когда в САУ вследствие действия внешних факторов (t°, t и т. д.) изменяются параметры — коэффициенты усиления, постоянные времени и др., т. е. ООС стабилизирует параметры САУ или участка САУ, охваченного ООС.

Благодаря перечисленным достоинствам ООС нашла широкое распространение в технике САУ.

В целом влияние различных корректирующих звеньев сводится к созданию в САУ управляющих воздействий по производным и интегралам, дополнительных воздействий в контуре САУ в виде корректирующих обратных связей вокруг отдельных частей системы и корректирующих воздействий в функции внешних возмущений f и их производных p<sup>к</sup> f.

Корректирующие обратные связи применяются (в основном как отрицательные) для уменьшения влияния инерционности и нелинейности звена, нестабильности его параметров во времени; влияние положительной ОС противоположно влиянию ООС на вышеуказанные свойства.

Обратные связи в динамическом отношении могут оказывать самое различное действие. Аналогично последовательным корректирующим звеньям их можно разделить на три основных вида: подавляющие высокие частоты (аналоги — интегрирующие звенья); подавляющие нижние частоты (аналоги — дифференцирующие звенья); подавляющие средние частоты (аналоги — ПИД - звенья).

Аналогию обратным связям с видом последовательного корректирующего звена можно установить при помощи формул перехода. Расчетным путем при синтезе САУ наиболее просто определяются параметры последовательных корректирующих звеньев. Поэтому обычно важно иметь возможность перехода от последовательного корректирующего звена с передаточной функцией к эквивалентной обратной связи.

Жесткая ООС  $(k_{oc})$  (если  $W_0(p)$  — колебательное звено второго порядка), снижая инерционность, одновременно увеличивает его колебательность, что нежелательно, так как может способствовать росту колебательности в целом САУ.

Если  $W_0(p) = k_0/p$ , то применение ООС (с  $k_{oc}$ ) снижает порядок астатизма системы и соответственно ведет к улучшению ее устойчивости и качества переходных процессов. Например, обычно жесткой ООС охватывают электрические и гидравлические двигатели, используемые в качестве исполнительных для перемещения органов управления объектами (двигатели — интегрирующие звенья, если их выходная величина — перемещение или угол поворота вала).

Инерционность ООС приводит к увеличению быстродействия САУ за счет замедления роста сигнала обратной связи на ее входе, что эквивалентно введению форсирующего воздействия по производной (как при применении ПД - звена). Инерционность ПОС, наоборот, затягивает переходной процесс. Гибкая обратная связь, например  $W_{oc}(p) = k_{oc}p$ , не влияя на коэффициент передачи охватывающего звена, изменяет коэффициент при р в знаменателе передаточной функции  $W_0(p)$ . Например, если

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1} , \qquad (5.40)$$

TO 
$$W_{3}(p) = \frac{k_{0}}{(T_{0} \pm k_{0}k_{OC})p + 1}$$
 (5.41)

Здесь ООС увеличивает постоянную времени, а положительная — уменьшает. Следовательно, применение положительной гибкой обратной

связи повышает быстродействие (форсирует входной сигнал) без уменьшения коэффициента передачи; отрицательная гибкая обратная связь, наоборот, затягивает переходной процесс.

В случае звена второго порядка гибкая ООС увеличивает  $T_2$  и, соответственно,  $\xi = T_2/2T_1$ , т.е. является эффективным средством уменьшения колебательности.

# 5.5. Согласно - параллельное корректирующее устройство

Включенное таким образом корректирующее устройство будем называть согласно (прямым) - параллельным и его передаточную функцию будем обозначать  $W_{K2}$  (рис. 5.1б).

Обычно эти звенья применяют при формировании алгоритмов управления, например ПИ, ПИД - и др., в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный закон управления с введением  $d\epsilon/dt$ ,  $\int \epsilon dt$  и других функций от  $\epsilon$  (ошибки), например в виде ПИ-устройств (изодромных).

Введение интегралов от ошибки управления  $\int edt$  соответствует поднятию нижних частот и преследует цель уменьшить значение установившейся ошибки управления (или сделать ее равной 0).

Введение производных от є соответствует поднятию верхних частот и преследует цель увеличить запас устойчивости системы.

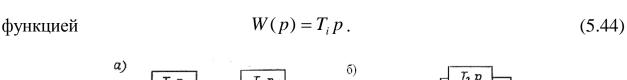
При этом для разных вариантов включения дифференцирующих звеньев в схему (рис. 5.9) получим соответственно разные передаточные функции. Для схемы, изображенной на рис. 5.9а, результирующая передаточная функция будет:

$$W_{31}(p) = (1 + T_2 p)T_1 p + 1 = T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1$$
(5.42)

а для второй (рис. 5.9б):

$$W_{22}(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1$$
 (5.43)

В них используются идеальные дифференцирующие звенья с передаточной



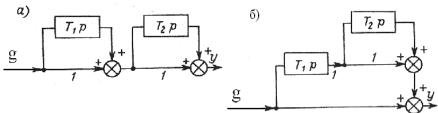


Рис. 5.9. Варианты включения согласно - параллельных корректирующих звеньев.

Иногда прямое параллельное корректирующее устройство оказывается весьма удобным, так как при меньшей сложности обеспечивает нужное преобразование сигнала управления.

### 5.6. Преобразовательные элементы

Корректирующие устройства систем регулирования осуществляют преобразование сигнала управления. С этой целью их составляют из элементов, которые называют преобразовательными. Используются (наиболее электрические широко), механические, гидравлические, пневматические и иные преобразовательные элементы.

**1.** Пассивные четырехполюсники постоянного тока. Это электрические цепи из резисторов, конденсаторов и индуктивностей. Общая схема пассивного четырехполюсника показана на рис. 5.10.

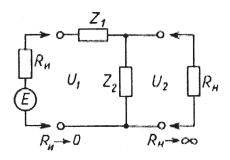


Рис. 5.10. Схема пассивного четырехполюсника

Входное и выходное напряжения постоянного тока обозначены соответственно через  $u_1$  и  $u_2$  ;

$$z_1(s) = R_1 + \frac{1}{C_1 s} + L_1 s$$
 и  $z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} + L_2 s$  — операторы сопротивлений

четырехполюсника;  $R_i$ ,  $C_i$ ,  $L_i$  — соответственно активные сопротивления, емкости и индуктивности;  $Z_{\scriptscriptstyle H}$  — полное сопротивление нагрузки.

Если напряжение  $u_2$  приложено к нагрузке с бесконечно большим полным сопротивлением  $R_{\rm H}$ , то передаточная функция пассивного четырехполюсника

$$W_n(s) = \frac{z_2(s)}{z_1(s) + z_2(s)}$$
 (5.45)

Варьируя вид операторов сопротивлений  $Z_1$  (s) и  $Z_2$  (s) и значения  $R_i$ ,  $C_i$ ,  $L_i$  можно получить большое количество четырехполюсников, описываемых различными передаточными функциями  $W_n$ . Стоимость пассивных четырехполюсников низкая, а стабильность параметров достаточно высокая. Этими достоинствами объясняется широкое использование их в системах автоматического регулирования, у которых сигналом управления является напряжение постоянного тока.

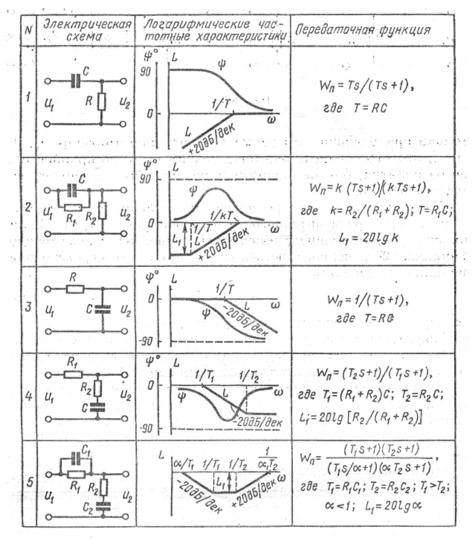
Основной недостаток пассивных четырехполюсников заключается в том, что они ослабляют сигнал; кроме того, при конечном значении полного сопротивления нагрузки преобразование сигнала отклоняется от желаемого, соответствующего виду передаточной функции  $W_n$ , составленной по (5.45).

Наиболее характерные схемы пассивных четырехполюсников постоянного тока показаны в табл.5.1. Там же приведены их передаточные функции и логарифмические частотные характеристики.

Принято разделять четырехполюсники на дифференцирующие, интегрирующие и интегродифференцирующие. Дифференцирующие четырехполюсники - (схемы 1 и 2 в табл.5.1) в определенном диапазоне частот дифференцируют сигнал и создают положительный сдвиг по фазе. Интегрирующие четырехполюсники (схемы 3, 4 в табл. 5.1) в некотором диапазоне частот обеспечивают интегрирование сигнала и создают

отрицательный сдвиг по фазе. Интегродифференцирующие четырехполюсники (схема 5 в табл.5.1) в одном диапазоне дифференцируют сигнал, а в другом диапазоне его интегрируют.

 $\label{eq:Ta} T\ a\ б\ л\ u\ ц\ a\ 5.1.$  Схемы пассивных четырехполюсников постоянного тока



Иногда оказывается целесообразным соединить два пассивных четырехполюсника последовательно (рис. 5.11, a).

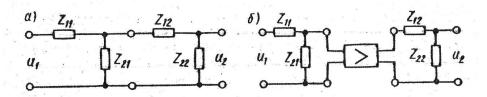


Рис. 5.11. Схема соединения двух пассивных четырехполюсников Передаточную функцию такого соединения определяют по формуле

$$W_{2} = W_{n1}W_{n2} \tag{5.46}$$

только при условии, что сумма полного сопротивления  $z_{12}+z_{22}$  второго четырехполюсника значительно, по крайней мере на порядок, больше полного сопротивления  $z_{21}$  первого четырехполюсника.

Чаще пассивные четырехполюсники соединяют последовательно через разделительный усилитель (рис. 5.116). Если входное сопротивление усилителя не влияет на передаточную функцию  $W_{\Pi I}$  первого четырехполюсника, то передаточная функция соединения

$$W_{3} = W_{n1} k_{y} W_{n2} , \qquad (5.47)$$

где  $k_v$  — передаточный коэффициент усилителя.

**2. Активные четырехполюсники постоянного тока.** Общая схема такого четырехполюсника представлена на рис. 5.12.

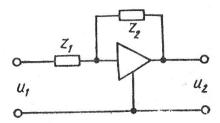


Рис. 5.12. Схема активного четырехполюсника постоянного тока

В активных четырехполюсниках используются операционные усилители с весьма большим передаточным коэффициентом ( $k_y$  до  $10^7$ ), поэтому передаточная функция четырехполюсника с достаточной точностью равна

$$W_a = -Z_1 / Z_2 {5.48}$$

Знак минус указывает на то, что знак напряжения  $u_2$  противоположен знаку  $u_1$  (фаза сигнала изменяется на  $180^\circ$ ).

Активные четырехполюсники удается выполнять так, что они осуществляют почти идеальное дифференцирование или интегрирование сигнала в ограниченной Передаточный коэффициент полосе частот. может быть значительным. Легко осуществить суммирование нескольких сигналов на входе. Bce существенные ЭТО весьма достоинства активных

четырехполюсников. Однако они значительно сложнее и дороже пассивных четырехполюсников.

В табл. 5.2 приведены простейшие схемы активных четырехполюсников, их передаточные функции и частотные характеристики.

Таблица5.2. Схемы активных четырехполюсников

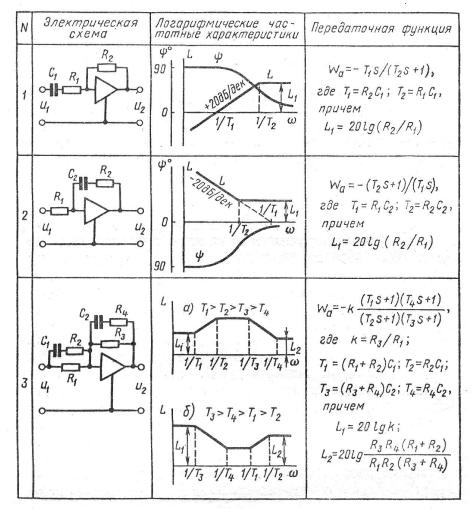


Схема 1 является дифференцирующей, при  $R_1=0$  ее передаточная функция принимает вид

$$W_a = -T_1 s \tag{5.49}$$

Схема 2 — интегрирующая, при  $R_2 = 0$  ее передаточная функция

$$W_a = -1/(Ts)$$
 (5.50)

Схема 3 — интегродифференцирующая.

Варьируя операторы сопротивлений  $z_1(s)$  и  $z_2(s)$  и параметры их элементов, можно получить активные четырехполюсники с более сложными

передаточными функциями.

**3.** Такие Пассивные четырехполюсники переменного тока. четырехполюсники преобразуют сигнал, являющийся модулированным напряжением переменного тока. Выполняются они резисторов конденсаторов и обеспечивают приближенное дифференцирование сигнала (огибающей модулированного напряжения) в некотором диапазоне частот. При этом частота ω изменения сигнала должна быть значительно (по крайней мере на порядок) меньше несущей частоты  $\omega_{\rm H}$ , т. е. частоты переменного тока. Недостаток этих четырехполюсников еще и в том, что изменение несущей частоты ω<sub>н</sub> заметно влияет на их динамические свойства. На рис.5.13 приведены схема и приближенная эквивалентная ЛАЧХ одного из пассивных четырехполюсников переменного тока.

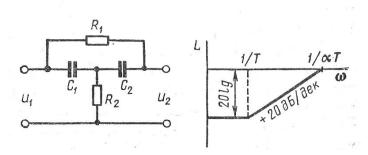


Рис. 5.13. Схема и приближенная эквивалентная ЛАЧХ пассивных четырехполюсника переменного тока.

Его приближенная эквивалентная передаточная функция

$$W = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \tag{5.51}$$

где  $T = 2R_1C_1C_2(C_1 + C_2)$ ;

$$\alpha = \frac{R_2(C_1 + C_2)}{R_1C_2 + R_2(C_1 + C_2)} \langle 1$$
 (5.52)

Недостатки пассивных четырехполюсников переменного тока и однообразие их свойств ведут к использованию в цепях с модулированным сигналом пассивных четырехполюсников постоянного тока.

# 5.7. Повышение точности в установившихся режимах

В системе регулирования по отклонению установившаяся ошибка имеет три составляющие:

$$\varepsilon_{ycm} = \varepsilon_g + \varepsilon_f + \varepsilon_{Y.3.} \tag{5.53}$$

где  $\mathcal{E}_g$  — ошибка воспроизведения задающего воздействия;

 $\varepsilon_{\scriptscriptstyle f}$  — ошибка, вызываемая действием возмущений;

 $\mathcal{E}_{Y.Э.}$  — ошибка чувствительного элемента, измеряющего рассогласование.

Составляющая  $\mathcal{E}_{Y,\mathfrak{I}}$  зависит от физической природы и конструкции чувствительного элемента. Она может быть уменьшена лишь использованием высокоточного элемента. При этом может потребоваться снижение уровня сравниваемых сигналов и, следовательно, увеличение передаточных коэффициентов остальных элементов регулятора.

Как было показано в гл. 4, установившаяся ошибка может быть представлена в виде ряда (4.4). При этом коэффициенты ошибок воспроизведения  $C_0$ ,  $C_1$ , ...,  $C_m$  вычисляют по передаточной функции  $W_{g\varepsilon}(s)$  замкнутой системы для ошибки воспроизведения. Коэффициенты ошибки от возмущения  $C_{0f}$ ,  $C_{1f}$  ...,  $C_{mf}$  — по передаточной функции  $W_{f\varepsilon}(s)$  замкнутой системы для ошибки относительно возмущения вычисляются по формулам (4.9).

Нужно заметить, что в статической системе

$$C_0 = 1/(1+k)$$
;  $C_{0f} = k_f/(1+k)$ , (5.54)

где k — передаточный коэффициент разомкнутой системы;  $k_f$  — передаточный коэффициент прямой цепи от возмущения f до выходной координаты y.

Следовательно, уменьшение установившейся ошибки при постоянных значениях задающего воздействия и возмущения достигается увеличением передаточного коэффициента разомкнутой системы. Однако с увеличением

статической точности, в большинстве, случаев, уменьшаются запасы устойчивости и при значительном увеличении k система становится неустойчивой.

**Пример 5.5**. Противоречие между статической точностью и устойчивостью проиллюстрировано на рис. 5.13, где сплошными линиями показаны логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы с передаточной функцией

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$
 (5.55)

при k = 20,  $T_1 = 0.5c$ ,  $T_2 = 0.025c$ ,  $T_3 = 0.01c$ .

Если передаточный коэффициент увеличить до k=60, то ЛАЧХ принимает положение, показанное пунктиром. Частота среза увеличилась и запас устойчивости по фазе уменьшился с  $\gamma=26^\circ$  до  $\gamma_1=3^\circ$ . Столь малый запас по фазе совершенно недопустим.

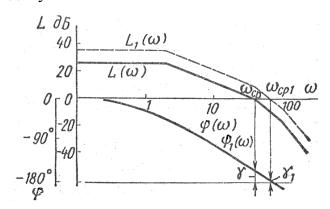


Рис. 5.13. Противоречие между статической точностью и устойчивостью

При повышении статической точности путем увеличения передаточного коэффициента k разомкнутой системы необходимы мероприятия для обеспечения достаточного запаса устойчивости.

Другой путь повышения статической точности — обеспечение астатизма. В астатической системе младшие коэффициенты ошибки имеют следующие значения:  $C_0 = 0$ ;  $C_1 = 1 \ / \ k_v$ ;  $C_{0f} = 0$ ;  $C_{lf} = k_f \ / \ k_v$ ,

где  $k_v$  — передаточный коэффициент разомкнутой системы, называемый в данном случае добротностью системы по скорости (или коэффициентом

добротности по скорости). Таким образом, в астатической системе отсутствует установившаяся ошибка от постоянного задающего воздействия и постоянных возмущений.

Астатизм достигается введением интегрирующего звена в прямую цепь системы. Для астатизма относительно возмущения интегрирующее звено должно быть введено до точки, в которой приложено возмущение (рис. 5.14).

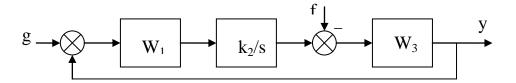


Рис. 5.14. Система с интегрирующим звеном

Влияние интегрирующего звена на динамические свойства системы приведено на рис. 5.15, где сплошными линиями показаны логарифмические частотные характеристики системы с передаточной функцией (5.55). При введении в разомкнутую цепь этой системы интегрирующего звена характеристики принимают положение, показанное пунктиром. Фазочастотная характеристика переместилась вниз на —90°, а амплитудно-частотная характеристика повернулась вокруг точки «а» по направлению часовой стрелки. В результате запас устойчивости по фазе уменьшился с  $\gamma = 26^{\circ}$  до недопустимо малого значения  $\gamma_1 = 6^{\circ}$ . Система остается устойчивой, но переходный процесс будет сильно колебательным. Кроме того уменьшилась частота среза, и переходные процессы будут более продолжительными.

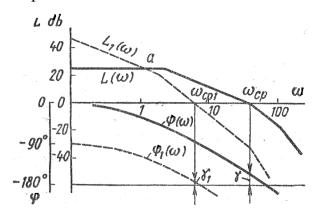


Рис. 5.15. Влияние интегрирующего звена на динамические свойства системы

Однако в других ситуациях введение интегрирующего звена может не только не ухудшить, а даже улучшить динамические свойства системы. Пусть, например, постоянные времени системы с передаточной функцией (5.55) имеют следующие значения:  $T_1 = 0.05c$ ,  $T_2 = 0.0025c$  и  $T_3 = 0.001$  с. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы показаны на рис. 5.16 сплошными линиями. При введении интегрирующего звена характеристики принимают положение, пунктирными линиями. В данном показанное случае интегрирующее звено уменьшило частоту среза, но запас устойчивости по фазе увеличился с  $\gamma = 21^{\circ}$  до  $\gamma_1 = 43^{\circ}$ . Хотя быстродействие системы уменьшилось, но уменьшилась и колебательность.

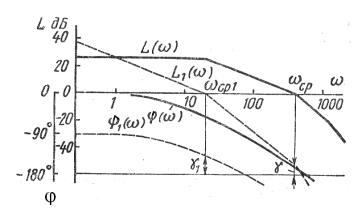


Рис. 5.16. Улучшение динамических свойств системы

Таким образом, при повышении статической точности путем введения интегрирующего звена могут оказаться необходимыми мероприятия по сохранению запасов устойчивости САУ.

Значительно лучшие результаты получают при получении астатизма с помощью изодромного звена, т. е. звена с передаточной функцией

$$W_{u}(s) = \frac{k_{u}(T_{u}s+1)}{s}$$
 (5.56)

где  $T_{II} = 1/k_{II}$  — постоянная времени изодрома.

Если постоянная времени  $T_{II}$  достаточно велика, то запас устойчивости может быть сохранен неизменным. Уменьшение передаточного коэффициента разомкнутой системы должно быть скомпенсировано увеличением

коэффициента усиления усилителя. Следует учитывать, что при большом значении  $T_{H}$ , могут увеличиться старшие коэффициенты ошибки.

Астатизм САУ относительно задающего воздействия можно обеспечить более простыми способами: неединичной обратной связью и масштабированием.

Структурная схема системы с неединичной обратной связью показана на рис. 5.17,а.

В установившемся режиме регулируемая координата связана с постоянным задающим воздействием соотношением

$$y = \frac{k_{\pi}g_0}{(1 + k_{\pi}k_0)} , \qquad (5.57)$$

где к<sub>п</sub> — передаточный коэффициент прямой цепи системы.

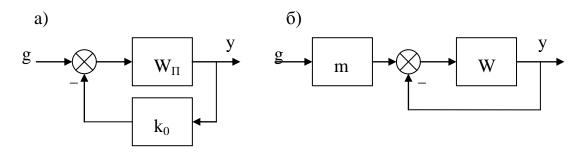


Рис. 5.17. Структурная схема системы с неединичной обратной связью (a); структурная схема системы с масштабированием входной величины (б)

Если выполнить основную обратную связь системы с коэффициентом  $k_0 = 1 - 1/k_{\Pi}$ , то  $y = g_0$  и система относительно задающего воздействия будет астатической.

Структурная схема системы с масштабированием входной величины показана на рис. 5.17 б. Ее особенность — наличие усилительного звена с передаточным коэффициентом m на входе. В установившемся режиме:

$$y = \frac{mg_0 k}{1+k} \tag{5.58}$$

где k — передаточный коэффициент разомкнутой системы.

При m = 1 + 1/k получаем  $y = g_0$  и система является астатической относительно задающего воздействия.

Недостаток этих способов в том, что астатизм обеспечивается только при сохранении указанных соотношений между передаточными коэффициентами. Неточное определение передаточного коэффициента какого-либо элемента системы и его изменение в процессе эксплуатации ведут к появлению статической ошибки. Астатизм, достигнутый введением интегрирующего или изодромного звена, сохраняется и при изменении параметров системы. Однако нужно иметь в виду, что введение двух интегрирующих звеньев в систему, состоящую из усилительных, апериодических и колебательных звеньев, сделает ее структурно-неустойчивой. Возможно обеспечение астатизма и более высокого порядка. При этом из-за введения большого числа интегрирующих или изодромных звеньев и мероприятий, обеспечивающих требуемые динамические свойства, структура САУ значительно усложняется.

Рассмотренные выше способы улучшения статических и динамических свойств системы связаны лишь с изменениями параметров элементов САУ и структуры ее отдельных участков, но при этом не затрагивают принципа действия системы. Помимо принципа регулирования по отклонению существует принцип регулирования по внешнему воздействию. Значительный эффект дает их одновременное использование. В этом случае системы называются комбинированными. Кроме замкнутого контура они имеют дополнительную цепь влияния внешнего воздействия — возмущения или задающего.

**Комбинированное регулирование** используют в системах для уменьшения влияния сильного возмущения. Это возможно в том случае, если возмущение доступно измерению. При этом в системе создается дополнительная цепь воздействия основного возмущения. На рис. 5.18 показана структурная схема такой системы.

Здесь  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  и  $W_4$  — передаточные функции регулируемого объекта, исполнительного элемента и. двух каскадов усилителя;  $W_5$  и  $W_6$  - передаточные функции измерительного и преобразовательного элементов дополнительной цепи воздействия возмущения f. Эта дополнительная цепь должна компен-

сировать влияние возмущения f на регулируемую координату у, поэтому ее следует называть компенсирующей. Компенсирующую цепь обычно включают в прямую цепь системы между каскадами усилителя или на вход последовательного корректирующего устройства (если таковое имеется).

Составим передаточную функцию замкнутой системы (рис. 5.18) относительно возмущения:

$$W_{fy} = \frac{W_6(W_{\kappa \mu}W_3W_5 - 1)}{1 + W} \tag{5.59}$$

где  $W_{\text{KII}} = W_2 W_4$  - передаточная функция компенсирующей цепи;

 $W = W_1 W_3 W_5 W_6\,$  - передаточная функция разомкнутого контура.

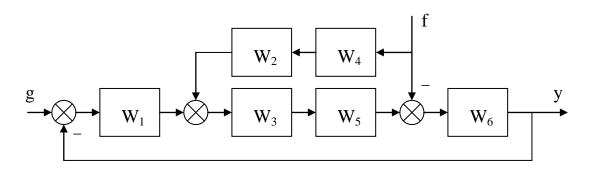


Рис. 5.18. Структурная схема системы с дополнительной цепью воздействия основного возмущения.

Если

$$W_3 W_5 W_{KII} = 1 , (5.60)$$

то передаточная функция системы относительно возмущения f равна нулю и возмущение f не влияет на регулируемую координату. В этом случае говорят, что регулируемая координата у инвариантна (независима) от возмущения f. Равенство (5.60) является условием полной инвариантности от f. Полной (с точностью до переходной составляющей) инвариантностью называют независимость регулируемой координаты у от изменений возмущения f — независимость функций y(t) от вида функции f(t). Однако начальные значения возмущения и его производных создают переходную составляющую регулируемой координаты. Если же и начальные значения возмущения и его

производных не влияют на регулируемую координату, то имеет место абсолютная инвариантность, для достижения которой необходимо удовлетворение дополнительных условий. Так, в рассматриваемой системе абсолютная инвариантность будет иметь место только при безынерционных элементах  $W_3$ ,  $W_5$ ,  $W_4$  и  $W_2$ .

Удовлетворение условия полной инвариантности (5.60) чаще всего сопряжено со значительными трудностями из-за инерционности основных элементов. Пусть, например,

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + T_1 S}$$
;  $W_2 = \frac{k_2}{T_2^2 S^2 + 2\xi T_2 S + 1}$ ;  $W_3 = \frac{k_3}{1 + T_3 S}$ ;  $W_4 = k_4$ . (5.61)

Подставив эти выражения в (5.60), получаем условие инвариантности:

$$W_{\kappa\mu} = \frac{1}{W_2 W_3} = k_{\kappa\mu} (T_3 s + 1) (T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1) = k_{\kappa\mu} [T_3 T_2^2 s^2 + (T_2^2 + 2\xi T_2 T_3) s^2 + (T_3 + 2\xi T_2) s + 1]$$
(5.62)

где 
$$k_{KII} = (k_2 k_3)^{-1}$$
.

В данном случае для полной инвариантности преобразовательный элемент компенсирующей цепи должен создавать первую, вторую и третью производные сигнала измерительного элемента. Практически ограничиваются созданием производных не выше второй, так как многократное дифференцирование сигнала сложно, неточно и ведет к сильному повышению уровня помех.

Предположим, что компенсирующая цепь выполняется с передаточной функцией

$$W_{\kappa \mu} = k_{\kappa \mu} [(T_3 + 2\xi T_2)s + 1] \tag{5.63}$$

т. е. ее преобразовательный элемент создает только первую производную от входного сигнала. Тогда из (5.59) получаем

$$W_{fy} = \frac{-k_1 [T_2^2 T_2 s + (T_2^2 + 2\xi T_2 T_3) s^2]}{(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2 k_3 k_4}$$
(5.64)

При выбранной компенсирующей цепи возмущение и его первая производная не будут влиять на регулируемую координату. Однако старшие производные возмущения, начиная со второй, будут оказывать влияние на регулируемую

координату так же, как и при отсутствии компенсирующей цепи. В данном случае будет достигнута частичная (до первой производной включительно) инвариантность у от f. Чем глаже функция f(t), тем эффективнее ее компенсация. При частичной инвариантности начальные значения возмущения и всех его производных будут создавать переходную составляющую у так же, как и при полной инвариантности.

Однако выбранная передаточная функция компенсирующей цепи не может быть реализована. Физически реализуема лишь такая передаточная функция, у которой степень числителя не выше степени знаменателя. Следовательно, в рассматриваемом примере компенсирующая цепь может быть выполнена лишь с передаточной функцией

$$W_{\kappa II} = \frac{k_{\kappa II}[(T_3 + 2\xi T_2)s + 1]}{\tau s + 1}$$
 (5.65)

где au — достаточно малая постоянная времени.

Указанное обстоятельство препятствует точному удовлетворению условия инвариантности. Такую же роль играют неточности в определении параметров реальных элементов и погрешности при выполнении элементов по выбранной передаточной функции (хотя она принципиально и может быть реализована). В результате передаточная функция системы относительно возмущения даже в лучшем случае (когда компенсирующей цепью создается нужное количество производных) оказывается не равной нулю, но с достаточно малыми коэффициентами числителя. Тогда и влияние возмущения на регулируемую координату оказывается весьма малым. Принято говорить, что достигается инвариантность с точностью до малой величины є.

Несмотря на указанные трудности и даже, чаще всего, невозможность достижения полной и тем более абсолютной инвариантности, комбинированное регулирование имеет большие достоинства. Компенсирующая цепь практически устраняет или хотя бы существенно уменьшает влияние основного возмущения. Вследствие этого снижаются требования к замкнутому контуру регулирования. В системе стабилизации ОН тэжом иметь меньший передаточный коэффициент разомкнутой цепи, уменьшаются трудности обеспечения его устойчивости и достаточного запаса устойчивости. При наличии компенсирующей цепи по возмущению замкнутый контур менее сложен. Следует заметить, что компенсирующая цепь не влияет на устойчивость замкнутого контура. Однако сама компенсирующая цепь должна быть устойчивой.

Иногда вызывает затруднения измерение возмущения. Тогда используют некоторые приемы, позволяющие приближаться к инвариантности регулируемой координаты от возмущения без непосредственного измерения последнего. В частности, создается компаундирующая связь, т. е. дополнительная связь внутри замкнутого контура регулирования по одной из его промежуточных координат, зависящих от возмущения (несущих информацию о возмущении).

Основной целью следящих систем является более точное воспроизведение регулируемой координатой изменяющегося задающего воздействия. Этому способствует дополнительная цепь по задающему воздействию. Следящую систему в этом случае называют комбинированной следящей системой, ее типичная структурная схема показана на рис. 5.19. Здесь замкнутый контур такой же, как и на рис. 5.18, а  $W_{\varphi}$  — передаточная функция дополнительной цепи.

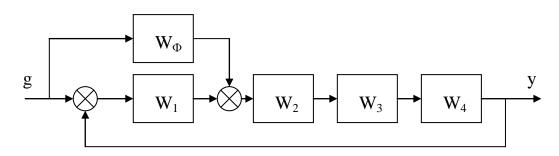


Рис. 5.19. Комбинированная следящая система

Эта цепь улучшает воспроизведение регулируемой координатой задающего воздействия, так как форсирует переходные процессы при изменении g, и ее следует называть форсирующей цепью. Она чаще всего состоит только из преобразовательного элемента. Включается форсирующая цепь в замкнутый

контур так же, как и компенсирующая, т. е. обычно между каскадами усилителя.

В комбинированной следящей системе воспроизведение задающего воздействия обеспечивается главным образом форсирующей цепью. Замкнутый контур играет в этом отношении второстепенную роль. Его основная задача — уменьшение влияния возмущений.

По структурной схеме комбинированной следящей системы (рис. 5.19) определяем передаточные функции относительно задающего воздействия:

$$W_g = \frac{W(1 + \frac{W_\phi}{W_1})}{1 + W} \tag{5.66}$$

и для ошибки слежения:

$$W_{\varepsilon} = \frac{1 - \frac{WW_{\phi}}{W_{1}}}{1 + W} \tag{5.67}$$

где:  $W = W_1 W_2 W_3 W_4$ .

Если

$$W_{\phi} = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{W_2 W_2 W_4} \,, \tag{5.68}$$

то передаточная функция относительно задающего воздействия обращается в единицу, а передаточная функция для ошибки слежения — в нуль. Следовательно, (5.68) — это условие инвариантности ошибки слежения є от задающего воздействия, или условие идеального воспроизведения выходной координатой у задающего воздействия g.

Выполнение (5.68) связано с большими трудностями, нежели выполнение (5.60). Причина в том, что сигнал форсирующей цепи должен преодолеть не только инерционность исполнительного элемента регулятора, но и регулируемого объекта.

Ранее указывалось на практическую невозможность создания производных выше второго порядка, поэтому в комбинированных следящих системах

достигается лишь частичная инвариантность ошибки є от задающего воздействия g до нулевой, первой или второй производной включительно. Это означает соответственно астатизм первого, второго и третьего порядков относительно задающего воздействия.

Неизбежная (хотя и незначительная) инерционность дифференцирующих элементов, а также неточности в определении параметров и изготовлении элементов регулятора ведут к тому, что и частичная инвариантность обеспечивается лишь с точностью до малой величины  $\delta$ .

Несмотря на это, комбинированное регулирование значительно увеличивает точность слежения и находит широкое применение. Чем медленнее изменяется задающее воздействие g, тем больший эффект дает частичная инвариантность  $\delta$  от g.

При наличии форсирующей цепи роль замкнутого контура следящей системы уменьшается и он может быть выполнен из более простых элементов. Форсирующая цепь не влияет на устойчивость замкнутого контура, но сама эта цепь должна быть устойчивой.

Если в комбинированной следящей системе имеется сильное возмущение, то точность слежения может быть увеличена еще более созданием компенсирующей связи по этому возмущению. Преобразовательные элементы обеих цепей частично могут быть объединены, и может оказаться, что для создания компенсирующей цепи потребуется только элемент, измеряющий возмущение.

# 5.8. Способы увеличения запасов устойчивости САУ

Увеличение запаса устойчивости, стабилизация и демпфирование САУ связаны с изменением коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$  дифференциального уравнения САУ (или полюсов и нулей) таким образом, чтобы САУ имела наибольшие запасы устойчивости. Так как передаточная функция замкнутой САУ тесно связана с передаточной функцией разомкнутой САУ, то это приводит к

изменению коэффициентов дифференциального уравнения разомкнутой САУ.

Если САУ в разомкнутом состоянии устойчива (не имеет полюсов в правой полуплоскости), то по виду ее АФХ, в соответствии с критерием Найквиста, можно судить об устойчивости САУ. Демпфирование САУ связано с деформацией АФХ таким образом, чтобы кривая не охватывала критическую точку и была удалена от нее на требуемые запасы устойчивости (h,  $\gamma$ ). Удаление АФХ от критической точки определяют на основании какогонибудь критерия качества. Наиболее просто удаление определяется с помощью показателя колебательности М (например,  $\gamma_M = \arcsin(1/M_3)$  для САУ с r = 1). АФХ не должна заходить внутрь окружности, соответствующей заданному значению  $M_3 = \text{const}$  (рис. 5.20).

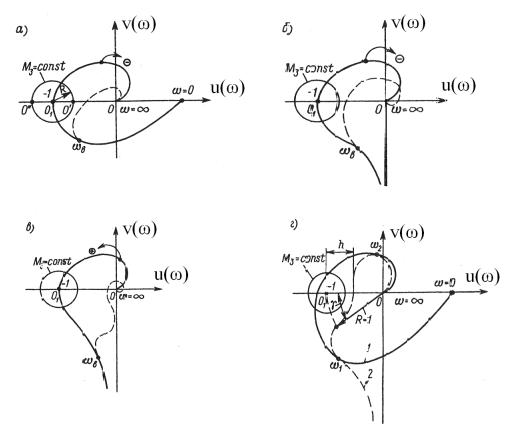


Рис. 5.20. Способы деформации АФХ

Деформация АФХ (стабилизация и демпфирование САУ) осуществляется тремя основными способами с помощью корректирующих звеньев различного вида, например последовательных корректирующих звеньев.

**1.** Деформация **АФХ** с подавлением высоких частот. Идея способа заключается в том, чтобы, так деформировать **АФХ** разомкнутой САУ  $W_p(j\omega)$  в области высоких частот  $\omega \rangle \omega_B$ , чтобы она имела желаемый вид по  $M_3$  (рис. 5.20a).

Подавление усиления на высоких частотах всегда сопровождается появлением отрицательных фазовых сдвигов - $\Delta \phi(\omega)$ . Этот способ наиболее просто реализуется в статических САУ посредством введения в прямой канал управления САУ апериодического звена первого порядка с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{1 + T_0 p} \tag{5.69}$$

с большой постоянной времени  $T_0$ , и  $k_0=1$ . Если  $k_0\neq 1$ , то должно выдерживаться соотношение

$$k_0 / T_0 = \omega_c = const ag{5.70}$$

так, чтобы

$$W_p(p) = k/(T_0 p + 1).$$
 (5.71)

В астатической САУ первого порядка, состоящей из минимально - фазовых звеньев, желаемый запас устойчивости может быть всегда получен при введении последовательного ПИ - звена. В САУ с астатизмом r=2 запас устойчивости может быть получен подавлением высоких  $\omega$  только в некоторых случаях.

**Пример 5.6**. Разомкнутая система описывается передаточной функцией (5.55) при k = 100,  $T_1 = 0.05c$ ,  $T_2 = 0.01c$  и  $T_3 = 0.001c$ . В разомкнутом состоянии система устойчива. Ее логарифмические частотные характеристики, изображенные на рис. 5.21 сплошными линиями, свидетельствуют о неустойчивости замкнутой системы, так как фаза достигает —180° при частоте, меньшей частоты среза.

Введем в прямую цепь системы дополнительное звено с передаточной функцией:

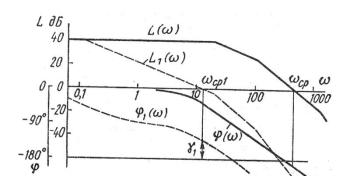


Рис. 5.21. Л..А.Х. разомкнутой системы

$$W_{\mathcal{A}} = \frac{1}{T_{\mathcal{A}}s + 1} , \qquad (5.72)$$

где  $T_{\pi} = 8c$ . Тогда характеристики системы принимают положение, показанное на рис. 5.21 пунктирными линиями, и на основании их можно видеть, что замкнутая система становится устойчивой. Запас по фазе составляет  $\gamma_1 = 51^\circ$ . времени Т<sub>л</sub> дополнительного Увеличением постоянной звена устойчивости по фазе можно увеличить. Устойчивость достигнута введением апериодического звена, постоянная времени которого значительно больше постоянных времени имеющихся апериодических звеньев. При ЭТОМ высокочастотная часть логарифмической амплитудно-частотной характеристики сместилась вниз. Так же изменилась и логарифмическая фазочастотная характеристика.

Апериодическое звено с большой постоянной времени представляет собой фильтр низких частот и подавляет высокочастотные помехи. В этом достоинство данного вида демпфирования. Значительное уменьшение частоты среза и, следовательно, быстродействия системы является весьма существенным недостатком.

Кроме этого, демпфирование САУ может быть осуществлено и более сложными корректирующими звеньями. Например, путем введения ПИ-звена (или его аналогов) с передаточными функциями вида:  $W(p) = \frac{T_u \, p + 1}{T_u \, p}$ ,  $1/T_u \, p$ ,

 $\frac{Tp+1}{T_{_{\rm H}}p+1}(T_{_{\rm H}})$ Т) и др. Этот способ увеличения запасов устойчивости получил еще название демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов

(запаздывание по фазе), которое вызывает «закручивание» - поворот АЧХ почасовой стрелке (рис. 5.20б).

2. Деформация АФХ с поднятием высоких частот. Идея способа состоит в том, чтобы развернуть высокочастотную часть АФХ в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Тогда система за счет деформации АФХ приобрела бы требуемые запасы устойчивости (рис. 5.20в). Положительный сдвиг АФХ САУ производится с помощью дифференцирующих звеньев, которые дают фазовые упреждения (опережения) или положительный сдвиг по фазе +  $\Delta \phi(\omega)$ . Таким образом, включая в прямой канал САУ звенья ПД - типа, например,  $W_{\kappa}(p) = 1 + T_{\mathcal{A}} p$ , будем получать дополнительный положительный фазовый сдвиг:  $+ \varphi_{\kappa}(\omega) = arctg\omega T_{\mathcal{A}}$ . При  $\omega \ge \omega_{\mathcal{B}} \to \infty$   $\varphi_{\kappa}(\omega) \to 90^{\circ}$ , что и вызывает «закручивание» конца АФХ относительно начала координат в высокочастотной области.

Однако наряду с внесением положительного фазового сдвига одновременно с возрастанием  $\omega$  возрастает и модуль корректирующего звена  $A_{\kappa}(\omega) = \sqrt{1+\omega^2 T_{\mathcal{A}}^2}$ ; возрастает коэффициент передачи и, следовательно, через систему будут проходить высокочастотные помехи.

Если сдвиг по фазе от одного звена оказался недостаточным, необходимо включение двух дифференциальных звеньев:

$$W_{\kappa}(p) = (1 + T_{\mathcal{A}_1} p)(1 + T_{\mathcal{A}_2} p). \tag{5.73}$$

Тогда 
$$\varphi_{\kappa}(\omega) = arctgT_{\mathcal{I}_1} + arctgT_{\mathcal{I}_2}$$
. (5.74)

Однако при этом будет увеличиваться модуль, так как

$$A_{\kappa}(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_{\mathcal{I}_1}^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_{\mathcal{I}_2}^2}$$
 (5.75)

Тот же эффект можно получить, включая в прямой канал САУ пассивные дифференцирующие звенья с замедлением

$$W_{\kappa}(p) = \frac{k_{\mathcal{A}}(T_{\mathcal{A}}p+1)}{T_{\phi}p+1},$$
(5.76)

где k < 1,  $T_{\text{д}} \gg T_{\phi}$ . Эти звенья подавляют нижние частоты, а для высоких частот имеют модуль  $A_{\kappa}(\omega) \approx 1$ , т. е. положительный фазовый сдвиг вносится не за счет поднятия  $\omega_{\text{в}}$ , а за счет подавления низких частот. Так как здесь  $k_{\text{д}} < 1$ , а уменьшение коэффициента усиления  $\kappa_{\text{p}}$  допускать нельзя по условиям заданной точности, то требуется соответствующее увеличение коэффициента  $k_{\text{p}}$  в  $1/k_{\text{д}}$  раз.

Недостатком этого способа демпфирования является свободное прохождение повышенного уровня высокочастотных помех САУ. Последнее может нарушить ее работу. Достоинство способа - увеличение быстродействия САУ.

Способ повышения запасов устойчивости посредством введения дифференцирующих звеньев (или их аналогов в виде ОС) позволяет для всех систем (в том числе неминимально - фазовых) получить требуемые запасы устойчивости и повысить быстродействие САУ. Иногда для ограничения уровня помех применяют специальные узко- и широкополосные фильтры, что усложняет САУ.

**Пример 5.7.** Предположим, что в рассматриваемую систему с передаточной функцией (5.55) введено дополнительно идеальное форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_{\perp} = T_{\perp} s + 1, \qquad (5.77)$$

где  $T_{\pi}=0.01$ с. На рис. 5.22 изображены логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи исходной системы (сплошные линии) и системы с дополнительным звеном (пунктирные линии).

В замкнутом состоянии система с дополнительным звеном будет устойчивой, запас по фазе составляет  $\gamma_1 = 43^\circ$ .

Теперь устойчивость достигнута введением не апериодического, а форсирующего звена. В результате высокочастотная часть ЛАЧХ сместилась вверх. Такое же изменение и у ЛФЧХ, поэтому данный прием называют

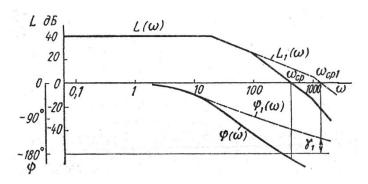


Рис. 5.22. Л.Ч.Х. разомкнутой цепи исходной системы (сплошные линии) и системы с дополнительным звеном (пунктирные линии).

демпфированием с поднятием высоких частот (демпфированием с внесением положительного фазового сдвига).

Введением форсирующего звена могут быть обеспечены устойчивость и необходимый запас устойчивости при любой передаточной функции исходной системы (если она становится структурно устойчивой). Одновременно увеличивается и быстродействие. Однако существенно увеличивается и влияние высокочастотных помех. Последнее обстоятельство является серьезным недостатком данного вида демпфирования и ограничивает его применение.

3. Деформация АФХ1 с подавлением средних частот. Идея способа заключается в том, что основные показатели качества системы, в том числе и запасы устойчивости, определяют средние частоты. Таким образом, если подобрать корректирующее звено, которое подавляет диапазон средних частот  $\omega_1$  -  $\omega_2$  ( рис. 5.20г), то можно получить желаемый вид AФX2 с требуемыми запасами устойчивости при практическом сохранении быстродействия САУ (ee пропускания). Технически способ осуществляется полосы ЭТОТ включением в прямую цепь управления интегродифференцирующих (ИД), ПИД - звеньев (или их аналогов в виде ОС). Этот способ является более универсальным и наиболее распространенным.

К этому способу примыкает по своим свойствам вариант демпфирования САУ с введением отрицательных фазовых сдвигов за счет использования неминимально - фазовых звеньев, например, с передаточной функцией:

$$W_{\kappa}(p) = \frac{1 - Tp}{1 + Tp} \tag{5.78}$$

$$_{\text{И с}} \varphi_{\kappa}(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \omega T. \tag{5.79}$$

Обычно его применяют в случае, когда разомкнутая САУ неустойчива (содержит консервативные звенья, колебательные звенья с малым затуханием и т. п.). В результате обеспечивается устойчивость и сохраняется быстродействие САУ, т. е. ее полоса пропускания, так как  $A_K(\omega) = 1$ . Использование других способов здесь затруднительно.

**Пример 5.8.** Оценим, как влияет на устойчивость изменение наиболее характерного параметра — постоянной времени апериодического звена.

На рис. 5.23 сплошными линиями изображены логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы с передаточной функцией (5.55).

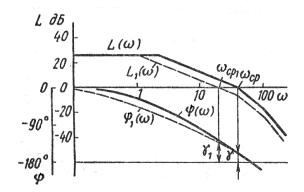


Рис. 5.23. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

При увеличении  $T_1$  с 0.5 до 1с характеристики принимают положение, показанное пунктирными линиями. Увеличение постоянной времени  $T_1$  приводит к увеличению запаса устойчивости по фазе  $\gamma = 26^\circ$  до  $\gamma_1 = 60^\circ$ . Заметим, что сопрягающая частота  $\omega_1 = 1/T_1$  расположена левее частоты среза  $\omega_{\rm cp}$ .

Если же сопрягающая частота апериодического звена расположена правее частоты среза  $\omega_{cp}$ , то увеличение постоянной времени этого звена уменьшит запас устойчивости. Очевидно, что изменение постоянной времени колебательного звена влияет на запас устойчивости аналогичным образом. Влияние постоянной времени форсирующего звена противоположно.

# Библиографический список

- 1. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов СПб.: Профессия, 2003. 752с.
- 2. *Востриков А.С.* Теория автоматического регулирования: учеб. пособие / А.С.Востриков, Г.А. Французова М.: Высшая школа, 2004. 365 с.
- 3. Теория автоматического управления, Ч.1 / Под ред. Воронова А.А. М.: Высшая школа, 1986. 367 с.
- 4. Теория автоматического управления: учебник / С.Е. Душин [и др.]; под общей ред. В.Б. Яковлева. М.: Высшая школа, 2003. 567с.
- 5. *Ерофеев А.А.* Теория автоматического управления: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. / Ерофеев А.А. СПб.: Политехника, 2002. 302с.
- 6. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т1. Линейные системы / Д.П. Ким. М.: Изд. физ. мат. лит, 2003. 288с.
- 7. *Макаров И. М.* Линейные автоматические системы: справочник / Макаров И. М., Менский Б.М. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1982. 504с
- 8. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. учеб. пособие / Мирошник И.В. СПб.: Питер, 2005. 336с.
- 9. *Никулин Е.А.* Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем: учеб. пособие / Е.А. Никулин. СПб.: БХВ Петербург, 2004. 640 с.
- 10. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления / А.А. Первозванский М.: Наука, 1986. 616с.
- 11. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов. М.: Наука, 1978. 256с.
- 12.Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп., Т1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656с.

- 13. *Страшинин Е.Э.* Основы теории автоматического управления. Ч.1: Линейные непрерывные системы управления: учеб. пособие / Е.Э. Страшинин Екатеринбург, УГТУ–УПИ, 2000. 214с.
- 14. *Юревич Е.И*. Теория автоматического управления / Е.И. Юревич. 3-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ Петербург, 2007. 560с.