

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Кархин

**ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПРИ СВАРКЕ И ПАЙКЕ**

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2011

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A$	– площадь, $\text{м}^2$
$a$	– температуропроводность, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$
$B$	– ширина, $\text{м}$
$b$	– коэффициент поверхностной теплоотдачи, $\text{с}^{-1}$
$C$	– коэффициент сосредоточенности источника, $\text{м}^{-2}$
$c\rho$	– объемная теплоемкость, $\text{Дж м}^{-3} \text{К}^{-1}$
$\text{grad}T$	– градиент температуры, $\text{К м}^{-1}$
$h$	– толщина тела, $\text{м}$
$K_0$	– модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка
$L$	– длина, $\text{м}$
$n$	– нормаль, $\text{м}$
$Q$	– количество теплоты (энергии), $\text{Дж}$
$Q_0$	– количество теплоты точечного источника, $\text{Дж}$
$Q_1$	– линейная плотность теплоты, погонная энергия, $\text{Дж м}^{-1}$
$Q_2$	– плоская плотность теплоты, плотность теплоты плоского источника, $\text{Дж м}^{-2}$
$Q_3$	– объемная плотность теплоты, плотность теплоты объемного источника, $\text{Дж м}^{-3}$
$q$	– мощность источника теплоты, $\text{Вт}$
$q_0$	– мощность точечного источника, $\text{Вт}$
$q_1$	– линейная плотность мощности источника, $\text{Вт м}^{-1}$
$q_2$	– плоская плотность мощности источника, плотность теплового потока, $\text{Вт м}^{-2}$
$q_{2S}$	– плотность теплового потока на поверхности тела, $\text{Вт м}^{-2}$
$q_3$	– объемная плотность мощности источника, $\text{Вт м}^{-3}$
$r$	– радиус, $\text{м}$
$r, \theta, z$	– цилиндрическая система координат, $\text{м}$
$S$	– поверхность, $\text{м}^2$
$T$	– температура, $\text{К}$
$T_0$	– начальная температура, $\text{К}$
$T_\infty$	– температура среды, начальная температура, $\text{К}$
$T_L$	– температура плавления, $\text{К}$
$T_S$	– температура поверхности тела, $\text{К}$
$t$	– время, $\text{с}$
$V$	– объем, $\text{м}^3$
$v$	– скорость движения источника теплоты, $\text{м с}^{-1}$
$w$	– скорость охлаждения, $w = -\partial T/\partial t$ , $\text{К с}^{-1}$
$x, y, z$	– прямоугольная система координат, $\text{м}$
$\alpha$	– коэффициент поверхностной теплоотдачи, $\text{Вт м}^{-2} \text{К}^{-1}$
$\delta$	– дельта-функция Дирака (1.20)
$\lambda$	– теплопроводность, $\text{Вт м}^{-1} \text{К}^{-1}$

$\xi, \eta, \zeta$  – координата источника, м  
 $\Phi$  – интеграл вероятности (2.18)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Тепловые процессы при сварке определяют плавление и кристаллизацию металла, физико-химические взаимодействия в жидкой сварочной ванне, структурные превращения, объемные изменения, кинетику сварочных напряжений и деформаций, диффузию и другие явления. Поэтому такие процессы оказывают существенное влияние на качество сварного соединения.

Значительный интерес к изучению тепловых процессов появился вместе с внедрением сварки в промышленность. Основы теории тепловых процессов при сварке были заложены в 1930-х годах (Н.Н. Рыкалин, D. Rosenthal). Большой вклад в теорию внесли также К.М. Гатовский, В.Ф. Демченко, В.И. Махненко, Н.Н. Прохоров, А.А. Углов и другие советские и иностранные исследователи.

Теория теплопроводности при сварке базируется на высшей математике и физике и используется при изучении практически всех сварочных дисциплин.

Целью учебного пособия по курсу «Основы теплопередачи при сварке» является современное освещение методов расчета температурных полей и термических циклов при различных способах сварки и родственных процессов (наплавки, напыления, пайки и термической резки). Излагаются аналитические методы решения температурных задач, основанные на методе источников. Значительное внимание уделяется численным методам, ориентированным на использование современной вычислительной техники (методы конечных разностей и конечных элементов).

# 1. Физические основы передачи теплоты при сварке

## 1.1. Основные понятия

*Температура* – физическая величина, характеризующая степень нагретости тела.

*Температурное поле* – это совокупность значений температуры  $T$  во всех точках тела в данный момент времени:

$$T = T(x, y, z, t) \text{ при } t = \text{const}, \quad (1.1)$$

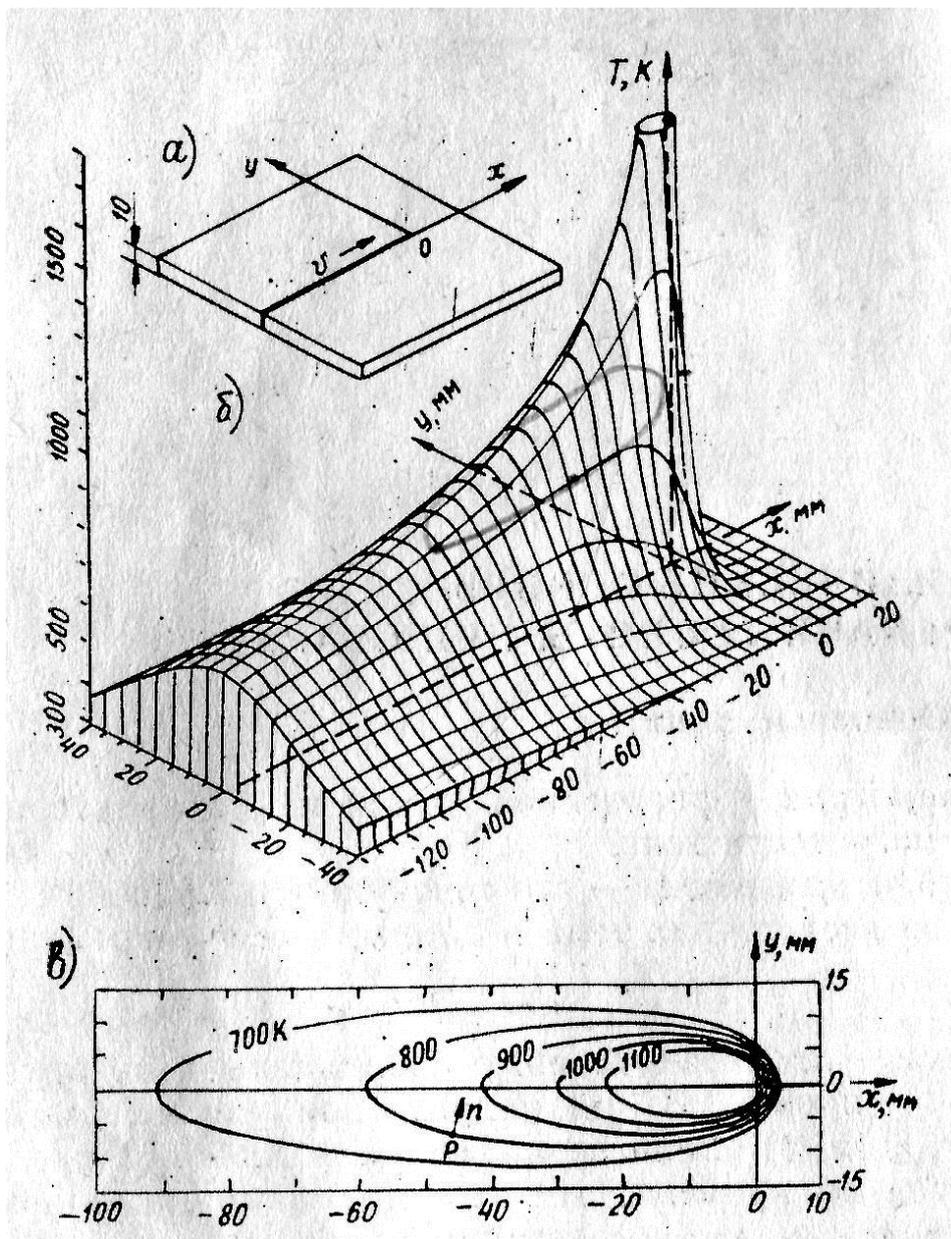
где  $x, y, z$  – пространственные координаты в декартовой системе;  $t$  – время. В цилиндрической системе координат  $T = T(r, \theta, z, t)$ . Если температура в любой точке тела не изменяется во времени, то поле называется стационарным, в противном случае оно нестационарное.

Температурное поле (1.1) является объемным (трехмерным). Оно может быть также плоским (двумерным),  $T = T(x, y, t)$ , или линейным (одномерным),  $T = T(x, t)$ . На рис. 1.1 показано плоское поле  $T(x, y, \infty)$  при сквозном прогреве пластины после продолжительного действия подвижного источника.

*Изотерма* – геометрическое место точек поля, имеющих одинаковую температуру (рис. 1.1, в). Изотермы не могут пересекаться, так как в одной и той же точке тела одновременно не может быть двух различных значений температуры.

Вдоль изотермы температура не изменяется. Наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотерме и он характеризуется *градиентом температуры* ( $\text{К м}^{-1}$ ):  $\text{grad}T = \partial T / \partial n$ . Градиент температуры в точке  $P$  есть вектор, направленный по нормали к изотерме в сторону возрастания температуры (см. рис. 1.1, в).

*Скорость охлаждения (нагрева) точки*  $x, y, z$  ( $\text{К с}^{-1}$ ) в момент  $t$  определяется производной  $\partial T / \partial t (x, y, z, t)$ .



**Рис. 1.1.** Температурное поле подвижного линейного источника теплоты в пластине толщиной 10 мм ( мощность  $q = 5$  кВт, скорость  $v = 5$  мм с<sup>-1</sup>, теплопроводность  $\lambda = 50$  Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>, температуропроводность  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>, коэффициент поверхностной теплоотдачи  $\alpha = 50$  Вт м<sup>-2</sup> К<sup>-1</sup>), начальная температура  $T_{\infty} = 300$  К): *a* – схема координатных осей; *б* – распределение температуры; *в* – изотермы.

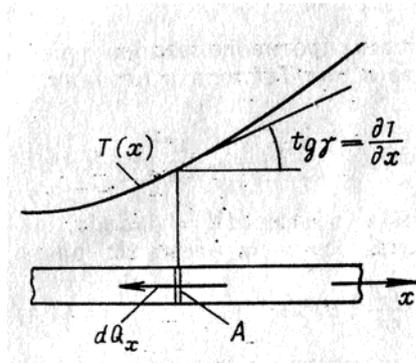
## 1.2. Закон теплопроводности Фурье

В твердом теле передача теплоты происходит от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой за счет молекулярной теплопроводности.

Рассмотрим теплопередачу в стержне с неравномерным распределением температуры  $T(x)$  (рис. 1.2). Количество теплоты  $dQ_x$  (Дж), протекающее через сечение стержня площадью  $A$  за время  $dt$ , пропорционально градиенту температуры  $\partial T/\partial x$ :

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} A dt, \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  – теплопроводность, Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>. Знак минус указывает на то, что теплота передаётся в сторону убывания температуры.



**Рис. 1.2.** Распределение температуры в стержне

Плотность теплового потока (Вт м<sup>-2</sup>) определяется по формуле

$$q_{2x} = \frac{dQ_x}{A dt} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

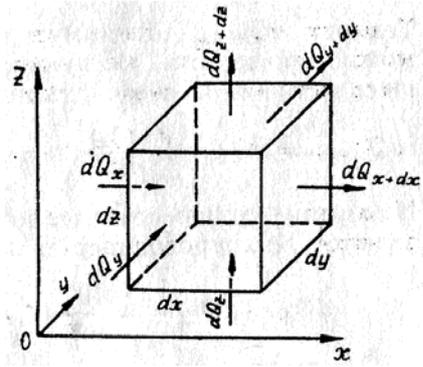
и равна количеству теплоты, протекающей через сечение 1 м<sup>2</sup> за 1 с. В общем трёхмерном случае закон теплопроводности Фурье для изотропного тела имеет вид

$$q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.3)$$

где  $n$  – нормаль (рис. 1.1, в).

### 1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Физический смысл дифференциального уравнения теплопроводности заключается в том, что оно связывает пространственное распределение температуры с изменением температуры во времени. Вывод основан на законе сохранения энергии и законе теплопроводности Фурье. Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  в ортотропном теле (рис. 1.3), то есть для общности будем считать, что теплопроводность по осям  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$  может отличаться. Пусть в нем действует источник (сток) теплоты с объемной плотностью мощности (удельной мощностью)  $q_3$ , Вт м<sup>-3</sup>. Таким источником может быть, например, джоулева теплота.



**Рис. 1.3.** К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Согласно закону теплопроводности Фурье (1.2), количество теплоты, подводимое к поверхности параллелепипеда  $dydz$  вдоль оси  $x$  за время  $dt$ ,

$$dQ_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} dydzdt .$$

Теплоту  $dQ_{x+dx}$ , отводимую через противоположную грань, можно определить, разложив ее в ряд Тейлора и ограничившись первыми двумя членами:

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial(dQ_x)}{\partial x} dx = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz dt .$$

Изменение количества теплоты в объеме  $dV = dx dy dz$ , вызванное теплопроводностью вдоль оси  $x$  за время  $dt$ , равно

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt . \quad (1.4)$$

Аналогично учитываются разности тепловых потоков вдоль осей  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} dQ_y - dQ_{y+dy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV dt ; \\ dQ_z - dQ_{z+dz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV dt . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Количество теплоты, выделенное (поглощенное) внутренним источником (стоком) теплоты в параллелепипеде за время  $dt$ , равно

$$dQ' = q_3 dV dt . \quad (1.6)$$

Накопленная теплота в объеме  $dV$  за время  $dt$  связана с изменением его температуры:

$$dQ = c\rho dV \frac{\partial T}{\partial t} dt, \quad (1.7)$$

где  $c\rho$  – объёмная теплоёмкость, Дж м<sup>-3</sup> К<sup>-1</sup>.

Приравняв накопленную теплоту (1.7) к теплоте, поступающей вследствие теплопроводности (1.4), (1.5) и действия внутренних источников (1.6), и разделив все на  $dVdt$ , получим дифференциальное уравнение теплопроводности для ортотропного тела в неподвижной относительно тела системе координат:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_3. \quad (1.8)$$

В уравнении (1.8) характеристики материала  $c\rho$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$  могут быть в общем случае функциями  $T$ , то есть это уравнение нелинейно.

Если принять, что теплопроводность  $\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$  и объёмная теплоёмкость  $c\rho$  не зависят от температуры и координат (тело однородно), уравнение (1.8) можно упростить:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_3}{c\rho} = a \nabla^2 T + \frac{q_3}{c\rho}, \quad (1.9)$$

где  $a = \lambda/(c\rho)$  – температуропроводность, м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа. Уравнение (1.9) относится к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка параболического типа. Пользуясь понятиями дивергенции и градиента, его можно записать в другом виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_3.$$

Для процессов стационарной теплопроводности ( $\partial T/\partial t = 0$ ) уравнение (1.9) принимает вид

$$\nabla^2 T + q_3/\lambda = 0$$

и называется уравнением Пуассона, а при  $q_3 = 0$  (отсутствии источников) – уравнением Лапласа. Эти уравнения относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа.

Уравнение (1.9) может быть записано в других системах координат. Например, учитывая связь между прямоугольными  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и цилиндрическими  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  координатами  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  уравнение (1.9) в цилиндрических координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_3}{c\rho}. \quad (1.10)$$

Все ранее полученные уравнения описывают процессы теплопереноса в системе координат, неподвижной относительно тела. Тепловые процессы при сварке описываются наиболее просто, если уравнения относить к подвижным координатам, связанным с подвижным источником теплоты.

Пусть подвижная система координат  $x, y, z$  перемещается вдоль оси  $x_0$  неподвижной системы координат  $x_0, y_0, z_0$  в течении времени  $t$  с постоянной скоростью  $v$ , то есть  $x = x_0 - vt, y = y_0, z = z_0$ . Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.11)$$

Связь между  $\partial T / \partial t$  в неподвижных координатах  $(\partial T / \partial t)_{x_0, y_0, z_0}$  и подвижных координатах  $(\partial T / \partial t)_{x, y, z}$  следующая:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x_0, y_0, z_0} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x, y, z} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x, y, z} - v \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.9), получим уравнение теплопроводности в подвижной системе координат  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{q_3}{c\rho}.$$

Если  $\partial T / \partial t = 0$ , то температурное поле называется квазистационарным (оно не изменяется в подвижных координатах, но изменяется в неподвижных). Если положить, что внутренние источники (стоки) пропорциональны температуре,  $q_3 = -c\rho bT$ , то квазистационарное поле описывается уравнением

$$\nabla^2 T + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{b}{a} T = 0. \quad (1.13)$$

Подстановка

$$T(x, y, z) = U(x, y, z) \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) \quad (1.14)$$

приводит к уравнению эллиптического типа

$$\nabla^2 U - \left( \frac{v^2}{4a^2} + \frac{b}{a} \right) U = 0,$$

которое симметрично относительно переменных и решается проще. Асимметрия температурного поля учитывается множителем  $\exp(-vx/(2a))$  в (1.14). Этот множитель присутствует во всех случаях подвижных источников (разд. 2.4).

Уравнение теплопроводности Фурье (1.8) выведено при неявном допущении, что скорость распространения теплоты является бесконечно большой. Это предположение справедливо для процессов умеренной интенсивности, включая практически все сварочные процессы. Учет конечности скорости распространения теплоты приводит к дифференциальному уравнению теплопроводности гиперболического типа [7], и здесь мы его рассматривать не будем.

### 1.4. Краевые условия

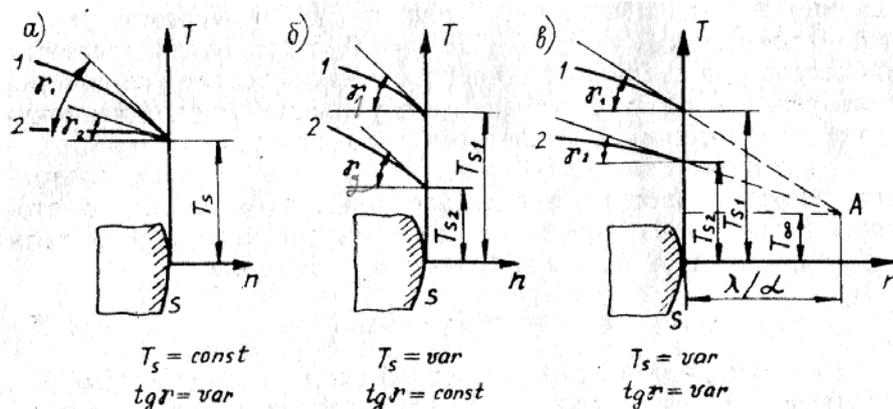
Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет бесконечное множество решений. Например, если функция  $T(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению, то и функция  $T(x, y, z, t) + \text{const}$  ему удовлетворяет. Чтобы из множества выбрать решение, характеризующее конкретный практический случай, надо задать геометрические условия (форму и размеры тела), теплофизические параметры ( $a, \rho, q_3$ ) и краевые условия.

Под краевыми условиями понимают совокупность начального и граничных условий.

*Начальное условие* определяется заданием закона распределения температуры внутри тела в начальный момент ( $t = 0$ ):

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

В сварочной практике обычно принимают равномерное распределение температуры при  $t = 0$   $T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const}$  и за начало отсчета температуры – значение  $T_0$ .



**Рис. 1.4.** Различные способы задания граничных условий на поверхности тела: *a* – условие I рода; *б* – условие II рода; *в* – условие III рода

Граничные условия отражают взаимодействие поверхности (границы) тела с окружающей средой. Из всего многообразия в расчетах процессов при сварке обычно используют так называемые граничные условия I, II и III родов.

Граничное условие I рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела  $S$  в любой момент времени:

$$T_S = \varphi(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S.$$

Частным случаем является изотермическое граничное условие, когда  $\varphi(x, y, z, t) = \text{const}$ . Дадим графическую интерпретацию ему (рис. 1.4, а). Тепловой поток пропорционален величине градиента температуры, который численно равен тангенсу наклона касательной к кривой распределения температуры вдоль нормали  $n$  к поверхности  $S$ , то есть  $(\partial T / \partial n)_S = \text{tg} \gamma$ . По заданному значению  $T_S$  ( $T_S = \text{const}$ ) отыскиваются распределения  $T$  и тем самым наклоны касательной ( $\gamma = \text{var}$ ) и количество теплоты, отдаваемое поверхностью тела.

В сварочной практике условие I рода встречается редко.

Граничное условие II рода состоит в задании плотности теплового потока для каждой точки границы тела  $S$  как функции времени:

$$q_{2S} = \psi(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S.$$

Согласно закону Фурье (1.3), это уравнение можно записать иначе:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \psi(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S.$$

Геометрическая интерпретация условия II рода показана на рис. 1.4, б. Задаются  $\text{tg} \gamma$ , а находится температурное поле, включая температуру поверхности тела  $T_S$ .

Адиабатическая граница представляет частный случай условия II рода и отражает условие так называемой тепловой изоляции:

$$q_{2S} = 0, \quad (\partial T / \partial n)_S = 0.$$

В расчетах тепловых процессов при сварке ограниченных тел последнее условие используется, когда теплообмен с окружающей средой незначителен по сравнению с тепловыми потоками внутри тела.

Граничное условие III рода состоит в задании плотности теплового потока вследствие теплопроводности со стороны тела в зависимости от температуры поверхности тела  $T_S$  и окружающей среды  $T_\infty$  по закону Ньютона:

$$q_{2S} = \alpha(T_S - T_\infty), \tag{1.15}$$

где  $\alpha$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи, Вт м<sup>-2</sup> К<sup>-1</sup>. Согласно закону Фурье (1.3), это условие можно записать иначе:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \alpha (T_S - T_\infty). \quad (1.16)$$

Геометрическая интерпретация граничного условия показана на рис. 1.4, в. Хотя  $T_S$  и  $\text{tg} \gamma$  – величины переменные, условие (1.16) требует, чтобы все касательные к температурной кривой проходили через точку  $A$ , находящуюся на расстоянии  $\lambda/\alpha$  от границы тела.

Коэффициент теплопередачи  $\alpha$  удобно представить в виде суммы коэффициентов конвективной теплоотдачи  $\alpha_c$  и лучистого теплообмена  $\alpha_r$ :  $\alpha = \alpha_c + \alpha_r$ .

При естественном или вынужденном конвективном обмене теплота с поверхности уносится движущимся газом или жидкостью. Коэффициент  $\alpha_c$  зависит от свойств теплоотдающей поверхности и охлаждающей среды, от формы и ориентации поверхности тела, от разности  $T_S - T_\infty$  и других факторов.

Охлаждение тела лучеиспусканием описывается законом Стефана – Больцмана, согласно которому плотность теплового потока

$$q_{2r} = C(T_S^4 - T_\infty^4) = \alpha_r(T_S - T_\infty),$$

откуда  $\alpha_r = C(T_S + T_\infty)(T_S^2 + T_\infty^2)$ , где  $C$  – коэффициент, зависящий от состояния поверхности. Видно, что коэффициент  $\alpha_r$  растет с увеличением абсолютной температуры по закону кубической параболы. Эмпирические зависимости коэффициентов  $\alpha_c$  и  $\alpha_r$  приведены в [8, 10, 11, 13].

Отметим, что из условия III рода (1.16) как предельные случаи можно получить изотермическое условие ( $T_S = T_\infty$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ ) и адиабатическое условие ( $(\partial T/\partial n)_S = 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ).

Граничные условия могут быть смешанного типа, когда в различных областях границы задаются различные условия.

Дифференциальное уравнение совместно с краевыми условиями полностью определяет задачу, то есть зная геометрические, физические, начальные и граничные условия, можно найти функцию распределения температуры в любой момент времени  $T(x, y, z, t)$ , причем доказывається [7], что эта функция является единственным решением данной задачи.

В задачах теплопроводности при сварке используются следующие основные теплофизические свойства металлов: теплопроводность  $\lambda$ , удельная теплоемкость  $c$ , плотность  $\rho$  и их производные: объемная теплоемкость  $c\rho$  и температуропроводность  $a$ . Свойства некоторых металлов приведены в табл. 1.1

**Табл. 1.1** Физические свойства металлов и сплавов

Материал	Теплопроводность $\lambda$ , Вт мм <sup>-1</sup> К <sup>-1</sup>	Температуропроводность $a$ , мм <sup>2</sup> с <sup>-1</sup>	Объемная теплоемкость $c\rho$ , Дж мм <sup>-3</sup> К <sup>-1</sup>	Температура плавления $T_L$ , К
Углеродистые стали	0.040	8	0.005	1793
Низколегированные стали	0.025	5	0.005	1793
Высоколегированные стали	0.020	4	0.005	1773
Титановые сплавы	0.030	10	0.003	1923
Алюминий (> 99% Al)	0.230	85	0.0027	933
Al-Mg-Si сплавы	0.167	62	0.0027	925
Al-Mg сплавы	0.149	55	0.0027	923

### 1.5. Схемы источников теплоты и нагреваемых тел

Характерным признаком всех способов сварки является локальный нагрев изделия, для чего используются разнообразные концентрированные источники теплоты с плотностью теплового потока до  $10^{10}$  Вт м<sup>-2</sup> и даже выше.

Обычно при расчете тепловых процессов все сварочные источники (электрическая дуга, газовое пламя, электронный и лазерный лучи, электрошлаковая ванна и т.д.) идеализируют. Идеализированные источники можно классифицировать по длительности выделения теплоты на мгновенные (время выделения теплоты  $t_w = 0$ ) и непрерывно действующие ( $t_w > 0$ ) и по мерности распределенности в пространстве на точечные (мерность  $\dim = 0$ ), линейные ( $\dim = 1$ ), плоские ( $\dim = 2$ ) и объемные ( $\dim = 3$ ) источники. Далее индексами  $i = 0; 1; 2; 3$  у теплоты  $Q_i$  (Дж м<sup>-i</sup>) и мощности  $q_i$  (Вт м<sup>-i</sup>) будем указывать мерность источника. Непрерывно действующие источники могут быть неподвижными (скорость движения  $v = 0$ ) и подвижными ( $v \neq 0$ ). Из подвижных источников в свою очередь выделяют быстродвижущиеся источники теплоты и вводят их в расчетную схему тогда, когда можно пренебречь тепловыми потоками вдоль оси движения источника, что значительно упрощает расчет.

Рассмотрим подробнее электрическую дугу, которая по объему практического использования превосходит все остальные сварочные источники. Эффективная тепловая мощность дуги (Вт), вводимая в изделие,  $q = UI\eta$ , где  $U$  и  $I$  – напряжение и ток дуги;  $\eta$  – эффективный КПД нагрева изделия дугой.

Радиальное распределение по поверхности тела плотности теплового потока электрической дуги  $q_2(r)$  (Вт м<sup>-2</sup>) удовлетворительно описывается кривой Гаусса (нормального закона распределения):

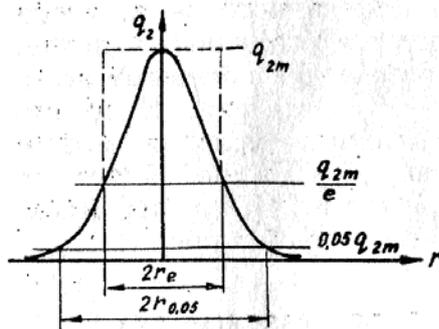
$$q_2(r) = q_{2m} \exp(-Cr^2), \quad (1.17)$$

где  $q_{2m}$  – плотность теплового потока в центре нагрева (при  $r = 0$ ), Вт м<sup>-2</sup> (рис. 1.5);  $C$  – коэффициент сосредоточенности теплового потока источника, м<sup>-2</sup>. Источники теплоты (электрическая дуга, газовое пламя, электронный луч, плаз-

менная струя, лазерный луч и т.п.), соответствующие закону (1.17), называются нормально круговыми. Параметры распределения  $q_{2m}$  и  $C$  в (1.17) подбирают из условия минимального отклонения от экспериментального распределения  $q_2(r)$ .

Связь эффективной мощности источника  $q$  (Вт) с параметрами распределения  $q_2(r)$  устанавливается путём интегрирования (1.17) при использовании подстановки  $u = Cr^2$ :

$$q = \int_0^{\infty} q_2(r) 2\pi r dr = \frac{\pi}{C} q_{2m}. \quad (1.18)$$



**Рис. 1.5.** Радиальное распределение плотности теплового потока нормально кругового источника

Теоретически источник (1.17) действует по всей поверхности,  $0 < r < \infty$ . Практически удобно ввести понятие условного пятна нагрева, радиус которого принимается из следующих условий.

1. На расстоянии  $r_e$  от центра плотность потока падает в  $e \approx 2.72$  раза. Тогда из (1.17) следует  $r_e = 1/\sqrt{C}$ .

2. На расстоянии  $r_{0.05}$  плотность потока равна  $0.05q_{2m}$ . Тогда  $r_{0.05} = \sqrt{3/C} = \sqrt{3}r_e$ . Например, для электрической дуги в среде аргона  $r_{0.05} = 4 - 7$  мм,  $C = (1.4 - 0.7) 10^5 \text{ м}^{-2}$ , а для газового пламени  $r_{0.05} = 20 - 40$  мм,  $C = (0.9 - 0.2) 10^4 \text{ м}^{-2}$  [8, 11, 13].

Чем выше коэффициент  $C$ , тем быстрее убывает плотность мощности с удалением от центра и тем меньше радиусы  $r_e$  и  $r_{0.05}$ . При  $C = \infty$  из плоского источника получается точечный источник на поверхности тела:

$$q_2(r) = q\delta(0), \quad (1.19)$$

где  $\delta(u)$  – функция (дельта – функция) Дирака:

$$\delta(u) = \begin{cases} \infty & \text{при } u = 0, \\ 0 & \text{при } u \neq 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

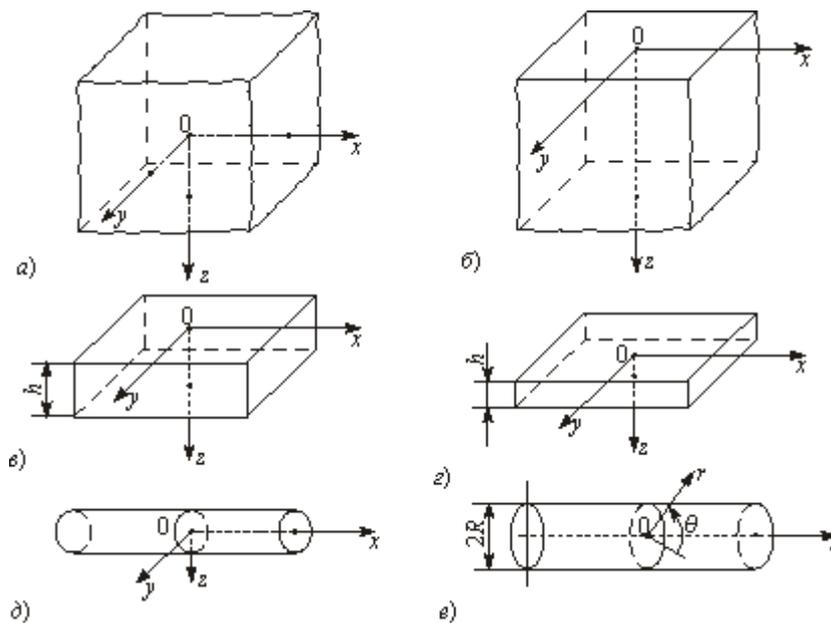
причем  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du = 1$  (бесконечный всплеск единичной интенсивности).

$\delta$ -функция обладает замечательным свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u) du = f(0). \quad (1.21)$$

Рассмотрим теперь основные схемы нагреваемых тел. Учет действительной формы свариваемых изделий может значительно усложнить решение температурных задач. Поэтому реальную форму в тепловых расчетах идеализируют, условно сводя ее к одной из следующих основных схем. Здесь схематизированные тела характеризуются не только линейными размерами, но и мерностью температурного поля.

*Бесконечное тело* (неограниченное тело) занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ , (рис. 1.6, а). Поток теплоты в теле пространственный, температурное поле трехмерное,  $T = T(x, y, z, t)$ .



**Рис. 1.6.** Расчетные схемы тел: а – бесконечное тело; б – полубесконечное тело; в – бесконечный плоский слой; г – бесконечная пластина; д – бесконечный стержень; е – бесконечный цилиндр

*Полубесконечное тело* занимает область по одну сторону плоскости в бесконечном теле  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < \infty$  (рис. 1.6, б). Поток теплоты пространственный, температурное поле трехмерное,  $T = T(x, y, z, t)$ .

*Бесконечный плоский слой* занимает область между двумя параллельными плоскостями в бесконечном теле  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < h$  (рис. 1.6, в). Поток теплоты пространственный, температурное поле трехмерное,  $T = T(x, y, z, t)$ .

*Бесконечная пластина* отличается от плоского слоя только тем, что поток теплоты плоский и температурное поле двумерное,  $T = T(x, y, t)$  и  $\partial T/\partial z = 0$  (рис. 1.6, з).

*Бесконечный стержень* представляет собой тело произвольного сечения в плоскости  $yOz$ ,  $-\infty < x < \infty$  (рис. 1.6, д). Поток теплоты линейный, температурное поле одномерное,  $T = T(x, t)$  и  $\partial T/\partial y = \partial T/\partial z = 0$ .

*Бесконечный цилиндр* занимает область  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$  (рис. 1.6, е). Поток теплоты пространственный, температурное поле трехмерное,  $T = T(r, \theta, z, t)$ .

Подчеркнем, что приведенная схематизация нагреваемых тел условная. Например, полубесконечное тело можно рассматривать как плоский слой бесконечной толщины, пластину – как плоский слой малой толщины, когда можно пренебречь перепадом температуры по толщине, стержень – как цилиндр без перепада температуры по сечению. Более того, одному и тому же толстостенному свариваемому изделию могут соответствовать различные схемы тел: бесконечное тело – при выполнении корневых проходов при многопроходной сварке в узкий зазор (тепловые потоки существуют во все стороны); полубесконечное тело – при выполнении на поверхности последнего прохода сварного шва (тепловые потоки направлены в глубь металла); плоский слой – при электронно – лучевой сварке с несквозным проплавлением, но со сквозным прогревом изделия (оказывает влияние тепловая изоляция нижней поверхности изделия) и пластина – при электронно-лучевой сварке со сквозным проплавлением изделия (тепловые потоки направлены практически только поперек оси электронного луча). Только понимание физической модели может позволить грамотно выбрать соответствующую расчетную схему.

В дальнейшем мы будем часто использовать в основном четыре сочетания схем источников теплоты и нагреваемых тел: точечный источник в полубесконечном теле или на его поверхности, точечный источник в бесконечном плоском слое или на его поверхности, линейный источник в бесконечной пластине и плоский источник в бесконечном стержне, так как они являются основными при построении аналитических решений различных температурных задач. Отметим, что при принятых определениях некоторые сочетания источников и тел недопустимы. Например, не может быть точечного источника в пластине или стержне, так как пластина предполагает равномерную распределенность источника по толщине, а стержень – по поперечному сечению.

## **2. Аналитические методы расчета тепловых процессов при сварке**

В этом разделе принимаются (если не оговаривается) следующие предположения:

- тело однородно и изотропно;
- теплота распространяется только по закону теплопроводности Фурье;
- структурные и фазовые превращения происходят без выделения или поглощения теплоты;

- теплопроводность  $\lambda$ , объемная теплоемкость  $c\rho$  и поверхностная теплоотдача  $\alpha$  не зависят от температуры;
- за начало отсчета температуры принимается исходная температура тела и среды ( $T_0 = T_\infty = 0$ ).

## 2.1. Метод источников

Специфическим для задач теплопроводности при сварке является то, что в области высокой температуры на температурное поле оказывают влияние в большей степени особенности ввода теплоты (особенности сварочных источников) и в меньшей степени граничные условия.

Существуют различные аналитические методы решения задач теории теплопроводности (метод разделения переменных, операционные методы, метод источников и др.). Предложенный еще лордом Кельвином метод источников (в математической физике называемый методом функций Грина) является предпочтительным в силу своей наглядности, простоты учёта особенностей сварочных источников теплоты; вместе с тем он обладает математической строгостью. Все это и обусловило его популярность при расчете температурных полей в сварных изделиях.

Физическая сущность метода источников заключается в том, что любой процесс распространения теплоты в теле можно представить в виде суммы процессов выравнивания температуры от множества элементарных источников теплоты, распределенных как в пространстве, так и во времени. Подчеркнем, что заложенный в метод источников принцип суперпозиции (наложения) решений применим только в том случае, если краевая задача линейна (в уравнении теплопроводности и граничных условиях  $c\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $q_{2S}$ ,  $\alpha$  не зависят от температуры, а  $q_3(T)$  – линейная функция  $T$ ).

В качестве элементарного принимается мгновенный точечный источник теплоты  $Q_0$  (Дж), помещенный в точку  $(\xi, \eta, \zeta)$  бесконечного тела и действующий в момент  $t = 0$ . Температура в любой точке тела  $x, y, z$  в любой момент времени  $t$  определяется формулой

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4at}\right). \quad (2.1)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (2.1) удовлетворяет уравнению (1.9). Это решение называется фундаментальным. Из него видно, что температура тела стремится к нулю, когда  $t \rightarrow 0$  во всех точках за исключением одной –  $(\xi, \eta, \zeta)$ , где она становится бесконечно большой.

Представим непрерывно действующий источник мощностью  $q_0$  (Вт) в виде последовательности элементарных мгновенных источников. Определим по (2.1) приращение температуры к моменту  $t$  от элементарного источника  $dQ_0 = q_0(\tau)d\tau$  (Дж), действовавшего и находящегося в момент  $\tau$  в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$dT(x, y, z, t) = \frac{q_0(\tau) d\tau}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{[x-\xi(\tau)]^2 + [y-\eta(\tau)]^2 + [z-\zeta(\tau)]^2}{4a(t-\tau)}\right),$$

где  $(t - \tau)$  – время распространения теплоты. Тогда от любого источника, распределённого в пространстве и во времени, температура может быть получена суммированием всех элементарных источников

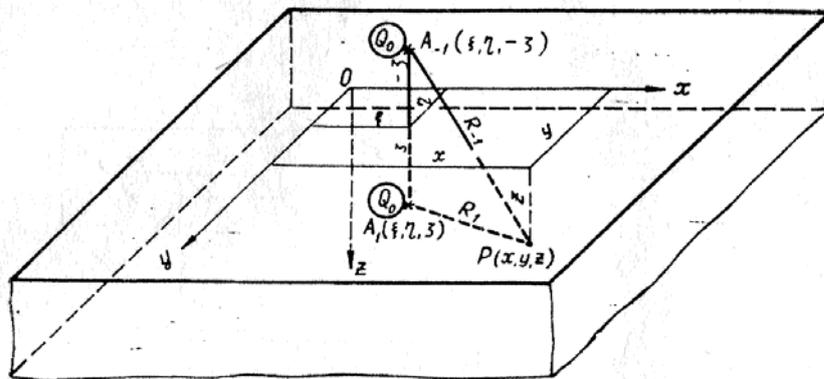
$$T(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{q_3(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{[x-\xi(\tau)]^2 + [y-\eta(\tau)]^2 + [z-\zeta(\tau)]^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.2)$$

где  $q_3$  – объемная плотность мощности источника, Вт м<sup>-3</sup>. Эта функция является решением уравнения (1.9) в однородном бесконечном теле. Большинство приведенных здесь решений температурных задач является частными формами уравнения (2.2).

## 2.2. Мгновенные источники теплоты

Здесь рассмотрим четыре основные схемы мгновенных источников: точечный источник в полубесконечном теле или на его поверхности, точечный источник в бесконечном плоском слое или на его поверхности, линейный источник в бесконечной пластине и плоский источник в бесконечном стержне. Эти схемы являются основными при построении решений для соответствующих тел.

*Мгновенный точечный источник в полубесконечном теле.* Примем, что поверхность тела адиабатическая. Начало координат поместим в точку  $O$  на поверхности, а точку  $A_1$  с мгновенным источником  $Q_0$  – на глубину  $\zeta$  (рис. 2.1). Условие на границе  $\partial T/\partial z(x, y, 0, t) = 0$  выполним с помощью метода отражения.



**Рис. 2.1.** Отражение источника в точке  $A_1$  полубесконечного тела в граничной плоскости  $z = 0$ , не пропускающей теплоту

Сущность метода отражения сводится к расширению ограниченного тела по соответствующей координате до бесконечности и подбору дополнительных источников в расширенной области таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности ограниченного тела. В рассматриваемом случае продолжим полубесконечное тело в область  $z < 0$  и введем в точке  $A_{-1}(\xi, \eta, -\zeta)$ , являющейся отражением точки  $A_1(\xi, \eta, \zeta)$  в плоскости  $z = 0$ , мгновенный источник  $Q_0$ . На плоскости симметрии  $z = 0$  алгебраическая сумма потоков  $q_{2z}$  от обоих источников равна нулю, то есть выполняются граничные условия  $\partial T / \partial z(x, y, 0, t) = 0$ . Процесс распространения теплоты в области  $z > 0$  получается наложением процессов выравнивания (2.1) в бесконечном теле от мгновенных источников в точках  $A_1$  и  $A_{-1}$ :

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \left[ \exp\left(-\frac{R_1^2}{4at}\right) + \exp\left(-\frac{R_{-1}^2}{4at}\right) \right], \quad (2.3)$$

где  $R_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ ;  $R_{-1}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2$ , или при более компактной записи

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \sum_{j=-1,1} \exp\left(-\frac{R_j^2}{4at}\right), \quad (2.4)$$

где  $R_j^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - j\zeta)^2$ .

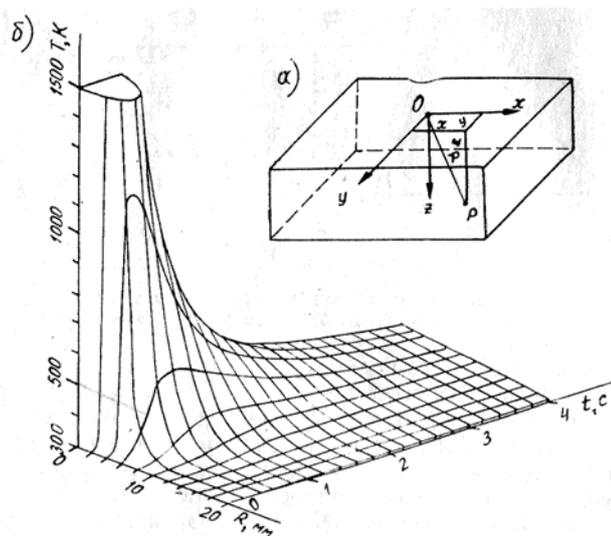
Если источник находится на поверхности полубесконечного тела в начале координат ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ), то

$$T(R, t) = \frac{2Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right), \quad (2.5)$$

где  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$  – радиус-вектор (рис. 2.2, а).

Проанализируем формулу (2.5). Изотермические поверхности  $T = \text{const}$  представляют собой сферические поверхности. Зависимость  $T(R)$  при  $t = \text{const}$  описывается законом нормального распределения (рис. 2.2, б). В первый момент ( $t \rightarrow 0$ ) температура отличается от начальной температуры только в точке  $R = 0$  (температурное поле описывается  $\delta$  – функцией Дирака (1.20)). Далее температура в начальной точке падает по гиперболическому закону  $t^{-3/2}$ . Во всех точках температура стремится к начальной  $T_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Чем дальше от источника расположена точка наблюдения  $P$ , тем меньше максимальная температура и тем позже она достигается (рис. 2.2, б). Граница проекции всей поверхности  $T(R, t)$  на плоскость  $T, R$  образует кривую радиального распределения максимальной температуры  $T_{\max}(R)$ . Из (2.5) также видно, что температура в любой точке прямо пропорциональна количеству введенной теплоты  $Q_0$  и она в

два раза выше, чем при тех же условиях в бесконечном теле (см. (2.1)). На температурное поле оказывают влияние свойства материала  $c\rho$  и  $a$ . Температура обратно пропорциональна объемной теплоёмкости  $c\rho$ . Температуропроводность  $a$  входит только в комплекс  $at$ , то есть увеличение  $a$  ускоряет процесс теплопереноса, а его уменьшение – замедляет. Безразмерное время  $at/R^2$  называют критерием Фурье  $Fo$ .



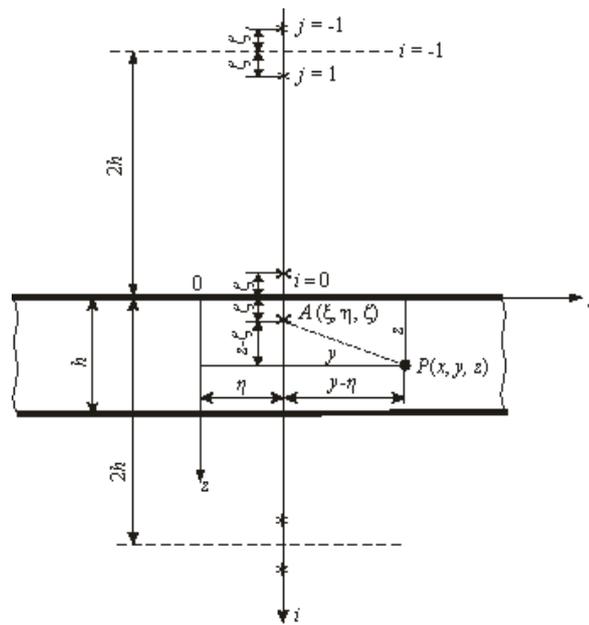
**Рис. 2.2.** Процесс распространения теплоты мгновенного точечного источника на поверхности полубесконечного тела ( $Q = 2$  кДж,  $c\rho = 5$  МДж  $\text{м}^{-3} \text{К}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300$  К): *a* – схема точечного источника на поверхности полубесконечного тела; *б* – изменение радиального распределения температуры во времени

*Мгновенный точечный источник в бесконечном плоском слое.* Примем, что границы бесконечного плоского слоя адиабатические ( $\partial T/\partial z = 0$  при  $z = 0$  и  $z = h$ , рис. 2.3). Это допущение правомерно, если не используется принудительное дополнительное охлаждение, так как тепловые потоки в металле значительно больше потоков через поверхность тела.

Найдем температурное поле методом отражения, взяв за основу схему мгновенного точечного источника в бесконечном теле (2.1). Бесконечный плоский слой расширим по  $z$  до бесконечности (до бесконечного тела) и на вертикали, проходящей через точку  $A$  с источником, разместим такую бесконечную последовательность источников, чтобы плоскости  $z = 0$  и  $z = h$  были плоскостями симметрии (рис. 2.3). Тогда температура в любой точке  $P$  бесконечного плоского слоя от мгновенного источника  $Q_0$  определяется суммированием всех  $i$ -х пар источников в бесконечном теле:

$$T(r, z, t) = \frac{Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z - j\zeta - 2ih)^2}{4at}\right), \quad (2.6)$$

где  $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ .



**Рис. 2.3.** Схема точечного источника в бесконечном плоском слое

Если источник находится на поверхности плоского слоя в начале координат ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ), то из (2.6) получим

$$T(r, z, t) = \frac{2Q_0}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) F(z, t), \quad (2.7)$$

где

$$F(z, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ih(ih-z)}{at}\right). \quad (2.8)$$

Функция  $F(z, t)$  показывает степень повышения температуры в плоском слое по сравнению с полубесконечным телом, так как всегда и всюду  $F(z, t) > 1$ .

Ряды в формулах (2.6) и (2.8) всегда сходятся и тем быстрее, чем больше толщина слоя  $h$  и меньше время  $t$ , а при  $h \rightarrow \infty$  формулы (2.6) и (2.7) переходят в (2.3) и (2.5) для полубесконечного тела. В интервале медленной сходимости эти ряды можно разложить в ряды Фурье по косинусам как суммы четных функций по известной формуле:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(u + 2ih) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} f(u) du + \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi i u}{h} \int_0^{\infty} f(u) \cos \frac{\pi i u}{h} du. \quad (2.9)$$

Тогда

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(u-2ih)^2}{4at}\right) = \frac{\sqrt{\pi at}}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi i u}{h} \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right]. \quad (2.10)$$

Подставив (2.10) в (2.6), получим для точечного источника в плоском слое

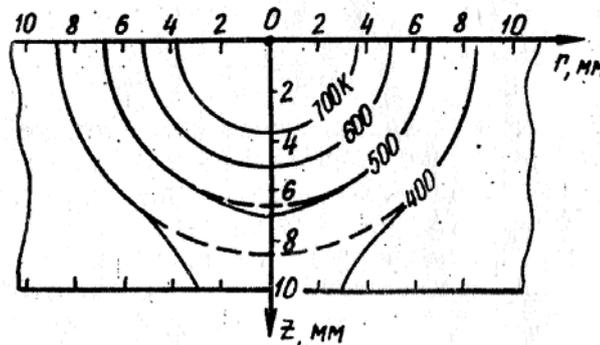
$$T(r, z, t) = \frac{Q_0 / h}{4\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi i z}{h} \cos \frac{\pi i \zeta}{h} \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right] \quad (2.11)$$

и для точечного источника на поверхности плоского слоя в начале координат

$$T(r, z, t) = \frac{Q_0 / h}{4\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi i z}{h} \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right]$$

Формулы (2.6) и (2.11) являются эквивалентными, но в случае распределенных источников при интегрировании по  $\zeta$  формула (2.11) оказывается удобнее.

Как видно из рис. 2.4, в отличие от полубесконечного тела изотермы в плоском слое не являются сферическими поверхностями, причем максимальные отклонения наблюдаются у нижней поверхности и с течением времени отклонения увеличиваются.



**Рис. 2.4.** Изотермы в поперечном сечении плоского слоя (сплошные линии) и полубесконечного тела (штриховые линии) через 1 с после действия мгновенного точечного источника и на поверхности ( $Q = 2$  кДж,  $c\rho = 5$  МДж м<sup>-3</sup> К<sup>-1</sup>,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>,  $T_{\infty} = 300$  К)

Отметим, что учет поверхностной теплоотдачи значительно усложняет решение задачи, так как в этом случае появляются дополнительные множители и аргумент экспоненциальной функции, сложным образом зависящие от коэффициента поверхностной теплоотдачи  $\alpha$ .

*Мгновенный линейный источник в бесконечной пластине.* Пусть по вертикальной оси  $z$  бесконечного тела (см. рис. 1.6, а) равномерно распределены элементарные мгновенные точечные источники с линейной плотностью теплоты (погонной энергией)  $Q_1$ , Дж м<sup>-1</sup>. Назовем такой источник мгновенным ли-

нейным. Тогда температурное поле может быть получено интегрированием всех элементарных источников:

$$T(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4at}\right) dz = \frac{Q_1}{c\rho(4\pi at)} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$  – плоский радиус – вектор (расстояние до оси  $z$ ).

Если перпендикулярно оси  $z$  вырезать тонкий слой толщиной  $h$  двумя параллельными плоскостями, то получим схему мгновенного линейного источника в бесконечной пластине:

$$T(r, t) = \frac{Q/h}{c\rho(4\pi at)} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \quad (2.12)$$

где  $Q$  – количество теплоты в пластине толщиной  $h$ , Дж.

Учтем теперь теплоотдачу с обеих поверхностей пластины. Допустим, что отдача теплоты происходит по закону Ньютона (1.15), но температура по толщине выравнивается мгновенно (поле остается двумерным), что равносильно существованию в пластине с адиабатической поверхностью объемного стока ( $\text{Вт м}^{-3}$ ),

$$q_3 = -\frac{\alpha_1 T}{h} - \frac{\alpha_2 T}{h} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{h} T, \quad (2.13)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты поверхностной теплоотдачи с первой и второй стороны. Тогда с учетом (2.13) с помощью подстановки  $T(x, y, t) = U(x, y, t) \exp(-bt)$  получим решение уравнения (1.9) для двумерного случая [11, 13]:

$$T(r, t) = \frac{Q/h}{c\rho(4\pi at)} \exp\left(-\frac{r^2}{4at} - bt\right), \quad (2.14)$$

где  $b = (\alpha_1 + \alpha_2)/(c\rho h)$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи,  $\text{с}^{-1}$ . Видно, что влияние теплоотдачи тем существеннее, чем тоньше пластина.

*Мгновенный плоский источник в бесконечном стержне.* Пусть в бесконечном теле по всей плоскости  $x = 0$  (см. рис. 1.6, а) равномерно распределены элементарные мгновенные точечные источники с плоской плотностью  $Q_2$ , Дж  $\text{м}^{-2}$ . Назовем такой источник мгновенным плоским. Тогда температурное поле может быть получено интегрированием всех элементарных источников:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2}{c\rho(4\pi at)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4at}\right) dy dz = \frac{Q_2}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Если перпендикулярно плоскости  $x = 0$  вырезать цилиндр площадью сечения  $A$  и периметром  $p$ , то получим схему мгновенного плоского источника в бесконечном стержне:

$$T(x, t) = \frac{Q/A}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \quad (2.15)$$

где  $Q$  – количество выделившейся теплоты в стержне, Дж.

Если, как и в пластине, учесть теплоотдачу с поверхности стержня, но пренебречь неравномерностью температуры по сечению, то получим:

$$T(x, t) = \frac{Q/A}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at} - bt\right), \quad (2.16)$$

где  $b = \alpha p / (c\rho A)$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи,  $c^{-1}$ .

Из сравнения формул (2.1), (2.12) и (2.15) видно, что распространение теплоты в бесконечном теле, пластине и стержне качественно одинаково, только вблизи источника в пластине температура падает медленнее (по закону  $t^{-1}$ ), чем в бесконечном теле (по закону  $t^{-3/2}$ ), но быстрее, чем в стержне (по закону  $t^{-1/2}$ ). Для удобства все три формулы можно записать в общем виде:

$$T(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{Q_{3-n}}{c\rho(4\pi at)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{4at}\right),$$

где  $n$  – мерность пространства ( $n = 1, 2, 3$ ).

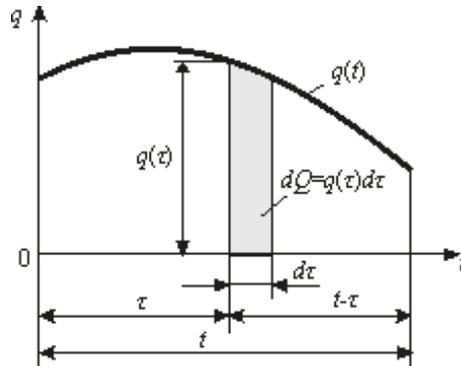
### 2.3. Неподвижные непрерывно действующие источники теплоты

Как уже отмечалось в п. 2.1, непрерывно действующие источники можно представить как совокупность последовательных элементарных источников (рис. 2.5). Тогда температурное поле определяется интегрированием полей от всех элементарных источников. Если при переменной мощности  $q(t)$  интегралы взять невозможно, то их определяют численно. Далее принимается, что  $q = \text{const}$ .

*Неподвижный непрерывно действующий точечный источник в полубесконечном теле.* Пусть точечный источник мощностью  $q_0$  действует в момент  $\tau$  в течение  $d\tau$  на поверхности полубесконечного тела. Приращение температуры в момент  $t$  от этого элементарного мгновенного источника определяется с помощью формулы (2.5):

$$dT(R,t) = \frac{2dQ_0}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4a(t-\tau)}\right),$$

где  $dQ_0 = q_0 d\tau$  – теплота элементарного источника;  $t - \tau$  – время распространения теплоты этого источника (см. рис. 2.5).



**Рис. 2.5.** Разбиение непрерывно действующего источника на элементарные мгновенные

Тогда

$$T(R,t) = \int_0^t \frac{2q_0}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{q_0}{2\pi\lambda R} \left[1 - \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{4at}}\right)\right], \quad (2.17)$$

где интеграл вероятности [2]

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt. \quad (2.18)$$

С течением времени температура монотонно растет, приближаясь к асимптоте (рис. 2.6). В предельном состоянии

$$T(R,\infty) = \frac{q_0}{2\pi\lambda R},$$

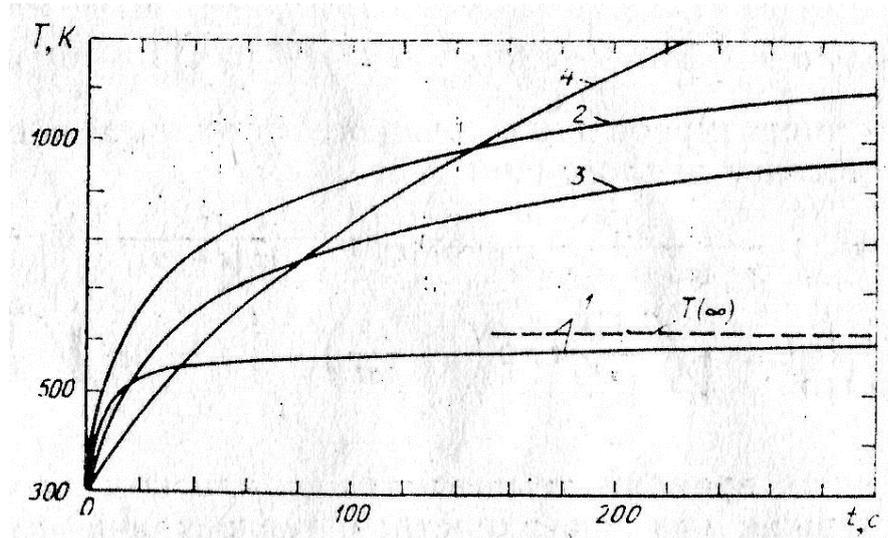
то есть распределение описывается равносторонней гиперболой.

Если источник находится в точке  $\xi, \eta, \zeta$  полубесконечного тела, то аналогично с помощью (2.4) можно получить

$$T(x,y,z,t) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \sum_{j=-1,1} \frac{1}{R_j} \left[1 - \Phi\left(\frac{R_j}{\sqrt{4at}}\right)\right]; \quad (2.19)$$

$$T(x, y, z, \infty) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \sum_{j=-1,1} \frac{1}{R_j}, \quad (2.20)$$

где  $R_j = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-j\zeta)^2}$ .



**Рис. 2.6.** Изменение температуры во времени в поверхностной точке на расстоянии 10 мм от неподвижного непрерывно действующего источника теплоты ( $q = 1$  кВт,  $\lambda = 50$  Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>,  $b = 0$ ,  $T_\infty = 300$  К): 1 – точечный источник на поверхности полубесконечного тела; 2 – точечный источник на поверхности бесконечного плоского слоя толщиной 10 мм; 3 – линейный источник в бесконечной пластине толщиной 10 мм; 4 – плоский источник в бесконечном стержне сечением 500 мм<sup>2</sup>

*Неподвижный непрерывно действующий точечный источник в бесконечном плоском слое.* Аналогично точечному источнику в полубесконечном теле, используя (2.6), получим температурное поле источника, действующего в точке  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  плоского слоя с теплоизолированными поверхностями:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1} \frac{1}{R_{i,j}} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{R_{i,j}}{\sqrt{4at}} \right) \right], \quad (2.21)$$

где  $R_{i,j} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-j\zeta-2is)^2}$ .

*Неподвижный непрерывно действующий линейный источник в бесконечной пластине.* Температурное поле линейного источника в пластине без поверхностной теплоотдачи получим, используя (2.12):

$$T(r, t) = \int_0^t \frac{q/h}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau = -\frac{q/h}{4\pi\lambda} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \quad (2.22)$$

где интегральная показательная функция [2]

$$\text{Ei}(u) = - \int_{-u}^{\infty} e^{-t} / t dt .$$

*Неподвижный непрерывно действующий плоский источник в бесконечном стержне.* Используя формулу (2.15), подстановку  $u^2 = x^2/[4a(t - \tau)]$  и интеграл № 3.461.5 [2]

$$\int_u^{\infty} \exp(-\mu^2 u^2) \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} \exp(-\mu^2 u^2) - \mu \sqrt{\pi} [1 - \Phi(\mu u)],$$

получим температурное поле плоского источника в стержне без поверхностной теплоотдачи:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_0^t \frac{q / A}{c \rho [4 \pi a (t - \tau)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t - \tau)}\right) d\tau = \\ &= \frac{q / A}{2 \lambda} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4at}{x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{x^2}{4at}}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

С течением времени температура в плоском слое, пластине и стержне без поверхностной теплоотдачи неограниченно растет (рис. 2.6).

## 2.4. Подвижные источники теплоты

Подвижные источники будем представлять как последовательно действующие и смещенные друг относительно друга элементарные мгновенные источники. Решение температурной задачи будем искать в подвижной системе координат, связанной с источником, полагая, что мощность  $q$  постоянна и источник движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ .

*Подвижный точечный источник в полубесконечном теле.* Рассмотрим сначала более простую схему источника на поверхности полубесконечного тела. Приращение температуры в произвольной точке  $P$  (рис. 2.7, а) в любой момент  $t$  от элементарного точечного источника, который действовал в момент  $\tau$  в точке  $O_1$  на расстоянии  $v\tau$  от начала пути  $O_0$ , получим, используя (2.5) и полагая  $Q_0 = q_0 d\tau$ .

$$dT(x, y, z, t) = \frac{2q_0 d\tau}{c \rho [4 \pi a (t - \tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{R_1^2}{4a(t - \tau)}\right),$$

где  $R_1^2 = [x + v(t - \tau)]^2 + y^2 + z^2$ .

Просуммируем приращения температуры от всех элементарных источников, действовавших за время  $t$  на пути  $O_0O$  (см. рис. 2.7, а). С помощью подстановки  $u^2 = R^2/[4a(t-\tau)]$  и интеграла № 1.4.2.20 [9]

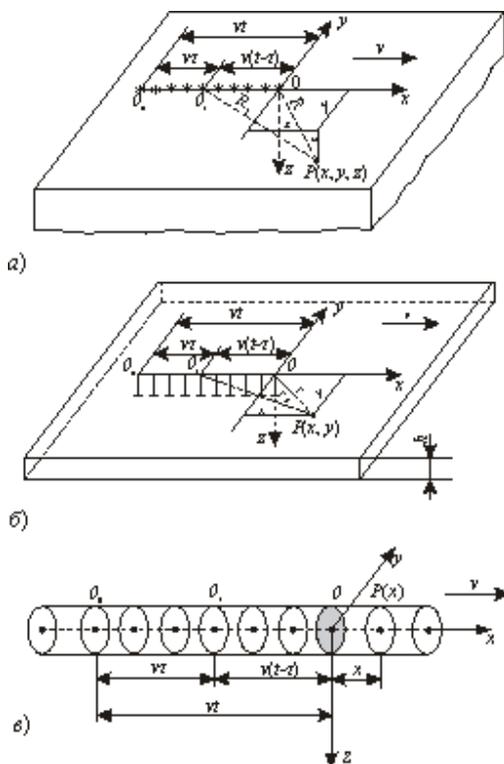
$$\int_0^x \exp(-a^2x^2 - b^2/x^2) dx = \sqrt{\pi}/(4a) [\exp(2ab)\Phi(ax + b/x) + \exp(-2ab)\Phi(ax - b/x) - \exp(2ab) + \exp(-2ab)]$$

получим [10]

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2q_0}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{[x + v(t-\tau)]^2 + y^2 + z^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{2q_0}{4\pi\lambda R} \exp\left(-\frac{v(x+R)}{2a}\right) \cdot \psi(R, t), \quad (2.24)$$

где  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (рис. 2.7, а),  $\psi$  – коэффициент теплонасыщения:

$$\psi(R, t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{4at}} - \sqrt{\frac{v^2 t}{4a}}\right) \right] + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{vR}{a}\right) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{4at}} + \sqrt{\frac{v^2 t}{4a}}\right) \right].$$



**Рис. 2.7.** Схемы подвижных источников теплоты: а – точечный источник на поверхности полубесконечного тела; б – линейный источник в бесконечной пластине; в – плоский источник в бесконечном стержне

Функция  $T(t)$  является монотонно возрастающей. По мере движения источника (времени его действия  $t$ ) температура во всех точках тела в подвижной системе координат повышается, приближаясь к предельному значению. При  $t \rightarrow \infty$  функция  $\psi(R, t) \rightarrow 1$  и температурное поле перестает изменяться во времени (но только в подвижной системе координат!), то есть становится квазистационарным:

$$T(x, R, \infty) = \frac{2q_0}{4\pi\lambda R} \exp\left(-\frac{v(x+R)}{2a}\right). \quad (2.25)$$

Если точечный источник не находится на поверхности полубесконечного тела в начале подвижной системы координат, а постоянно сдвинут по координатам на  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , то вместо (2.5) за основу следует взять формулу (2.4), в результате получим

$$T(x, y, z, \infty) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \exp\left(-\frac{v(x-\xi)}{2a}\right) \sum_{j=1,1} \frac{1}{R_j} \exp\left(-\frac{vR_j}{2a}\right), \quad (2.26)$$

где  $R_j = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-j\zeta)^2}$ .

Если источник неподвижный ( $v = 0$ ), то

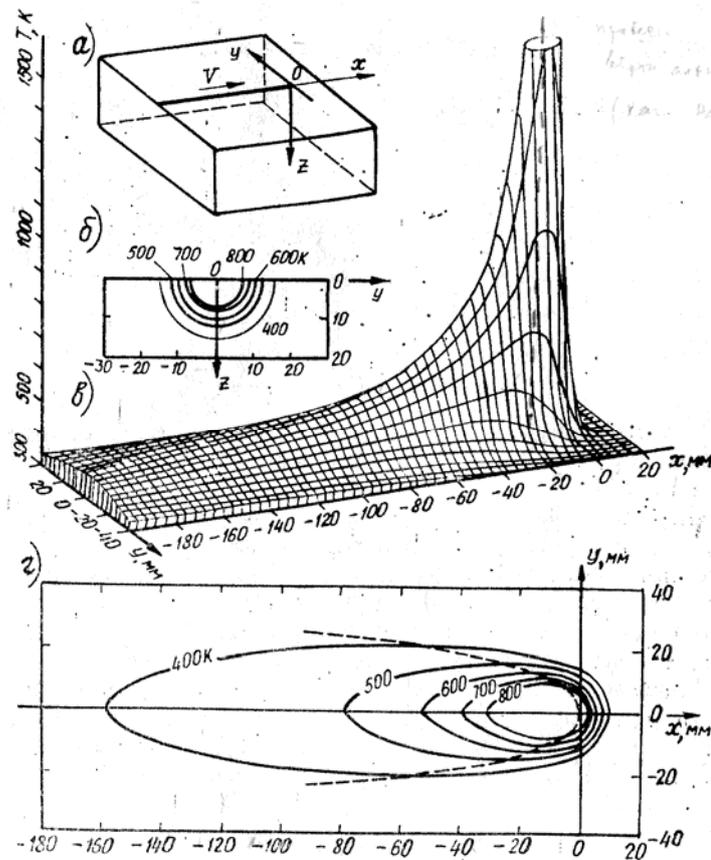
$$T(x, y, z, \infty) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \sum_{j=1,1} \frac{1}{R_j},$$

что, естественно, совпадает с (2.20).

Проанализируем температурное поле поверхностного источника. Из формулы (2.25) и рис. 2.8 видно, что поле симметричное относительно продольной оси  $x$ , то есть изотермические поверхности являются поверхностями вращения вокруг оси  $x$ . Чем дальше точка нагреваемого тела от источника, тем меньше максимальная температура и тем позже она достигается (рис. 2.8, в). Штриховая линия, соединяющая точки в момент максимального нагрева, разделяет область нагрева и охлаждения (рис. 2.8, г). Позади источника компоненты вектора градиента температуры вдоль оси движения источника намного меньше, чем в поперечном направлении, а это значит, что тепловые потоки вдоль оси  $x$  намного меньше, чем в поперечном направлении, то есть теплота преимущественно распространяется в направлении  $y$  и  $z$ . Это утверждение тем справедливее, чем больше асимметричность поля относительно оси  $y$  (чем больше скорость  $v$ ), и оно будет использовано при построении схемы быстродвижущихся источников (разд. 2.6).

Температурное поле заглубленного источника (формула (2.26)) отличается только тем, что плоскость  $y = \eta$  является плоскостью симметрии, а плоскость  $z = \zeta$  не является таковой (изотермические поверхности отклоняются от по-

верхностей вращения, вытягиваясь в сторону адиабатической поверхности  $z = 0$ ).



**Рис. 2.8.** Квазистационарное температурное поле подвижного точечного источника на поверхности полубесконечного тела ( $q = 5$  кВт,  $v = 5$  мм  $c^{-1}$ ,  $\lambda = 50$  Вт  $m^{-1} K^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$   $m^2 c^{-1}$ ,  $T_{\infty} = 300$  К): *a* – схема координатных осей; *б* – изотермы в поперечном сечении  $x = -10$  мм; *в* – распределение температуры на поверхности  $z = 0$ ; *г* – изотермы на поверхности  $z = 0$

*Подвижный точечный источник в бесконечном плоском слое.* Решение для подвижного точечного источника в плоском слое с теплоизолированными поверхностями можно получить двумя путями: либо взять за основу мгновенный точечный источник в бесконечном плоском слое и строить решение для подвижного источника (как это сделано в случае полубесконечного тела), либо взять готовое решение для подвижного точечного источника в полубесконечном теле, а затем методом отражения удовлетворить все граничные условия. Для предельного состояния ( $t \rightarrow \infty$ ) выберем более короткий второй путь. Взяв за основу решение (2.26), с помощью метода отражения (разд. 2.2, рис. 2.3) получим решение для подвижного точечного источника, отстоящего от начала подвижной системы координат на  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ :

$$T(x, y, z, \infty) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \exp\left(-\frac{v(x-\xi)}{2a}\right) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1}^{\infty} \frac{1}{R_{i,j}} \exp\left(-\frac{vR_{i,j}}{2a}\right), \quad (2.27)$$

где  $R_{i,j} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-j\zeta - 2ih)^2}$ .

Используя формулу (2.9) и интеграл № 3.961.2 [2]

$$\int_0^{\infty} \exp(-\beta\sqrt{\gamma^2 + u^2})(\gamma^2 + u^2)^{-1/2} \cos(au) du = K_0(\gamma\sqrt{a^2 + \beta^2}),$$

формулу (2.27) представим в другом виде:

$$T(x, r, z, \infty) = \frac{q_0 / h}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{v(x-\xi)}{2a}\right) K_0\left(\frac{vr}{2a}\right) F_0(r, z), \quad (2.28)$$

где

$$F_0(r, z) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi iz}{h} \cos \frac{\pi i\zeta}{h} K_0\left(\frac{vr}{2a} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi ai}{vh}\right)^2}\right) / K_0\left(\frac{vr}{2a}\right),$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

$K_0$  – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка (имеются таблицы и представления в виде ряда [2, 11]).

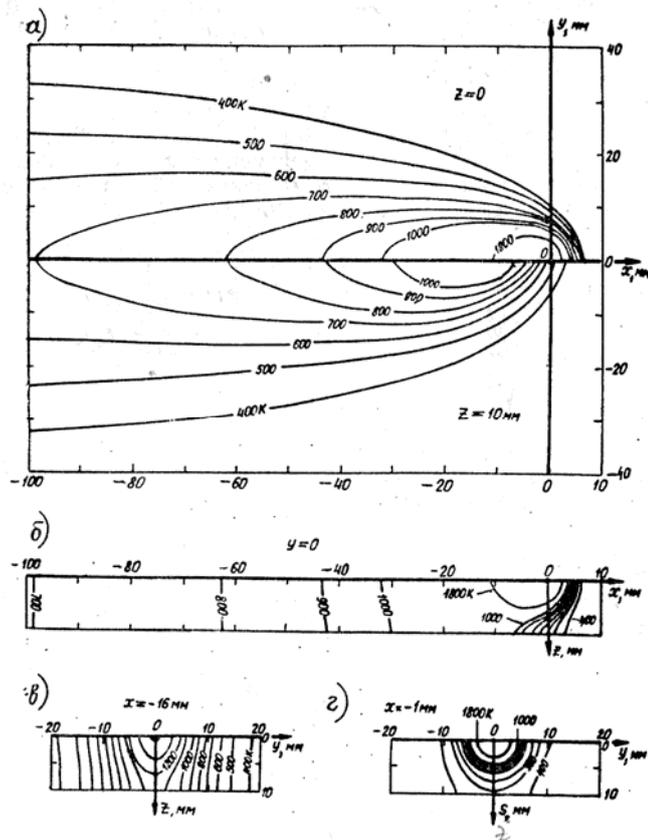
На рис. 2.9 показано квазистационарное температурное поле подвижного точечного источника на поверхности бесконечного плоского слоя ( $\zeta = 0$ ). Из сравнения рис. 2.8 и рис. 2.9 видно, что при одних и тех же условиях вблизи источника температура практически одинакова, но на удалении от него температура в плоском слое выше.

*Подвижный линейный источник в бесконечной пластине.* Процедура определения температуры в пластине такая же, как в полубесконечном теле (рис. 2.7, б). Используя (2.14), в подвижной системе координат получим

$$dT(x, y, t) = \frac{q / h d\tau}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]} \exp\left(-\frac{[x+v(t-\tau)]^2 + y^2}{4a(t-\tau)} - b(t-\tau)\right). \quad (2.29)$$

Интегрируя (2.29) от 0 до  $t$ , после преобразований получим

$$T(x, r, t) = \frac{q / h}{4\pi\lambda} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)} - \left(\frac{v^2}{4a} + b\right)(t-\tau)\right) d\tau. \quad (2.30)$$



**Рис. 2.9.** Изотермы при наплавке валика на стальной лист толщиной 10 мм в различных сечениях ( $q = 5$  кВт,  $v = 5$  мм  $\text{с}^{-1}$ ,  $\lambda = 50$  Вт  $\text{м}^{-1}$   $\text{К}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$   $\text{м}^2$   $\text{с}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300$  К): *a* – на верхней ( $z = 0$ ) и нижней ( $z = 10$  мм) поверхностях; *б* – в продольном сечении  $y = 0$ ; *в* – в поперечном сечении  $x = -16$  мм; *г* – в поперечном сечении  $x = -1$  мм

В предельном случае (при  $t \rightarrow \infty$ ) с помощью подстановки  $u = [v^2/(4a) + b](t - \tau)$  и интеграла № 3.471.9 [2]

$$\int_0^\infty u^{-1} \exp(-\beta/u - \gamma u) du = 2K_0(2\sqrt{\beta\gamma})$$

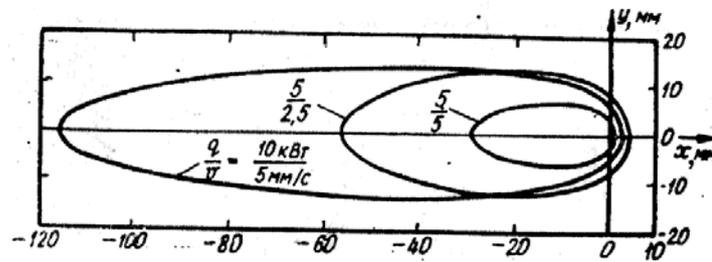
получим

$$T(x, r, \infty) = \frac{q/h}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) K_0\left(\frac{vr}{2a} \sqrt{1 + \frac{4ab}{v^2}}\right). \quad (2.31)$$

Формулу (2.31) без учета теплоотдачи ( $b = 0$ ) можно было получить иначе: проинтегрировать (2.26) по  $\zeta$  от 0 до  $\infty$  или (2.28) от 0 до  $h$ . В последнем случае  $F_0(r, z) = 1$ , так как

$$\int_0^h \cos(\pi i \zeta / h) d\zeta = 0.$$

Температурное поле в пластине (см. рис. 1.1) качественно такое же, как в полубесконечном теле (см. рис. 2.8). Проанализируем зависимость температурного поля от параметров режима сварки, то есть от эффективной мощности сварочного источника  $q$  и его скорости  $v$ , на примере изотермы 1000 К (рис. 2.10). Рост мощности вдвое (с 5 до 10 кВт при постоянной скорости  $v = 5 \text{ мм с}^{-1}$ ) привел к увеличению длины зоны, нагретой выше 1000 К, приблизительно в 4 раза, а ширины – в 2 раза. Зависимость ширины и длины изотермы от  $v$  при  $q = \text{const}$  обратно пропорциональная. При постоянной погонной энергии ( $Q_1 = q/v = 10/5 = 5/2.5 \text{ кДж мм}^{-1}$ ) скорость оказывает практическое влияние только на длину нагретой зоны (наблюдается пропорциональная зависимость).



**Рис. 2.10.** Влияние режима сварки на форму изотермы 1000 К в пластине толщиной 10 мм ( $\lambda = 50 \text{ Вт м}^{-1} \text{ К}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0.002 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300 \text{ К}$ )

*Подвижный плоский источник в бесконечном стержне.* Аналогично случаям полубесконечного тела и пластины определяется температурное поле в стержне (рис. 2.7, в). Используя (2.16), получим

$$dT(x,t) = \frac{q / A d\tau}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{[x+v(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)} - b(t-\tau)\right);$$

$$T(x,t) = \frac{q / A}{c\rho(4\pi a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-\tau)} - \left(\frac{v^2}{4a} + b\right)(t-\tau)\right) d\tau. \quad (2.32)$$

При  $t \rightarrow \infty$ , используя подстановку  $u^2 = t - \tau$  и интеграл № 3.325 [2]

$$\int_0^\infty \exp(-au^2 - b/u^2) du = 1/2\sqrt{\pi} / a \exp(-2\sqrt{ab}),$$

получим

$$T(x, \infty) = \frac{q/A}{c\rho v \sqrt{1 + \frac{4ab}{v^2}}} \exp\left(-\frac{v}{2a}\left(x + |x| \sqrt{1 + \frac{4ab}{v^2}}\right)\right). \quad (2.33)$$

Видно, что в стержне без поверхностной теплоотдачи (при  $b = 0$ ) температура перед источником падает по закону  $\exp(-vx/a)$ , а позади него постоянна и равна  $q/(Ac\rho v)$ . Теплоотдача уменьшает температуру.

Подчеркнем, что структура формул для полубесконечного тела (2.25), плоского слоя (2.28), пластины (2.31) и стержня (2.33) одинакова: в первый множитель входит плотность мощности ( $q_0 = q$ ,  $q_1 = q/h$  или  $q_2 = q/A$ ), далее в показатель входят безразмерная продольная координата (критерий Пекле  $Pe = vx/(2a)$ ), характеризующая асимметричность температурного поля, и функция, зависящая от безразмерного радиус-вектора ( $vR/(2a)$ ,  $vr/(2a)$  или  $v|x|/(2a)$ ). Влияние поверхностной теплоотдачи характеризуется безразмерным критерием  $\sqrt{1 + 4ab/v^2}$ . Однотипность структуры формул и определяет однотипность температурных полей в различных телах.

Отметим, что предельный переход к квазистационарному состоянию (при  $t \rightarrow \infty$ ) можно было сделать не в полученном решении задачи нестационарной теплопроводности, как в настоящем параграфе, а раньше, на этапе формулировки задачи стационарной теплопроводности, для чего следовало бы решать уравнение (1.13). Именно таким путем Н.А. Wilson и D. Rosenthal получили решения типа (2.25), (2.31) и (2.33) [15, 16].

## 2.5. Периоды теплонасыщения и выравнивания температуры

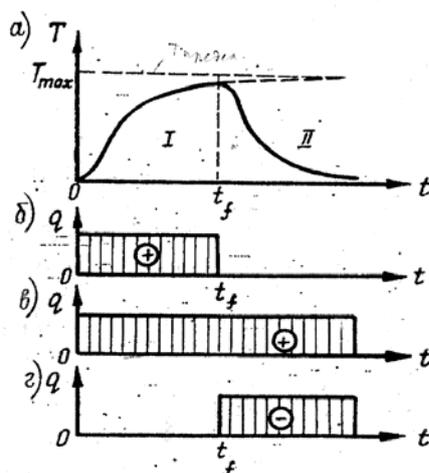
Теоретически период теплонасыщения, в течение которого в подвижной системе координат устанавливается квазистационарное состояние, длится бесконечно долго. В действительности этот период конечен (область I, рис. 2.11, а), причем скорость приближения температуры к предельному значению  $T_{\max}$  зависит от подынтегральной функции в формулах типа (2.24), (2.30) и (2.32). Анализ этих формул показывает [11, 13], что для достижения теплонасыщения с увеличением радиуса-вектора (критерия Пекле  $vR/(2a)$ ,  $vr/(2a)\sqrt{1 + 4ab/v^2}$  или  $v|x|/(2a)\sqrt{1 + 4ab/v^2}$ ) требуется больше времени (критерия  $v^2t/(4a)$  или  $v^2t/(4a)(1 + 4ab/v^2)$ ).

После прекращения действия источника ( $t > t_f$ ) температура выравнивается (область II, рис. 2.11, а). Температуру в любой момент  $t$  периода выравнивания можно определить по формулам типа (2.24), (2.30) или (2.32) в зависимости от расчетной схемы, но время  $t$  в пределе интегрирования следует заменить фактическим временем действия  $t_f$ :

$$T(t) = \int_0^{t_f} f(t - \tau) d\tau, \quad (2.34)$$

где  $f$  – соответствующая подынтегральная функция. Интеграл (2.34) можно представить иначе:

$$T(t) = \int_0^t f(t-\tau)d\tau - \int_{t_f}^t f(t-\tau)d\tau.$$



**Рис. 2.11.** Схема к расчету температуры при нагреве подвижным источником теплоты: *a* – изменение температуры во времени в подвижной системе координат; *б* – действительный источник; *в*, *г* – представление действительного источника в виде источника и стока соответственно

Физический смысл последнего выражения заключается в представлении действительного источника (рис. 2.11, *б*) в виде пары: источника (рис. 2.11, *в*), непрерывно действующего в течение интервала  $(0, t)$ , и стока (рис. 2.11, *г*), непрерывно действующего в течение интервала  $(t_f, t)$ .

Если подвижный или неподвижный источник импульсный, то

$$T(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{si}}^{t_{fi}} f(t-\tau)d\tau, \quad (2.35)$$

где  $n$  – количество импульсов за время  $t$ ;  $t_{si}$  и  $t_{fi}$  – соответственно время начала и конца  $i$ -го импульса.

Изложенный подход можно применить и для неподвижных источников, только в этом случае используются соответствующие формулы (2.17), (2.19), (2.21), (2.22) или (2.23).

## 2.6. Быстродвижущиеся источники теплоты

Ранее в п. 2.4 были рассмотрены температурные поля источников, движущихся с любой скоростью  $v$ , и было отмечено, что чем больше  $v$ , тем более вытянуты вдоль оси движения  $x$  изотермы позади источника ( $|\partial T/\partial y| \gg |\partial T/\partial x|$ ) и,

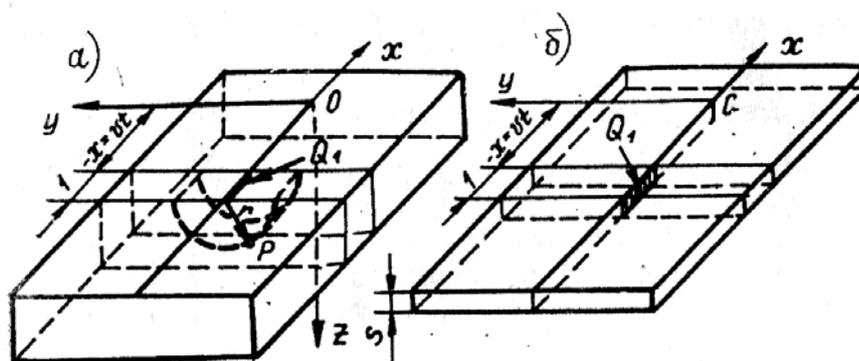
следовательно, тем меньше продольные тепловые потоки относительно поперечных ( $q_{2x} \ll q_{2y}$ ). Схемы быстро движущихся источников построены на дополнительном допущении, что продольные потоки отсутствуют ( $q_{2x} = 0$ ), что, в свою очередь, позволяет уменьшить мерность температурной задачи на единицу и, следовательно, значительно упростить расчетные схемы. Это достоинство быстро движущихся источников обусловило их популярность для расчетов температурных полей при сварке.

*Быстро движущийся точечный источник на поверхности полубесконечного тела.* Выделим в полубесконечном теле тонкий поперечный слой (толщиной  $h = 1$ ), в который внесена погонная энергия  $Q_1 = q/v$  (Дж м<sup>-1</sup>) в момент пересечения слоя источником теплоты (рис. 2.12, а). Согласно принятому допущению, теплота распространяется только в радиальном направлении  $r$ , что соответствует схеме мгновенного источника теплоты  $Q_1$  в полубесконечной пластине толщиной  $h = 1$  без поверхностной теплоотдачи. Заменяя в формуле (2.12)  $Q/h$  на  $2q/v$ , получим

$$T(r, t) = \frac{q/v}{2\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \quad (2.36)$$

где  $r$  – расстояние от рассматриваемой точки  $P$  до оси движения источника  $x$ ;  $t$  – время, отсчитываемое с момента пересечения источником сечения, в котором находится точка  $P$ . Подставляя  $t = -x/v$  (см. рис. 2.12, а) в (2.36), получим уравнение, описывающее температурное поле в подвижной системе координат:

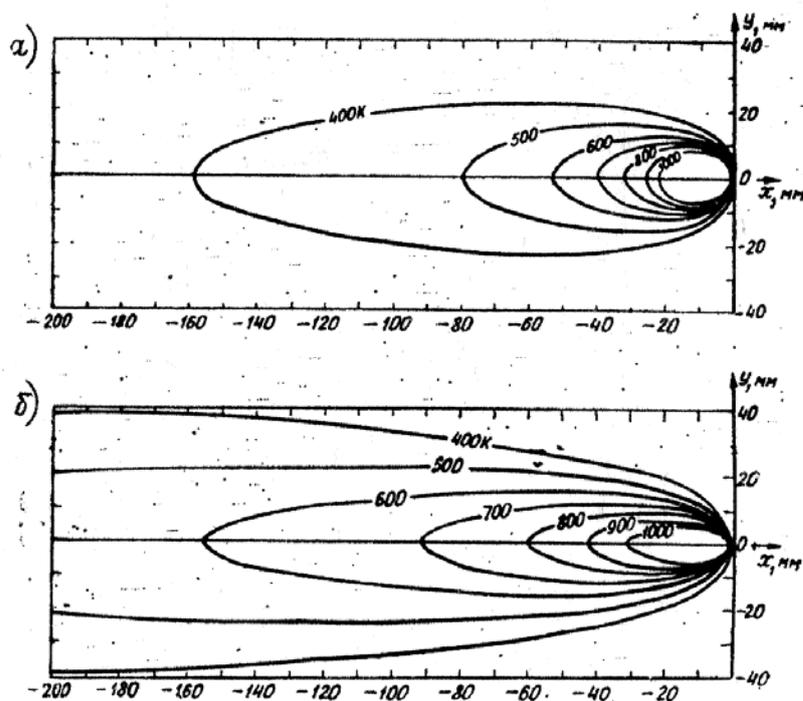
$$T(x, r) = -\frac{q}{2\pi\lambda x} \exp\left(\frac{r^2 v}{4ax}\right). \quad (2.37)$$



**Рис. 2.12.** Схема выделения поперечного слоя единичной толщины: а – быстро движущийся источник на поверхности полубесконечного тела; б – быстро движущийся линейный источник в бесконечной пластине

Как видно из сравнения рис. 2.13, а с рис. 2.8, з, погрешность расчета температуры по схеме быстро движущегося источника незначительна в области

остывания, а на отрицательной полуоси  $x$  ( $r = 0$ ) погрешность равна нулю. При допущении отсутствия продольных потоков материал впереди источника не нагревается.



**Рис. 2.13.** Изотермы поля быстродвижущихся источников теплоты ( $q = 5$  кВт,  $v = 5$  мм  $\text{с}^{-1}$ ,  $\lambda = 50$  Вт  $\text{м}^{-1}$   $\text{К}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$   $\text{м}^2$   $\text{с}^{-1}$ ,  $b = 0.002$   $\text{с}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300$  К): *а* – точечный источник на поверхности полубесконечного тела (показано поле при  $z = 0$ ); *б* – линейный источник в бесконечной пластине толщиной 10 мм

Из (2.37) можно определить длину жидкой ванны  $L$ , подставляя температуру плавления  $T_L$  при  $r = 0$ :

$$L = \frac{q}{2\pi\lambda T_L}. \quad (2.38)$$

Видно, что длина ванны пропорциональна мощности источника и не зависит от скорости сварки.

Отметим, что формулу (2.37) можно получить из (2.25) с помощью предельного перехода при  $v \rightarrow \infty$  при условии  $Q_1 = q/v = \text{const}$ , когда допущение отсутствия продольных потоков строго выполняется.

*Линейный источник в бесконечной пластине.* Выделим в бесконечной пластине тонкий поперечный слой (рис. 2.12, б). Полагая, как и в случае быстродвижущегося точечного источника, что теплота распространяется только в поперечном направлении (вдоль оси  $y$ ), получим схему мгновенного плоского источника  $Q_1 = q/v$  в стержне сечением  $A = 1 \times h$  с теплоотдачей через верхнюю и нижнюю поверхности. Заменяя в (2.16)  $Q/A$  на  $Q_1/h = q/(vh)$ , имеем

$$T(y, t) = \frac{q / (vh)}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4at} - bt\right), \quad (2.39)$$

где  $b = 2\alpha / (c\rho h)$ .

Как видно из сравнения рис. 2.13, б с рис. 1.1, в, характер погрешности расчета температуры по схеме быстродвижущегося линейного источника такой же, как в случае точечного источника.

Длину жидкой сварочной ванны (длину изотермы  $T_L$ ) можно получить из (2.39) при  $b = 0$ :

$$L = \frac{1}{4\pi a} \left( \frac{q/h}{c\rho T_L} \right) \frac{1}{v}. \quad (2.40)$$

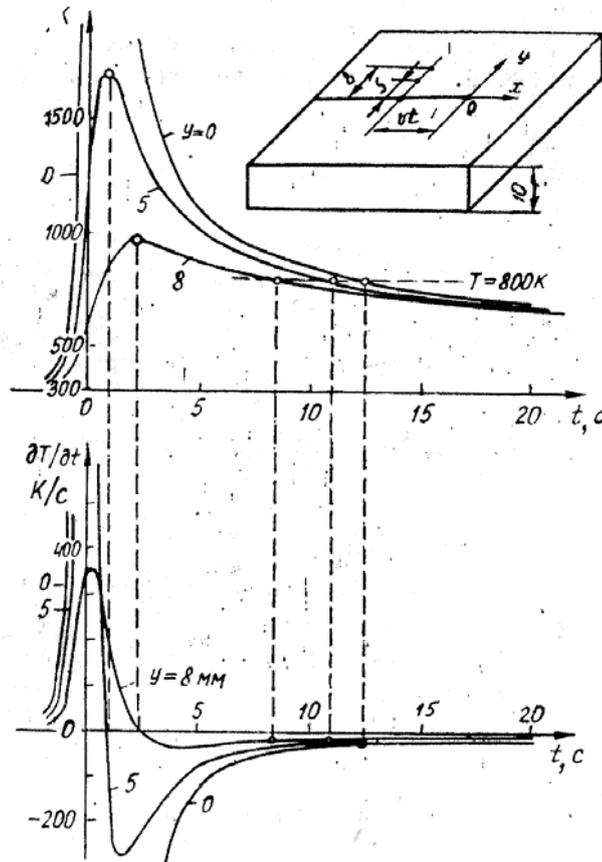
## 2.7. Распределение максимальной температуры

Полученные решения температурной задачи для различных тел с различными источниками позволяют анализировать термические циклы материала, то есть изменение во времени его температуры. Зная функцию  $T(x, y, z, t)$ , принципиально можно определить максимальную температуру  $T_{\max}(x, y, z)$ , скорость нагрева и охлаждения  $\partial T / \partial t(x, y, z, t)$ , время пребывания материала выше данной температуры и другие характеристики термического цикла (рис. 2.14). Эти характеристики необходимы при прогнозировании размеров сварочной ванны и зоны термического влияния, металлографической структуры различных зон сварного соединения и т. п.

Условием максимума температуры является равенство нулю производной по времени,  $\partial T / \partial t(x, y, z, t) = 0$ . Поэтому процедура определения распределения максимальной температуры  $T_{\max}(x, y, z)$  следующая: уравнение  $\partial T / \partial t(x, y, z, t) = 0$  решают относительно времени и полученный корень уравнения  $t_{\max}(x, y, z)$  подставляют в исходное уравнение  $T(x, y, z, t)$ , в результате чего получают  $T_{\max}(x, y, z)$ . Если в явном виде корень  $t_{\max}(x, y, z)$  выразить не удастся, то его определяют численными методами. Схемы быстродвижущихся источников в полубесконечном теле и бесконечной пластине позволяют в аналитическом виде определить распределение максимальной температуры.

*Быстродвижущийся точечный источник на поверхности полубесконечного тела.* Продифференцируем функцию  $T(r, t)$  (2.36) по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{q/v}{2\pi\lambda t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \left(\frac{r^2}{4at} - 1\right).$$



**Рис. 2.14.** Термические циклы поверхностных точек при нагреве подвижным точечным источником на поверхности плоского слоя толщиной 10 мм ( $q = 5 \text{ кВт}$ ,  $v = 5 \text{ мм с}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda = 50 \text{ Вт м}^{-1} \text{ К}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300 \text{ К}$ )

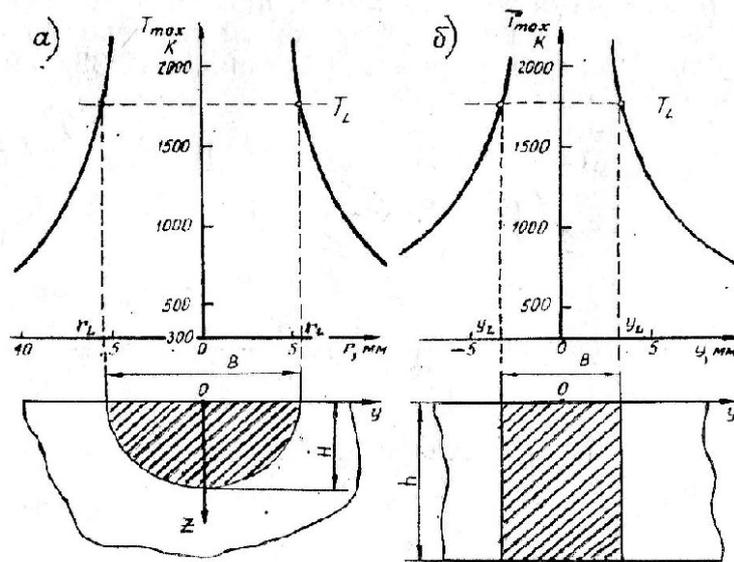
Приравняем эту производную нулю и найдем корень  $t_{max}$ :  $t_{max} = r^2/(4a)$ . Подставив  $t_{max}$  в (2.36), получим

$$T_{max}(r) = T(r, t_{max}) = \frac{2}{\pi e} \frac{q/v}{c\rho} \frac{1}{r^2} = 0.234199 \frac{q/v}{c\rho} \frac{1}{r^2}.$$

Видно, что функция  $T_{max}(r)$  является гиперболоидом вращения (рис. 2.15, а). Она позволяет определить ширину зоны нагрева выше заданной температуры. Например, приравняв  $T_{max}$  к температуре плавления  $T_L$ ,  $T_{max}(r_L) = T_L$ , можно найти ширину  $B = 2r_L$  и глубину  $H = r_L$  жидкой ванны:

$$B = 2H = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi e} \frac{q/v}{c\rho T_L}} = 2 \cdot 0.483941 \sqrt{\frac{q/v}{c\rho T_L}}.$$

Длина жидкой ванны определена ранее (2.38).



**Рис. 2.15.** Распределение максимальной температуры ( $q = 5 \text{ кВт}$ ,  $v = 5 \text{ мм с}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $c\rho = 5 \text{ МДж м}^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300 \text{ К}$ ): *a* – быстро движущийся точечный источник на поверхности полубесконечного тела; *b* – быстро движущийся линейный источник в бесконечной пластине толщиной 10 мм ( $b = 0.002 \text{ с}^{-1}$ )

*Быстро движущийся линейный источник в бесконечной пластине.* Распределение максимальной температуры в бесконечной пластине определяется на основе (2.39) аналогично случаю полубесконечного тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q/(vh)}{c\rho(4\pi a)^{1/2}t^{5/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4at} - bt\right) \left(bt^2 + \frac{1}{2}t - \frac{y^2}{4a}\right);$$

$$t_{\max} = \frac{1}{4b} \left( \sqrt{1 + \frac{4by^2}{a}} - 1 \right) \text{ при } b > 0;$$

$$t_{\max} = \frac{y^2}{2a} \text{ при } b = 0;$$

$$T_{\max}(y) = \frac{q/(vh)}{c\rho \left[ \frac{\pi a}{b} \left( \sqrt{1 + 4by^2/a} - 1 \right) \right]^{1/2}} \times \exp\left( -\frac{y^2}{a/b \left( \sqrt{1 + 4by^2/a} - 1 \right)} - \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 + 4by^2/a} - 1 \right) \right) \text{ при } b > 0;$$

$$T_{\max}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \frac{q/(vh)}{c\rho} \frac{1}{y} = 0.241971 \frac{q/(vh)}{c\rho} \frac{1}{y} \text{ при } b = 0.$$

Функция  $T_{\max}(y)$  при  $b = 0$  является равнобочной гиперболой. Ширина жидкой ванны (рис. 2.15, б):

$$B = 2y_L = \frac{2}{\sqrt{2\pi e}} \frac{q/(vh)}{c\rho T_L} = 0.483941 \frac{q/(vh)}{c\rho T_L}. \quad (2.41)$$

Длина жидкой ванны определена ранее (2.40).

Выводы о влиянии параметров режима сварки  $q$  и  $v$  на размеры сварочной ванны  $L$  и  $B$ , которые вытекают из формул (2.40) и (2.41), полностью соответствуют результатам анализа изотерм, полученным на основании более точной формулы (2.31) и рис. 2.10 в п. 2.4.

## 2.8. Скорость охлаждения при данной температуре

Имея зависимость  $T(x, y, z, t)$ , можно путем дифференцирования ее получить  $\partial/\partial t T(x, y, z, t)$ , а затем определить скорость охлаждения  $\partial/\partial t T(x, y, z, T)$  точки  $x, y, z$  при данной температуре  $T$  (см. рис. 2.14). Для этого из уравнения  $T(x, y, z, t)$  на ветви охлаждения следует найти время  $t$ , когда  $T(x, y, z, t) = T$ , и подставить его в формулу  $\partial/\partial t T(x, y, z, t)$ .

Анализ показывает, что скорость охлаждения  $\partial T/\partial t$  при данной температуре  $T$  слабо зависит от координат точки  $x, y, z$ , если максимальная температура в ней  $T_{\max}(x, y, z)$  значительно больше температуры  $T$  (см. рис. 2.14). Поэтому будем определять скорость охлаждения только для оси источника (сварного шва), пользуясь схемой быстродвижущихся источников, так как в этом случае удастся найти зависимость  $\partial/\partial t T(x, y, z, T)$  в явном виде.

*Быстродвижущийся точечный источник на поверхности полубесконечного тела.* При  $r = 0$  из (2.36) получим

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial t} = -\frac{q/v}{2\pi\lambda t^2}. \quad (2.42)$$

Время наступления данной температуры  $T$  с учетом начальной температуры  $T_\infty$  определим из (2.36):

$$t = \frac{q/v}{2\pi\lambda(T - T_\infty)}. \quad (2.43)$$

Подставляя (2.43) в (2.42), получим скорость охлаждения сварного шва:

$$\frac{\partial T(0, T)}{\partial t} = -2\pi\lambda \frac{(T - T_\infty)^2}{q/v}. \quad (2.44)$$

*Быстродвижущийся линейный источник в бесконечной пластине.* Аналогично (2.44) определяется скорость охлаждения центра шва в пластине без поверхностной теплоотдачи ( $b = 0$ ). При  $y = 0$  из (2.39) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(0,t)}{\partial t} &= -\frac{q/(vh)}{4c\rho(\pi a)^{1/2}t^{3/2}}; \\ t &= \frac{1}{4\pi a} \left[ \frac{q/(vh)}{c\rho(T-T_\infty)} \right]^2; \\ \frac{\partial T(0,T)}{\partial t} &= -2\pi\lambda c\rho \frac{(T-T_\infty)^3}{[q/(vh)]^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из (2.44) и (2.45) видно, что скорость охлаждения (на охлаждение указывает знак минус) зависит от режима сварки ( $q/v$ ), размеров изделия ( $h$ ), начальной температуры ( $T_\infty$ ) и свойств материала ( $\lambda$ ,  $c\rho$ ). С увеличением погонной энергии  $q/v$  и начальной температуры  $T_\infty$  скорость охлаждения падает особенно резко в случае пластины, что следует из показателей степеней. Например, увеличение температуры подогрева  $T_\infty$  с 300 К до 550 К уменьшает скорость охлаждения при температуре 800 К (температуре минимальной устойчивости аустенита в закаливаемых сталях) в 4 раза при сварке массивного тела и в 8 раз при сварке пластины.

## 2.9. Периодические источники теплоты

Концентрированные источники теплоты периодической мощности используются при аргоно-дуговой, лучевых способах сварки и т.д. В п. 2.5 был показан метод расчета температуры от импульсного источника (уравнение (2.35)). Рассмотрим теперь решение температурной задачи в предельном случае ( $t \rightarrow \infty$ ) на примере подвижного периодического источника на поверхности полубесконечного тела.

Пусть периодическая функция распределения мощности источника во времени  $q(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ее можно разложить в ряд Фурье:

$$q(t) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)],$$

где  $\omega = 2\pi/t_c$ ;  $t_c$  – период (рис. 2.16);  $a_k$ ,  $b_k$  – коэффициенты Фурье:

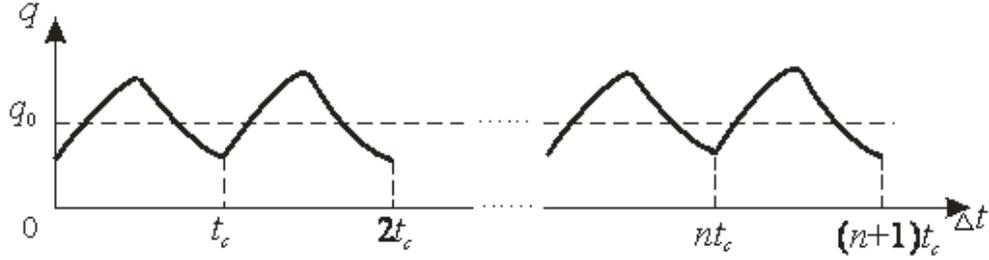
$$a_k = 2/t_c \int_0^{t_c} q(t) \cos(k\omega t) dt; \quad b_k = 2/t_c \int_0^{t_c} q(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Температура от периодического источника  $T(x, y, z, t)$  будет представлять собой сумму температуры  $T_0(x, y, z, t)$  от постоянно действующего источника мощностью  $q_0 = a_0/2$  и температуры  $T_k(x, y, z, t)$  от всех  $k$ -х источников мощности

$$q_k(t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Таким образом,

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x, y, z, t). \quad (2.46)$$



**Рис. 2.16.** Схема периодического источника теплоты

Решение задачи  $T_0(x, y, z, t)$  для постоянной мощности  $q_0$  получено ранее (п. 2.4). Решение задачи  $T_k(x, y, z, t)$  для  $k$ -й гармонике  $q_k$  в подвижной системе координат получим, подставляя в (2.24)  $q_k$  вместо  $q_0$ :

$$T_k(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{2(a_k \cos(k\omega\tau) + b_k \sin(k\omega\tau))}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(\frac{[x+v(t-\tau)]^2 + y^2 + z^2}{4a(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (2.47)$$

Рассмотрим предельное состояние ( $t \rightarrow \infty$ ). Время сместим к началу  $n$ -го периода ( $n = \infty$ ) и будем обозначать  $\Delta t$  (рис. 2.16). С помощью подстановки  $u = 4a(t - \tau)$  выражение (2.47) приводится к виду:

$$T_k(x, y, z, \Delta t) = \frac{1}{2\lambda\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) \times \\ \times \{ [a_k \cos(k\omega\Delta t) + b_k \sin(k\omega\Delta t)] I_1 + [a_k \sin(k\omega\Delta t) - b_k \cos(k\omega\Delta t)] I_2 \}, \quad (2.48)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – известные интегралы № 2.5.37.3 [9]:

$$I_1 = \int_0^{\infty} u^{-3/2} \exp\left(-\left(\frac{v}{4a}\right)^2 u - \frac{R^2}{u}\right) \cos\left(\frac{k\omega}{4a} u\right) du = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{R} \exp\left(-\frac{vR}{2a} \sqrt{A_k + 1/2}\right) \cos\left(\frac{vR}{2a} \sqrt{A_k - 1/2}\right); \\ I_2 = \int_0^{\infty} u^{-3/2} \exp\left(-\left(\frac{v}{4a}\right)^2 u - \frac{R^2}{u}\right) \sin\left(\frac{k\omega}{4a} u\right) du = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{R} \exp\left(-\frac{vR}{2a} \sqrt{A_k + 1/2}\right) \sin\left(\frac{vR}{2a} \sqrt{A_k - 1/2}\right);$$

$$A_k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{4ka\omega}{v^2} \right)^2}.$$

Подставляя  $I_1$  и  $I_2$  в (2.48), получим:

$$T_k(x, R, \Delta t) = \frac{1}{2\pi\lambda R} \exp\left(-\frac{v}{2a}(x + R\sqrt{A_k + 1/2})\right) \times \\ \times \left[ a_k \cos\left(k\omega\Delta t - \frac{vR}{2a}\sqrt{A_k - 1/2}\right) + b_k \sin\left(k\omega\Delta t - \frac{vR}{2a}\sqrt{A_k - 1/2}\right) \right]. \quad (2.49)$$

Таким образом, получено решение температурной задачи в предельном состоянии в виде ряда (2.46) с учетом (2.25) и (2.49). Видно, что температура пульсирует с частотой источника  $k\omega$ .

В качестве примера рассмотрим периодический подвижный точечный источник на поверхности полубесконечного тела с продолжительностью прямоугольного импульса  $t_p = 3$  с, периодом  $t_c = 6$  с и мощностью импульса  $q_p = 10$  кВт (усредненной мощностью  $q_0 = q_p t_p / t_c = 5$  кВт) (рис. 2.17, а). Ось времени  $\Delta t$  выберем так, чтобы функция мощности  $q(t)$  была четной. Тогда коэффициенты Фурье суть:

$$a_0 = 2q_p \frac{t_p}{t_c}; \quad a_k = (-1)^k \frac{2q_p}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k t_p}{t_c}\right); \quad b_k = 0,$$

а температурное поле описывается выражением

$$T(x, y, z, \Delta t) = \frac{q_0}{2\pi\lambda R} \exp\left(-\frac{v(x+R)}{2a}\right) F(R, \Delta t),$$

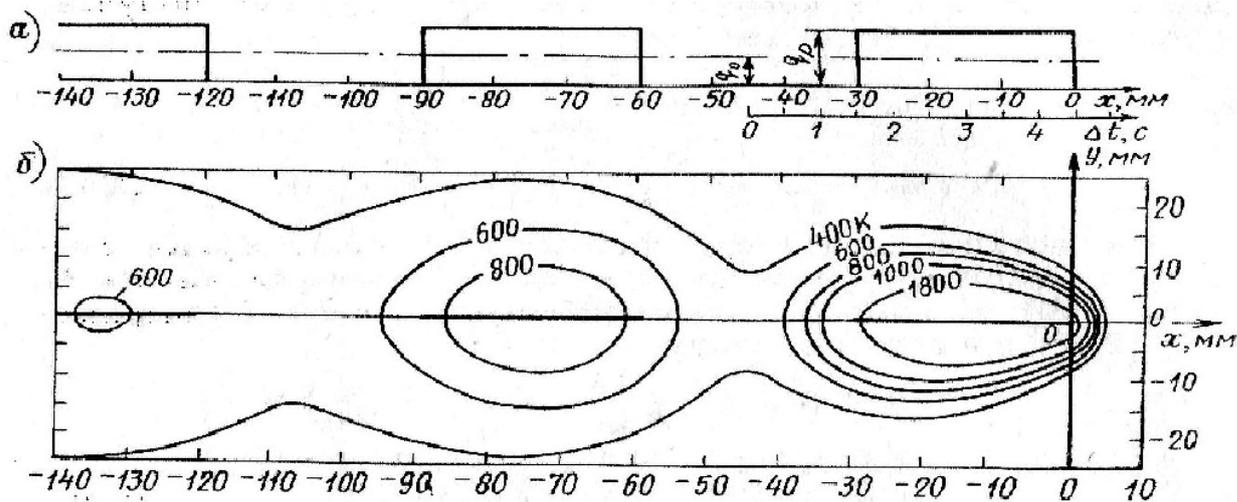
где

$$F(R, \Delta t) = 1 + \frac{2t_c}{\pi t_p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{\pi k t_p}{t_c}\right) \exp\left(-\frac{vR}{2a}(\sqrt{A_k + 1/2} - 1)\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi k}{t_c} \Delta t - \frac{vR}{2a} \sqrt{A_k - 1/2}\right).$$

Функция  $F$  учитывает влияние периодичности источника. Если мощность источника постоянна ( $t_p = t_c$ ,  $q(t) = q_0$ ), то  $F = 1$ .

Как видно из рис. 2.17, б, температурное поле при периодическом источнике может существенно отличаться от такового при источнике постоянной мощности (ср. с рис. 2.8).

Аналогично можно получить решения для подвижных периодических источников с любой формы импульса в плоском слое, пластине и стрержне [6, 14]. Их можно использовать в качестве фундаментальных при решении задач с распределенными периодическими источниками.



**Рис. 2.17.** Температурное поле при прерывистой сварке массивных тел ( $q_p = 10$  кВт,  $q_0 = 5$  кВт,  $v = 5$  мм  $\text{с}^{-1}$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>  $\text{с}^{-1}$ ,  $\lambda = 50$  Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>,  $T_\infty = 300$  К): *а* – схема периодического источника; *б* – изотермы на поверхности в момент окончания импульса ( $\Delta t = 4.5$  с)

## 2.10. Распределенные источники теплоты

При расчете тепловых процессов до сих пор мы полагали, что источник теплоты либо точечный, либо равномерно распределенный линейный, либо равномерно распределенный плоский. В действительности сварочные источники теплоты распределены по более сложному закону. Например, сварочная дуга, газовое пламя, плазменная струя, электронный луч и т. п. являются нормально круговыми источниками (п. 1.5).

При выборе математической схемы источника следует исходить из принципа местного влияния, который применительно к сварочному нагреву можно сформулировать так: закон распределения источника теплоты значительно сказывается на температурном поле лишь на расстоянии одного порядка с размерами области, занятой источником. Температурное поле в области, удаленной от источника, не изменится, если заменить произвольно распределенный источник теплоты эквивалентным по величине и расположению сосредоточенным источником. Например, вдали от сварочной дуги температурное поле определяется формой изделия, то есть в изделиях значительной толщины является трехмерным, в пластине – двумерным, в стержне – одномерным.

Рассмотрим некоторые практически важные случаи распределенных источников в полубесконечном теле, плоском слое и пластине.

*Мгновенные нормально круговые источники.* С помощью мгновенных точечных и линейных источников в полубесконечном теле, плоском слое и пластине (п. 2.2) были построены различные расчетные схемы (непрерывно действующие неподвижные и подвижные, быстро движущиеся и другие источники

в соответствующих телах). Точно так же могут быть построены аналогичные схемы на основе мгновенных нормально круговых источников, которые представляют широкий круг сварочных источников теплоты (п. 1.5).

Рассмотрим последовательно схемы мгновенных нормально круговых источников в пластине, плоском слое и полубесконечном теле.

Радиальное распределение нормально кругового источника описывается уравнениями (1.17) и (1.18). Разобьем *мгновенный нормально круговой источник теплоты в бесконечной пластине*  $Q$  (Дж) на элементарные источники площадью  $\rho d\phi d\rho$ , на которой выделилось количество теплоты  $dQ(\rho) = C/\pi Q \exp(-C\rho^2)\rho d\phi d\rho$ .

Согласно (2.14), приращение температуры в произвольной точке пластины  $P(r)$  от этого источника составит:

$$dT(r,t) = \frac{dQ(\rho)/h}{4\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{r_1^2}{4at} - bt\right),$$

где  $r_1^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\phi)$  (рис. 2.18). Суммированием всех элементарных источников с помощью интеграла № 6.633.4 [2]

$$\int_0^\infty u \exp(-\alpha u^2) I_0(\beta u) du = 1/(2\alpha) \exp(\beta^2/(4\alpha));$$

$$I_0(\beta u) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \exp(-\beta u \cos(\phi)) d\phi$$

получим температуру в бесконечной пластине:

$$\begin{aligned} T(r,t) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{CQ/h}{4\pi^2\lambda t} \exp\left(-C\rho^2 - \frac{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\phi)}{4at} - bt\right) d\phi \rho d\rho = \\ &= \frac{Q/h}{4\pi\lambda(t+t_0)} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t+t_0)} - bt\right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где  $t_0 = 1/(4aC)$ . В пределе при  $C \rightarrow \infty$  ( $t_0 \rightarrow 0$ ) нормально круговой источник описывается  $\delta$ -функцией (1.20), а формула (2.50) переходит в (2.14). Видно, что формально учет распределенности рассматриваемого источника сводится к добавлению  $t_0$  ко времени действия линейного сосредоточенного источника.

Пусть *мгновенный нормально круговой источник в полубесконечном теле или плоском слое* с адиабатическими границами находится на глубине  $\zeta$ . Тогда, используя в качестве исходных формулы (2.4), (2.6) и (2.11), получим методом источников, как и в случае пластины, решение для полубесконечного тела

$$T(r,z,t) = \frac{Q}{4\pi\lambda(t+t_0)(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t+t_0)}\right) \sum_{j=-1,1} \exp\left(-\frac{(z-j\zeta)^2}{4at}\right) \quad (2.51)$$

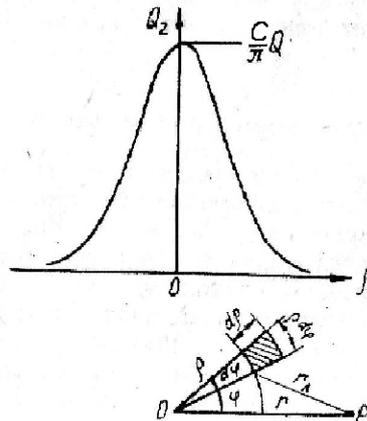
И ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ

$$T(r, z, t) = \frac{Q}{4\pi\lambda(t+t_0)(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t+t_0)}\right) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1} \exp\left(-\frac{(z-j\zeta-2ih)^2}{4at}\right)$$

ИЛИ

$$T(r, z, t) = \frac{Q/h}{4\pi\lambda(t+t_0)} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t+t_0)}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi i\zeta}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right] \quad (2.52)$$

Видно, что в правой части (2.52) выражение до квадратных скобок представляет собой равномерно распределенную по толщине температуру (2.50), а выражение в квадратных скобках учитывает влияние глубины расположения источника  $\zeta$  и наблюдаемой точки  $z$ .



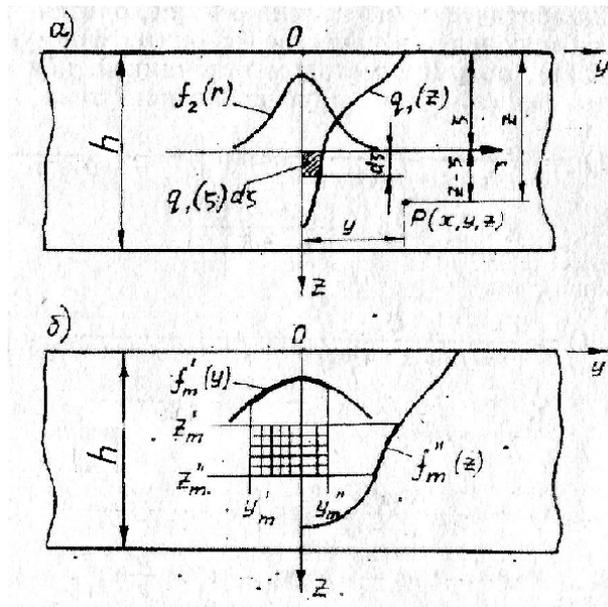
**Рис. 2.18.** Схема нормально кругового источника

*Подвижный объемный источник, распределенный произвольно по толщине бесконечного плоского слоя и нормально в плоскости слоя. Пусть мощность источника распределена произвольно по толщине (оси  $z$ ) и нормально в радиальном направлении  $r$  в плоскостях  $z = \text{const}$  (рис. 2.19, а):*

$$q_3(r, z) = q_1(z) f_2(r),$$

где  $f_2(r) = C/\pi \exp(-Cr^2)$ . Функцию  $f_2(r)$  можно понимать как нормально круговой источник единичной мощности на произвольной глубине  $z$ . Эффективная мощность источника  $q$  (Вт) связана с распределением объемной плотности мощности  $q_3(r, z)$  (Вт м<sup>-3</sup>) выражением:

$$\int_0^h \int_0^{\infty} q_3(r, z) 2\pi r dr dz = \int_0^h q_1(z) dz \int_0^{\infty} f_2(r) 2\pi r dr = \int_0^h q_1(z) dz = q.$$



**Рис. 2.19.** Схемы объемных источников теплоты в плоском слое: *a* – подвижный нормально круговой источник; *б* – быстродвижущийся источник

Пусть источник движется вдоль оси  $x$  в течение времени  $t$  с постоянной скоростью  $v$  и вся его мощность  $q$  сосредоточена в плоскости  $z = \zeta$ :  $q_3(r, z) = q \delta(z - \zeta) f_2(r)$ . Температурное поле можно найти суммированием всех последовательно действующих мгновенных источников, на которые разбивается подвижный источник (см. п. 2.4). С учетом (2.52) в подвижной системе координат, когда центр источника находится на оси  $z$ , получим

$$T(x, y, z, t) = \frac{q/h}{4\pi\lambda} \int_0^t \frac{1}{\tau + t_0} \exp\left(-\frac{(x + v\tau)^2 + y^2}{4a(\tau + t_0)}\right) \times \\ \times \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi i \zeta}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{a\tau}{h^2}\right) \right] d\tau. \quad (2.53)$$

Имея решение (2.53) для сосредоточенного в плоскости  $z = \zeta$  подвижного источника, можно методом источников решить задачу для произвольного распределения мощности по глубине  $q_1(z)$ , Вт  $m^{-1}$  (см. рис. 2.19, *a*). Приращение температуры в любой подвижной точке  $P(x, y, z)$  от элементарного подвижного нормально кругового источника с мощностью  $q_1(\zeta) d\zeta$ , центр которого находится на глубине  $\zeta$ , согласно выражению (2.53), равно

$$dT(x, y, z, t) = \frac{q_1(\zeta) d\zeta / h}{4\pi\lambda} \int_0^t \frac{1}{\tau + t_0} \exp\left(-\frac{(x + v\tau)^2 + y^2}{4a(\tau + t_0)}\right) \times \\ \times \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi i \zeta}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{a\tau}{h^2}\right) \right] d\tau.$$

Тогда температура от рассматриваемого распределенного источника определяется суммированием по толщине всех элементарных источников:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q/h}{4\pi\lambda} \int_0^t \frac{1}{\tau + t_0} \exp\left(-\frac{(x + v\tau)^2 + y^2}{4a(\tau + t_0)}\right) \times \\ \times \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{a\tau}{h^2}\right) \frac{1}{q} \int_0^h q_1(\zeta) \cos\left(\frac{\pi i\zeta}{h}\right) d\zeta \right] d\tau. \quad (2.54)$$

Первый интеграл можно определить численно по известным квадратурным формулам. Аналитическое определение второго интеграла не представляет принципиальных трудностей. Например, если источник равномерно распределен по всей толщине (подвижный нормально круговой источник в пластине без теплоотдачи), то интеграл и, следовательно, бесконечный ряд равны нулю; если источник находится на поверхности плоского слоя, то есть  $q_1(\zeta) = q\delta(0)$ , то интеграл равен  $q$  согласно (1.21).

Аналогично может быть определено температурное поле в полубесконечном теле на основе решения (2.51).

*Подвижный линейный источник, распределенный произвольно по толщине плоского слоя.* Пусть линейный источник мощностью  $q$  в бесконечном плоском слое толщиной  $h$  распределен по оси  $z$  по произвольному закону  $q_1(z)$  и движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ . Допустим, что границы тела адиабатические, то есть  $\partial T/\partial z = 0$  при  $z = 0$  и  $z = h$  (см. рис. 2.19, а). Решение этой задачи можно получить, принимая в формуле (2.54)  $t_0 = 0$ , то есть считая, что нормально круговой источник предельно сосредоточенный ( $C = \infty$ ). При этом, первый интеграл для любого времени  $t$  можно определить численными методами.

Найдем температурное поле в подвижной системе координат в предельном состоянии ( $t = \infty$ ). Решение можно получить двумя путями: либо взять первый интеграл в (2.54) при  $t_0 = 0$  и  $t = \infty$ , либо взять за основу подвижный точечный источник в бесконечном плоском слое (2.28) и из него набрать любой распределенный источник, пользуясь методом источников. Выберем более удобный второй путь. Интегрируя по толщине элементарные точечные источники  $q_1(\zeta) d\zeta$  (Дж), на которые разбивается распределенный источник  $q_1(\zeta)$ , с помощью (2.28) получим

$$T(x, r, z, \infty) = \frac{q/h}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) K_0\left(\frac{vr}{2a}\right) F_1(r, z),$$

где

$$F_1(r, z) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) K_0\left(\frac{vr}{2a} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi ai}{vh}\right)^2}\right) \frac{1}{q} I_i / K_0\left(\frac{vr}{2a}\right);$$

$$I_i = \int_0^h q_1(\zeta) \cos\left(\frac{\pi i \zeta}{h}\right) d\zeta. \quad (2.55)$$

Функция  $F_1(r, z)$  учитывает отклонение рассматриваемого источника от линейного источника мощности  $q$ , равномерно распределенной по всей толщине плоского слоя (в последнем случае  $F_1(r, z) = 1$ ). Разложение распределения мощности  $q_1(z)$  в ряд Фурье по косинусам (2.55) не представляет принципиальных трудностей, так как условия Дирихле выполняются для всех случаев сварки. Например, для точечного источника на поверхности плоского слоя  $I_i = q$  согласно (1.21). Если  $q_1(z) = A + Bz$  на отрезке  $z', z''$ , то

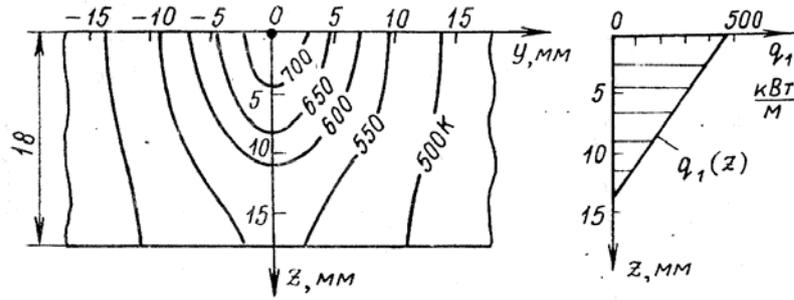
$$I_i = \frac{h}{\pi i} (A + Bz'') \sin\left(\frac{\pi i z''}{h}\right) + \left(\frac{h}{\pi i}\right)^2 B \cos\left(\frac{\pi i z''}{h}\right) - \\ - \frac{h}{\pi i} (A + Bz') \sin\left(\frac{\pi i z'}{h}\right) - \left(\frac{h}{\pi i}\right)^2 B \cos\left(\frac{\pi i z'}{h}\right). \quad (2.56)$$

Если интеграл (2.55) не берется, то распределение  $q_1(z)$  можно аппроксимировать с любой точностью кусочно-линейной функцией и определять интеграл по (2.56).

На рис. 2.20 слева показано предельное распределение температуры в поперечном сечении плоского слоя при электронно-лучевой сварке алюминиевого сплава в предположении, что ось электронного луча совпадает с подвижной осью  $z$  и теплота вводится по линейному закону не по всей толщине (распределение мощности  $q_1(z)$  показано справа). Видно, что вблизи оси  $z$  температура по толщине распределена неравномерно, но уже на расстоянии полтолщины от нее температура практически одинакова.

*Произвольно распределенные быстродвижущиеся объемные источники.* В п. 2.6 было показано, что быстродвижущиеся источники для многих способов сварки удовлетворительно описывают тепловое состояние всюду за исключением области впереди и вблизи источника (зоны, где металл нагревается). Упрощение расчета за счет принятия схемы быстродвижущихся источников позволяет относительно просто учесть дополнительный фактор – распределенность источника.

Рассмотрим *быстродвижущийся объемный источник, распределенный произвольно по ширине бесконечной пластины.* Пусть скорость источника достаточно велика, чтобы можно было пренебречь тепловыми потоками вдоль оси движения  $x$  и считать, что погонная энергия  $Q_1 = q/v$  (Дж м<sup>-1</sup>) в поперечный слой единичной толщины вводится мгновенно. Тогда задача сводится к схеме бесконечного стержня сечением  $1 \times h$  с мгновенным источником теплоты, который по осям  $x$  и  $z$  распределен равномерно, а по оси  $y$  – по известному закону  $Q_3(y)$ , Дж м<sup>-3</sup>.



**Рис. 2.20.** Изотермы в поперечном сечении плоского слоя позади подвижного линейного источника при  $x = -5$  мм ( $q = 3400$  Вт,  $q_1(z) = 485.71 - 34693z$  кВт м<sup>-1</sup> на участке  $0 < z < 14$  мм,  $v = 4.16$  мм с<sup>-1</sup>,  $\lambda = 220$  Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>,  $a = 0.82 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>,  $T_\infty = 300$  К)

Разобьем распределенный источник  $Q_3(y)$  на элементарные плоские  $Q_3(y) dy$ , Дж м<sup>-2</sup>. Приращение температуры в любой точке  $y$  от элементарного мгновенного источника, находящегося на расстоянии  $\eta$  от начала координат, согласно уравнению (2.16), равно

$$dT(y,t) = \frac{Q_3(\eta)d\eta}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4at} - bt\right),$$

а температура от рассматриваемого мгновенного распределенного источника равна

$$T(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_3(\eta)}{c\rho} \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4at} - bt\right) d\eta, \quad (2.57)$$

где  $b = (\alpha_1 + \alpha_2)/(c\rho h)$ .

Функцию  $Q_3(y)/(c\rho)$ , К, можно понимать как начальное распределение температуры, и она может быть любой. Например, если источник нормально круговой (1.17) и пересекает поперечное сечение пластины быстро, то его можно считать полностью сосредоточенным в направлении оси движения  $x$ , равномерно распределенным по толщине  $h$  и распределенным по оси  $y$  по закону

$$Q_3(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_2(r)}{vh} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cq}{\pi vh} \exp(-C(x^2 + y^2)) dx = \sqrt{\frac{C}{\pi}} \frac{q}{vh} \exp(-Cy^2). \quad (2.58)$$

Тогда, подставив (2.58) в (2.57), получим

$$T(y,t) = \frac{q/(vh)}{c\rho[4\pi a(t+t_0)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a(t+t_0)} - bt\right), \quad (2.59)$$

где  $t_0 = 1/(4aC)$ . Если  $C \rightarrow \infty$ , то  $t_0 \rightarrow 0$  и формула (2.59) переходит в (2.39). Таким образом, учет распределенности источника сводится к добавлению постоянной времени  $t_0$ .

Если погонная энергия  $q/v$  распределена равномерно по ширине на участке  $-l, l$  (рис. 2.21), то

$$Q_3(y) = \begin{cases} \frac{q/v}{2lh} & \text{при } |y| \leq l; \\ 0 & \text{при } |y| > l \end{cases}$$

и с учетом (2.57) получим

$$T(y, t) = \frac{q/v}{4c\rho lh} \exp(-bt) \left[ \Phi\left(\frac{y+l}{\sqrt{4at}}\right) - \Phi\left(\frac{y-l}{\sqrt{4at}}\right) \right],$$

где  $\Phi$  – интеграл вероятности (2.18). Из рис. 2.21, б видно, что в любой момент времени наибольшая температура материала при  $y = 0$ .

Рассмотрим теперь *быстродвижущийся объемный источник, распределенный произвольно по сечению плоского слоя*. Допустим, что тепловые потоки вдоль оси движения источника  $x$  и через поверхность отсутствуют, а плотность мгновенно вводимой энергии (Дж м<sup>-3</sup>) по поперечному сечению  $yOz$  (поперечному слою единичной толщины) представима в виде (см. рис. 2.19, б)

$$Q_3(y, z) = c\rho \sum_{m=1}^n f'_m(y) f''_m(z), \quad (2.60)$$

причем  $\int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} Q_3(y, z) dy dz = q/v$ , где  $n$  – количество подобластей, на которые разбивается область ввода теплоты  $q/v$  (Дж м<sup>-1</sup>). Любое непрерывное распределение плотности энергии в зоне ее ввода можно аппроксимировать, согласно теореме Вейерштрасса, с любой степенью точности конечной суммой ряда расщепляющихся членов (2.60).

Температурную задачу можно сформулировать в следующем виде.

1. Уравнение теплопроводности учитывает потоки в направлении осей  $y$  и  $z$

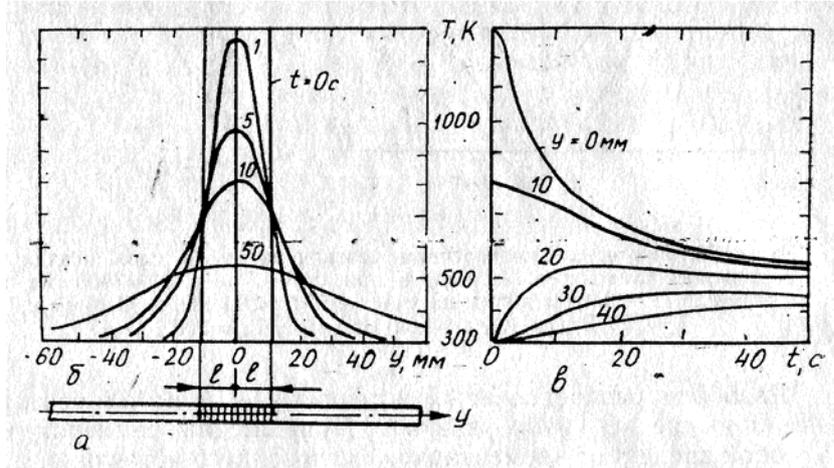
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.61)$$

2. Начальное условие ( $t = 0$ ) задается законом ввода энергии

$$T(y, z, 0) = \frac{Q_3(y, z)}{c\rho} = \sum_{m=1}^n f'_m(y) f''_m(z). \quad (2.62)$$

3. Граничные условия второго рода ( $t > 0$ ) отражают теплоизолированность границ тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} T(-\infty, z, t) = 0, & \quad \frac{\partial}{\partial y} T(\infty, z, t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} T(y, 0, t) = 0, & \quad \frac{\partial}{\partial z} T(y, h, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$



**Рис. 2.21.** Распространение теплоты быстродвижущегося равномерно распределенного по ширине  $2l = 20$  мм источника в бесконечной пластине ( $q/v/(2lhc\rho) = 1000$  К,  $b = 0$ ,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>,  $T_\infty = 300$  К)

Решение сформулированной задачи (2.61) – (2.63) представимо в виде

$$T(y, z, t) = \sum_{m=1}^n \theta'_m(y, t) \theta''_m(z, t), \quad (2.64)$$

так как выполняются условия расщепления линейного параболического уравнения (2.61) на ортогональные составляющие (потому что в законе ввода теплоты (2.60) разделены переменные  $y$  и  $z$ ).

Каждая  $m$ -я искомая пара функций  $\theta'_m(y, t)$  и  $\theta''_m(y, t)$  является решением следующей  $m$ -й пары ( $m = 1, \dots, n$ ) отдельных краевых задач.

Первая задача:

$$1. \quad \frac{\partial \theta'_m(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta'_m(y, t)}{\partial y^2}; \quad (2.65)$$

$$2. \quad t = 0: \theta'_m(y, 0) = f'_m(y); \quad (2.66)$$

$$3. \quad t > 0: \partial / \partial y \theta'_m(-\infty, t) = 0; \quad \partial / \partial y \theta'_m(\infty, t) = 0 \quad (2.67)$$

Вторая задача:

$$1. \frac{\partial \theta''_m(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta''_m(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.68)$$

$$2. t = 0: \theta''_m(z, 0) = f''_m(z); \quad (2.69)$$

$$3. t > 0: \partial / \partial z \theta''_m(0, t) = 0; \quad \partial / \partial z \theta''_m(h, t) = 0. \quad (2.70)$$

Непосредственно проверкой можно убедиться, что постановка задачи в виде (2.64) – (2.70) эквивалентна постановке в виде (2.61) – (2.63). Таким образом, исходная двумерная температурная задача сводится к  $2 \times n$  одномерным, что, естественно, облегчает поиск решения задачи.

Решение первой задачи можно найти, как это сделано для случая бесконечной пластины (формула (2.57)), методом источников по формуле Пуассона

$$\theta''_m(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{y'_m}^{y''_m} f''_m(\eta) \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\right) d\eta, \quad (2.71)$$

где  $y'_m, y''_m$  – отрезок, на котором задана функция  $f''_m(y)$  (см. рис. 2.19, б).

Решение второй задачи будем также искать методом источников. Предварительно с помощью метода отражения найдем решение для мгновенного плоского источника в стержне длиной  $h$ . В п. 2.11 будет подробно показано, что температурное поле в ограниченном стержне мгновенного плоского источника теплоты  $Q_2$  (Дж м<sup>-2</sup>), приложенного на расстоянии  $\zeta$  от торца, описывается формулой

$$T(z, t) = \frac{Q_2}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(z+\zeta-2ih)^2}{4at}\right) + \exp\left(-\frac{(z-\zeta-2ih)^2}{4at}\right) \right].$$

Используя формулы (2.9) и (2.10), получим

$$T(z, t) = \frac{Q_2 / (c\rho)}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi i\zeta}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right]. \quad (2.72)$$

Тогда для любого распределения  $f''_m(z) = Q_2(z)/(c\rho)$  решением второй задачи является

$$\theta''_m(z, t) = \frac{1}{h} \int_{z'_m}^{z''_m} f''_m(\zeta) d\zeta + \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \int_{z'_m}^{z''_m} f''_m(\zeta) \cos\left(\frac{\pi i\zeta}{h}\right) d\zeta \quad (2.73)$$

Видно, что граничные условия (2.70) удовлетворяются, так как

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) = -\frac{\pi i}{h} \sin\left(\frac{\pi iz}{h}\right) = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h.$$

Если бы задали на поверхности плоского слоя граничные условия III рода, то решение усложнилось бы и в (2.73) вместо  $\pi i$  стояли бы более сложные аргументы, зависящие от коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  [4].

Таким образом, решение второй задачи (2.68) – (2.70) свелось к определению интегралов в (2.73).

В качестве примера рассмотрим быстродвижущийся нормально круговой источник на поверхности плоского слоя (см. п. 1.5, рис. 1.5). Его можно считать полностью сосредоточенным по оси  $x$  и распределенным по оси  $y$ :

$$q_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} q_2(r) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\pi} q \exp(-C(x^2 + y^2)) dx = \sqrt{\frac{C}{\pi}} q \exp(-Cy^2).$$

По оси  $z$  поверхностный источник считается сосредоточенным при  $z = 0$ . Тогда распределение энергии по сечению (2.60) представимо в виде

$$q_3(y, z) = \frac{q}{v} \sqrt{\frac{C}{\pi}} \exp(-Cy^2) \delta(z)$$

и

$$f'_1(y) = \frac{q/v}{c\rho} \sqrt{\frac{C}{\pi}} \exp(-Cy^2); \quad f''_1(z) = \delta(z),$$

где  $\delta$  – дельта-функция (1.20). Определив (2.71) и (2.73) и подставив их в (2.64), получим

$$T(y, z, t) = \theta'_1(y, t) \theta''_1(z, t),$$

где

$$\theta'_1(y, t) = \frac{q/v}{c\rho [4\pi a(t+t_0)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a(t+t_0)}\right);$$

$$\theta''_1(z, t) = \frac{1}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right]; \quad t_0 = 1/(4aC).$$

Если поверхностный источник сосредоточен по оси  $y$  ( $C = \infty$ ,  $t_0 = 0$ ), то получим решение для быстродвижущегося точечного источника на поверхности плоского слоя

$$T(y, z, t) = \frac{q/(vh)}{c\rho (4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4at}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi iz}{h}\right) \exp\left(-\pi^2 i^2 \frac{at}{h^2}\right) \right].$$

В предельном случае, когда толщина  $h$  неограниченно возрастает, плоский слой переходит в полубесконечное тело. Метод решения задачи для плоского слоя распространим на случай *быстродвижущегося объемного источника, распределенного произвольно по сечению полубесконечного тела*, при тех же допущениях.

Используем метод отражения, расширив полубесконечное тело до бесконечного и отразив функцию ввода энергии  $f''_m(z)$  на верхнюю полуплоскость ( $z < 0$ ) как четную (для удовлетворения адиабатического условия на поверхности полубесконечного тела). Тогда решением задачи для полубесконечного тела будет

$$T(y, z, t) = \sum_{m=1}^n \theta'_m(y, t) \theta'_m(z, t), \quad (2.74)$$

где  $\theta'_m(y, t)$  определяются по (2.71), а

$$\theta''_m(z, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{1/2}} \sum_{j=-1,1} \int_{z'_m}^{z''_m} f''_m(\zeta) \exp\left(-\frac{(z-j\zeta)^2}{4at}\right) d\zeta. \quad (2.75)$$

В качестве примера рассмотрим случай быстродвижущегося объемного источника погонной энергии  $q/v$ , распределенной по ширине и глубине полубесконечного тела по закону

$$q_3(y, z) = \frac{q}{v} \frac{2}{\pi} (C_y C_z)^{1/2} \exp(-C_y y^2 - C_z z^2),$$

где  $C_y$  и  $C_z$  – коэффициенты сосредоточенности нормально эллиптического источника по осям  $y$  и  $z$  соответственно. С учетом (2.60), (2.71), (2.74) и (2.75) получим решение задачи

$$T(y, z, t) = \frac{q/v}{2\pi\lambda[(t+t_y)(t+t_z)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a(t+t_y)} - \frac{z^2}{4a(t+t_z)}\right),$$

где  $t_y = 1/(4aC_y)$ ,  $t_z = 1/(4aC_z)$ .

Рассмотрим еще пример – наплавка ленточным электродом на массивное тело, что соответствует схеме линейного источника конечной ширины  $2l$  на поверхности полубесконечного тела (рис. 2.22). В практических расчетах можно предположить, что источник теплоты ( $\text{Вт м}^{-3}$ ) равномерно распределен по ширине электрода  $2l$  и предельно сконцентрирован по толщине:

$$q_3(y, z) = c\rho f'_1(y) f''_1(z),$$

где

$$f'_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{c\rho} \frac{q/v}{2l} & \text{при } |y| \leq l; \\ 0 & \text{при } |y| > l; \end{cases}$$

$$f''_1(z) = \delta(z),$$

причем

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty q_3(y, z) dy dz = \int_0^\infty \int_{-l}^l \frac{q/v}{2l} \delta(z) dy dz = \frac{q}{v}.$$

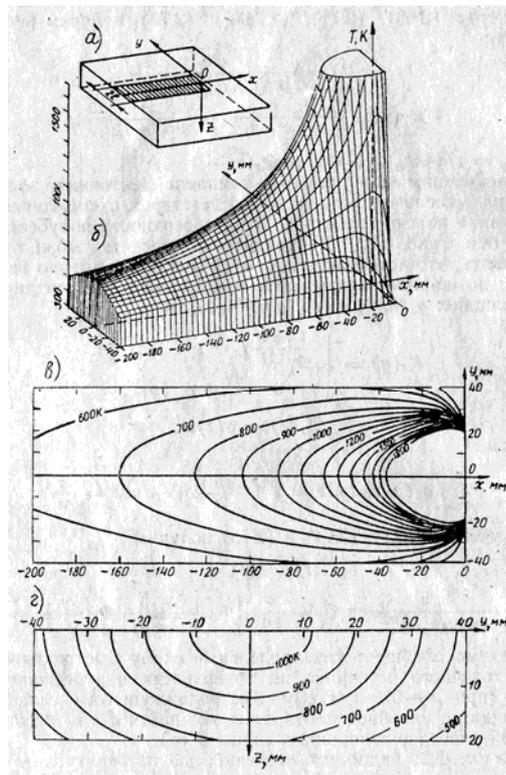
С учетом (2.71), (2.74) и (2.75) получим

$$T(y, z, t) = \frac{q/v}{c\rho 2l(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right) \left[ \Phi\left(\frac{y+l}{\sqrt{4at}}\right) - \Phi\left(\frac{y-l}{\sqrt{4at}}\right) \right].$$

Эта схема обобщает как предельные схему быстродвижущегося точечного источника на поверхности полубесконечного тела (при  $l \rightarrow 0$ ) и схему быстродвижущегося линейного источника с линейной плотностью мощности  $q/h$  в полубесконечной пластине толщиной  $h$  (при  $l \rightarrow \infty$ ).

Из рис. 2.22 видно, что особенностью температурного поля при наплавке является большее отношение ширины нагретой зоны к ее длине по сравнению с точечным источником (см. рис. 2.13, *a*).

Изложенные в этом параграфе приемы, базирующиеся на методе источников, позволяют получать решение температурной задачи для других случаев сварки и родственных процессов, например, сварочного нагрева распределенным источником, совершающим поперечные колебания, электрошлаковой сварки, подогрева свариваемого металла газовым пламенем, для различных способов сварки давлением, плазменного напыления на поверхность тела, газовой и плазменной резки и т. д.



**Рис. 2.22.** Температурное поле быстродвижущегося линейного источника на поверхности полубесконечного тела ( $q = 30$  кВт,  $v = 5$  мм  $c^{-1}$ ,  $2l = 40$  мм,  $a = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>,  $c\rho = 5$  МДж м<sup>-3</sup> К<sup>-1</sup>,  $T_{\infty} = 300$  К): *a* – схема координатных осей; *б* – распределение температуры на поверхности  $z = 0$ ; *в* – изотермы на поверхности  $z = 0$ ; *г* – изотермы в поперечном сечении  $x = -80$  мм

## 2.11. Влияние ограниченности размеров тела на тепловые процессы

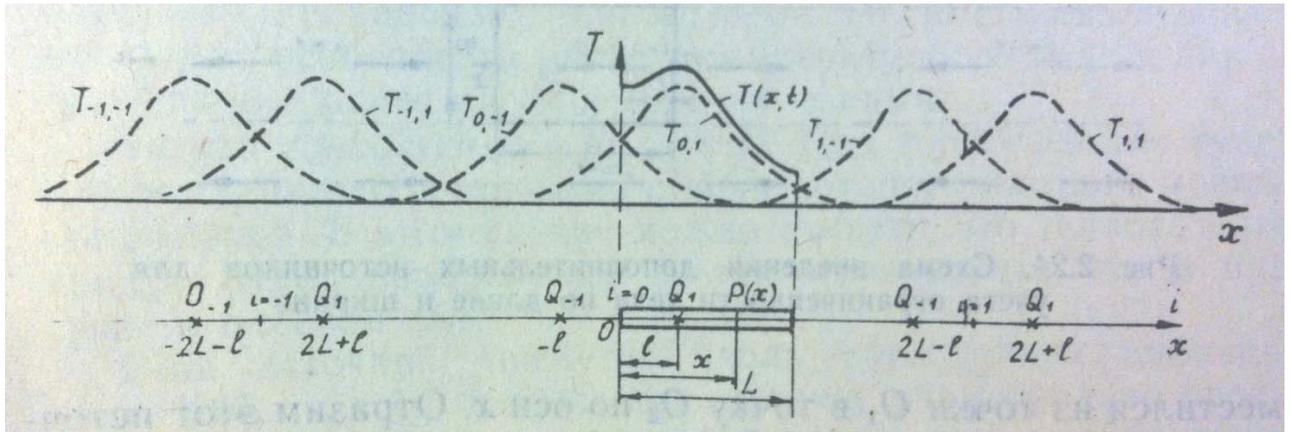
До сих пор мы считали, что полубесконечное тело, плоский слой, пластина и стержень неограниченны по длине и ширине. Рассмотрим теперь влияние ограниченности размеров тел при допущении, что границы адиабатические. Это допущение позволяет использовать метод отражения (п. 2.2), который применим для тел, ограниченных взаимно перпендикулярными плоскостями (параллелепипед, прямоугольная пластина), для стержня конечной длины, для бесконечного клина с углом раствора  $\pi/n$ , где  $n$  – целое число, и т. п.

Рассмотрим температурное поле в стержне длиной  $L$  и сечением  $A$  с мгновенным плоским источником теплоты  $Q$ , приложенным на расстоянии  $l$  от торца (рис. 2.23). Удлиним стержень до бесконечности ( $-\infty < x < \infty$ ) и введем в него дополнительные источники так, чтобы плоскости  $x = 0$  и  $x = L$  были плоскостями симметрии (зеркально отразим от плоскостей  $x = 0$  и  $x = L$  действительный источник). В результате получим бесконечный ряд пар источников  $Q_1$  и  $Q_{-1}$  ( $Q_1 = Q_{-1} = Q$ ) на оси  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ). На плоскостях симметрии  $x = 0$  и  $x = L$  все потоки слева и справа одинаковы (алгебраическая сумма потоков  $q_{2x}$  равна нулю), поэтому граничные условия  $\partial T / \partial x(0, t) = 0$  и  $\partial T / \partial x(L, t) = 0$  выполняются. Тогда температура в любой момент в любой точке  $P(x)$  в ограниченном

стержне  $T(x, t)$  будет представлять собой сумму величин температуры (2.16) от всех пар источников в неограниченном стержне  $T_{i,j}$  (см. рис. 2.23):

$$T(x, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1} \frac{Q/A}{c\rho(4\pi at)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-jl-2iL)^2}{4at} - bt\right). \quad (2.76)$$

Это решение можно выразить также в виде тригонометрического ряда типа (2.72).



**Рис. 2.23.** Распределение температуры в ограниченном стержне

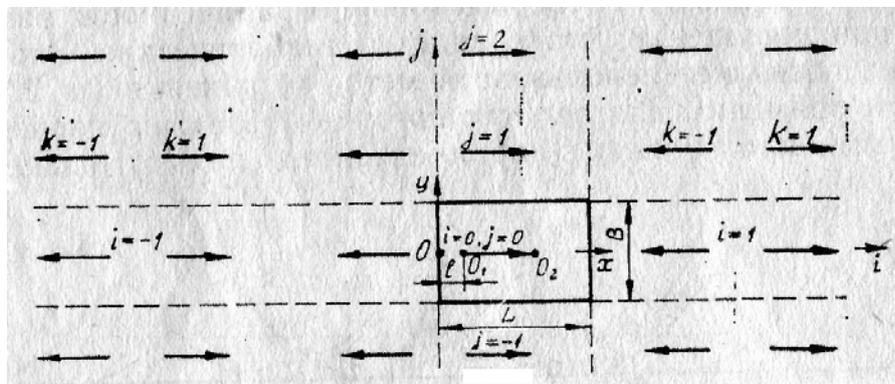
Рассмотрим теперь более сложную схему: подвижный источник в пластине или плоском слое прямоугольной формы в плоскости  $xOy$  (рис. 2.24). Пусть за время  $t$  источник переместился из точки  $O_1$  в точку  $O_2$  по оси  $x$ . Отразим этот источник от плоскостей  $x = 0$ ,  $x = L$  и  $y = B/2$  и  $y = -B/2$ , в результате чего получим систему источников, каждый из которых характеризуется номером  $i, j, k$  ( $-\infty < i < \infty$ ,  $-\infty < j < \infty$ ,  $k = -1, 1$ ), а действительный источник имеет номер  $0, 0, 1$ . Температура в ограниченном теле определяется тройной суммой соответствующих решений для неограниченного тела. Например, в неподвижной системе координат температурное поле подвижного нормально кругового источника с равномерным распределением мощности по толщине ограниченной пластины описывается с помощью (2.50):

$$T(x, y, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-1,1} \int_0^t \frac{q/h}{4\pi\lambda(t+t_0-\tau)} \times \exp\left(-\frac{[x-2iL-k(l+v\tau)]^2 + (y-jB)^2}{4a(t+t_0-\tau)} - b(t-\tau)\right) d\tau, \quad (2.77)$$

где  $l = OO_1$  (см. рис. 2.24). Если источник сдвинут от оси пластины, то выражение (2.77) несколько усложнится, но структура формулы сохраняется. Если пластина неограниченна по длине ( $L = \infty$ ) или ширине ( $B = \infty$ ), то из соответствующей суммы ненулевым остается только член при  $i = 0$  или  $j = 0$ . В случае

неравномерного распределения мощности источника по толщине плоского слоя появится еще одна сумма, учитывающая ограниченность по оси  $z$ .

Функциональные ряды типа (2.76) и (2.77) являются, как правило, быстроходящимися и для реальных тел учитываются всего несколько членов. По мере выравнивания температуры количество удерживаемых членов ряда увеличивается.



**Рис. 2.24.** Схема введения дополнительных источников для учета ограниченности тела по длине и ширине

Таким образом, имея решение температурной задачи для соответствующего неограниченного тела, несложно построить с помощью метода отражения решение для тела ограниченных размеров.

## 2.12. Нагрев цилиндрических тел

Цилиндрическими телами являются сварные трубы, наплавленные валы и т. д. Сварные швы в них могут быть продольными, кольцевыми, спиральными и т. п. Проанализируем некоторые особенности расчета температурного поля в них по сравнению с ранее рассмотренными телами.

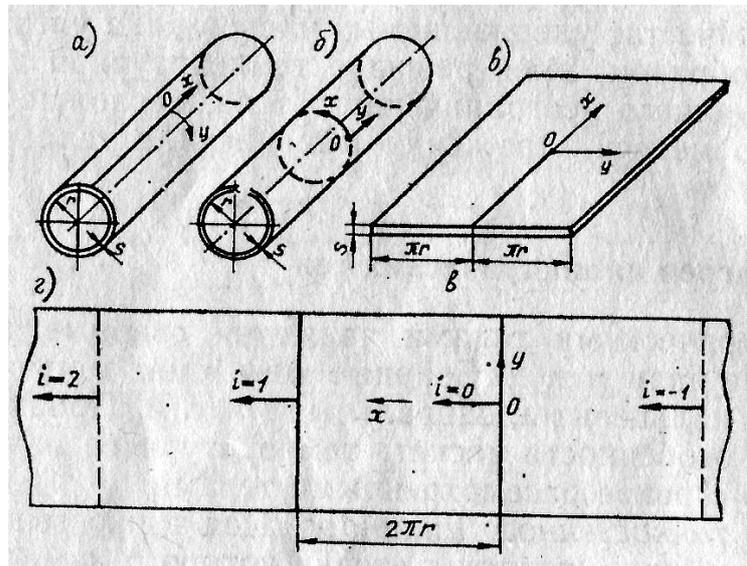
*Нагрев тонкостенного цилиндра.* Под тонкостенным будем понимать цилиндр, толщина стенки которого намного меньше его радиуса. В этом случае можно считать, что теплота в цилиндре будет передаваться по тем же законам, что в пластине и плоском слое.

Если источник движется вдоль образующей цилиндра (рис. 2.25, а), то в продольном сечении, диаметрально противоположном источнику, алгебраическая сумма поперечных тепловых потоков  $q_{2y}$  равна нулю в силу симметрии, то есть это сечение является адиабатическим, и по нему можно рассечь и развернуть цилиндр в пластину или плоский слой с адиабатическими боковыми поверхностями ( $\partial T/\partial y = 0$  при  $y = -\pi r$  и  $y = \pi r$ , рис. 2.25, в). Эта расчетная схема рассмотрена в п. 2.11 (см. рис. 2.24).

Если источник кольцевой (рис. 2.25, б), то эквивалентная схема будет иной (рис. 2.25, г). Например, если принять источник линейным равномерно распределенным по толщине, то температурное поле в бесконечно длинном цилиндре в неподвижной системе координат можно найти с помощью (2.14):

$$T(x, y, t) = \sum_{i=-\infty}^i \int_0^t \frac{q/h}{c\rho[4\pi a(t-\tau)]} \exp\left(-\frac{(x-v\tau-i2\pi r)^2 + y^2}{4a(t-\tau)} - b(t-\tau)\right) d\tau.$$

Этим выражением можно пользоваться, если мощность  $q$  переменна по длине шва, и с его помощью решить оптимизационную задачу: найти такую функцию  $q(t)$ , чтобы выполнялись заданные условия, например, постоянство ширины шва по всей его длине, включая начало-конец шва.



**Рис. 2.25.** Схемы к расчету температурных полей в тонкостенных цилиндрах: *a* – продольный источник; *б* – кольцевой источник; *в* – эквивалентная схема (развертка цилиндра) для продольного источника; *г* – эквивалентная схема для кольцевого источника

Аналогично можно подобрать схему, если источник движется по винтовой траектории, и другие расчетные схемы.

*Нагрев сплошного и толстостенного круглого цилиндра.* В сплошном и толстостенном круглом цилиндре можно построить систему источников, аналогичных точечным, линейным и плоским источникам в полубесконечном теле, плоском слое, пластине и стержне. Отличие заключается в том, что будем рассматривать только поверхностные источники в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  (см. рис. 1.6, *e*).

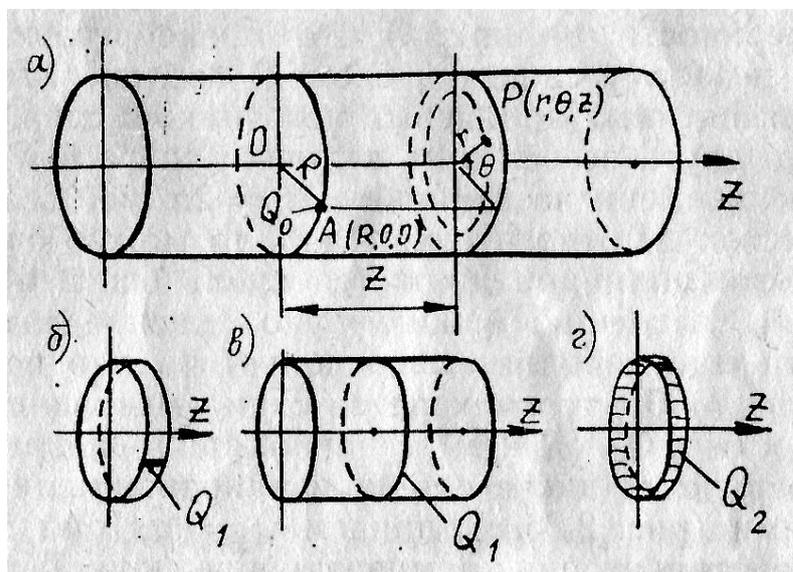
Решение температурной задачи для любых источников на поверхности сплошного цилиндра можно получить с помощью метода источников, взяв за основу решение для мгновенного точечного источника на поверхности бесконечно длинного сплошного круглого цилиндра [4]:

$$T(r, \theta, z, t) = \frac{Q_0/(\pi R^2)}{c\rho\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,m}^2 J_n\left(\mu_{n,m} \frac{r}{R}\right)}{\left[(\alpha R/\lambda)^2 + \mu_{n,m}^2 - n^2\right] J_n(\mu_{n,m})} \exp\left(-\mu_{n,m}^2 \frac{at}{R^2}\right) \quad (2.78)$$

где  $Q_0$  – количество теплоты, выделившейся в момент  $t = 0$  в точке  $A (R, 0, 0)$  (рис. 2.26, *a*);  $R$  – радиус цилиндра;  $J_n$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка (представима в виде ряда [2]),  $\mu_{n,m}$  – положительные корни уравнения

$$\mu \frac{\partial J_n(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\alpha R}{\lambda} J_n(\mu) = 0;$$

$\alpha$  – коэффициент поверхностной теплоотдачи. Штрих у знака суммирования означает, что все члены ряда при  $n \geq 1$  умножены на 2. Функция (2.78) удовлетворяет уравнению теплопроводности в цилиндрических координатах (1.10). При равных условиях температура в сплошном цилиндре выше, чем в полубесконечном теле, и разность тем больше, чем меньше радиус цилиндра  $R$  и больше время  $t$ .



**Рис. 2.26.** Схемы источников на поверхности цилиндра: *a* – мгновенный точечный источник; *b* – мгновенный линейный источник на диске; *в* – мгновенный кольцевой источник на цилиндре; *г* – мгновенный плоский источник на диске

С помощью уравнения (2.78) методом источников можно получить схемы неподвижного непрерывно действующего источника, подвижного произвольно распределенного по цилиндрической поверхности источника с произвольной траекторией, как и в случае источников на поверхности полубесконечного тела. Однако температурные поля в сплошном цилиндре описываются более сложными зависимостями, о чем можно судить уже по виду формулы (2.78). Еще более громоздкими решения получают для толстостенных полых цилиндров, хотя расчет температурного поля с помощью современных компьютеров не представляет принципиальных трудностей.

Если источник с относительно большой скоростью движется вдоль образующей цилиндра, то можно пренебречь потоком вдоль оси  $z$  ( $q_{2z} = 0$ ) и задачу свести к схеме мгновенного линейного источника с погонной энергией  $Q_1 = q/v$  (Дж м<sup>-1</sup>) на поверхности диска с теплоизолированными плоскими поверхностями,  $q_{2z} = 0$  (рис. 2.26, б). Температурное поле в таком диске  $T(r, \theta, t)$  двумерное.

Если источник с относительно большой скоростью движется в одном поперечном сечении (источник кольцевой), то можно пренебречь потоком вдоль  $\theta$  ( $q_{2\theta} = 0$ ) и задачу свести к схеме мгновенного линейного источника, равномерно распределенного по кольцу с погонной энергией  $Q_1 = q/v$  (Дж м<sup>-1</sup>) (рис. 2.26, в). Температурное поле в цилиндре  $T(r, z, t)$  двумерное.

Если источник движется с относительно большой скоростью по винтовой траектории малого шага (как при наплавке поверхности цилиндра), то пренебрегают потоком  $q_{2\theta}$  ( $q_{2\theta} = 0$ ) и задачу сводят к схеме последовательно действующих мгновенных кольцевых источников, сдвинутых друг относительно друга по оси  $z$  на величину шага винтовой траектории и по времени на величину  $\Delta t = 2\pi R/v$ . Если временной промежуток  $\Delta t$  относительно мал, то можно считать, что по поверхности цилиндра движется вдоль оси  $z$  непрерывно действующий источник, равномерно распределенный по кольцу. Если еще дополнительно допустить, что поток вдоль оси  $z$  мал ( $q_{2z} = 0$ ), то получается схема мгновенного источника плотностью  $Q_2$  (Дж м<sup>-2</sup>), равномерно распределенного по всей поверхности диска с теплоизолированными плоскими поверхностями (рис. 2.26, г), причем  $Q_2 = q/(v\Delta z)$ , где  $\Delta z$  – шаг винтовой траектории. Температурное поле  $T(r, t)$  в этом случае одномерное.

Приведенные схемы рассмотрены в [8]. Ограниченность цилиндров по длине учитывается с помощью метода отражения, полагая, что между торцами цилиндра и окружающей средой нет теплообмена.

По мере увеличения радиуса  $R$  сплошной цилиндр приближается к полубесконечному телу, а толстостенный цилиндр – к плоскому слою. Тогда в предельном случае ( $R \rightarrow \infty$ ) соответствующие решения значительно упрощаются. Например, при отсутствии теплоотдачи ( $\alpha = 0$ ) решение (2.78) переходит в (2.5). Для практических случаев наплавки по образующей при  $vR/(2a) > 10$  вполне оправданным является применение для расчета температурного поля схемы точечного источника на поверхности полубесконечного тела [8].

### 3. Численные методы расчета тепловых процессов при сварке

Основным недостатком рассмотренного в разделе 2 аналитического метода источников является требование постоянства теплофизических характеристик ( $a$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$  и  $\alpha$ ), а также вынужденное упрощение геометрической формы сварного тела. Основное достоинство метода — относительная простота решения задачи при любом источнике, распределенном в пространстве и во времени. Структура аналитических решений указывает на безразмерные критерии (типа критериев Фурье, Пекле, Био т. п.), что позволяет представить результаты в удобном обобщенном виде. Если не удастся получить решение в замкнутой форме (ин-

тегралы не выражаются через известные функции), то интегралы типа (2.2) можно определить численно по известным квадратурным формулам Симпсона, Гаусса, Чебышева и др. (соответствующие подпрограммы входят в математическое обеспечение всех современных компьютеров). Вычисление сходящихся рядов, которые получаются при использовании метода отражения для учета ограниченности тел, также не представляет принципиальной трудности. Как правило, алгоритмы и вычислительные программы при применении аналитических методов намного проще, чем при применении численных методов.

С учетом неоднородности и сложной геометрической формы сварного изделия, температурной зависимости свойств материала, сложных нелинейных граничных условий, распределенности сварочных источников в пространстве и во времени и других факторов температурная задача может быть решена только численными методами. Это основное преимущество численных методов и обусловило интенсивное внедрение их в сварочную практику за последние десятилетия. Можно утверждать, что в настоящее время точность результатов расчета тепловых процессов при сварке ограничена не погрешностью численных методов, а неполнотой исходной физической модели (недостатком знания законов ввода теплоты и теплообмена с окружающей средой, погрешностью свойств материалов и т. п.)

Из всех численных методов в сварочной практике получили распространение метод конечных разностей и метод конечных элементов. Физический подход к решению нестационарной температурной задачи этими методами общий: весь период нагрева и охлаждения разбивается на отдельные этапы и последовательно прослеживается температура в отдельных дискретных зонах изделия. Рассмотрим эти численные методы.

### 3.1. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей (МКР) или, как его еще называют, метод сеток состоит в замене искомой непрерывной функции  $T$  совокупностью ее значений, определенных на дискретном множестве точек заданной области. Эти точки называются узлами, а множество узлов, соединенных между собой, — сеткой.

МКР рассмотрим сначала на примере линейного распределения теплоты в стержне, один конец которого поддерживается при температуре окружающей среды (которую примем за начало отсчета,  $T_{\infty} = 0$ ), а остальная поверхность теплоизолирована (рис. 3.1). Этот случай имеет место, например, при контактной сварке двух одинаковых стержней, концы которых жестко закреплены в охлаждаемых медных зажимах. Постановка одномерной краевой задачи имеет следующий вид.

1. Уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3.1)$$

или при  $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

2. Начальное условие ( $t = 0$ ):

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (3.3)$$

3. Граничные условия:

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad T(L, t) = 0. \quad (3.4)$$

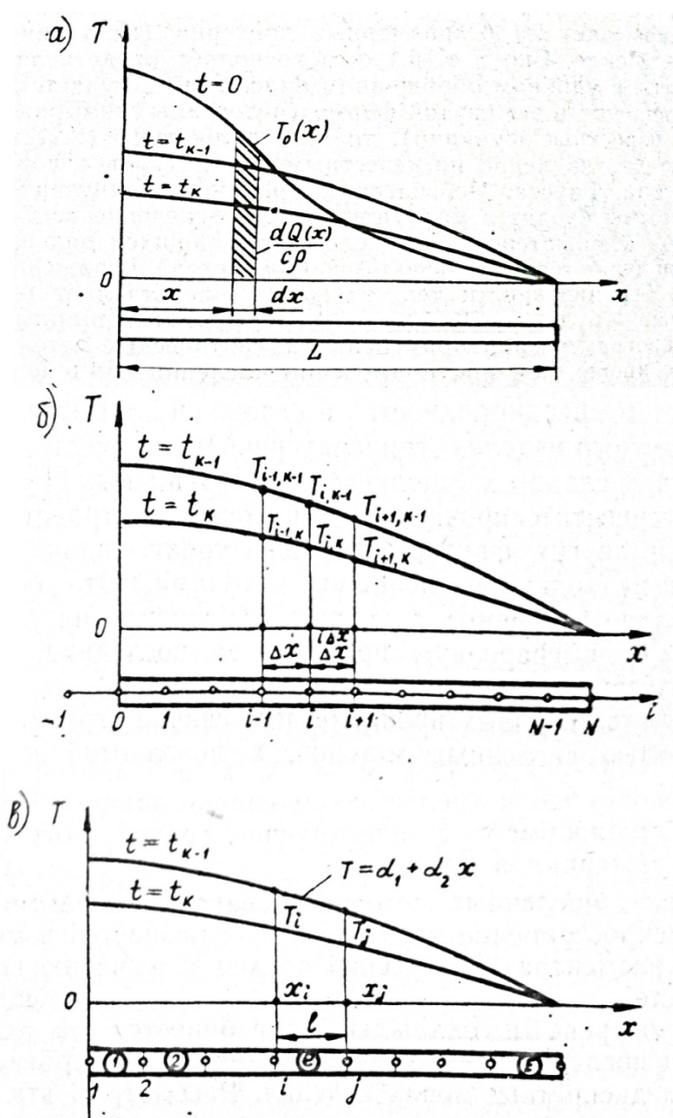


Рис. 3.1. Распределение температуры в стержне в моменты  $t_{k-1}$  и  $t_k$

Можно отметить, что сформулированная линейная задача (3.2) – (3.4) решается аналитическим методом источников. Для этого начальное распределение температуры  $T_0(x)$  следует представить в виде элементарных плоских мгновенных источников теплоты  $dQ_2(x) = c\rho T_0(x)dx$  (Дж м<sup>-2</sup>) и просуммировать приращения температуры от них, пользуясь формулой (2.15), с учетом краевых условий (3.4), пользуясь методом отражения

$$T(x,t) = \int_0^L \frac{T_0(\xi)}{(4\pi at)^{1/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1,1} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-j\xi+4iL)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\frac{[x-j\xi+(4i+2)L]^2}{4at}\right) \right\} d\xi.$$

На рис. 3.1, *a* приведены гладкие кривые, описывающие распределение температуры в стержне в последовательные моменты времени  $t_{k-1}$  и  $t_k$ .

Решим теперь эту же задачу МКР. Метод основан на замене производных их приближенными значениями, выраженными через разности значений в отдельных точках — узлах сетки в отдельные моменты времени (рис. 3.1, *б*). Дифференциальное уравнение (3.2) в результате таких преобразований заменяется эквивалентными соотношениями в конечных разностях.

Разобьем весь период нагрева и охлаждения на отдельные этапы. Пусть для простоты сетка равномерная (шаг сетки  $\Delta x$  постоянен), а временной промежуток между этапами  $k-1$  и  $k$  равен  $\Delta t$ , то есть  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ . Тогда для узла  $i$  с координатой  $x = i\Delta x$  в момент  $\Delta t = t_{k-1}$  получим разностные отношения

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,k} - T_{i,k-1}}{\Delta t}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{\Delta x}, \quad (3.5)$$

та же производная слева от узла

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{\Delta x} - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\Delta x} \right) = \frac{T_{i-1,k-1} - 2T_{i,k-1} + T_{i+1,k-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.6)$$

Здесь индексы указывают номера узлов сетки и моменты времени. Производные по  $x$  отнесены к предыдущему этапу, то есть к моменту  $t_{k-1}$ . Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.2) и решая относительно  $T_{i,k}$ , получим

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1,k-1} - 2T_{i,k-1} + T_{i+1,k-1}). \quad (3.7)$$

Если сетка неравномерная (шаг  $\Delta x$  непостоянен), то формула (3.7) усложняется, а точность аппроксимации исходного уравнения уменьшается.

Аналогично могут быть получены формулы и в случае нелинейного уравнения (3.1), когда свойства сварного соединения  $c\rho$  и  $\lambda$  непостоянны. Тогда вторая производная аппроксимируется выражением

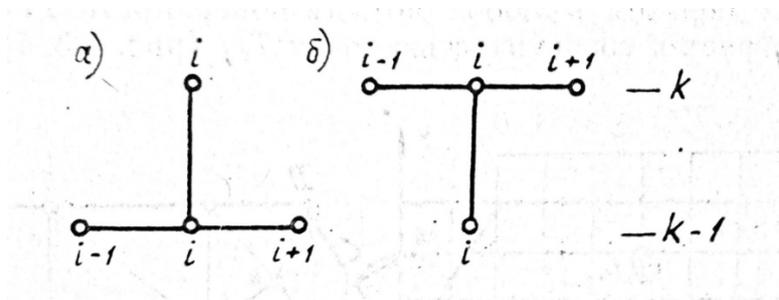
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \lambda_{i+1/2} (T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}) - \lambda_{i-1/2} (T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}) \right],$$

где  $\lambda_{i+1/2}$ ,  $\lambda_{i-1/2}$  — средние текущие значения теплопроводности между узлами  $i$  и  $i+1$ ,  $i$  и  $i-1$  соответственно. Значения  $c\rho$  принимаются в зависимости от текущей температуры узла. Теплоту фазового превращения при плавлении и кристаллизации сплава можно учесть, принимая в температурном интервале солидус-ликвидус повышенное значение удельной теплоемкости  $c$ , то есть считая, что при любой температуре  $c = dH / dT$ , где  $H$  — энтальпия (Дж кг<sup>-1</sup>), включая теплоту фазовых и аллотропических превращений.

Граничные условия (3.4) в конечных разностях выражаются просто. Температура на правом торце на всех этапа принимается равной нулю:  $T_{N,k-1} = T(L,t) = 0$ . На левом конце сетки вводится дополнительный узел (узел  $i = -1$  на рис. 3.1, б), который позволяет задавать нулевое значение производной для всех  $k$  путем выполнения условия  $T_{-1,k-1} = T_{0,k-1}$  (точнее по условию симметрии на адиабатической границе  $T_{-1,k-1} = T_{1,k-1}$ ).

Таким образом, температуру  $T_{i,k}$  в любом узле  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) в текущий момент  $t_k$  можно найти по формуле (3.7), зная температуру только в этом и в двух соседних узлах в предыдущий момент  $t_{k-1}$  (рис. 3.2, а). Начиная с момента  $t = \Delta t$ , когда  $k = 1$  и  $T_{i,k-1} = T_0(i\Delta x)$  согласно (3.3), процесс построения решения можно продолжить как угодно далеко, если интервал времени удовлетворяет условию устойчивости решения [3]

$$\Delta t \leq \Delta x^2 / (2a). \tag{3.8}$$



**Рис. 3.2.** Шаблоны для нестационарного уравнения теплопроводности: *а* — явная схема; *б* — неявная схема

Если шаг  $\Delta x$  и коэффициент  $a$  переменны, то следует принимать минимум  $\Delta x^2 / a$ . Физический смысл условия (3.8) заключается в том, что при малом ин-

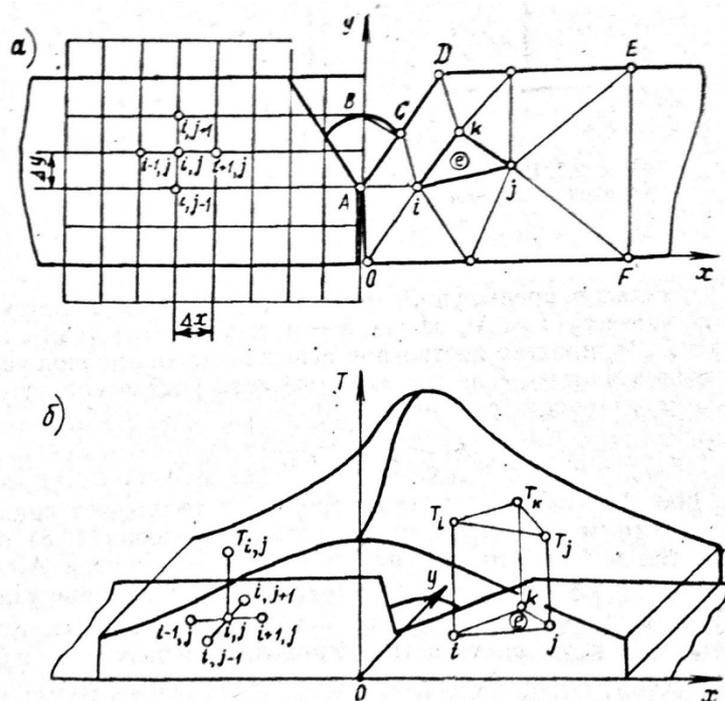
тервале времени  $\Delta t$  на температуру в узле оказывают влияние только соседние узлы.

Принципиально так же могут быть получены формулы для расчета двумерного и трехмерного температурного поля в сварном соединении любой формы с учетом температурной зависимости теплофизических свойств металла неоднородного сварного соединения, граничных условий другого рода, дополнительных источников и стоков теплоты и других факторов. Например, на рис. 3.3, а на левой половине сечения симметричного стыкового соединения показана двумерная прямоугольная сетка с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Формулу для расчета температуры в узле  $i, j$  в текущий момент  $k$  можно получить аналогично формуле (3.7), введя дополнительную производную по  $y$ :

$$T_{i,j,k} = T_{i,j,k-1} + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1,j,k-1} - 2T_{i,j,k-1} + T_{i+1,j,k-1}) + \frac{a\Delta t}{\Delta y^2} (T_{i,j-1,k-1} - 2T_{i,j,k-1} + T_{i,j+1,k-1}).$$

Условие устойчивости решения двумерной задачи имеет вид

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})}. \quad (3.9)$$



**Рис.3.3.** Пример построения сетки и разбивки на конечные элементы поперечного сечения стыкового соединения (а) и моделирование температурного поля (б)



$$\{T\}_k = \begin{Bmatrix} T_{0,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{i-1,k} \\ T_{i,k} \\ T_{i+1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{N-1,k} \end{Bmatrix} \dots i\text{-я строка}; \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\Delta x^2}{a\Delta t} T_{i,k-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \dots i\text{-я строка}.$$

Легко убедиться, что непосредственным умножением  $i$ -й строки матрицы  $[A]$  на столбец  $\{T\}_k$  получаем одно уравнение (3.10). Видно, что матрица  $[A]$  симметричная, ленточная, только на трех диагоналях элементы матрицы отличны от нуля. Поэтому решение системы с помощью компьютеров, например методом Гаусса, не представляет принципиальной сложности, даже если сетка имеет тысячи узлов.

Для двумерного (или трехмерного) температурного поля уравнения имеют структуру, аналогичную (3.10), только в левой части уравнений пять (или семь) ненулевых коэффициентов при  $T_{i,j,k}$ ,  $T_{i-1,j,k}$ ,  $T_{i+1,j,k}$ ,  $T_{i,j-1,k}$ ,  $T_{i,j+1,k}$  (см. шаблон сетки на рис. 3.3,  $a$  слева). Ширина ленты матрицы  $[A]$  более пяти (или семи) и определяется размером сетки и системой нумерации узлов.

Аналогично может быть построена система разностных уравнений для краевой задачи в цилиндрических координатах (1.10).

Достоинством явной схемы является простота алгоритма, так как используется простой цикл по узлам сетки с малым числом арифметических операций на каждом шаге. Недостатком является условие устойчивости (3.8) или (3.9), что требует малого временного шага  $\Delta t$ , даже если скорость изменения температуры  $\partial T/\partial t$  мала. Достоинством неявной схемы является безусловная устойчивость, недостатком – относительно сложный алгоритм с необходимостью решения системы уравнений высокого порядка, что требует применения компьютеров с большой памятью. Комбинирование преимуществ явной (объем вычислений пропорционален числу узлов сетки) и неявной (безусловная устойчивость) схем привело к разработке экономичных расчетных схем, среди которых наилучшим для решения двумерных нестационарных задач является метод переменных направлений (продольно-поперечная схема), а для трехмерных – методы расщепления (локально-одномерная схема) [3].

Точность численного решения тем выше, чем меньше интервалы  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , то есть чем точнее аппроксимируется уравнение теплопроводности. Рекомендуется принимать минимальные значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в областях высоких гра-

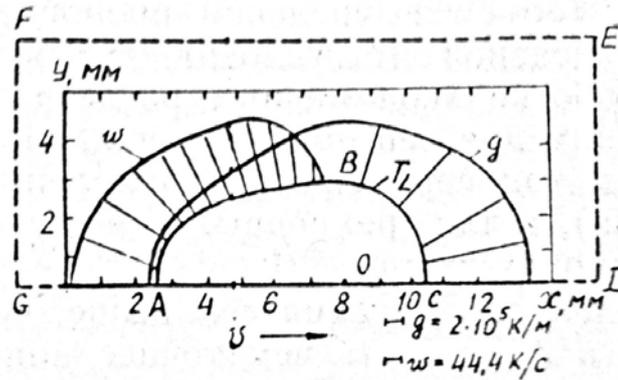
диентов температурного поля (вблизи шва), а  $\Delta t$  – в период высокой скорости изменения температуры. Например, в случае лучевых способов сварки рекомендуется сетка шагом до 1 мм вблизи источника нагрева с временным шагом не более 0.01 с.

Методом конечных разностей можно решать задачи в подвижной системе координат при квазистационарном тепловом состоянии (1.13). Разностная схема, аппроксимирующая (1.13), для случая пластины имеет вид

$$\left(-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{v}{a\Delta x} - \frac{b}{a}\right)T_{i,j} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{v}{a\Delta x}\right)T_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta x^2}T_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2}T_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta y^2}T_{i,j+1} = 0. \quad (3.11)$$

В качестве примера рассмотрим тепловые процессы в бесконечной пластине вблизи движущейся сварочной ванны. Описание теплопереноса законом Фурье на достаточном удалении от сварочной ванны не вносит заметных погрешностей, но приводит к большим расхождениям с опытными данными вблизи границы твердый — жидкий металл, так как не учитываются конвективные потоки жидкого металла и другие факторы. Удобным является расчетно-экспериментальный метод, когда в качестве исходных данных задаются экспериментальные размеры и форма сварочной ванны, поверхность которой считается изотермической  $T = T_L$ . Тогда задачу можно сформулировать так: найти решение уравнения (1.13) в конечной прямоугольной области  $ABCDEFGA$  (рис. 3.4) с граничными условиями I и II родов, причем на границе  $ABC$  температура  $T = T_L$ , на  $GA$  и  $CD$   $\partial T / \partial y = 0$  (так как ось  $x$  является осью симметрии температурного поля), а на  $DEFG$  температура вычисляется по формуле (2.31), считая, что источник находится в точке  $O$ . Аппроксимируя область  $ABCDEFGA$  разностной сеткой и составляя уравнения типа (3.11) для всех неизвестных значений температуры в узлах сетки с учетом граничных условий, получим систему алгебраических уравнений, решив которую найдем температуру в каждом узле и, следовательно, скорость охлаждения, градиенты температуры и другие характеристики температурного поля. На рис. 3.4 приведены размеры и форма контура сварочной ванны на пластине из титанового сплава толщиной 4.5 мм, а также расчетные кривые распределения градиента температуры и скорости охлаждения вдоль контура ванны.

Как следует из изложенного, основное достоинство МКР — простота. Основными недостатками метода являются плохая аппроксимация криволинейной области прямоугольной сеткой и необходимость равномерного шага сетки, в противном случае усложняется расчетная схема и повышается погрешность решения.



**Рис. 3.4.** Распределение градиента температуры  $g$  и скорости охлаждения  $w$  вдоль контура сварочной ванны  $ABC$  в пластине

### 3.2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) нашел широкое применение при решении сложных задач в разнообразных областях науки и техники, том числе в сварочных науках. МКЭ лишен основных недостатков метода конечных разностей, хотя он намного сложнее и требует более мощных компьютеров.

Основная идея метода состоит в том, что любую непрерывную функцию (например, температуру) можно аппроксимировать кусочно-непрерывными функциями, определенными на конечном числе подобластей, называемых элементами.

Проиллюстрируем основную идею на примере распределения температуры в стержне (см. рис. 3.1). Разобьем стержень на отдельные элементы  $1, 2, \dots, e, \dots, E$ , ограниченные двумя соседними узлами  $1, 2, \dots, i, j, \dots$  (см. рис. 3.1, в). В пределах любого  $e$ -го элемента распределение температуры будем аппроксимировать прямой линией, причем точки  $T_i$  и  $T_j$  однозначно определяют эту прямую линию, т. е. в любой момент  $t = t_{k-1}$  функция  $T(x)$  будет представлять собой кусочно-линейную функцию.

В двумерном случае тело разбивается на плоские конечные элементы в форме треугольника, которые связаны между собой тремя узлами (правая половина рис. 3.3, а). Распределение температуры в пределах элемента изображается теперь плоскостью (рис. 3.3, б). Таким образом, в любой момент поверхность  $T(x, y)$  будет аппроксимироваться совокупностью кусочно-плоских поверхностей. Естественно, для лучшей аппроксимации поверхности  $T(x, y)$  в области высоких градиентов (вблизи шва) необходимо принимать плотность элементов наибольшей (наименьшие размеры элементов).

При построении дискретной модели двумерной области можно принять четырехугольники, а объемного тела — тетраэдры и параллелепипеды. Однако далее будем пользоваться только простейшими элементами: одномерными элементами с двумя узлами и треугольными с тремя узлами, показанными на рис. 3.1, в и 3.3, а. Эти элементы просты в теоретическом отношении, и ими можно дискретизировать любое одномерное и двумерное тело.

Вернемся к примеру одномерного температурного поля в стержне (см. рис. 3.1). В общем случае распределение температуры  $T(x)$  мы не знаем, неизвестны значения температуры в узлах  $T_1, T_2, \dots, T_i, T_j, \dots$ . Наша задача — найти их, причем так, чтобы последовательность значений  $T_1, T_2, \dots$  была бы наилучшим образом приближена к кривой  $T(x)$ , которая удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности. Это наилучшее приближение можно обеспечить, варьируя все значения температуры в узлах так, чтобы минимизировать некоторый функционал, который однозначно связан с дифференциальным уравнением теплопроводности. Поясним смысл функционала. Если числам  $x$  ставятся в соответствие числа  $y$ , то задана функция  $-y = f(x)$ ; если функциям  $f$  ставятся в соответствие числа  $X$ , то задан функционал, например, в случае функции двух переменных

$$X[f(x, y)] = \int_s F\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) ds.$$

Таким образом, последовательность определения температурного поля МКЭ следующая:

- 1) сформулировать задачу теплопроводности, то есть определить уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия;
- 2) подобрать функционал, который обладает тем свойством, что функция, при которой он становится минимальным, удовлетворяет как исходному дифференциальному уравнению теплопроводности, так и граничным условиям;
- 3) разбить исследуемую область на элементы (дискретизировать область) и выбрать функции, аппроксимирующие искомое температурное поле в пределах каждого элемента;
- 4) выразить функционал через значения температуры в узлах элементов;
- 5) продифференцировать функционал по каждому неизвестному значению температуры в узлах и производные приравнять нулю;
- 6) решить полученную систему уравнений относительно неизвестных значений температуры в узлах.

Основная часть параграфа и будет посвящена всем этапам решения этой вариационной задачи.

Важным моментом МКЭ является построение интерполяционных функций, которые в пределах каждого элемента аппроксимируют искомое температурное поле. В качестве такой функции возьмем полином первой степени. Выразим его через значения в узловых точках.

Для одномерного элемента (см. рис. 3.1, в) функция  $T$  имеет вид

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{3.12}$$

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются с помощью условий в узловых точках  $i$  и  $j$ :

$$T = T_i \text{ при } x = x_i;$$

$$T = T_j \text{ при } x = x_j.$$

Подстановка этих условий в формулу (3.12) приводит к системе уравнений

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i,$$

$$T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j,$$

решив которую, получим

$$\alpha_1 = \frac{T_i x_j - T_j x_i}{l}; \quad \alpha_2 = \frac{T_j - T_i}{l},$$

где  $l = x_j - x_i$ .

Подставляя значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в уравнение (3.12), имеем

$$T = \frac{T_i x_j - T_j x_i}{l} + \frac{T_j - T_i}{l} x,$$

или в другом виде

$$T = \frac{x_j - x}{l} T_i + \frac{x - x_i}{l} T_j.$$

Это уравнение запишем в матричном виде

$$T = N_i T_i + N_j T_j = [N] \{T\}, \quad (3.13)$$

где  $[N] = [N_i \ N_j]$  – матричная строка; функции  $N_i$  и  $N_j$  называются функциями формы

$$N_i = 1/l(x_j - x), \quad N_j = 1/l(x - x_i).$$

Для функций формы характерно то, что они равны единице в узле, номер которого совпадает с нижним индексом функции и обращается в нуль во всех других узлах.

Аналогично определим интерполяционную функцию в форме (3.13) для двумерного элемента. Пронумеруем узлы против часовой стрелки в последовательности  $i, j, k$  (см. рис. 3.3). Уравнение плоскости имеет вид

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (3.14)$$

В узлах

$$\begin{aligned}
T &= T_i \text{ при } x = x_i, \quad y = y_i; \\
T &= T_j \text{ при } x = x_j, \quad y = y_j; \\
T &= T_k \text{ при } x = x_k, \quad y = y_k.
\end{aligned}$$

Эти узловы́е условия приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; \\
T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; \\
T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k,
\end{aligned}$$

решение которой дает

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A} \left[ (x_j y_k - x_k y_i) T_i + (x_k y_j - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k \right]; \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A} \left[ (y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k \right]; \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A} \left[ (x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k \right],
\end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

где  $A$  – площадь треугольника  $ijk$ ; она связана с определителем системы соотношением

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

Подставив (3.15) в (3.14) и приведя полученный результат к форме (3.13), получим

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = [N] \{T\}, \quad (3.16)$$

где три функции формы имеют вид

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i = y_j - y_k, \\ c_i = x_k - x_j; \end{cases} \\
N_j &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k, \\ b_j = y_k - y_i, \\ c_j = x_i - x_k; \end{cases}
\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y) \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i, \\ b_k = y_i - y_j, \\ c_k = x_j - x_i. \end{cases}$$

Сформулируем двумерную задачу теплопроводности в дифференциальной форме с достаточно полным учетом условий сварки.

1. Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_3, \quad (3.18)$$

где  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  – теплопроводность в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $q_3$  – объемная плотность мощности источника (стока) теплоты внутри тела, Вт м<sup>-3</sup>;  $c\rho$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $q_3$  могут быть функциями  $x$ ,  $y$  и  $t$ , т. е. тело может быть разнородным и его свойства зависят от температуры. Уравнение применимо как к изотропным ( $\lambda_x = \lambda_y$ ), так и к анизотропным ( $\lambda_x \neq \lambda_y$ ) телам.

2. Начальное условие ( $t = 0$ )

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y). \quad (3.19)$$

3. Граничные условия:

а) на части граничной поверхности  $S_1$  заданы условия II и III родов

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y - q_2 + \alpha(T - T_\infty) = 0; \quad (3.20)$$

б) на части граничной поверхности  $S_2$  заданы условия I рода

$$T = T_s; \quad (3.21)$$

объединение  $S_1$  и  $S_2$  образует полную границу  $S$ . Здесь  $l_x$ ,  $l_y$  – направляющие косинусы вектора нормали к поверхности;  $q_2$  – плотность теплового потока на поверхности  $S_1$  (положительна, если теплота вводится), Вт м<sup>-2</sup>;  $\alpha$  – коэффициенты теплообмена;  $T_\infty$  – температура окружающей среды. Если на границе  $S_1$  обе величины  $q_2$  и  $\alpha$  равны нулю, то равенство (3.20) сводится к условию

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y = 0,$$

что отражает отсутствие теплопереноса через границу  $S_1$ . В случае изотропного тела последнее условие можно записать в виде  $\partial T/\partial n = 0$ , где  $n$  – нормаль к поверхности.

С практической точки зрения задача (3.18) – (3.21) является достаточно полной для описания тепловых процессов при сварке. Например, с помощью объемного источника  $q_3$  можно моделировать ввод теплоты через наплавляемый металл, выделяющуюся теплоту при прохождении электрического тока, теплоту плавления и кристаллизации и т. п. При рассмотрении половины симметричного сечения стыкового соединения (см. рис. 3.3, *a*) граничным условием (3.20) можно описать теплоотдачу ( $q_2 = 0, \alpha > 0$ ) на поверхности  $BCDE$  и  $OF$  и теплоизоляцию ( $q_2 = 0, \alpha = 0$ ) границы  $OAB$ . На достаточно удаленной от шва  $ABCA$  условной границе  $EF$  можно задать условие (3.21), рассчитав температуру по аналитическим формулам, например по формуле (2.39); исходные величины  $q_2, q_3, \alpha, T_\infty, T_S$  и поверхность могут изменяться в процессе сварочного нагрева и охлаждения. Хотя свариваемое изделие, как правило, считается изотропным, далее будем теплопроводность  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  различать.

Уравнение (3.18) вместе с краевыми условиями (3.19) – (3.21) однозначно определяет задачу. Оно служит отправной точкой для решения задачи МКР. МКЭ основан на вариационном подходе. В вариационном исчислении устанавливается, что решение уравнения (3.18) с граничными условиями (3.20) эквивалентно отысканию минимума функционала

$$X = \int_V \left[ \frac{1}{2} \lambda_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - T \left( q_3 - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right] dv + \int_S \left[ -q_2 T + \frac{1}{2} \alpha (T - T_\infty)^2 \right] ds. \quad (3.22)$$

Покажем это. Представим функционал в виде

$$X = \int_V F(x, y, T, \partial T/\partial x, \partial T/\partial y) dv + \int_S f(x, y, T) ds,$$

где  $F$  и  $f$  – подынтегральные функции в (3.22):

$$F = 1/2 \lambda_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 1/2 \lambda_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - T \left( q_3 - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right); \quad (3.23)$$

$$f = -q_2 T + 1/2 \alpha (T - T_\infty)^2.$$

Бесконечно малому изменению  $F(x, y)$  и  $f(x, y)$  соответствует вариация функционала

$$\delta X = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial (\partial T/\partial x)} \delta (\partial T/\partial x) + \frac{\partial F}{\partial (\partial T/\partial y)} \delta (\partial T/\partial y) \right] dv + \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial T} \delta T \right) ds.$$

Так как  $\delta(\partial T/\partial x) = \partial/\partial x (\delta T)$  и  $\delta(\partial T/\partial y) = \partial/\partial y (\delta T)$ , то

$$\delta X = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) + \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} \frac{\partial}{\partial y} (\delta T) \right] dv + \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial T} \delta T \right) ds. \quad (3.24)$$

Проинтегрируем по частям второй член в первом интеграле :

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) dv = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \delta T \right] dv - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \right] \delta T dv$$

и применим теорему Гаусса

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) dv = \int_S \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \delta T l_x ds - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \right] \delta T dv.$$

Преобразуя аналогично третий член в первом интеграле (3.24) и объединяя результаты интегрирования, получим

$$\delta X = \int_V \left\{ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} \right] \right\} \delta T dv + \int_S \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} l_x + \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} l_y + \frac{\partial f}{\partial T} \right\} \delta T ds. \quad (3.25)$$

Функционал  $X$  принимает минимальное (стационарное) значение, если его вариация равна нулю,  $\delta X = 0$ , что в свою очередь выполняется только при обращении в нуль выражений в фигурных скобках в обоих интегралах (3.25):

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} \right] = 0; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} l_x + \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} l_y + \frac{\partial f}{\partial T} = 0. \quad (3.27)$$

Найдем по отдельности каждое слагаемое, дифференцируя подынтегральные функции (3.23):

$$\frac{\partial F}{\partial T} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - q_3;$$

$$\frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial x)} = \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial(\partial T/\partial y)} = \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -q_2 + \alpha(T - T_\infty).$$

Подстановка этих выражений в (3.26) приводит к (3.18), а в (3.27) – к (3.20).

Итак, функция  $T$ , сообщающая минимальное значение функционалу (3.22), должна удовлетворять дифференциальному уравнению теплопроводности (3.18) и граничным условиям (3.20). Начальные (3.19) и граничные условия I рода (3.21) учтем позже.

Минимизируем функционал (3.22), используя множество аппроксимирующих функций, каждая из которых определена на отдельном элементе и выражена через значения в узлах  $\{T\}$ . Так как узловые значения определяют величину функционала, то минимизация и должна быть проведена по этим значениям. С этой целью разобьем интегралы (3.22) по отдельным элементам и в пределах каждого элемента распределение температуры  $T^{(e)}$  выразим через ее значения в узлах  $\{T\}$ :  $X = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}$ , где  $E$  – общее число элементов, а  $\chi^{(e)}$  – вклад каждого элемента в  $X$ :

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \left[ \frac{1}{2} \lambda_x^{(e)} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_y^{(e)} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right)^2 \right] dv - \int_{V^{(e)}} T^{(e)} \left[ q_3^{(e)} - c \rho^{(e)} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right] dv - \\ - \int_{S^{(e)}} q_2^{(e)} T^{(e)} ds + \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2} \alpha^{(e)} \left[ \left( T^{(e)} \right)^2 - 2 T^{(e)} T_\infty + T_\infty^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь верхний индекс  $(e)$  указывает на принадлежность величины данному элементу  $e$ . Видно, что свойства элементов по  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $c\rho$ ,  $\alpha$  могут отличаться, т. е. свариваемое тело может быть разнородным. Далее для удобства записи индекс  $(e)$  у этих коэффициентов, а также у  $q_2$  и  $q_3$  будем опускать.

Запишем уравнение (3.28) в матричной форме. Для этого введем матрицу

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

и вектор градиентов в элементе

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

Подставив (3.16) в (3.30), имеем

$$\{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = [B^{(e)}] \{T\},$$

где матрица  $[B^{(e)}]$  получается дифференцированием функций формы (3.17)

$$B^{(e)} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}.$$

Теперь интегралы (3.28) с учетом (3.16), (3.29) и (3.30) можно записать в матричной форме

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = & \int_{V^{(e)}} 1/2 \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dv - \int_{V^{(e)}} q_3 [N^{(e)}] \{T\} dv + \\ & + \int_{V^{(e)}} c\rho [N^{(e)}] \{T\} [N^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} dv - \int_{S^{(e)}} q_2 [N^{(e)}] \{T\} ds + \\ & + \int_{S^{(e)}} 1/2\alpha \{T\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{T\} ds - \int_{S^{(e)}} \alpha T_\infty [N^{(e)}] \{T\} ds + \int_{S^{(e)}} 1/2\alpha T_\infty^2 ds, \end{aligned} \quad (3.31)$$

так как согласно матричной алгебре

$$\begin{aligned} \lambda_x \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right)^2 = & \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} = ([B^{(e)}] \{T\})^T [D^{(e)}] ([B^{(e)}] \{T\}) = \\ = & \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} \end{aligned}$$

и  $[N^{(e)}]$  является только функцией координат и не зависит от времени:

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} ([N^{(e)}] \{T\}) = [N^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t}.$$

Верхний индекс  $T$  означает транспортирование матрицы, т. е. операцию, когда строка матрицы образует столбец, а столбец – строку.

Итак, функционал выразили через температуру в узлах. Минимизация функционала  $X$  по температуре в узлах приводит к уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial \{T\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial T_1} \\ \frac{\partial X}{\partial T_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0. \quad (3.32)$$

Найдем частные производные  $\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}}$ , продифференцировав выражение (3.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} &= \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dv - \int_{V^{(e)}} q_3 [N^{(e)}]^T dv + \\ &+ \left( \int_{V^{(e)}} c\rho [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dv \right) \frac{\partial \{T\}}{\partial t} - \int_{S^{(e)}} q_2 [N^{(e)}]^T ds + \\ &+ \int_{S^{(e)}} \alpha [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{T\} ds - \int_{S^{(e)}} \alpha T_\infty [N^{(e)}]^T ds + 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

так как в соответствии с правилами дифференцирования матричных произведений

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} ([N^{(e)}] \{T\}) = \frac{\partial}{\partial \{T\}} (N_i^{(e)} T_i + N_j^{(e)} T_j + N_k^{(e)} T_k) = \begin{Bmatrix} N_i^{(e)} \\ N_j^{(e)} \\ N_k^{(e)} \end{Bmatrix} = [N^{(e)}]^T,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} (\{T\}^T [M] \{T\}) = 2[M] \{T\},$$

где  $[M]$  – матрица или произведение матриц, не зависящих от  $\{T\}$ .

Сумму интегралов (3.33) запишем в более удобной матричной форме

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = [c^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [k^{(e)}] \{T\} - \{f^{(e)}\}, \quad (3.34)$$

где  $[c^{(e)}]$  – матрица теплоемкости;  $[k^{(e)}]$  – матрица теплопроводности элемента;  $\{f^{(e)}\}$  – вектор тепловой нагрузки:

$$[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} c\rho [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dv;$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dv + \int_{S^{(e)}} \alpha [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] ds;$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} q_3 [N^{(e)}]^T dv + \int_{S^{(e)}} q_2 [N^{(e)}]^T ds + \int_{S^{(e)}} \alpha T_\infty [N^{(e)}]^T ds.$$

Вычислим все эти матрицы для треугольного элемента:

$$[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} c\rho \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dv = \frac{c\rho V}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dv +$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \alpha \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} ds =$$

$$= \frac{\lambda_x h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{\lambda_y h}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{2\alpha A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{ij} L_{ij} h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{jk} L_{jk} h}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{ki} L_{ki} h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} q_3 \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dv + \int_{S^{(e)}} q_2 \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dh + \int_{S^{(e)}} \alpha T_\infty \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} ds =$$

$$= \frac{q_3 V}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q_2 A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q_{2ij} L_{ij} h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{q_{2jk} L_{jk} h}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q_{2ki} L_{ki} h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{2\alpha T_\infty A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha_{ij} T_\infty L_{ij} h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha_{jk} T_\infty L_{jk} h}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha_{ki} T_\infty L_{ki} h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.37)$$

Здесь  $V = Ah$  – объем треугольного элемента. Нижние индексы у  $L$ ,  $q_2$ ,  $\alpha$  указывают стороны треугольника, к которым эти величины относятся;  $q_2$  и  $\alpha$  без индексов относятся к лицевым поверхностям (2 при  $\alpha$  сохраняется, если теплоотдача обеих поверхностей одинакова, в противном случае  $2\alpha$  следует заменить

суммой коэффициентов по обеим поверхностям). При выводе формул (3.35) – (3.37) пользовались следующими значениями интегралов [12]:

$$\int_A N_l N_m dA = \begin{cases} \frac{A}{6} & \text{при } l = m, \\ \frac{A}{12} & \text{при } l \neq m; \end{cases}$$

$$\int_{L_{ij}} N_l^2 dL = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{3} & \text{при } l = i \text{ или } l = j, \\ 0 & \text{при } l \neq i \text{ и } l \neq j; \end{cases}$$

$$\int_{L_{ij}} N_l N_m dL = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{6} & \text{при } l = i \text{ или } l = j \text{ и } m = i \text{ или } m = j, \\ 0 & \text{при } l \neq i \text{ или } l \neq j \text{ и } m \neq i \text{ или } m \neq j, \end{cases}$$

$$\int_A N_l dA = A/3 \quad \text{при любом } l;$$

$$\int_{L_{ij}} N_l dL = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{2} & \text{при } l = i \text{ или } l = j, \\ 0 & \text{при } l \neq i \text{ и } l \neq j. \end{cases}$$

Подставив выражение (3.34) в (3.32), получим окончательную систему дифференциальных уравнений относительно температуры в узловых точках всей системы конечных элементов

$$\frac{\partial X}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^E \left( [c^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [k^{(e)}] \{T\} - \{f^{(e)}\} \right) = 0$$

или

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K] \{T\} = \{F\}, \quad (3.38)$$

где

$$[C] = \sum_{e=1}^E [c^{(e)}]; \quad [K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (3.39)$$

Слагаемые уравнения (3.38) имеют размерность мощности (Вт).

Чтобы получить значения  $\{T\}$  во времени, необходимо решить линейное дифференциальное уравнение (3.38). Существуют различные методы решения, мы выберем наиболее простой – МКР (см. 3.1).

Рассмотрим уравнение (3.38) в средней точке  $t_{k-1/2}$  временного интервала  $(t_{k-1}, t_k)$  продолжительностью  $\Delta t$ . Аналогично выражению (3.5) получим

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \{T\}}{\partial t} \right)_{k-1/2} &= \frac{\{T\}_k - \{T\}_{k-1}}{\Delta t}; \\ \{T\}_{k-1/2} &= \frac{\{T\}_k + \{T\}_{k-1}}{2}; \\ \{F\}_{k-1/2} &= \frac{\{F\}_k + \{F\}_{k-1}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Подставляя выражения (3.40) в дифференциальное уравнение (3.38), получим

$$\frac{1}{\Delta t} [C] \{T\}_k - \frac{1}{\Delta t} [C] \{T\}_{k-1} + \frac{1}{2} [K] \{T\}_k + \frac{1}{2} [K] \{T\}_{k-1} = \frac{1}{2} \{F\}_k + \frac{1}{2} \{F\}_{k-1}$$

или

$$[\bar{K}] \{T\}_k = \{\bar{F}\}, \quad (3.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [\bar{K}] &= [K] + \frac{2}{\Delta t} [C]; \\ \{\bar{F}\} &= \left( \frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \{T\}_{k-1} + \{F\}_k + \{F\}_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Полученное уравнение является основным. Считая температуру в узлах в предыдущий момент  $t_{k-1}$  известной, по этому уравнению можно получить температуру в узлах в текущий момент  $t_k$ . На первом этапе ( $k = 1$ ) учитываются начальные условия (3.19). При этом в качестве температуры на предыдущем этапе ( $k - 1 = 0$ ) принимается температура в узлах  $\{T\}_0$  согласно закону  $T_0(x, y)$ .

До сих пор мы не учитывали одно из граничных условий задачи – условие (3.21). Учтем заданные значения температуры в граничных узлах на этом этапе решения задачи, преобразуя матрицу  $[\bar{K}]$  и вектор  $\{\bar{F}\}$  в уравнении (3.41). Например, если температура в узле с номером  $n$  задана  $T_n = a$ , то строка  $n$  в  $[\bar{K}]$ ,  $\{T\}$ ,  $\{\bar{F}\}$  и столбец  $n$  в  $[\bar{K}]$  вычеркиваются, а от каждого элемента  $\bar{F}_m$  столбца свободных членов  $\{\bar{F}\}$  отнимается произведение  $\bar{k}_{mn} \times a$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), где  $\bar{k}_{mn}$  – элемент матрицы  $[\bar{K}]$ . После такого преобразования матрица  $[\bar{K}]$  остается симметричной и ленточного типа. Окончательно сформированная система уравнений (3.41) может быть решена любым известным методом, например ме-

тодом Гаусса. Эту систему необходимо решать на каждом этапе прослеживания по времени.

Таким образом, мы рассмотрели все этапы решения плоской температурной задачи МКЭ при сварке. Общая блок-схема программы, составленной на основе изложенного алгоритма, показана на рис. 3.5.

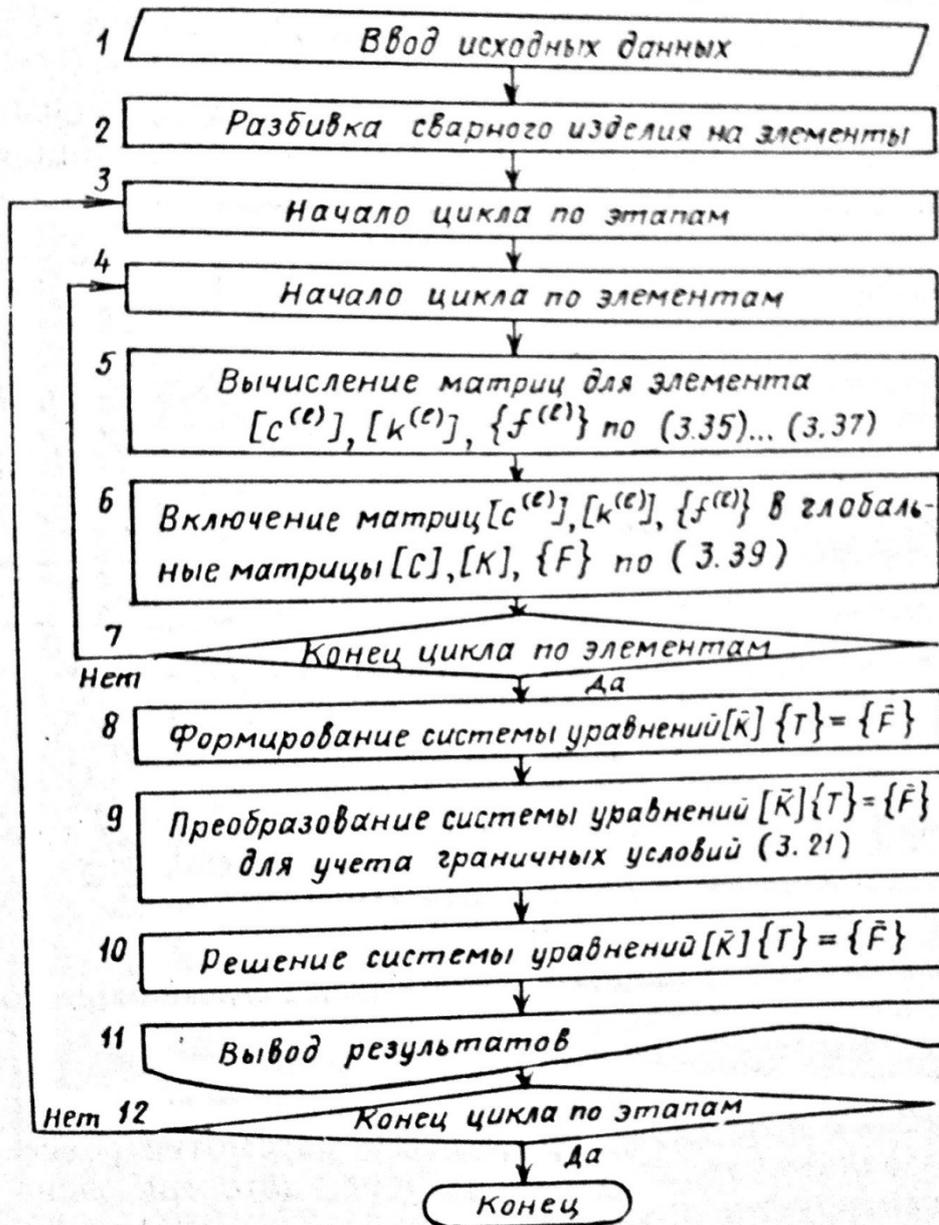
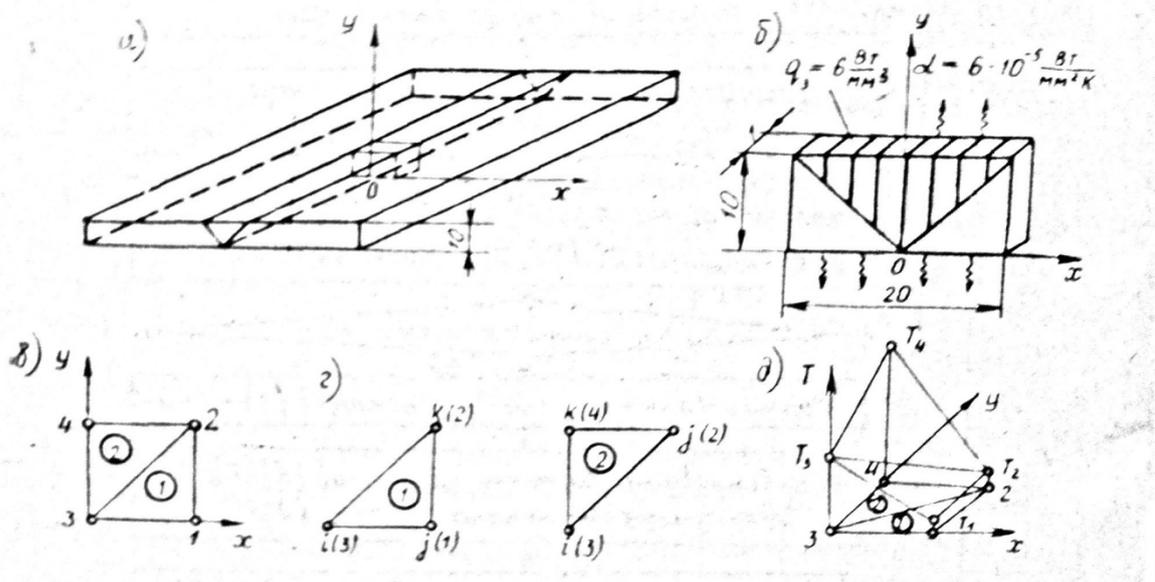


Рис. 3.5. Блок-схема программы, реализующей метод конечных элементов

После обилия формул и математических выкладок лучше всего рассмотреть все этапы решения задачи на простом примере, который очень упрощенно имитирует условия сварки.

*Пример.* Пусть сваривается пластина толщиной 10 мм (рис. 3.6, а). Материал пластины однороден, теплопроводность  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda = 0.04 \text{ Вт мм}^{-1} \text{ К}^{-1}$ , объемная теплоемкость  $cr = 0.0048 \text{ Дж мм}^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Выделим из центральной зоны пла-

стины поперечную полоску площадью  $20 \times 10 \text{ мм}^2$  и толщиной 1 мм (рис. 3.6, б). Пусть в верхней половине полоски, которая имитирует выполняемый односторонний сварной шов и на рисунке заштрихована, действует объемный источник теплоты мощностью  $q_3 = 6 \text{ Вт мм}^3$ . Будем считать, что передняя и задняя поверхности полоски теплоизолированы ( $\alpha = 0$ ), на верхней и нижней поверхностях происходит теплоотдача в окружающую среду с коэффициентом  $\alpha = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт мм}^{-2} \text{ К}^{-1}$ , а на боковой поверхности задана температура, которая изменяется по закону (2.16), что имитирует идеальную стыковку выделенной полоски по боковой поверхности с остальной частью пластины. Дополнительные поверхностные источники по всей поверхности отсутствуют ( $q_2 = 0$ ). Начальная температура  $T_0 = 0 \text{ К}$ . Температура окружающей среды  $T_\infty = 0 \text{ К}$  (примем за начало отсчета). Требуется определить температурное поле в полоске через 1 с после начала действия источника теплоты.



**Рис. 3.6.** Пример расчета температуры при сварке пластины

Пронумеруем последовательно все операции согласно нумерации блоков на рис. 3.5.

1. В условии задачи сформулированы исходные данные (геометрия тела, свойства материала, режим нагрева, начальные и граничные условия).

2. Разбиваем тело по элементам. Так как тело и температурное поле симметричны относительно плоскости  $x = 0$ , рассмотрим только правую половину, приняв плоскость  $x = 0$  за адиабатическую границу ( $\alpha = 0$ ). Для простоты расчета разобьем эту половину только на два треугольных элемента с четырьмя узлами, но так, чтобы разность между номерами узлов элемента была минимальной (рис. 3.6, в). Толщина элементов  $h^{(1)} = h^{(2)} = 1 \text{ мм}$ , площадь  $A^{(1)} = A^{(2)} = 50 \text{ мм}^2$ , объем  $V^{(1)} = V^{(2)} = 50 \text{ мм}^3$ . Узлы каждого элемента пронумеруем в направлении против часовой стрелки буквами  $i, j, k$ , причем первый узел  $i$  может быть выбран произвольно (рис. 3.6, в).

3. Весь заданный период нагрева представим в виде только одного интервала,  $\Delta t = 1$  с.

4. Последовательно для элементов 1 и 2 вычислим все матрицы.

5. Вычислим матрицу теплоемкости для элемента 1 по (3.35):

$$[c^{(1)}] = \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} & c_{ik} \\ c_{ji} & c_{jj} & c_{jk} \\ c_{ki} & c_{kj} & c_{kk} \end{bmatrix} = \frac{c\rho V}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{0.0048 \cdot 50}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

Здесь систему нумерации узлов  $i, j, k$  можно понимать как местную систему.

Матрица теплопроводности  $[k^{(1)}]$  при условии  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$  и  $\alpha_{jk} = \alpha_{ki} = 0$  согласно формуле (3.36) равна

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(1)} & k_{ij}^{(1)} & k_{ik}^{(1)} \\ k_{ji}^{(1)} & k_{jj}^{(1)} & k_{jk}^{(1)} \\ k_{ki}^{(1)} & k_{kj}^{(1)} & k_{kk}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{\lambda h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{ij} L_{ij} h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Константы  $b$  и  $c$  вычисляются по формулам (3.17) и для элемента 1 (рис. 3.6, з) равны

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k = 0 - 10 = -10; & c_i &= x_k - x_j = 10 - 10 = 0; \\ b_j &= y_k - y_i = 10 - 0 = 10; & c_j &= x_i - x_k = 0 - 10 = -10; \\ b_k &= y_i - y_j = 0 - 0 = 0; & c_k &= x_j - x_i = 10 - 0 = 10. \end{aligned}$$

Подстановка полученных числовых значений  $b$  и  $c$  и длины нижней стороны треугольника  $L_{ij}$  в (3.43) дает

$$[k^{(1)}] = \frac{0.04 \cdot 1}{4 \cdot 50} \begin{bmatrix} 100+0 & -100-0 & -0+0 \\ -100-0 & 100+100 & 0-100 \\ -0-0 & 0-100 & 0+100 \end{bmatrix} + \frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.02 & 0 \\ -0.02 & 0.04 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0202 & -0.0199 & 0 \\ -0.0199 & 0.0402 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0.02 \end{bmatrix}.$$

Видно, что матрица симметричная.

Вектор тепловой нагрузки в моменты  $k-1 = 0$  и  $k = 1$  для элемента 1 определим по формуле (3.37)

$$\{f^{(1)}\}_0 = \{f^{(1)}\}_1 = \begin{Bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_j^{(1)} \\ f_k^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

так как для элемента 1  $q_3 = 0$ ,  $q_2 = 0$  и  $T_\infty = 0$ .

Аналогично определим все матрицы для элемента 2:

$$[c^{(2)}] = [c^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$b_i = 0, \quad b_j = 10, \quad b_k = -10, \quad c_i = -10, \quad c_j = 0, \quad c_k = 10, \quad L_{jk} = 10,$$

$$\begin{aligned} [k^{(2)}] &= \frac{0.04 \cdot 1}{4 \cdot 50} \begin{bmatrix} 0+100 & 0-0 & -0-100 \\ 0-0 & 100+0 & -100+0 \\ -0-100 & -100+0 & 100+100 \end{bmatrix} + \frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.0202 & -0.0199 \\ -0.02 & -0.0199 & 0.0402 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\{f^{(2)}\}_0 = \{f^{(2)}\}_1 = \frac{6 \cdot 50}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix},$$

так как  $q_3 = \text{const}$ .

6. Составим глобальные матрицы для системы элементов  $[C]$ ,  $[K]$  и  $\{F\}$ , суммируя соответствующие матрицы элемента  $[c^{(e)}]$ ,  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$ . Рассмотрим эту процедуру подробно при вычислении  $[C]$ .

Размер матрицы  $[C]$  определяется общим количеством узлов:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент  $c_{mn}$  матрицы  $[C]$  является суммой соответствующих элементов матрицы  $[c^{(e)}]$  согласно (3.39). В рассматриваемом случае мы знаем матрицы  $[c^{(1)}]$  и  $[c^{(2)}]$  в системе нумерации узлов  $i, j, k$ . Включение  $[c^{(1)}]$  и  $[c^{(2)}]$  в  $[C]$  в глобальной системе нумерации узлов можно осуществить с помо-

щью соотношений  $i = 3, j = 1, k = 2$  для элемента 1 и  $i = 3, j = 2, k = 4$  для элемента 2 (см. рис. 3.6, з). Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
 [C] &= \sum_{e=1}^2 [c^{(e)}] = [c^{(1)}] + [c^{(2)}] = \begin{bmatrix} c_{jj}^{(1)} + 0 & c_{jk}^{(1)} + 0 & c_{ji}^{(1)} + 0 & 0 + 0 \\ c_{kj}^{(1)} + 0 & c_{kk}^{(1)} + c_{jj}^{(2)} & c_{ki}^{(1)} + c_{ji}^{(2)} & 0 + c_{jk}^{(2)} \\ c_{ij}^{(1)} + 0 & c_{ik}^{(1)} + c_{ij}^{(2)} & c_{ii}^{(1)} + c_{ii}^{(2)} & 0 + c_{ik}^{(2)} \\ 0 + 0 & 0 + c_{kj}^{(2)} & 0 + c_{ki}^{(2)} & 0 + c_{kk}^{(2)} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.04 + 0 & 0.02 + 0 & 0.02 + 0 & 0 \\ 0.02 + 0 & 0.04 + 0.04 & 0.02 + 0.02 & 0 + 0.02 \\ 0.02 + 0 & 0.02 + 0.02 & 0.04 + 0.04 & 0 + 0.02 \\ 0 & 0 + 0.02 & 0 + 0.02 & 0 + 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.08 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.08 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.02 & 0.04 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Видно, что матрица  $[C]$  симметричная и ленточная, вне ленты шириной 5 диагоналей элементы матрицы равны нулю. Ширина ленты определяется максимальной разностью номеров узлов элемента.

Аналогично включим матрицы  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  в глобальные матрицы, в результате чего получим

$$\begin{aligned}
 [K] &= \sum_{e=1}^2 [k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0.0402 + 0 & -0.02 + 0 & -0.0199 + 0 & 0 + 0 \\ -0.02 + 0 & 0.02 + 0.0202 & 0 + 0 & 0 - 0.0199 \\ -0.0199 + 0 & 0 + 0 & 0.0202 + 0.02 & 0 - 0.02 \\ 0 + 0 & 0 - 0.0199 & 0 - 0.02 & 0 + 0.0402 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.0402 & -0.02 & -0.0199 & 0 \\ -0.02 & 0.0402 & 0 & -0.0199 \\ -0.0199 & 0 & 0.0402 & -0.02 \\ 0 & 0.0199 & -0.02 & +0.0402 \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\{F\}_0 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}_0 = \sum_{e=1}^2 \{f^{(e)}\}_0 = \begin{Bmatrix} f_j^{(1)} + 0 \\ f_k^{(1)} + f_j^{(2)} \\ f_i^{(1)} + f_i^{(2)} \\ 0 + f_k^{(2)} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 0 + 0 \\ 0 + 100 \\ 0 + 100 \\ 0 + 100 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix}, \quad \{F\}_1 = \{F\}_0$$

7. Глобальные матрицы  $[C]$ ,  $[K]$  и  $[F]$  сформированы с учетом всех (двух) элементов.

8. С помощью вычисленных матриц  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $\{F\}_0$  и  $\{F\}_1$  по формулам (3.42) окончательно сформируем систему уравнений (3.41):

$$[\bar{K}] \{T\}_1 = \{\bar{F}\}, \tag{3.44}$$

где

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 0.0402 & -0.02 & -0.0199 & 0 \\ -0.02 & 0.0402 & 0 & -0.0199 \\ -0.0199 & 0 & 0.0402 & -0.02 \\ 0 & -0.0199 & -0.02 & 0.0402 \end{bmatrix} + \frac{2}{1} \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.08 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.08 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.02 & 0.04 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1202 & 0.02 & 0.0201 & 0 \\ 0.02 & 0.2002 & 0.08 & 0.0201 \\ 0.0201 & 0.08 & 0.2002 & 0.02 \\ 0 & 0.0201 & 0.02 & 0.1202 \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{Bmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $[\bar{K}]$  является симметричной, ленточной и положительно определенной. Положительная определенность означает, что все коэффициенты, стоящие на главной диагонали, положительны. Перечисленные свойства матрицы делают ее идеальной при использовании вычислительной техники; решение такой системы уравнений существует и оно единственно.

9. Приведем систему уравнений (3.44) относительно неизвестных  $T_1, T_2, T_3, T_4$  в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} 0.1202T_1 + 0.02T_2 + 0.0201T_3 &= 0, \\ 0.02T_1 + 0.2002T_2 + 0.08T_3 + 0.0201T_4 &= 200, \\ 0.0201T_1 + 0.08T_2 + 0.2002T_3 + 0.02T_4 &= 200, \\ 0.0201T_2 + 0.02T_3 + 0.1202T_4 &= 200. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

В действительности по условию задачи температура в узлах 1 и 2 задана. По уравнению (2.16) она равна 61 К при  $Q = 2 \times 300$  Дж и  $p = 2$  мм. Преобразуем систему уравнений с учетом этих граничных условий. Для этого в систему (3.45) подставляем  $T_1 = 61$  и  $T_2 = 61$ , вычеркиваем первое и второе уравнения, исключаем первый и второй столбцы оставшихся уравнений, перенося их в правую часть системы. В итоге получим преобразованную систему уравнений относительно неизвестных  $T_3$  и  $T_4$ :

$$\begin{aligned} 0.2002T_3 + 0.02T_4 &= 193.8; \\ 0.02T_3 + 0.1202T_4 &= 198.8. \end{aligned}$$

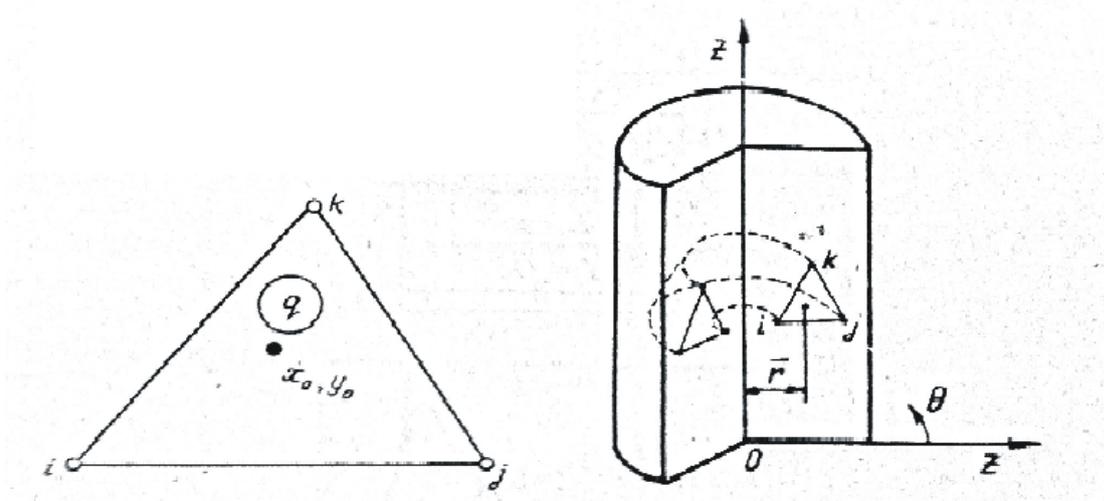
10. Решением преобразованной системы уравнений является  $T_3 = 817$  К,  $T_4 = 1518$  К.

По известным значениям температуры в узлах можно построить распределение температуры в выделенной полоске (рис. 3.6, д). Исходя из возможности

ручного счета, мы очень грубо разбили поперечное сечение на элементы, что, естественно, привело к очень грубым результатам. Для подобного класса температурных задач требуется разбивка на многие сотни и даже тысячи конечных элементов, а временной интервал  $\Delta t$  следует принимать равным долям секунды.

Среди исследователей–сварщиков очень популярны схемы сосредоточенных источников теплоты. Рассмотрим треугольный элемент толщиной  $h$  с линейным источником теплоты  $q_1 = q/h$  (Вт м<sup>-1</sup>) в точке  $x_0, y_0$  (рис. 3.7). Распределение такого источника описывается с помощью  $\delta$ -функции (1.20):

$$q_3(x, y) = q/h \delta(x - x_0) \delta(y - y_0).$$



**Рис. 3.7.** Сосредоточенный источник теплоты внутри конечного элемента

**Рис. 3.8.** Конечный элемент осесимметричного тела

Тогда первый интеграл в (3.37) с учетом свойства  $\delta$ -функции (1.21)

$$\int_{V^{(e)}} q_3 [N^{(e)}]^T dv = \int_{A^{(e)}} q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = q \begin{Bmatrix} N_i(x_0, y_0) \\ N_j(x_0, y_0) \\ N_k(x_0, y_0) \end{Bmatrix}.$$

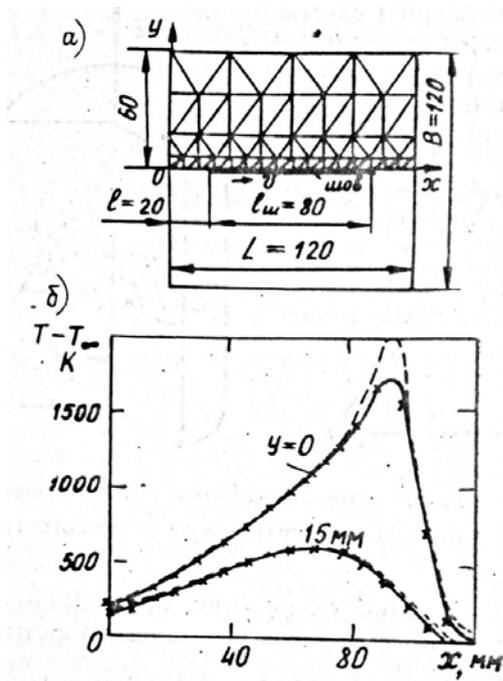
Остальные члены в уравнениях (3.35) – (3.37) остаются без изменений.

Рассмотрим кратко особенности расчета температурного поля в телах вращения, которые охватывают большой класс сварных конструкций (трубы, цилиндры, обечайки и т. п.; рис. 3.8). Если свойства материала, распределение объемных источников  $q_3$ , начальные и граничные условия не зависят от азимутального угла  $\theta$ , то температурное поле будет осесимметричным и все сечения по оси  $z$  подвергнутся одинаковому термическому циклу.

Расчет осесимметричного температурного поля можно свести к уже рассмотренной плоской задаче, если под  $x$  понимать  $r$ , под  $y$  –  $z$ , а толщину элемента принять переменной и зависящей от радиуса  $r$ ,  $h = 2\pi r$ . При этом инте-

гирование в формулах (3.35) – (3.37) при вычислении матриц  $[c^{(e)}], [k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  усложняется [12], поскольку толщина  $h$  не выносится за знак интеграла. Если площадь элементов достаточно мала, то можно считать толщину элемента постоянной и равной его толщине в центре элемента с координатой  $\bar{r} = (r_i + r_j + r_k)/3$ . При таком приближенном подходе вид формул (3.35) – (3.37) сохраняется, если под толщиной  $h$  понимать величину  $2\pi\bar{r}$ .

Точность МКЭ оценим на примере ручной дуговой сварки двух прямоугольных пластин из низкоуглеродистой стали толщиной 5 мм (рис. 3.9, а). Режим сварки:  $q = 3270$  Вт,  $v = 4$  мм  $\text{с}^{-1}$ , коэффициент сосредоточенности нормально кругового источника  $C = 1.8 \cdot 10^{-4}$  м $^{-2}$ . Задачу решали при разбивке половины соединения на 84 треугольных элемента со сгущением к оси шва и временном шаге  $\Delta t = 0.5$  с. Температуру рассчитывали также по формуле (2.77). Как видно из рис. 3.9, б, отклонение приближенного численного решения линейной задачи от точного аналитического, когда  $\lambda$ ,  $a$ ,  $cp$  и  $\alpha$  принимались постоянными, незначительно ( $< 3\%$ ) даже при относительном малом количестве элементов и большом временном шаге  $\Delta t$ , что характеризует высокую точность МКЭ. При нелинейной постановке задачи, когда учитывается зависимость  $\lambda$ ,  $cp$  и  $\alpha$  от температуры, решение может отличаться, особенно в области высокой температуры, что существенно при оценке размеров сварочной ванны и тепловых процессов в зоне термического влияния.



**Рис. 3.9.** Схема разбивки сварного соединения на конечные элементы (а) и распределение приращения температуры в момент окончания сварки (б): — аналитическое решение линейной задачи; × решение МКЭ линейной задачи; - - - решение МКЭ нелинейной задачи

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Березовский Б. М.** Математические модели дуговой сварки. Т. 4. Основы тепловых процессов в свариваемых изделиях. Челябинск: Изд. «Челябинский ЦНТИ», 2006. — 547 с.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
3. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. — 512 с.
4. **Карслоу Г. С., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 487 с.
5. **Карташов Э. М.**, Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.— М.: Высшая школа, 2001. — 550 с.
6. **Кархин В. А.** Расчет температурных полей при использовании источников тепла с периодически изменяющейся мощностью // Автоматическая сварка. — 1993. — № 6. — с. 3-7.
7. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1964. — 599 с.
8. **Махненко В. И., Кравцов Т. Г.** Тепловые процессы при механизированной наплавке деталей типа круглых цилиндров. — Киев.: Наукова думка, 1976. —159 с.
9. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 800 с.
10. **Рыкалин Н. Н.** Тепловые основы сварки. Ч.1. Процессы распространения тепла при дуговой сварке. М.—Л.: Изд. Академии наук СССР, 1947. — 272 с.
11. **Рыкалин Н. Н.** Расчеты тепловых процессов при сварке. — М.: Машгиз, 1951. — 296 с.
12. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
13. Теория сварочных процессов / Под ред. В. В. Фролова. — М.: Высшая школа, 1988. — 559 с.
14. **Karkhin V. A., Michailov V. G., Akatsevich V. D.** Modelling the thermal behaviour of weld and heat-affected zone during pulsed power welding // Mathematical Modelling of Weld Phenomena 4 / Ed. H. Cerjak. — London: The Institute of Materials, 1998. — P. 411 – 426.
15. **Rosenthal D.** The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments // Transactions of the ASME. — 1946. — Vol. 68.— No. 11.— P. 849 – 866.
16. **Wilson H. A.** On convection of heat // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1904. - Vol. 12. — P. 406 – 423.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения.....	2
Предисловие.....	4
<b>1. Физические основы передачи теплоты при сварке.....</b>	<b>5</b>
1.1. Основные понятия.....	5
1.2. Закон теплопроводности Фурье.....	6
1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности.....	7
1.4. Краевые условия.....	11
1.5. Схемы источников теплоты и нагреваемых тел.....	14
<b>2. Аналитические методы расчета тепловых процессов при сварке...17</b>	<b>17</b>
2.1. Метод источников.....	17
2.2. Мгновенные источники теплоты.....	19
2.3. Неподвижные непрерывно действующие источники теплоты.....	25
2.4. Подвижные источники теплоты.....	28
2.5. Периоды теплонасыщения и выравнивая температуры.....	35
2.6. Быстродвижущиеся источники теплоты.....	36
2.7. Распределение максимальной температуры.....	39
2.8 Скорость охлаждения при данной температуре.....	42
2.9. Периодические источники теплоты.....	43
2.10. Распределенные источники теплоты.....	46
2.11. Влияние ограниченности размеров тела на тепловые процессы.....	59
2.12. Нагрев цилиндрических тел.....	61
<b>3. Численные методы расчета тепловых процессов при сварке.....</b>	<b>64</b>
3.1. Метод конечных разностей.....	65
3.2. Метод конечных элементов.....	73
Список литературы.....	94