

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра радиофизики

---

В.П.Акимов Б.Б.Лебедев

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Фундаментальная библиотека Политехнического университета  
Электронные ресурсы  
2012

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ .....	5
1.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.....	5
1.2. Уравнение непрерывности.....	7
1.3. Интегральная форма уравнений Максвелла.....	8
1.4. Классификация сред.....	11
1.5. Стационарное электромагнитное поле.....	13
1.6. Электростатическое поле.....	13
1.6.1. Электростатический потенциал.....	13
1.6.2. Уравнение для электростатического потенциала.....	16
1.6.3. Энергия взаимодействия электрических зарядов.....	17
1.6.4. Энергия электрического поля.....	19
1.6.5. Электрическое поле при наличии поляризующихся сред (диэлектриков).....	20
1.7. Стационарное магнитное поле.....	25
1.7.1. Векторный потенциал магнитного поля постоянных токов.....	26
1.7.2. Намагничивающиеся среды. Относительная магнитная проницаемость.....	27
1.8. Граничные условия для векторов электромагнитного поля.....	29
1.8.1. Нормальные составляющие поля.....	30
1.8.2. Касательные составляющие поля.....	31
1.9. Уравнение баланса энергии поля (теорема Пойнтинга).....	32
1.10. Теорема единственности решения краевых задач электродинамики.....	33
2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ .....	34
2.1. Электродинамические потенциалы. Волновое уравнение.....	34
2.2. Простейшее решение волнового уравнения. Плоские волны.....	37
2.3. Сферические волны.....	39
2.4. Монохроматические волны.....	41
2.5. Отражение и преломление волн на границе раздела сред.....	47
2.6. О комплексных векторах.....	53
2.7. Распространение электромагнитных волн в плазме. Частотная дисперсия. Фазовая и групповая скорости распространения.....	55
2.7.1. Диэлектрическая проницаемость плазмы.....	56
2.7.2. Частотная дисперсия. Фазовая и групповая скорости распространения.....	57
2.8. Распространение волн в гиротропных средах.....	58
2.8.1. Тензор диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы.....	58
2.8.2. Эффекты Фарадея и двойного лучепреломления.....	61
3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ ....	64
3.1. Общие уравнения цилиндрических волноводов.....	64
3.2. Общие соотношения для металлических волноводов.....	66

3.3. Прямоугольные волноводы.....	67
3.4. Волноводы кругового сечения.....	71
<b>4. ОБЪЁМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ .....</b>	<b>73</b>
4.1. Свободные гармонические колебания.....	74
4.2. Добротность резонаторов.....	77
<b>5. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....</b>	<b>77</b>
5.1. Поле излучения элементарного электрического вибратора.....	77
5.2. Поле излучения элементарного магнитного вибратора (диполя).....	80
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>82</b>

## ВВЕДЕНИЕ

В радиотехнике, радиолокации, связи и многих других областях современной техники используются электромагнитные явления и процессы, а также устройства, в которых эти процессы и явления играют существенную роль: передающие и приёмные антенны, различные линии передачи электромагнитной энергии, объёмные резонаторы и фильтры, делители мощности и т.д.

В курсе «Электродинамика и распространение радиоволн» изучаются теоретические основы электромагнетизма: основные уравнения, описывающие электромагнитные явления, процессы излучения и распространения электромагнитных волн в различных средах и направляющих системах. Вторая часть курса посвящена вопросам, связанным с распространением радиоволн по естественным трассам. Рассматривается влияние Земли, тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн.

По существу, данный курс является базовым при изучении специальных дисциплин программы подготовки специалистов в области радиотехники, радиофизики, современных телекоммуникационных систем.

Первые систематические исследования в области электромагнетизма были проведены в конце 18-го – начале 19-го веков. В 1785-1788 гг. Кулон установил количественный закон взаимодействия электрических зарядов, что позволило создать электростатику на основе уже к тому времени разработанной для небесной механики теории потенциала.

В 1837 г. Фарадей сформулировал закон электромагнитной индукции. Он установил, что любое изменение магнитного потока через виток провода вызывает в этом витке электродвижущую силу. Открытие закона электромагнитной индукции явилось важным шагом в развитии электродинамики.

После того, как в 1864 году Максвелл опубликовал полную систему уравнений, описывающих электромагнитное поле, электродинамика окончательно сформировалась как наука.

Знаменитые опыты Герца, проведенные в 1886-1888 гг. подтвердили существование электромагнитных волн и их аналогию с оптикой. Несколько его работ, завершившихся сочинением «Об основных уравнениях электродинамики покоящихся сред», представили всю совокупность электромагнитных явлений как следствие уравнений Максвелла.

В 1895 г. А.С.Попов осуществил систему радиосвязи для нужд флота. В его экспериментах уже имелись все известные элементы линии радиосвязи: передатчик, антенны, приёмник.

В 1905 г. Эйнштейн опубликовал статью «К электродинамике движущихся тел», положившую начало специальной теории относительности. Теория Эйнштейна совершила переворот в фундаментальных представлениях физики и во многом определила современные взгляды на материю. Важнейшим выводом этой теории является взаимосвязь массы  $m$  и энергии  $W$ , определяемая известным соотношением  $W=mc^2$ .

Изучение микроскопического строения материи привело к созданию квантовой физики, а в дальнейшем квантовой радиофизики, в основе которых лежит представление о дискретности излучения электромагнитной энергии.

Техника радиосвязи началась с искровых передатчиков дециметровых волн. Первые передатчики незатухающих колебаний работали в диапазоне сверхдлинных волн. Постепенно осваивались всё более короткие волны, что расширяло возможности передачи информации. Появление радиолокации и релейной связи дало толчок к развитию техники сантиметровых и миллиметровых волн. В настоящее время для передачи информации используются и волны оптического диапазона.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### 1.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Основные опытные законы электричества и магнетизма, кроме закона электромагнитной индукции Фарадея, были получены при наблюдении не зависящих от времени полей. Заслуга Максвелла состоит в том, что он обобщил полученные до него экспериментальные закономерности на случай произвольных электромагнитных полей в произвольной среде, введя лишь одно дополнительное слагаемое в закон полного тока, открытый Ампером.

Система уравнений электромагнитного поля была постулирована Максвеллом, т.е. введена в теорию без доказательства. Макроскопическая теория электромагнетизма основывается на уравнениях Максвелла, справедливость которых следует из совпадения с экспериментальными данными. В качестве источников электромагнитного поля в уравнения Максвелла входят объёмная плотность токов проводимости  $\vec{j}$  и объёмная плотность зарядов  $\rho$ . Полная система уравнений Максвелла имеет следующий вид:<sup>1</sup>

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (1.1.1)$$

---

<sup>1</sup> Здесь и далее мы используем международную систему единиц СИ.  $\nabla$  - оператор «набла».

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.1.4)$$

Дадим определение величин, входящих в уравнения Максвелла. Под объёмной плотностью заряда понимается предел отношения величины заряда  $\Delta Q$  к объёму  $\Delta V$ , в котором он распределён, при  $\Delta V \rightarrow 0$ , т.е.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \text{ Кл/м}^3 \quad (1.1.5)$$

Если объёмный заряд движется со скоростью  $\vec{v}$ , то в каждой точке можно определить вектор плотности электрического тока:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (1.1.6)$$

равный по величине пределу отношения заряда  $\Delta Q$ , проходящего за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную направлению движения заряда, к произведению  $\Delta S \Delta t$  при  $\Delta S \rightarrow 0$  и  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{j} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \vec{e}_v, \text{ А/м}^2 \quad (1.1.7)$$

где  $\vec{e}_v$ - орт, направление которого совпадает с направлением движения зарядов.

Напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  в какой-либо точке определяется как сила, действующая на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку. Между вектором  $\vec{E}$  и силой  $\vec{F}$ , действующей на точечный заряд  $q$ , существует простая связь:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ .

Вектор  $\vec{D}$  называется вектором электрического смещения или вектором электрической индукции. Векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  связаны материальным уравнением среды:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (1.1.8)$$

где  $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$  Ф/м - электрическая постоянная,  $\varepsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды, которая характеризует способность среды к поляризации. Физический смысл  $\varepsilon$  рассмотрен в разделе 1.6.5. Здесь мы только отметим, что относительная диэлектрическая проницаемость – вели-

чина безразмерная и в зависимости от свойств среды может быть комплексным (вещественным) числом или тензором.

Вектор  $\vec{B}$  - вектор магнитной индукции. Он определяет силовое действие магнитного поля. Как известно, на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1.9)$$

Отсюда видно, что магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью в направлении, перпендикулярном линиям вектора  $\vec{B}$ . Магнитная индукция измеряется в теслах (Тл).

Вектор  $\vec{H}$  называется вектором напряжённости магнитного поля. Он связан с вектором  $\vec{B}$  материальным уравнением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (1.1.10)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость среды. Величина  $\mu$  зависит от свойств среды и характеризует способность последней к намагничиванию. Смысл введения  $\mu$  будет ясен из раздела 1.7. Как и относительная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  может быть комплексной величиной или тензором. Напряжённость магнитного поля измеряется в А/м.

Уравнения (1.1.1.) – (1.1.4) называются уравнениями Максвелла в дифференциальной форме, так как они имеют силу в любой точке пространства, в окрестности которой физические свойства среды непрерывны; это обеспечивает конечность входящих в уравнения пространственных производных.

Следует отметить, что к материальным уравнениям (1.1.8) и (1.1.10) обычно добавляют ещё одно, связывающее напряжённость электрического поля в среде с плотностью тока:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (1.1.11)$$

где  $\gamma$  - удельная проводимость среды.

Из уравнений Максвелла видно, что меняющиеся во времени электрические и магнитные поля не существуют независимо друг от друга, они непрерывно переходят одно в другое.

## 1.2. Уравнение непрерывности

Из уравнений (1.1.1) и (1.1.3) следует уравнение непрерывности, которое является дифференциальной формой закона сохранения заряда. Действительно, возьмём дивергенцию от обеих частей уравнения (1.1.1). Тогда

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) + \nabla \cdot \vec{j},$$

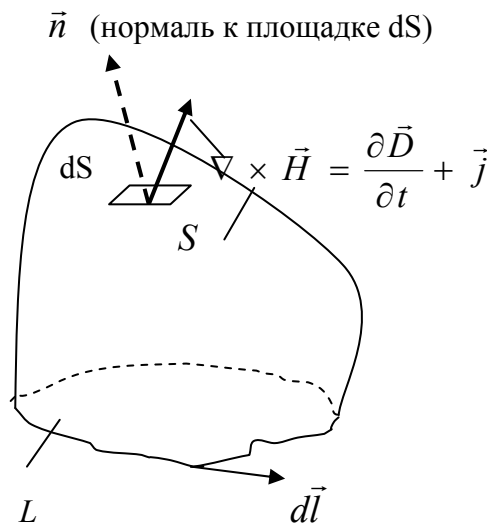
и учитывая, что дивергенция ротора любого вектора равна нулю, а согласно уравнению (1.1.3)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , получаем соотношение

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2.1)$$

которое и называется уравнением непрерывности. Из этого уравнения вытекает принцип локального сохранения заряда, т.е. если в какой-либо точке заряд убывает (возрастает), то из этой точки вытекает (втекает в неё) электрический ток.

### 1.3. Интегральная форма уравнений Максвелла

Вычислим поток вектора  $\nabla \times \vec{H}$  из уравнения (1.1.1) через некоторую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$  (Рис. 1.1):



$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{n} ds = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} ds + \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds.$$

Применяя теорему Стокса к левой части равенства, получаем математическую формулировку обобщённого закона Ампера (закона полного тока):

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds + I, \quad (1.3.1)$$



где  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$  - циркуляция вектора  $\vec{H}$  по контуру  $L$ ,  $\frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot \vec{n} ds$  - скорость изменения

потока электрического смещения, названная Максвеллом током смещения,  $\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds = I$  - электрический ток, обусловленный движением заря-

дов в проводниках (ток проводимости) либо переносом заряженных частиц или тел неэлектрическими силами, а также их движением по инерции (конвекционный ток).

Таким образом, циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по любому замкнутому контуру равна сумме электрического тока и тока смещения, протекающих сквозь поверхность, опирающуюся на этот контур.

Применение аналогичной процедуры к уравнению (1.1.2) приводит к соотношению, являющемуся математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.3.2)$$

где  $\Phi$  - магнитный поток, пронизывающий поверхность  $S$ ,

т.е. циркуляция вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  (электродвижущая сила) по любому замкнутому контуру равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур, с обратным знаком (при использовании правой системы координат).

Проинтегрируем уравнение (1.1.3) по некоторому объёму  $V$ :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho dV,$$

или с учётом теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds = Q, \quad (1.3.3)$$

где  $S$  - поверхность, ограничивающая объём  $V$ ,  $Q$  - полный заряд, находящийся внутри объёма.

Соотношение (1.3.3) известно в электростатике как теорема Гаусса. Эта теорема удобна для нахождения полей с центральной симметрией.

*Поле заряда  $Q$ .* Пусть, например, заряд  $Q$  точечный либо распределён равномерно по поверхности сферы или по объёму шара радиуса  $a$  (Рис.1.2.). Окружим мысленно заряд сферой радиуса  $r > a$ . Из симметрии системы следует, что во всех точках этой сферы вектор  $\vec{D}$  одинаков по модулю и направлен по радиусу.

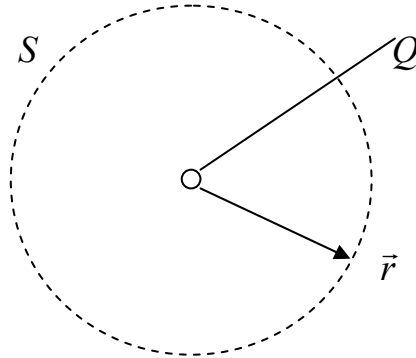


Рис. 1.2

В соответствии с формулой (1.3.3) при  $\vec{D} \cdot \vec{n} = \vec{D} \cdot \vec{r}_0 = const$  ( $\vec{r}_0$  - единичный вектор, совпадающий по направлению с радиусом) имеем

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds = 4\pi r^2 \vec{D} \cdot \vec{r}_0 = Q,$$

или  $\vec{D} \cdot \vec{r}_0 = D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$ . Напряжённость электрического поля, создаваемого

зарядом  $Q$  равна  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \vec{r}_0 = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}$ . (1.3.4)

*Сила взаимодействия двух зарядов (Закон Кулона).* Используя соотношение (1.3.4), можно определить силу, действующую на точечный заряд  $q_2$  со стороны точечного заряда  $q_1$  (Рис. 1.3).



Рис. 1.3

Сила, действующая на заряд  $q_2$ , равна  $\vec{F} = q_2 \vec{E}_1$ , где  $\vec{E}_1$  - напряжённость электрического поля, создаваемого зарядом  $q_1$  в точке расположения заряда  $q_2$ . В соответствии с (1.3.4)

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \text{ и}$$

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \vec{r}. \quad (1.3.5)$$

Соотношение (1.3.5) и представляет собой известный закон Кулона.

Уравнение (1.1.4), записанное в интегральной форме, имеет вид:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0, \quad (1.3.6)$$

т.е. поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Линии вектора  $\vec{B}$  замкнуты или уходят в бесконечность, что подтверждает известный факт отсутствия в природе магнитных зарядов.

Уравнения (1.1.3) и (1.1.4) не являются независимыми; они легко получаются из уравнений (1.1.1) и (1.1.2), соответственно. Действительно, применив операцию дивергенции к уравнению (1.1.1), и учитывая, что дивергенция ротора любого вектора равна нулю, получим:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \text{ но согласно (1.2.1) } \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ поэтому } \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \text{ что}$$

совпадает с (1.1.3). Аналогично показывается, что уравнение (1.1.4) следует из (1.1.2).

#### 1.4. Классификация сред

На электромагнитные процессы, описываемые уравнениями Максвелла, существенное влияние оказывают параметры среды  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  В зависимости от этих параметров среды подразделяются на *линейные* и *нелинейные*, *однородные* и *неоднородные*, *изотропные* и *анизотропные*.

*Линейными* средами называются среды, параметры которых не зависят от величины электрического и магнитного полей. Если хотя бы один из перечисленных параметров зависит от величины поля, то среда называется *нелинейной*. В рамках данного пособия рассматриваются только линейные среды.

*Однородными* называют среды, параметры которых не зависят от координат. В противном случае среды называются *неоднородными*.

Свойства *изотропных* сред одинаковы во всех направлениях, и параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  являются вещественными или комплексными скалярными величинами. Среда, свойства которой различны по разным направлениям, называется *анизотропной*. В анизотропных средах по крайней мере один из параметров является тензором. Примером анизотропных сред являются кристаллические диэлектрики, намагниченная плазма и намагниченный феррит. В кристаллическом диэлектрике и намагниченной плазме тензором является диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ . В декартовой системе координат тензор диэлектрической проницаемости записывается в общем случае в виде матрицы

$$\|\varepsilon\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.4.1)$$

Величины  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ , ... называются компонентами тензора  $\|\varepsilon\|$ . В частных случаях некоторые из них могут равняться нулю. Материальное уравнение (1.1.8) в этом случае имеет вид:

$$\vec{D} = \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1.4.2)$$

Проекции вектора  $\vec{D}$  на оси декартовой системы координат записываются в следующей форме:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Из (1.4.3) видно, что в анизотропной среде векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны друг другу.

В намагниченном феррите тензором является магнитная проницаемость. В общем случае в декартовой системе координат тензор магнитной проницаемости имеет вид, аналогичный (1.4.1), а материальное уравнение (1.1.10) записывается в форме:

$$\vec{B} = \|\mu\| \mu_0 \vec{H}. \quad (1.4.4)$$

Удельная проводимость  $\gamma$  также может быть величиной тензорной. Для таких сред закон Ома в дифференциальной форме принимает вид:

$$\vec{j} = \|\gamma\| \vec{E}. \quad (1.4.5)$$

Вообще говоря, даже изотропные среды могут быть достаточно сложными с электродинамической точки зрения. Например, материальные уравнения так называемой би-изотропной среды имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + (\chi - ik) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \quad (1.4.6)$$

$$\vec{B} = (\chi + ik) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{E} + \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (1.4.7)$$

Безразмерные коэффициенты  $\chi$  и  $k$  (комплексные или вещественные) в (1.4.6), (1.4.7) называются параметром Теллегена и параметром киральности, соответственно.

Как правило, би-изотропные среды, применяемые в радиодиапазоне, представляют собой специально изготовленные композиты. В зависимости от значений параметров  $k$  и  $\chi$  различают *киральные* среды и среды *Теллегена*. Киральная среда может быть изготовлена, например, путём включения в какой-либо однородный диэлектрик мелких по сравнению с длиной волны час-

тиц в виде металлических пружинок. Среду Теллегена можно изготовить, используя частицы, представляющие собой пары проволочных рамок и коротких прямолинейных проводников, перпендикулярных плоскостям этих рамок.

Сложные композиционные среды используются в качестве конструкционного материала при изготовлении некоторых элементов радиотехнических систем с целью получения требуемых характеристик.

### 1.5. Стационарное электромагнитное поле

Стационарными называются поля, не меняющиеся во времени. В этом случае уравнения Максвелла упрощаются, т.к.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{j}, & \nabla \times \vec{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

В отличие от общего случая, описываемого уравнениями (1.1.1)-(1.1.4), где существует взаимная связь между электрическим и магнитным полями через соответствующие производные по времени, стационарное магнитное поле не влияет на электрическое. Однако электрическое поле создаёт в проводящей среде в соответствии с законом Ома токи ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ), которые порождают магнитное поле. Если же токи отсутствуют (например, при  $\gamma=0$ ), то система уравнений (1.5.1) распадается на две совершенно независимые группы уравнений: левый столбец представляет уравнения магнитостатики для магнитных полей, а правый – уравнения электростатики для электрических полей.

### 1.6. Электростатическое поле

Рассмотрим более подробно правый столбец системы уравнений (1.5.1), что соответствует случаю электростатики. В интегральной форме уравнения правого столбца (1.5.1) имеют вид:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{и} \quad \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q, \quad (1.6.1)$$

где  $Q$  – полный заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности  $S$ .

#### 1.6.1. Электростатический потенциал

При решении задач электростатики удобно ввести скалярную функцию – электростатический потенциал  $\phi$ . Поскольку  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , электростатическое поле называют безвихревым или потенциальным. Как известно, ротор гради-

ента любой скалярной функции тождественно равен нулю, поэтому мы можем положить

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.6.2)$$

Знак “–” в этом соотношении свидетельствует о том, что за положительное направление вектора  $\vec{E}$  выбирается направление от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом. Соотношение (1.6.2) определяет функцию  $\varphi$  неоднозначно. Действительно, величина вектора  $\vec{E}$  не изменится, если вместо функции  $\varphi$  ввести функцию  $\varphi_1$ , отличающуюся от  $\varphi$  на произвольную постоянную. Как правило, при решении конкретных задач произвольную постоянную выбирают таким образом, чтобы потенциал в бесконечно удалённых точках равнялся нулю.

Выясним физический смысл электростатического потенциала. На точечный электрический заряд  $q$  в электростатическом поле действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

а работа, совершаемая при перемещении этого заряда по некоторому пути  $m$  или  $n$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  (Рис. 1.4), равна

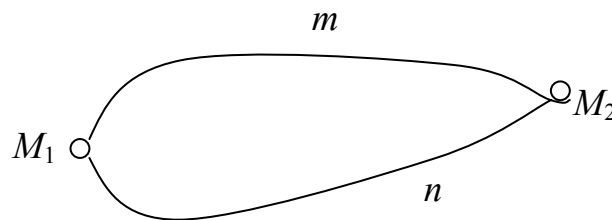


Рис. 1.4.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_{M_1}^{M_2} \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = -q \int_{M_1}^{M_2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right),$$

или 
$$A = -q \int_{M_1}^{M_2} d\varphi = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – электростатические потенциалы в точках  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно. Таким образом, получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.6.3)$$

Как видно из (1.6.3), значение интеграла не зависит от формы пути и равно разности потенциалов между точками  $M_1$  и  $M_2$ . Если путь замкнут (точки  $M_1$  и  $M_2$  совпадают), то  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ .

Пусть заряд перемещается из точки  $M_1$  в бесконечно удалённую точку. Полагая потенциал в бесконечно удалённой точке равным нулю, получаем

$$\varphi_1 = \int_{M_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.6.4)$$

Отсюда видно, что потенциал в точке  $M_1$  численно равен работе, которую электростатическое поле совершает для перемещения единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления электростатического потенциала.

1. Разность потенциалов в поле точечного заряда (Рис. 1.5).

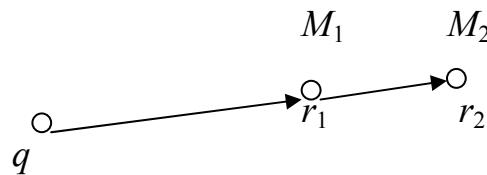


Рис. 1.5.

Разность потенциалов между точками  $M_1$  и  $M_2$  равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (1.6.5)$$

где  $\vec{E}$  - напряжённость поля, создаваемого зарядом  $q$ , которая в соответствии с (1.3.4) равна:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}.$$

После подстановки в (1.6.5) значения  $\vec{E}$  получим формулу для разности потенциалов между точками  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.6.6)$$

При  $r_2 \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$  (1.6.6) переходит в формулу для потенциала, создаваемого точечным зарядом на расстоянии  $r$ :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.6.7)$$

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал системы точечных зарядов в данной точке наблюдения определяется соотношением:

$$\varphi = \sum_{(i)} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}, \quad (1.6.8)$$

где  $r_i$  – расстояние от заряда  $q_i$  до точки наблюдения.

При непрерывном распределении зарядов с плотностью  $\rho(\vec{r})$  по объёму  $V$  потенциал в точке наблюдения находится по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV, \quad (1.6.9)$$

где  $\vec{r}$  - координаты точки интегрирования (источника),  $\vec{r}'$  - координаты точки наблюдения.

## 2. Потенциал электрического диполя.

Под электрическим диполем понимается система двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных на малом друг от друга расстоянии по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

Пусть заряды  $q$  и  $(-q)$  расположены на расстоянии  $dl$  друг от друга:

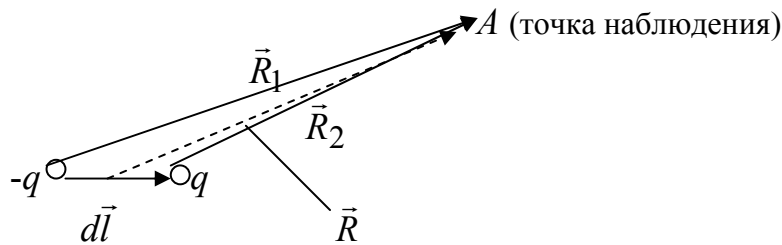


Рис. 1.6.

Потенциал диполя в точке наблюдения равен:

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

Поскольку  $dl \ll R$  и  $R_1 \approx R_2 \approx R$ , можно написать:  $R_1 - R_2 \cong \frac{d\vec{l} \cdot \vec{R}}{R}$  и

$$\varphi_A \cong \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3}, \quad (1.6.10)$$

где  $\vec{p} = qd\vec{l}$  - электрический момент диполя.

### 1.6.2. Уравнение для электростатического потенциала

Для того, чтобы найти уравнение, которому должен удовлетворять электростатический потенциал, подставим  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  в уравнение (1.1.3), тогда

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon}, \text{ или } \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon}. \quad (1.6.11)$$



Уравнение типа (1.6.11) называется уравнением Пуассона. Очевидно, что решением этого уравнения является интеграл (1.6.9). Положив в (1.6.11)  $\rho = 0$ , получаем уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (1.6.12)$$

которому удовлетворяет  $\varphi$  в областях, где отсутствуют заряды.

### 1.6.3. Энергия взаимодействия электрических зарядов

При перемещении зарядов силы электрического взаимодействия совершают работу  $A$ . Очевидно, что эта работа совершается за счёт уменьшения энергии, которой обладает система зарядов, т.е.

$$A = -dW. \quad (1.6.13)$$

Определим энергию взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстоянии  $R_{12}$  друг от друга. Предположим, что заряд  $q_2$  неподвижен, а  $q_1$  перемещается из точки  $P$  в точку  $P'$  в поле заряда  $q_2$ .

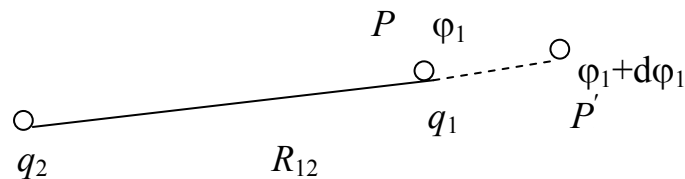


Рис. 1.7.

Потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке  $P$ , равен  $\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_{12}}$ , а работа по перемещению заряда  $q_1$  равна

$$A = -dW = -q_1 d\varphi_1.$$

Отсюда следует, что энергия взаимодействия зарядов запишется в форме:

$$W = q_1 \varphi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_{12}}. \quad (1.6.14)$$

К такому же выражению мы пришли бы, рассматривая движение заряда  $q_2$  в поле заряда  $q_1$ . Поэтому энергию взаимодействия удобно записать в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (1.6.15)$$

Если имеется система из  $n$  зарядов, то можно найти энергии взаимодействия всех зарядов попарно, т.е.

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}), \quad \dots W_{mi} = \frac{1}{2}(q_m \varphi_{mi} + q_i \varphi_{im}),$$

где  $\varphi_{mi}$  - потенциал, создаваемый  $i$ -ым зарядом в точке расположения  $m$ -ого заряда.

Взаимная энергия всей системы зарядов равна сумме энергий  $W_{mi}$ . Собирая все члены суммы, в которые множителем входит  $q_i$ , получаем значение коэффициента при  $q_i$ :

$$\frac{1}{2}\varphi_i = \frac{1}{2}(\varphi_{i1} + \varphi_{i2} + \dots + \varphi_{in}).$$

Итак, взаимная энергия системы  $n$  зарядов равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i. \quad (1.6.16)$$

Учитывая, что  $\varphi_i = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{ik}}$  ( $i \neq k$ ), ( $r_{ik}$  - расстояние между  $i$ -ым и  $k$ -ым зарядами), можем написать:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{ik}} \quad (i \neq k). \quad (1.6.17)$$

Полученные формулы справедливы лишь в случаях, когда расстояния между зарядами в системе много больше размеров самих зарядов. Чтобы освободиться от этого ограничения, надо перейти к рассмотрению объёмных зарядов, тогда:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (1.6.18)$$

Следует отметить, что формула (1.6.18) учитывает собственную энергию зарядов, находящихся в объёмах  $dV$ , в то время, как (1.6.16) не учитывает собственной энергии зарядов  $q_i$ .

В качестве примера определим энергию точечного заряда и диполя во внешнем поле.

1. *Энергия точечного заряда во внешнем поле.* Если один заряд перемещается в поле других неподвижных зарядов, то взаимная энергия всех внешних зарядов и их собственная энергия остаётся неизменной. Переменная часть энергии поля, за счёт которой совершается работа, называется энергией заряда  $q$  во внешнем поле:

$$W = q\varphi, \quad (1.6.19)$$

где  $\varphi$  - потенциал поля в точке расположения заряда  $q$ .

## 2. Энергия диполя во внешнем поле.

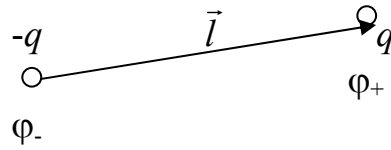


Рис.1.8.

Если  $\varphi_-$  и  $\varphi_+$  - потенциалы поля в точках расположения зарядов  $(-q)$  и  $q$ , соответственно, то энергия диполя равна:

$$W = q\varphi_+ + (-q)\varphi_-, \quad \text{но} \quad \varphi_+ \cong \varphi_- + \frac{\partial\varphi}{\partial l}l = \varphi_- + \vec{l} \cdot \nabla\varphi,$$

поэтому :

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad (1.6.20)$$

где  $\vec{p} = q\vec{l}$  - электрический момент диполя,  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ .

### 1.6.4. Энергия электрического поля

Соотношение (1.6.18) определяет энергию электростатического поля, создаваемого зарядами. Выразим эту энергию в другой форме. Для этого воспользуемся известным тождеством Грина:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + (\nabla\phi)(\nabla\psi)) dV = \oint_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS, \quad (1.6.21)$$

где  $\phi$  и  $\psi$  - функции координат, по крайней мере, дважды дифференцируемые;  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  - производная по нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объём  $V$ .

Положим в (1.6.21)  $\psi = \phi = \varphi$ , и учитывая, что  $\nabla\varphi = -\vec{E}$ , а  $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon}$ ,

получим:

$$\int_V \left(-\frac{\rho\varphi}{\epsilon_0\epsilon} + E^2\right) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (1.6.22)$$

Будем считать, что заряды расположены только в конечной области пространства внутри объёма  $V$  и не существует заряженных поверхностей в этом объёме. При этих условиях потенциал  $\varphi$  непрерывен, а градиент потенциала  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  не имеет поверхностей разрыва. Интеграл в правой части равенства (1.6.22) может быть распространён на поверхность  $S$ , радиус которой  $R \rightarrow \infty$ ;

при этом правая часть (1.6.22) стремится к нулю как  $1/R$  в силу того, что  $\varphi \sim 1/R$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \sim 1/R^2$ , а  $dS \sim R^2$ . Поэтому можем написать:

$$\int_V \left( -\frac{\rho \varphi}{\varepsilon_0 \varepsilon} + E^2 \right) dV = 0, \text{ или } \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV.$$

Учитывая (1.6.18), получаем:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \quad (1.6.23)$$

Это выражение определяет электрическую энергию в виде бесконечной суммы слагаемых  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV$  и относится к элементу объёма. Отсюда следует, что носителем энергии является электрическое поле. Величина  $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$  называется объёмной плотностью энергии.

### 1.6.5. Электрическое поле при наличии поляризующихся сред (диэлектриков)

Если внести в электрическое поле диэлектрик, последний поляризуется и создаёт собственное электрическое поле, которое, складываясь с внешним полем, изменяет его. Диэлектрики состоят либо из нейтральных молекул, либо из заряженных ионов, закреплённых в определённых положениях равновесия (например, в узлах кристаллической решётки). В дальнейшем мы будем предполагать, что диэлектрик состоит из нейтральных молекул, ибо основные положения излагаемой ниже теории применимы и к ионным кристаллическим и аморфным диэлектрикам, если под молекулой понимать элементарную ячейку кристалла.

Под воздействием внешнего электрического поля заряды противоположных знаков, входящие в состав молекул диэлектрика, смещаются в противоположные стороны, и молекула деформируется. Для учёта воздействия поля на диэлектрик вводится характеристика распределения зарядов в нейтральной молекуле – вектор электрического момента, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{R}_i, \quad (1.6.24)$$

где суммирование распространено на все заряды, входящие в состав электрически нейтральной системы, а  $\vec{R}_i$  – радиус-вектор, проведённый к заряду  $q_i$  из некоторой произвольной начальной точки  $O$ . При этом считается, что система в целом электрически нейтральна, т.е.

$$\sum_i q_i = 0. \quad (1.6.25)$$

Следует отметить, что при условии (1.6.25) электрический момент не зависит от выбора начальной точки  $O$ . Действительно, если переместить начало отсчёта из  $O$  в  $O'$  на произвольное расстояние  $\vec{a}$  (Рис.1.9),

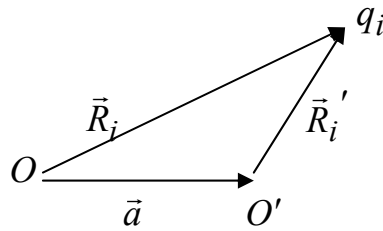


Рис. 1.9

то радиус-вектор  $\vec{R}_i'$  будет равен:  $\vec{R}_i' = \vec{R}_i - \vec{a}$  и

$\vec{p}' = \sum_i q_i \vec{R}_i' = \sum_i q_i \vec{R}_i - \vec{a} \sum_i q_i$ . Последнее слагаемое в силу (1.6.25) равно нулю, и поэтому  $\vec{p}' = \vec{p}$ .

Если система состоит из двух равных по величине, но противоположных по знаку зарядов, т.е. представляет собой диполь длиной  $\vec{l}$ , то  $\vec{p} = q\vec{l}$ .

*Потенциал электрически нейтральной системы зарядов.* Важность понятия электрического момента системы зарядов обусловлена тем, что потенциал, создаваемый произвольной, в целом электрически нейтральной системой зарядов момента  $\vec{p}$  на расстояниях, больших по сравнению с размерами этой системы, совпадает с потенциалом диполя того же момента. Покажем это.

Пусть расстояние от точки начала отсчёта  $O$  до точки наблюдения  $A$  много больше размеров системы (Рис. 1.10).

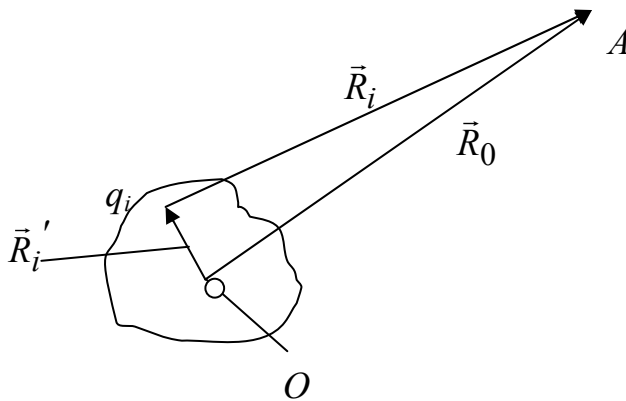


Рис. 1.10

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал системы зарядов в точке  $A$  равен:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}. \quad (1.6.26)$$

Выразим расстояние  $R_i$  через  $R_0$  и  $R_i'$ :  $\vec{R}_i = \vec{R}_0 - \vec{R}_i'$ ,

$$|R_i|^2 = R_0^2 - 2\vec{R}_0 \cdot \vec{R}_i' + R_i'^2, \quad R_i = R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{R}_i'}{R_0^2} + \left(\frac{R_i'}{R_0}\right)^2}.$$

Учитывая, что  $R_i' \ll R_0, R'$ , получаем:

$$R_i \approx R_0 \left(1 - \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{R}_i'}{R_0^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_i} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{R}_i'}{R_0^2}\right).$$

Теперь можем написать (1.6.26) в виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \sum_i q_i + \frac{\vec{R}_0}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \cdot \sum_i q_i \vec{R}_i'.$$

Поскольку рассматриваемая система в целом электрически нейтральна, то первое слагаемое равно нулю, а  $\sum_i q_i \vec{R}_i' = \vec{p}$ , тогда

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}_0}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}, \quad (1.6.27)$$

что полностью совпадает с (1.6.10) при  $\epsilon = 1$ .

*Энергия электрически нейтральной системы зарядов во внешнем поле.* В соответствии с (1.6.19) энергия системы зарядов во внешнем поле равна:

$$W = \sum_i q_i \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  – потенциал внешнего поля в точке расположения заряда  $q_i$ .

Если объём, занимаемый зарядами, мал, то потенциал  $\varphi_i$  можно выразить через потенциал в точке начала отсчёта  $\varphi_0$  как

$$\varphi_i \approx \varphi_0 + \nabla\varphi \cdot \vec{R}_i',$$

где  $\vec{R}_i'$  – радиус-вектор, проведённый из точки начала отсчёта в точку расположения заряда  $q_i$ .

Поскольку  $\nabla\varphi = -\vec{E}$ , то

$$W = \sum_i q_i (\varphi_0 - \vec{E} \cdot \vec{R}_i'), \quad \text{или} \quad W = -\vec{E} \cdot \sum_i q_i \vec{R}_i' = -\vec{E} \cdot \vec{p}.$$

Таким образом, энергия электрически нейтральной системы зарядов во внешнем поле равна энергии диполя с моментом  $\vec{p}$  (1.6.20).

Итак, электрически нейтральная система зарядов может рассматриваться как эквивалентный электрический диполь с моментом  $\vec{p}$ .

Электрический момент единицы объёма диэлектрика называется поляризацией диэлектрика  $\vec{P}$ . Если диэлектрик состоит из нейтральных молекул, то для определения поляризации надо просуммировать по всем зарядам, входящим в состав молекулы, а затем по всем молекулам, находящимся в единице объёма диэлектрика.

*Относительная диэлектрическая проницаемость.* При определении электрического поля в присутствии диэлектрика надо различать два вида зарядов: свободные и связанные.

Свободные заряды – это те заряды, которые могут перемещаться на макроскопические расстояния под действием внешнего поля (электроны в металлах и вакууме, ионы в газах и электролитах и т.д.), а также заряды, привнесённые на поверхность диэлектриков извне и нарушающие их электронейтральность.

Заряды, входящие в состав нейтральных молекул, и ионы, закреплённые в твёрдых диэлектриках вблизи положений равновесия, называются связанными.

Потенциал электрического поля  $\varphi$  при наличии диэлектрика равен сумме потенциалов  $\varphi_f$  и  $\varphi_b$ , создаваемых свободными и связанными зарядами, т.е.

$$\varphi = \varphi_f + \varphi_b. \quad (1.6.28)$$

Потенциал свободных зарядов равен:

$$\varphi_f = \int_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r} dV + \int_S \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 r} dS, \quad (1.6.29)$$

где  $\rho$  и  $\sigma$  - объёмная и поверхностная плотности зарядов.

Потенциал связанных зарядов может быть записан в соответствии с (1.6.27) в виде:

$$\varphi_b = \int_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV. \quad (1.6.30)$$

Учитывая, что  $\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{r}\right)$ , где индекс  $q$  означает дифференцирование по координатам точки источника (интегрирования), и используя известное векторное соотношение  $\vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \left(\vec{P} \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} (\nabla \cdot \vec{P})$ , перепишем (1.6.30) в виде:

$$\varphi_b = \int_V \frac{\nabla \cdot (\vec{P}/r)}{4\pi\epsilon_0} dV - \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (1.6.31)$$

С помощью формулы Остроградского-Гаусса первый интеграл может быть преобразован в поверхностный:

$$\int_V \frac{\nabla \cdot (\vec{P}/r)}{4\pi\epsilon_0} dV = \oint_{S+s_i} \frac{P_n}{4\pi\epsilon_0 r} dS,$$

который распространён на внешнюю поверхность рассматриваемого объёма  $S$  и по поверхностям  $s_i$  разрыва непрерывности вектора  $\vec{P}$ .

Интеграл по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объём, равен нулю в силу непрерывности на ней вектора  $\vec{P}$ .

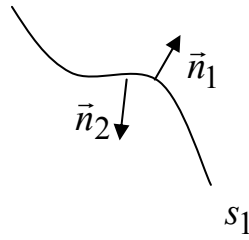


Рис. 1.11

Интеграл по поверхности  $s_1$  (Рис.1.11) разрыва вектора  $\vec{P}$  равен:

$$\int_{s_1} \frac{P_{1n} - P_{2n}}{4\pi\epsilon_0 r} ds,$$

где  $P_{1n}$  и  $P_{2n}$  - нормальные к поверхности  $s_1$  компоненты вектора  $\vec{P}$  с противоположных её сторон.

Введём теперь обозначения:

$$-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_b \quad \text{и} \quad P_{1n} - P_{2n} = \sigma_b,$$

где  $\rho_b$  и  $\sigma_b$  имеют смысл объёмной и поверхностной плотностей связанных зарядов, соответственно. Тогда потенциал  $\varphi$  может быть записан в виде:

$$\varphi = \int_V \frac{(\rho + \rho_b)}{4\pi\epsilon_0 r} dV + \int_S \frac{(\sigma + \sigma_b)}{4\pi\epsilon_0 r} dS. \quad (1.6.32)$$

Таким образом, потенциал электрического поля при наличии диэлектрика определяется теми же формулами, что и в случае вакуума, если вместо  $\rho$  и  $\sigma$  подставить  $\rho + \rho_b$  и  $\sigma + \sigma_b$ . Уравнение Пуассона (1.6.11) примет вид:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho + \rho_b}{\epsilon_0}, \quad \text{а поскольку } \nabla \varphi = -\vec{E}, \quad \text{то } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}, \quad \text{или}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (1.6.33)$$

Уравнение (1.6.33) справедливо для электростатического поля в любой среде. Как показывает эксперимент, при реальных напряжённостях поля поляризация изотропного диэлектрика  $\vec{P}$  пропорциональна  $\vec{E}$ , т.е.

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

Тогда  $\nabla \cdot (1 + \alpha)\epsilon_0 \vec{E} = \rho$ , или  $\nabla \cdot \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \rho$ . Коэффициент  $\alpha$  называется поляризуемостью диэлектрика,  $\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость, а  $\epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \vec{D}$  - вектор электрической индукции.

Как отмечено выше, относительная диэлектрическая проницаемость в общем случае может быть тензорной величиной с комплексными коэффициентами.



## 1.7. Стационарное магнитное поле

Магнитное поле называется стационарным, если оно не зависит от времени и создаётся постоянным током. В этом случае уравнения Максвелла записываются в виде левого столбца системы (1.5.1).

Между проводниками, по которым текут токи, возникают механические силы взаимодействия, зависящие от величины этих токов и их взаимного расположения. Как и в электростатике, для удобства описания взаимодействия токов вводится понятие поля сил в пространстве, окружающем проводник с током. Поскольку поля сил токов схожи с полями, создаваемыми постоянными магнитами, их принято называть магнитными полями.

Задача определения сил взаимодействия токов разбивается, обычно на два этапа:

- 1) определение магнитного поля, создаваемого заданным током,
- 2) определение сил, действующих в заданном магнитном поле на помещённый в него ток.

Магнитное поле может быть полностью определено вектором напряжённости  $\vec{H}$ . Как показывает опыт, сила, действующая на элемент тока  $I d\vec{l}$ , равна

$$d\vec{F} = I\mu_0\mu(d\vec{l} \times \vec{H}). \quad (1.7.1)$$

На электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила:

$$\vec{F} = q\mu_0\mu(\vec{v} \times \vec{H}). \quad (1.7.2)$$

Напряжённость магнитного поля, создаваемого элементом тока, определяется из закона Био-Савара (Рис.1.12.)

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi R^3}(d\vec{l} \times \vec{R}) \quad (1.7.3)$$

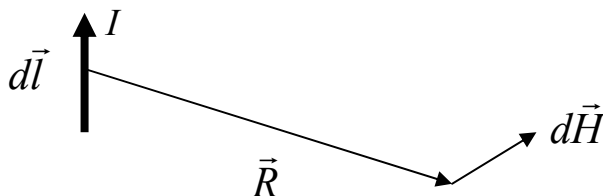


Рис. 1.12

Напряжённость поля замкнутого тока выражается интегралом

$$\vec{H} = \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi R^3}, \quad (1.7.4)$$

а токов, распределённых по объёму, интегралом

$$\vec{H} = \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{4\pi R^3} dV. \quad (1.7.5)$$

Линии постоянных токов должны быть замкнуты, либо уходить в бесконечность, поскольку  $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , а для полей, не зависящих от времени

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ и } \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

### 1.7.1. Векторный потенциал магнитного поля постоянных токов

Для удобства расчёта стационарных магнитных полей обычно вводят вспомогательную векторную функцию – векторный потенциал  $\vec{A}$ . Из закона Био-Савара следует:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{4\pi R^3} dV, \quad (1.7.6)$$

где интегрирование ведётся по объёму с заданной плотностью тока. Подынтегральное выражение в (1.7.5) можно записать в виде:

$$\frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} = \vec{j} \times \left(-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right), \quad (1.7.7)$$

где дифференцирование ведётся по координатам точки наблюдения.

Воспользуемся известным векторным соотношением

$$\nabla \times \left(\frac{1}{R} \vec{j}\right) = \frac{1}{R} \nabla \times \vec{j} - \vec{j} \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right).$$

Первое слагаемое правой части этого соотношения равно нулю, так как дифференцирование ведётся по координатам точки наблюдения, а плотность тока  $\vec{j}$  является функцией координат рассматриваемого объёма, поэтому

$$\frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} = -\left[\vec{j} \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right] = \nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{R}\right). \quad (1.7.8)$$

Теперь (1.7.5) можно записать в форме:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) dV = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV,$$

или  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$  (1.7.9)

$$\text{где } \vec{A} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV. \quad (1.7.10)$$

Векторная функция  $\vec{A}$  называется векторным потенциалом. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \mu \vec{j}. \quad (1.7.11)$$

Действительно, на основании соотношения (1.1.10), уравнения Максвелла (1.5.1) и соотношений (1.7.8), (1.7.9) можно написать:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \mu \vec{j}, \text{ или } \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \mu \vec{j}.$$

Векторный потенциал определяет вектор  $\vec{B}$  однозначно, если наложить на  $\vec{A}$  некоторое условие, например,  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , что приводит к уравнению (1.7.11).

### 1.7.2. Намагничивающиеся среды. Относительная магнитная проницаемость

Ранее мы ввели в рассмотрение безразмерную величину  $\mu$  - относительную магнитную проницаемость, которая связана с магнитными свойствами сред.

Как известно, внесение поляризующихся сред (диэлектриков) в электрическое поле вызывает изменение этого поля, обусловленное поляризацией диэлектрика. При внесении намагничивающихся сред (магнетиков) в магнитное поле наблюдается похожее явление, заключающееся в изменении внешнего магнитного поля вследствие намагничивания магнетика.

Поле намагниченных магнетиков, как и всякое магнитное поле, создаётся циркулирующими в них электрическими токами. Наряду с обычными токами проводимости, обусловленными движением свободных электронов, внутри отдельных молекул или ионов магнетика происходит движение электронов, соответствующее некоторым токам. Если магнетик не намагничен, то эти токи распределены хаотично. Такие токи называются молекулярными. Среднее магнитное поле хаотично распределённых молекулярных токов равно нулю. Если же магнетик намагничен, то молекулярные токи упорядочены и создают магнитное поле.

Замкнутые молекулярные токи подобно малым рамкам с током создают магнитные моменты  $\vec{m}$ ,

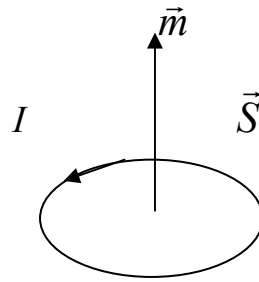


Рис. 1.13

$\vec{m} = I\vec{S}$ , где  $I$  – ток рамки,  $\vec{S}$  - направленный элемент площади рамки, перпендикулярный ей.

Намагниченность среды характеризуется вектором намагниченности  $\vec{M}$ , который определяется как предел отношения суммарного магнитного момента вещества в объёме  $\Delta V$  к величине этого объёма при  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} \text{ при } \Delta V \rightarrow 0.$$

Обычно вместо вектора  $\vec{M}$  вводят вектор напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$ , связанный с  $\vec{M}$  соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \text{ где } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (1.7.12)$$

При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор  $\vec{M}$  пропорционален вектору  $\vec{B}$ , а следовательно,

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (1.7.13)$$

Безразмерный коэффициент  $\chi_m$  называется магнитной восприимчивостью среды. У диамагнитных сред параметр  $\chi_m$  отрицателен, у парамагнитных и ферромагнитных – положителен. Подставив (1.7.13) в (1.7.12), получим

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}, \quad (1.7.14)$$

где  $1 + \chi_m = \mu$  - относительная магнитная проницаемость.

Отличие  $\mu$  от единицы в немагнитных материалах (диамагнетиках и парамагнетиках) крайне невелико (порядка  $10^{-5}$ ) и в большинстве случаев в расчёт не принимается.

Следует отметить, что среды, обладающие магнитной анизотропией (например, намагниченные ферриты), имеют тензорную магнитную проницаемость.

## 1.8. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Чтобы система уравнений Максвелла (1.1.1) – (1.1.4) была полной, т.е. чтобы она давала возможность однозначно определить напряжённости полей при заданных начальных условиях (например, при  $t=0$ ) необходимо дополнить эту систему граничными условиями, которым должны удовлетворять составляющие векторов поля на поверхностях разрыва их непрерывности.

Рассмотрим поверхности, на которых плотности зарядов и токов имеют особенности (т.е. испытывают скачки или обращаются в бесконечность). Вообще говоря, на особых поверхностях, где параметры сред  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  (или по крайней мере один из них) меняются скачкообразно, уравнения Максвелла в дифференциальной форме неприменимы, поскольку производные от  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут не иметь смысла. В этом случае для решения электродинамической задачи следует исходить из интегральной формы уравнений Максвелла.

Приступая к рассмотрению граничных условий, введём поверхностные плотности зарядов и токов посредством следующей процедуры. Рассмотрим некий малый объём  $\Delta V = \Delta S \Delta l$  (Рис.1.14), внутри которого сосредоточен заряд  $\Delta Q = \rho \Delta V$ , где  $\rho$  - объёмная плотность заряда, которая может считаться постоянной в пределах рассматриваемого объёма.

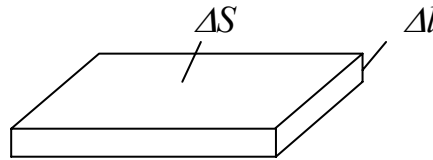


Рис. 1.14

Если  $\Delta l \rightarrow 0$  при неизменном заряде  $\Delta Q$ , то объёмная плотность заряда  $\rho$  должна стремиться к бесконечности. Чтобы в этом случае оперировать с ограниченными величинами, вводится поверхностная плотность заряда  $\sigma$ . Поскольку  $\Delta Q = \rho \Delta l \Delta S$ , то при  $\Delta l \rightarrow 0$  можно обозначить

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} (\rho \Delta l) = \sigma, \quad (1.8.1)$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда, ограниченная величина, измеряемая в  $\text{Кул}/\text{м}^2$ .

Аналогично вводится и поверхностная плотность тока  $\vec{j}_s$ , измеряемая в  $\text{А}/\text{м}^2$

$$\vec{j}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (\vec{j} \Delta l) \quad (1.8.2)$$

### 1.8.1. Нормальные составляющие поля

На плоской границе раздела сред построим малый цилиндр, пронизывающий эту границу (Рис. 1.15). Размеры цилиндра настолько малы, что внутри него величины и направления полей в каждой из сред можно считать неизменными. На поверхности  $S$  в бесконечно тонком слое может, в общем случае, находиться поверхностный заряд с плотностью  $\sigma$ .

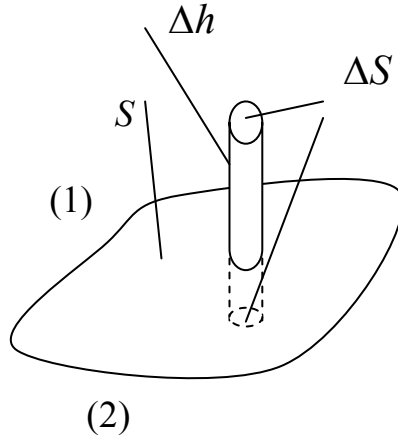


Рис. 1.15

Воспользуемся уравнением Максвелла в интегральной форме (1.3.3)

$$\oint_{S_i} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \rho \Delta h \Delta S$$

где  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности рассматриваемого цилиндра. Интегрирование ведётся по поверхности цилиндра  $S_i$ . Поскольку поля внутри цилиндра в каждой из сред неизменны, то можно вместо (1.3.3) написать

$$D_{n2} \Delta S - D_{n1} \Delta S + \text{поток вектора } \vec{D} \text{ через боковую поверхность цилиндра} = \rho \Delta h \Delta S,$$

где  $D_{n2}$  и  $D_{n1}$  - нормальные составляющие вектора  $\vec{D}$  в нижней (2) и верхней (1) среде, соответственно.

Пусть теперь  $\Delta h \rightarrow 0$ , тогда поток вектора  $\vec{D}$  через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а  $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \Delta h) = \sigma$ , поэтому нормальные компоненты

вектора  $\vec{D}$  на границе раздела сред претерпевают разрыв, равный поверхностной плотности заряда, т.е.

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (1.8.3)$$

Применив аналогичную процедуру к уравнению Максвелла (1.1.4), записанному в интегральной форме  $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$ , получим

$$B_{n2} - B_{n1} = 0, \quad (1.8.4)$$

т.е. нормальные компоненты вектора  $\vec{B}$  непрерывны на границе раздела сред.

По поводу граничного условия (1.8.3) следует сделать одно замечание. Поверхностный заряд может образоваться на поверхности проводников в электростатическом поле. В переменном электромагнитном поле такие заряды возникают лишь на поверхностях идеальных проводников. Поэтому при рассмотрении реальных сред в переменных полях нормальная составляющая вектора электрической индукции непрерывна на границе раздела.

### 1.8.2. Касательные составляющие поля

Для получения условий, которым должны удовлетворять касательные компоненты полей на границе раздела сред, рассмотрим малый контур  $C$ , плоскость которого перпендикулярна поверхности  $S$ , разделяющей среды (1) и (2) (Рис. 1.16).

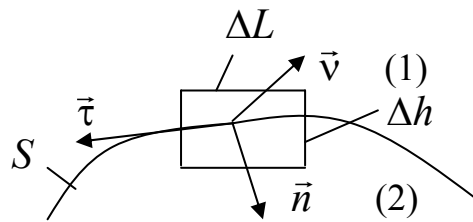


Рис. 1.16

Введём следующие единичные векторы:

$\vec{\tau}$ , касательный к плоскости контура,  $\vec{v}$ , нормальный к плоскости контура и  $\vec{n}$ , нормальный к границе раздела сред. Применив уравнение (1.3.1) к контуру  $C$ , получим

$$H_{\tau 1} \Delta L - H_{\tau 2} \Delta L + \text{циркуляция вектора } \vec{H} \text{ по боковым сторонам контура} = \frac{\partial D_v}{\partial t} \Delta L \Delta h + j_v \Delta L \Delta h. \quad (1.8.5)$$

Положим теперь  $\Delta h \rightarrow 0$ , тогда третье слагаемое левой части и первое слагаемое правой части (1.8.5) будут равны нулю. Приняв во внимание, что  $\lim(j_v \Delta h) = j_s$  при  $\Delta h \rightarrow 0$ , окончательно получаем

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = j_S. \quad (1.8.6)$$

Поскольку плотность поверхностного тока  $j_S$  отлична от нуля лишь на поверхности идеальных проводников, то касательная составляющая вектора  $\vec{H}$  непрерывна на границе любых реальных сред.

После применения аналогичной процедуры к уравнению (1.3.2) получим граничное условие для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$ :

$$E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0. \quad (1.8.7)$$

### 1.9. Уравнение баланса энергии поля (теорема Пойнтинга)

Одной из важнейших теорем теории электромагнетизма является теорема о балансе энергии электромагнитного поля. Эта теорема следует непосредственно из уравнений Максвелла. Умножим уравнения (1.1.1) и (1.1.2) скалярно соответственно на  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{j}, \quad (1.9.1)$$

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.9.2)$$

и вычтем (1.9.2) из (1.9.1), тогда

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{j},$$

или

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (1.9.3)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (1.9.3) по некоторому объёму  $V$ , включающему источники поля,

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H})_n = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV, \quad (1.9.4)$$

где  $S$  – поверхность, ограничивающая объём  $V$ ,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Первое слагаемое правой части (1.9.4) представляет собой изменение электромагнитной энергии  $\left( -\frac{dW}{dt} \right)$  в объёме, второе – энергию  $P$ , затрачиваемую электромагнитным полем на ускорение зарядов в этом объёме в единицу времени. Интеграл в левой части, распространённый на поверхность  $S$ ,



равен энергии, излучаемой в единицу времени из рассматриваемого объёма. Соотношение (1.9.4) обычно записывается в форме:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H})_n dS + P. \quad (1.9.5)$$

Уравнение (1.9.5) является математической формулировкой теоремы Пойнтинга о балансе энергии электромагнитного поля. Вектор  $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$  называют вектором Пойнтинга. Очевидно, что он представляет собой плотность потока излучаемой из объёма энергии.

## 1.10. Теорема единственности решения краевых задач электродинамики

Поскольку уравнения Максвелла являются дифференциальными уравнениями в частных производных, то они допускают множество решений. Содержанием теоремы единственности является формулировка минимального числа дополнительных условий, при которых задачи электродинамики решаются единственным образом, и доказательство единственности решения при этих условиях. Различают две задачи электродинамики – внешнюю и внутреннюю. Приведём доказательство теоремы для внутренней задачи.

Пусть область пространства, в которой ищется решение, ограничена изнутри поверхностью  $S_a$ , а извне – поверхностью  $S_b$  ( $S_a$  может отсутствовать, возможно также несколько внутренних границ).

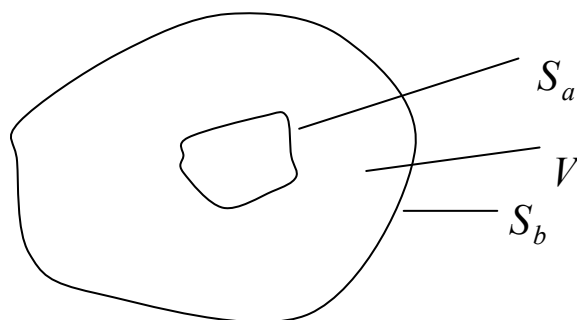


Рис. 1.17

Внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

1. заданы начальные условия, т.е. известны все векторы поля в какой-либо момент времени (например, при  $t=t_0$ ),
2. на граничной поверхности  $S_b$  задана касательная составляющая вектора  $\vec{E}$ , или касательная составляющая вектора  $\vec{H}$ , или на части поверхности задана касательная составляющая  $\vec{E}$ , а на остальной части поверхности – касательная составляющая  $\vec{H}$ .

Целью задачи является нахождение всех векторов поля  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  в объёме  $V$ .

Доказательство этой теоремы будем проводить методом от противного. Пусть задача имеет два решения:  $\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2$ . Поскольку уравнения Максвелла линейны, разность этих двух решений также должна быть их решением. Обозначим

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \vec{e}, \quad \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \vec{h}, \quad \vec{D}_1 - \vec{D}_2 = \vec{d}, \quad \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \vec{b}, \quad (1.10.1)$$

и применим к векторам, представляющим разность решений, теорему Пойнтинга

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\vec{e} \cdot \vec{d} + \vec{h} \cdot \vec{b}}{2} dV = \oint_{S_b} (\vec{e} \times \vec{h})_n dS + \int_V \vec{j} \cdot \vec{e} dV. \quad (1.10.2)$$

Очевидно, что интеграл в левой части уравнения (1.10.2) всегда положителен, поскольку подынтегральная функция представляет собой сумму квадратов полей  $e^2$  и  $h^2$ . Второй интеграл в правой части, равный мощности потерь в объёме, также положителен. Первый интеграл в правой части равен нулю, так как произведение  $(\vec{e} \times \vec{h})_n$  определяется касательными компонентами векторов  $e_\tau$  и  $h_\tau$ , но по условию теоремы на поверхности  $S_b$  либо  $e_\tau$ , либо  $h_\tau$  равны нулю (либо  $E_\tau$ , либо  $H_\tau$  однозначно заданы на  $S_b$ ). Для того, чтобы левая часть (1.10.2) была положительна, необходимо уменьшение интеграла с ростом времени. Однако, в силу заданных начальных условий  $\vec{e}, \vec{h}, \vec{b}$  и  $\vec{d}$  равны нулю при  $t = t_0$ , поэтому равенство (1.10.2) выполняется лишь при  $\vec{e} = \vec{h} = \vec{b} = \vec{d} = 0$ . Таким образом, теорема доказана.

Для внешней задачи электродинамики теорема доказывается аналогично.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ

### 2.1. Электродинамические потенциалы.

#### Волновое уравнение.

Рассмотрим некоторые методы подхода к решению прямых задач электродинамики. В этих задачах требуется найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам.

Прежде всего, получим уравнения для каждого из векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по отдельности. Умножим все члены первого уравнения Максвелла на  $\epsilon^{-1}$ , а второе – на  $\mu^{-1}$  и применим к векторам операцию  $\text{rot}$  (т.е.  $\nabla \times \vec{g}$ ):

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \varepsilon^{-1} \vec{j},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

Заменим  $\nabla \times \vec{E}$  и  $\nabla \times \vec{H}$  в правых частях уравнений выражениями, вытекающими из первых двух уравнений Максвелла. В результате получим

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \varepsilon^{-1} \vec{j},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

где обозначено  $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ . Правые части этих уравнений в общем случае нельзя рассматривать как известные. Для идеального диэлектрика, когда  $\sigma = 0$ ,  $\vec{j} = \vec{j}^S$  и правые части определяются заданными источниками. Если среда однородна

( $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ), уравнения могут быть записаны в виде

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \nabla \rho + \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Здесь использовано тождество

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

и учтено также, что  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / (\varepsilon_0 \varepsilon)$ . Если  $\vec{j} = \vec{j}^S$ , то  $\rho = \rho^S$ , причем эти величины связаны законом сохранения заряда.

Таким образом, для каждого из векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  получено уравнение второго порядка. Уравнения с левыми частями такого вида называются уравнениями Даламбера. Уравнения позволяют найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам. Однако из-за сложности правых частей эти уравнения оказываются неудобными для решения задачи. Обычно их используют в тех случаях, когда в рассматриваемой области нет сторонних источников, т.е. когда они являются однородными. Такие уравнения называются волновыми.

В общем случае решение задачи существенно упрощается, если предварительно определить некоторые вспомогательные функции, которые принято называть электродинамическими потенциалами. Их можно ввести различным образом в зависимости от специфических особенностей анализируемой задачи, однако, принцип их построения один и тот же.

Так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю ( $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ ), то из уравнения  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  следует, что вектор  $\vec{B}$  можно представить в виде ротора некоторого вектора  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ,  $\vec{A}$  - векторный потенциал. При известном векторе  $\vec{A}$  вектор  $\vec{B}$  определяется однозначно. Однако в определении вектора  $\vec{A}$  по заданному вектору  $\vec{B}$  существует некоторый произвол. Если вместо вектора  $\vec{A}$  взять вектор  $\vec{A}_1 = \vec{A} + \nabla \psi$ , то значение вектора  $\vec{B}$  не изменится, так как  $\nabla \cdot \nabla \psi = 0$ . Таким образом, вектор  $\vec{A}$  определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \vec{A}.$$

Подстановка этого выражения  $\vec{H}$  во второе уравнение Максвелла приводит к равенству  $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ . Векторная функция, стоящая в скобках, является потенциальной. Приравняв эту функцию величине  $-\nabla \phi$ , получаем

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

Таким образом, векторы, характеризующие электромагнитное поле, выражаются через две функции: векторный потенциал  $\vec{A}$  и скалярный потенциал  $\phi$ . Остается найти уравнения, которым они удовлетворяют.

Заменим в первом уравнении Максвелла напряженности поля их выражениями через потенциалы. Для однородной среды получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_0 \mu \vec{j}$$

При помощи векторного тождества  $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$ , введем оператор Лапласа. Это дает

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left( \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \right) - \mu_0 \mu \vec{j}$$

Упростим это уравнение. Уже отмечалось, что вектор  $\vec{A}$  определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор удовлетворял добавочному условию. Потребуем, чтобы  $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ . Это уравнение называют условием калибровки

(или калибровкой Лоренца). При этом для потенциала  $\vec{A}$  получаем векторное уравнение Даламбера

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \vec{j} \quad (2.1.2)$$

Аналогичное уравнение получаем для скалярного потенциала  $\phi$ . Подставив в третье уравнение Максвелла выражение вектора  $\vec{E}$  через потенциалы и, используя условие калибровки, приходим к уравнению

$$\nabla^2 \phi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (2.1.3)$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы, как и векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , удовлетворяют неоднородным уравнениям Даламбера. Однако правые части уравнений для потенциалов имеют более простой вид. Скалярный потенциал  $\phi$  зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал  $\vec{A}$  - от распределения токов проводимости.

## 2.2. Простейшее решение волнового уравнения. Плоские волны.

Предположим, что в рассматриваемой области пространства сторонние силы не действуют. Если при этом найдено физически осмысленное решение уравнений поля, то оно выражает свободное электромагнитное поле, т.е. поле, не обязанное своим происхождением процессу преобразования какого-либо вида энергии в электромагнитную. В отсутствие сторонних источников любая декартова компонента векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Рассмотрим его решение, зависящее только от одной координаты  $z$  и времени  $t$ . Для  $u = u(z, t)$  справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ или } \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(z, t) = 0,$$

в котором оператор Даламбера записан в виде произведения двух сомножителей. Введем новые переменные  $\xi = z - vt$ ;  $\eta = z + vt$ , так, что обратное

преобразование даст  $z = \frac{\xi + \eta}{2}$ ,  $t = \frac{\eta - \xi}{2v}$ . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t}$$

В результате волновое уравнение в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Проинтегрируем уравнение по переменной  $\xi$ :  $\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} = F(\eta)$ . Интегрируя еще раз по переменной  $\eta$ , находим  $u(\xi, \eta) = g(\eta) + h(\xi)$ . Здесь  $\frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} = F(\eta)$ ,  $h(\xi)$  играет роль постоянной интегрирования по  $\eta$ , которая может зависеть от второй переменной как от параметра. Вид функций  $g$  и  $h$  не определяется из решения уравнения, а устанавливается путем задания начальных условий.

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$u(z, t) = g(z + vt) + h(z - vt), \quad (2.2.1)$$

т.е. решение уравнения представляет собой наложение двух возмущений, каждое из которых распространяется вдоль  $z$  в сторону возрастания или убывания  $z$  со скоростью  $v$

$$u(z, t) = u^+(t - z/v) + u^-(t + z/v), \quad (2.2.2)$$

$u^\pm$  - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Это математическое описание некоторого волнового процесса. При распространении волны среда вовлекается в физический процесс, в результате чего происходит передача энергии в пространстве. Пусть физический процесс в точке  $M(\vec{r}_1)$  характеризует функция  $u(\vec{r}_1, t) = f(t)$ . В другой точке  $P(\vec{r}_2)$  процесс не наблюдается, т.е.  $u = 0$ , пока он не передан средой. Потом  $u(\vec{r}_2, t) = f_1(t)$ . В простейшем случае в точке  $P$  обнаружится лишь запаздывание, т.е.  $f_1(t) = f(t - \tau)$ , где  $\tau$  - время прохождения пути  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = l$  со скоростью  $v$ .

Если изменения в пространстве происходят только в направлении  $z$ , то процесс характеризуется волной  $u(z, t) = f(t - z/v)$ . При  $z = 0$   $u(0, t) = f(t)$ , при  $z = l$   $u(l, t) = f(t - l/v) = u(0, t - l/v)$  - временная зависимость, отличающаяся только сдвигом. Рассмотренный волновой процесс – бегущая плоская однородная волна в среде, которая ее не деформирует (в любой точке плоскости  $z = \text{const}$  процесс описывается этой функцией). Считая  $v$  положительной величиной, для волны, движущейся в направлении, противоположном  $z$ , надо заменить аргумент  $u(z, t) = f(t + z/v)$ . Итак, общее решение волнового уравнения можно представить в виде наложения прямой и обратной волн.

Определим взаимную ориентацию векторов  $\vec{E}, \vec{H}$  в плоской волне. Для векторного потенциала  $\vec{A}$  справедливо волновое уравнение. Для описания поля в отсутствие зарядов можно выбрать такую калибровку потенциалов, при которой  $\varphi = 0$  тождественно, а также  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . При этом, полагая  $\vec{A} = \vec{A}(z, t)$ ,

получаем  $\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ . Поскольку  $z$  входит в аргумент  $\vec{A}$  в линейных комбинациях  $(z \pm vt)$ , последнее равенство дает  $A_z = \text{const}(z, t)$ . Следовательно

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0, \quad H_z = \frac{1}{\mu_0 \mu} (\nabla \times \vec{A})_z = 0.$$

Проекции напряженностей поля на направление распространения отсутствуют – плоские электромагнитные волны поперечны.

Далее предположим, что волна бежит в одну сторону  $\vec{A}(z, t) = \vec{A}(z - vt)$ . При этом

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( -\vec{x}_0 \frac{\partial A_y}{\partial z} + \vec{y}_0 \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{z}_0 \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \vec{z}_0 \times \vec{E} \end{aligned}$$

В плоской волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно ортогональны и ортогональны направлению распространения.

### 2.3. Сферические волны.

При наличии сферической симметрии решение волнового уравнения можно получить в виде сферических волн. Предположим, что поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат. Величина этого заряда меняется со временем  $q=q(t)$ . В любой точке, кроме начала координат, потенциал  $\phi$  удовлетворяет однородному уравнению Даламбера. Вне области, занятой источником, волновое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Если искать решение в виде  $\phi(r, t) = \psi(r, t)/r$ , то новая функция  $\psi(r, t)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

решение которого уже известно. Оно имеет вид

$$\psi(r, t) = \psi^+(t - r/v) + \psi^-(t + r/v).$$

Таким образом

$$\varphi(r, t) = \frac{\psi^+(t - r/v)}{r} + \frac{\psi^-(t + r/v)}{r}. \quad (2.3.1)$$

Первое слагаемое описывает расходящуюся сферическую волну, распространяющуюся из начала координат со скоростью  $v$ . Ее амплитуда убывает, как  $r^{-1}$ , в силу того, что заданный поток энергии распределяется на все большую площадь. Второе слагаемое описывает волну, испущенную на бесконечности и сходящуюся к центру. Функции, описывающие волновые процессы, всегда содержат множители вида  $f(t \pm r/v)$ , характер зависимости которых от расстояния вдоль направления распространения волны в фиксированный момент времени повторяет характер их зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

Если источник сосредоточен в конечной области, то сходящаяся сферическая волна может возникнуть только в результате отражения расходящейся сферической волны. В однородном пространстве отраженной волны быть не может. Поэтому надо считать  $\psi^-(t + r/v) = 0$ . При этом потенциал точечного заряда

$$\varphi(r, t) = \frac{\psi^+(t - r/v)}{r}.$$

Очевидно, значение потенциала  $\varphi$  должно быть связано с интенсивностью источников поля. Последнее выражение должно быть справедливо при любом законе изменения функции  $q(t)$ . В статическом случае, если поле создается точечным неподвижным зарядом постоянной величины  $q = \text{const}(t)$ , расположенным в начале координат, потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема  $dV$  с плотностью  $\rho$ , то формулу следует переписать

$$\varphi = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0\epsilon R},$$

где  $R$  – расстояние от элемента  $dV$  до точки наблюдения.

Можно записать выражение для потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов в объеме  $V$ . В соответствии с принципом суперпозиции

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV.$$

Если источник меняется во времени  $q = q(t)$ , естественно предположить

$$\psi^+(t - r/v) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} q(t - r/v).$$



Тогда  $\varphi = \frac{q(t - r/v)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ .

При этом скалярный потенциал, обусловленный произвольным распределением зарядов в объеме

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho(r', t - R/v)}{R} dV, R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (2.3.2)$$

$x', y', z'$  - декартовы координаты элемента  $dV$ ,  $x, y, z$  - координаты точки наблюдения.

Это частное решение неоднородного уравнения Даламбера.

Аналогичное решение можно записать и для уравнения для векторного потенциала  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(r', t - R/v)}{R} dV \quad (2.3.3)$$

Таким образом, для вычисления потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$  в произвольной точке пространства в момент времени  $t$  нужно брать значения токов и зарядов в каждом элементе  $dV$  в более ранний момент  $t' = t - R/v$ , определяемый расстоянием  $R$  от элемента  $dV$  до точки наблюдения, т.е. влияние источников электромагнитного поля сказывается не мгновенно. Требуется время  $\Delta t = R/v$ , за которое электромагнитные колебания, вызванные зарядами и токами в элементе  $dV$ , успевают распространиться от  $dV$  до точки наблюдения. Такие  $\varphi$  и  $\vec{A}$  называют запаздывающими потенциалами.

## 2.4. Монохроматические волны

До сих пор мы не конкретизировали зависимость от времени электромагнитных процессов, описываемых уравнениями Максвелла. Рассмотрим один частный, но наиболее важный случай гармонической зависимости полей от времени, что соответствует одночастотному режиму. Важность отдельного рассмотрения гармонического режима связана со следующими обстоятельствами. Во-первых, большинство излучающих устройств создают поля, зависимость которых от  $t$  близка к гармонической, что определяется собственно свойствами колебательных систем. Во-вторых, почти любой процесс с произвольной зависимостью от времени может быть представлен в виде интеграла или ряда Фурье, т.е. в виде суперпозиции гармонических колебаний. В-третьих, при рассмотрении гармонических процессов существует возможность исключить из уравнений время и тем существенно их упростить. Речь идёт о применении метода комплексных амплитуд, уже известного из теории электрических цепей.

Следуя методу комплексных амплитуд, запишем векторы электромагнитного поля и плотности тока в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad , \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{D}(x, y, z, t) &= \vec{D}_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad , \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad , \\ \vec{j}(x, y, z, t) &= \vec{j}_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad ,\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

где  $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{D}_0, \vec{B}_0, \vec{j}_0$  - комплексные векторы, являющиеся комплексными амплитудами,  $\omega$  - круговая частота гармонического процесса. Комплексные векторы - это векторы, компоненты которых могут быть комплексными величинами. Например, комплексный вектор  $\vec{A}$  может быть представлен в виде комбинации двух вещественных векторов  $\vec{A}_r$  и  $\vec{A}_i$ , т.е.

$$\vec{A} = \vec{A}_r + i\vec{A}_i$$

Более подробные сведения о комплексных векторах можно найти в Приложении.

В дальнейшем, где это не будет вызывать недоразумений, индекс «0» в записи комплексных амплитуд мы будем опускать.

С учётом (2.4.1) уравнения Максвелла (1.1) и (1.2) для комплексных амплитуд можно записать в форме:

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\vec{D} + \vec{j}, \quad (2.4.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} \quad (2.4.3)$$

Плотность тока  $\vec{j}$ , входящая в уравнение (2.4.2), представляет собою сумму плотности тока, связанного с проводимостью среды  $\sigma$ , и тока сторонних источников, не зависящих от полей в рассматриваемом объёме, т.е.

$$\vec{j} = \vec{j}_\sigma + \vec{j}^{стор}, \quad (2.4.4)$$

где  $\vec{j}_\sigma = \sigma\vec{E}$ .

Подставив (2.4.4) в (2.4.2), получим

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\vec{E} + \vec{j}^{стор} \quad (2.4.5)$$

Величина

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon - i60\lambda\sigma, \quad (2.4.6)$$

где  $\lambda$  - длина волны в вакууме, имеет смысл комплексной диэлектрической проницаемости среды. Здесь учтено, что  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$  и  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ . Следу-

ет отметить, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ , как и магнитная проницаемость  $\mu$ , может быть сама величиной комплексной, что определяет потери электромагнитной энергии, не связанные с токами проводимости.

Уравнения Максвелла (2.4.2) и (2.4.3) содержат шесть функций координат - шесть компонент полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Решение этих уравнений почти всегда требует сведения их к другим уравнениям, содержащим меньшее число неизвестных функций. Для этого обычно используют электродинамические потенциалы, введённые в разделе 2.1. Однако, в некоторых случаях целесообразно исключить из уравнений одно из полей и перейти к уравнению второго порядка, содержащему либо  $\vec{E}$ , либо  $\vec{H}$ .

Рассмотрим решение уравнений (2.4.2), (2.4.3) для однородной среды, свободной от источников. Поскольку в этом случае  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $j = \rho = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , то, применив к уравнениям Максвелла операцию rot, можно прийти к волновым уравнениям для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (2.4.7)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (2.4.8)$$

где  $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon\mu}$  - волновое число,  $\lambda$  - длина волны в вакууме.

Каждое из уравнений (2.4.7) и (2.4.8) соответствует трём скалярным уравнениям для компонент векторов в декартовой системе координат. Для составляющей  $E_x$  можно написать:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \quad (2.4.9)$$

Вообще говоря, решение уравнения (7.9) можно записать, используя решение (5.2) одномерного волнового уравнения. Однако, мы применим здесь метод разделения переменных, который будет полезен в дальнейшем. Поскольку  $E_x$  является функцией координат  $x, y, z$ , её удобно представить в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, т.е.

$$E_x(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.4.10)$$

Подставив (2.4.10) в уравнение (2.4.9) и разделив все члены на  $X(x)Y(y)Z(z)$ , получим:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (2.4.11)$$

Слагаемое  $k^2$  не зависит от координат, а каждое из первых трёх слагаемых зависит лишь от одной координаты. Поскольку (2.4.11) должно выполняться при любых  $x, y, z$ , то следует положить:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2,$$

где  $k_x, k_y, k_z$  - некоторые постоянные, причём  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ .

Таким образом, получаем три уравнения второго порядка для определения функций  $X(x), Y(y), Z(z)$ :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$

Решения этих уравнений могут быть записаны в виде:

$$X(x) = A_1 e^{-ik_x x}, \quad Y(y) = A_2 e^{-ik_y y}, \quad Z(z) = A_3 e^{-ik_z z} \quad \text{И}$$

$$E_x = E_{mx} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}},$$

где  $\vec{k} = \vec{x}_0 k_x + \vec{y}_0 k_y + \vec{z}_0 k_z$  - волновой вектор,  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $E_{mx} = A_1 A_2 A_3$  - величина, не зависящая от координат.

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для других составляющих вектора  $\vec{E}$ . Таким образом,

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.12)$$

где  $\vec{E}_m$  – постоянный вектор.

Для напряжённости магнитного поля из уравнения (2.4.8) получаем:

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.13)$$

Если среда не имеет потерь, т.е.  $\epsilon$  и  $\mu$  - вещественные величины, а  $\vec{k}$  - вещественный вектор, соотношения (2.4.12) и (2.4.13) описывают волну, распространяющуюся в направлении вектора  $\vec{k}$ , причём  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  остаются постоянными. Поверхность равных фаз этой волны описывается уравнением  $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const}$ , которое является уравнением плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{k}$ . Такая волна называется однородной плоской волной.

Для определения связи между векторами  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  воспользуемся уравнением (2.4.3):

$$\vec{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \nabla \times (\vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})$$

Используя известное векторное в направлении  $\vec{k}$ ,  $\eta = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  - волновое сопротивление среды соотношение  $\nabla \times (\vec{A}\varphi) = \varphi \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \varphi$ , где  $\vec{A}$  - произвольный вектор, а  $\varphi$  - скалярная функция, получим:

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \vec{k}_0 \times \vec{E}, \quad (2.4.14)$$

где  $\vec{k}_0$  - единичный вектор.

Отсюда следует, что  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны. Поскольку в рассматриваемом случае  $\nabla \cdot (\vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = 0$ , то  $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$  и, следовательно,  $\vec{E}$  перпендикулярно  $\vec{k}$ .

Очевидно, что  $\vec{H}$  также перпендикулярно  $\vec{k}$ . Таким образом, плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , перпендикулярна направлению распространения волны.

Мгновенные значения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  можно записать в виде:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad \vec{H}(t) = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

т.е. полная фаза колебания равна  $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ , а фазовая скорость  $v_\phi$  определяется дифференцированием по времени при  $\phi = \text{const}$ , т.е.

$$\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi = \omega$$

(2.4.15)

Если фазовая скорость отсчитывается в направлении распространения волны  $\vec{k}_0$ , то  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  ( $c$  - скорость света в вакууме). По существу, фазовая скорость - чисто геометрическое понятие, зависящее от того, в каком направлении она отсчитывается. Предположим, что направление отсчёта фазовой скорости составляет угол  $\beta$  с направлением  $\vec{k}$ , тогда  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu} \cos\beta}$ , т.е. фазовая скорость может быть больше скорости света в вакууме.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси  $Z$ , т.е.  $\vec{k} = \vec{z}_0 k$ , тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут иметь  $x$ - и  $y$ -компоненты. Представим  $\vec{E}$  в виде:

$$\vec{E} = (\vec{x}_0 \dot{E}_{mx} + \vec{y}_0 \dot{E}_{my}) e^{-ikz}$$

(2.4.16)

Поскольку  $\vec{E}$  - комплексный вектор, его компоненты  $\dot{E}_{mx}$  и  $\dot{E}_{my}$  являются комплексными величинами, т.е.  $\dot{E}_{mx} = E_{mx} e^{i\varphi_x}$ ,  $\dot{E}_{my} = E_{my} e^{i\varphi_y}$ . Если  $\varphi_x = \varphi_y$ , то ориентация вектора  $\vec{E}$  не меняется во времени. Волна поляризована в плоскости, составляющей угол  $\theta = \arctg\left(\frac{E_{my}}{E_{mx}}\right)$  с плоскостью  $XOZ$  (рис.2.1). Это случай *линейной* поляризации.

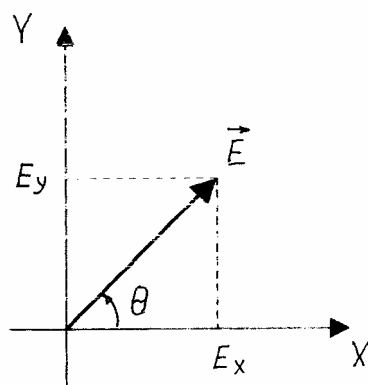


Рис.2.1

В общем случае, когда  $\varphi_x \neq \varphi_y$ ,  $E_{mx} \neq E_{my}$ , волна имеет *эллиптическую* поляризацию. При этом вектор  $\vec{E}$ , вращаясь в плоскости  $z = \text{const}$ , изменяет свою длину так, что его конец описывает эллипс (рис.2.2).

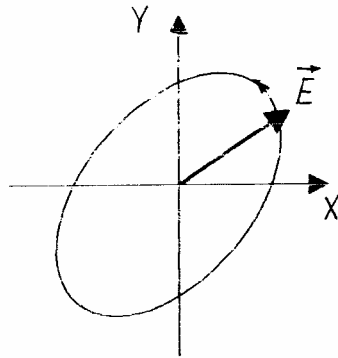


Рис.2.2

В частном случае, когда  $E_{mx} = E_{my}$  и  $\varphi_x - \varphi_y = \pm 90^0$ , конец вектора  $\vec{E}$  описывает при своём вращении окружность (рис.2.3). Такая поляризация называется *круговой*.

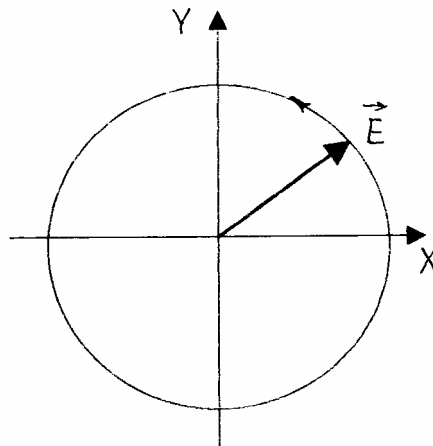


Рис. 2.3

Следует заметить, что идеально плоских волн в природе не существует. Однако, введение плоских волн существенно упрощает решение многих электродинамических задач.

## 2.5. Отражение и преломление волн на границе раздела сред

В предыдущих разделах рассматривалось распространение электромагнитных волн в однородных изотропных средах. Однако, как правило, распространение электромагнитных волн происходит в присутствии каких-либо объектов или границ раздела сред, обладающих различными свойствами. При сложной форме границы раздела определение результирующего поля сопряжено с большими математическими трудностями. Мы ограничимся рассмотрением простейшей задачи падения плоской электромагнитной волны на плоскую бесконечно протяжённую границу раздела двух однородных изотропных сред.

Пусть плоская волна падает на границу раздела двух полубесконечных сред, параметры которых  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$  соответственно. Введём прямоугольную систему координат  $x, y, z$  так, чтобы плоскость  $XOY$  совпадала с поверхностью раздела, а плоскость падения – с плоскостью  $YOZ$  (рис.2.4).

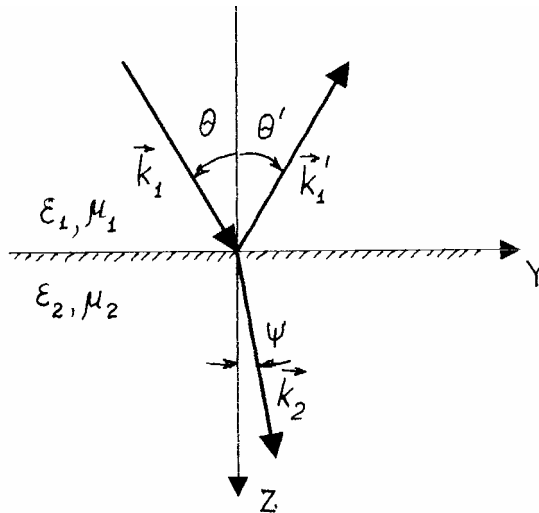


Рис.2.4

Здесь и в дальнейшем под плоскостью падения будем понимать плоскость, проходящую через нормаль к поверхности раздела сред параллельно направлению распространения волны. Рассмотрим отдельно случаи нормального и наклонного падения волны.

### *Нормальное падение*

Нормальное падение соответствует случаю, когда угол  $\theta$ , а, следовательно, и углы  $\theta'$  и  $\psi$  равны нулю. В верхнем полупространстве ( $z < 0$ ) введём в рассмотрение две волны: падающую и отражённую, а в нижнем ( $z > 0$ ) – прошедшую волну. Не нарушая общности рассмотрения, будем считать векторы  $\vec{E}$  всех волн ориентированными по оси  $x$ :



$$\begin{aligned}\vec{E}^i &= \bar{x}_0 A e^{-ik_1 z}, \vec{H}^i = \bar{y}_0 \frac{A}{\eta_1} e^{-ik_1 z} - \text{поле падающей волны,} \\ \vec{E}^r &= \bar{x}_0 B e^{ik_1 z}, \vec{H}^r = -\bar{y}_0 \frac{B}{\eta_1} e^{ik_1 z} - \text{поле отражённой волны,} \\ \vec{E}^t &= \bar{x}_0 C e^{-ik_2 z}, \vec{H}^t = \bar{y}_0 \frac{C}{\eta_2} e^{-ik_2 z} - \text{поле прошедшей волны,}\end{aligned}$$

где  $k_1$  и  $k_2$  - волновые числа в верхней и нижней среде, соответственно,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  - волновые сопротивления сред. Если поле падающей волны задано, неизвестные  $B$  и  $C$  находятся из условия равенства касательных составляющих напряжённостей электрического и магнитного полей на границе раздела ( $z=0$ ), т.е.

$$A + B = C, \quad \frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2} \quad (2.5.1)$$

Введём коэффициенты отражения и прохождения посредством соотношений:

$$R = \frac{B}{A}, \quad T = \frac{C}{A} \quad (2.5.2)$$

С учётом (2.5.1) можно записать:

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.5.3)$$

Следует отметить, что коэффициент отражения  $R$  и коэффициент прохождения  $T$  могут быть комплексными величинами в случае комплексных  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

Итак, задача решена: теперь на основании (2.5.2) и (2.5.3) для всякого заданного  $A$  можно выразить полное электромагнитное поле в обеих средах. Проанализируем полученный результат. Если  $\eta_1 = \eta_2$ ,  $R = 0$ , и волна полностью проходит во вторую среду. Это случай *согласования сред*. *Полное отражение* ( $|R| = 1$ ) имеет место, когда либо  $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 0$ , либо  $\frac{\eta_2}{\eta_1} = 0$ .

Напряжённости электрического и магнитного полей в среде 1 равны сумме напряжённостей полей падающей и отражённой волн:

$$\vec{E}_1 = \bar{x}_0 A e^{-ik_1 z} (1 + \text{Re}^{2ik_1 z}), \vec{H}_1 = \bar{y}_0 \frac{A}{\eta_1} e^{-ik_1 z} (1 - \text{Re}^{2ik_1 z}) \quad (2.5.4)$$

Из (2.5.4) видно, что период пространственного распределения полей (расстояние между двумя соседними максимумами либо минимумами) равен  $\Delta z = \frac{\lambda_1}{2}$  ( $\lambda_1$ -длина волны в среде 1). Напряжённости поля принимают максимальные значения, которые в  $1 + |R|$  раз превышают напряжённости поля падающей волны, минимальные значения в  $1 - |R|$  раз ниже, чем в падающей волне.

### *Наклонное падение*

Пусть теперь угол  $\theta \neq 0$ . Напряжённости электрического поля падающей, отражённой и прошедшей волн могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}^i &= \vec{A}e^{-ik_1(y \sin \theta + z \cos \theta)}, \\ \vec{E}^r &= \vec{B}e^{-ik_1(y \sin \theta' - z \cos \theta')}, \\ \vec{E}^t &= \vec{C}e^{-ik_2(y \sin \psi + z \cos \psi)}\end{aligned}\quad (2.5.5)$$

Здесь учтено, что волновые векторы отражённой и прошедшей волн лежат в плоскости  $YOZ$ , поскольку волновой вектор падающей волны лежит в этой плоскости; в противном случае поля отражённой и прошедшей волн зависели бы от координаты  $x$ , а поле падающей волны от  $x$  не зависит, что привело бы к нарушению условий на границе раздела.

Из (2.5.5) следует, что граничные условия при  $z=0$  выполняются при любых значениях  $y$ , если

$$k_1 \sin \theta = k_1 \sin \theta' = k_2 \sin \psi \quad (2.5.6)$$

Отсюда видно, что  $\theta = \theta'$ , т.е. угол падения равен углу отражения. Это *первый закон Снеллиуса*. Кроме того,

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (2.5.7)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  - показатели преломления первой и второй сред, соответственно. Соотношение (2.5.7) выражает *второй закон Снеллиуса*. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из этого закона:

1. Пусть первая среда является оптически более плотной, т.е.  $n_1 > n_2$ . В этом случае угол преломления  $\psi$  больше угла падения  $\theta$ . Очевидно, что при  $\theta$ , превышающих некоторое критическое значение  $\theta_{кр}$ , преломлённая волна будет отсутствовать (т.к.  $\sin \psi$  не может быть больше единицы). Это явление называется *полным внутренним отражением*.

2. Если среды таковы, что  $n_2 \gg n_1$ , то  $\sin \psi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \ll 1$ . Это значит, что при

любом угле падения преломлённая волна распространяется по направлению, близкому к нормали.

3. Пусть волна из среды без потерь падает на границу раздела с поглощающей средой ( $k_1$  - величина вещественная, а  $k_2$  - комплексная). В этом случае

$\frac{k_1}{k_2}$  - комплексное число, а поскольку  $k_2 \sin \psi = k_1 \sin \theta$ , то

$k_2 \sin \psi = \alpha_y$  - величина вещественная, но  $k_2 \cos \psi$  должно быть комплексным числом. Действительно, обозначив  $k_2 = k_2' - ik_2''$  ( $k_2', k_2''$  - вещественны), находим

$$k_2 \cos \psi = k_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{[(k_2')^2 - (k_2'')^2 - 2ik_2'k_2'' - k_1^2 \sin^2 \theta]} = \alpha_z - i\beta, \text{ т.е.}$$

комплексное число. Теперь прошедшую волну (8.5) можно записать в форме:

$$\vec{E}^t = \vec{C} e^{-i(\alpha_y y + \alpha_z z)} e^{-\beta z}, \quad \beta > 0$$

(2.5.8)

Из соотношения (2.5.8) следует, что уравнение поверхности равных фаз волны в нижней поглощающей среде имеет вид:

$$\alpha_y y + \alpha_z z = \text{const},$$

а уравнение поверхности равных амплитуд:  $z = \text{const}$ .

Оба уравнения являются уравнениями несовпадающих плоскостей (рис.2.5). Рассматривая поверхность равных фаз как фронт волны, приходим к выводу, что волна является *неоднородной*, т.е. её амплитуда не остаётся постоянной в плоскости фронта, а экспоненциально уменьшается по мере углубления по нормали к границе раздела сред.

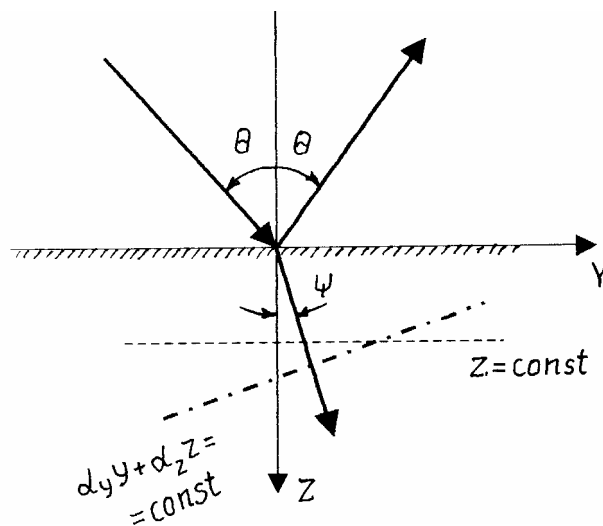


Рис.2.5

Получим теперь соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты отражения и прохождения волны при наклонном падении. Очевидно, что эти коэффициенты должны зависеть от параметров сред  $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ , от поляризации и угла падения волны на границу раздела. Поскольку произвольно поляризованная электромагнитная волна может быть представлена в виде двух ортогонально поляризованных волн, распространяющихся в одном направлении, рассмотрим отдельно случаи параллельной и перпендикулярной поляризации. Под параллельно поляризованной волной будем понимать волну, вектор  $\vec{E}$  которой параллелен плоскости падения. У перпендикулярно поляризованной волны вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости падения.

Параллельная поляризация (рис.2.6).

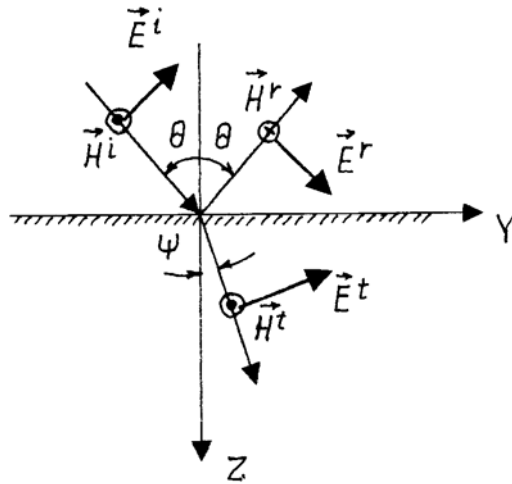


Рис.2.6

Для определения коэффициентов  $A, B, C$  в (2.5.5) используем условия равенства касательных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела ( $z = 0$ ):

$$A \cos \theta + B \cos \theta = C \cos \psi,$$

$$\frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2}. \quad (2.5.9)$$

Здесь учтено, что векторы напряжённости электрического поля имеют касательные составляющие, параллельные оси  $Y$ , а векторы напряжённости магнитного поля параллельны оси  $X$ .

Введя коэффициенты отражения и прохождения посредством (2.5.3), на основании (2.5.9) получим:

$$R_{//} = \frac{\eta_2 \cos \psi - \eta_1 \cos \theta}{\eta_2 \cos \psi + \eta_1 \cos \theta}, \quad T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta}{\eta_2 \cos \psi + \eta_1 \cos \theta} \quad (2.5.10)$$

Пусть магнитные проницаемости обеих сред одинаковы, т.е.  $\mu_1 = \mu_2$ , тогда используя соотношение, вытекающее из второго закона Снеллиуса (2.5.7),

$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta}$ , получаем:

$$R_{//} = - \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta}} \quad (2.5.11)$$

Следует отметить, что при угле падения волны  $\theta_B$ , удовлетворяющем соотношению  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_B}$ , или  $\cos \theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}}$ , коэффициент отражения  $R_{//}$  равен нулю. В этом случае отражение отсутствует, и волна полностью проходит во вторую среду. Угол  $\theta_B$  обычно называют углом Брюстера.

*Перпендикулярная поляризация (рис.2.7).*

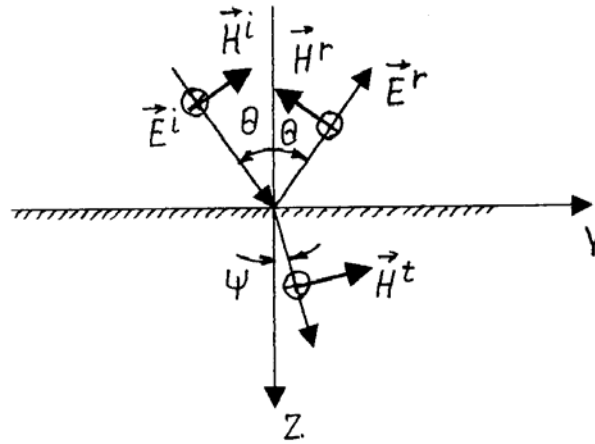


Рис.2.7.

Как следует из рисунка, граничные условия при  $z=0$  имеют вид:

$$A + B = C \quad \text{и} \quad \frac{A}{\eta_1} \cos \theta - \frac{B}{\eta_1} \cos \theta = \frac{C}{\eta_2} \cos \psi.$$

Поэтому коэффициенты отражения и прохождения принимают иной по сравнению с (2.5.10) вид:

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta - \eta_1 \cos \psi}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \psi}, \quad T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \psi} \quad (2.5.12)$$

Если среды немагнитные или  $\mu_1 = \mu_2$ , то из (2.5.12) следует:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta}} \quad (2.5.13)$$

Из соотношения (2.5.13) видно, что для немагнитных сред при  $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$  не существует угла падения  $\theta$ , при котором коэффициент отражения  $R_{\perp}$  равен нулю.

В заключение заметим, что соотношения (2.5.10) - (2.5.13) часто называют коэффициентами Френеля.

## 2.6. О комплексных векторах

Во многих приложениях электродинамики чаще всего рассматривают электромагнитные процессы, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, что соответствует одночастотному режиму. В этом случае источники порождают токи, заряды и поля, периоды колебаний которых совпадают. Для описания таких процессов обычно вводят комплексные векторы, что существенно упрощает запись уравнений и анализ их решений.

Комплексные векторы – это векторы, компоненты которых могут быть комплексными величинами. Они были введены Гиббсом одновременно с алгеброй вещественных векторов в начале 1880-х годов. Гиббс назвал эти векторы «бивекторами». Комплексные векторы были удобны в оптике при анализе распространения волн в кристаллах.

Вектор гармонического поля  $\vec{A}(t)$  есть некоторая функция времени, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{A}(t) + \omega^2 \vec{A}(t) = 0$$

(2.6.1)

Общее решение этого уравнения может быть выражено двумя не зависящими от времени векторами  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ :

$$\vec{A}(t) = \vec{A}_1 \cos \omega t + \vec{A}_2 \sin \omega t$$

(2.6.2)

Введём комплексный вектор  $\vec{a}$ , представимый в виде комбинации двух вещественных векторов  $\vec{a}_r$  и  $\vec{a}_i$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_r + i\vec{a}_i$$

(2.6.3)

Очевидно, что между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{A}(t)$  может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Действительно,

$$\vec{A}(t) = \text{Re} \{ \vec{a} e^{i\omega t} \} = \vec{a}_r \cos \omega t - \vec{a}_i \sin \omega t,$$

(2.6.4)

и

$$\vec{a} = \vec{A}(0) - i\vec{A}(\pi/2\omega) = \vec{A}_1 - i\vec{A}_2,$$

(2.6.5)

т. е.  $\vec{a}_r = \vec{A}_1$  и  $\vec{a}_i = -\vec{A}_2$ . Если подставить (2.6.4) в (2.6.5), то получим  $\vec{a} = \vec{a}_r + i\vec{a}_i$ , т.е. (2.6.3).

Введение комплексных векторов позволяет избежать операций с тригонометрическими функциями и упростить запись уравнений для векторов электромагнитного поля.

Вектор  $\vec{A}(t) = \vec{A}_1 \cos \omega t + \vec{A}_2 \sin \omega t$  описывает эллипс в пространстве; причём в зависимости от  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  эллипс может вырождаться либо в линию, либо в окружность. Это видно из следующего:

1. Если  $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = 0$ , то векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  либо параллельны, либо один из них равен нулю. Следовательно, конец вектора  $\vec{A}(t)$  движется вдоль линии (рис.2.8,а), что соответствует *линейной поляризации*, когда речь идёт о векторах электромагнитного поля.
2. Пусть  $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \neq 0$ . В этом случае оба вектора лежат в плоскости, в которой вектор  $\vec{A}(t)$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Действительно, введя вспомогательные векторы  $\vec{b} = \vec{A}_1 \times (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)$  и  $\vec{c} = \vec{A}_2 \times (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)$ , можно получить соотношение:

$$(\vec{b} \cdot \vec{A}(t))^2 + (\vec{c} \cdot \vec{A}(t))^2 = (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)^4 - 2A_1^2 A_2^2 (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)^2 + A_1^4 A_2^4 = |\vec{A}_1 \times \vec{A}_2|^4$$

которое является уравнением второго порядка относительно  $\vec{A}(t)$ . Очевидно, что решение этого уравнения конечно при всех  $t$ , и траектория, описываемая вектором  $\vec{A}(t)$  при вращении, есть эллипс (рис.2.8,б). В этом случае говорят об *эллиптической поляризации*.

3. Если скалярное произведение

$$\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t) = A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \sin^2 \omega t + \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 \cos 2\omega t$$

постоянно при всех  $t$ , то, полагая  $t = 0$  и  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , получаем  $A_1^2 = A_2^2$  и  $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = 0$ . Это соответствует *круговой поляризации* (рис.2.8,с).

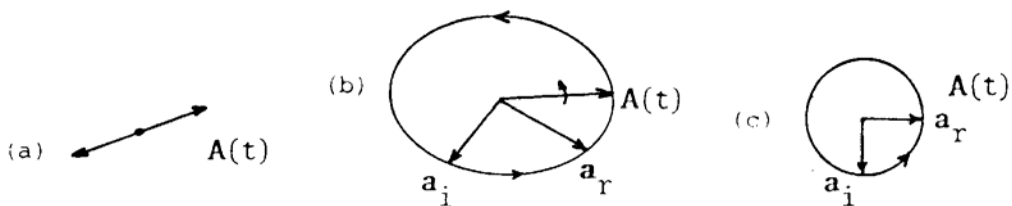


Рис.2.8.

Отметим, что большинство правил операций над вещественными векторами справедливы и для алгебры комплексных векторов.

## 2.7. Распространение электромагнитных волн в плазме. Частотная

## дисперсия. Фазовая и групповая скорости распространения.

Плазма представляет собой ионизированный газ. Для того, чтобы исследовать особенности распространения электромагнитных волн в плазме, прежде всего определим её эквивалентную диэлектрическую проницаемость.

### 2.7.1. Диэлектрическая проницаемость плазмы.

Плотность тока, индуцированного электромагнитным полем в среде, складывается из двух составляющих: тока проводимости и тока смещения

$$\vec{j} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{см}.$$

При гармонической зависимости поля от времени вида  $e^{i\omega t}$  плотность полного тока в среде может быть записана в форме

$$\vec{j} = (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon)\vec{E}, \quad (2.7.1)$$

где  $\sigma$  - удельная проводимость среды.

Плотность тока проводимости в плазме определяется средней скоростью движения электронов  $\vec{v}$  под действием внешнего электромагнитного поля

$$\vec{j}_{np} = Ne\vec{v}. \quad (2.7.2)$$

Средняя скорость движения электронов может быть определена из уравнения движения электрона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu m\vec{v} = e\vec{E} + e\mu_0(\vec{v} \times \vec{H}), \quad (2.7.3)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $\nu$  - число соударений электрона с тяжёлыми частицами плазмы,  $m$  – масса электрона.

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.7.3) есть сила Лоренца, действующая на электрон, обязанная своим происхождением магнитному полю волны. Нетрудно показать, что вторым слагаемым правой части можно пренебречь, поскольку оно много меньше первого слагаемого. Поэтому напомним

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu m\vec{v} = e\vec{E}. \quad (2.7.4)$$

Поскольку  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ , то решение уравнения (2.7.4) естественно искать в виде  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$ , поэтому вместо (2.7.4) имеем

$$i\omega m\vec{v} + \nu m\vec{v} = e\vec{E},$$

откуда

$$\vec{v} = \frac{e\nu}{m(\nu^2 + \omega^2)}\vec{E} - i\omega\frac{e}{m(\nu^2 + \omega^2)}\vec{E}. \quad (2.7.5)$$



С учётом (2.7.2) и того, что плотность тока смещения равна  $\vec{j}_{см} = i\omega\varepsilon_0\vec{E}$ , получим

$$\vec{j} = \frac{Ne^2\nu}{m(\nu^2 + \omega^2)}\vec{E} + i\omega\varepsilon_0\left(1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0m(\nu^2 + \omega^2)}\right)\vec{E}. \quad (2.7.6)$$

Из сопоставления (2.7.6) и (2.7.1) следует, что эквивалентная проводимость плазмы и диэлектрическая проницаемость равны

$$\sigma = \frac{Ne^2\nu}{m(\nu^2 + \omega^2)}, \quad (2.7.7)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0m(\nu^2 + \omega^2)}. \quad (2.7.8)$$

Поскольку в радиодиапазоне  $\nu \ll \omega$ , то

$$\varepsilon \cong 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0m\omega^2}. \quad (2.7.9)$$

Таким образом, показатель преломления плазмы  $n = \sqrt{\varepsilon}$  зависит от концентрации электронов  $N$  и частоты распространяющейся в ней волны  $\omega$ . Среды, показатель преломления которых зависит от частоты волны, называются частотно диспергирующими.

### 2.7.2. Частотная дисперсия. Фазовая и групповая скорости распространения.

Рассмотрим распространение в плазме амплитудно-модулированного сигнала с несущей частотой  $\omega_0$  и модулирующей частотой  $\Omega$ :

$$E = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = A \cos \omega_0 t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

( $m$  – глубина модуляции).

Введём обозначения  $\omega_0 + \Omega = \omega_1$ ,  $\omega_0 - \Omega = \omega_2$ . Очевидно, что при  $t=0$  амплитуда сигнала будет максимальной  $E_{\max} = A(1 + m)$ , а общим условием максимума амплитуды сигнала в пространстве является равенство фаз волн частот  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . (В диспергирующих средах (например, в плазме) волны разных частот распространяются с разными фазовыми скоростями  $\nu$ ).

$$A \cos \left[ \omega_0 \left( t - \frac{r}{\nu_0} \right) \right], \frac{Am}{2} \cos \left[ \omega_1 \left( t - \frac{r}{\nu_1} \right) \right], \frac{Am}{2} \cos \left[ \omega_2 \left( t - \frac{r}{\nu_2} \right) \right],$$

где  $r$  – расстояние вдоль направления распространения волн.

Пусть  $t_0$  – время, соответствующее максимуму амплитуды сигнала, тогда

$$\omega_0 \left( t_0 - \frac{r}{v_0} \right) = \omega_1 \left( t_0 - \frac{r}{v_1} \right) = \omega_2 \left( t_0 - \frac{r}{v_2} \right). \quad (2.7.10)$$

Из (2.7.10) следует

$$t_0 = \frac{r \left( \frac{\omega_1}{v_1} - \frac{\omega_0}{v_0} \right)}{\omega_1 - \omega_0} = \frac{r \left( \frac{\omega_0}{v_0} - \frac{\omega_2}{v_2} \right)}{\omega_0 - \omega_2}.$$

Фазовая  $v$  и групповая  $u$  скорости распространения электромагнитных волн определяются соотношениями

$$v = \frac{c}{n}, \quad (c - \text{скорость света в вакууме}), \quad u = \frac{r}{t_0}. \quad (2.7.11)$$

После подстановки в (2.7.11) значений  $t_0$  и  $v$  получаем

$$u = c \frac{\omega_1 - \omega_0}{n_1 \omega_1 - n_0 \omega_0} = c \frac{\omega_0 - \omega_2}{n_0 \omega_0 - n_2 \omega_2}. \quad (2.7.12)$$

Групповая скорость определяется для некоторого диапазона частот. Запишем (2.7.12) в виде

$$u = c \frac{d\omega_0}{d(n_0 \omega_0)} = c \frac{1}{\frac{d}{d\omega_0}(n_0 \omega_0)} = c \frac{1}{n_0 + \omega_0 \frac{dn_0}{d\omega_0}}. \quad (2.7.13)$$

С учётом того, что  $n_0 = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}}$ , из (2.7.13) получаем

$$u = cn_0. \quad (2.7.14)$$

Таким образом, групповая скорость распространения электромагнитных волн в плазме, как и следовало ожидать, меньше скорости света, т.к.  $n < 1$ . Произведение  $uv$  равно квадрату скорости света, т.е.

$$uv = c^2. \quad (2.7.15)$$

## 2.8. Распространение волн в гиротропных средах

Среды, у которых магнитная или диэлектрическая проницаемость описывается несимметричным тензором, называются гиротропными. Примерами гиротропных сред являются намагниченная плазма и намагниченные ферриты. Получим выражение для тензора диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы.

### 2.8.1. Тензор диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы.

Уравнение движения электрона в намагниченной плазме под действием электрического поля волны и внешнего постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$  имеет вид (при зависимости поля волны от времени вида  $e^{i\omega t}$ ):

$$i\omega m\vec{v} + \nu m\vec{v} = e\vec{E} + e\mu_0(\vec{v} \times \vec{H}_0). \quad (2.8.1)$$

Для определённости будем считать магнитное поле  $\vec{H}_0$  направленным вдоль оси  $Z$  декартовой системы координат, т.е.  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ . Учитывая, что в радиодиапазоне  $\nu \ll \omega$ , запишем векторное уравнение (2.8.1) в виде трёх скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} i\omega v_x &= eE_x + e\mu_0 v_y H_0, \\ i\omega v_y &= eE_y - e\mu_0 v_x H_0, \\ i\omega v_z &= eE_z, \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

из которых определяются  $v_x, v_y$  и  $v_z$ . Поскольку плотность тока в плазме равна

$$\vec{j} = i\omega\varepsilon_0\vec{E} + Ne\vec{v},$$

то после несложных преобразований её декартовы компоненты запишутся в виде

$$\begin{aligned} j_x &= i\omega\varepsilon_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) E_x - i \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} E_y \right\}, \\ j_y &= i\omega\varepsilon_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) E_y + i \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} E_x \right\}, \\ j_z &= i\omega\varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) E_z, \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$  - собственная частота плазмы или частота Лэнгмюра,

$\omega_H = \frac{e\mu_0 H_0}{m}$  - частота гиромагнитного резонанса.

В любой анизотропной среде без омических потерь плотность тока, обусловленного монохроматической электромагнитной волной, равна

$$\vec{j} = i\omega\varepsilon_0 \|\varepsilon\| \vec{E}, \quad (2.8.4)$$

где  $\|\varepsilon\|$  - тензор относительной диэлектрической проницаемости.

Из сопоставления (2.8.4) и (2.8.3) следует

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon\| &= \left\| \begin{array}{l} 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, -i \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, 0 \\ i \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, 0 \\ 0, 0, 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{l} \varepsilon, -i\beta, 0 \\ i\beta, \varepsilon, 0 \\ 0, 0, \varepsilon_z \end{array} \right\|. \quad (2.8.6)
\end{aligned}$$

Из (2.8.6) следует, что компоненты векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  электромагнитной волны в намагниченной плазме (при  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ ) связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_0 (\varepsilon E_x - i\beta E_y), \\
D_y &= \varepsilon_0 (i\beta E_x + \varepsilon E_y), \\
D_z &= \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z.
\end{aligned} \quad (2.8.7)$$

В заключение отметим, что магнитная проницаемость намагниченной ферритовой среды описывается тензором, аналогичным (2.8.6), если вектор  $\vec{H}_0$  параллелен оси  $Z$ :

$$\|\mu\| = \left\| \begin{array}{l} \mu, -i\kappa, 0 \\ i\kappa, \mu, 0 \\ 0, 0, \mu_z \end{array} \right\|,$$

и связь между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
B_x &= \mu_0 (\mu H_x - i\kappa H_y), \\
B_y &= \mu_0 (i\kappa H_x + \mu H_y), \\
B_z &= \mu_0 \mu_z H_z.
\end{aligned}$$

## 2.8.2. Эффекты Фарадея и двойного лучепреломления

При распространении электромагнитных волн в гиротропных средах могут наблюдаться эффекты Фарадея (вращение плоскости поляризации) и двойного лучепреломления.

Пусть плоская линейно поляризованная волна распространяется в намагниченной вдоль оси  $Z$  плазме. Обратимся к уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= i\omega \varepsilon_0 \|\varepsilon\| \vec{E}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -i\omega \mu_0 \vec{H}.\end{aligned}\quad (2.8.8)$$

Запишем каждое из уравнений (2.8.8) в виде трёх скалярных уравнений с учётом (2.8.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon E_x - i\beta E_y), & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega \mu_0 H_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega \varepsilon_0 (i\beta E_x + \varepsilon E_y), & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega \mu_0 H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega \mu_0 H_z.\end{aligned}\quad (2.8.9)$$

Рассмотрим вначале случай распространения волны вдоль направления постоянного магнитного поля, т.е. вдоль оси  $Z$ . При этом для векторов поля волны можем написать

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i\Gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{\pm i\Gamma z}, \quad (2.8.10)$$

где  $\Gamma$  - неизвестная пока постоянная распространения, а  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  - не зависящие от координат величины.

Подставив (2.8.10) в (2.8.9), получаем:

$$E_z = H_z = 0, \quad (2.8.11)$$

$$(\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon) E_y = i\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \beta E_x, \quad (2.8.12)$$

$$(\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon) E_x = -i\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \beta E_y. \quad (2.8.13)$$

Из (2.8.11) следует, что в рассматриваемом случае электромагнитная волна остаётся поперечной (*ТЕМ*-волной). Из (2.8.12) и (2.8.13) получаем уравнение для определения  $\Gamma$  и соотношение, связывающее  $E_x$  и  $E_y$ :

$$\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon = \pm \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \beta,$$

$$\text{т.е.} \quad \Gamma_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon + \beta)}, \quad \Gamma_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon - \beta)}, \quad (2.8.14)$$

$$E_y = \pm i E_x. \quad (2.8.15)$$

Следовательно, при продольном намагничивании в плазме могут распространяться две плоские волны:

- волна с постоянной распространения  $\Gamma_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon + \beta)}$ , у которой согласно (2.8.15) составляющие электрического поля связаны равенством  $E_y = iE_x$ ; вектор  $\vec{E}_1 = E_0(\vec{x}_0 + i\vec{y}_0)e^{-i\Gamma_1 z}$  этой волны имеет круговую поляризацию с направлением вращения против часовой стрелки, если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля;
- волна с постоянной распространения  $\Gamma_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon - \beta)}$ , имеющая круговую поляризацию, у которой вектор  $\vec{E}_2 = E_0(\vec{x}_0 - i\vec{y}_0)e^{-i\Gamma_2 z}$  вращается по часовой стрелке.

Очевидно, что напряжённость поля распространяющейся волны равна сумме

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

При  $z = 0$   $\vec{E} = \vec{x}_0 2E_0$ , т.е. волна поляризована по оси  $X$ ; по мере распространения волны вектор  $\vec{E}$  вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, т.е. в плоскости  $XOY$ . Действительно, при  $z = l$  имеем:

$$\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + i\vec{y}_0)e^{-i\Gamma_1 l} + E_0(\vec{x}_0 - i\vec{y}_0)e^{-i\Gamma_2 l} .$$

После несложных преобразований получаем:

$$\vec{E} = 2E_0 e^{-i\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)l} \left( \vec{x}_0 \cos \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} l + \vec{y}_0 \sin \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} l \right). \quad (2.8.16)$$

Из (2.8.16) видно, что поляризация волны остаётся линейной, но вектор  $\vec{E}$  оказывается повернутым на угол

$$\theta = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} l. \quad (2.8.17)$$

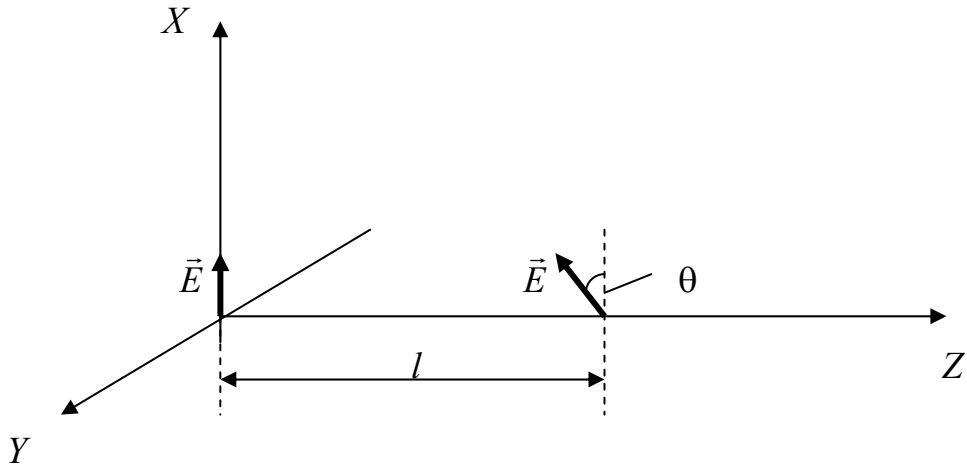


Рис.2.9

Это явление называется эффектом Фарадея.

Рассмотрим теперь случай распространения плоской волны в направлении, перпендикулярном направлению постоянного магнитного поля, например, вдоль оси  $X$ . Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i\Gamma x}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{\pm i\Gamma x}, \quad (2.8.18)$$

где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  - не зависящие от координат величины.

Полагая в уравнениях (2.8.9)  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ , получаем две независимые системы уравнений, которые описывают две волны, которые могут распространяться в намагниченной плазме.

Если вектор  $\vec{E}$  первоначальной волны ориентирован по оси  $Y$ , то в плазме возникает волна с постоянной распространения

$$\Gamma_{\perp} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\varepsilon^2 - \beta^2}{\varepsilon}}. \quad (2.8.19)$$

Эта волна называется необыкновенной, она обладает продольной составляющей электрического поля, сдвинутой по фазе на  $90^\circ$  относительно поперечной. Таким образом, необыкновенная волна оказывается эллиптически поляризованной в плоскости распространения  $XOY$ .

Если вектор  $\vec{E}$  первоначальной волны параллелен оси  $Z$ , то магнитное поле не оказывает влияния на её распространение. Такая волна называется обыкновенной, она не имеет продольной составляющей электрического поля и распространяется с постоянной

$$\Gamma_{\parallel} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_z}. \quad (2.8.20)$$

Аналогичные эффекты наблюдаются и при распространении плоских волн в намагниченном феррите с тензором магнитной проницаемости вида (2.8.6).

### 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

В предыдущих разделах рассматривались волны, распространяющиеся в безграничных средах. Однако, существуют волны, распространение которых возможно только при наличии каких-либо направляющих элементов (границы раздела сред, металлических, диэлектрических трубок, стержней и др.).

Отметим, прежде всего, одно универсальное свойство волн в направляющих структурах: поле любой волны обязательно имеет поперечные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Это необходимое условие для существования продольной компоненты вектора Пойнтинга  $\vec{\Pi}$ .

Класс направляемой волны определяется наличием либо отсутствием продольных (параллельных направлению распространения) составляющих поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . При классификации используются два принципа: либо указывается, какой из векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеет продольную составляющую ( $E$  – волны и  $H$  – волны), либо какой из этих векторов целиком лежит в поперечной плоскости ( $TM$  – волны и  $TE$  – волны).

Тип волны или мода определяется структурой электромагнитного поля внутри направляющего устройства. Он определяется двумя числовыми индексами, например,  $E_{11}, H_{10}$ . Смысл этих обозначений будет ясен из следующих разделов.

#### 3.1. Общие уравнения цилиндрических волноводов

Рассмотрим цилиндрический волновод произвольного поперечного сечения (Рис. 3.1).

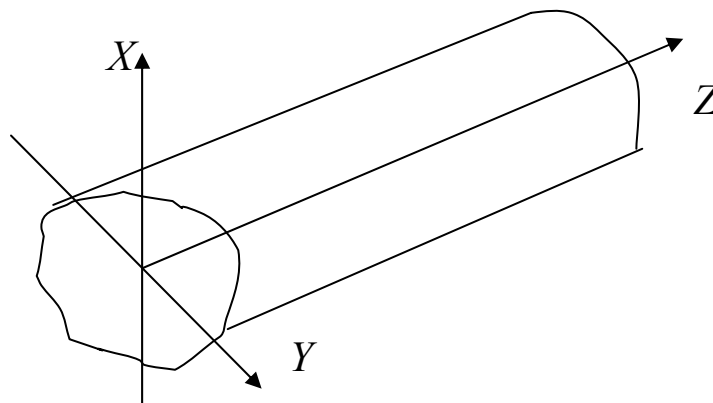


Рис. 3.1

Будем считать, что источники возбуждения волновода расположены вне рассматриваемого объёма. Нашей задачей является вывод соотношений, связы-



вающих поперечные компоненты поля в волноводе с продольными. С этой целью обратимся к уравнениям Максвелла, считая материал волновода немагнитным:

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H}. \quad (3.1.2)$$

$$\text{Положим } \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0(x, y)e^{-i\gamma z}, \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y)e^{-i\gamma z}, \quad (3.1.3)$$

где  $\gamma$  - постоянная распространения волны вдоль оси  $Z$  волновода.

Подставив (3.1.3) в уравнения (3.1.1) и (3.1.2) и используя известное векторное соотношение  $\nabla \times (\vec{a}\varphi) = \varphi(\nabla \times \vec{a}) - (\vec{a} \times \nabla)\varphi$ , получаем

$$\nabla \times \vec{H}_0 + i\gamma(\vec{H}_0 \times \vec{z}_0) = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_0, \quad (3.1.4)$$

$$\nabla \times \vec{E}_0 + i\gamma(\vec{E}_0 \times \vec{z}_0) = -i\omega \mu_0 \vec{H}_0, \quad (3.1.5)$$

где  $\vec{z}_0$  - орт оси  $Z$ .

Представим теперь  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  в виде суммы продольных и поперечных составляющих

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_z + \vec{E}_\tau, \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_z + \vec{H}_\tau. \quad (3.1.6)$$

Подставим (3.1.6) в (3.1.4) и (3.1.5), и приравняв затем в полученных уравнениях компоненты векторов, перпендикулярных оси  $Z$ , получим

$$\nabla \times \vec{H}_\tau + i\gamma(\vec{H}_\tau \times \vec{z}_0) = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_\tau,$$

$$\nabla \times \vec{E}_\tau + i\gamma(\vec{E}_\tau \times \vec{z}_0) = -i\omega \mu_0 \vec{H}_\tau. \quad (3.1.7)$$

Умножив каждое из уравнений (3.1.7) векторно на  $\vec{z}_0$  и проделав несложные преобразования, получим соотношения, связывающие поперечные компоненты полей с продольными,

$$\vec{E}_\tau = -\frac{i\gamma}{k^2 - \gamma^2}(\nabla E_z) + \frac{i\omega \mu_0}{k^2 - \gamma^2}(\vec{z}_0 \times (\nabla H_z)), \quad (3.1.8)$$

$$\vec{H}_\tau = -\frac{i\gamma}{k^2 - \gamma^2}(\nabla H_z) - \frac{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{k^2 - \gamma^2}(\vec{z}_0 \times (\nabla E_z)). \quad (3.1.9)$$

В разделе 2 было показано, что электромагнитное поле в объёме, свободном от источников, удовлетворяет однородному волновому уравнению, т.е.

$$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z) + k^2 \vec{E}(x, y, z) = 0, \quad \nabla^2 \vec{H}(x, y, z) + k^2 \vec{H}(x, y, z) = 0, \quad (3.1.10)$$

где  $k$  - волновое число в среде, заполняющей волновод.

Очевидно, что любая декартова компонента поля должна также удовлетворять уравнению (3.1.10), т.е.

$$\nabla^2 E_z(x, y, z) + k^2 E_z(x, y, z) = 0,$$

а поскольку  $E_z(x, y, z) = E_{0z}(x, y)e^{-i\gamma z}$ , то

$$\nabla^2 E_{0z}(x, y) + (k^2 - \gamma^2)E_{0z}(x, y) = 0,$$

$$\text{и аналогично, } \nabla^2 H_{0z}(x, y) + (k^2 - \gamma^2)H_{0z}(x, y) = 0. \quad (3.1.11)$$

Уравнения (3.1.11) имеют решение, если заданы граничные условия для  $E_{0z}$  и  $H_{0z}$ . Например, для волноводов в виде металлических труб, стенки которых считаются идеально проводящими, граничные условия имеют вид:

$$E_{0z}|_S = 0, \frac{\partial H_{0z}}{\partial n}|_S = 0, \quad (3.1.12)$$

где  $S$  - поверхность стенок волновода,  $n$  - нормаль к стенке волновода.

Таким образом, вдоль цилиндрического волновода могут распространяться два класса волн:  $TM$  (или  $E$ ) и  $TE$  (или  $H$ ).

Далее мы рассмотрим металлические волноводы прямоугольного и круглого сечений.

### 3.2. Общие соотношения для металлических волноводов

Рассмотрим уравнение типа (3.1.11):

$$\nabla^2 \psi + \chi^2 \psi = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\text{где } \psi - \text{либо } E_{0z}, \text{ либо } H_{0z}, \chi^2 = k^2 - \gamma^2. \quad (3.2.2)$$

Это уравнение при граничном условии  $\psi|_S = 0$  представляет собой задачу

Дирихле, а при условии  $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_S = 0$  - задачу Неймана. Оказывается, что обе

задачи имеют решение при некотором бесконечном дискретном множестве значений чисел  $\chi$

( $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_v, \dots$ ), которые называются собственными числами. Из (3.2.2) следует, что постоянная распространения равна

$$\gamma_v = \pm \sqrt{k^2 - \chi_v^2}. \quad (3.2.3)$$

Очевидно, что возможны три случая:

- 1)  $k^2 > \chi_v^2$ , в этом случае постоянная распространения вещественна, что соответствует режиму распространяющейся вдоль волновода волны;
- 2)  $k^2 < \chi_v^2$ , при этом постоянная распространения - чисто мнимая величина, и волна в волноводе не распространяется;

- 3) критический случай, когда  $k^2 = \chi_v^2 = k_{кр(v)}^2$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $k_{кр(v)} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр(v)}}$ ,

$\lambda_{кр(v)}$  - критическая длина волны в волноводе для данного типа волны.

Теперь (3.2.3) можно переписать в виде:

$$\gamma_v^2 = k^2 - k_{kp(v)}^2, \text{ или } \left( \frac{2\pi}{\lambda_{\epsilon(v)}} \right)^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_{kp(v)}} \right)^2, \text{ откуда получаем}$$

$$\lambda_{\epsilon(v)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp(v)}} \right)^2}}. \quad (3.2.4)$$

Таким образом, длина волны в волноводе больше длины волны в безграничной среде. Поскольку фазовая скорость распространения волны равна  $v_\phi = \lambda f$ , то фазовая скорость волны в волноводе всегда больше фазовой скорости волны в безграничной среде.

Критическая длина волны для данной моды – это наибольшая длина рабочей волны, при которой эта мода может распространяться в волноводе. Критическая длина волны зависит от формы поперечного сечения волновода и его размеров.

### 3.3. Прямоугольные волноводы

Прямоугольный волновод представляет собой полую металлическую трубу прямоугольного сечения (Рис. 3.2).

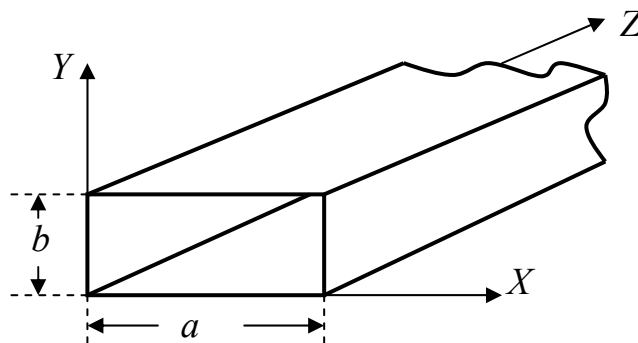


Рис.3.2

Пусть стенки волновода обладают идеальной проводимостью, и для определенности будем считать  $a > b$ . Получим соотношения, описывающие структуру поля поперечно-магнитных (ТМ) и поперечно-электрических (ТЭ) волн.

*Поперечно-магнитные волны*

В этом случае  $H_z = 0$ , а уравнение для  $E_z$  имеет вид:

$$\nabla^2 E_z + (k^2 - \gamma^2)E_z = 0. \quad (3.3.1)$$

Для нахождения решения этого уравнения используем метод разделения переменных (метод Фурье), который уже применялся в разделе 2.4. Положим  $E_z(x, y) = X(x)Y(y)$  и подставим в (3.3.1), тогда

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + (k^2 - \gamma^2) = 0, \quad (3.3.2)$$

где  $X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ ,  $Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$ . Из (3.3.2) имеем

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad Y'' + \eta^2 Y = 0, \quad (3.3.3)$$

причём

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2 - \gamma^2. \quad (3.3.3, a)$$

Решения уравнений (3.3.3) имеют вид:

$$X = A_1 \cos \xi x + A_2 \sin \xi x, \quad Y = B_1 \cos \eta y + B_2 \sin \eta y. \quad (3.3.4)$$

Для определения постоянных  $\xi$ ,  $\eta$  и неизвестных коэффициентов воспользуемся граничными условиями на стенках волновода:

$$E_z \Big|_{x=0} = 0, E_z \Big|_{x=a} = 0, E_z \Big|_{y=0} = 0, E_z \Big|_{y=b} = 0. \quad (3.3.5)$$

Находим  $A_1 = B_1 = 0$ ,  $\xi = \frac{n\pi}{a}$ ,  $\eta = \frac{m\pi}{b}$ , ( $n$  и  $m$  - любые целые положительные числа), Таким образом,

$$E_z = C \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y, C = A_2 B_2. \quad (3.3.6)$$

Постоянная  $C$  определяется условиями возбуждения волновода. Поперечные составляющие поля находятся из соотношений (3.1.8) и (3.1.9).

Для типов поперечно-магнитных волн в прямоугольных волноводах принято обозначение:  $E_{nm}$  или  $TM_{nm}$ . Индексы  $n$  и  $m$  указывают число полуволн (полупериодов) поля, укладываемых вдоль широкой и узкой стенок волновода соответственно. Ни один из индексов  $n$  или  $m$  поперечно-магнитных волн не может быть равен нулю, в противном случае в соответствии с (3.3.6) получается тривиальное решение  $E_z = 0$ , а следовательно, и  $E_\tau = H_\tau = 0$ . Таким образом, низшим типом  $E$ -волны в прямоугольном вол-

новоде является волна  $E_{11}$ . Эта мода имеет наибольшую критическую длину волны (из волн  $E$ -типа).

Для определения критической длины волны положим в (3.3.3,a)  $\gamma = 0$ , тогда рабочая длина волны равна критической, т.е.

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

откуда 
$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}. \quad (3.3.7)$$

Из (3.3.7) следует, что для волны  $E_{11}$  критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр11} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.3.8)$$

Структура поля в поперечном сечении волновода для волны  $E_{11}$  имеет вид:

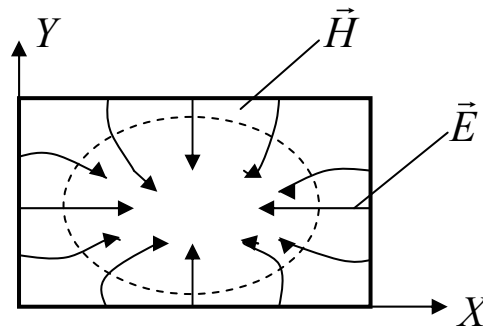


Рис.3.3

Поперечно-электрические волны (H-волны)

В этом случае  $E_z = 0$ , а уравнение для  $H_z$  имеет вид:

$$\nabla^2 H_z + (k^2 - \gamma^2)H_z = 0, \quad (3.3.9)$$

а граничные условия на стенках волновода:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \quad (3.3.10)$$

Процедура определения  $H_z$  аналогична описанной выше при определении  $E_z$ . В результате получаем:

$$H_z(x, y) = C \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \quad (3.3.11)$$

Смысл чисел  $n$  и  $m$  тот же, что в предыдущем разделе. Поперечные составляющие поля также определяются из соотношений (3.1.8) и (3.1.9). Для поперечно-электрических волн приняты обозначения  $H_{nm}$  или  $TE_{nm}$ . Из (3.3.11) видно, что одно из чисел  $n$  или  $m$  может быть равно нулю, поскольку решение при этом не будет тривиальным, и  $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$  не равны нулю.

Критическая длина волны  $H$ -волн определяется тем же выражением, что и  $E$ -волн, т.е. (3.3.7). Из всех мод, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе, наибольшую критическую длину волны имеет мода  $H_{10}$  (если  $a > b$ ).

Поэтому всегда можно выбрать размеры поперечного сечения волновода таким образом, чтобы в нём распространялась лишь мода  $H_{10}$ .

Структура поля волны  $H_{10}$  в поперечном сечении волновода имеет вид:

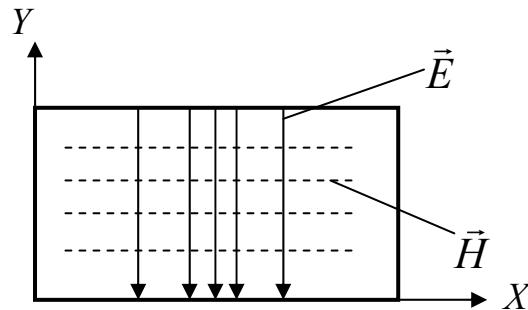


Рис.3.4

Электрическое поле имеет лишь компоненту  $E_y$ , а магнитное – компоненты  $H_x$  и  $H_z$ :

$$H_z = C \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), H_x = C \frac{i\gamma}{k^2 - \gamma^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), E_y = -\frac{\omega\mu_0}{\gamma} H_x.$$

Токи в стенках прямоугольного волновода

В случае идеально проводящих стенок электромагнитное поле волн, распространяющихся в волноводе, возбуждает поверхностные токи на стенках, причём каждому типу волны соответствует определённая структура этих токов. Как известно, плотность поверхностных токов связана с магнитным полем в волноводе посредством соотношения:

$$\vec{j}_s = (\vec{n} \times \vec{H})|_S, \quad (3.3.12)$$

где  $\vec{n}$  - внутренняя нормаль к стенке волновода,  $S$  – поверхность стенок волновода.

Например, для волны  $H_{10}$  структура токов на стенках волновода имеет вид:

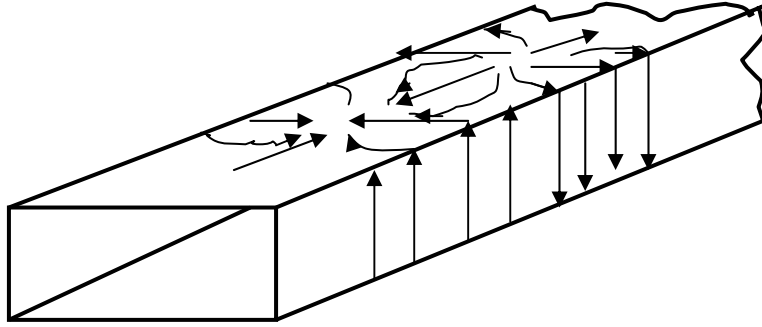


Рис.3.5

### 3.4. Волноводы кругового сечения

Рассмотрим металлический волновод, идеально проводящие стенки которого представляют круговой цилиндр (Рис.3.6).

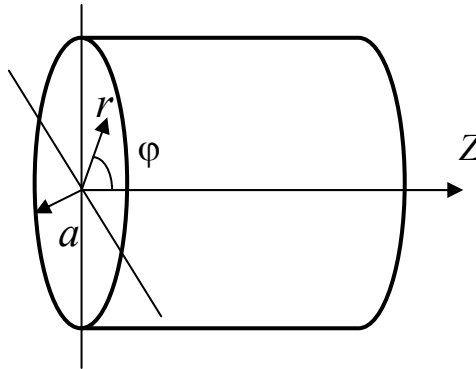


Рис. 3.6

#### *Поперечно-магнитные волны*

В этом случае  $H_z = 0$ , а волновое уравнение для  $E_z$  в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \chi^2 E_z = 0, \quad (3.4.1)$$

где  $\chi^2 = k^2 - \gamma^2$  - поперечное волновое число.

Это уравнение решается методом разделения переменных с использованием граничного условия:  $E_z|_{r=a} = 0$ . Положив в (3.4.1)  $E_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ , по-

сле почленного умножения на  $r^2/R\Phi$  получим

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + r^2 \chi^2 = 0, \quad (3.4.2)$$

где  $R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$ ,  $R' = \frac{\partial R}{\partial r}$ ,  $\Phi'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$ .

Независимость аргументов  $r$  и  $\varphi$  требует, чтобы третье слагаемое было постоянным; положим его равным  $(-n^2)$ . Тогда

$$\Phi''(\varphi) + n^2 \Phi(\varphi) = 0. \quad (3.4.3)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$\Phi(\varphi) = A \cos n\varphi.$$

Очевидно, что при повороте по углу  $\varphi$  на  $2\pi$  значение функции  $\Phi(\varphi)$  должно быть одним и тем же, т.е.  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , или  $\cos n(\varphi + 2\pi) = \cos n\varphi$ . Это возможно лишь при  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Число  $n$  определяет периодичность поля по углу  $\varphi$ .

Второе уравнение, вытекающее из (3.4.2) имеет вид:

$$\frac{d^2 R}{d(\chi r)^2} + \frac{1}{\chi r} \frac{dR}{d(\chi r)} + \left(1 - \frac{n^2}{(\chi r)^2}\right) R = 0. \quad (3.4.4)$$

Уравнение (3.4.4) является уравнением Бесселя, решение которого представляется в виде суперпозиции цилиндрических функций порядка  $n$ :

$$R(\chi r) = C J_n(\chi r) + D Y_n(\chi r), \quad (3.4.5)$$

где  $J_n(\chi r)$  и  $Y_n(\chi r)$  - функции Бесселя и Неймана соответственно.

Функция Бесселя ограничена при любых значениях аргумента, а функция Неймана стремится к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ . Поскольку поле в волноводе при  $r = 0$  должно быть ограниченным, мы должны положить  $D = 0$ . Таким образом,

$$E_z(r, \varphi) = E_0 J_n(\chi r) \cos n\varphi. \quad (3.4.6)$$

Поперечное волновое число  $\chi$  определяется из граничного условия на стенке волновода, которое принимает вид  $J_n(\chi a) = 0$ , поэтому

$$\chi_{nm}^E = \frac{v_{nm}}{a}, \quad (3.4.7)$$

где  $v_{nm}$  -  $m$ -ый корень функции Бесселя порядка  $n$ .

Из (3.4.7) определяется критическая длина волны для любой моды  $E_{nm}$ :

$$\frac{2\pi}{\lambda_{кр}^{E_{nm}}} = \frac{v_{nm}}{a}, \quad \text{или} \quad \lambda_{кр}^{E_{nm}} = \frac{2\pi a}{v_{nm}}. \quad (3.4.8)$$

Индексы в обозначении типа волны означают:  $n$  - периодичность поля по полярному углу  $\varphi$ , т.е. число полуволн поля, укладываемых по контуру волновода;  $m$  - периодичность поля по радиусу поперечного сечения волновода.

Поперечные составляющие поля могут быть найдены по формулам (3.1.8), (3.1.9).



### Поперечно-электрические волны

Для этого класса волн  $E_z = 0$ , а уравнение для  $H_z$  аналогично уравнению (3.4.1). Граничное условие на стенке волновода имеет вид:  $\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$ .

Общее решение уравнения также аналогично (3.4.6):

$$H_z = H_0 J_n(\chi r) \cos n\varphi,$$

где  $\chi_{nm}^H = \frac{v'_{nm}}{a}$ ,  $v'_{nm}$  -  $m$ -ый корень производной функции  $J_n(x)$ .

Нетрудно заметить, что критическая длина волны для моды  $H_{nm}$  равна

$$\lambda_{кр}^{H_{nm}} = \frac{2\pi a}{v'_{nm}}. \quad (3.4.8)$$

## 4. ОБЪЁМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Объёмные резонаторы используются в качестве колебательных систем в диапазоне сверхвысоких частот, поскольку применение колебательных контуров из сосредоточенных элементов с малыми потерями практически невозможно.

Возможность построения объёмных резонаторов вытекает из уравнений Максвелла, согласно которым переменное электрическое поле создаёт переменное магнитное поле, и наоборот, т.е. происходит обмен энергиями между электрическими и магнитными полями.

Простейшие типы объёмных резонаторов представляют собой часть пространства, ограниченную со всех сторон металлической оболочкой, например, короткозамкнутые отрезки коаксиальной линии, полых металлических волноводов и т.п. В качестве резонаторов используются и отрезки диэлектрических волноводов, концы которых металлизированы.

Переход от обычного колебательного контура к объёмному резонатору можно проиллюстрировать следующим образом:

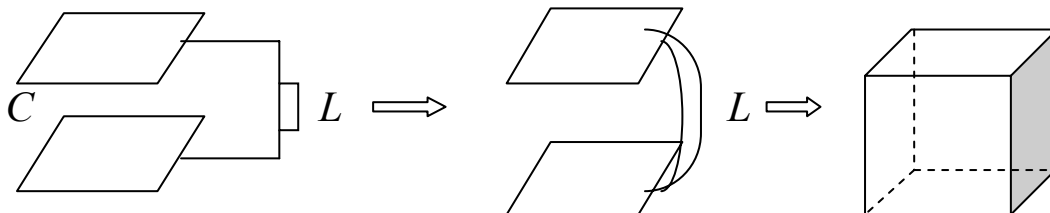


Рис.4.1

Как известно, резонансная частота контура из сосредоточенных элементов (без учёта потерь) равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т.е. чтобы увеличить резонансную частоту, надо уменьшать  $L$  и  $C$ . Ёмкость можно уменьшать раздвигая пластины, а индуктивность – уменьшая число витков катушки, оставив в результате один проводник, соединяющий пластины конденсатора.

#### 4.1. Свободные гармонические колебания

Пусть в некотором замкнутом объёме  $V_0$  (произвольном резонаторе) отсутствуют джоулевы потери, сторонний источник мощностью  $P^{ext}$  возбуждает этот объём (а затем отключается)

$$P^{ext} = \frac{dW}{dt}.$$

Под влиянием последнего в объёмном резонаторе возникнут колебания, которые называются свободными. Этот процесс может продолжаться сколь угодно долго (при отсутствии потерь). Поскольку полная энергия, запасённая в объёме должна оставаться неизменной, то

$$\frac{dW}{dt} = 0. \quad (4.1.1)$$

Очевидно, что полная электромагнитная энергия в объёме равна

$$W = \int_{V_0} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_{V_0} \left( \epsilon_0 \frac{|E|^2}{2} + \mu_0 \frac{|H|^2}{2} \right) dV. \quad (4.1.2)$$

Пусть рассматриваемые поля имеют гармоническую зависимость от времени

$$\vec{E} = \vec{E}_m \sin \omega_0 t.$$

Чтобы в любой момент времени выполнялось условие (4.1.1), напряжённости электрического и магнитного полей должны быть сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ ,

т.е.  $\vec{H} = \vec{H}_m \cos \omega_0 t$ .

Теперь из (4.1.1) следует

$$\frac{dW}{dt} = \omega_0 \sin 2\omega_0 t \int_{V_0} \left( \frac{\epsilon_0}{2} |E_m|^2 - \frac{\mu_0}{2} |H_m|^2 \right) dV = 0,$$

$$\text{т.е. } \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_0} |E_m|^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{V_0} |H_m|^2 dV. \quad (4.1.3)$$

Выражая  $\vec{E}_m$  через  $\vec{H}_m$  из уравнений Максвелла

$$\text{rot} \vec{H}_m = i\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_m, \quad \text{rot} \vec{E}_m = -i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_m,$$

и используя (4.1.3), для частоты собственных колебаний получаем

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\int_{V_0} |\text{rot} \vec{E}_m|^2 dV}{\int_{V_0} |E_m|^2 dV} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\int_{V_0} |\text{rot} \vec{H}_m|^2 dV}{\int_{V_0} |\vec{H}_m|^2 dV}. \quad (4.1.4)$$

Поскольку каждый из этих интегралов зависит от формы объёма, его размеров и характера подынтегральной функции, то резонансная частота резонатора определяется теми же параметрами.

Структура поля в резонаторах может быть определена из однородного векторного уравнения Гельмгольца при известных граничных условиях:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{при } (\vec{n} \times \vec{E})|_S = 0, \quad (4.1.5)$$

где  $\vec{n}$  - внутренняя нормаль к стенкам резонатора.

Можно показать, что уравнение (4.1.5) имеет бесконечное число решений, каждому из которых соответствует определённое значение резонансной частоты  $\omega_0$ , т.е. объёмные резонаторы, в отличие от обычных контуров, могут «резонировать на бесконечном дискретном множестве частот».

Рассмотрим объёмный резонатор, выполненный на основе цилиндрического волновода.

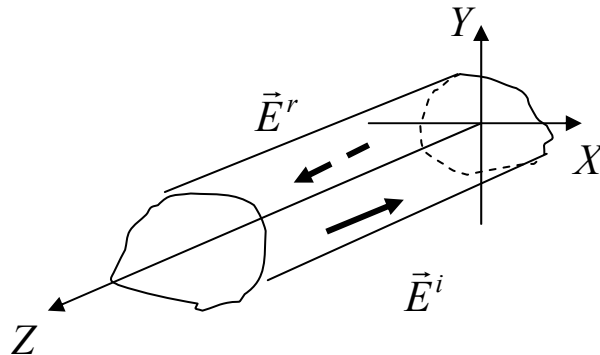


Рис.4.2

Если сечение волновода  $z = 0$  замкнуто накоротко, то поле в волноводе равно сумме полей падающей и отражённой волн, причём коэффициент отражения равен  $-1$ . Для поперечных составляющих напряжённости электрического поля падающей и отражённой волн в волноводе можно написать

$$\vec{E}_\tau^i = \vec{E}_{0\tau}^i e^{i\gamma z} \quad \text{и} \quad \vec{E}_\tau^r = \vec{E}_{0\tau}^r e^{-i\gamma z},$$

где  $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_w}$  - постоянная распространения волн в волноводе.

Полное поле в произвольном сечении волновода определяется соотношением:

$$\vec{E}_\tau(z) = \vec{E}_{0\tau}^i (e^{i\gamma z} - e^{-i\gamma z}) = 2i\vec{E}_{0\tau} \sin \gamma z. \quad (4.1.6)$$

Как видно из (4.1.6), поперечная составляющая  $\vec{E}_\tau$  равна нулю в сечениях

$z_w = p \frac{\lambda_w}{2}$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), поэтому мы можем ввести короткозамыкающую

плоскость в любом из этих сечений, не нарушая структуры поля внутри волновода. Таким образом, длина резонатора  $L$  равна целому числу полуволн волны, распространяющейся в волноводе:

$$L = p \frac{\lambda_w}{2} = p \frac{\lambda_{0p}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{0p}}{\lambda_{cr}}\right)^2}}. \quad (4.1.7)$$

Здесь учтено, что длина волны в волноводе  $\lambda_w = \frac{\lambda_{0p}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{0p}}{\lambda_{cr}}\right)^2}}$ ,  $\lambda_{cr}$  - критическая длина волны волновода.

Из соотношения (4.1.7) может быть определена резонансная длина волны резонатора:

$$\lambda_{0p} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{cr}}\right)^2}}. \quad (4.1.8)$$

Например, в случае прямоугольного волновода  $\lambda_{cr} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$ , и резонансная длина волны равна

$$\lambda_{0p} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}}. \quad (4.1.9)$$

## 4.2. Добротность резонаторов

Обычно добротностью изолированной системы называют отношение

$$Q = \omega_0 \frac{W_{cp}}{P_{n.cp}} = 2\pi \frac{W_{cp}}{\Delta W}, \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T}) \quad (4.2.1)$$

где  $W_{cp} = W_{cp}^e + W_{cp}^m$  - среднее за период  $T$  значение электромагнитной энергии в объёме,  $P_{n.cp}$  - среднее за период значение мощности потерь в объёме,  $\Delta W$  - изменение энергии в объёме за период  $T$ .

$$\Delta W = \Delta W_{мет} + \Delta W_{диэл} + \Delta W_{вн} + \Delta W_{излуч}, \quad (4.2.2)$$

$\Delta W_{мет}$ ,  $\Delta W_{диэл}$ ,  $\Delta W_{вн}$ ,  $\Delta W_{излуч}$  - потери электромагнитной энергии в металле резонатора, в диэлектрике резонатора, в устройствах, подключённых к резонатору, на излучение из резонатора.

С учётом (4.2.2) полную или нагруженную добротность резонатора  $Q$  можно записать в виде:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{мет}} + \frac{1}{Q_{диэл}} + \frac{1}{Q_{вн}} + \frac{1}{Q_{излуч}}. \quad (4.2.3)$$

Если резонатор закрыт и не связан с внешними устройствами, то говорят о собственной добротности резонатора  $Q_0$ :

$$Q_0 = \frac{Q_{мет} Q_{диэл}}{Q_{мет} + Q_{диэл}}.$$

## 5. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Из уравнений Максвелла следует, что ток, изменяющийся во времени, способен излучать электромагнитные волны. Устройства, предназначенные для излучения электромагнитных волн в окружающее пространство, называются антеннами. Простейшими антеннами являются элементарные электрический и магнитный вибраторы.

### 5.1. Поле излучения элементарного электрического вибратора

Элементарным электрическим вибратором (электрическим диполем) называется короткий по сравнению с длиной волны провод, по которому протекает электрический ток, амплитуда и фаза которого не изменяются вдоль провода. Хотя создание вибратора с неизменной амплитудой и фазой тока по

его длине практически невозможно, такая идеализация является удобной для анализа реальных антенн.

Рассмотрим короткий электрический вибратор длиной  $l$  ( $l \ll \lambda$ ), ориентированный вдоль полярной оси сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , как показано на рис. 5.1. Амплитуда гармонического тока в вибраторе  $I_m$  постоянна по его длине.

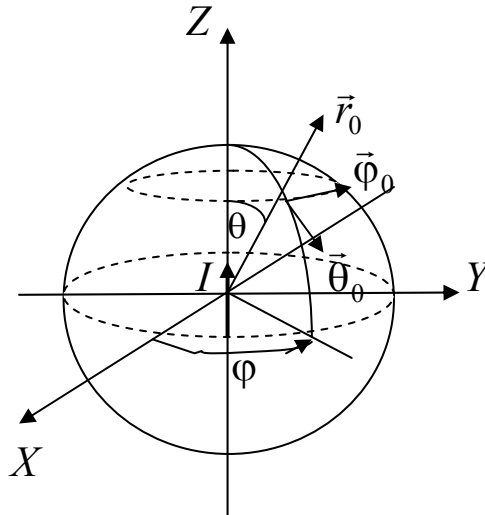


Рис.5.1

Комплексная амплитуда векторного потенциала, создаваемого током вибратора в точке наблюдения на расстоянии  $r$ , равна

$$\vec{A}_m = \vec{z}_0 \frac{\mu_0 I_m}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{-ikr}}{r} dz, \quad (5.1.1)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число в свободном пространстве.

Учитывая, что  $l \ll \lambda$  и векторный потенциал имеет лишь  $z$ -компоненту, можно вместо (5.1.1) написать:

$$A_{zm} = \frac{\mu_0 I_m l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (5.1.2)$$

Как известно, вектор  $\vec{H}_m$  связан с  $\vec{A}_m$  соотношением:

$$\vec{H}_m = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{A}_m), \quad (5.1.3)$$

а вектор электрического поля  $\vec{E}_m$  можно определить из первого уравнения Максвелла:

$$\vec{E}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} (\nabla \times \vec{H}_m). \quad (5.1.4)$$

Поскольку короткий вибратор является точечным источником, то удобнее оперировать со сферическими компонентами полей. Компоненты векторного потенциала в сферической системе координат равны

$$A_{rm} = A_{zm} \cos \theta, A_{\theta m} = -A_{zm} \sin \theta, A_{\varphi m} = 0.$$

Выполнив операцию ротора в сферической системе координат в (5.1.3), а затем в (5.1.4), для компонент поля вибратора получим:

$$H_{\varphi m} = \frac{iI_m l k^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{kr} - i \left( \frac{1}{kr} \right)^2 \right] \sin \theta e^{-ikr}, H_{rm} = H_{\theta m} = 0,$$

$$E_{rm} = \frac{I_m l k^3}{2\pi\omega\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{kr} \right)^2 - i \left( \frac{1}{kr} \right)^3 \right] \cos \theta e^{-ikr}, E_{\varphi m} = 0,$$

$$E_{\theta m} = \frac{iI_m l k^3}{4\pi\omega\epsilon_0} \left[ \frac{1}{kr} - i \left( \frac{1}{kr} \right)^2 - \left( \frac{1}{kr} \right)^3 \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (5.1.5)$$

Из формул (5.1.5) следует, что в любой точке пространства вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости, проходящей через ось вибратора, а вектор  $\vec{H}$  - в плоскости, перпендикулярной оси вибратора.

При анализе структуры электромагнитного поля вибратора делят на три зоны: дальнюю ( $kr \gg 1$ ), ближнюю ( $kr \ll 1$ ) и промежуточную, где  $kr$  сравнимо с единицей. С точки зрения характеристик излучения антенн наибольший интерес представляет анализ поля в дальней зоне.

*Дальняя зона.* В этой зоне можно пренебречь слагаемыми  $\left( \frac{1}{kr} \right)^2$  и

$\left( \frac{1}{kr} \right)^3$  по сравнению с  $\frac{1}{kr}$  в формулах (5.1.5). Тогда  $E_r = 0$ , а

$$E_{\theta} = \frac{iI_m l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin \theta e^{-ikr}, H_{\varphi} = \frac{iI_m l}{2\lambda r} \sin \theta e^{-ikr}. \quad (5.1.6)$$

В (5.1.6) учтено, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Таким образом, в дальней зоне напряжённость электрического поля имеет только составляющую  $E_{\theta}$ , а напряжённость магнитного поля – составляющую  $H_{\varphi}$ , которые изменяются синфазно.

Из (5.1.6) следует, что при заданных амплитуде тока и длине вибратора напряжённость его электрического поля в дальней зоне зависит от расстоя-

ния  $r$  и угла  $\theta$ . Для более наглядного представления о направленности излучения вибратора, как и любой антенны, строят графики зависимости напряжённости поля от направления на точку наблюдения при  $r = const$ . Такие графики называют амплитудными диаграммами направленности. Обычно строятся не абсолютные значения амплитуды напряжённости поля, а нормированные значения, отнесённые к максимуму функции.

Как правило, строятся либо объёмные диаграммы направленности, либо в двух главных взаимно перпендикулярных плоскостях. Главными плоскостями для электрического вибратора являются плоскости, в которых лежат  $E_\theta$  и  $H_\varphi$ , называемые, соответственно,  $E$ - и  $H$ -плоскостями. На рис. 5.2 приведена диаграмма направленности короткого электрического вибратора (диполя) в плоскости  $E$ , а на рис. 5.3 показана диаграмма направленности в плоскости  $H$ .

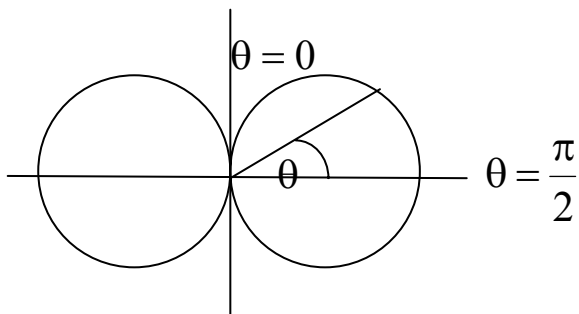


Рис. 5.2

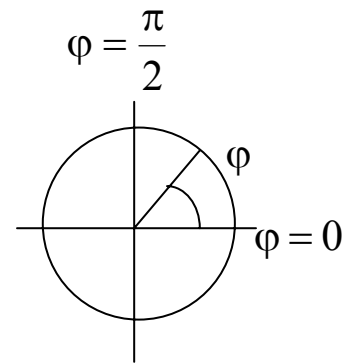


Рис. 5.3

## 5.2. Поле излучения элементарного магнитного вибратора (диполя)

Хотя магнитных токов в природе не существует, иногда удобно их ввести для упрощения решения ряда задач. Например, можно показать, что достаточно малый по сравнению с длиной волны контур, обтекаемый током  $I^e$ , излучает как магнитный диполь с током  $I^m$ . При этом поле излучения подобно полю излучения электрического диполя, а векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  меняются ролями.

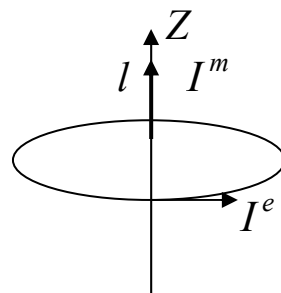


Рис.5.4



В дальней зоне поле излучения магнитного диполя имеет составляющую электрического поля  $E_\varphi$  и магнитного поля -  $H_\theta$  :

$$E_\varphi = -\frac{iI^m l}{2\lambda r} \sin\theta \cdot e^{-ikr}, \quad H_\theta = \frac{iI^m l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \sin\theta \cdot e^{-ikr}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная:

1. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Москва, Радио и связь, 2000, 536 с.
2. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва, Наука, 1989, 543 с.
3. Акимов В.П., Бабенко Л.А. Техническая электродинамика. Санкт-Петербург, СПбГТУ, 2000, 42 с.
4. Лебедев Б.Б., Ферсман Г.А., Шанников Д.В. Техническая электродинамика. Санкт-Петербург, СПбГТУ, 1999, 46 с.

### Дополнительная:

5. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва, Наука, 1976, 616 с.