Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.А. Тархов, А.В.Андреев, Е.С. Единова,

А.М. Никулин, Т.А. Шемякина

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Санкт-Петербург

Издательство СПбГПУ

2012

УДК 512.8

Д.А. Тархов, А.В.Андреев, Е.С. Единова, А.М. Никулин, Т.А. Шемякина
Математика. Теория вероятностей. Часть 2 : Учебное пособие / Д.А. Тархов, А.В.Андреев, Е.С. Единова, А.М. Никулин, Т.А. Шемякина, 2012. – 40с.

Учебное пособие соответствует содержанию Федерального Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования дисциплины "Высшая математика" направления подготовки и переподготовки бакалавров по специальности 280700.62 "Техносферная безопастность".

В пособии кратко изложены теоретические основы по курсу "Высшая математика" , который представлен разделами "Предельные теоремы для последовательностей независимых испытаний Бернулли. Характеристические функции" .

Предназначено для студентов высших учебных заведений технических и экономических направлений, изучающих дисциплину "Высшая математика". Пособие может быть использовано при подготовке бакалавров и в системе дополнительного профессионального образования, а также оно будет полезно для преподавателей дневных, вечерних и заочных отделений вузов и технических университетов.

Библиогр.: 6 назв.

Публикуется по решению методического совета факультета Комплексной Безопасности Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Глава 6. Предельные теоремы для последовательностей независимых испытаний Бернулли

6.1 Законы Больших Чисел

Рассмотрим бесконечную последовательность НОРСВ (испытаний Бернулли)

$$\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ ,\ \xi_k \in B_p\ ,\ p\in(0,1)$$

и построенную по ней бесконечную последовательность (случайных) частичных сумм

$$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ S_n = \xi_1 + ... + \xi_n .$$

Как было показано ранее,

$$S_n \in B(n,p)\ ,\ \mathbf{E}S_n = np\ ,\ \mathbf{D}S_n = np(1-p) = npq.$$

Теорема 1. Закон больших чисел (ЗБЧ) для схемы Бернулли.

$$\forall \varepsilon > 0:\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0\ ,\ n\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbf{E}S_n}{n} = p\ ,\ \mathbf{D}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbf{D}S_n}{n^2} = \frac{pq}{n} \to 0\ ,\ n\to\infty.$$

Используя п.2 следствия к неравенству Чебышева ($\xi = S_n/n$), получим:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{D}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0\ ,\ n\to\infty.$$

Замечание.

1. Используя неравенство Чебышева, можно доказать более общее утверждение. Рассмотрим последовательность НОРСВ

   $$\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ ,\ \mathbf{E}\xi_k = a\in\mathbb{R}\ ,\ \mathbf{D}\xi_k = \sigma^2 \in (0,+\infty),$$

   $$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ S_n = \xi_1 + ... + \xi_n\ ,\ \mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = a\ ,\ \mathbf{D}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

   Тогда

   $$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0\ ,\ n\to\infty.$$

   Фактически ЗБЧ для схемы Бернулли является следствием этого утверждения.

2. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\le\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right),$$

поэтому будет справедливо утверждение

$$\forall\varepsilon>0:\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\to 0\,,\ n\to\infty.$$

Теорема 2. Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для схемы Бернулли.

$$\forall\varepsilon>0:\ \mathbf{P}\left(\sup_{k\ge n}\left|\frac{S_k}{k}-p\right|\ge\varepsilon\right)\to 0\,,\ n\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k\ge n}\left|\frac{S_k}{k}-p\right|\ge\varepsilon\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|\frac{S_k}{k}-p\right|\ge\varepsilon\right\}\right)\le$$

$$\le\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_k}{k}-p\right|\ge\varepsilon\right\}\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left\{(S_k-kp)^4\right\}}{k^4\varepsilon^4}.$$

Здесь мы использовали п.1 следствия к неравенству Чебышева:

$$\xi=\left|\frac{S_k}{k}-p\right|=\frac{|S_k-kp|}{kp}\ge 0\,;\ g(x)=x^4\,,\ x\ge 0$$

(*неравенство Чебышева с четвертым моментом*). Оценим сверху порядок роста математического ожидания внутри суммы.

$$\mathbf{E}\left\{(S_k-kp)^4\right\}=\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-p)\right)^4\right\}=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}\left\{(\xi_i-p)^4\right\}+$$

$$+6\sum_{i<j}\mathbf{E}\left\{(\xi_i-p)^2(\xi_j-p)^2\right\}=k(pq^4+qp^4)+3k(k-1)(pq)^2<$$

$$<2k+3k(k-1)<3k^2.$$

Дадим необходимые пояснения. Прежде всего,

$$(a_1+...+a_k)^4=\sum_{\bar m}\frac{4!}{m_1!...m_k!}a_1^{m_1}...a_k^{m_k}=\sum_{\bar m}C_{m_1,...,m_k}a_1^{m_1}...a_k^{m_k},$$

где суммирование идёт по всем векторам

$$\bar{m} = (m_1, ..., m_k)\ ,\ m_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\ ,\ \sum_{i=1}^{k} m_i = 4.$$

Сразу отметим:

$$m_i = 4\ \Rightarrow\ C_{m_1,...,m_k} = 1\ ;\ m_i = m_j = 2\ ,\ i < j\ \Rightarrow\ C_{m_1,...,m_k} = 6.$$

Т.о. в произведении $a_1^{m_1}...a_k^{m_k}$ различных a_i в ненулевой степени может быть от одного до четырёх. Вычленив отдельно слагаемые вида a_i^4 и $a_i^2 a_j^2$, $i \neq j$,получим

$$(a_1 + ... + a_k)^4 = \sum_{i=1}^{k} a_i^4 + 6 \sum_{i<j} a_i^2 a_j^2 + \sum_{\bar{m}'} C_{m_1,...,m_k} a_1^{m_1}...a_k^{m_k},$$

где последняя сумма берётся по оставшимся векторам $\bar{m}'$, в которых нет координат $m_i = 4$ или $m_i = m_j = 2$, $i < j$. Заметим, что в векторе $\bar{m}'$ обязательно хотя бы одна из координат $m_i = 1$, поэтому в слагаемом с соответствующим коэффициентом один из сомножителей $a_i^{m_i} = a_i$.

Теперь представим себе, что $a_1, ..., a_k$ - НОРСВ и возьмём математическое ожидание от обеих частей последнего равенства; учтём при этом следующее (ещё раз отметим, что учитываются лишь $m_i \neq 0$, т.е. в произведении $a_1^{m_1}...a_k^{m_k}$ может быть не более четырёх сомножителей-случайных величин; мы отбрасываем $a_i^0 = 1$) :

$$a_1, ..., a_k - \text{НСВ} \Rightarrow a_1^{m_1}, ..., a_k^{m_k} - \text{НСВ} \Rightarrow \mathbf{E}(a_1^{m_1}...a_k^{m_k}) = \mathbf{E}(a_1^{m_1})...\mathbf{E}(a_k^{m_k}).$$

$$\mathbf{E}\left\{(a_1 + ... + a_k)^4\right\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i^4 + 6 \sum_{i<j} a_i^2 a_j^2 + \sum_{\bar{m}'} C_{m_1,...,m_k} a_1^{m_1}...a_k^{m_k}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left\{a_i^4\right\} + 6 \sum_{i<j} \mathbf{E}\left\{a_i^2\right\} \mathbf{E}\left\{a_j^2\right\} + \sum_{\bar{m}'} C_{m_1,...,m_k} \mathbf{E}(a_1^{m_1})...\mathbf{E}(a_k^{m_k}) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Ещё раз отметим, что в каждом из слагаемых в I_3 в числе сомножителей есть хотя бы один первый момент $\mathbf{E}a_i$ какой-либо из случайных величин a_i.

Вернёмся к испытаниям Бернулли $\xi_1, ..., \xi_k$. Очевидно, что

$$\xi_1, ..., \xi_k\ -\ \text{НОРСВ}\ \Rightarrow\ \xi_1 - p, ..., \xi_k - p\ -\ \text{НОРСВ}.$$

Теперь переобозначим $a_i = \xi_i - p$ и заметим, что $a_1, ..., a_k$ (НОРСВ) тоже принимают по 2 значения , а также посчитаем необходимые нам моменты:

$$\mathbf{P}(a_i = -p) = q \ , \ \mathbf{P}(a_i = 1 - p = q) = p \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}a_i = (-p)q + qp = 0, \mathbf{E}(a_i^2) = p^2q + q^2p = pq(p+q) = pq, \mathbf{E}(a_i^4) = p^4q + q^4p.$$

Т.о.

$$I_1 = k(p^4q + q^4p) \ , \ I_2 = 3k(k-1)(pq)^2 \ , \ I_3 = 0$$

(количество слагаемых в I_1 и I_2 подсчитывается очевидным образом). Пояснения закончены.

Используя полученную оценку, получим:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left\{(S_k - kp)^4\right\}}{k^4\varepsilon^4} < \frac{3}{\varepsilon^4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \to 0 \ , \ n \to \infty.$$

Замечание.

1. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right),$$

поэтому справедливо утверждение

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0 \ , \ n \to \infty.$$

2. Полезно убедиться, что в этом доказательстве использование неравенства Чебышева со вторым моментом не дало бы нужной оценки.

3. Доказанные теоремы подтверждают справедливость интуитивного восприятия вероятности события как предела частоты его появления. Действительно, если в испытании Бернулли событие наступает с вероятностью p, то можно интерпретировать S_n/n как частоту появления этого события в n испытаниях. ЗБЧ и УЗБЧ (для схемы Бернулли) показывают, что в каком то смысле S_n/n стремится к p.

Определение 1. *Рассмотрим последовательность случайных величин* $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, заданных на одном вероятностном пространстве и случайную величину* ζ*. Будем говорить, что:*

1.
$$\zeta_n \to \zeta \ , \ n \to \infty \ \textit{по вероятности} \ ,$$
если
$$\forall \varepsilon > 0 : \ \mathbf{P}\left(|\zeta_n - \zeta| > \varepsilon\right) \to 0 \ , \ n \to \infty.$$

2.
$$\zeta_n \to \zeta \ , \ n \to \infty \ \textit{почти наверное (п.н.)} \ ,$$
если
$$\forall \varepsilon > 0 : \ \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n} |\zeta_k - \zeta| > \varepsilon\right) \to 0 \ , \ n \to \infty.$$

Замечание.

1. Из определения видно, что сходимость почти наверное влечёт сходимость по вероятности (сразу отметим, что обратное неверно).

2. Фактически ЗБЧ для схемы Бернулли устанавливает
$$\frac{S_n}{n} \to p \ , \ n \to \infty \ \textit{по вероятности.}$$

3. Фактически УЗБЧ для схемы Бернулли устанавливает
$$\frac{S_n}{n} \to p \ , \ n \to \infty \ \textit{п.н.}.$$

4. В пунктах 2 и 3 под предельной случайной величиной подразумевается вырожденная случайная величина, с вероятностью 1 принимающая значение p.

6.2 Локальная теорема Муавра-Лапласа

Рассмотрим биномиально распределённую случайную величину

$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n \in B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$; $\xi_1, ..., \xi_n$ $-$ НОРСВ , $\xi_i \in B_p$.

Введём обозначение:
$$P_n(k) = \mathbf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \ , \ k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Понятно, что непосредственное вычисление вероятности по этой формуле с ростом значений n и k неизбежно будет приводить к вычислительным сложностям. Следующие результаты дают приближенные формулы для вычисления

$$P_n(k) \text{ и } \sum_{i=l}^{m} P_n(k)\ ,\ 0 \le l \le k \le m \le n.$$

Замечание. В дальнейшем мы будем использовать известную из курса математического анализа *формулу Стирлинга*:

$$s! = \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\Theta_s}\ ,\ |\Theta_s| \le \frac{1}{12s}.$$

Введём ещё одно вспомогательное обозначение:

$$x = x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

(если не будет возникать сомнений относительно значений индексов у $x_{n,k}$, мы будем их опускать.)

Теорема 3. Локальная теорема Муавра-Лапласа. *В данных выше обозначениях имеет место сходимость* :

$$\frac{\sqrt{npq} P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} \to 1\ ,\ n \to \infty$$

равномерно по k, для которых x находится в каком-либо ограниченном промежутке .

Доказательство. Прежде всего из задания x установим два *равенства связи* между k, $n-k$ и x:

$$k = np + x\sqrt{npq}\ ,\ n - k = nq - x\sqrt{npq}.$$

Равенства связи, в частности, показывают следующее (нам, по условиям теоремы, нужна ограниченность x):

$$-\infty < a \le x \le b < \infty\ \Rightarrow\ k \to \infty \text{ и } n - k \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Применим формулу Стирлинга к вычислению $P_n(k)$:

$$P_n(k) = \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\Theta_n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} e^{\Theta_k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} e^{\Theta_{n-k}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n p^k q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} \cdot e^{\Theta} = A_{nk} \cdot B_{nk} \cdot C_{nk},$$

$$|\Theta| = |\Theta_n - \Theta_k - \Theta_{n-k}| < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right).$$

Рассмотрим поведение каждого из сомножителей, начнём с C_{nk}. Для $-\infty < a \le x \le b < \infty$ из уравнений связи получим:

$$k \ge np + a\sqrt{npq} = np\left(1 + a\sqrt{\frac{q}{np}}\right), n-k \ge nq - b\sqrt{npq} = nq\left(1 - b\sqrt{\frac{p}{nq}}\right),$$

откуда

$$|\Theta| < \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + a\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - b\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) \to 0\,,\ n \to \infty.$$

Т.о., каким бы ни был (фиксированный) промежуток $[a, b]$, ведичина Θ равномерно относительно $x \in [a, b]$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$C_{nk} = e^{\Theta} \to 1\,,\ n \to \infty \text{ равномерно относительно } x \in [a, b].$$

Прологарифмируем B_{nk}:

$$\ln B_{nk} = \ln\left(\frac{n^n p^k q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}\right) = \ln\left(\frac{n^k p^k n^{n-k} q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}\right) =$$

$$\ln\left\{\left(\frac{np}{k}\right)^k\right\} + \ln\left\{\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right\} = -k\ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) =$$

$$= -(np + x\sqrt{npq})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$$

(в последнем равенстве мы использовали равенства связи).

В силу ограниченности x имеем:

$$x\sqrt{\frac{q}{np}} \to 0\,,\ x\sqrt{\frac{p}{nq}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

поэтому, использовав формулу Тейлора для разложения $\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$ и $\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$, получим:

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

(и остаточные члены равномерно по x из любого ограниченного промежутка стремятся к нулю при $n \to \infty$). Окончательно получим:

$$\ln B_{nk} = -(np + x\sqrt{npq})\left\{x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right\} -$$

$$-(nq - x\sqrt{npq})\left\{-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right\} = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(мы позволили себе опустить здесь раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых). После потенцирования итогового равенства

$$\ln B_{nk} = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ ,\ n \to \infty$$

получаем, что равномерно по x в любом ограниченном промежутке $[a, b]$ имеет место сходимость

$$\frac{B_{nk}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \to 1\ ,\ n \to \infty.$$

Наконец, вновь использовав равенства связи, получим:

$$\sqrt{2\pi}A_{nk} = \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{(np + x\sqrt{npq})(nq - x\sqrt{npq})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}})(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}})}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\sqrt{\frac{1}{(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}})(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}})}},$$

т.е.

$$\sqrt{npq}A_{nk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{1}{(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}})(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}})}}.$$

Правая часть равенства равномерно по x в каждом ограниченном промежутке стремится к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. В итоге

$$\frac{\sqrt{npq}A_{nk}B_{nk}C_{nk}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}} \to 1\ ,\ n \to \infty$$

равномерно по k, для которых x находится в каком-либо ограниченном промежутке, что эквивалентно утверждению теоремы .

Пример. Вычислим с помощью теоремы вероятность $P_n(k)$ при

$$n = 10000\ ,\ k = 40\ ,\ p = 0,005\ ,\ q = 1 - p = 0,995.$$

Применяя доказанное утверждение, имеем:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}.$$

У нас

$$\sqrt{npq} = \sqrt{49,75} \approx 7,05\ ,\ \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx -1,42.$$

Т.о.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{7,05\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1,42^2}{2}} = \frac{1}{7,05} f_{0,1}(1,42) \approx \frac{0,1456}{7,05} \approx 0,0206.$$

Здесь $f_{0,1}(x)$ - плотность распределения стандартного нормального закона ($N(0,1)$), она табулирована. Интересно, что вычисления без использования теоремы Муавра-Лапласа дают:

$$P_n(k) \approx 0,0197.$$

Замечание. На самом деле из доказательства видно, что асимптотическое представление вероятности $P_n(k)$ с помощью функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ тем хуже, чем больше вероятности p и q отличаются от $1/2$; если p становится очень близким к нулю, то, например, при оценке C_{nk} знаменатель одной из дробей стремится к нулю, а при оценке B_{nk} слишком велика становится погрешность при разложении логарифма и т.д.. Если p становится близким к единице, то ситуация не изменится, т.к. близким к нулю становится q. В случае же $p = 0$ или $q = 0$ это представление вообще неприменимо. В своё время (после следующей теоремы) мы покажем другую точечную аппроксимацию биномиального распределения, удобную в "крайних" случаях, когда вероятности p и q сосредоточены слишком близко к границам отрезка $[0,1]$.

6.3 Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Локальная предельная теорема позволяет нам оценивать "точечные" значения вероятности $P_n(k)$, но часто в практических задачах требуется оценить вероятность попадания $S_n \in B(n,p)$ в какой либо промежуток.

Соответствующую оценку даёт следующая теорема, но сначала введём вспомогательное обозначение:

$$P_n(a,b) = \mathbf{P}\left\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\}\ ,\ -\infty \le a < b \le \infty,$$

(особо отметим, что промежуток может быть бесконечным). Здесь вполне естественным оказывается включение левой и исключение правой границ промежутка. Пусть

$$\zeta = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\ ,\ F_\zeta(x) = \mathbf{P}(\zeta < x).$$

Тогда

$$P_n(a,b) = \mathbf{P}(a \le \zeta < b) = F_\zeta(b) - F_\zeta(a),$$

при этом, естественно,

$$F_\zeta(-\infty) = 0.$$

Теорема 4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. *Равномерно относительно a и b имеет место сходимость* :

$$P_n(a,b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \to 0\ ,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P_n(a,b) = \sum_{k:\ a \le x_{n,k} < b} P_n(k)\ ,\ x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Введём функцию

$$y = \Pi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n,0} = -\frac{np}{\sqrt{npq}}, \\ \sqrt{npq}P_n(k), & x_{n,k} \le x < x_{n,k+1}, k \in \{0,1,...,n\}, \\ 0, & x \ge x_{n,n+1} = x_{n,n} + \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1+nq}{\sqrt{npq}}, \end{cases}$$

(выражение $x_{n,n+1}$, конечно, лишено вероятностного смысла; здесь оно используется только для единообразия обозначений). Очевидно, что вероятность $P_n(k)$ равна площади прямоугольника, ограниченного графиком $y = \Pi_n(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = x_{n,k}$ и $x = x_{n,k+1}$ (заметим, что длина промежутка между соседними точками равна $x_{n,k+1} - x_{n,k} = 1/\sqrt{npq}$):

$$P_n(k) = \sqrt{npq}P_n(k)(x_{n,k+1} - x_{n,k}) = \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \Pi_n(x)dx.$$

Тогда вероятность $P_n(a,b)$ равна площади, заключённой между кривой $y=\Pi_n(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x=x_{n,\underline{k}}$ и $x=x_{n,\overline{k}}$, где $\underline{k}$ и $\overline{k}$ определяются с помощью неравенств:

$$a \le x_{n,\underline{k}} < a+\frac{1}{\sqrt{npq}}\ ,\ b \le x_{n,\overline{k}} < b+\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Отметим, что может оказаться (невзирая на отсутствие вероятностного смысла): $\underline{k}<0$ и(или) $\overline{k}>n+1$. Это лишь означает, что заведомо

$$a<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \text{ и(или) } b>\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда по определению $\Pi_n(x)$

$$x\in[x_{n,\underline{k}},x_0)\bigcup[x_{n,n+1},x_{n,\overline{k}})\ \Rightarrow\ \Pi_n(x)=0.$$

Неравенства для определения $\underline{k}$ и $\overline{k}$ обусловлены тем, что в любом полуинтервале длиной $1/\sqrt{npq}$ будет находиться одна (и только одна) точка $x_{n,k}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Учитывая сказанное, имеем:

$$P_n(a,b)=\int_{x_{n,\underline{k}}}^{x_{n,\overline{k}}}\Pi_n(x)dx=\int_a^b\Pi_n(x)dx+\int_b^{x_{n,\overline{k}}}\Pi_n(x)dx-\int_a^{x_{n,\underline{k}}}\Pi_n(x)dx.$$

Мы показывали, что (в общем случае) наибольшее значение вероятности $P_n(k)$ приходится на $k_0=[(n+1)p]$. Тогда наибольшее значение $\Pi_n(x)$ придётся на полуинтервал

$$-\frac{1}{\sqrt{npq}}\le\frac{k_0-np}{\sqrt{npq}}\le x<\frac{k_0+1-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{2}{\sqrt{npq}}.$$

На этом промежутке действует локальная теорема Муавра-Лапласа, поэтому для достаточно больших n заведомо будет выполняться:

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\Pi_n(x)<2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\max_{x\in\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

С помощью этой оценки получим:

$$\left|P_n(a,b)-\int_a^b\Pi_n(x)dx\right|=|r_n|=\left|\int_b^{x_{n,\overline{k}}}\Pi_n(x)dx-\int_a^{x_{n,\underline{k}}}\Pi_n(x)dx\right|\le$$

$$\le\int_b^{x_{n,\overline{k}}}\max_{x\in\mathbb{R}}\Pi_n(x)dx+\int_a^{x_{n,\underline{k}}}\max_{x\in\mathbb{R}}\Pi_n(x)dx<\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-b+x_{n,\overline{k}}+x_{n,\underline{k}}-a)=$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}((x_{n,\bar{k}} - b) + (x_{n,\underline{k}} - a)) \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi npq}} \to 0\ ,\ n \to \infty.$$

Предположим сначала, что a и b конечны. Тогда при $a \leq x_{n,k} < b$ результат локальной теоремы Муавра-Лапласа может быть записан в следующем виде:

$$\Pi_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}(1 + \alpha_n(x_{n,k})),$$

где $\alpha_n(x_{n,k}) \to 0$, $n \to \infty$ равномерно относительно $x_{n,k}$.

Пусть $x_{n,k} \leq x < x_{n,k+1}$.

$$\Pi_n(x) = \Pi_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2 - x_{n,k}^2}{2}}(1 + \alpha_n(x_{n,k})) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{x^2 - x_{n,k}^2}{2}}(1 + \alpha_n(x_{n,k})) - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + \alpha_n(x)),$$

$$\alpha_n(x) = e^{\frac{x^2 - x_{n,k}^2}{2}}(1 + \alpha_n(x_{n,k})) - 1.$$

Из произвольности выбора k (т.е. полуинтервала $[x_{n,k}, x_{n,k+1})$) и следующей очевидной цепочки неравенств

$$\frac{x^2 - x_{n,k}^2}{2} \leq |x||x - x_{n,k}| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{\sqrt{npq}}$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \leq x < b} \alpha_n(x) = 0.$$

Итак, нами доказано представление

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + \alpha_n(x))\ ,\ \lim_{n\to\infty} \max_{a \leq x < b} \alpha_n(x) = 0\ ,\ a \leq x < b.$$

В итоге получаем:

$$P_n(a, b) = \int_a^b \Pi_n(x)dx + r_n = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + \alpha_n(x))dx + r_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\alpha_n(x)dx + r_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\alpha_n(x)dx + r_n.$$

Учитывая
$$|R_n| \le \max_{a\le x<b} |\alpha_n(x)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + |r_n|,$$
имеем
$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$
Мы доказали теорему при дополнительном условии конечности a и b.

Заметим, что
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists A_\varepsilon < \infty : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$
Из соображений симметрии ясно, что
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \frac{\varepsilon}{8}.$$
Теорема уже доказана нами для случая ограниченного промежутка, поэтому найдётся n такое, что при любых $-A_\varepsilon \le a \le b \le A_\varepsilon$
$$\left| P_n(a,b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4} \, , \, \left| P_n(-A_\varepsilon, A_\varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$
откуда
$$P_n(-A_\varepsilon, A_\varepsilon) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \, , \, P_n(-\infty, -A_\varepsilon) + P_n(A_\varepsilon, \infty) = 1 - P_n(-A_\varepsilon, A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Пусть теперь a и b произвольны: $-\infty \le a < b \le \infty$. Необходимо показать:
$$\left| P_n(a,b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \varepsilon.$$
Необходимо рассматривать по отдельности различные случаи взаимного расположения на прямой точек a и b относительно интервала $(-A_\varepsilon, A_\varepsilon)$ (интервал определяется выбором ε , поэтому даже конечные a и b могут оказаться вне $(-A_\varepsilon, A_\varepsilon)$; тем более, что нас интересует ситуация когда хотя бы одна из точек a и b бесконечна). Здесь мы рассмотрим лишь случай $a \le -A_\varepsilon$, $A_\varepsilon \le b$ (остальные полностью аналогичны). Имеем:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{-A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_\varepsilon}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$
$$P_n(a,b) = P_n(a, -A_\varepsilon) + P_n(-A_\varepsilon, A_\varepsilon) + P_n(A_\varepsilon, b).$$

$$\left|P_n(a,b)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right| \le \left|P_n(a,-A_\varepsilon)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{-A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|+$$
$$+\left|P_n(-A_\varepsilon,A_\varepsilon)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|+\left|P_n(A_\varepsilon,b)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_\varepsilon}^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|\le$$
$$\le P_n(-\infty,-A_\varepsilon)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\left|P_n(-A_\varepsilon,A_\varepsilon)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|+$$
$$+P_n(A_\varepsilon,\infty)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=(P_n(-\infty,-A_\varepsilon)+P_n(A_\varepsilon,\infty))+$$
$$+\left|P_n(-A_\varepsilon,A_\varepsilon)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-A_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\varepsilon.$$

Пример. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и с помощью только что доказанной теоремы оценим вероятность того, что следующее неравенство осуществится:

$$\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon.$$

Имеем:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=\mathbf{P}\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}.$$

Используя интегральную теорему Муавра-Лапласа, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1.$$

Фактически мы только что опять доказали ЗБЧ для схемы Бернулли, только теперь с использованием других способов. Рассмотрим несколько простых задач, связанных с данной теоремой. Будем, что вполне естественно, интерпретировать $\frac{S_n}{n}$ как частоту наступления успеха в n одинаковых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха, равной p в каждом.

1. Чему равна вероятность того, что частота наступления успеха отклонится от вероятности успеха p не более, чем на заданную величину α? Имеем:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le\alpha\right\}=\mathbf{P}\left\{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\le\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}\approx$$
$$\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

2. Какое наименьшее число испытаний нужно произвести для того, чтобы с вероятностью, не меньшей β, частота $\frac{S_n}{n}$ отклонялась от вероятности успеха p не больше, чем на α? На самом деле число испытаний n нужно определить из неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le\alpha\right\}\ge\beta.$$

Заменим вероятность в левой части её приближенным значением по теореме Муавра-Лапласа и для определения n получим неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ge\beta.$$

3. При фиксированных вероятности β и числе испытаний n требуется определить границу возможных изменений $\left|\frac{S_n}{n}-p\right|$, т.е., зная β и n, нужно определить α такое, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\alpha\right\}=\beta.$$

Применение теоремы даёт нам для определения α уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\beta.$$

Заметим, что все задачи сводятся к уравнениям (неравенствам) для одной и той же функции:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

называемой *функцией Лапласа*. Она табулирована, отметим лишь простейшие свойства:

$$\Phi(0)=0\ ,\ \Phi(-x)=-\Phi(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1.$$

На практике обычно полагают $\Phi(x)=1\ ,\ x\ge 4$.

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=$$

$$=2(F_{0,1}(x)-\frac{1}{2})=2F_{0,1}(x)-1\ \Rightarrow\ F_{0,1}(x)=\frac{\Phi(x)+1}{2}.$$

В чаще всего встречающихся задачах требуется оценить вероятность того, что количество успехов оказывается в определённом промежутке.

Опишем эту вероятность с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа в терминах функции Лапласа:

$$\mathbf{P}(a \le S_n \le b) = \mathbf{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx$$

$$\approx F_{0,1}\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - F_{0,1}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)\right).$$

Замечание.

1. Легко убедиться, что упомянутая перед теоремой случайная величина ζ есть не что иное, как отнормированная $S_n : \zeta = \widetilde{S}_n$. Т.о. фактически мы показали сходимость функции распределения $\widetilde{S}_n$ к функции распределения стандартного нормального закона ($N(0,1)$).

2. Как уже говорилось, локальная, а значит и интегральная теоремы Муавра-Лапласа дают результаты с тем большей ошибкой, чем ближе вероятности p и q к граничным (0 и 1). Математически это можно компенсировать неограниченным ростом числа испытаний n, но в практических задачах это не всегда реализуемо. Следовательно, появляется задача построения асимптотической формулы, годной для p, близких к 0 или 1.

6.4 Теорема Пуассона

Введём в рассмотрение *схему серий*

$$\begin{array}{lllll}
\xi_{11}, & & & & \\
\xi_{21}, & \xi_{22}, & & & \\
\xi_{31}, & \xi_{32}, & \xi_{33}, & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\xi_{n1}, & \xi_{n2}, & \xi_{n3}, & \cdots & \xi_{nn}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}.$$

Все ξ_{ij} являются случайными величинами, заданными на одном вероятностном пространстве, строку будем называть серией (n-я серия состоит из n случайных величин):

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{nn} - \text{НОРСВ}, \ \xi_{ni} \in B_{p_n}\ , \ i \in \{1, 2, ..., n\},$$

где

$$p_n \in [0,1]\ , \ p_n \to 0\ , \ \lambda_n = np_n \to \lambda \in (0; \infty) \text{ при } n \to \infty.$$

Отметим, что между испытаниями в различных сериях независимость не требуется (одинаковой распределённости между сериями нет по условию).

Наконец, для каждой серии построим ещё одну случайную величину:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nn} \in B(n, p_n).$$

Используя данные выше обозначения, мы можем сформулировать результат:

Теорема 5. Теорема Пуассона.

$$P_n(k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \to 0\ ,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$P_n(k) = \mathbf{P}(S_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k}.$$

Зафиксируем k. Используем известный из курса математического анализа предел:

$$\forall k > 0: \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-\frac{x}{2}} = 0,$$

что эквивалентно

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in (0; \infty) \forall \lambda > A_\varepsilon \Rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим сначала только такие n, для которых $\lambda_n > A_\varepsilon$. Используем ещё один известный из курса математического анализа факт:

$$1 - x \leq e^{-x}\ ,\ x \in [0; 1].$$

Из выражения для $P_n(k)$ имеем:

$$P_n(k) < \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\frac{n-k}{n}\lambda_n} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(предпоследнее неравенство верно при $n > 2k$). Аналогично,

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для выбранных n имеем:

$$\left|P_n(k) - \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь n, для которых $\lambda_n \le A_\varepsilon$. Для них (напомним, что k фиксировано):

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n - e^{-\lambda_n}\right\} = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k} = 1.$$

Т.о., используя полученное в начале доказательства представление $P_n(k)$, окончательно получим, что, начиная с некоего номера $N(\varepsilon)$, для всех n:

$$\left|P_n(k) - \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}\right| < \varepsilon.$$

Замечание.

1. Ничего страшного не произойдёт, если в неких сериях вероятности успеха обращаются в ноль. Теорема Пуассона всё равно действует, просто соответствующие $\lambda_n = 0$.

2. Теорема Пуассона даёт удобную аппроксимацию биномиального распределения, когда с ростом n величины $np_n = \lambda_n$ малы, т.е. вероятности успеха p_n близки к нулю. В некоторых же задачах они, наоборот, близки к единице. Тогда величина $np_n = \lambda_n$ оказывается слишком большой, и теорема Пуассона, формально оставаясь верной, технически становится неприменимой. В этой ситуации "меняют местами" успех и неудачу в испытании Бернулли, т.е. в результат теоремы вместо близких к единице p_n подставляют близкие к нулю $q_n = 1-p_n$ (формально $P_n(k)$ будет показывать вероятность получить в n испытаниях k неудач).

3. Можно заметить, что в доказательстве мы не использовали сходимость λ_n к λ. На практике редко встречаются схемы серий с изменяющимися вероятностями успехов. В обычной ситуации есть результаты большого числа (n) одинаковых экспериментов с очень маленькой вероятностью успеха (p) в каждом. В качестве λ берут $\lambda = \lambda_n = np$ и применяют теорему следующим образом:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Пример. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если всего произведено 5000 выстрелов.

В нашей задаче испытанием Бернулли является выстрел (2 исхода - попадание(успех) и промах(неудача); вероятность успеха $p = 0,001$, испытания (выстрелы) - независимы). Количество испытаний $n = 5000$, в качестве $S_n = S_{5000}$ берётся количество попаданий. Необходимо найти $\mathbf{P}(S_{5000} \geq 2)$.

Воспользуемся теоремой Пуассона.

$$\lambda_n = \lambda = np = 5\ ,\ \mathbf{P}(S_{5000} \geq 2) = \sum_{k=2}^{5000} P_{5000}(k) = 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1).$$

По теореме Пуассона

$$P_{5000}(0) \approx e^{-5}\ ,\ P_{5000}(1) \approx 5e^{-5}\ ,\ \mathbf{P}(S_{5000} \geq 2) \approx 1 - 6e^{-5} \approx 0,9596.$$

Глава 7. Характеристические функции

7.1 Определение и простейшие свойства характеристических функций

По данному нами определению случайная величина является вещественнозначной функцией, однако можно рассматривать и комплекснозначные случайные величины, под которыми следует понимать функции вида $\xi_1 + i\xi_2$, где (ξ_1, ξ_2) - случайный вектор. Естественным образом вводятся математическое ожидание

$$\mathbf{E}(\xi_1 + i\xi_2) = \mathbf{E}\xi_1 + i\mathbf{E}\xi_2$$

и независимость $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ и $\eta = \eta_1 + i\eta_2$: они независимы, если σ-алгебры $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ и $\sigma(\eta_1, \eta_2)$, порождённые соответственно векторами (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2), независимы (т.е. независимы сами векторы (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2)). Для них остаётся справедливым свойство

$$\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta.$$

В дальнейшем изложении, если специально не оговаривается обратное, под случайными величинами, как и раньше, понимаются вещественнозначные случайные функции.

Определение 1. *Характеристической функцией (ХФ) случайной величины ξ называется коммплекснозначная функция*

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x) \ , \ t \in \mathbb{R},$$

(где $F_\xi(x)$- функция распределения ξ.)

Замечание.

1. ХФ существует для любой случайной величины ξ. Действительно, используя свойства интеграла Стилтьеса, получим:

$$|\varphi_\xi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} \right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dF_\xi(x) = 1.$$

2. Пусть ξ - дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

Значения	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
Вероятности	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$.

   Тогда её ХФ имеет вид:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{ita_n} p_n.$$

3. Пусть ξ - абсолютно непрерывно распределённая случайная величина с плотностью распределения $f_\xi(x)$. Тогда её ХФ

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$$

   есть просто преобразование Фурье функции $f_\xi(x)$.

Простейшие свойства ХФ.

1. Для любой случайной величины ξ

$$\varphi_\xi(0) = 1 \ , \ \forall t \in \mathbf{R} : \ |\varphi_\xi(t)| \le 1.$$

   Свойство очевидно.

2.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ \varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(ta).$$

Действительно,

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = \mathbf{E}e^{it(a\xi+b)} = \mathbf{E}\left\{e^{i(ta)\xi}e^{itb}\right\} = e^{itb}\mathbf{E}e^{i(ta)\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(ta).$$

3. Пусть
$$\xi_1, ..., \xi_n - \text{НСВ}, \ S_n = \xi_1 + ... + \xi_n.$$

Тогда ХФ S_n имеет вид:

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)...\varphi_{\xi_n}(t).$$

В самом деле, из независимости $\xi_1, ..., \xi_n$ следует независимость $e^{it\xi_1}, ..., e^{it\xi_n}$. Тогда по свойствам математического ожидания произведения независимых случайных величин имеем:

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbf{E}e^{it\sum_{i=1}^n \xi_i} = \mathbf{E}\left\{e^{it\xi_1}...e^{it\xi_n}\right\} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}...\mathbf{E}e^{it\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t)...\varphi_{\xi_n}(t).$$

4. ХФ $\varphi_\xi(t)$ равномерно непрерывна на всей вещественной оси.

Действительно,

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| = \left|\mathbf{E}\left(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi}\right)\right| \le \mathbf{E}\left|e^{it\xi}\left(e^{ih\xi} - 1\right)\right| \le$$
$$\le \mathbf{E}\left|e^{ih\xi} - 1\right| \to 0\,, \ h \to 0,$$

т.к.
$$|e^{ih\xi} - 1| \to 0\,, \ h \to 0 \text{ и } |e^{ih\xi} - 1| \le 2.$$

5.
$$\overline{\varphi}_\xi(t) = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)\,, \ t \in \mathbb{R}$$

(черта сверху обозначает комплексное сопряжение).

Очевидно:

$$\overline{\varphi}_\xi(t) = \overline{\mathbf{E}e^{it\xi}} = \mathbf{E}\overline{e^{it\xi}} = \mathbf{E}e^{-it\xi} = \mathbf{E}e^{i(-t)\xi} = \mathbf{E}e^{it(-\xi)}.$$

Отсюда следует, что если ξ - симметричная случайная величина (т.е. распределенная так же, как и $-\xi$), то её ХФ вещественна (на самом деле верно и обратное).

6.
$$\mathbf{E}\left\{|\xi|^k\right\} < \infty \;\Rightarrow\; \varphi_\xi(t) \in C^k(\mathbb{R}) \text{ и } \varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathbf{E}\left\{\xi^k\right\}.$$

Действительно, из того, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} dF_\xi(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{itx} dF_\xi(x) = \mathbf{E}\left\{\xi\right\} < \infty$$

следует, что возможно дифференцирование под знаком интеграла:

$$\varphi_\xi'(t) = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} dF_\xi(x)\,,\; \varphi_\xi'(0) = i\mathbf{E}\xi.$$

Далее используем ММИ: пусть для $m < k$ справедливо

$$\varphi_\xi^{(m)}(t) = i^m \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{itx} dF_\xi(x).$$

Тогда

$$\varphi_\xi^{(m+1)}(t) = i^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{m+1} e^{itx} dF_\xi(x),$$

т.к. интеграл в правой части сходится равномерно. Как следствие:

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathbf{E}.$$

Отметим здесь без доказательства то, что обратное утверждение верно лишь отчасти (только для чётных производных и моментов):

$$\varphi_\xi(t) \in C^{2k}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \mathbf{E}\left\{|\xi|^{2k}\right\} < \infty \text{ и } \varphi_\xi^{(2k)}(0) = (-1)^k \mathbf{E}\left\{\xi^{2k}\right\}.$$

7. Будем говорить, что случайная величина ξ имеет *решётчатое распределение с шагом решётки* $h > 0$, если

$$\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\xi = a + kh) = 1.$$

Имеет место следующее утверждение: случайная величина ξ имеет решётчатое распределение с шагом решётки $h > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\varphi_\xi(t)\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1.$$

В самом деле, если ξ имеет решётчатое распределение, то

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{it(a+kh)} \mathbf{P}(\xi = a + kh) = e^{ita} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{itkh} \mathbf{P}(\xi = a + kh),$$

откуда

$$\varphi_\xi(t)\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{i\frac{2\pi}{h}a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi k}\mathbf{P}(\xi = a+kh) = e^{i\frac{2\pi}{h}a},$$

что доказывает утверждение в одну сторону. Обратно, пусть

$$\left|\varphi_\xi(t)\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1.$$

Тогда, подставив в нижеследующие равенства $t = \frac{2\pi}{h}$, получим:

$$\varphi_{\xi-a}(t) = \mathbf{E}\cos\{t(\xi-a)\} + i\mathbf{E}\sin\{t(\xi-a)\} = 1,$$

откуда

$$\mathbf{E}(1-\cos\{t(\xi-a)\}) = 0.$$

Из

$$1-\cos\{t(\xi-a)\} \geq 0$$

и свойств ХФ окочательно получаем:

$$\cos\{t(\xi-a)\} = 1 \text{ при } t = \frac{2\pi}{h} \Rightarrow \frac{2\pi}{h}(\xi-a) = 2\pi k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

(последнее равенство - с вероятностью 1), что полностью доказывает утверждение.

7.2 Примеры ХФ

1. **Атомическое (вырожденное) распределение.**

$$\mathbf{P}(\xi = a) = 1 \Rightarrow \varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = e^{ita}.$$

2. **Испытание Бернулли.** Случайная величина $\xi \in B_p$, поэтому

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = e^{it\cdot 0}\cdot q + e^{it\cdot 1}\cdot p = q + pe^{it} = 1 + p(e^{it}-1).$$

3. **Биномиальное распределение.** Воспользуемся представлением биномиально распределенной случайной величины $S_n \in B(n,p)$:

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n\,,\ \xi_i \in B_p\,,\ \xi_1,...,\xi_n \text{ - НОРСВ.}$$

Тогда по свойствам ХФ имеем:

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)...\varphi_{\xi_n}(t) = (\varphi_{\xi_1}(t))^n = \left(q+pe^{it}\right)^n.$$

4. **Пуассоновское распределение.** Напомним, что

$$\xi \in \Pi_\lambda,\ \lambda > 0 \ \Leftrightarrow\ \xi \in \{0, 1, 2, ..., n, ...\} \text{ и } \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

5. **Равномерное распределение.** Случайная величина $\xi \in U[a, b]$. Напомним, что это распределение является абсолютно непрерывным.

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Отметим важный частный случай: $\xi \in U[-1, 1]$ (распределение этой случайной величины симметрично).

$$\varphi_\xi(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}\ ,\ t \neq 0\ ;\ \varphi_\xi(0) = 1.$$

Мы убедились, что ХФ вещественна.

6. **Экспоненциальное распределение .** Наша случайная величина $\xi \in \Gamma_\alpha$, $\alpha > 0$. Это распределение также является абсолютно непрерывным.

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \alpha\int_0^{\infty} e^{itx}e^{-\alpha x}dx =$$

$$= \frac{\alpha}{it-\alpha}e^{itx}e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

7. **Нормальное распределение .** Рассмотрим сначала случайную величину $\xi \in N(0, 1)$.

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}}dx.$$

Продифференцируем по t, а затем используем формулу интегрирования по частям:

$$u = ie^{itx}\ ,\ dv = xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\ \Rightarrow\ du = -te^{itx}dx\ ,\ v = -e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\varphi'_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ ie^{itx} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} te^{itx-\frac{x^2}{2}} dx \right\} = -t\varphi_\xi(t).$$

Из полученного дифференциального уравнения имеем:

$$\varphi_\xi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Использовав начальное условие для ХФ, окончательно получим:

$$\varphi_\xi(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ и } \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Пусть теперь η - произвольная нормально распределённая случайная величина: $\eta \in N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Тогда, очевидно, её можно представить в виде

$$\eta = \sigma\xi + \mu \, , \; \xi \in N(0,1),$$

откуда, использовав свойства ХФ, получим:

$$\varphi_\eta(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

7.3 Формула обращения

Естественно, что распределение случайной величины полностью определяет её ХФ. На самом деле верно и обратное, т.е. по ХФ случайной величины полностью восстанавливается её распределение (но не сама случайная величина!). Сформулируем без доказательства (его мы опустим из-за громоздкости) следующее утверждение.

Теорема 1. Формула обращения. *Пусть $F_\xi(x)$ - функция распределения случайной величины ξ, $\varphi_\xi(t)$ - её ХФ. Тогда во всех точках непрерывности $F_\xi(x)$ имеет место равенство* :

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_\xi(t) e^{-t^2\sigma^2} dt.$$

В случае интегрируемости $\frac{\varphi_\xi(t)}{t}$ на $\mathbb{R}$ возможен предельный переход под знаком интеграла и равенство принимает вид:

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_\xi(t) dt.$$

Замечание. В случае абсолютной непрерывности распределения доказательство почти очевидно. Действительно, пусть $f_\xi(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ. Тогда, использовав обратное преобразование Фурье, получим:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx \;\Rightarrow\; f_\xi(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}\varphi_\xi(t)dt.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства от x до y и поменяв в правой части (в силу её абсолютной сходимости) порядок интегрирования, получим утверждение теоремы.

Следствие (теорема единственности). *ХФ случайной величины однозначно определяет её функцию распределения.*

Доказательство. Немедленно следует из формулы обращения и из того, что всевозможные разности $F_\xi(y) - F_\xi(x)$ полностью определяют функцию распределения $F_\xi(x)$.

Пример (свойство устойчивости). Пусть

$$\xi_1, \xi_2 \; - \; \text{НСВ} \; ; \; \xi_1 \in N(\mu_1, \sigma_1^2) \; , \; \xi_2 \in N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Их ХФ

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{it\mu_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \; , \; \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it\mu_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}.$$

Рассмотрим случайную величину $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Её ХФ равна произведению ХФ слагаемых:

$$\varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}},$$

что является ХФ $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Тогда по теореме единственности получаем, что сумма независимых нормально распределённых случайных величин также имеет нормальное распределение:

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \in N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Замечание. Вкратце распространим понятие ХФ на многомерные распределения. Рассмотрим случайный вектор $\overline{\xi} = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Его ХФ назовём функцию векторного аргумента

$$\varphi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \varphi_{\overline{\xi}}(t_1, ..., t_n) = \mathbf{E}e^{i\overline{t}\overline{\xi}^T} = \mathbf{E}e^{i(\overline{t}, \overline{\xi})} = \mathbf{E}e^{i\sum_{k=1}^n t_k\xi_k}.$$

ХФ многомерных распределений обладают всеми свойствами (с очевидными изменениями в формулировках), изложенными выше для одномерных распределений, поэтому мы не будем на них останавливаться. Отметим следующее: пусть координаты $\xi_1, ..., \xi_n$ случайного вектора $\overline{\xi}$ независимы. Тогда его ХФ превращается в произведение ХФ координат:

$$\varphi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \mathbf{E}e^{i\sum_{k=1}^n t_k\xi_k} = \mathbf{E}\left\{e^{it_1\xi_1}...e^{it_n\xi_n}\right\} = \mathbf{E}e^{it_1\xi_1}...\mathbf{E}e^{it_n\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t_1)...\varphi_{\xi_n}(t_n).$$

7.4 Применение ХФ в предельных теоремах

Аппарат ХФ во многом изначально создавался именно для доказательств различных теорем о сходимости последовательностей случайных величин. Ниже мы дадим ряд необходимых определений, а также дополнительных утверждений, доказательства которых мы опустим в силу их громоздкости. К тому же, основной целью дальнейшего является именно демонстрация использования аппарата ХФ.

Определение 2. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ξ *- случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве,* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, F *- их функции распределения.*

1. *Будем говорить, что* F_n *слабо сходится к* F

   $$F_n \Rightarrow F \;,\; n \to \infty,$$

   если

   $$F_n(x) \to F(x) \;,\; n \to \infty$$

   в каждой точке x, *в которой предельная функция* F *непрерывна (т.е. в точках непрерывности функции* F*).*

2. *Будем говорить, что* ξ_n *сходится по распределению к* ξ

   $$\xi_n \Rightarrow \xi \;,\; n \to \infty,$$

   если соответствующие функции распределения слабо сходятся:

   $$F_n \Rightarrow F \;,\; n \to \infty.$$

Замечание.

1. На самом деле (мы не будем это показывать), из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению:

   $$\xi_n \to \xi \;,\; n \to \infty \textit{ по вероятности } \text{ влечёт } \xi_n \Rightarrow \xi \;,\; n \to \infty,$$

   причём обратное неверно. Однако если предельная случайная величина имеет вырожденное (атомическое) распределение (т.е. равна константе с вероятностью 1), то сходимость по вероятности и сходимость по распределению эвивалентны. В этом смысле мы можем по-другому сформулировать ЗБЧ для схемы Бернулли:

   $$\frac{S_n}{n} \Rightarrow p \;,\; n \to \infty.$$

Аналогичным образом переформулируется результат, полученный в интегральной теореме Муавра-Лапласа. Пусть

$$S_n \in B(n,p)\ ,\ F_n(x) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

- функция распределения отнормированной биномиально распределённой случайной величины, $F_{0,1}(x)$ - функция распределения стандартного нормального закона ($N(0,1)$). Тогда имеет место слабая сходимость

$$F_n \Rightarrow F_{0,1}\ ,\ n \to \infty.$$

2. Имеет место фундаметальный результат (иногда называемый *теоремой непрерывности*), который здесь мы лишь сформулируем в силу громоздкости доказательства, но чуть ниже дадим пример применения: *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ξ *- случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве,* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}, F$ *- их функции распределения,* $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}, \varphi(t)$ *- их ХФ соответственно. Тогда для слабой сходимости*

   $$F_n \Rightarrow F\ ,\ n \to \infty$$

   необходимо и достаточно, чтобы

   $$\forall t \in \mathbb{R}:\ \varphi_n(t) \to \varphi(t)\ ,\ n \to \infty.$$

   Переформулировав по-другому: сходимость по распределению случайных величин равносильна поточечной сходимости их ХФ:

   $$\xi_n \Rightarrow \xi\ ,\ n \to \infty \text{ эквивалентно } \forall t \in \mathbb{R}:\ \varphi_n(t) \to \varphi(t)\ ,\ n \to \infty.$$

Теорема 2. ЗБЧ в форме Хинчина. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность НОРСВ с конечным первым моментом* $\mathbf{E}\xi_1 = a \in \mathbb{R}$ *и* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. *Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \to a\ ,\ n \to \infty \text{ по вероятности }.$$

Доказательство. Выписанное соотношение эквивалентно слабой сходимости распределений, т.е. достаточно показать, что имеет место сходимость ХФ S_n/n к ХФ случайной величины с вырожденным распределением:

$$\forall t \in \mathbb{R}:\ \varphi_{\left(\frac{S_n}{n}\right)}(t) \to e^{iat}\ ,\ n \to \infty.$$

Обозначим ХФ ξ_1

$$\varphi(t) = \varphi_{\xi_1}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_1}.$$

В силу непререрывности ХФ и того, что $\varphi(0) = 1$ заключаем, что в некоторой окрестности $t = 0$

$$|\varphi(t) - 1| < \frac{1}{2}.$$

Тогда в этой окрестности нуля можно определить функцию

$$l(t) = \ln \varphi(t) \text{ и } l'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = ia$$

в силу существования математического ожидания ξ_1. При каждом фиксированном t величина $\frac{t}{n}$, начиная с некоторого n, оказывается в нужной окрестности нуля, т.е. определено значение $l(\frac{t}{n})$. Тогда

$$\varphi_{\left(\frac{S_n}{n}\right)}(t) = \varphi^n(t/n) = e^{l(\frac{t}{n})n}.$$

Используя то, что $l(0) = 0$, а также дифференцируемость $l(t)$ в нуле, окончательно получаем утверждение теоремы:

$$\varphi_{\left(\frac{S_n}{n}\right)}(t) = e^{l(\frac{t}{n})n} = e^{t\frac{l(t/n)-l(0)}{t/n}} \to e^{l'(0)t} = e^{iat}\ ,\ n \to \infty.$$

Замечание. Мы уже сталкивались с ЗБЧ для схемы Бернулли и для произвольных последовательностей НОРСВ. Очень важно отметить, что использование аппарата ХФ позволило нам в ЗБЧ в форме Хинчина отказаться от существования второго момента у исходных случайных величин; в предыдущих формулировках ЗБЧ наличие конечного второго момента было обязательным, т.к. доказательства опирались на использование неравенства Чебышева с конечной дисперсией.

Теорема 3. Центральная предельная теорема (ЦПТ) для НОРСВ. *Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность НОРСВ с конечными первыми двумя моментами:*

$$\mathbf{E}\xi_1 = a \in \mathbb{R}\ ,\ \mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Построим по этой последовательности два новых семейства случайных величин:

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n\ ,\ \widetilde{S}_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Пусть $F_n(x) = \mathbf{P}(\widetilde{S}_n < x)$ - функция распределения $\widetilde{S}_n$. Тогда

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ F_n(x) \to F_{0,1}(x)\ ,\ n \to \infty,$$

где

$$F_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- *функция распределения стандартного нормального закона* $N(0,1)$.

Доказательство. Отметим, что предельная функция распределения непрерывна во всех точках вещественной прямой: $F_{0,1}(x) \in C(\mathbb{R})$. Поэтому фактически в теореме утверждается, что имеет место слабая сходимость функций распределения отнормированных сумм

$$\widetilde{S}_n : \mathbf{E}\widetilde{S}_n = 0 , \mathbf{D}\widetilde{S}_n = 1$$

к функции распределения стандартного нормального закона:

$$F_n \Rightarrow F_{0,1} , n \to \infty.$$

Слабую сходимость мы и будем проверять, используя теорему непрерывности и аппарат ХФ. Но сначала несколько упростим себе задачу: не умаляя общности, можно считать, что $a = 0$. Действительно, если вместо исходной последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотреть $\{\zeta_n = \xi_n - a\}_{n=1}^{\infty}$, то:

$$\mathbf{E}\zeta_n = 0 , \mathbf{D}\zeta_n = \sigma^2 , \widetilde{S}_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - an}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \zeta_k}{\sigma\sqrt{n}},$$

т.е. последовательность $\{\widetilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не изменится. Т.о. для проверки требуемой сходимости достаточно проверить поточечную сходимость ХФ $\widetilde{S}_n$ (при $a = 0$) к ХФ стандартного нормального распределения:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{\widetilde{S}_n}(t) = \mathbf{E}e^{it\widetilde{S}_n} \to e^{-\frac{t^2}{2}} , n \to \infty.$$

Считая $a = 0$, обозначим $\varphi(t) = \varphi_{\xi_1}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_1}$ - ХФ ξ_1. Тогда, используя НОРСВ $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и свойства ХФ, получим:

$$\varphi_{\widetilde{S}_n}(t) = \varphi^n(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}).$$

Из конечности $\mathbf{D}\xi_1$ и того, что $\mathbf{E}\xi_1 = a = 0$ следует существование второго момента $\mathbf{E}(\xi_1^2) = \mathbf{D}\xi_1$, откуда по свойствам ХФ существует $\varphi''(t)$ и справедливо разложение по формуле Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2),\ t \to 0$$

(последнее равенство верно, т.к.

$$\varphi(0) = 1 , \varphi'(0) = i\mathbf{E}\xi_1 = 0 , \varphi''(0) = i^2\mathbf{E}(\xi_1^2) = -\sigma^2).$$

Тогда

$$\ln \varphi_{\widetilde{S}_n}(t) = n \ln \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right\} =$$

$$= n \left\{ -\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right\} = -\frac{t^2}{2} + o(1) \to -\frac{t^2}{2} , n \to \infty,$$

что доказывает теорему.

Приложение 1. Множество меры 0

Введём вспомогательные обозначения: под символом Δ будем понимать произвольный (ограниченный) интервал, $|\Delta|$ - его длина:

$$\Delta = (a,b)\,,\ -\infty < a < b < \infty\,, |\Delta| = b - a.$$

Определение 1. *Рассмотрим множество E на прямой. Будем говорить, что множество E имеет меру 0 ($\mu(E) = 0$), если*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\{\Delta_\alpha^{(\varepsilon)}\}_\alpha : \Delta_\alpha^{(\varepsilon)} \subset \mathbb{R}\,,\ \sum_\alpha |\Delta_\alpha^{(\varepsilon)}| < \varepsilon \Rightarrow \bigcup_\alpha \Delta_\alpha^{(\varepsilon)} \supseteq E.$$

Приведем простейшие примеры множеств меры 0 на прямой.

1. **Конечные множества**. Множество E имеет вид:

$$E = \{x_1\}\bigcup\{x_2\}\bigcup\cdots\bigcup\{x_n\}\,,\ x_i \in \mathbb{R}\,,\ x_i \neq x_j\,,\ i \neq j.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем в качестве интервала, "покрывающего" x_i,

$$\Delta_i^{(\varepsilon)} = (x_i - \frac{\varepsilon}{4n}, x_i + \frac{\varepsilon}{4n})\,,\ |\Delta_i^{(\varepsilon)}| = \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Тогда по построению

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i^{(\varepsilon)}\,,\ \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i^{(\varepsilon)}| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \Rightarrow\ \mu(E) = 0.$$

2. **Счетные множества**. Множество E имеет вид:

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\,,\ x_n \in \mathbb{R}\,,\ x_i \neq x_j\,,\ i \neq j.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем в качестве интервала, "покрывающего" x_n,

$$\Delta_n^{(\varepsilon)} = (x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}})\,,\ |\Delta_n^{(\varepsilon)}| = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тогда по построению

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n^{(\varepsilon)}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\Delta_n^{(\varepsilon)}| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \Rightarrow\ \mu(E) = 0.$$

3. **Канторово множество**. Возьмем отрезок $[0,1]$ и разделим его на 3 равные части $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$, после чего "выкинем" из отрезка *внутренность средней части*, т.е. *интервал* $(1/3,2/3)$. С каждым из оставшихся отрезков $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$ проделаем ту же процедуру: каждый из них вновь делится на 3 равные части и из каждого из них "выкидывается" *внутренность средней части*, в данном случае *интервалы* $(1/9,2/9)$ и $(7/9,8/9)$; каждый из оставшихся отрезков (теперь их уже 4) вновь делится на 3 равные части и из каждого из них опять "выкидывается" *внутренность средней части* и т.д., процедура продолжается до бесконечности. То, что остаётся в "пределе", называется *Канторовым множеством.* Нетрудно показать, что оно имеет мощность континуума. Тем не менее оно имеет меру 0, т.к. суммарная длина всех отброшенных интервалов равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Определение 2. *Будем говорить что какое-либо свойство выполняется в почти всех точках множества $A\subseteq\mathbb{R}$ (п.в. на A), если существует такое подмножество $E\subset A$, что во всех точках $A\backslash E$ свойство выполняется и $\mu(E)=0$.*

Иными словами, свойство может не выполняться только на подмножестве, имеющем меру ноль. Например, "функция $y=|x|$ дифференцируема п.в. на $\mathbb{R}$", "функция $y=tgx$ непрерывна п.в. на $\mathbb{R}$", "$|\cos x|<1$ п.в. на $\mathbb{R}$" и т.д..

Замечание. Аналогично можно ввести понятие множества нулевой меры в $\mathbb{R}^n$, $n>1$. В определении вместо интервала Δ обычно берут открытые шары (или параллелепипеды), а роль длины $|\Delta|$ играют площадь в $\mathbb{R}^2$, объём в $\mathbb{R}^3$ и т.д..

Приложение 2. Интеграл Стилтьеса

Мы приведём здесь определение и основные свойства интеграла Стилтьеса, не останавливаясь при этом на доказательствах (акцентируя внимание на нужных нам фактах).

Зададим на конечном интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$ функцию $g(x)$ и неубывающую функцию $F(x)$. Для наших нужд будет достаточно (так в дальнейшем и будем считать), чтобы $F(x)$ была произвольной функцией распределения на $\mathbb{R}$ (с суженной на (a, b) областью определения), хотя определение интеграла Стилтьеса шире. Если интервал (a, b) ограничен, то разобьём его произвольным образом выбранным конечным множеством точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и образуем сумму

$$\sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x_i})(F(x_i) - F(x_{i-1}))\ ,\ \widetilde{x_i} \in (x_{i-1}, x_i),$$

причём $\widetilde{x_i}$ выбирается в своём интервале также произвольным образом.Теперь, увеличивая число точек разбиения $\{x_i\}$, одновременно устремим наибольшую из длин промежутков к нулю $max_i|x_i - x_{i-1}| \to 0$. Если при этом приведенная выше сумма стремится к определённому пределу (не зависящему от выбора $\{x_i\}$ и $\{\widetilde{x_i}\}$)

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x_i})(F(x_i) - F(x_{i-1}))\ ,\ \widetilde{x_i} \in (x_i, x_{i-1}),$$

то этот предел называется интегралом Стилтьеса от функции $g(x)$ с интегрирующей функцией $F(x)$ и обозначается

$$I = \int_a^b g(x)dF(x).$$

Несобственный интеграл Стилтьеса (например, по всей прямой), определяется обычным способом: рассматривается интеграл по произвольному конечному интервалу (a, b); величины a и b произвольным образом заставляют стремиться к $-\infty$ и ∞ соответственно; если при этом существует предел

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b g(x)dF(x),$$

то этот предел называется интегралом Стилтьеса от функции $g(x)$ с интегрирующей функцией $F(x)$ (по функции $F(x)$) по всей прямой и обозначается

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Аналогично определяется интеграл на луче.Можно доказать, что заведомо будут существовать интегралы Стилтьеса (как по конечным, так и по бесконечным промежуткам) для непрерывных и ограниченных функций $g(x)$. На самом деле можно существенно ослабить требования к $g(x)$, при необходимости мы будем это каждый раз обосновывать.

Заметим, что при установке пределов интегрирования необходимо указывать, включается в промежуток интегрирования или нет тот или иной его конец. Пусть концы a и b конечны, и символ a_- обозначает, что a включено в промежуток интегрирования, а символ a_+, соответственно, что a исключено из него.

$$\int_{a_-}^{b} g(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x}_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n} g(\widetilde{x}_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \lim_{x_1\to x_0=a} g(\widetilde{x}_1)(F(x_1) - F(x_0)) =$$

$$= \int_{a_+}^{b} g(x)dF(x) + g(a)(F(a+0) - F(a)).$$

Т.е., если $g(a) \neq 0$, и функция $F(x)$ в точке a разрывна (испытывает скачок), то

$$\int_{a_-}^{b} g(x)dF(x) - \int_{a_+}^{b} g(x)dF(x) = g(a)(F(a+0) - F(a)) \neq 0.$$

В частности, интеграл Стилтьеса, распространённый на одноточечные множества (например как предел по стягивающимся в точку промежуткам), может оказаться ненулевым. Условимся в дальнейшем правый конец промежутка исключать, а левый включать в промежуток интегрирования. Для нас это вполне естественно, т.к. в качестве интегрирующей функции $F(x)$ по уговору берётся функция распределения, т.е. непрерывная слева по определению: $F(b) = F(b-0)$. Пусть $F(x)$ - функция распределения случайной величины ξ. Тогда, учитывая всё вышесказанное,

$$\int_{a}^{b} dF(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \lim_{n\to\infty}(F(x_n) - F(x_0)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \mathbf{P}(a \leq \xi < b),$$

$$\int_{-\infty}^{b} dF(x) = \mathbf{P}(\xi < b) \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = \mathbf{P}(\xi \in (-\infty, \infty)) = 1.$$

Пусть $F(x)$ абсолютно непрерывна, т.е. имеет производную $f(x) = F'(x)$ и восстанавливается интегралом от неё. Тогда из формулы конечных приращений

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\widetilde{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \ , \ x_{i-1} < \widetilde{x}_i < x_i$$

следует равенство:

$$\int_{a}^{b} g(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x}_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x}_i) f(\widetilde{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x) f(x) dx.$$

Т.е. в этом случае интеграл Стилтьеса сводится к интегралу Римана.

Если $F(x)$ имеет скачок в точке $x = c$, то, выбрав разбиение промежутка интегрирования точками $\{x_i\}$ так, что при некоторых значениях индекса $x_k < c < x_{k+1}$, получим:

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} g(\widetilde{x}_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) + g(c)(F(x_{k+1}) - F(x_k)) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k+2}^{n} g(\widetilde{x}_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \int_a^c g(x) dF(x) + \int_{c_+}^b g(x) dF(x) +$$

$$+ g(c)(F(c+0) - F(c_0)).$$

Если $F(x)$ такова, что меняется только в точках $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (функция распределения дискретной случайной величины со значениями в этих точках), то:

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(c_n)(F(c_n+0) - F(c_n-0)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(c_n)(F(c_n+0) - F(c_n))$$

(в последнем равенстве мы использовали непрерывность слева функции $F(x)$; в случае бесконечных границ результат не изменится). Здесь, конечно, предполагалось, что $\forall n: \ c_n \in [a, b)$.

Здесь интеграл Стилтьеса свёлся к ряду. В частности, если $F(x)$ - функция распределения атомической(вырожденной) случайной величины ($\mathbf{P}(\xi = c) = 1$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = g(c)(F(c+0) - F(c-0)) = g(c)(F(c+0) - F(c)) = g(c).$$

В заключение сформулируем некоторые свойства интеграла Стилтьеса. Мы опустим доказательства, поскольку они очевидным образом следуют из определения интеграла Стилтьеса и стандартных методов, используемых при доказательстве аналогичных свойств интеграла Римана. Во всех свойствах границы могут быть как конечными, так и бесконечными.

1. Пусть $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n < c_{n+1} = b$. Тогда

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} g(x) dF(x).$$

2.
$$\int_a^b \alpha g(x)dF(x) = \alpha \int_a^b g(x)dF(x).$$

3.
$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} g_k(x)dF(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b g_k(x)dF(x).$$

4. Пусть $g(x) \geq 0$ и $a < b$. Тогда
$$\int_a^b g(x)dF(x) \geq 0.$$

5. Пусть $g(x) \leq h(x)$. Тогда
$$\int_a^b g(x)dF(x) \leq \int_a^b h(x)dF(x).$$

6. Если $F(x) \equiv C$ при $a \leq x \leq b$, то
$$\int_a^b g(x)dF(x) = 0.$$

7.
$$\left| \int_a^b g(x)dF(x) \right| \leq \int_a^b |g(x)|dF(x).$$

8.
$$\int_a^b g(x)d(\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)) = \alpha_1 \int_a^b g(x)dF_1(x) + \alpha_2 \int_a^b g(x)dF_2(x).$$

Замечание. Если потребовать $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то функция $\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$ также является функцией распределения (разумеется, если функциями распределения являлись $F_1(x)$ и $F_2(x)$). На самом деле эти условия необязательны.

Литература

1. А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, **1986**.
2. Е.С. Вентцель, *Теория вероятностей*, Высшая школа, **2001**.
3. В.Г. Воинов, М.С. Никулин, *Несмещенные оценки и их применения*, Наука, **1989**.
4. Б.В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Наука, **1965**.
5. В.А. Тутубалин, *Теория вероятностей*, Издательство Московского Университета, **1972**.
6. В.А. Тутубалин, *Теория вероятностей и случайных процессов*, Издательство Московского Университета, **1992**.

ОГЛАВЛЕНИЕ