Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, Е.С. Единова,

А.М.Никулин, Т.А. Шемякина

МАТЕМАТИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

Издательство СПбГПУ

2012

УДК 512.8
ББК
Т

Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, Е.С. Единова, А.М.Никулин, Т.А. Шемякина. **Математика. Аналитическая геометрия**: учебное пособие / Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, А.М.Никулин, Т.А. Шемякина. – СПб.: – Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 68 с.

Учебное пособие соответствует содержанию Федерального Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования дисциплины «Высшая математика» направления подготовки и переподготовки бакалавров по специальности 280700.62 «Техносферная безопасность».

В пособии кратко изложены теоретические основы по курсу «Высшая математика», который представлен разделом «Аналитическая геометрия». Приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

Предназначено для студентов высших учебных заведений технических и экономических направлений, изучающих дисциплину «Высшая математика». Пособие может быть использовано при подготовке бакалавров, магистров, аспирантов и в системе дополнительного профессионального образования, а также оно будет полезно для преподавателей дневных, вечерних и заочных отделений вузов и технических университетов.

Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета «Комплексная безопасность» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия составляет важнейшую часть основы высшей математики. В аналитической геометрии геометрические объекты (точки, линии, поверхности и т.д.) и их расположение на плоскости или в пространстве изучаются с помощью алгебры, т.е. аналитически методом координат.

Целью данного пособия является помощь в усвоении математики, развитие навыков и умения в решении студентами задач аналитической геометрии по указанным в нем темам в объеме действующих программ курса высшей математики.

В пособии кратко изложен теоретический материал по разделу «Аналитическая геометрия». При изложении теории приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

В пособии содержатся теоретические вопросы для подготовки к коллоквиуму по разделу «Аналитическая геометрия».

I. ПЛОСКОСТЬ В ТРЕХМЕРОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

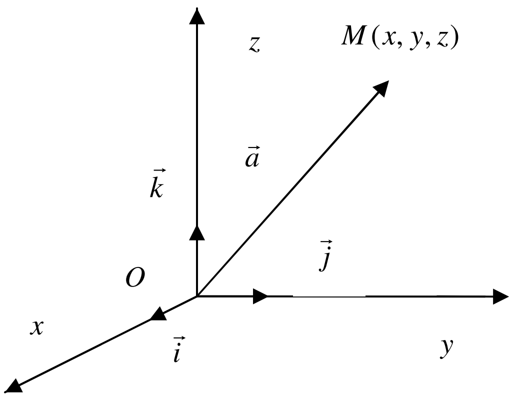
Аналитическая геометрия изучает геометрические объекты (точки, линии, поверхности и т.д.) и их расположение на плоскости или в пространстве аналитически с помощью алгебры. Методом исследования служит метод координат. Методом координат простейший геометрический объект – точка представляется в виде упорядоченной системы вещественных чисел, называемых ***координатами этой точки***. Всякий другой геометрический объект (линия или поверхность) рассматривается как множество точек, обладающих некоторыми, только им присущими, свойствами. При переходе от одной точки геометрического объекта к другой координаты точки меняются, т.е. являются величинами переменными, подчиняющимися определенной закономерности. Эта закономерность методом координат аналитически представима в виде уравнения или неравенства, связывающего переменные координаты каждой точки рассматриваемого геометрического объекта. Таким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами. Аналитическая геометрия рассматривает уравнения этих объектов чаще всего в координатном пространстве $\Re^3$ (или $\Re^2$) т.е. в некоторой трехмерной декартовой системе координат $Oxyz$ (или Oxy). Под уравнениями геометрических объектов (линии, поверхности и т.д.) будем понимать всякое уравнение, устанавливающее связь между координатами (x, y, z) всех точек, принадлежащих данному геометрическому объекту. Итак, аналитическая геометрия изучает геометрические объекты и их свойства аналитически путем анализа их уравнений.

Напомним некоторые математические понятия из курса математики средней школы.

Декартова система координат в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных числовых осей (называемых ***осями координат***) с общим началом отсчета O (называемой ***началом координат***). Оси координат обозначаются Ox, Oy, Oz и называются ***осями абсцисс, ординат и аппликат***. Координаты (x, y, z) точки M определяются как координаты проекций этой точки на оси координат. Плоскости Oxy, Oyz, Ozy называются ***координатными плоскостями***.

На координатных осях определяются единичные вектора, направление которых совпадает с положительным направлением осей рис.1. Эти вектора обозначаются $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, соответствуют осям Ox, Oy, Oz и называются ***ортами***. Так как вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярные и имеют единичную длину, то они образуют базис, который называют ***декартовым***

ортогональным базисом. Проекции вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz обозначим соответственно a_x, a_y, a_z. Они называются ***декартовыми прямоугольными координатами вектора*** $\vec{a}$ ***в базисе*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то есть $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.



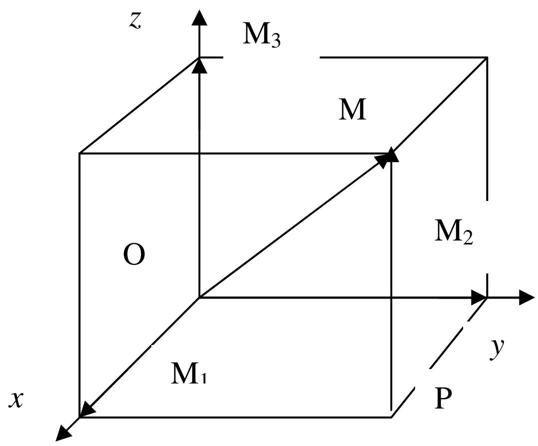


Рис.1 Рис.2

С другой стороны, из определения суммы нескольких векторов находим $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ рис.2. Таким образом, $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ - ***разложение вектора*** $\vec{a}$ ***по декартовому базису*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Так как вектор $\vec{a}$ является диагональю параллелепипеда, то $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$, поэтому $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ - ***модуль вектора*** $\vec{a}$.

Расстояние между двумя точками $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, y_z)$ в декартовой системе координат пространства $\Re^3$ обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ и вычисляется по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2}$, где $\overrightarrow{AB}(b_x-a_x, b_y-a_y, b_z-a_z)$.

Декартовы координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении $|AM|\div|MB|=\lambda$, $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$, определяются по формулам: $x=\dfrac{a_x+\lambda b_x}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{a_y+\lambda b_y}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{a_z+\lambda b_z}{1+\lambda}$, где $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, y_z)$.

Направление вектора определяется углами α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора***. Действительно, имеем $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, где $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha, a_y=|\vec{a}|\cos\beta, a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$, тогда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Замечание. Для любого единичного вектора $\vec{a}^0$ - орта ($\left|\vec{a^0}\right|$), соответствующего вектору $\vec{a}$, направляющие косинусы его совпадают с координатами, т.е. $\vec{a}^0=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$.

Каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления (орт) $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0$.

Определение. ***Вектора*** $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}(b_x,b_y,y_z)$ называются ***коллинеарными*** ($\vec{a}\parallel\vec{b}$), если их координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

Определение. ***Трехмерным вектором*** называется упорядоченная совокупность трех действительных чисел, записываемых в виде $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, где x_i i – я координата вектора $\vec{x}$.

Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$. Тогда

1) $\vec{x}=\vec{y}$, если $x_1=y_1, x_2=y_2, x_3=y_3$ –равенство векторов;

2) $\vec{x}\pm\vec{y}=(x_1\pm y_1, x_2\pm y_2, x_3\pm y_3)$ – сложение или вычитание векторов;

3) $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$ – умножение вектора на число (скаляр).

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ – коммутативный закон суммы;
2. $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ – ассоциативный закон суммы;
3. $\lambda(\beta\vec{x})=(\lambda\beta)\vec{x}$ – ассоциативный относительно скаляра закон;
4. $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ – дистрибутивный закон относительно суммы векторов;
5. $(\lambda+\beta)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\beta\vec{x}$ – дистрибутивный закон относительно суммы скаляров;
6. Существует нуль-вектор $\vec{0}=(0,0,0)$ такой, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$, $\forall\vec{x}$;
7. $\forall\vec{x}$ $\exists(-\vec{x})$ такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$; ($-\vec{x}$) - называется противоположным вектором $\vec{x}$;
8. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ $\forall\vec{x}$.

Определение. Множество трехмерных векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше восьми свойствам, называемых аксиомами, называется ***векторным пространством***.

Определение. ***Векторное пространство*** V называется ***трехмерным***, если в нем существует три линейно независимых вектора, а любые 4 вектора являются зависимыми.

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. В трехмерном пространстве это число три. Число три называется размерностью пространства. Векторное пространство размерности три обозначают $\Re^3$.

<u>Определение.</u> Совокупность из трех линейно независимых векторов пространства $\Re^3$ называется ***базисом*** этого пространства.

Пространство $\Re^3$ может иметь несколько различных базисов.

1.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Положение точки M в пространстве можно определить ее аппликатой z и полярными координатами $r = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ и φ проекции P этой точки на координатную плоскость Oxy. Величины (r, φ, z) называются **цилиндрическими координатами** точки M. Декартовы и цилиндрические координаты точки связаны соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \ -\pi < \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le r < \infty.$$

Сферическая система координат задает положение точки M следующими величинами: $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ - расстояние, θ - угол между осью Oz и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, φ - угол между радиус-вектором проекции P точки M и осью Ox. Величины (r, φ, θ) называются **сферическими координатами** точки M. Декартовы и сферические координаты точки связаны соотношениями:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

1.3. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

<u>Определение</u>. Скалярным произведением двух векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ пространства $\Re^3$ называется число, равное $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos(\vec{x} \,\hat{;}\, \vec{y})$. Скалярное произведение обозначается символами $\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y})$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ – коммутативный закон;
2. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ – дистрибутивный закон;
3. $(\alpha\vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$, где α – любое действительное число;
4. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, если $\vec{x} \ne \vec{O}$; $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, если $\vec{x} = \vec{O}$.

Скалярное произведение применяется в физике. Работа A постоянной силы $\vec{F}$, действующая на прямолинейном участке пути $\overrightarrow{M_1M_2}$ при движении материальной точки, равна скалярному произведению $A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.

Определение. Векторное пространство, в котором определена операция – скалярное произведение векторов – удовлетворяющая четырем выше перечисленным свойствам - аксиомам, называется ***евклидовым пространством*** и обозначается E^3.

Определение. Два вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ из E^3 называются ***ортогональными*** ($\vec{x}\perp\vec{y}$), если $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

Выражение скалярного произведения через координаты.

Даны вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$, тогда $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Это следует из аксиом скалярного произведения и свойств векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Определение. Длиной (нормой) вектора $\vec{x}\in E^3$ называется корень квадратной из его скалярного квадрата

$|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, где x_1,x_2,x_3 – координаты вектора $\vec{x}$ в E^3.

Определение. Нормированием вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in E^3$ называется получение вектора $\overrightarrow{x^0}=x/|\vec{x}|$. В результате получается вектор, длина которого равна 1, а направление его совпадает с направлением вектора $\vec{x}$.

Определение. Ортонормированным базисом пространства E^3 называется система векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, которые попарно ортогональны, т.е. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0\ (i\neq j)$, а длина каждого равна единице, т.е. $|\vec{e}_i|=1,\ i=1,2,3$.

Определение. Углом φ между двумя векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется

$$\cos\varphi=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}.$$

1.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1. Модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е. $c=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$;

2. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3. Направление вектора $\vec{c}$ определяется так: если смотреть из его конца вдоль вектора, то поворот по кратчайшему пути от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против движения часовой стрелки. В этом случае вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют право ориентированную тройку (правую тройку), иначе - образуют лево ориентированную тройку (левую тройку).

Векторное произведение обозначается символами $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a}\times\vec{b}]$. Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ – анти коммутативный закон;
2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ – дистрибутивный закон;
3. $(\alpha\vec{b})\times\vec{c} = \alpha(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\times(\alpha\vec{c})$, где α – любое действительное число;
4. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{O}$, $\forall\vec{a}$.

Если два вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ коллинеарные ($\vec{x}\parallel\vec{y}$), то их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е. $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{O}$.

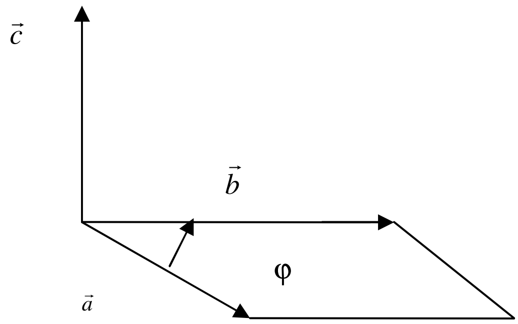


Рис.3

Выражение векторного произведения через координаты.

Даны вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$, тогда $\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.

Это следует из аксиом векторного произведения и свойств векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Здесь использована ***формула определителя третьего порядка***, служащая его определением:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_3b_1c_2.$$

1.5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

<u>Определение.</u> ***Смешанным произведением векторов*** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, т.е. скалярному произведению вектора $(\vec{a}\times\vec{b})$ на вектор $\vec{c}$: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение обозначается символами $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

<u>Определение.</u> Три вектора $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ и $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ называются ***компланарными***, если вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лежат в одной плоскости.

Вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ будут компланарными тогда и только тогда, когда $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трех некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, по модулю равно объему V параллелепипеда, построенного на данных векторах как на ребрах;

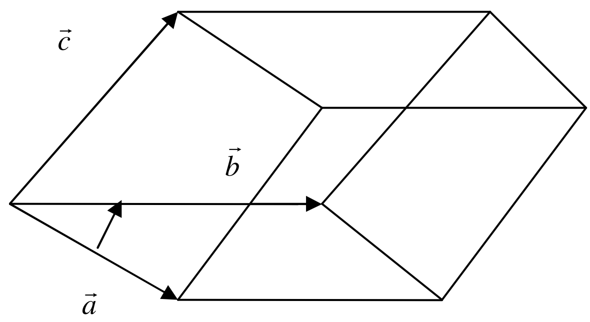


Рис.4

2. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является правой (левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ положительно (отрицательно);
3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$;
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$.

1.6. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве можно задать различными способами. Рассмотрим некоторую плоскость P, точку $M(x,y,z)$ на этой плоскости, так называемую ***текущую точку плоскости***. Пусть определены вектор $\vec{N}(A,B,C)$ - ***нормаль*** к плоскости (вектор, перпендикулярный плоскости), некоторая фиксированная на плоскости точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, называемая ***опорной точкой***. Обозначим $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ - радиус вектора точек $M(x,y,z)$ и $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ лежит в плоскости, тогда вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{N}=0$ - это уравнение называется ***уравнением плоскости в векторной форме.***

Запишем скалярное произведение через координаты сомножителей скалярного произведения, тогда получим:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ - это уравнение называется ***уравнением плоскости, проходящей через известную опорную точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$***, перпендикулярно нормали*** $\vec{N}(A,B,C)$.

Раскроем скобки, приведем подобные члены, обозначим $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, тогда последнее уравнение примет вид:

$Ax+By+Cz+D=0$ - это уравнение называется ***общим уравнением плоскости***.

Расписывая уравнение плоскости в векторной форме через координаты, получим уравнение вида:

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0$ – **нормальное уравнение плоскости**,

где α, β и γ - углы между координатными осями Ox, Oy, Oz и перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, а p - длина этого перпендикуляра.

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду его следует умножить на нормирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Это следует из условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением

$Ax+By+Cz+D=0$:

$A=0$; параллельна оси Ox;

$B=0$; параллельна оси Oy;

$C=0$; параллельна оси Oz;

$D=0$; проходит через начало координат;

$A=B=0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);

$A=C=0$; перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);

$B=C=0$; перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);

$A=D=0$; проходит через ось Ox;

$B=D=0$; проходит через ось Oy;

$C=D=0$; проходит через ось Oz;

$A=B=D=0$; совпадает с плоскостью xOy $(z=0)$;

$A = C = D = 0;$ совпадает с плоскостью xOz $(y = 0)$;
$B = C = D = 0;$ совпадает с плоскостью yOz $(x = 0)$.

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $(-D)$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ (a = -\frac{D}{A}, \ b = -\frac{D}{B}, \ c = -\frac{D}{C}).$$

Это уравнение плоскости называется **уравнением в отрезках**; в нем a, b, c - соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

Расстояние d ***от точки*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$ определяем по формуле: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Угол φ ***между плоскостями*** определяется как угол между нормалями этих плоскостей:

$$P_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$
$$P_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей определяются взаимным расположением нормалей этих плоскостей:

$$P_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$
$$P_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Плоскости P_1 **и** P_2 **параллельны** тогда и только тогда, когда коллинеарные их нормальные вектора $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Плоскости P_1 **и** P_2 **перпендикулярны** тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормальные вектора $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

II. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая линия в пространстве может быть определена разными способами. Рассмотрим некоторую прямую L, точку $M(x, y, z)$ на этой прямой, так называемую ***текущую точку прямой***. Пусть вектор $\vec{s}(l, m, n)$ - ***направляющий вектор прямой*** (вектор, параллельный прямой), некоторая фиксированная на прямой точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называемая ***опорной точкой***. Обозначим $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ - радиус - вектора точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ принадлежит прямой, тогда вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарные, следовательно, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \cdot \vec{s}$.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{s}$ - это уравнение называется ***уравнением прямой в векторной форме.***

Перепишем последнее уравнение, учитывая определение радиус-вектора и равенство векторов:

$$x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = (x_0 + \lambda l)\vec{i} + (y_0 + \lambda m)\vec{j} + (z_0 + \lambda n)\vec{k},$$

$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \\ z = z_0 + \lambda n. \end{cases}$ - это уравнение называется **параметрическим уравнением прямой**, где λ - параметр, $\lambda \in (-\infty; \infty)$.

В параметрическом уравнении исключим параметр λ, тогда получим

$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ - это уравнение называется **каноническим уравнением прямой.**

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Через две точки можно провести единственную прямую. В качестве направляющего вектора этой прямой возьмем вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве опорной точки можно взять любую из точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (для определенности, возьмем точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$). Каноническое уравнение прямой примет вид:

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - это уравнение называется **уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.**

Если α, β, γ – углы между прямой и координатными осями Ox, Oy и Oz, то

$$\cos\alpha = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \cos\beta = \pm\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \cos\gamma = \pm\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами прямой***. Направляющие коэффициенты l, m, n можно рассматривать как проекции на координатные оси вектора, параллельного прямой, причем, l, m, n не могут быть одновременно равны нулю. Каноническое уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}, \ \overrightarrow{s^0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}.$$

причем плоскости эти предполагаются непараллельными, то есть соотношение $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ не имеет места.

<u>Определение.</u> Общим уравнением прямой в пространстве называется система двух общих уравнений плоскостей (прямая определена как пересечение двух плоскостей):

$$\begin{cases} P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Определение. **Углом** φ **между двумя прямыми** называется наименьший угол между их направляющими векторами.

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \vec{s}_1(l_1,m_1,n_1);$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \qquad \vec{s}_2(l_2,m_2,n_2),$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых определяются взаимным расположением направляющих векторов этих прямых:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \vec{s}_1(l_1,m_1,n_1);$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \qquad \vec{s}_2(l_2,m_2,n_2).$$

Прямые L_1 **и** L_2 **параллельны** тогда и только тогда, когда коллинеарные их направляющие вектора $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

Прямые L_1 **и** L_2 **перпендикулярны** тогда и только тогда, когда перпендикулярны их направляющие вектора $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

2.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение. **Углом** φ **между прямой и плоскостью** называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Плоскость P задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ с нормалью $\vec{N}(A,B,C)$.

Прямая L задана каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ с направляющим вектором $\vec{s}(l,m,n)$.

Угол φ **между прямой и плоскостью** определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{N}\cdot\vec{s}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Взаимное расположение прямой в пространстве и плоскости определяется взаимным расположением нормали плоскости и направляющим вектором прямой.

Прямая L **и плоскость** P **параллельны** тогда и только тогда, когда перпендикулярны вектора $\vec{N}\perp\vec{s}$, $\vec{N}\cdot\vec{s}=0 :.\ A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0$.

Прямая L **и плоскость** P **перпендикулярны** тогда и только тогда, когда коллинеарные вектора $\vec{N}\parallel\vec{s} :.\ \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую
$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$$
имеет вид $Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$,
где λ - любое действительное число.

III. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. ***Поверхностью*** называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x,y,z)=0$.

Определение. **Поверхностью второго порядка** называются такие множества точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению вида:
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0.$$

Существует несколько классов невырожденных поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых можно получить из общего уравнения с помощью преобразований системы координат (параллельного переноса и поворота в пространстве осей координат). В результате этих преобразований получаем следующие канонические уравнения:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипсоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - однополостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - двуполостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ - конус,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ - эллиптический параболоид,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ - гиперболический параболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр,

$y^2=2px$ - параболический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ - пара параллельных плоскостей,

$x^2 = 0$ - пара совпадающих плоскостей.

Здесь параметры a, b, c, p - постоянные и положительные числа, характеризирующие в определенном смысле свойства поверхностей.

IV. ПРАКТИКУМ

4.1. ПРАКТИКУМ ПО ПЛОСКОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Нам часто придется решать систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + cz = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \end{array}\right\}$$

Приведем формулы: $x = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot t$; $y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot t$; $z = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t$,

где t - произвольное число, и, по крайней мере, один из определителей не равен нулю.

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;5;-1)$ и параллельной плоскости $x + 3y - 4z + 5 = 0$.

Решение.

Уравнение связки плоскостей, проходящих через данную точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В нашем случае оно будет таким: $A(x-2) + B(y-5) + C(z+1) = 0$.

Из условия параллельности двух плоскостей получаем

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{3} = \frac{C}{-4} = k, \quad \begin{pmatrix} A = 1k \\ B = 3k \\ C = -4k \end{pmatrix}.$$

Заменяя в последнем уравнении A, B и C величинами, им пропорциональными, будем иметь

$$k(x-2) + 3k(y-5) - 4k(z+1) = 0,$$

или окончательно, после упрощений,

$$x + 3y - 4z - 21 = 0.$$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $M(5;4;-2)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то она параллельна yOx, а потому ее уравнение имеет вид $Ax + D = 0$.

Подставляя в это уравнение координаты точки M, получим

$$A \cdot 5 + D = 0, \qquad D = -5A.$$

Это значение D подставим в $Ax + D = 0$ и, сокращая на A, будем иметь

$Ax - 5A = 0$, $\quad x - 5 = 0$.

Задача 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку $M_0(2;1;3)$.

Решение. Так как искомая плоскость проходит через ось Ox, то ее уравнение имеет вид $By + Cz = 0$.

Подставим в это уравнение координаты точки M_0, через которую проходит плоскость. Получаем $B + 3C = 0$, откуда $B = -3C$.

Это значение B подставим в $By + Cz = 0$ и получаем, сокращая на C, получим:

$3y - z = 0$.

Задача 4. Через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(-2;-1;3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

Решение. В уравнение связки плоскостей подставим координаты точки M_1, получим $A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$.

Так как данная плоскость проходит и через точку M_2, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению

$A(-2-1) + B(-1-2) + C(3-3) = 0$,

Откуда $-3A - 3B = 0$, или $\underline{A + B = 0}$. $\quad$ (*)

Используем теперь то, что искомая плоскость перпендикулярна данной:

$A_1A + B_1B + C_1C = 0$.

$1 \cdot A + 4B - 2C = 0$. $\quad$ (**)

Соединяя уравнения (*) и (**), получим систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 4B - 2C = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $A = -2t$; $\quad B = 2t$; $\quad C = 3t$.

Подставляя эти значения в (*) и сокращая на t, будем иметь

$-2(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0$ или $2x - 2y - 3z + 11 = 0$.

Задача 5. Найти острый угол между двумя плоскостями:

$P_1: \quad 5x - 3y + 4z - 4 = 0,$

$P_2: \quad 3x - 4y - 2z + 5 = 0.$

Решение. По формуле

$$\cos\varphi = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{5 \cdot 3 + (-3)(-4) + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} \right| = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$\cos\varphi = 0{,}499; \quad \varphi = 60°04'$.

В формуле следует взять абсолютную величину правой части, так как надо найти острый угол между плоскостями.

Задача 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;-1)$; $M_2(-1;0;4)$; $M_3(-2;-1;1)$.

Решение. Уравнение искомой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1-1 & 0-2 & 4+1 \\ -2-1 & -1-2 & 1+1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя этот определитель, получим: $x-y+1=0$.

Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz.

Задача 7. Найти следы плоскости $5x+3y+2z-12=0$ на координатных плоскостях.

Решение. Уравнение прямой, на которой данная плоскость пересекается с плоскостью Oxy, мы получим как уравнение геометрического места точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению данной плоскости и уравнению плоскости Oxy. Так как плоскость Oxy имеет уравнение $z=0$, то уравнение искомого следа получим, положив в уравнение данной плоскости $z=0$. Окончательно уравнение искомого следа данной плоскости на плоскости Oxy имеет вид

$$\begin{cases} 5x+3y-12=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Первое из этих уравнений изображает плоскость, параллельную оси Oz, а вторая указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются точки, принадлежащие плоскости Oxy (в плоскости Oxy первое из этих уравнений определяет прямую линию).

Аналогично след на плоскости Oyz $\begin{cases} 3y+2z-12=0 \\ x=0 \end{cases}$.

След данной плоскости на плоскость Oxz $\begin{cases} 5x+2z-12=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Задача 8. Уравнение плоскости $5x+7y-34z+5=0$ привести к нормальному виду. Найти расстояние данной плоскости от начала координат и координаты основания перпендикуляра.

Решение. Нормирующий множитель $N=-\dfrac{1}{\sqrt{5^2+7^2+(-34)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1230}}$,

а уравнение примет вид $-\dfrac{5}{\sqrt{1230}}x-\dfrac{7}{\sqrt{1230}}y+\dfrac{34}{\sqrt{1230}}z-\dfrac{5}{\sqrt{1230}}=0$.

Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $p=\dfrac{5}{\sqrt{1230}}$. Углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями, будут

$$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{1230}}, \quad \cos\beta=-\frac{7}{\sqrt{1230}}, \quad \cos\gamma=-\frac{34}{\sqrt{1230}};$$

Координаты основания перпендикуляра найдем по формулам

$$x_1 = p\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{1230}} \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{1230}}\right) = -\frac{25}{1230};$$

$$y_1 = p\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{1230}} \cdot \left(-\frac{7}{\sqrt{1230}}\right) = -\frac{35}{1230};$$

$$z_1 = p\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{1230}} \cdot \frac{34}{\sqrt{1230}} = \frac{170}{1230}.$$

Ответ: $\left(-\frac{25}{1230};\ -\frac{35}{1230};\ \frac{170}{1230}\right)$.

Задача 9. Найти расстояние от точки $A(2;3;-1)$ до плоскости $7x-6y-6z+42=0$.

Решение. Расстояние от точки до плоскости

$$d = \left|\frac{7\cdot 2+(-6)\cdot 3+(-6)(-1)+42}{\sqrt{7^2+(-6)^2+(-6)^2}}\right| = \left|\frac{14-18+6+42}{11}\right| = 4.$$

Задача 10. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$P_1:\quad 5x+3y-4z+15=0$

$P_2:\quad 15x+9y-12z-5=0$.

Решение. Возьмем на какой-нибудь из этих плоскостей произвольную точку. Например, на первой плоскости возьмем точку, для которой $y=0;\ z=0$, и определим абсциссу x этой точки.

Получим $5x+3\cdot 0-4\cdot 0+15=0;\quad x=-3$. Итак, на первой плоскости взята точка $(-3,0,0)$. Определив ее расстояние до второй плоскости по формуле, получим $d=\frac{5}{3}\sqrt{2}$. Найденное расстояние d и будет расстоянием между данными плоскостями.

4.1.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I. Построение плоскостей.

Вариант 1.

1) $3x+2y-6z-6=0$, 2) $2x-y-3z+4=0$, 3) $4x+2y-z-8=0$,
4) $3x-2y+5z=0$, 5) $-2x-3y+6z=0$, 6) $x-5y-7z=0$
7) $2x-3y-12=0$, 8) $x+2y-6=0$, 9) $4x+3y-8=0$,
10) $x-3z-5=0$, 11) $-2x+4z-12=0$, 12) $3x-5z+15=0$,
13) $2y-5z-10=0$, 14) $3y-2z+4=0$, 15) $6y+2z+6=0$,
16) $3x-2=0$, 17) $5x+6=0$, 18) $-2x-7=0$,
19) $2y+7=0$, 20) $y-5=0$, 21) $-3y+6=0$,
22) $4z-5=0$, 23) $z+4=0$, 24) $-3z-6=0$,
25) $3x-2y=0$, 26) $3x+y=0$, 27) $-5x-7y=0$,

28) $-3y+2z=0$, 29) $6y+z=0$, 30) $-3y-3z=0$,
31) $2x+5z=0$, 32) $x-2z=0$, 33) $-3x+z=0$,
34) $5x=0$, 35) $2y=0$, 36) $-\frac{8}{7}z=0$.

Вариант 2.

1) $2x-3y-4z-12=0$, 2) $4x+3y-z+4=0$, 3) $x-2y-5z+10=0$,
4) $3x-y-2z=0$, 5) $-2x+8y-z=0$, 6) $5x-3y-5z=0$,
7) $2x-y-7=0$, 8) $3x+2y-6=0$, 9) $-5x-y+10=0$,
10) $x-5z-5=0$, 11) $3x-4z+4=0$, 12) $7x-2z-14=0$,
13) $2y+3z-6=0$, 14) $-2y+4z-4=0$, 15) $3y-2z-4=0$,
16) $-5x-2=0$, 17) $3x-7=0$, 18) $2x+4=0$,
19) $y-7=0$, 20) $3y+5=0$, 21) $-2y-8=0$,
22) $2z-4=0$, 23) $-z+3=0$, 24) $-2z-5=0$,
25) $x+5y=0$, 26) $2x-7y=0$, 27) $-3x-2y=0$,
28) $-2y+4z=0$, 29) $y+5z=0$, 30) $-y-3z=0$,
31) $4x-2z=0$, 32) $-2x-5z=0$, 33) $-3x+8z=0$,
34) $2x=0$, 35) $4z=0$, 36) $-\frac{8}{3}y=0$.

Вариант 3.

1) $x-2y-4z-8=0$, 2) $3x-5y+2z-10=0$, 3) $2x+2y-7z-14=0$,
4) $2x-3y+5z=0$, 5) $6x-2y-3z=0$, 6) $-5x-3y+7z=0$,
7) $4x-2y-4=0$, 8) $2x-3y-8=0$, 9) $3x+5y-15=0$,
10) $-2x-3z+6=0$, 11) $4x-z-4=0$, 12) $-2x+3z-8=0$,
13) $3y-4z-15=0$, 14) $2y+z-4=0$, 15) $-3y-2z+6=0$,
16) $-2x-7=0$, 17) $4x-5=0$, 18) $5x+2=0$
19) $2y-3=0$, 20) $5y+4=0$, 21) $-y+5=0$,
22) $2z-5=0$, 23) $4z+4=0$, 24) $-2z-6=0$
25) $3x+6y=0$, 26) $2x-2y=0$, 27) $-3x-4y=0$,
28) $y-2z=0$, 29) $3y+3z=0$, 30) $-2y-5z=0$
31) $2x+2z=0$, 32) $3x-4z=0$, 33) $-5x-2z=0$,
34) $\frac{2}{7}x=0$, 35) $2z=0$, 36) $-4y=0$.

Вариант 4.

1) $4\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-4\boldsymbol{z}+8=0$, 2) $5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}-15=0$, 3) $-\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z}+6=0$,
4) $3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$, 5) $2\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z}=0$, 6) $-3\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-4\boldsymbol{z}=0$,
7) $\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-3=0$, 8) $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-6=0$, 9) $5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+5=0$,
10) $-\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{z}-3=0$, 11) $-\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{z}+6=0$, 12) $4\boldsymbol{x}-8\boldsymbol{z}+16=0$,
13) $2\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z}-6=0$, 14) $\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}-5=0$, 15) $3\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}-4=0$,
16) $2\boldsymbol{x}+3=0$, 17) $3\boldsymbol{x}-4=0$, 18) $-5\boldsymbol{x}+2=0$,
19) $3\boldsymbol{y}-6=0$, 20) $-2\boldsymbol{y}+5=0$, 21) $-3\boldsymbol{y}-7=0$,
22) $\boldsymbol{z}-6=0$, 23) $2\boldsymbol{z}+3=0$, 24) $-3\boldsymbol{z}-4=0$,
25) $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=0$, 26) $-2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=0$, 27) $-3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=0$,

28) $2\boldsymbol{y}-5\boldsymbol{z}=0$, 29) $-3\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}=0$, 30) $2\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}=0$,
31) $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{z}=0$, 32) $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=0$, 33) $-4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}=0$,
34) $7\boldsymbol{x}=0$, 35) $-4\boldsymbol{y}=0$, 36) $\frac{5}{2}\boldsymbol{z}=0$.

Вариант 5.

1) $3x-3y-z-9=0$, 2) $3x-2y-4z+8=0$, 3) $x+3y-5z+15=0$,
4) $3x-2y+3z=0$, 5) $2x-y-4z=0$, 6) $-3x-4y+5z=0$,
7) $2x-4y-4=0$, 8) $x-3y+5=0$, 9) $4x-3y-12=0$,
10) $-x+2z-6=0$, 11) $3x-2z+4=0$, 12) $4x-2z+8=0$,
13) $2y-5z-15=0$, 14) $3y-z-6=0$, 15) $3y-4z+12=0$,
16) $-3x+3=0$, 17) $2x-5=0$, 18) $4x+5=0$,
19) $7y-14=0$, 20) $3y+5=0$, 21) $-2y+4=0$,
22) $3z-7=0$, 23) $2z+5=0$, 24) $-4z-8=0$
25) $-y+2x=0$, 26) $3x+5y=0$, 27) $-x-2y=0$,
28) $3y-4z=0$, 29) $-2y-7z=0$, 30) $5y+6z=0$,
31) $2x-4z=0$, 32) $-3x-2z=0$, 33) $2x+5z=0$,
34) $-\frac{7}{4}x=0$, 35) $2y=0$, 36) $8z=0$.

Вариант 6.

1) $2x-4y-z-4=0$, 2) $3x-4y-5z+12=0$, 3) $7x-2y-7z-14=0$,
4) $3x-8y+5z=0$, 5) $2x-y-3z=0$, 6) $-x+3y+5z=0$,
7) $5x-8y-8=0$, 8) $3x-4y+12=0$, 9) $x-2y-4=0$,
10) $2x+3z-4=0$, 11) $x-2z-6=0$, 12) $3x-4z+12=0$,
13) $y-3z-3=0$, 14) $-2y+5z-5=0$, 15) $-3y+4z-12=0$,
16) $-2x+4=0$, 17) $3x-5=0$, 18) $2x+6=0$,
19) $3y-6=0$, 20) $-y-4=0$, 21) $-3y+7=0$,
22) $-z+5=0$, 23) $2z-4=0$, 24) $-3z-5=0$,
25) $2x-5y=0$, 26) $-3x-2y=0$, 27) $5x+y=0$,
28) $3y-z=0$, 29) $2y+3z=0$, 30) $-3y-5z=0$,
31) $3x+2z=0$, 32) $-2x-4z=0$, 33) $4x-5z=0$,
34) $5x=0$, 35) $-6y=0$, 36) $\frac{4}{9}z=0$.

Вариант 7.

1) $-x+2y-3z+6=0$, 2) $2x-2y-4z-8=0$, 3) $x+3y-5z+10=0$,
4) $3x-2y+4z=0$, 5) $x+3y-5z=0$, 6) $6x-3y-4z=0$,
7) $3x-2y+8=0$, 8) $2x-4y-4=0$, 9) $-3x+2y+6=0$,
10) $2x-3z+12=0$, 11) $2x-3z-6=0$, 12) $-3x-z+4=0$,
13) $y-5z-4=0$, 14) $2y+z-2=0$, 15) $-3y-2z+6=0$,
16) $-5x+15=0$, 17) $3x-4=0$, 18) $3x+6=0$,
19) $-2y+8=0$, 20) $3y-7=0$, 21) $-5y+10=0$,
22) $3z-5=0$, 23) $-2z+6=0$, 24) $-z-4=0$,
25) $3x-2y=0$, 26) $-5x-y=0$, 27) $-4x+6y=0$,

28) $2y+3z=0$, 29) $-3y+5z=0$, 30) $-4y-8z=0$,
31) $4x-2z=0$, 32) $-5x+2z=0$, 33) $-4x-8z=0$,
34) $-7x=0$, 35) $3y=0$, 36) $\frac{4}{3}z=0$.

Вариант 8.

1) $2x+3y-4z-12=0$ 2) $x-2y-5z+4=0$, 3) $3x-4y-6z+12=0$,
4) $x+3y-2z=0$, 5) $3x-2y+5z=0$, 6) $-7x+y-2z=0$,
7) $2x-2y-4=0$, 8) $3x-2y-9=0$, 9) $2x-5y+10=0$,
10) $x+3z-3=0$, 11) $-2x+z-4=0$, 12) $-3x-5z+5=0$,
13) $2y-3z-5=0$, 14) $3y-z+3=0$, 15) $2y-7z+7=0$,
16) $5x-4=0$, 17) $,2x+7=0$ 18) $-3x+6=0$,
19) $-5y-5=0$, 20) $-2y+4=0$, 21) $3y+5=0$,
22) $-z+4=0$, 23) $-3z+2=0$, 24) $4z+8=0$,
25) $2x-4y=0$, 26) $-3x-2y=0$, 27) $5x+10y=0$,
28) $3y-2z=0$, 29) $y+5z=0$, 30) $-3y-7z=0$,
31) $2x-z=0$, 32) $4x+2z=0$, 33) $-5x-3z=0$,
34) $6x=0$, 35) $4y=0$, 36) $-\frac{1}{2}z=0$.

Вариант 9.

1) $6x-2y+4z-12=0$, 2) $-2x-7y+2z+14=0$, 3) $5x-3y+2z-6=0$,
4) $3x+2y-6z=0$, 5) $2x-y-3z=0$, 6) $4x+2y-z=0$
7) $x+3y-2=0$, 8) $3x-2y+5=0$, 9) $-7x+y-2=0$,
10) $2x-4z-12=0$, 11) $x-5z+4=0$, 12) $3x-6z+15=0$,
13) $2y-6z-6=0$, 14) $-y-3z+4=0$, 15) $2y-z-8=0$,
16) $6x-2=0$, 17) $-2x-7=0$, 18) $5x-3=0$,
19) $3y-2=0$, 20) $-2y-3=0$, 21) $4y-5=0$,
22) $5z-2=0$, 23) $-3z-7=0$, 24) $2z+3=0$,
25) $3x+3y=0$, 26) $2x-y=0$, 27) $-4x-2y=0$,
28) $-5y-5z=0$, 29) $-2y+4z=0$, 30) $3y-5z=0$,
31) $3x-3z=0$, 32) $3x+z=0$, 33) $-5x-7z=0$,
34) $-4x=0$, 35) $\frac{7}{3}y=0$, 36) $-\frac{5}{7}z=0$.

Вариант 10.

1) $-3x+3y-4z+12=0$, 2) $2x-2y+2z-9=0$, 3) $3x-4y-5z-20=0$,
4) $2x-3y-6z=0$, 5) $4x+3y-z=0$, 6) $x-2y-5z=0$,
7) $3x-2y+4=0$, 8) $x+3y-5=0$, 9) $6x-3y-4=0$,
10) $-x-3z+8=0$, 11) $2x-4z-8=0$, 12) $x-5z+10=0$,
13) $-3y-6z-11=0$, 14) $3y-z+4=0$, 15) $-2y-5z+10=0$,
16) $-3x+3=0$, 17) $2x-5=0$, 18) $-3x-4=0$,
19) $5y-7=0$, 20) $-2y-5=0$, 21) $y+2=0$,
22) $5z-7=0$, 23) $3z+4=0$, 24) $-2z-9=0$,
25) $2x-3y=0$, 26) $-4x-3y=0$, 27) $x+2y=0$,
28) $-2y+8z=0$, 29) $3y-7z=0$, 30) $-5y-10z=0$,

31) $3x-7z=0$, 32) $-3x-2z=0$, 33) $-2x+5z=0$,
34) $-7x=0$, 35) $\frac{1}{4}y=0$, 36) $9z=0$.

Вариант 11.

1) $2x+4y-6z-12=0$, 2) $-3x+y-z-9=0$, 3) $12x-3y+4z+12=0$,
4) $x-2y-4z=0$, 5) $3x-5y+2z=0$, 6) $2x+2y-7z=0$,
7) $3x-8y+5=0$, 8) $2x-y-3=0$, 9) $-x+3y+5=0$,
10) $2x-z-4=0$, 11) $3x-5z+12=0$, 12) $7x-7z-14=0$,
13) $-2y-4z-8=0$, 14) $-5y+2z-10=0$, 15) $2y-7z-14=0$,
16) $2x+4=0$, 17) $-3x+1=0$, 18) $12x-3=0$,
19) $3y-7=0$, 20) $-3y-9=0$, 21) $4y+5=0$,
22) $5z-4=0$, 23) $-3z+5=0$, 24) $-5z-20=0$,
25) $x-2y=0$, 26) $3x-5y=0$, 27) $-2x+2y=0$,
28) $3y-6z=0$, 29) $-y-4z=0$, 30) $-3y+7z=0$,
31) $3x-6z=0$, 32) $2x+4z=0$, 33) $-3x-7z=0$,
34) $\frac{9}{4}x=0$, 35) $-\frac{5}{6}y=0$, 36) $\frac{11}{6}z=0$.

Вариант 12.

1) $4x-y-5z+20=0$, 2) $-3x+2y-3z-12=0$, 3) $2x+7y-4z-14=0$,
4) $4x-2y-4z=0$, 5) $5x-3y-2z=0$, 6) $-x+2y-3z=0$,
7) $3x-2y+3=0$, 8) $2x-y-4=0$, 9) $-3x-4y+5=0$,
10) $3x-z-9=0$, 11) $3x-4z+8=0$, 12) $x-5z+15=0$,
13) $3y-4z-12=0$, 14) $-2y-4z+8=0$, 15) $3y-5z+5=0$,
16) $4x-1=0$, 17) $-3x+2=0$, 18) $-2x-7=0$,
19) $-3y+7=0$, 20) $-2y-4=0$, 21) $3y-8=0$,
22) $5z-3=0$, 23) $-2z+3=0$, 24) $-5z-6=0$,
25) $-4x-3y=0$, 26) $5x-3y=0$, 27) $-x-2y=0$,
28) $7y-14z=0$, 29) $-3y+5z=0$, 30) $-2y-4z=0$,
31) $3x+2z=0$, 32) $-2x+6z=0$, 33) $-3x-z=0$,
34) $\dfrac{2}{7}x=0$, 35) $5y=0$, 36) $-6z=0$.

Вариант 13.

1) $2x-4y+2z-8=0$, 2) $3x+2y-6z-6=0$, 3) $7x-2y-14z-14=0$,
4) $3x-3y-z=0$, 5) $3x-2y-4z=0$, 6) $x+3y-5z=0$,
7) $3x-8y+5=0$, 8) $2x-y-3=0$, 9) $-x+3y+5=0$,
10) $4x-4z+8=0$, 11) $5x-2z-13=0$, 12) $-x-3z+6=0$,
13) $-4y-z-4=0$, 14) $-4y-5z+12=0$, 15) $-2y+7z-14=0$,
16) $3x-4=0$, 17) $3x+2=0$, 18) $-7x-2=0$,
19) $3y-10=0$, 20) $-2y-7=0$, 21) $-3y+5=0$,
22) $3z-8=0$, 23) $-2z+3=0$, 24) $-5z-4=0$,
25) $3x-3y=0$, 26) $3x+2y=0$, 27) $-x-3y=0$,
28) $3y-6z=0$, 29) $-2y+5z=0$, 30) $-3y-7z=0$,

31) $3x+5z=0$, 32) $-x-2z=0$, 33) $-3x-4z=0$,
34) $-8x=0$, 35) $\frac{9}{4}y=0$, 36) $-\frac{1}{5}z=0$.

Вариант 14.

1) $5x-2y-2z-10=0$, 2) $3x+y-z-3=0$, 3) $2x-2y+3z-4=0$,
4) $2x-4y-z=0$, 5) $3x-4y-5z=0$, 6) $7x-2y-7z=0$,
7) $3x-2y+4=0$, 8) $x+3y-5=0$, 9) $6x-3y-4=0$,
10) $x-4z-8=0$, 11) $3x+2z-10=0$, 12) $2x-7z-14=0$,
13) $-y-3z+6=0$, 14) $2y-4z-8=0$, 15) $3y-5z+10=0$,
16) $5x-2=0$, 17) $3x+1=0$, 18) $-2x-3=0$,
19) $y-5=0$, 20) $3y+4=0$, 21) $-3y-5=0$,
22) $3z-2=0$, 23) $-2z+4=0$, 24) $-8z-16=0$,
25) $2x-2y=0$, 26) $3x+5y=0$, 27) $-7x-4y=0$,
28) $2y-3z=0$, 29) $5y+4z=0$, 30) $-y-5z=0$,
31) $2x-5z=0$, 32) $-3x-2z=0$, 33) $5x+z=0$,
34) $-2x=0$, 35) $\frac{8}{3}y=0$, 36) $\frac{4}{5}z=0$.

Вариант 15.

1) $3x-5y+3z-15=0$, 2) $2x-7y-2z+14=0$, 3) $5x+y+2z-5=0$,
4) $-x+2y-3z=0$, 5) $2x-2y-4z=0$, 6) $x+3y-5z=0$,
7) $x+3y-2=0$, 8) $3x-2y+5=0$, 9) $-7x+y-2=0$,
10) $2x-6z-12=0$, 11) $4x-z+4=0$, 12) $x-5z+10=0$,
13) $3y-2z+4=0$, 14) $y+3z-5=0$, 15) $6y+3z-4=0$,
16) $3x-5=0$, 17) $-2x+7=0$, 18) $-5x-4=0$,
19) $7y-2=0$, 20) $-3y-8=0$, 21) $2y+3=0$,
22) $2z-3=0$, 23) $3z+5=0$, 24) $-7z-2=0$,
25) $-x+6y=0$, 26) $-2x-3y=0$, 27) $3x+y=0$,
28) $2y-7z=0$, 29) $3y+5z=0$, 30) $-2y-8z=0$,
31) $3x+7z=0$, 32) $-5x-z=0$, 33) $-4x+6z=0$,
34) $-4x=0$, 35) $\frac{5}{2}y=0$, 36) $\frac{9}{4}z=0$.

Вариант 16.

1) $7x-2y+2z-14=0$, 2) $2x-3y-4z+12=0$, 3) $6x-2y+3z-12=0$,
4) $2x+3y-4z=0$, 5) $x-2y-5z=0$, 6) $3x-4y-6z=0$,
7) $3x-y-2=0$, 8) $-2x+8y-1=0$, 9) $5x-3y-5=0$,
10) $3x-6z-6=0$, 11) $2x-3z+4=0$, 12) $4x-z-8=0$,
13) $3y-4z-12=0$, 14) $-2y-5z+4=0$, 15) $-4y-6z+12=0$,
16) $7x-2=0$, 17) $2x+6=0$, 18) $-3y-4=0$,
19) $5y-3=0$, 20) $2y+3=0$, 21) $-y-7=0$,
22) $7z-3=0$, 23) $3z+12=0$, 24) $-2z-3=0$,
25) $2x+3y=0$, 26) $x-2y=0$, 27) $-3x-4y=0$,

28) $2y+7z=0$, 29) $y-5z=0$, 30) $-3y-6z=0$,
31) $2x-8z=0$, 32) $-3x-5z=0$, 33) $2x+5z=0$,
34) $-\frac{7}{4}x=0$, 35) $2y=0$, 36) $4z/3=0$.

II. Найти:

1. Найти уравнение плоскости P, проходящей через точку M_0.
2. Через две точки провести плоскость перпендикулярно данной плоскости P.
3. Найти острый угол между плоскостями.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки.
5. Найти следы плоскостей на координатных плоскостях.
6. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями:
7. Найти расстояние от точки до плоскости
8. Найти расстояние между параллельными плоскостями

Вариант 1.

1. Плоскость, параллельную плоскости xOy и проходящей через т. M_0:

1) $M_0(5,6,-2)$,	2) $M_0(2,3,-1)$,	3) $M_0(3,3,-1)$.

2.

1) $M_1(8,-1,3)$ $M_2(4,1,6)$ $4x-2y-3z-7=0$	2) $M_1(2,3,4)$ $M_2(1,1,5)$ $3x+4y+9z=0$	3) $M_1(3,1,-2)$ $M_2(5,-3,2)$ $-2x+5y-4=0$

3.

1) $4x+y+6z-1=0$ $4x-2y-3z-7=0$	2) $2x+3y-z-9=0$ $3x+3y-z-1=0$	3) $4x+y-3z-1=0$ $x-2z-5=0$

4.

1) $M_1(3,1,2)$ $M_2(2,2,-3)$ $M_3(1,-1,1)$	2) $M_1(5,6,-2)$ $M_2(2,3,-1)$ $M_3(3,3,-1)$	3) $M_1(3,1,-2)$ $M_2(5,-3,2)$ $M_3(-2,5,-4)$

5. 1) $4x-3y+z-8=0$, 2) $5x-2z-7=0$, 3) $7x-9z=0$
6. 1) $3x+4y+9z=0$, 2) $5x+6y-2z-2=0$, 3) $8x+9y+8z-1=0$
7.

1) $M_0(1,-2,-3)$ $x+3y-5z=0$	2) $M_0(4,1,-3)$ $3x+y-z-2=0$	3) $M_0(1,-2,3)$ $2x+3y-4z-2=0$

8.

1) $x+3y+4z-1=0$ $2x+6y+8z+11=0$	2) $3x-y+2z-1=0$ $9x+3y+6z+13=0$

9.

1) $7x-2y-z-2=0$ $6x-4y-5z-3=0$ $x+2y+4z-5=0$	2) $x+y+z-1=0$ $x-y+2z+5=0$ $2x+3z+2=0$

Вариант 2.

1. Плоскость, перпендикулярную оси ***Ox*** и проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0$:

1) $\boldsymbol{M}_0(2,1,-7)$, 2) $\boldsymbol{M}_0(0,4,5)$, 3) $\boldsymbol{M}_0(2,0,-8)$

2. 1) $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,-3)$, $3x+2y=0$
2) $M_1(5,-5,4)$, $M_2(3,1,3)$, $x+7y-z=0$
3) $M_1(2,-3,2)$, $M_2(3,4,-7)$, $5x+y-5z-9=0$

3. 1) $2x+3y+4z-5=0$, $3x+4y+9z=0$
2) $2x-3y-4z-1=0$, $7x-9y-z-3=0$
3) $3x+y-2z-6=0$, $-2x+5y-4=0$

4. 1) $M_1(1,3,-1)$, $M_2(2,5,-2)$, $M_3(1,1,5)$
2) $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(2,3,2)$, $M_3(3,-2,5)$
3) $M_1(4,1,3)$, $M_2(8,-1,7)$, $M_3(2,4,-5)$

5. 1) $x-5y+z-3=0$ 2) $4x-3z-1=0$ 3) $3x+2y-z-7=0$

6. 1) $2x-3y-4z-1=0$ 2) $3x-4z-1=0$ 3) $-2x+5y-4z=0$

7. 1) $M_0(1,-1,2)$, $2x+y-3z=0$
2) $M_0(4,-9,5)$, $3x+5y-4z-5=0$
3) $M_0(5,1,-5)$, $3x+4y-7z-2=0$

8. 1) $x+3y+5z-1=0$, $2x+6y+10z=0$
2) $2x+3y-4z-2=0$, $8x+12y-16z+9=0$

9. 1) $4x+y-3z-1=0$, $3x+y-z-2=0$, $x-2z-5=0$
2) $2x+8y-7z=0$, $4x+3y-z-7=0$, $2x-5y+6z-1=0$

Вариант 3.

1. Плоскость, проходящую через ось Ox и через точку M_0:
1) $M_0(3,1,-2)$ 2) $M_0(0,5,4)$ 3) $M_0(2,-1,0)$

2. 1) $M_1(2,0,3)$, $M_2(5,-5,-4)$, $x-y+5z-1=0$
2) $M_1(1,-5,1)$, $M_2(3,2,-1)$, $4x-3y-1=0$
3) $M_1(3,1,2)$, $M_2(2,2,3)$, $x-z-2=0$

3. 1) $2x+y+z-2=0$, $5x+y-3z=0$
2) $x-2y-3z-3=0$, $2x+y-8z-4=0$
3) $3x-y-z-2=0$, $x-2z-5=0$

4. 1) $M_1(6,3,-5)$, $M_2(9,4,-7)$, $M_3(3,1,-2)$
2) $M_1(2,5,1)$, $M_2(4,6,3)$, $M_3(1,-1,-2)$
3) $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,-3)$, $M_3(3,0,2)$

5. 1) $3x+y+2z-3=0$ 2) $4x+5y-z=0$ 3) $x-3y+4=0$

6. 1) $2x-3z+5=0$ 2) $x+2y-7z-2=0$ 3) $2x+5y-8z=0$

7. 1) $M_0(1,-2,-3)$, $x+3y-5z=0$
2) $M_0(2,1,1)$, $5x+y+3z-4=0$
3) $M_0(3,-5,-6)$, $4x-9y-8z-1=0$

8. 1) $6x+4y-10z=0$, $3x+2y-5z-5=0$
2) $6x+3y-12z-1=0$, $2x+y-4z-9=0$

$x-2y-3z-3=0$ $\quad$ $x-4y-2z=0$

9. 1) $2x+y-8z-4=0$ $\quad$ 2) $3x-5y-6z-2=0$

$x+3y-5z=0$ $\quad$ $4x-9y-8z-1=0$

Вариант 4.

1. Плоскость, проходящую через ось Oz и через точку M_0:

1) $M_0(-2,4,-4)$ $\quad$ 2) $M_0(3,0,7)$ $\quad$ 3) $M_0(1,2,-7)$

$M_1(3,1,2)$ $\quad$ $M_1(6,3,-5)$ $\quad$ $M_1(2,3,4)$

2. 1) $M_2(2,2,-3)$ $\quad$ 2) $M_2(9,4,-7)$ $\quad$ 3) $M_2(1,1,5)$

$x-y+z-2=0$ $\quad$ $3x+y-2z-5=0$ $\quad$ $3x+4y+9z=0$

3. 1) $x-5y+z-3=0$, $4x-3y-1=0$ $\quad$ 2) $5x-5y-4z+3=0$, $4x-4y-9z=0$ $\quad$ 3) $2x+3y+4z-5=0$, $x+y+5z-6=0$

$M_1(5,-9,-4)$ $\quad$ $M_1(4,-7,-2)$ $\quad$ $M_1(1,-5,1)$

4. 1) $M_2(1,-7,-5)$ $\quad$ 2) $M_2(2,-3,-4)$ $\quad$ 3) $M_2(3,2,-1)$

$M_3(4,-2,1)$ $\quad$ $M_3(2,-4,2)$ $\quad$ $M_3(4,-3,0)$

5. 1) $3x+y+2z+3=0$ $\quad$ 2) $2x+2y+5z=0$ $\quad$ 3) $5x+7z-1=0$

6. 1) $2x-3y+4z=0$ $\quad$ 2) $4x-11y+10=0$ $\quad$ 3) $5x+y-5z-9=0$

7. 1) $M_0(5,-9,-4)$, $x-7y-5z-1=0$ $\quad$ 2) $M_0(4,-7,-2)$, $2x-3y-4z-6=0$ $\quad$ 3) $M_0(2,2,5)$, $3x+2z+3=0$

8. 1) $x+y+5z-6=0$, $3x+4y+9z=0$ $\quad$ 2) $5x+6y-2z-2=0$, $2x+3y-z-9=0$

$2x-3y-4z-1=0$ $\quad$ $3x+y-2z-6=0$

9. 1) $7x-9y-z-3=0$ $\quad$ 2) $5x-3y+2z-4=0$

$5x-6y+3z-7=0$ $\quad$ $-2x+5y-4z=0$

Вариант 5.

1. Плоскость, проходящая через ось Oy и через точку M_0:

1) $M_0(2,-5,-4)$ 2) $M_0(1,0,8)$ 3) $M_0(-2,-3,6)$

$M_1(1,-5,1)$ $\quad$ $M_1(5,-5,-4)$ $\quad$ $M_1(7,-2,-1)$

2. 1) $M_2(3,2,-1)$ $\quad$ 2) $M_2(1,-1,5)$ $\quad$ 3) $M_2(6,-4,-5)$

$4x-3y-1=0$ $\quad$ $4x-4y-9z=0$ $\quad$ $x+2y+4z-5=0$

3. 1) $5x-9y-4z-6=0$, $x-7y-5z-1=0$ $\quad$ 2) $3x+2y-z-7=0$, $4x-3y-1=0$ $\quad$ 3) $x-y+5z-1=0$, $4x-4y-9z=0$

$M_1(1,1,1)$ $\quad$ $M_1(3,-1,2)$ $\quad$ $M_1(1,3,2)$

4. 1) $M_2(2,-3,4)$ $\quad$ 2) $M_2(1,1,1)$ $\quad$ 3) $M_2(2,-1,3)$

$M_3(4,-11,10)$ $\quad$ $M_3(1,3,3)$ $\quad$ $M_3(3,-5,4)$

5. 1) $3x+4y+z-2=0$ $\quad$ 2) $3x-y-3z=0$ $\quad$ 3) $5x+z-3=0$

6. 1) $2x-y+5z-3=0$ 2) $2x-z-3=0$ 3) $3x-y+2z=0$

7. 1) $\begin{matrix} M_0(2,5,1) \\ 4x+6y+3z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(3,-1,-3) \\ 2x+3y+1=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(1,-1,2) \\ 2x+y-3z-4=0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} x-2y-3z-3=0 \\ x+3y-5z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 3x-5y+3z-4=0 \\ x+2y+z-8=0 \end{matrix}$

$6x+3y-5z=0$ $x-5y+z-3=0$

9. 1) $9x+4y-7z-3=0$ 2) $3x+2y-z-7=0$

$3x+y-2z-5=0$ $4x-3y-1=0$

Вариант 6.

1. Плоскость, параллельная плоскости xOz и проходящая через т. M_0:

1) $M_0(2,-1,-3)$ 2) $M_0(0,3,-7)$ 3) $M_0(2,3,-4)$

$M_1(3,1,1)$ $M_1(3,-1,1)$ $M_1(3,-1,1)$

2. 1) $M_2(-3,5,6)$ 2) $M_2(1,2,4)$ 3) $M_2(1,2,1)$

$x-4y-2z+19=0$ $5x+y+2z-8=0$ $5x+y+2z-11=0$

3. 1) $\begin{matrix} 2x+4y-5z-11=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x+y+z-1=0 \\ 2x+3z+2=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x-y+4z-15=0 \\ 5x-2y+5z=0 \end{matrix}$

$M_1(3,4,-2)$ $M_1(1,5,-6)$ $M_1(4,1,0)$

4. 1) $M_2(2,-1,-1)$ 2) $M_2(3,1,4)$ 3) $M_2(3,2,5)$

$M_3(3,-2,4)$ $M_3(2,-3,1)$ $M_3(1,-3,4)$

5. 1) $3x-2y-5z-5=0$ 2) $3y-5z+2=0$ 3) $x-2y+3z=0$

6. 1) $2x-y-3z=0$ 2) $3x+4y+2z-1=0$ 3) $3x+y+4=0$

7. 1) $\begin{matrix} M_0(2,-1,-3) \\ 3x+4y+2z-1=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(-3,5,6) \\ x-4y-2z+9=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(-3,5,6) \\ x-4y-2z+19=0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} -3x+5y+6z-4=0 \\ 6x-10y-12z+5=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x+5y+z-4=0 \\ 2x+10y+2z+3=0 \end{matrix}$

$3x-3y+2z-2=0$ $3x+2y-4z-8=0$

9. 1) $4x-5y+2z-1=0$ 2) $2x+4y-5z-1=0$

$x-2y-5=0$ $5x+6y-9z-2=0$

Вариант 7.

1. Плоскость, проходящая через ось Oy и через точку M_0:

1) $M_0(-3,2,4)$ 2) $M_0(2,3,4)$ 3) $M_0(7,-5,0)$

$M_1(1,4,-1)$ $M_1(2,-1,2)$ $M_1(2,-1,3)$

2. 1) $M_2(3,-2,5)$ 2) $M_2(1,1,2)$ 3) $M_2(1,3,-1)$

$5y+4z+20=0$ $4x+y+4z+3=0$ $x-2y+2z+7=0$

3\. 1) $\begin{matrix} 3x-2y+4z-21=0 \\ 3x+4y-2z-9=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 3x-2y-5z-5=0 \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} x+4y-z+9=0 \\ 4x-y+5z+2=0 \end{matrix}$

$M_1(3,1,1)$ $M_1(3,-1,1)$ $M_1(3,-1,1)$

4\. 1) $M_2(-3,5,6)$ 2) $M_2(5,1,2)$ 3) $M_2(5,1,2)$

$M_3(1,-4,-2)$ $M_3(1,2,4)$ $M_3(1,2,4)$

5\. 1) $2x+3y+z-4=0$ 2) $2x+y+3z=0$ 3) $3x+2y+z-1=0$

6\. 1) $2x-y-3z+9=0$ 2) $x+5y+z-20=0$ 3) $3x-2z+4=0$

7\. 1) $\begin{matrix} M_0(3,2,-4) \\ 2x+4y-5z-11=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(1,1,1) \\ x-y+2z+5=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(1,-1,2) \\ 2x+3z+2=0 \end{matrix}$

8\. 1) $\begin{matrix} 5x+2y-4z+16=0 \\ 10x+4y-8z-5=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 7x+4y-z-13=0 \\ 21x+12y-3z+39=0 \end{matrix}$

$2x-y+2z=0$ $2x-y-3z+9=0$

9\. 1) $4x+y+4z-6=0$ 2) $x+5y+z-20=0$

$x+y+2z-4=0$ $3x+4y+2z-15=0$

Вариант 8.

1\. Плоскость, перпендикулярную оси Oy и проходящую через т. M_0:

1) $M_0(-3,-4,5)$ 2) $M_0(2,5,4)$ 3) $M_0(-1,2,5)$

$M_1(2,1,3)$ $M_1(2,-1,2)$ $M_1(3,-1,1)$

2\. 1) $M_2(2,3,1)$ 2) $M_2(1,1,2)$ 3) $M_2(1,2,4)$

$3x+2y+z=6$ $4x+y+4z=-3$ $5x+y+2z=3$

3\. 1) $\begin{matrix} 7z+4y-z=13 \\ 3x+2y+3z=3 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 4x-y+5z+2=0 \\ 3y-7z+6=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} x+3z+6=0 \\ 2x-3y+z-9=0 \end{matrix}$

$M_1(8,3,-6)$ $M_1(4,1,-3)$ $M_1(2,3,4)$

4\. 1) $M_2(1,1,-1)$ 2) $M_2(1,1,-1)$ 3) $M_2(7,-5,0)$

$M_3(4,1,-3)$ $M_3(8,3,-6)$ $M_3(4,0,11)$

5\. 1) $2x+3y+4z-33=0$ 2) $7x-5y-24=0$ 3) $4x+11z-39=0$

6\. 1) $x+4y-z-6=0$ 2) $5y+4z+20=0$ 3) $3x-2y+5z+22=0$

7\. 1) $\begin{matrix} M_0(2,-1,2) \\ x+y+2z+4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(2,-1,3) \\ x+3y-z-11=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(3,-1,1) \\ x+2y+4z-6=0 \end{matrix}$

8\. 1) $\begin{matrix} 2x-3y+6z-14=0 \\ 2x-3y+6z+28=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x+4y-z+9=0 \\ 2x+8y-2z-18=0 \end{matrix}$

$2x+y+3z=7$ $2x-y+2z-3=0$

9\. 1) $2x+3y+z=1$ 2) $x+y+2z+4=0$

$3x+2y+z=6$ $4x+y+4z+3=0$

Вариант 9.

1. Плоскость, проходящая через т. $\boldsymbol{M}_0$ параллельная другой плоскости:

1) $\boldsymbol{M}_0(2, 4, -4)$, $4\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+7\boldsymbol{z}-1=0$ 2) $\boldsymbol{M}_0(5, 8, 1)$, $-4\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+2=0$ 3) $\boldsymbol{M}_0(1, 5, 3)$, $4\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$

$\boldsymbol{M}_1(1, 3, 5)$ $\boldsymbol{M}_1(1, 1, 3)$ $\boldsymbol{M}_1(-2, 3, 2)$

2. 1) $\boldsymbol{M}_2(1, 2, 3)$, $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=0$ 2) $\boldsymbol{M}_2(2, 7, 14)$, $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-2=0$ 3) $\boldsymbol{M}_2(2, -3, 2)$, $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+5=0$

3. 1) $\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0$, $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+5=0$ 2) $8\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=0$, $-4\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}+2=0$ 3) $4\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+7\boldsymbol{z}-2=0$, $5\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{z}+1=0$

$\boldsymbol{M}_1(1, -1, 6)$ $\boldsymbol{M}_1(6, 1, 5)$ $\boldsymbol{M}_1(-2, 4, -6)$

4. 1) $\boldsymbol{M}_2(4, 5, -2)$, $\boldsymbol{M}_3(-1, 3, 0)$ 2) $\boldsymbol{M}_2(3, 6, -8)$, $\boldsymbol{M}_3(5, 2, -1)$ 3) $\boldsymbol{M}_2(1, 1, -2)$, $\boldsymbol{M}_3(1, 2, 3)$

5. 1) $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}-3=0$ 2) $-3\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-4=0$ 3) $2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{z}-4=0$

6. 1) $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-3=0$ 2) $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4=0$ 3) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}=0$

7. 1) $\boldsymbol{M}_0(2, 2, 4)$, $-\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}+3=0$ 2) $\boldsymbol{M}_0(1, 2, -2)$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1=0$ 3) $\boldsymbol{M}_0(3, 4, 0)$, $-\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}=0$

8. 1) $2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-6\boldsymbol{z}+1=0$, $2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-6\boldsymbol{z}-9=0$ 2) $7\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+8\boldsymbol{z}-1=0$, $7\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+8\boldsymbol{z}+5=0$

$5\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}-7=0$ $\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}+3=0$

9. 1) $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}-1=0$, $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}-9=0$ 2) $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-5=0$, $-3\boldsymbol{x}+12\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}-7=0$

Вариант 10.

1. Плоскость, проходящей через т. $\boldsymbol{M}_0$ параллельно другой плоскости:

1) $\boldsymbol{M}_0(2, 3, 1)$, $3\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{z}+2=0$ 2) $\boldsymbol{M}_0(-1, 1, 3)$, $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-1=0$ 3) $\boldsymbol{M}_0(3, -5, 0)$, $5\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+8\boldsymbol{z}=0$

$\boldsymbol{M}_1(2, 2, 0)$ $\boldsymbol{M}_1(-1, 1, 3)$ $\boldsymbol{M}_1(-1, 3, 2)$

2. 1) $\boldsymbol{M}_2(1, 5, 3)$, $2\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{y}+7\boldsymbol{z}+1=0$ 2) $\boldsymbol{M}_2(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0$ 3) $\boldsymbol{M}_2(2, 6, 7)$, $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{z}-4=0$

3. 1) $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+2=0$, $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0$ 2) $3\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{z}+13=0$, $3\boldsymbol{y}-6\boldsymbol{z}-2=0$ 3) $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$, $9\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}-5=0$

$\boldsymbol{M}_1(-2, 3, 0)$ $\boldsymbol{M}_1(-2, 5, 5)$ $\boldsymbol{M}_1(3, 1, 5)$

4. 1) $\boldsymbol{M}_2(0, 3, -2)$, $\boldsymbol{M}_3(-2, 0, 6)$ 2) $\boldsymbol{M}_2(-2, 1, 1)$, $\boldsymbol{M}_3(-3, 2, 1)$ 3) $\boldsymbol{M}_2(-1, 2, 1)$, $\boldsymbol{M}_3(1, 4, 2)$

5. 1) $-15\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+7\boldsymbol{z}+1=0$ 2) $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}-2=0$ 3) $-3\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-3=0$

6. 1) $5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-6=0$ 2) $2\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}+1=0$ 3) $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}+5=0$

7. 1) $\begin{matrix} M_0(7,1,2) \\ -5x+3y-2z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(3,3,5) \\ 4x+5z-1=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(1,2,4) \\ x-y+z+5=0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} 2x+2y-8z+35=0 \\ x+y-4z+4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x+3y+4z-9=0 \\ -x-3y-4z-5=0 \end{matrix}$

9. 1) $\begin{matrix} x+y-z-2=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z-2=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-y+2z-3=0 \\ y+2z-3=0 \\ -2x+y+z+2=0 \end{matrix}$

Вариант 11.

1. Плоскость, проходящей через т. M_0 параллельно другой плоскости:

1) $\begin{matrix} M_0(2,1,2) \\ x+3y+3z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(1,1,-3) \\ 2x+5y-14=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(1,3,2) \\ 6x+5z+2=0 \end{matrix}$

2. 1) $\begin{matrix} M_1(3,1,-2) \\ M_2(1,-2,1) \\ -5x+2z+4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(-2,1,0) \\ M_2(2,2,5) \\ 3x+2y-z+8=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_1(-2,-3,3) \\ M_2(-1,1,7) \\ 2y+3z+5=0 \end{matrix}$

3. 1) $\begin{matrix} -3x+7y+z+4=0 \\ 5x+7y+8z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 6x+9y+2z=0 \\ 3x-4z-7=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x+3y-5=0 \\ 7x+y-8z=0 \end{matrix}$

4. 1) $\begin{matrix} M_1(3,2,3) \\ M_2(-2,-1,4) \\ M_3(4,-1,-2) \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(11,4,11) \\ M_2(3,1,1) \\ M_3(-4,1,4) \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_1(3,1,1) \\ M_2(1,4,1) \\ M_3(1,1,7) \end{matrix}$

5. 1) $2x-5y-4z+8=0$ 2) $4x-6y-z=0$ 3) $x-y+6z-3=0$

6. 1) $3x+2y+2z-1=0$ 2) $-2x+3y+z=0$ 3) $-x-y+3z+5=0$

7. 1) $\begin{matrix} M_0(2,3,3) \\ -x+4y+2z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(-1,4,2) \\ -x-2y+4z=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(4,1,1) \\ 3x+y+z-3=0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} x-y-z+2=0 \\ -x+y-z-4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} -x-2y+3z-1=0 \\ 2x+4y-6z+7=0 \end{matrix}$

9. 1) $\begin{matrix} x+2y+3z-2=0 \\ x+y-z-1=0 \\ x-y+2z-4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x+2y+z-2=0 \\ -x+y+2z-1=0 \\ -x-y+z+2=0 \end{matrix}$

Вариант 12.

1. Плоскость, проходящей через т. M_0 параллельно другой плоскости:

1) $\begin{matrix} M_0(1,2,1) \\ 5x+y+6z-1=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(2,-1,3) \\ 5x+y-4=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(3,-1,4) \\ 7x+y+3=0 \end{matrix}$

2. 1) $\begin{matrix} M_1(2,1,4) \\ M_2(-2,2,-10) \\ 4x+8y-9z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(1,1,5) \\ M_2(9,-3,0) \\ 2x-y+2z+9=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_1(2,-3,1) \\ M_2(6,1,-1) \\ 3x-4z+3=0 \end{matrix}$

3. 1) $\begin{matrix} 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2z=0 \\ \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+3z+4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}-3z+1=0 \\ 2\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+14=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-2z-8=0 \\ \boldsymbol{x}+3z+2=0 \end{matrix}$

$\boldsymbol{M}_1(5,1,14)$ $\boldsymbol{M}_1(0,7,1)$ $\boldsymbol{M}_1(-4,5,-4)$

4. 1) $\boldsymbol{M}_2(4,2,5)$ 2) $\boldsymbol{M}_2(0,2,7)$ 3) $\boldsymbol{M}_2(-3,3,-5)$

$\boldsymbol{M}_3(0,2,3)$ $\boldsymbol{M}_3(1,5,0)$ $\boldsymbol{M}_3(-4,0,2)$

5. 1) $3\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+4z-3=0$ 2) $8\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+4z=0$ 3) $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+4z-3=0$
6. 1) $7\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+6z+5=0$ 2) $4\boldsymbol{x}+9z+5=0$ 3) $4\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}-11z=0$
7. 1) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(1,2,1) \\ 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+3z-4=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(5,1,6) \\ -2\boldsymbol{y}+3z+3=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(5,1,0) \\ 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4z=0 \end{matrix}$
8. 1) $\begin{matrix} -4\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+z-11=0 \\ 4\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-z-4=0 \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z-3=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+6z-3=0 \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z+8=0 \\ 7\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4z+8=0 \end{matrix}$
9. 1) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-z-3=0 \\ \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+z-6=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 4\boldsymbol{y}-9z-13=0 \\ 3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+z+3=0 \end{matrix}$

***Вариант 13*.**

1. Плоскость, проходящей через т. $\boldsymbol{M}_0$ параллельно другой плоскости:

1) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(2,3,3) \\ 4\boldsymbol{x}+11\boldsymbol{y}+11z+2=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(-1,4,-2) \\ 7\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(-1,-2,4) \\ 3\boldsymbol{x}-2z+2=0 \end{matrix}$

$\boldsymbol{M}_1(4,4,-2)$ $\boldsymbol{M}_1(2,1,-1)$ $\boldsymbol{M}_1(3,1,-2)$

2. 1) $\boldsymbol{M}_2(0,2,1)$ 2) $\boldsymbol{M}_2(2,0,1)$ 3) $\boldsymbol{M}_2(2-4,-3)$

$2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+3z+4=0$ $3\boldsymbol{x}+2z+4=0$ $2\boldsymbol{y}-5z+8=0$

3. 1) $\begin{matrix} 5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3z-1=0 \\ 6\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+2z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 3\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+2z+1=0 \\ 2\boldsymbol{x}-5z+6=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+4=0 \\ \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+4z=0 \end{matrix}$

$\boldsymbol{M}_1(3,3,0)$ $\boldsymbol{M}_1(-2,5,5)$ $\boldsymbol{M}_1(3,2,2)$

4. 1) $\boldsymbol{M}_2(2,3,7)$ 2) $\boldsymbol{M}_2(-5,1,5)$ 3) $\boldsymbol{M}_2(2,3,1)$

$\boldsymbol{M}_3(5,1,1)$ $\boldsymbol{M}_3(-2,1,-1)$ $\boldsymbol{M}_3(1,1,3)$

5. 1) $2\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}-7z+2=0$ 2) $-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+9z=0$ 3) $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4z-1=0$
6. 1) $7\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+10z=0$ 2) $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-11=0$ 3) $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+5z=0$
7. 1) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(2,3,1) \\ -\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-2z+5=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(1,2,1) \\ 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-4z=0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} \boldsymbol{M}_0(2,-2,1) \\ 6\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+7z+3=0 \end{matrix}$
8. 1) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z-3=0 \\ 3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+6z+16=0 \\ -\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-z=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 8\boldsymbol{x}+12\boldsymbol{y}+4z+8=0 \\ 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+z-13=0 \\ 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}+z-1=0 \end{matrix}$
9. 1) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+3z-5=0 \\ 3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z-6=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3z-9=0 \\ 4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+z+6=0 \end{matrix}$

Вариант 14.

1. Плоскость, проходящей через т. M_0 параллельно другой плоскости:

1) $M_0(-5,3,2)$, $2x+y-3z+6=0$, $M_1(4,3,5)$ 2) $M_0(3,3,5)$, $7x-y+4=0$, $M_1(3,1,4)$ 3) $M_0(4,5,-1)$, $x+4y-2z=0$, $M_1(1,3,-1)$

2. 1) $M_2(1,2,-1)$, $5x-y-4z+2=0$ 2) $M_2(4,2,-1)$, $9x+3y-6z=0$ 3) $M_2(1,2,6)$, $6x+2z+1=0$

3. 1) $2x+y+6=0$, $x+5z+4=0$, $M_1(-2,1,1)$ 2) $3y-z+8=0$, $5x+16y+10z=0$, $M_1(4,2,3)$ 3) $x+3y+5z=0$, $6x+2z-1=0$, $M_1(3,3,0)$

4. 1) $M_2(0,4,3)$, $M_3(-3,0,4)$ 2) $M_2(-1,-1,1)$, $M_3(1,3,5)$ 3) $M_2(1,2,1)$, $M_3(7,2,2)$

5. 1) $3x+5y+4z-3=0$ 2) $8x+7y-4z=0$ 3) $4x+7y-8=0$

6. 1) $2x+2y+z-3=0$ 2) $3x+y+3z=0$ 3) $-3x+y+1=0$

7. 1) $M_0(-2,1,2)$, $x+3y+2z-3=0$ 2) $M_0(3,2,7)$, $x-3z+5=0$ 3) $M_0(-6,1,2)$, $-x+2y+7z=0$

8. 1) $9x+3y-6z+1=0$, $3x+y-2z-1=0$, $x+y+2z-6=0$ 2) $x+2y+3z=0$, $2x+4y+z-1=0$, $2x+2y+4z-6=0$

9. 1) $2x-y+2z-1=0$, $4x+y+4z-11=0$ 2) $2x-y-2z-5=0$, $4x+y+4z-7=0$

Вариант 15.

1. Плоскость, проходящей через т. M_0 параллельно другой плоскости:

1) $M_0(1,2,4)$, $-x-4y-2z+5=0$, $M_1(7,10,4)$ 2) $M_0(1,1,-1)$, $3x+2y+5=0$, $M_1(4,4,-2)$ 3) $M_0(-2,2,4)$, $2x+3z-8=0$, $M_1(2,1,-1)$

2. 1) $M_2(5,-1,3)$, $2x+3y-z-4=0$ 2) $M_2(0,2,7)$, $3x+z-4=0$ 3) $M_2(1,1,3)$, $2y+3z+8=0$

3. 1) $6x+2y+2z-3=0$, $-6x+4y+5=0$, $M_1(2,3,4)$ 2) $2x+4y-5=0$, $3x+6y-z=0$, $M_1(8,4,1)$ 3) $x+y+2z-7=0$, $y-4z+5=0$, $M_1(3,5,8)$

4. 1) $M_2(-1,1,-1)$, $M_3(3,5,-1)$ 2) $M_2(7,7,3)$, $M_3(6,5,8)$ 3) $M_2(-1,3,2)$, $M_3(-5,1,7)$

5. 1) $x+y+5=0$ 2) $4x+y+2z-3=0$ 3) $3x+5z-7=0$

6. 1) $x+8y+2z+3=0$ 2) $5x+2y-6z-3=0$ 3) $3x+2y+7z=0$

7. 1) $\begin{matrix} M_0(3,3,0) \\ 10x + y + 5z = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(3,-2,1) \\ -x + y - 2z + 3 = 0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(2,1,-3) \\ x - 6y + 5z - 1 = 0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} 4x + 2y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y + 2z - 5 = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x - 2y + 3z + 6 = 0 \\ 2x - 4y + 6z + 30 = 0 \end{matrix}$

$x + 3y - 13z - 6 = 0$ $\quad$ $x - 2y + 3z = 0$

9. 1) $4x - y + z + 1 = 0$ 2) $-2x + 3y - 8z + 3 = 0$

$6x - 3y + 9z + 3 = 0$ $\quad$ $x - y + z - 1 = 0$

***Вариант 16*.**

1. Плоскость, проходящей через т. M_0 параллельно другой плоскости:

1) $\begin{matrix} M_0(1,1,1) \\ 3x + 2y - 7z + 11 = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(3,4,0) \\ 4x + 9z - 1 = 0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(-1,5,6) \\ 5y - 2z + 8 = 0 \end{matrix}$

$M_1(2,1,1)$ $\quad$ $M_1(1,1,5)$ $\quad$ $M_1(1,-4,0)$

2. 1) $M_2(1,3,1)$ 2) $M_2(2,5,-7)$ 3) $M_2(5,0,-2)$

$3x + 7y - 10z + 2 = 0$ $\quad$ $2x + y + 3 = 0$ $\quad$ $y - 3z + 5 = 0$

3. 1) $\begin{matrix} 4x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 4x + 2y + 2z = 0 \\ -2y - z + 4 = 0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} x + 2y - 2z - 3 = 0 \\ 4x + 5 = 0 \end{matrix}$

$M_1(1,3,2)$ $\quad$ $M_1(4,1,2)$ $\quad$ $M_1(-2,-1,-4)$

4. 1) $M_2(0,6,2)$ 2) $M_2(1,1,-1)$ 3) $M_2(1,2,-2)$

$M_3(3,2,7)$ $\quad$ $M_3(4,2,2)$ $\quad$ $M_3(1,-3,2)$

5. 1) $x + 2y + 6z - 3 = 0$ 2) $x - 3y - 5z = 0$ 3) $6x - 7y + 7z + 3 = 0$
6. 1) $x + 2y + 6z = 0$ 2) $x - 3y - 5z + 3 = 0$ 3) $6x - 7y + 7 = 0$
7. 1) $\begin{matrix} M_0(2,1,1) \\ x + 3y + z - 3 = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_0(1,1,5) \\ 2x + 5y - 7z = 0 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} M_0(5,-1,6) \\ 8y + 5z - 2 = 0 \end{matrix}$

8. 1) $\begin{matrix} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + y + z + 4 = 0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x - y + 2z + 6 = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 10 = 0 \end{matrix}$

$2x + 5y - 8z + 35 = 0$ $\quad$ $x + 3y + 4z - 9 = 0$

9. 1) $x + y - z + 4 = 0$ 2) $x - y + 4z - 5 = 0$

$6x - 2y + 3z - 20 = 0$ $\quad$ $2x + 4y - 3z - 5 = 0$

4.2. ПРАКТИКУМ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

***Задача 1*.** Найти углы, которые прямая $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{6}$ составляет с координатными осями.

Решение. По формулам для направляющих косинусов, полагая в них $l = 2, m = 3, n = 6$, будем иметь

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\pm\frac{2}{7};\quad \cos\beta=\pm\frac{3}{7};\quad \cos\gamma=\pm\frac{6}{7}.$$

Проверим, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\quad \frac{4}{49}+\frac{9}{49}+\frac{36}{49}=1$.

Острые углы, составляемые прямой с координатными осями, равны: $\alpha=73°24'$; $\beta=64°37'$; $\gamma=31°1'$; (эти значения определены по таблицам тригонометрических функций).

Задача 2. Найти канонические и параметрические уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2{,}5{,}-4)$, если известны углы с осями координат: $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Уравнения могут быть записаны в виде:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma},\qquad \frac{x-2}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{y-5}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{z+4}{\cos\frac{\pi}{6}},\qquad \frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{1/2}=\frac{z+4}{\sqrt{3}/2}.$$

Умножая на $1/2$, имеем каноническое уравнение $\frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+4}{\sqrt{3}}$.

Параметрическое уравнение: $\frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+4}{\sqrt{3}}=t$, $\begin{cases}\frac{x-2}{0}=t\\ \frac{y-5}{1}=t\\ \frac{z+4}{\sqrt{3}}=t\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=2\\ y=t+5\\ z=\sqrt{3}\cdot t-4\end{cases}$

Общие уравнения прямых: $\begin{cases}\frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{1},\\ \frac{y-5}{1}=\frac{z+4}{\sqrt{3}},\end{cases}\begin{cases}x-2=0,\\ \sqrt{3}\cdot(y-5)=z+4,\end{cases}\begin{cases}x-2=0,\\ \sqrt{3}\cdot y-z=5\sqrt{3}+4.\end{cases}$

Задача 3. Общие уравнения прямой $\left.\begin{matrix}x+3y-4z+5=0\\ 2x-y+z-4=0\end{matrix}\right\}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение. Прямую можем задать опорной точкой и направляющим вектором. а) Чтобы найти опорную точку, исключим из уравнений системы, например z. Пусть $z=0$, тогда $\left.\begin{matrix}x+3y=-5\\ 2x-y=4\end{matrix}\right\}$, найдем $\boldsymbol{M}_0(1,-2,0)$.

б) Направляющий вектор определяется по формулам

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad l=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\cdot t=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 1\end{vmatrix}\cdot t=-t;$$

$$m=-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\cdot t=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot t=-9t;\qquad n=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\cdot t=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot t=-7t.$$

Пусть $t=0$, тогда $l=-1, m=-9, n=-7$.

в) Уравнение прямой в каноническом виде $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-9}=\frac{z-0}{-7}$.

Умножая все знаменатели на (-1), получим окончательно $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-0}{7}$.

Задача 4. Найти острый угол между прямыми

а) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$,

б) $\begin{cases}2x+3y-4z+5=0\\ x-y+z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-y+2z-4=0\\ 2x+y-z-5=0\end{cases}$

Решение.

а) Направляющий вектор для прямых $\bar{v}_1\{3,-1,2\}$ $\bar{v}_2\{1,2,-1\}$

$$\cos\varphi=\pm\frac{(\overline{v_1}\cdot\overline{v_2})}{|\overline{v_1}|\cdot|\overline{v_2}|}=\pm\frac{3\cdot1+(-1)\cdot2+2\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}};$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\mp\frac{1}{2\sqrt{21}}=\mp0{,}1091.$$

Так как по условию интересует острый угол между этими прямыми, мы должны $\cos\varphi$ взять положительным: $\cos\varphi=0{,}1091$. Теперь, воспользуясь таблицами тригонометрических функций, находим, что $\boldsymbol{\varphi}=83°44'$.

б) Составляем матрицу из коэффициентов уравнений системы:

$\begin{pmatrix}2&3&-4\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $l=\begin{vmatrix}3&-4\\-1&1\end{vmatrix}=-1$, $m=\begin{vmatrix}2&-4\\1&1\end{vmatrix}=-6$, $n=\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=-5$, $\boldsymbol{v}_1\{-1,-6,-5\}$

$\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$ $l=\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-1$, $m=-\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=5$, $n=\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3$, $\bar{v}_1\{-1,5,3\}$

$$\cos\varphi=\frac{|(\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1|\cdot|\bar{v}_2|}=\frac{|(-30-15)|}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{35}}=\frac{44}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{35}}=0{,}9445;\qquad \varphi=19°11'$$

Задача 5. Через точку $A(3,-1,4)$ провести прямую, параллельную оси Oz.

Решение. Уравнение оси Oz можно записать в виде $\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}$ (ось Oz проходит через начало координат, а ее направляющий вектор имеет координаты $\bar{v}\{0,0,1\}$). Так как прямая проходит через точку $\boldsymbol{A}(3,-1,4)$, то ее уравнения запишутся в виде $\frac{x-3}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-4}{n}$.

Числа l,m,n в этих уравнениях из условия параллельности двух прямых должны быть пропорциональны числам 0, 0, 1 в уравнениях оси $\boldsymbol{Oz}$. Поэтому, заменяя в последних уравнениях числа l,m,n им пропорциональными, получим искомые уравнения в виде $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{1}$.

Задача 6. Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2,5,-1)$ и $M_2(0,6,-1)$.

Решение. Согласно формуле, имеем:

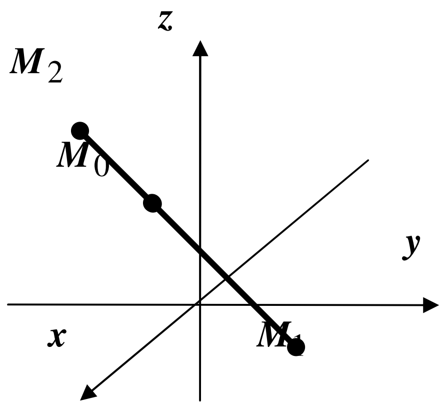
$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-5}{6-5}=\frac{z+1}{-1+1}$, $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{0}$.

Задача 7. Найти каноническое уравнение прямой. Построить данную прямую: $x = t + 2$; $y = -3t - 4$; $z = 5t + 5$.

Решение. Канонические уравнения: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -3t - 4 \\ z = 5t + 5 \end{cases}$, $t = \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-5}{5}$,

то есть $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-5}{5}$ – каноническое уравнение.

Прямую построим через две точки. Опорная точка данной прямой $M_0(2,-4,5)$ будет первой точкой. Найдем вторую точку. Пусть $\boldsymbol{x} = 0$, тогда $\dfrac{0-2}{1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-5}{5}$, следовательно $\dfrac{y+4}{-3} = -2$, $y = 2$, $\dfrac{z-5}{5} = -2$, $z = -5$, $M_1(0, 2, -5)$.



Эту же прямую можно построить и другим способом.
Пусть $t = 0$, то $M_0(2,-4,5)$, $t = 1$, то $M_2(3,-7,10)$.

4.2.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I. Найти:

1. Найти углы, составляемые прямыми с осями координат: 1) – 2).
2. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку, если известны углы с осями координат 1) – 2).
3. Найти каноническое, параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку параллельно Oz, параллельно Ox, параллельно Oy: 1) – 2).
4. Общее уравнение прямой привести к каноническому: 1) – 2).
5. Угол между прямыми: 1) – 3)
6. Через данную точку M_0 провести прямую, параллельную данной: 1) – 2)
7. Уравнения прямой, проходящей через две точки: 1) – 2).
8. Построить данную прямую. Найти каноническое, общее уравнение прямой: 1) – 2).

9. Построить: 1) – 2).

***Вариант 1*.**

1. 1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$, 2) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

2. 1) $\alpha=\dfrac{\pi}{6},\ \beta=\dfrac{\pi}{2},\ \gamma=\dfrac{4\pi}{3}$ через точку $M(1,3,-2)$

   2) $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{3\pi}{4},\ \gamma=\dfrac{4\pi}{3}$ через точку $M(2,0,4)$

3. 1) точка (3, 1, 4) 2) точка (-1, 6, 1)

4. 1) $\begin{cases}4x+6y+5z-1=0\\6x+3y-4z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+5z-4=0\\8x+7y+4z+1=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}\\\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-4}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}\\\begin{cases}3x+5y+4z=0\\10x-9y-4=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+2y-4z=0\\4x+7y+8z-1=0\end{cases}\\\begin{cases}x+8y-2z-1\\5x+7y+4z=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(1,-1,2)$ 2) $M_0(-4,5,0)$

   $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{0}$ $\begin{cases}x+3y-4z-1=0\\2x+y+5z=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(0,4,5)$, $M_2(3,-2,1)$ 2) $M_1(4,5,6)$, $M_2(3,3,2)$

8. 1) $\begin{cases}x=3t-1\\y=5t+4\\z=3t-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=-3t+2\\y=4t-3\\z=2t+1\end{cases}$

9. 1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 2) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{4}$.

Вариант 2.

1. 1) $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z-1}{-9}$ 2) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$

2. :1) $\alpha=\dfrac{\pi}{6},\ \beta=\dfrac{\pi}{2},\ \gamma=\dfrac{5\pi}{3}$ через точку $M(3,-2,4)$

   2) $\alpha=\dfrac{4\pi}{3},\ \beta=\dfrac{\pi}{3},\ \gamma=\dfrac{\pi}{4}$ через точку $M(0,7,3)$

3. 1) точка (-1, 1, 6) 2) точка (0, 4, -1)

4. 1) $\begin{cases}7x+5y+3z-1=0\\9x+4z+4=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+4y+7z-3=0\\7x+3y-7=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z-2}{6}\\\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-4}{0}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+3}{4}\\\begin{cases}3x-y+2z+3=0\\-x+z+9=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7y+3z-1=0\\8x+5y+8z=0\end{cases}\\\begin{cases}4x+9y+3z-1=0\\3x+6y+7z+5=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(3,-3,2)$ 2) $M_0(4,5,6)$

   $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-7}{2}$ $\begin{cases}x+2y-3z=0\\3x+y-4z+7=0\end{cases}$

7. 1) $\begin{array}{l} M_1(6, 5, 8) \\ M_2(3, 5, -3) \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} M_1(5, 3, 7) \\ M_2(8, 4, -1) \end{array}$

8. 1) $\begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -2t + 4 \\ z = 3t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -7t + 1 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{0}$ 2) $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-5}$.

Вариант 3.

1. 1) $\frac{x-6}{4} = \frac{y-6}{9} = \frac{z+5}{5}$ 2) $\frac{x-4}{0} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{3}$

2. 1) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{6},\ \gamma = \frac{3\pi}{2}$ через точку $M(-1, 2, 3)$

   2) $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{2\pi}{3},\ \gamma = \frac{\pi}{6}$ через точку $M(4, -3, 5)$

3. 1) точка (2, 1, 6) 2) точка (1, 4, 9)

4. 1) $\begin{cases} 5x + 5y + 4z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y + z = 0 \\ 5x + 8y - z - 4 = 0 \end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l} \frac{x-6}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2} \\ \frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{1} \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} \frac{x-7}{9} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-3}{4} \\ \begin{cases} 2x + 4y + 7z - 3 = 0 \\ 7x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 5y + 4z = 0 \\ 8x + 7y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x + 10y + 4z - 3 = 0 \\ 4y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

6. 1) $M_0(1, -1, 3)$ 2) $M_0(6, 5, 8)$

   $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{-4}$ $\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 0 \\ x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

7. 1) $\begin{array}{l} M_1(4, 2, 1) \\ M_2(1, 2, 0) \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} M_1(1, 2, 7) \\ M_2(4, 2, -5) \end{array}$

8. 1) $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -8t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 5 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z}{1}$ 2) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-3}$.

Вариант 4.

1. 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{-4}$

2. 1) $\alpha = \frac{\pi}{4},\ \beta = \frac{3\pi}{4},\ \gamma = \frac{\pi}{2}$ через точку $M(3, 7, 0)$

   2) $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{5\pi}{6}$ через точку $M(1, -4, 2)$

3. 1) точка (0, 2, 0) 2) точка (5, 3, 10)

4. 1) $\begin{cases} 7y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 5z + 4 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 6y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 9y + 8z + 2 = 0 \end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{2}\\ \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-7}{5}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{8}=\dfrac{z-4}{2}\\ \begin{cases}5x+2y+6z-1=0\\5x+7y+4z=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-8y+2z-3=0\\5x+2y+6z=0\end{cases}\\ \begin{cases}5x+7y+4z-1=0\\4x+10z+9=0\end{cases}\end{array}\right.$

6\. 1) $M_0(2,3,5)$ 2) $M_0(5,3,-7)$

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-7}{2}$ $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{4}$

7\. 1) $M_1(4,3,5)$, $M_2(1,9,7)$ 2) $M_1(0,2,0)$, $M_2(5,3,10)$

8\. 1) $\begin{cases}x=4t-3\\y=-3t+2\\z=2t\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3t+1\\y=2t-4\\z=-3t+2\end{cases}$

9\. 1) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-5}{-1}$ 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{3}$.

Вариант 5.

1\. 1) $\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ 2) $\dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z+1}{0}$

2\. 1) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{4\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{5\pi}{4}$ через точку $M(2,-2,4)$

2) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ через точку $M(1,3,5)$

3\. 1) точка (1, -2, 7) 2) точка (4, 2, -1)

4\. 1) $\begin{cases}2x+4y+3z=0\\x+y+5z-7=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+7y-8=0\\6x+9y+2z=0\end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z-5}{1}\\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-7}{-3}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-4}{3}\\ \begin{cases}7x+5y+9z-1=0\\2x+10y+10z+3=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3y+5z-4=0\\8x+7y-4z=0\end{cases}\\ \begin{cases}x+8y+2z+3=0\\5x+2y+6z=0\end{cases}\end{array}\right.$

6\. 1) $M_0(3,-1,5)$ 2) $M_0(0,2,4)$

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$ $\begin{cases}x-3y+5z+2=0\\3x-y-9z=0\end{cases}$

7\. 1) $M_1(2,1,7)$, $M_2(3,3,6)$ 2) $M_1(2,-3,9)$, $M_2(1,2,5)$

8\. 1) $\begin{cases}x=2t+2\\y=-3t-2\\z=t+4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=-t+7\\y=t+2\\z=-3t+4\end{cases}$

9\. 1) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z+1}{-3}$ 2) $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Вариант 6.

1\. 1) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{-2}$ 2) $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+7}{-3}$

2\. 1) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=\dfrac{5\pi}{6}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ через точку $M(-1,3,5)$

2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{4\pi}{3}$, $\gamma=\frac{3\pi}{4}$ через точку $M(0,2,4)$

3. 1) точка (7, 2, 2) 2) точка (-5, 7, -7)

4. 1) $\begin{cases}4x+9y+3z-1=0\\3x+6y+7z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}9x+5y+5=0\\-3x+7y-z=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-0}{2}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z-1}{5}\\\frac{x-1}{3}=\frac{y-6}{-9}=\frac{z-3}{8}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-5}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-4}{3}\\\begin{cases}x-y+4z+1=0\\3x+5y+z-1=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+8y-z=0\\6y+z-9=0\end{cases}\\\begin{cases}4x+2y-3z+5=0\\x+2y+6z-3=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(4,1,-1)$ 2) $M_0(2,-1,2)$

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-1}$ $\begin{cases}x-5y+3z-1=0\\3x+2y+3z+6=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(2,3,5)$, $M_2(5,3,-7)$ 2) $M_1(1,2,7)$, $M_2(4,2,0)$

8. 1) $\begin{cases}x=2t-3\\y=-3t+1\\z=t-7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+7\\z=2t+3\end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{0}$ 2) $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{5}$.

Вариант 7.

1. 1) $\frac{x-7}{3}=\frac{y-5}{0}=\frac{z-1}{4}$ 2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$

2. 1) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$, $\gamma=\frac{3\pi}{2}$ через точку $M(3,2,-1)$

2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{2\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$ через точку $M(4,7,-9)$

3. 1) точка (2, -1, 7) 2) точка (6, 3, 1)

4. 1) $\begin{cases}3x+y+4z=0\\-x+6y+1=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-x+y+6z+4=0\\2x+3y-z-3=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-6}{3}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-2}{2}\\\frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-7}{3}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}\\\begin{cases}3x+5y+4z-1=0\\8x+7y+4z+2=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+5y+4z=0\\8x+7y+4z-1=0\end{cases}\\\begin{cases}9x+8y+9z=0\\7x+10y-3=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(6,-6,5)$ 2) $M_0(2,-1,2)$

$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{5}$ $\begin{cases}x-6y+3z-2=0\\3x+y-3z+4=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(8,-6,4)$, $M_2(5,6,-8)$ 2) $M_1(1,-1,3)$, $M_2(3,5,8)$

8. 1) $\begin{cases}x=3t-1\\y=2t+4\\z=-2t+2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=-3t+1\\y=2t+5\\z=-t-3\end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{0}$ 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{4}$.

Вариант 8.

1. 1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+5}{-1}$

2. 1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{3\pi}{4}$ через точку $M(2,1,7)$

   2) $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ через точку $M(3,-3,4)$

3. 1) точка (2, 3, 5) 2) точка (5, 3, -7)

4. 1) $\begin{cases}3x+5y+4z=0\\5x+5y+3=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y-2z-3=0\\5x+8y+3z=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{-1}\\ \frac{x+1}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{4}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{5}=\frac{y-5}{8}=\frac{z-4}{3}\\ \begin{cases}x+2y-3z+1=0\\-x+2z=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+2y+5z-1=0\\7y+z+5=0\end{cases}\\ \begin{cases}4x+4y+5z+5=0\\7x+10y+2z-1=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(6,6,5)$ 2) $M_0(6,9,3)$

   $\frac{x-4}{4}=\frac{y-9}{-6}=\frac{z-5}{11}$ $\begin{cases}x-3y+4z-2=0\\4x+y+2z-5=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(7,2,2)$, $M_2(-5,7,-7)$ 2) $M_1(5,-3,1)$, $M_2(2,3,7)$

8. 1) $\begin{cases}x=2t-2\\y=t+7\\z=4t+2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=2t+3\\y=t-5\\z=3t-2\end{cases}$

9. 1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{3}$ 2) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-5}{0}=\frac{z}{2}$.

Вариант 9.

1. 1) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{3}$ 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$

2. 1) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\gamma=\frac{4\pi}{6}$ через точку $M(2,1,2)$

   2) $\alpha=\frac{2\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{2\pi}{3}$ через точку $M(1,3,3)$

3. 1) точка (3, -5, 8) 2) точка (-1, 3, 2)

4. 1) $\begin{cases}-4x+5y-4z+2=0\\-3x+3y-5z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-4x+2z+7=0\\x+y+2z+1=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}\\ \frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{1}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}\\ \begin{cases}3x+y+z-1=0\\x+4y+z+2=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-7z=0\\3x+4z-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x+3y+5=0\\3y-2z-7=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(2,2,1)$ 2) $M_0(3,1,3)$

   $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-6}{8}=\frac{z-6}{2}$ $\begin{cases}x+2y-z-4=0\\2x-y+3z=0\end{cases}$

7. 1) $\begin{matrix} M_1(3, 1, -1) \\ M_2(2, -6, -9) \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(4, -3, -2) \\ M_2(2, 2, 3) \end{matrix}$

8. 1) $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 2t - 2 \\ z = t + 5 \end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+3}{0}$ 2) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{4}$.

Вариант 10.

1. 1) $\frac{x-1}{8} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{4}$ 2) $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{1}$

2. 1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ через точку $M(1, 3, 2)$

   2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{6}$ через точку $M(6, 5, 2)$

3. 1) точка (1, 2, 1) 2) точка (8, 4, 1)

4. 1) $\begin{cases} 5x + y + 14z - 1 = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 0 \\ 7y + z - 4 = 0 \end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{matrix} \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{3} \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2} \end{matrix}\right.$ 2) $\left[\begin{matrix} \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3} \\ \begin{cases} x + y + 7z - 3 = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \end{matrix}\right.$ 3) $\left[\begin{matrix} \begin{cases} 3x + 4y + 5z - 1 = 0 \\ x - y + 6z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + 5y - 2z + 1 = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \end{matrix}\right.$

6. 1) $M_0(6, 6, 5)$ 2) $M_0(4, 9, 5)$

   $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{1}$ $\begin{cases} 5x + 2y + 2z + 1 = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$

7. 1) $\begin{matrix} M_1(6, 9, 4) \\ M_2(2, 10, 10) \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(7, 5, 9) \\ M_2(1, 3, -1) \end{matrix}$

8. 1) $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 2t - 3 \\ z = 3t - 2 \end{cases}$

9. 1) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$ 2) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{-2}$.

Вариант 11.

1. 1) $\frac{x+12}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ 2) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-3}$

2. 1) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ через точку $M(5, 2, 0)$

   2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ через точку $M(1, 2, 4)$

3. 1) точка (2, 3, 4) 2) точка (3, -5, 1)

4. 1) $\begin{cases} 4x + 3y - 3z - 1 = 0 \\ 2x + z + 7 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4z + 2 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}\\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-2}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{4}\\ \begin{cases}x-4y-3z+2=0\\ 2x-5y-4z=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+2z-4=0\\ x+3y-3z=0\end{cases}\\ \begin{cases}-5x-6y+7z=0\\ x+y+2z+3=0\end{cases}\end{array}\right.$

6\. 1) $M_0(-2,3,1)$ 2) $M_0(-1,1,3)$

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}$ $\begin{cases}x+3y+z-5=0\\ 2x+5y-7z=0\end{cases}$

7\. 1) $M_1(1,3,2)$, $M_2(2,2,3)$ 2) $M_1(3,1,1)$, $M_2(3,5,2)$

8\. 1) $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t-4\\ z=t-5\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=2t-5\\ y=2t-3\\ z=6t+1\end{cases}$

9\. 1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+4}{1}$ 2) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{2}$.

***Вариант 12*.**

1\. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{1}$ 2) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$

2\. 1) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $\beta=\frac{2\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$ через точку $M(1,-3,0)$

2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$ через точку $M(2,1,-2)$

3\. 1) точка (-1, 3, 0) 2) точка (2, -1, 5)

4\. 1) $\begin{cases}5x+3y+z-3=0\\ 2x+3y+7z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-2x+5y+5z=0\\ -5x+z+5=0\end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}\\ \frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-1}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}\\ \begin{cases}2x-5y-4z+1=0\\ -3x+5y+z=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+5y+4z=0\\ 8x+7y-4=0\end{cases}\\ \begin{cases}5x+2y-7=0\\ x+3y-4z=0\end{cases}\end{array}\right.$

6\. 1) $M_0(3,-2,1)$ 2) $M_0(-1,1,2)$

$\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ $\begin{cases}x+3y+2z+5=0\\ 3x+2z+7=0\end{cases}$

7\. 1) $M_1(-1,5,6)$, $M_2(4,0,5)$ 2) $M_1(2,3,-1)$, $M_2(3,-1,4)$

8\. 1) $\begin{cases}x=t-5\\ y=9t-3\\ z=2t+4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3t+1\\ y=4t-2\\ z=t+3\end{cases}$

9\. 1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z+3}{0}$ 2) $\frac{x}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-1}$.

Вариант 13.

1\. 1) $\frac{x-6}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{3}$ 2) $\frac{x+9}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-6}{-2}$

2. 1) $\alpha=\frac{3\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{3\pi}{4}$ через точку $M(2,1,0)$

2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{3\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$ через точку $M(1,0,5)$

3. 1) точка (4, 0, 0) 2) точка (3, 2, 7)

4. 1) $\begin{cases}2x-7y+z+4=0\\3x-2y+5z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+y-z+4=0\\2y-3z+5=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4}\\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-4}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}\\ \begin{cases}2x+7y+7z-1=0\\-4x+3y+9z=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3y-2z+1=0\\8x+z-5=0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3y+4z-1=0\\4x+y-2z=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(4,0,0)$ 2) $M_0(-2,1,2)$

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-2}$ $\begin{cases}x+2y+z-7=0\\2x-2z+1=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(1,2,4)$, $M_2(1,-1,1)$ 2) $M_1(2,2,4)$, $M_2(-1,-4,-2)$

8. 1) $\begin{cases}x=4t-2\\y=2t-7\\z=2t+1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3t-2\\y=t-1\\z=2t+1\end{cases}$

9. 1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{2}$ 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{3}$

Вариант 14.

1. 1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{1}$ 2) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{3}$

2. 1) $\alpha=\frac{4\pi}{6}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$ через точку $M(6,2,2)$

2) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{3\pi}{4}$ через точку $M(-6,4,-2)$

3. 1) точка (-2, -1, -4) 2) точка (-1, 3, 0)

4. 1) $\begin{cases}8x+3y+2z-1=0\\2x+y+z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+6y-8z=0\\8x-10z+7=0\end{cases}$

5. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{-1}\\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-6}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{-5}\\ \begin{cases}4x+6y+z-1=0\\3x+y-3=0\end{cases}\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2y+z=0\\4x-2y-5=0\end{cases}\\ \begin{cases}3x+2y-5=0\\2x-3y-z+2=0\end{cases}\end{array}\right.$

6. 1) $M_0(4,2,9)$ 2) $M_0(3,0,4)$

$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{6}$ $\begin{cases}x+2y+z-7=0\\2y-z+3=0\end{cases}$

7. 1) $M_1(3,3,5)$, $M_2(4,5,-1)$ 2) $M_1(1,1,-3)$, $M_2(1,2,1)$

8\. 1) $\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = 7t-3 \\ z = t+5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3t-5 \\ y = -t+3 \\ z = -5t+1 \end{cases}$

9\. 1) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{1}$ 2) $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{7}$.

Вариант 15.

1\. 1) $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{2}$ 2) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-2}{1}$

2\. 1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ через точку (6, 2, 2)

2) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = \frac{8\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$ через точку (-2, 4, 1).

3\. 1) точка (4, 1, 2) 2) точка (1, 1, -1).

4\. 1) $\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -13x+3y-5z=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-5} \\ \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-2}{2} \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} \frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-4}{1} \\ \begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ 4x+2y-5=0 \end{cases} \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+6y-6z=0 \\ 6x-y-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x+5y-10z=0 \\ 3x+2z+5=0 \end{cases} \end{array}\right.$

6\. 1) $M_0(5,1,0)$ 2) $M_0(7,0,1)$

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-3}{3}$ $\begin{cases} -x+4y-2z+4=0 \\ -y-2z+4=0 \end{cases}$

7\. 1) $M_1(2,3,3)$, $M_2(-1,4,-2)$ 2) $M_1(-1,-2,4)$, $M_2(4,11,11)$

8\. 1) $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 3t-1 \\ z = t-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -6t+3 \\ y = t+2 \\ z = 8t-4 \end{cases}$

9\. 1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-3}$ 2) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+4}{1}$.

Вариант 16.

1\. 1) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{2}$ 2) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$

2\. 1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ через точку (8, 6, 4)

2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ через точку (10, 5, 5)

3\. 1) точка (8, 4, 1) 2) точка (7, 7, 3)

4\. 1) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -13x+3y-5z+1=0 \\ -6x+3y+4=0 \end{cases}$

5\. 1) $\left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{2} \\ \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3} \\ \begin{cases} -x+3y+2z+1=0 \\ -5x+y+7z=0 \end{cases} \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x+2y+3z+2=0 \\ x+3y-5z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x+2y+2z-4=0 \\ 5y+7z+7=0 \end{cases} \end{array}\right.$

6. 1) $M_0(0,4,3)$ 2) $M_0(-3,0,4)$

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{1} \qquad \begin{cases} 4x+2y+3z+1=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$$

7. 1) $\begin{matrix} M_1(2,3,4) \\ M_2(-1,1,-1) \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} M_1(3,-5,1) \\ M_2(3,0,-3) \end{matrix}$

8. 1) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=2t+1 \\ z=3t-7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t+4 \\ y=2t-2 \\ z=3t+7 \end{cases}$

9. 1) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+4}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ 2) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z}{5}$.

4.3. ПРАКТИКУМ ПО ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Задача 1. Найти острый угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ и плоскостью $2x+y-z+4=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $\overline{N}\{2,1,-1\}$. Направляющий вектор прямой $\overline{S}\{2,1,2\}$.

$$\sin\phi=\frac{\left|\left(\overline{N}\cdot\overline{S}\right)\right|}{|N|\cdot\left|\overline{S}\right|}=\frac{2\cdot2+1\cdot1+(-1)\cdot2}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{6}}=0,4082\,,\ \phi=24°5'.$$

Задача 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{4}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0

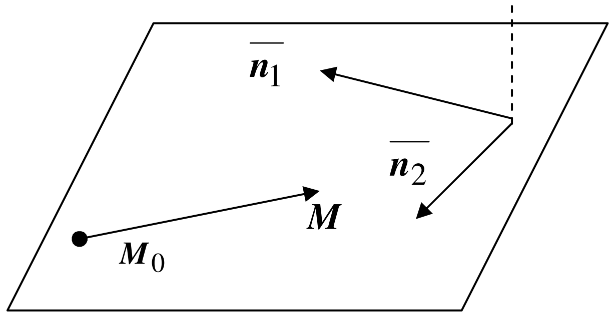
$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Пользуясь условием перпендикулярности прямой и плоскости, заменив в последнем уравнении величины A,B,C им пропорциональными величинами l,m,n из уравнения прямой, то есть, числами 1, -3, 4, получим: $1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$ или $x-3y+4z+9=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-2,1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$.

Решение. Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой, заданной общими уравнениями, то нормальные векторы данных плоскостей можно отложить вместе с вектором $\overline{M_0M}$ в одной плоскости. Следовательно, $\overline{M_0M}\{x-1;y+2;z-1\}$, $\overline{n}\{1;-2;1\}$, $\overline{n_2}\{1;1;-1\}$ компланарные, тогда имеем:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0, \qquad \text{то есть } x+2y+3z=0.$$



Задача 4. Через точку (2, 1, 6) провести прямую перпендикулярную плоскости $x-4y+5z-1=0$ и определить направляющие косинусы этой прямой.

Решение. Нормальный вектор $\overline{N}\{1;-4;5\}$ данной плоскости будет по условию направляющим вектором прямой, проходящей через точку $M_0(2,1,6)$. Ее уравнение $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-6}{5}$.

Направляющие косинусы этой прямой:

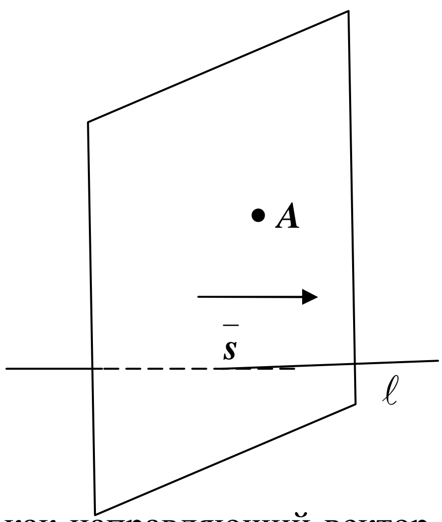
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{42}};\ \cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{42}};\ \cos\gamma=\pm\frac{5}{\sqrt{42}}.$$

Задача 5.Найти проекцию точки $A(5,2,-1)$ на прямую

$\ell:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+11}{4}=\frac{z-2}{5}$.

Решение: Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную данной прямой. Уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overline{N}\{A;B;C\}$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



а так как направляющий вектор данной прямой $\overline{s}\{2,4,5\}$ перпендикулярен этой плоскости, поэтому

$$2(x-5)+4(y-2)+5(z+1)=0 \text{ или } 2x+4y+5z-13=0.$$

Пересечением прямой и плоскости является точка B.

Параметрический вид прямой $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 4t-11, \\ z = 5t+2 \end{cases}$

подставим в уравнение плоскости и найдем t:

$2(2t+1)+4(4t-11)+5(5t+2)-13=0$, $\quad 45t-45=0$, $\quad \boldsymbol{t}=1$.

Откуда координаты точки B: $x = 2\cdot1+1$, $y = 4\cdot1-11$, $z = 5\cdot1+2$, т.е. $B(3,-7,7)$.

Задача 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ с плоскостью $x+y-2z-4=0$.

Решение. Уравнение прямой в параметрическом виде:

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}=t$, то есть $\begin{cases} x = 3t+1, \\ y = -t-1, \\ z = 5t+2 \end{cases}$

Так как координаты точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять уравнениям прямой и уравнению плоскости, то, подставив значения x, y, z в уравнение плоскости, будем иметь

$$(3t+1)+(-t-1)-2(5t+2)-4=0.$$

Из него следует, что $t=-1$. Это значение есть значение параметра в точке пересечения прямой и плоскости.

Подставим $\boldsymbol{t}=-1$ в уравнение прямой, получим $x=-2,\quad y=0,\quad z=-3$.

Итак, координаты точки пересечения данных прямой и плоскости будет (-2, 0, -3).

Задача 7. Проверить, лежит ли прямая ℓ на плоскости α:

ℓ: $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-2 \\ z = -6t+1 \end{cases}$, $\qquad \alpha$: $6x-2y+z-11=0$.

Решение. Каноническое уравнение прямой ℓ:

$\begin{cases} 2t = x-1 \\ 3t = y+2 \\ -6t = z-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x-1}{2}, \\ t = \frac{y+2}{3}, \\ t = \frac{z-1}{-6}, \end{cases}$ то есть, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$.

Направляющий вектор данной прямой $\overline{S}\{2,3,-6\}$. Для плоскости α нормальный вектор $\overline{N}\{6;-2;1\}$. Если прямая лежит в плоскости, то $\overline{N}\perp\overline{S}$ и, следовательно, $(\overline{N}\cdot\overline{S})=0$, $6\cdot2-2\cdot3-6\cdot1=12-6-6=0$, прямая принадлежит плоскости.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+y-4z+5=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ и точку $M(1;-1;2)$.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую $3x+y-4z+5+\lambda(x-y+2z-1)=0$ (*)

Из этого пучка плоскостей нам требуется выбрать ту, которая проходит через точку $M(1;-1;2)$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение (*) координаты точки M, получим уравнение для определения λ: $5\lambda-1=0$; $\lambda=1/5$. Подставляя это значение λ в уравнение (*), получим $8x+2y-9z+12=0$.

Задача 9. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\ell_1: \begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-z+2-0, \end{cases}$ параллельно прямой $\ell_2: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Решение: Уравнение пучка плоскостей, проходящей через прямую ℓ_1 имеет вид $3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0$ или,

$$(3+\lambda)x-(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z-5+2\lambda=0.$$

Из этого пучка плоскостей должна быть отобрана плоскость, параллельная прямой ℓ_2, и поэтому должно выполняться условие $Al+Bm+Cn=0$ параллельности прямой и плоскости.

Так как $A=(3+\lambda)$, $B=(2\lambda-1)$, $C=(1-\lambda)$, а $l=-1$, $m=2$, $n=2$,

то условие параллельности прямой и плоскости запишется в виде

$$(3+\lambda)\cdot(-1)-(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0, \text{ или } -3-\lambda+4\lambda-2+2-2\lambda=0; \quad \lambda=3.$$

Подставим это значение λ в уравнение пучка плоскостей, получим $6x+5y-2z+1=0$.

4.3.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание

1. Найти угол между прямой, проходящей через две точки A, B, и плоскостью: P 1) –2).
2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$ перпендикулярно прямой ℓ: 1) – 2).
3. Через точку $\boldsymbol{A}$ провести прямую, перпендикулярную плоскости α и определить направляющие косинусы этой прямой: 1) – 2).
4. Найти проекцию точки $\boldsymbol{A}$ на прямую ℓ :1) – 2).
5. Найти точку пересечения прямой ℓ с плоскостью α :1) – 2).
6. Проверить, лежит ли прямая ℓ на плоскости α :1) – 2).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую ℓ и точку M :1) – 2).

8. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую ℓ_1, параллельно прямой ℓ_2 :1) – 2).

Вариант 1.

1. 1) $\boldsymbol{A}(6,6,5)$, $\boldsymbol{B}(4,9,5)$, $4\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+11\boldsymbol{z}-3=0$ 2) $\boldsymbol{A}(7,2,2)$, $\boldsymbol{B}(-5,7,-7)$, $5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$

2. 1) $\boldsymbol{A}(3,1,4)$, $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}+1}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{7}=\dfrac{\boldsymbol{z}-1}{3}$ 2) $\boldsymbol{A}(-1,1,6)$, $\ell: \begin{cases}3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}=0\\ \boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}-4=0\end{cases}$

3. 1) $\boldsymbol{A}(2,4,3)$, $\boldsymbol{\alpha}: 4\boldsymbol{x}+9\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z}+2=0$, 2) $\boldsymbol{A}(1,1,5)$, $\boldsymbol{\alpha}: 3\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+7\boldsymbol{z}=0$

4. 1) $\boldsymbol{A}(6,1,1)$, $\dfrac{\boldsymbol{x}-4}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-6}{2}=\dfrac{\boldsymbol{z}+6}{3}$ 2) $\boldsymbol{A}(4,2,0)$, $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}-2}{1}=\dfrac{\boldsymbol{z}-6}{4}$

5. 1) $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}-3}{5}=\dfrac{\boldsymbol{y}-5}{8}=\dfrac{\boldsymbol{z}-4}{3}$, $\boldsymbol{\alpha}: 3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}-2=0$ 2) $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}+1}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-6}{1}=\dfrac{\boldsymbol{z}-1}{6}$, $\boldsymbol{\alpha}: 5\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}-4=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases}\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{t}-5\\ \boldsymbol{y}=2\boldsymbol{t}-1\\ \boldsymbol{z}=5\boldsymbol{t}+2\end{cases}$, $\boldsymbol{\alpha}: 2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}-7=0$ 2) $\ell: \begin{cases}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{t}+10\\ \boldsymbol{y}=-8\boldsymbol{t}-9\\ \boldsymbol{z}=2\boldsymbol{t}+6\end{cases}$, $\boldsymbol{\alpha}: 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}-3=0$

7. 1) $\ell: \begin{cases}\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}-2=0\\ 8\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}-8\boldsymbol{z}=0\end{cases}$, $\boldsymbol{M}(1,7,3)$ 2) $\ell: \begin{cases}9\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}=0\\ -3\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-9=0\end{cases}$, $\boldsymbol{M}(6,9,2)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases}3\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=0\\ 5\boldsymbol{x}-8\boldsymbol{y}-3=0\end{cases}$, $\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}-1}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-2}{0}=\dfrac{\boldsymbol{z}+2}{2}$ 2) $\ell_1: \begin{cases}7\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-3=0\\ 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}+4=0\end{cases}$, $\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}-6}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}-1}{-9}=\dfrac{\boldsymbol{z}+3}{8}$

Вариант 2.

1. 1) $\boldsymbol{A}(3,1,4)$, $\boldsymbol{B}(-1,6,1)$, $3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}+7=0$ 2) $\boldsymbol{A}(-1,1,6)$, $\boldsymbol{B}(0,4,-1)$, $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}+9=0$

2. 1) $\boldsymbol{A}(5,6,8)$ 2) $\boldsymbol{A}(8,-6,4)$

$\ell: \quad \frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+6}{2}$ $\qquad$ $\ell: \quad \begin{cases} x-2y+3z-7=0 \\ 6x+3y+z=0 \end{cases}$

3. 1) $A(1,-1,3)$ $\qquad$ 2) $A(6,5,8)$

$\alpha: \quad 3x+5y+8z-1=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 8y-4z+1=0$

4. 1) $A(-2,-6,5)$ $\qquad$ 2) $A(-3,4,0)$

$\frac{x+7}{-4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$ $\qquad$ $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{3}=\frac{z+7}{2}$

5. 1) $\ell: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-2}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4}$

$\alpha: \quad 2x+y+z-4=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad x+3y+z=0$

6. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x=t+3 \\ y=4t-2 \\ z=7t+1 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} x=3t-2 \\ y=t+4 \\ z=2t-7 \end{cases}$

$\alpha: \quad x-2y+z+8=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 2x+5y+z-1=0$

7. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ 3x-y+4z+5=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} x-5y+z-4=0 \\ 2x+y+4z+3=0 \end{cases}$

$M(5,1,6)$ $\qquad$ $M(5,5,3)$

8. 1) $\ell_1: \quad \begin{cases} 2x+y+2z-4=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1: \quad \begin{cases} x+3y+2z-1=0 \\ 6x+5z+2=0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-4}$ $\qquad$ $\ell_2: \quad \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-6}$

Вариант 3.

1. 1) $A(3,5,4)$ $\qquad$ 2) $A(1,2,-2)$

$B(5,8,3)$ $\qquad$ $B(-1,0,2)$

$2x+4y+3z-3=0$ $\qquad$ $x+y+5z=0$

2. 1) $A(4,6,5)$ $\qquad$ 2) $A(6,9,4)$

$\ell: \quad \frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-5}{4}$ $\qquad$ $\ell: \quad \begin{cases} x-3y+5z+2=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$

3. 1) $A(1,-2,7)$ $\qquad$ 2) $A(4,2,10)$

$\alpha: \quad 2x+3y+5z=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 5y+3z+7=0$

4. 1) $A(-7,-2,0)$ $\qquad$ 2) $A(4,5,-5)$

$\frac{x+1}{6}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-9}{4}$ $\qquad$ $\frac{x-10}{-5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$

5. 1) $\ell: \quad \frac{x-6}{4}=\frac{y-6}{9}=\frac{z+5}{5}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{3}=\frac{z-11}{1}$

$\alpha: \quad 3x+2y+2z-1=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad -2x+3y+z=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 8 \\ z = 2t - 5 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = t + 6 \\ z = 2t - 2 \end{cases}$

$\alpha: \quad 3x - 9y + z - 8 = 0$ $\alpha: \quad x + 3y - 2z + 3 = 0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} 2x + 3y + 3z - 1 = 0 \\ 3x - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} -x + 4y - 2z + 3 = 0 \\ 4x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

$M(-1, -2, 4)$ $M(7, 1, 2)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 2x + z - 8 = 0 \\ x + 5y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell_1: \begin{cases} x - 5y + z - 1 = 0 \\ 5x + 6y + 10z = 0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-5}{2}$ $\ell_2: \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-5}{-1}$

Вариант 4.

1. 1) $A(4, 9, 3)$ 2) $A(9, 5, 5)$

$B(3, 6, 7)$ $B(-3, 7, 1)$

$5x + 7y + 8z - 1 = 0$ $6x + 9z + 2 = 0$

2. 1) $A(3, 5, 4)$ 2) $A(8, 7, 4)$

$\ell: \quad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-7}{9}$ $\ell: \begin{cases} 2x - y + 6z - 3 = 0 \\ x + 4y - 9z - 1 = 0 \end{cases}$

3. 1) $A(2, 3, 5)$ 2) $A(5, 3, -7)$

$\alpha: \quad 3x - 2y - 4 = 0$ $\alpha: \quad 2x + 6y + 5z - 3 = 0$

4. 1) $A(6, -9, 10)$ 2) $A(-1, 4, 1)$

$\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z+3}{-3}$ $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-6}{5}$

5. 1) $\ell: \quad \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+6}{8} = \dfrac{z-6}{2}$ 2) $\ell: \quad \dfrac{x-6}{7} = \dfrac{y-8}{10} = \dfrac{z+9}{-3}$

$\alpha: \quad x + 2y - z = 0$ $\alpha: \quad y + 2z + 3 = 0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 4 \end{cases}$

$\alpha: \quad 2x - y - 6z + 4 = 0$ $\alpha: \quad -3x + 2y + 5z - 1 = 0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} x + 2y + 4z - 3 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} -x - 4y + 2z + 5 = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

$M(2, 2, 4)$ $M(3, 4, 0)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 6x + y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ 2) $\ell_1: \begin{cases} x + 3y + 6z - 1 = 0 \\ 2x - y + 7z = 0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$ $\qquad$ $\ell_2: \quad \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$

Вариант 5.

1. 1) $A(0,7,1)$, $B(2,-1,5)$, $5x+5y+4z=0$ $\qquad$ 2) $A(1,6,3)$, $B(3,-9,8)$, $x-y+4z+3=0$

2. 1) $A(10,9,6)$, $\ell: \quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+4}{-3}$ $\qquad$ 2) $A(2,8,2)$, $\ell: \quad \begin{cases} 5x-2y+5=0 \\ 3x+8y-4z-1=0 \end{cases}$

3. 1) $A(4,3,6)$, $\alpha: \quad 4x+3y+5z-1=0$ $\qquad$ 2) $A(1,9,7)$, $\alpha: \quad x+9y-3z-1=0$

4. 1) $A(1,-6,3)$, $\dfrac{x+4}{-3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-8}{3}$ $\qquad$ 2) $A(4,-3,3)$, $\dfrac{x+5}{-4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{7}$

5. 1) $\ell: \quad \dfrac{x+10}{-4}=\dfrac{y+12}{0}=\dfrac{z-8}{7}$, $\alpha: \quad 2x+2y+z=0$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$, $\alpha: \quad 4x-2z+5=0$

6. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x=2t+3 \\ y=5t-1 \\ z=t+4 \end{cases}$, $\alpha: \quad -3x+2y-4z+6=0$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} x=t-1 \\ y=8t+4 \\ z=3t-2 \end{cases}$, $\alpha: \quad 4x-8y-z+2=0$

7. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 3x+4z-1=0 \end{cases}$, $M(2,3,-1)$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} -x+5y+6z-1=0 \\ 4x+5z+2=0 \end{cases}$, $M(3,-1,4)$

8. 1) $\ell_1: \quad \begin{cases} 4x+y+2z+3=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, $\ell_2: \quad \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ $\qquad$ 2) $\ell_1: \quad \begin{cases} 4x+2y+2z-3=0 \\ 2x-y+7z=0 \end{cases}$, $\ell_2: \quad \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-7}{2}$

Вариант 6.

1. 1) $A(3,5,1)$, $B(5,8,-1)$, $4x+2y-3=0$ $\qquad$ 2) $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $x+2y+6z=0$

2. 1) $A(1,8,2)$, $\ell: \quad \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z-5}{7}$ $\qquad$ 2) $A(5,2,6)$, $\ell: \quad \begin{cases} 5x-3y+2z-4=0 \\ 2x+y-3z+7=0 \end{cases}$

3. 1) $A(8,-6,4)$ $\qquad$ 2) $A(5,-3,1)$

α: $3x+2y+5z-4=0$ $\qquad$ α: $4x+6z-1=0$

4. 1) $A(-2,-3,1)$ $\qquad$ 2) $A(6,6,2)$

$\frac{x-4}{7}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{10}$ $\qquad$ $\frac{x-4}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-8}{-8}$

5. 1) ℓ: $\frac{x-1}{5}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+2}{6}$ $\qquad$ 2) ℓ: $\frac{x-4}{3}=\frac{y-10}{2}=\frac{z-9}{7}$

α: $5x+7y+4z-1=0$ $\qquad$ α: $4x-y+2z=0$

6. 1) ℓ: $\begin{cases} x=t-4 \\ y=2t+5 \\ z=4t-1 \end{cases}$ $\qquad$ 2) ℓ: $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+8 \\ z=2t-3 \end{cases}$

α: $-2x-y+z+5=0$ $\qquad$ α: $4x+y+2z-1=0$

7. 1) ℓ: $\begin{cases} x+3y+2z-1=0 \\ 3x+2y+3z=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) ℓ: $\begin{cases} 3x+y+z-4=0 \\ 3x+5z+2=0 \end{cases}$

$M(4,6,5)$ $\qquad$ $M(6,9,4)$

8. 1) ℓ_1: $\begin{cases} -x+3y+4=0 \\ 2x-y+5z-1=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) ℓ_1: $\begin{cases} 3x-3y-2z+5=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$

ℓ_2: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$ $\qquad$ ℓ_2: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{1}$

Вариант 7.

1. 1) $A(7,5,3)$ $\qquad$ 2) $A(4,5,7)$

$B(9,4,4)$ $\qquad$ $B(7,9,6)$

$6x+8y+2z-1=0$ $\qquad$ $5x+4z+7=0$

2. 1) $A(6,6,5)$ $\qquad$ 2) $A(4,9,5)$

ℓ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-5}{3}$ $\qquad$ ℓ: $\begin{cases} 6x+4y-z+2=0 \\ 2x-6y+5z-1=0 \end{cases}$

3. 1) $A(2,-5,8)$ $\qquad$ 2) $A(5,4,2)$

α: $2x+y+7z-1=0$ $\qquad$ α: $3x+3y-6z-7=0$

4. 1) $A(1,7,-3)$ $\qquad$ 2) $A(-1,11,-3)$

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$ $\qquad$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-7}{7}$

5. 1) ℓ: $\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ $\qquad$ 2) ℓ: $\frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{7}$

α: $x+2y+6z-1=0$ $\qquad$ α: $2x-3y+3=0$

6. 1) ℓ: $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t-1 \\ z=3t+7 \end{cases}$ $\qquad$ 2) ℓ: $\begin{cases} x=t+2 \\ y=3t+4 \\ z=5t-1 \end{cases}$

$\boldsymbol{\alpha}:\quad 3x-5y+3z=0$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha}:\quad 2x+4y+3z-7=0$

7. 1) $\ell:\ \begin{cases}6x+9z+4=0\\ x+5y+5z-1=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \begin{cases}7x+5y+9z-1=0\\ 3x+5y+2z=0\end{cases}$

$M(1,3,2)$ $\qquad$ $M(-2,2,3)$

8. 1) $\ell_1:\ \begin{cases}8x+4y+z-3=0\\ 7x+7y+3z+2=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1:\ \begin{cases}6x+5y+8z-1=0\\ 3x+5z-8=0\end{cases}$

$\ell_2:\ \dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{7}$ $\qquad$ $\ell_2:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-7}{3}$

***Вариант 8*.**

1. 1) $A(4,2,5)$ $\qquad$ 2) $A(0,2,7)$

$B(0,7,1)$ $\qquad$ $B(1,5,0)$

$4x+4y+10z-3=0$ $\qquad$ $7x+10y+2z=0$

2. 1) $A(7,2,2)$ $\qquad$ 2) $A(-5,7,-7)$

$\ell:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z}{1}$ $\qquad$ $\ell:\ \begin{cases}-3x+2y+z-1=0\\ 2x-4y+5z=0\end{cases}$

3. 1) $A(2,-1,7)$ $\qquad$ 2) $A(6,3,1)$

$\boldsymbol{\alpha}:\quad 3x+2y+8z-1=0$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha}:\quad 2x-3y+7z=0$

4. 1) $A(-2,4,1)$ $\qquad$ 2) $A(3,1,0)$

$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{5}$ $\qquad$ $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$

5. 1) $\ell:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$

$\boldsymbol{\alpha}:\quad 4x+y+2z-1=0$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha}:\quad 3x+3z-4=0$

6. 1) $\ell:\ \begin{cases}x=6+3t\\ y=4-9t\\ z=3-3t\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \begin{cases}x=2t-10\\ y=3t+1\\ z=-t+2\end{cases}$

$\boldsymbol{\alpha}:\quad 5x+y+2z+1=0$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha}:\quad 3x+2y-3z+4=0$

7. 1) $\ell:\ \begin{cases}4x-3y-2z+3=0\\ 2x+2y+3z=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \begin{cases}2x-2y-3z-7=0\\ -x-2y+3=0\end{cases}$

$M(1,3,5)$ $\qquad$ $M(1,2,3)$

8. 1) $\ell_1:\ \begin{cases}4x+3y+2z-1=0\\ 5x+2y+2z=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1:\ \begin{cases}5x+6z+8=0\\ 8x+10y+7z=0\end{cases}$

$\ell_2:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ $\qquad$ $\ell_2:\ \dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+5}{0}$

***Вариант 9*.**

1. 1) $A(2,-1,-3)$ $\qquad$ 2) $A(2,-1,-2)$

$B(8,-7,-6)$ $\qquad$ $B(3,-5,4)$

$-3x+4y+2z-1=0$ $\qquad$ $x+2y+z=0$

2. 1) $A(3,5,-6)$ $\qquad$ 2) $A(-1,1,6)$

$\ell:\ \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-3}{2}$ $\qquad$ $\ell:\ \begin{cases}2x-y-2z+3=0\\3x+y-2z+1=0\end{cases}$

3. 1) $A(-1,2,4)$ $\qquad$ 2) $A(4,2,1)$

$\alpha:\ 3x-y+2z+4=0$ $\qquad$ $\alpha:\ 2x+z+3=0$

4. 1) $A(3,1,2)$ $\qquad$ 2) $A(0,-1,2)$

$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ $\qquad$ $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

5. 1) $\ell:\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-5}{9}=\dfrac{z-2}{2}$

$\alpha:\ y+z-4=0$ $\qquad$ $\alpha:\ 4x+5y+2z-1=0$

6. 1) $\ell:\ \begin{cases}x=2t-1\\y=8t-7\\z=-4t+4\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \begin{cases}x=2t-1\\y=3t+1\\z=2t-8\end{cases}$

$\alpha:\ 4x+3y+8z+1=0$ $\qquad$ $\alpha:\ x+3y-2z+8=0$

7. 1) $\ell:\ \begin{cases}-x-2y+3z+4=0\\2x+z-1=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell:\ \begin{cases}-4x+y+2z=0\\2x-y+2z+3=0\end{cases}$

$M(3,-3,1)$ $\qquad$ $M(2,1,-2)$

8. 1) $\ell_1:\ \begin{cases}6x+2y-10z+4=0\\2x+4y-2z-6=0\end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1:\ \begin{cases}5x+4z+2=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$

$\ell_2:\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ $\qquad$ $\ell_2:\ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

Вариант 10.

1. 1) $A(1,-1,0)$ $\qquad$ 2) $A(5,0,4)$

$B(3,2,1)$ $\qquad$ $B(1,-1,2)$

$4x+y+2z=0$ $\qquad$ $x+y+z+1=0$

2. 1) $A(1,1,-2)$ $\qquad$ 2) $A(2,0,-1)$

$\ell:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+2}{5}$ $\qquad$ $\ell:\ \begin{cases}6x+3y-9z=0\\3y-z+3=0\end{cases}$

3. 1) $A(2,1,8)$ $\qquad$ 2) $A(3,5,4)$

$\alpha:\ 3x+y+7z-4=0$ $\qquad$ $\alpha:\ -3x+z+7=0$

4. 1) $A(2,1,8)$ $\qquad$ 2) $A(3,5,4)$

$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-7}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{-4}$

5. 1) $\ell: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$ 2) $\ell: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$

$\alpha: 3x-3y+z=0$ $\alpha: 2x+y-2z-3=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} x=-2t+3 \\ y=3t-1 \\ z=-t+2 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} x=t-3 \\ y=-4t \\ z=3t+2 \end{cases}$

$\alpha: -x+2y+2z-7=0$ $\alpha: x+5y+7z+2=0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ x+3y+2z+1=0 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} 4x-3y+2z+3=0 \\ -4x+5z+4=0 \end{cases}$

$M(0,1,1)$ $M(3,2,-3)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 6x-y+4z-2=0 \\ -x-y+z+3=0 \end{cases}$ 2) $\ell_1: \begin{cases} 3x+5y-4=0 \\ 5x+6y-4z-3=0 \end{cases}$

$\ell_2: \dfrac{x-10}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-7}{4}$ $\ell_2: \dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

Вариант 11.

1. 1) $A(4,3,-5)$ 2) $A(2,7,2)$

$B(1,0,-2)$ $B(1,1,-1)$

$5x+3y+4z=0$ $3x+4y+2=0$

2. 1) $A(4,1,1)$ 2) $A(-2,1,7)$

$\ell: \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-7}{0}$ $\ell: \begin{cases} 4x-y+z+5=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$

3. 1) $A(10,1,7)$ 2) $A(-1,-1,1)$

$\alpha: x+3z+4=0$ $\alpha: 3x+y+2z-7=0$

4. 1) $A(5,1,-2)$ 2) $A(1,3,-1)$

$\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+1}{5}$ $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-6}{4}$

5. 1) $\ell: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{-4}$ 2) $\ell: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{-4}$

$\alpha: x+y+2z-7=0$ $\alpha: -x-2y+3z-4=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} x=3t+1 \\ y=-t+2 \\ z=5t+2 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} x=2t+3 \\ y=t+3 \\ z=-4t+1 \end{cases}$

$\alpha: 5x+5y-2z+8=0$ $\alpha: 3x+5y+4z-1=0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} -3x+7y-z=0 \\ 5x+3y+2z+3=0 \end{cases}$ 2) $\ell: \begin{cases} 4x+2y+z+3=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases}$

$M(0,4,1)$ $M(-2,1,3)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 4\boldsymbol{x}+3z+4=0 \\ -\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+4z+1=0 \end{cases}$ 2) $\ell_1: \begin{cases} \boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+z+1=0 \\ 5\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+2z-2=0 \end{cases}$

$\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}-2}{4}=\dfrac{\boldsymbol{y}+3}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$ $\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}-3}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$

Вариант 12.

1. 1) $\boldsymbol{A}(2,-1,2)$, $\boldsymbol{B}(3,4,1)$, $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-2=0$ 2) $\boldsymbol{A}(2,-1,0)$, $\boldsymbol{B}(1,2,3)$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z+3=0$

2. 1) $\boldsymbol{A}(1,8,2)$, $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}-3}{5}=\dfrac{\boldsymbol{y}-2}{-3}=\dfrac{z}{7}$ 2) $\boldsymbol{A}(2,-3,1)$, $\ell: \begin{cases} 2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+4z+1=0 \\ 4\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+3z+2=0 \end{cases}$

3. 1) $\boldsymbol{A}(6,9,4)$, $\boldsymbol{\alpha}: -\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+z+4=0$ 2) $\boldsymbol{A}(10,1,7)$, $\boldsymbol{\alpha}: 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}+3z=0$

4. 1) $\boldsymbol{A}(7,1,2)$, $\dfrac{\boldsymbol{x}-3}{0}=\dfrac{\boldsymbol{y}-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ 2) $\boldsymbol{A}(1,6,0)$, $\dfrac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}-1}{7}=\dfrac{z-1}{1}$

5. 1) $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}+1}{4}=\dfrac{\boldsymbol{y}+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$, $\boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+3z-4=0$ 2) $\ell: \dfrac{\boldsymbol{x}-3}{2}=\dfrac{\boldsymbol{y}+1}{0}=\dfrac{z-2}{4}$, $\boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+4z+3=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} \boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{t}+3 \\ \boldsymbol{y}=-4\boldsymbol{t}-1 \\ z=3\boldsymbol{t}+4 \end{cases}$, $\boldsymbol{\alpha}: 5\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-2z+8=0$ 2) $\ell: \begin{cases} \boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}+1 \\ \boldsymbol{y}=-4\boldsymbol{t}+3 \\ z=5\boldsymbol{t}+2 \end{cases}$, $\boldsymbol{\alpha}: 2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-5z+3=0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} 3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+2z-1=0 \\ \boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+3z-2=0 \end{cases}$, $\boldsymbol{M}(4,0,-2)$ 2) $\ell: \begin{cases} 4\boldsymbol{x}+z-2=0 \\ \boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+4z-1=0 \end{cases}$, $\boldsymbol{M}(1,-2,3)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+5z+2=0 \\ 2\boldsymbol{y}+z+3=0 \end{cases}$ 2) $\ell_1: \begin{cases} -2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-3z+8=0 \\ 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}+z=0 \end{cases}$

$\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}+4}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-5}{8}=\dfrac{z-1}{1}$ $\ell_2: \dfrac{\boldsymbol{x}+5}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}+2}{-9}=\dfrac{z-3}{0}$

Вариант 13.

1. 1) $\boldsymbol{A}(3,2,0)$, $\boldsymbol{B}(4,3,-5)$, $-5\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+3z-1=0$ 2) $\boldsymbol{A}(1,0,-2)$, $\boldsymbol{B}(0,1,-3)$, $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2z=0$

2. 1) $\boldsymbol{A}(5,3,-2)$ 2) $\boldsymbol{A}(1,3,7)$

$\ell: \quad \frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{4}$ $\qquad$ $\ell: \begin{cases} 4x-3y+2z-1=0 \\ 4x-y+3z+5=0 \end{cases}$

3. 1) $A(1,9,2)$ $\qquad$ 2) $A(4,5,2)$

$\alpha: \quad 2x+6y+z-1=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad x+3y+2z=0$

4. 1) $A(3,3,1)$ $\qquad$ 2) $A(-2,3,4)$

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-1}{2}$ $\qquad$ $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-2}{-3}$

5. 1) $\ell: \quad \frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-1}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$

$\alpha: \quad -2x+3y+4z=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad -3x+z+1=0$

6. 1) $\ell: \begin{cases} x=4t+3 \\ y=-2t+1 \\ z=-2t-1 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-4t+3 \\ z=5t+2 \end{cases}$

$\alpha: \quad 5x+9y+z-4=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 4x-3y+2z-3=0$

7. 1) $\ell: \begin{cases} 4x+y+z-3=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \begin{cases} x+y+2z+4=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$

$M(1,3,-2)$ $\qquad$ $M(1,3,4)$

8. 1) $\ell_1: \begin{cases} 5x-3y+7z-1=0 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1: \begin{cases} -x+2y+4z+1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-8}{6}=\frac{z+2}{7}$ $\qquad$ $\ell_2: \quad \frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{1}$

Вариант 14.

1. 1) $A(4,-5,-1)$ $\qquad$ 2) $A(3,5,3)$

$B(-3,2,8)$ $\qquad$ $B(2,4,1)$

$5x+3y+z+3=0$ $\qquad$ $x-2y+2z+1=0$

2. 1) $A(3,1,2)$ $\qquad$ 2) $A(4,-1,2)$

$\ell: \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$ $\qquad$ $\ell: \begin{cases} x-5y+z-4=0 \\ x-y+2z+7=0 \end{cases}$

3. 1) $A(1,7,3)$ $\qquad$ 2) $A(-4,9,4)$

$\alpha: \quad 6x+5y+2z+1=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 3y+2z-7=0$

4. 1) $A(2,6,1)$ $\qquad$ 2) $A(1,3,2)$

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+5}{-1}$ $\qquad$ $\frac{x-5}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$

5. 1) $\ell: \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{0}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$

$\alpha: \quad x-y+3z-3=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 4x-y+2z=0$

6. 1) $\ell:\ \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 3t - 1 \\ z = -4t - 1 \end{cases}$ 2) $\ell:\ \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = -9t + 2 \\ z = 5t + 2 \end{cases}$

$\alpha:\ x - 4y - 2z + 7 = 0$ $\alpha:\ 6x + y + 4z - 1 = 0$

7. 1) $\ell:\ \begin{cases} -x + 2y + 2z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell:\ \begin{cases} 4x + z - 2 = 0 \\ x + 6y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$

$M(3, 1, -2)$ $M(-2, 2, 4)$

8. 1) $\ell_1:\ \begin{cases} 3x + 5y - 2z - 2 = 0 \\ 2x - 6y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell_1:\ \begin{cases} 4x + 3y + 2z + 4 = 0 \\ x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

$\ell_2:\ \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{3}$ $\ell_2:\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$

Вариант 15.

1. 1) $A(1, 1, -2)$ 2) $A(2, 0, -1)$

$B(3, 6, -2)$ $B(6, 3, -9)$

$2x + 7y + 2z + 1 = 0$ $x + y - z = 0$

2. 1) $A(3, 2, 1)$ 2) $A(1, 2, -1)$

$\ell:\ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ $\ell:\ \begin{cases} -2x + 2y + z + 3 = 0 \\ -x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

3. 1) $A(2, 3, 4)$ 2) $A(3, 3, 1)$

$\alpha:\ 3x - y - 4z + 2 = 0$ $\alpha:\ -x + 2y + 2z = 0$

4. 1) $A(0, 6, 2)$ 2) $A(1, 9, 2)$

$\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{-4}$ $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-2}{4}$

5. 1) $\ell:\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z-1}{1}$ 2) $\ell:\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{0}$

$\alpha:\ -x - 2y + 3z - 3 = 0$ $\alpha:\ x + 2y - z + 2 = 0$

6. 1) $\ell:\ \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = -5t + 2 \end{cases}$ 2) $\ell:\ \begin{cases} x = 6t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

$\alpha:\ 3x + y + 2z - 8 = 0$ $\alpha:\ 4x - 3y + 2z - 3 = 0$

7. 1) $\ell:\ \begin{cases} 6x + 3y - 9z - 1 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell:\ \begin{cases} -5x - 2y + 3z + 8 = 0 \\ -x + 8y + z - 6 = 0 \end{cases}$

$M(2, 6, 4)$ $M(-5, 2, 3)$

8. 1) $\ell_1:\ \begin{cases} -5x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 4x - 3y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$ 2) $\ell_1:\ \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 7 = 0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ $\qquad$ $\ell_2: \quad \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-6}{5}$

Вариант 16.

1. 1) $A(1,2,3)$, $B(-2,1,-4)$, $3x-4y-z+2=0$ $\qquad$ 2) $A(-1,1,-2)$, $B(1,2,2)$, $-2x+3y+z=0$

2. 1) $A(1,2,-1)$

$\ell: \quad \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

2) $A(4,1,2)$

$\ell: \quad \begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ -x+3y+2z+1=0 \end{cases}$

3. 1) $A(3,1,2)$, $\alpha: \quad x+2y+z-4=0$ $\qquad$ 2) $A(0,-2,2)$, $\alpha: \quad 3x+7y+z+1=0$

4. 1) $A(2,6,1)$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{8}$ $\qquad$ 2) $A(1,9,2)$, $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-5}{6}=\dfrac{z-4}{-4}$

5. 1) $\ell: \quad \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$

$\alpha: \quad x+y-2z+1=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad x+y-3y+3z=0$

6. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x=5t+5 \\ y=t+2 \\ z=-6t-3 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} x=7t+3 \\ y=t-2 \\ z=-2t+1 \end{cases}$

$\alpha: \quad x+7y-2z+4=0$ $\qquad$ $\alpha: \quad 2x+3y-2z+8=0$

7. 1) $\ell: \quad \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x+6y-2z+5=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell: \quad \begin{cases} 2x-z+3=0 \\ 6x+3y-9z+4=0 \end{cases}$

$M(2,3,5)$ $\qquad$ $M(4,2,0)$

8. 1) $\ell_1: \quad \begin{cases} 2x+7y+2z+1=0 \\ x+y-z+7=0 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\ell_1: \quad \begin{cases} 4x-5y-z-5=0 \\ -3x+2y+8z-2=0 \end{cases}$

$\ell_2: \quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{7}=\dfrac{z+2}{-8}$ $\qquad$ $\ell_2: \quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$

4.4. ПРАКТИКУМ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задача 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2-2y^2+4z^2+2x-12y-8z-3=0,$$

выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат $Oxyz$.

Решение. Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (то есть, сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), имеем:

$$\left(x^2+2x+1-1\right)-2\left(y^2+6y+9-9\right)+4\left(z^2-2z+1-1\right)-3=0,$$

$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2=3+1-18+4,$$

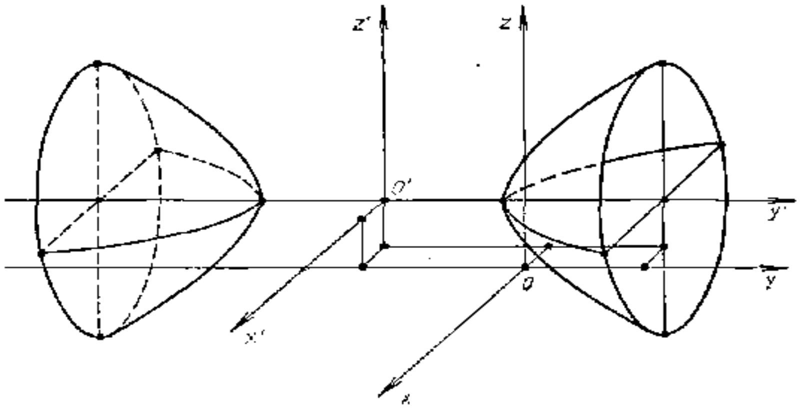
$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2=10,$$

$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{5/2}=-1.$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами:

$$x'=x+1,\qquad y'=y+3,\qquad z'=z-1,$$

начало координат новой системы окажется в точке $0'(-1,-3,1)$,



а уравнение поверхности примет канонический вид $\frac{(x')^2}{10}-\frac{(y')^2}{5}+\frac{(z')^2}{5/2}=-1$.

Следовательно, данная поверхность - двуполостный гиперболоид, который имеет полуоси $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5/2}$, вытянут вдоль новой оси $O'y'$, а центр его находится в точке $0'(-1,-3,1)$.

Форма устанавливается с помощью метода параллельных сечений. Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

$x'=0$ $\quad \frac{(y')^2}{5}-\frac{(z')^2}{5/2}=1$ гипербола

$z'=0$ $\quad \frac{(y')^2}{5}-\frac{(x')^2}{10}=1$ гипербола

$y'=0$ $\quad \frac{(x')^2}{10}+\frac{(z')^2}{5/2}=-1$ нет пересечения

$y'=\sqrt{5}$ $\quad \frac{(x')^2}{10}+\frac{(z')^2}{5/2}=0$ координаты точки $\left(0,\sqrt{5},0\right)$

$y' = 2\sqrt{5}$ $\quad \frac{(x')^2}{10} + \frac{(z')^2}{5/2} = 1$ $\quad$ эллипс.

4.2.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Какие поверхности определяются следующими уравнениями (сделать чертеж):

Вариант 1. 1) $x^2 + z^2 - 2x = 0$ $\quad$ 2) $y^2 = 4 - 2x$

3) $x^2 + z^2 = 9 + 3y$ $\quad$ 4) $x^2 - \frac{(y+2)^2}{4} + z^2 = 0$

5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$ $\quad$ 6) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$

7) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{3} = -1$ $\quad$ 8) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$

Вариант 2. 1) $x^2 + z^2 - 2z = 0$ $\quad$ 2) $y^2 = 2x + 4$

3) $x^2 + z^2 = 9 - 3y$ $\quad$ 4) $x^2 + y^2 - \frac{(z+2)^2}{4} = 0$

5) $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ $\quad$ 6) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

7) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ $\quad$ 8) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$

Вариант 3. 1) $x^2 + z^2 + 2x = 0$ $\quad$ 2) $z^2 = 4 - 2x$

3) $x^2 + y^2 = 9 + 3z$ $\quad$ 4) $x^2 - \frac{(y+3)^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$ $\quad$ 6) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y = 0$

7) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$ $\quad$ 8) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = -1$

Вариант 4. 1) $x^2 + z^2 + 3z = 0$ $\quad$ 2) $z^2 = 2x + 6$

3) $x^2 + y^2 = 9 - 3z$ $\quad$ 4) $x^2 - \frac{(y-1)^2}{9} + z^2 = 0$

5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{(z-4)^2}{9} = 1$ $\quad$ 6) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 0$

7) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{36} = -1$ $\quad$ 8) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$

Вариант 5. 1) $x^2 + y^2 - 5y = 0$ $\quad$ 2) $x^2 = 8 - 4y$

3) $x^2 + y^2 = 4z$ $\quad$ 4) $x^2 + y^2 - \frac{(z-3)^2}{16} = 0$

5) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ $\quad$ 6) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y = 0$

7) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{36} = 1$ $\quad$ 8) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = -1$

Вариант 6. 1) $x^2 + y^2 + y = 0$ $\quad$ 2) $x^2 = 2z + 4$

3) $x^2+y^2=-2z$ 4) $x^2-\frac{(y+5)^2}{9}+z^2=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{(z+2)^2}{4}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+6y=0$

7) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ 8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{49}=-1$

Вариант 7. 1) $x^2+y^2-3x=0$ 2) $z^2=2x+4$

3) $x^2+z^2=-3y$ 4) $x^2+y^2-\frac{(z+3)^2}{9}=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-x-z=0$

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1$ 8) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=-1$

Вариант 8. 1) $x^2+z^2-4z=0$ 2) $y^2=15-3x$

3) $x^2+z^2=2+2y$ 4) $x^2-\frac{(y+4)^2}{4}+z^2=0$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{4}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+8y=0$

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 8) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{25}=-1$

Вариант 9. 1) $x^2+z^2-8z=0$ 2) $y^2=3x+6$

3) $x^2+z^2=4-2y$ 4) $x^2+y^2-\frac{(z-1)^2}{9}=0$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{25}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-8z=0$

7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{4}=1$ 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=-1$

Вариант 10. 1) $x^2+z^2+7x=0$ 2) $z^2=6-3x$

3) $x^2+y^2=5+2z$ 4) $x^2-\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{z^2}{16}=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{(z-4)^2}{25}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+6x-8y=0$

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 8) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=-1$

Вариант 11. 1) $x^2+y^2=6x$ 2) $x^2=6-3z$

3) $x^2+z^2=8+4y$ 4) $x^2+y^2-(z-3)^2=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-6x=0$

7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ 8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=-1$

Вариант 12. 1) $x^2+y^2+9x=0$ 2) $x^2=3z+6$

3) $x^2+z^2=8-4y$ 4) $x^2+y^2-(z-5)^2=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-2x-8y=0$

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=-1$

Вариант 13. 1) $x^2+z^2=5x$ 2) $y^2=8-2x$

3) $x^2+z^2=6+3y$ 4) $x^2-(y+2)^2+z^2=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{(z-4)^2}{16}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+8z=0$

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{4}=-1$

Вариант 14. 1) $x^2+z^2=7z$ 2) $y^2=3x+15$

3) $x^2+z^2=6-3y$ 4) $x^2+y^2-\frac{(z+2)^2}{4}=0$

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-9z=0$

7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ 8) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$

Вариант 15. 1) $x^2+z^2+3x=0$ 2) $z^2=8-4x$

3) $x^2+y^2=10+5z$ 4) $\frac{x^2}{4}-(y-2)^2+z^2=0$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}+\frac{(z-3)^2}{9}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+8x-z=0$

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{36}=1$ 8) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=-1$

Вариант 16. 1) $x^2+y^2+3z=0$ 2) $z^2=x+8$

3) $x^2+y^2=6-3x$ 4) $x^2-\frac{(y+5)^2}{9}+z^2=0$

5) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{(z+3)^2}{36}=1$ 6) $x^2+y^2+z^2+8y-6z=0$

7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ 8) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{64}=-1$

Вопросы к коллоквиуму

1) Декартова система координат в пространстве
2) Разложение вектора по базису. Коллинеарные вектора
3) Евклидово пространство
4) Скалярное произведение векторов и его свойства.
5) Цилиндрическая система координат
6) Сферическая система координат
7) Векторное произведение векторов и его свойства
8) Векторное произведение в координатной форме
9) Определитель третьего порядка.

10) Смешанное произведение векторов и его свойства
11) Смешанное произведение в координатной форме
12) Компланарные вектора
13) Различные уравнения плоскости в пространстве.
14) Взаимное расположение плоскостей в пространстве
15) Различные уравнения прямой в пространстве.
16) Взаимное расположение прямых в пространстве.
17) Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
18) Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова.-М.: Физматлит, 2004.— 288 с.
2. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии .— 15-е изд., испр .— М. : Наука. Физматлит, 1998.— 223 с.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс. Учебное пособие/ А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова и др.- Мн.В.ш.,1994.
4. В.С. Шипачев Высшая математика. Базовый курс: учебное пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 447 с. : ил.; 21 см. - (Бакалавр).
5. В.С. Шипачев. Полный курс: учебник для бакалавров / В. С. Шипачев. -4-е изд., испр. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 607 с. : ил.; 22 см. - (Бакалавр. Базовый курс).