

На правах рукописи

РЫБАКОВ Владимир Александрович

**Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера  
для анализа напряженно-деформированного  
состояния систем тонкостенных стержней**

Специальность:

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет".

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
**Владимир Владимирович Лалин**

Официальные оппоненты: **Мельников Борис Евгеньевич**,  
доктор технических наук, профессор  
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», заведующий кафедрой «Сопротивление материалов»

**Винокуров Олег Александрович**,  
кандидат технических наук, профессор  
ФГБОУ ВПО  
«Псковский государственный университет»,  
заведующий кафедрой «Строительная механика»,  
декан инженерно-строительного факультета

Ведущая организация – открытое акционерное общество «ЛенНИИпроект»

Защита состоится " 12 " декабря 2012 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.05 при ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, главный учебный корпус, ауд. 130.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу:

195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, главный учебный корпус

Автореферат разослан " \_\_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2012 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

**Воробьева Татьяна Владимировна**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

# 1. Общая характеристика работы

## Актуальность работы

В последние годы в России и за рубежом в строительной индустрии наблюдается широкое применение легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК), рис 1., состоящих из тонкостенных стержней (рис. 2), имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость, возможность эффективного ремонта и реконструкции, широкие возможности для архитектурно-планировочных решений и т.д.).

К традиционным и перспективным направлениям применения в строительстве конструкций данного типа можно отнести следующие:

- наружные ограждающие конструкции в сборно-монолитном строительстве;
- строительство индивидуальных загородных домов;
- надстройка мансардных этажей офисных зданий старого фонда;
- реконструкция жилых домов фонда первых массовых серий с надстройкой мансардных этажей;
- модернизация зданий дошкольных учреждений с надстройкой мансардных этажей;
- реабилитация кровель жилых зданий и т.д.

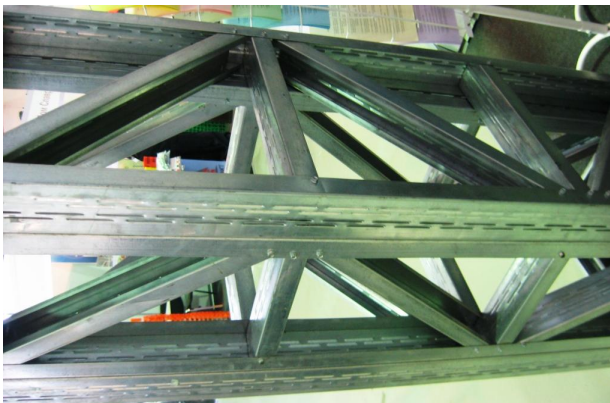


Рис. 1. Тонкостенная конструкция

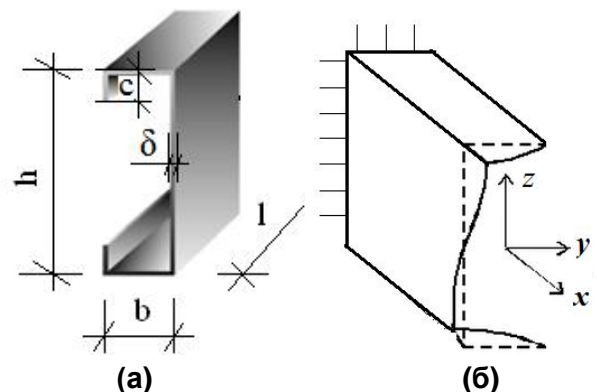


Рис. 2. Примеры тонкостенных стержней: С-образный профиль (а); швеллер (б)

Однако, несмотря на довольно широкую распространенность подобных конструкций в России, на сегодняшний день имеются существенные недостатки нормативной, методической и расчетно-вычислительной баз по расчету ЛСТК.

Теории расчета, основанные на гипотезе плоских сечений, оказываются неприменимы к тонкостенным стержням ввиду малой их толщины и несовпадения центра тяжести и центра изгиба.

Для решения инженерных задач расчета элементов тонкостенных конструкций можно выделить 2 группы способов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа способов связана с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшем численном расчете, как правило, с помощью МКЭ элементов, в расчетных программных комплексах. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

Во второй группе способов можно выделить аналитические и численные методы расчета тонкостенных стержней, связанные с введением дополнительной седьмой степени свободы – депланации поперечного сечения.

В различных теориях тонкостенных стержней фигурирует понятие дополнительного силового фактора - бимоента, - отвечающего седьмой степени свободы - депланации тонкостенного стержня.

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент  $B_\omega$  является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \delta \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega, \quad (1)$$

где  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  – внутренние усилия (соответственно, продольная сила и изгибающие моменты относительно осей  $y$  и  $z$  - рис. 2б);  $A, I_z, I_y, I_\omega$  – геометрические характеристики поперечного сечения (соответственно, площадь, моменты инерции: относительно осей  $y$  и  $z$  и секториальный момент инерции);  $\omega$  – секториальная координата.

Также следует отметить, что в новом Своде Правил СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\*», введенного в действие с 20 мая 2011г., бимомент, как силовой фактор, фигурирует наравне с остальными силовыми факторами, например, в следующей формуле, являющейся модификацией формулы (1) для изгибаемого стержня:

$$\frac{M_y}{I_y R_y \gamma_c} z \pm \frac{M_z}{I_z R_y \gamma_c} y \pm \frac{B_\omega \omega}{I_\omega R_y \gamma_c} \leq 1, \quad (2)$$

где  $R_y$  – предел текучести стали;  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы.

Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям различных ученых, в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимоента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента.

В 1930-ых г.г. В.З. Власовым была разработана теория тонкостенных стержней открытого профиля, основанная на отсутствии сдвиговых деформаций в срединной поверхности, позволяющая анализировать напряженно-деформированное состояние стержней открытого профиля. В эти же годы А.А. Уманским была создана теория тонкостенных стержней замкнутого профиля, развитая в дальнейшем в работах Г.Ю. Джанелидзе и Я.Г. Пановко

Теории В.З. Власова и А.А. Уманского развивали и продолжали на протяжении XX-XXI вв. П.А Лукаш, Н.А Кузьмин, И.Е. Милейковский, Е.А. Бейлин, В.Г. Александров, А.П. Анучкин, Д.В. Бычков, А.К. Мрошинский, Б.Н. Горбунов, А.И.Стрельбицкая, В.А. Постнов, И.Я Хархурим, Г.И. Белый, А.Г. Белый, Н.Г. Сотников, Н.Н. Родиков, С.Н. Пичугин, С.Н. Сергеев, П.А. Пяткин, М.А. Гуркова, А.Р. Туснин, А.В. Синельщиков, Ю.М. Ветюков, В.П. Юзиков, А.М. Лимаренко, Н.Г. Сурьянинов, М. Самофалов, В.Ф. Оробей, Ф.С. Хайруллин, С.А. Чернов и другие.

Следует отметить, что использование двух различных теорий (открытого и замкнутого профилей) является крайне неудобным с точки зрения унификации расчетов систем тонкостенных конструкций.

В 2005г. В.И. Сливкер предложил полусдвиговую теорию, учитывающую часть деформаций сдвига в срединной поверхности стенок стержней, вызванных действием секториального крутящего момента.

Полусдвиговая теория В.И. Сливкера, по сравнению с теорией В.З. Власова, подходит для стержней как открытого, так и замкнутого (а также открыто-

замкнутого и многоконтурного) профилей ввиду схожести дифференциальных уравнений по теориям В.И. Сливкера и А.А. Уманского, что дает возможность использования единой расчетной схемы в комбинированных конструкциях из открытых и замкнутых профилей;

Однако аналитические решения данной теории являются сложными или невозможными для расчета систем тонкостенных стержней и возникает необходимость использования численных методов расчета, например, метода конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время ни один из численных методов расчета для полусдвиговой теории не реализован.

Данное обстоятельство свидетельствует об актуальности темы работы.

**Задачами работы** являются:

1. Аналитическое решение ряда задач для тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей.
2. Реализация МКЭ для анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержневых систем открытого и замкнутого профиля по полусдвиговой теории В.И. Сливкера.
3. Разработка алгоритма и программы по вычислению внутренних усилий и перемещений в тонкостенных стержневых системах.

**Научная новизна.** В диссертационной работе:

1. Построены универсальные аналитические решения ряда задач о стесненном кручении тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории, применимые для стержней открытого и замкнутого профилей.
2. Построены конечные элементы тонкостенных стержней открытого профиля по бессдвиговой теории посредством кубической аппроксимации функций кручения и деформации.
3. Построены 3 типа конечных элементов тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории, основанные, соответственно, на 3 видах аппроксимаций функций перемещений.
4. Проведены численные исследования построенных конечных элементов.
5. Разработана и реализована для построенных конечных элементов процедура уточнения значений внутренних силовых факторов по методу сопряженных аппроксимаций.
6. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния узловых соединений, применяемых в тонкостенных стержневых системах.

**Практическая значимость работы:**

1. Составлена база параметров влияния формы открытого (швеллерового) и замкнутого (прямоугольного) профилей, как наиболее часто встречающихся в инженерной практике, позволяющая использовать построенные в работе конечные элементы.
2. Разработана программа статического расчета пространственных стержневых тонкостенных конструкций произвольной формы, состоящих из открытых и замкнутых профилей в среде программного пакета Maple.

Результаты работы внедрены в деятельность:

1. Проектного института ОАО «ЛенжилНИИпроект» при разработке решений по массовой реконструкции жилых домов фонда первых массовых серий с надстройкой мансардного этажа; при разработке проекта реконструкции офисного центра по адресу пр. Бакунина, д.5; жилого дома по адресу пер. Пирогова, д.5; при разработке альбома типовых решений «Ремонт и замена несущих конструкций кровли».
2. Организации-производителя холодногнутох оцинкованных профилей ООО «БалтПрофиль» в качестве базы секториальных геометрических характеристик.

3. Проектной организации ООО «Балтмонтаж-XXI век» при разработке проекта капитального ремонта здания крытого детского спортивного катка с искусственным льдом по адресу: Санкт-Петербург, пер. Каховского, д. 2, лит. К.

#### **Методология и методы исследования**

Для численного решения задач по определению напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней по полусдвиговой теории В.И. Сливкера в качестве метода дискретизации использован МКЭ. Построение конечных элементов осуществляется на основе вариационных постановок.

#### **На защиту диссертации выносятся:**

1. Аналитические решения для функций перемещений и внутренних силовых факторов в задачах о стесненном кручении по полусдвиговой теории.
2. Конечные элементы (3 типа) для численного расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории В.И. Сливкера при различных способах аппроксимации функций перемещений.
3. База параметров влияния формы открытого (швеллерового) и замкнутого (прямоугольного) профилей.
4. Рекомендации по выбору шага сетки конечных элементов для стержней открытого и замкнутого профилей.

#### **Достоверность результатов:**

1. Вытекает из достоверности теорий тонкостенных стержней В.З. Власова, А.А. Уманского, Г.Ю. Джанелидзе, Я.Г. Пановко и В.И. Сливкера, которая многократно подтверждалась экспериментально авторами теорий и их последователями.
2. Подтверждена численными экспериментами по определению функций перемещений и внутренних силовых факторов в модельных задачах.

#### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и источников из 153 наименований, трех приложений. Работа изложена на 171 странице, содержит 100 рисунков и 34 таблицы.

#### **Апробация работы.**

Основные положения диссертационной работы доложены на 23 научно-технических мероприятиях: международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (RELMAS 2008); международной научно-практической конференции «Применение стальных конструкций в уникальных сооружениях и массовом строительстве». Москва, 12 марта 2009г., МВЦ «КРОКУС ЭКСПО»; XXXVI, XXXVII неделях науки СПбГПУ (Всероссийских межвузовских научных конференциях студентов и аспирантов) в 2007-2008гг; XXXVIII, XXXIX, XXXL неделях науки СПбГПУ (Международных научно-практических конференциях) в 2009, 2010 и 2011гг; политехническом симпозиуме «Молодые ученые – промышленности Северо-Западного региона» в 2007, 2008 и 2009гг.; всероссийском форуме студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и инновации в технических университетах» в 2007, 2008 и 2011гг; межвузовском конкурсе-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Северо-запада «Технологии Microsoft в теории и практике программирования» в 2008г.; конференции «Современные программные средства и методики расчета» в 2009г. (организаторы ГОУ ВПО СПбГПУ и ЗАО «Петростройсистема»); тематическом семинаре «Легкие стальные тонкостенные конструкции» 11 апреля 2009г. на кафедре «Технология, организация и экономика строительства» СПбГПУ; тематическом семинаре «Методика расчёта тонкостенных прогонов кровли. Рекомендации применения». Организаторы - ЦНИИПСК им. Мельникова и

ЗАО «фестальпине Аркада Профиль» в 2008г; научно-практической конференции «ЛСТК: история, практика, проблемы и перспективы применения на отечественном строительном рынке», Санкт-Петербург, 11-12 .09 2009 года; на 63-64 международных конференциях молодых ученых СПбГАСУ в 2010-11г; международном конгрессе «Актуальные проблемы современного строительства», СПбГАСУ, 10-12.04 2012 г.; тематическом семинаре «МКЭ для полусдвиговой теории тонкостенных стержней» на кафедре «Теоретическая механика» СПбГПУ 18.05.2012г.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 22 работы, из них 3 работы – в журналах из Перечня, рекомендованного ВАК.

## 2. Основное содержание работы

**Во введении** дано обоснование актуальности работы, сформулированы ее цель и задачи, указаны научная новизна, практическая ценность и положения, выносимые на защиту, отражено краткое содержание глав диссертации.

**В первой главе диссертации** приводятся основные сведения о строительной механике тонкостенных стержней, строительных тонкостенных конструкциях, областях их применения, методах расчета, способах соединения их отдельных элементов; проведен обзор теоретических и экспериментальных исследований в области стержневых тонкостенных конструкций.

Основные уравнения и неизвестные теорий стесненного кручения представлены в таблице 1. Выражение энергии деформации стесненного кручения  $E(\theta)$  тонкостенного стержня можно представить как функционал от функции угла закручивания  $\theta = \theta(x)$ :

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2) dx, \quad (3)$$

где  $EI_{\omega}$  и  $GI_d$  – жесткости на депланацию и кручение соответственно.

Таблица 1. Основные уравнения и неизвестные

	Бессдвиговая теория (по В.З. Власову)	Полусдвиговая теория (по В.И. Сливкеру)	
	(1)	(2)	
<b>Основные уравнения</b>			
Уравнения равновесия	$-H' - B_{\omega}'' = m_x + m_B'$ ; $-B_{\omega}' + M_{\omega} = m_B$	$-H' - M_{\omega}' = m_x$ ; $-B_{\omega}' + M_{\omega} = m_B$	(а)
Геометрические уравнения	$\chi_x = \theta'$ ; $\chi_B = -\theta''$ ; $\gamma_{\omega} = 0$	$\chi_x = \theta'$ ; $\chi_B = -\beta'$ ; $\gamma_{\omega} = \theta' - \beta$	(б)
Физические уравнения	$H = GI_d \theta'$ ; $B_{\omega} = -EI_{\omega} \theta''$	$M_{\omega} = \frac{GI_d}{\psi - 1} (\theta' - \beta)$ ; $H = GI_d \theta'$ ; $B_{\omega} = -EI_{\omega} \beta'$	(в)
<b>Основные неизвестные</b>			
Перемещения	$\theta$ – угол закручивания; $\theta'$ – мера депланации	$\theta$ – угол закручивания $\beta$ – мера депланации	(г)
Деформации	$\chi_x$ – деформация крутки; $\chi_B$ – относительная депланация; $\gamma_{\omega}$ – деформация сдвига		(д)
Внутренние усилия	$B_{\omega}$ – бимомент; $H$ – момент чистого кручения; $M_{\omega}$ – секториальный крутящий момент (момент стесненного кручения)		(е)

Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях имеет вид:

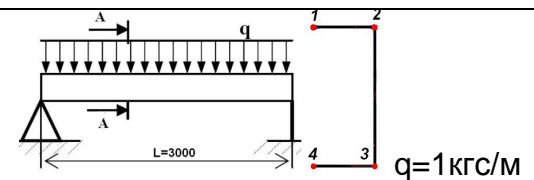
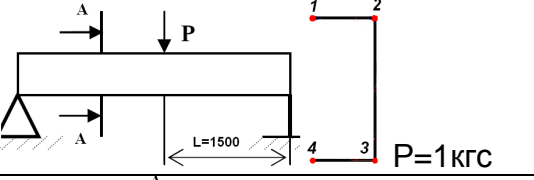
$$-EI_{\omega} \theta^{IV} + GI_d \theta'' + m_x - m_B' = 0 \quad (4)$$

где  $m_x$  - внешний распределенный крутящий момент;  $m_B$  - внешний распределенный бимомент.

Аналитические решения уравнения (4) для наиболее распространенных в инженерной практике расчетных схем приводятся в известной литературе.

В таблице 2 приведен анализ составляющих напряжений для швеллеровых балок, нагруженный единичными нагрузками с эксцентриситетом, вызванным несовпадением центра тяжести и центра изгиба. Из таблицы видно, что вклад бимоментной составляющей в формуле (1) является существенным: напряжения от бимомента превышают изгибные напряжения в 1,5...3 раза и в некоторых точках даже могут иметь противоположный знак.

Таблица 2. Сопоставление составляющих напряжений

Вид нагрузки	Номер точки	$\sigma_x, \text{кгс/см}^2$		
		Составляющие напряжения		Общее напряжение
		изгибные напряжения	от бимомента	
	1	-7,12	+22,61	+15,49
2	-7,12	-11,42	-18,54	
3	+7,12	11,42	+18,54	
4	+7,12	-22,61	-15,49	
	1	-4,74	+16,36	+11,62
2	-4,74	-8,28	-13,02	
3	+4,74	+8,28	+13,02	
4	+4,74	-16,36	-11,62	
	1	-6,317	+20,767	+14,45
2	-6,317	-10,503	-16,82	
3	+6,317	+10,503	+16,82	
4	+6,317	-20,767	-14,45	

Теория В.З. Власова реализована в МКЭ в работах Туснина А.Р. Однако следует отметить, что предлагаемые автором конечные элементы построены на основе аналитических решений для отдельных элементов, а некоторые коэффициенты при компонентах матриц жесткости являются отношением гиперболических функций, знаменатель которых может быть близок нулю; к тому же данные конечные элементы неприменимы для расчета тонкостенных стержней замкнутого и комбинированного профилей

В полусдвиговой теории В.И. Сливкера допущение о равенстве нулю деформации сдвига (1б, табл. 1) отвергается (2б, табл.1) и в связи с этим происходит разделение функций (табл. 1, строка г): производная угла закручивания уже не равна депланации (2б, табл.1).

Тогда функционал энергии деформации стесненного кручения окажется равным:



$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega (\beta')^2 + GI_d (\theta')^2 + \frac{GI_d}{\psi - 1} (\theta' - \beta')^2) dx, \quad (5)$$

$$\psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega} I_d}{I_r}; \mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_\omega^2} \int_0^l \frac{S_{\omega\omega}^2}{\delta} ds; S_{\omega\omega}(s) = \int_s \delta \omega ds; \quad (6)$$

где  $I_r$  - полярный момент инерции;  $\psi$  - параметр, зависящий от коэффициента влияния формы  $\mu_{\omega\omega}$ ;  $S_{\omega\omega}$  - секториальный статический момент;  $S$  - дуговая координата;  $\delta$  - толщина профиля.

Система разрешающих уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} -EI_\omega \beta'' + \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}} (\theta' - \beta') = 0 \\ GI_d \theta'' - \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}} (\theta'' - \beta'') = m_x - m_B' \end{cases} \quad (7)$$

где  $r$  - радиус инерции сечения;  $G$  - модуль сдвига.

Задачу стесненного кручения, описываемого системой (7), можно свести к одному дифференциальному уравнению (8) третьего порядка относительно функции  $\beta$ :

$$\psi EI_\omega \beta''' - GI_d \beta' = m_x + \psi m_B'. \quad (8)$$

**Во второй главе** рассмотрено построение конечных элементов с 4 степенями свободы: два узловых поворота относительно оси  $x$ , отвечающие углам закручивания  $\theta_i$  и  $\theta_{i+1}$ ; две меры деформации  $\theta_i'$  и  $\theta_{i+1}'$  (рис.3а) – по бессдвиговой теории В.З. Власова.

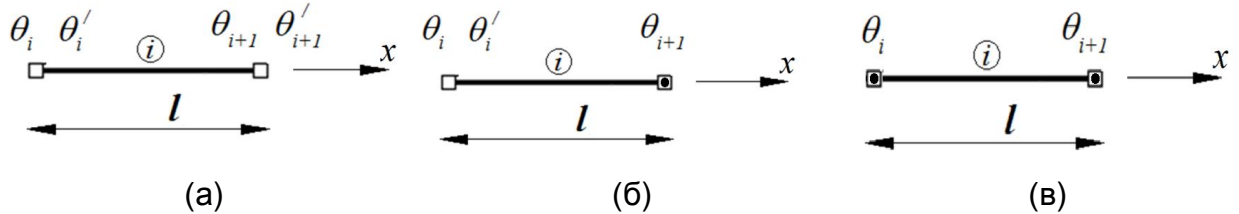


Рис. 3. Конечные элементы по бессдвиговой теории: (а) - с 4-мя степенями свободы; (б) - с 3-мя степенями свободы; (в) - с 2-мя степенями свободы

Столбец узловых перемещений в пределах одного КЭ:

$$[U^{(i)}] = (\theta_i \quad \theta_i' \quad \theta_{i+1} \quad \theta_{i+1}')^T. \quad (9)$$

Поскольку в выражении функционала (3) максимальная степень производной от входящей в него аппроксимируемой функции перемещений  $\theta$  – вторая, то минимальной степенью интерполяционных полиномов будет третья степень.

Для применения МКЭ к теории тонкостенных стержней представим функцию кручения  $\theta(x)$  в пределах одного конечного элемента с помощью интерполяционных полиномов Эрмита третьей степени  $\mathcal{E}_j^{(i)}(x)$ , умноженных на узловые неизвестные:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_1^{(i)} \theta_i + \mathcal{E}_2^{(i)} \theta_i' + \mathcal{E}_3^{(i)} \theta_{i+1} + \mathcal{E}_4^{(i)} \theta_{i+1}'. \quad (10)$$

Подставив (9) и (10) в функционал (3), получим:

$$E = \frac{1}{2} [U^{(i)}]^T [K_\omega^{(i)}] [U^{(i)}] + \frac{1}{2} [U^{(i)}]^T [K_d^{(i)}] [U^{(i)}], \quad (11)$$

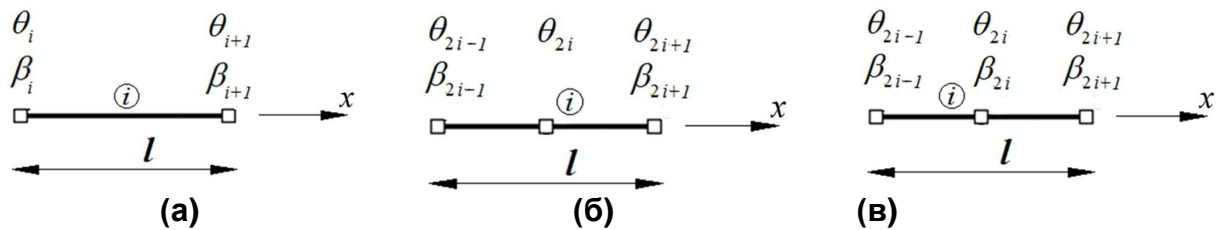
где  $[K_{\omega}^{(i)}] = EI_{\omega} \int_0^l [\mathcal{E}''']^T [\mathcal{E}'''] dx$ ;  $[K_d^{(i)}] = GI_d \int_0^l [\mathcal{E}']^T [\mathcal{E}'] dx$  - составляющие матрицы жесткости конечного элемента.

Далее рассмотрена процедура построения системы конечных элементов и выражения через полученные узловые неизвестные внутренних усилий (табл.1, строка е).

Также рассмотрено построение двухузлового конечного элемента в случае депланационного шарнира – такого закрепления, при котором опорное сечение не имеет угла закручивания ( $\theta = 0$ ) и свободно может депланировать из своей плоскости (по сечению возможна свободная депланация:  $B_{\omega} = 0$ ), - в одном (рис. 3б) и двух (рис.3в) узлах КЭ.

**В третьей главе** рассмотрено построение конечных элементов трех типов по теории В.И. Сливкера:

1. при линейной аппроксимации функций кручения и депланации (рис. 4а);
2. при квадратичной аппроксимации функции кручения и линейной аппроксимации функции депланации (рис. 4б);
3. при квадратичной аппроксимации функций кручения и депланации (рис. 5в).



**Рис.4. Конечные элементы по полусдвиговой теории: с четырьмя, с пятью и с шестью степенями свободы**

Функции перемещений представим в виде произведения суммы линейных полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = \mathcal{E}_{l1}^{(i)} \theta_i + \mathcal{E}_{l2}^{(i)} \theta_{i+1}, \beta(x) = \mathcal{E}_{l1}^{(i)} \beta_i + \mathcal{E}_{l2}^{(i)} \beta_{i+1} \quad (12)$$

где  $\mathcal{E}_{l1}^{(i)}, \mathcal{E}_{l2}^{(i)}$  – линейные интерполяционные полиномы.

После подстановки (12) в (5) матрица жесткости окажется равной:

$$[K^{(i)}] = [K_{\omega}^{(i)}] + [K_d^{(i)}] + [K_{\omega d}^{(i)}]. \quad (13)$$

$$[K_{\omega}^{(i)}] = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \quad [K_d^{(i)}] = GI_d \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [K_{\omega d}^{(i)}] = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{l} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Далее рассмотрена параболическая аппроксимация функции кручения  $\theta(x)$  с сохранением линейной аппроксимации функции депланации  $\beta(x)$  и получены составляющие (13) матрицы жесткости:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix}, [K_d^{(i)}] = GI_d \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & 0 \\ \frac{3l}{0} & 0 & -\frac{3l}{0} & \frac{3l}{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}] = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{5}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & \frac{1}{6} \\ \frac{3l}{5} & \frac{6}{l} & \frac{3l}{2} & \frac{3l}{1} & \frac{6}{l} \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & -\frac{5}{6} \\ \frac{3l}{1} & \frac{6}{l} & \frac{3l}{2} & \frac{3l}{5} & \frac{6}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{l}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{l}{3} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{3}{3} & \frac{6}{6} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрен процесс перехода от матрицы жесткости размера (5x5) к (4x4), а также от столбца нагрузок (5x1) к (4x1) – исключение одной степени свободы.

Также рассмотрена квадратичная аппроксимация функции перемещений:

$$\theta(x) = \mathfrak{A}_{\kappa\theta 3}^{(i)} \theta_{2i-1} + \mathfrak{A}_{\kappa\theta 4}^{(i)} \theta_{2i} + \mathfrak{A}_{\kappa\theta 5}^{(i)} \theta_{2i+1}, \beta(x) = \mathfrak{A}_{\kappa\beta 3}^{(i)} \beta_{2i-1} + \mathfrak{A}_{\kappa\beta 4}^{(i)} \beta_{2i} + \mathfrak{A}_{\kappa\beta 5}^{(i)} \beta_{2i+1}, \quad (16)$$

где  $\mathfrak{A}_{\kappa\theta 3}^{(i)}, \mathfrak{A}_{\kappa\theta 4}^{(i)}, \mathfrak{A}_{\kappa\theta 5}^{(i)}$  – квадратичные интерполяционные полиномы.

Получены составляющие (13) матрицы жесткости:

$$[K_{\omega}^{(i)}] = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} \\ 0 & \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} \\ 0 & \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} \end{pmatrix}, [K_d^{(i)}] = GI_d \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} & 0 \\ \frac{3l}{0} & 0 & -\frac{3l}{0} & 0 & \frac{3l}{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}] = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{1}{2} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} \\ \frac{3l}{1} & \frac{2}{15} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{15} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{3}{1} & \frac{1}{15} & -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{3l} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{3l} & \frac{6}{6} & -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3l} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3l}{-1} & -\frac{1}{30} & \frac{2}{3} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{15} \\ \frac{6}{6} & \frac{30}{30} & \frac{3}{3} & \frac{15}{15} & \frac{2}{2} & \frac{15}{15} \end{pmatrix}.$$

Получены формулы для приведенных компонентов матрицы жесткости и узловых нагрузок, позволяющие осуществить переход от матрицы (6x6) к (4x4).

Далее в главе рассмотрена сопряженная аппроксимация узловых усилий, предложенная Дж. Оденом, которая позволяет перейти от ступенчатого распре-

деления усилий, вычисленных в пределах каждого конечного элемента на основании полученных узловых усилий  $B_\omega$ ,  $H$  и  $M_\omega$ , к непрерывным функциям.

Так, например, узловые значения бимоментов получаются решением системы уравнений:

$$[C] \cdot [B_\omega] = [R] \quad (18)$$

где  $[B_\omega]$  - столбец узловых бимоментов (19);  $[C]$  - матрица размерностью  $(n+1) \times (n+1)$ , определяемая как сумма матриц элементов вида (20);  $[R]$  - столбец, являющийся суммой поэлементных столбцов, определяемых по (21),  $n$  - количество конечных элементов

$$[B_\omega] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_{n+1}]^T \quad (19)$$

$$[C^{(i)}] = \int_0^l [\mathcal{E}^{(i)}]^T \cdot [\mathcal{E}^{(i)}] dx, \quad (20)$$

$$[R^{(i)}] = \int_0^l [B_\omega^{(i)}] \cdot [\mathcal{E}^{(i)}]^T dx, \quad (21)$$

где  $[B_\omega^{(i)}]$  - столбец функций бимоментов в пределах одного конечного элемента, полученный в результате решения основной системы уравнений МКЭ.

Например, если полученный после решения уравнений МКЭ, бимомент является постоянной величиной в пределах  $(i)$ -го конечного элемента (при конечных элементах по рис. 4а и 4б), то при линейной сопряженной аппроксимации (с использованием полиномов  $\mathcal{E}_{x1}^{(i)}, \mathcal{E}_{x2}^{(i)}$ ) компоненты (20) и (21) окажутся равными:

$$[C^{(i)}] = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}, [R^{(i)}] = B_\omega^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

В работе получены выражения для  $[C]$  и  $[R]$  для 3 способов сопряженных аппроксимаций:

- 1) линейная аппроксимация узловых усилий на основании постоянных узловых усилий ( $B_\omega^{(i)} = const$ ), полученных в пределах конечного элемента типа - рис. 4б;
- 2) линейная аппроксимация узловых усилий на основании линейной зависимости узловых усилий, полученных в пределах конечного элемента типа - рис. 4в;
- 3) квадратичная аппроксимация узловых усилий на основании тех же зависимостей, дающая более точные значения усилий на границах расчетной схемы.

В заключение главы рассмотрена возможность применения полученных конечных элементов (14), (15) и (17) к теории стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля.

Разрешающее дифференциальное уравнение относительно меры деформации  $\beta(x)$  в задаче стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля совпадает с уравнением (8), но секториальный момент инерции  $I_\omega$  и коэффициент  $\psi$  теперь вычисляются по-другому:

$$I_\omega = \oint \delta \varpi^2 ds, \quad \psi = 1 + \frac{\mu_{\varpi\varpi} I_d}{I_r} \quad (23)$$

и зависят от коэффициента влияния формы сечения  $\mu_{\varpi\varpi}$  и геометрических характеристик  $\overline{\overline{S_{o\varpi}}}, \overline{S_{o\varpi}}$  и  $S_{o\varpi}$ :

$$\mu_{\varpi\varpi} = \frac{I_r}{I_{\varpi}^2} \oint \frac{S_{o\varpi}^2}{\delta} ds; \overline{S_{o\varpi}} = \overline{S_{o\varpi}} - \frac{I_{\varpi}}{\Omega}; \overline{S_{o\varpi}} = S_{o\varpi} - \frac{1}{\Omega} \oint S_{o\varpi} \rho ds; S_{o\varpi} = \int_0^s \varpi \delta ds, \quad (24)$$

где  $\varpi(s)$  – обобщенная секториальная координата.

Функционал энергии деформации будет совпадать с функционалом (5):

Именно это обстоятельство и позволяет применить полученные результаты к теории А.А. Уманского, Я.Г. Пановко-Г.Ю. Джанелидзе, используя те же матрицы жесткости (14),(15) и(17), но с другими геометрическими характеристиками  $\psi$  и  $I_{\varpi}$ .

**В четвертой главе** проводится численное исследование построенных в главах 2 и 3 четырех типов конечных элементов, соответствующих разным теориям стесненного кручения.

Для возможности получения конкретных численных результатов были построены аналитические зависимости для вычисления параметра  $\psi$  швеллерового и прямоугольного сечений, практическое определение которого, как видно из структуры формул (6) и (23, 24), имеет высокую степень трудоемкости.

По полученным формулам определены значения параметра  $\psi$  для наиболее часто встречающихся на практике оцинкованных холодногнутых швеллеровых профилей по ТУ 1121-001-1383-0080-2003 (производство ООО «Балтпрофиль») и замкнутых прямоугольных профилей по ГОСТ 30245-2003.

Полученные значения  $\psi$  для швеллеров колеблются в пределах от 1,000086 до 1,0014. Таким образом, с учетом малости деформации сдвига  $\gamma_{\omega}$ , третье слагаемое подынтегрального выражения функционала (5) является отношением малых чисел, поэтому данный параметр требует особой точности при решении практических задач.

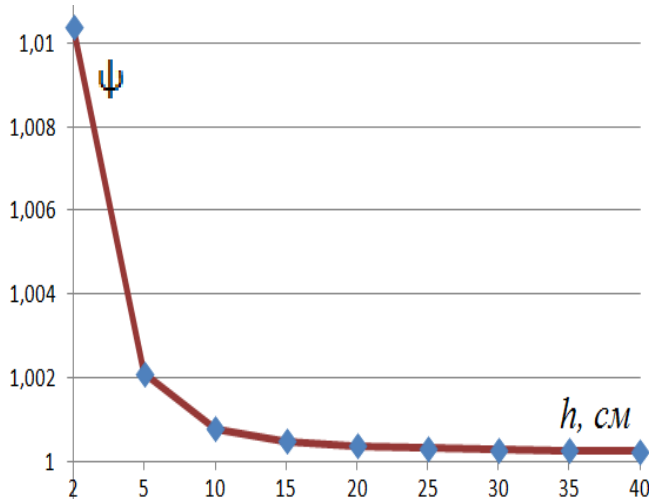


Рис. 5. График зависимости  $\psi(h)$  для швеллерового профиля

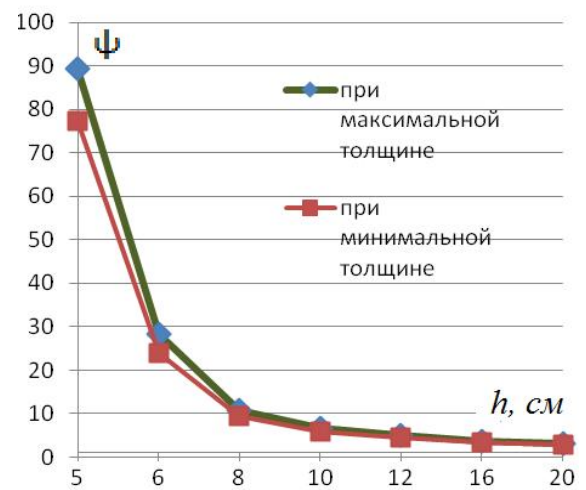


Рис. 6. График зависимости  $\psi(h)$  для прямоугольного профиля

Значение параметра  $\psi$  для встречающихся на практике замкнутых прямоугольных профилей колеблется в пределах от 2,99 до 252,9. При этом, чем более «удлинённый» профиль, тем меньше параметр  $\psi$ , и, соответственно больше знаменатель  $\frac{GI_d}{\psi - 1}$  в части функционала (5), учитывающей деформации сдвига.

Полученные зависимости параметра  $\psi$  от высоты профиля при неизменных ширине и толщине приведены на рис.5,6, на которых  $h$  - высота профиля (рис. 2а).

Для численного исследования сходимости рассмотрены швеллеровый тонкостенный профиль с размерами:  $b = 50$  мм;  $c = 0$ ;  $h = 150$  мм;  $t = 1,5$  мм;  $l = 3$  м; (рис. 2а) и аналогичный профиль замкнутого типа с 3-мя вариантами граничных условий:

- 1) жесткая заделка с двух концов;
- 2) жесткая заделка на одном конце и второй конец – свободный;
- 3) шарнирное опирание (с депланационным шарниром) с обоих концов.

Решения данных задач имеют точные аналитические решения по теории В.З. Власова. Для оценки достоверности полученных результатов численных экспериментов для конечных элементов по полусдвиговой теории были получены решения дифференциального уравнения (8) и определены функции перемещений  $\theta(x)$  и  $\beta(x)$ , а также внутренних силовых факторов  $B_{\omega}(x)$ ,  $H(x)$  и  $M_{\omega}(x)$ .

В таблице 3 представлены результаты одного из численных экспериментов для узловых перемещений, графики которых построены на рис.7.

Таблица 3. Значения узловых перемещений

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	линейная аппрокс.		«смешанная» аппрокс.		квадратичная аппрокс.	
			$\theta_{\max}$ , $10^{-4}$	$\beta_{\max}$ , $10^{-6}\text{см}^{-1}$	$\theta_{\max}$ , $10^{-4}$	$\beta_{\max}$ , $10^{-6}\text{см}^{-1}$	$\theta_{\max}$ , $10^{-4}$	$\beta_{\max}$ , $10^{-6}\text{см}^{-1}$
1	1	300	-	-	-	-	-	-
2	2	150	0,07897	0,00000	0,07897	0,00000	0,45712	0,0000
3	4	75	0,31543	0,31543	6,85593	9,04026	71,6683	9,02252
4	8	37,5	1,11716	1,10766	8,48141	8,94755	8,69533	8,93549
5	16	18,75	3,25786	3,28381	8,88385	9,10787	8,98096	9,10226
6	32	9,375	6,25358	6,35685	8,98422	9,16639	-	-
7	64	4,6875	8,12035	8,26031	-	-	-	-
8	аналитическое решение		9,01766	9,17356	9,01766	9,17356	9,01766	9,17356

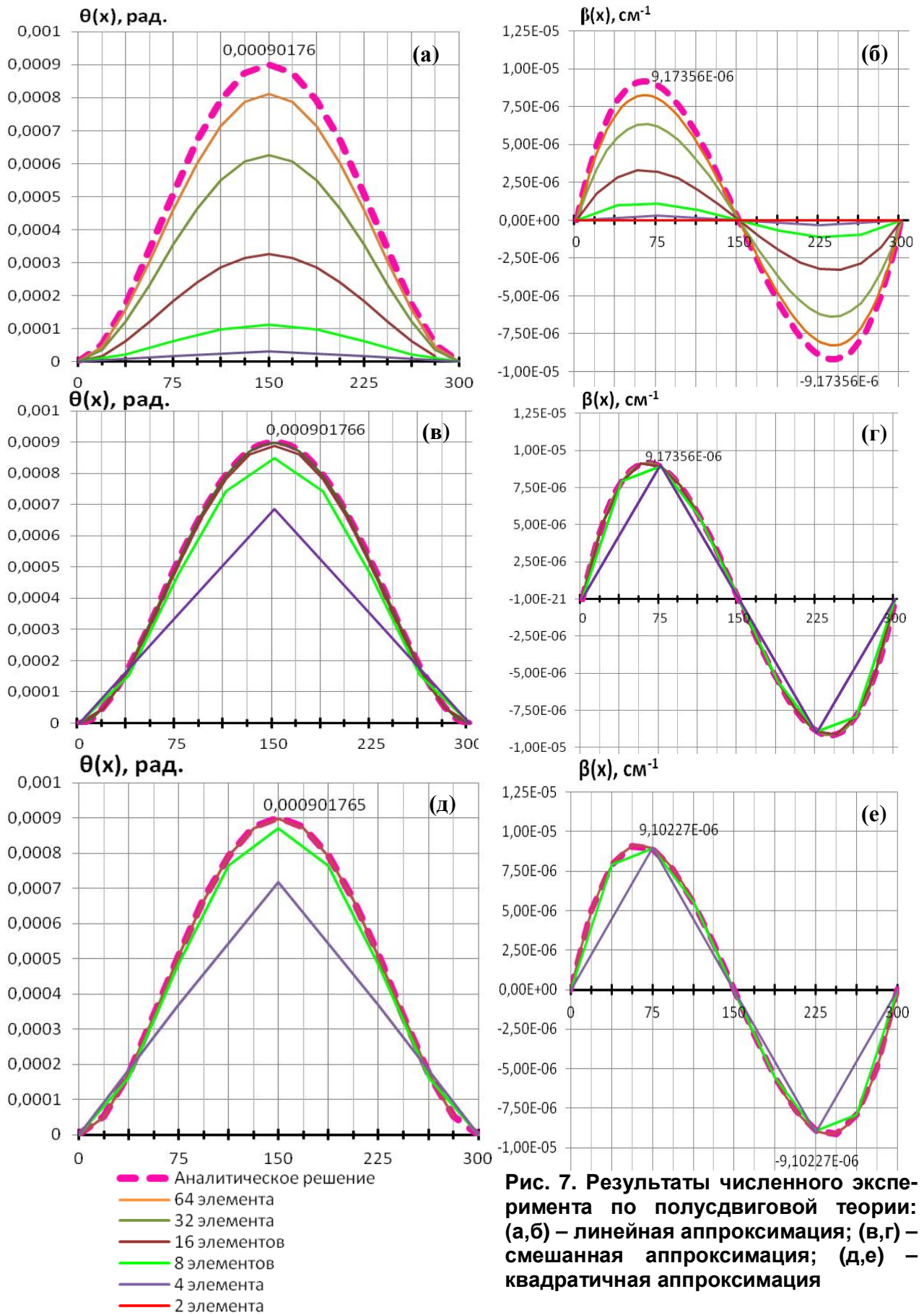
Как видно из результатов, скорость сходимости при линейной аппроксимации функций перемещений достаточно низка. Так, например численное значение максимального угла закручивания имеет приемлемую 5%-ю погрешность лишь при разбиении стержня на 64 конечных элемента. Поэтому линейная аппроксимация функций перемещений не рекомендуется для расчетов тонкостенных стержневых систем.

При «смешанной» и квадратичной аппроксимациях наблюдается достаточная точность по перемещениям: уже при разбиении на 16 и на 8 элементов погрешность составляет не более 3,5%.

Аналогичные результаты получены и для случая замкнутого профиля.

Однако для силовых факторов ни тот, ни другой способ аппроксимации, как видно из столбцов 4,6-7,9-10 таблицы 4 на примере вычисления бимоментов, не дают приемлемых по точности результатов, особенно в опорных сечениях.

Кроме того, при использовании линейной аппроксимации функции деформации на конечном элементе со «смешанной» аппроксимацией значение бимоментов окажется постоянной величиной в пределах одного КЭ. И таким образом, эпюра бимоментов окажется разрывной – будет иметь скачки (рис. 8а) и (рис. 8в) в пределах длины стержня. Аналогичное явление имеет место и для остальных силовых факторов.



**Рис. 7. Результаты численного эксперимента по полусдвиговой теории: (а,б) – линейная аппроксимация; (в,г) – смешанная аппроксимация; (д,е) – квадратичная аппроксимация**

Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости применения сопряженных аппроксимаций (18) - (21). Результаты приведены в табл. 4 и на рис. 8б, 8г на примере вычисления бимоента.



Таблица 4. Значения бимоментов

№ п/п	Кол-во КЭ	Раз-мер КЭ, см	$x = 0$ (опора)		$x = 75$			$x = 150$ (центр)			
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.	
			$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	$B_{\omega}^{слева}$	$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	$B_{\omega}^{слева}$	$B_{\omega}^{справа}$	$B_{\omega}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
«смешанная» аппроксимация											
1	1	300		-	-	-	-	-	-	-	-
2	2	150	0	-	0	0	-	0	0	-	
3	4	75	-88,990	-133,485	-88,990	88,990	0	88,990	88,990	133,485	
4	8	37,5	-155,791	-186,604	-20,364	66,762	34,798	109,393	109,393	117,008	
5	16	18,75	-195,588	-213,167	7,2060	50,5421	30,923	114,391	114,391	116,147	
6	32	9,375	-217,241	226,599	19,465	41,052	30,762	115,634	115,634	116,072	
квадратичная аппроксимация											
1	1	300		-	-	-	-	-	-	-	
2	2	150	7,4484	7,448	-	-	-	-7,44835	-7,44835	-7,448	
3	4	75	108,245	146,26	-69,386	82,702	6,6581	-94,929	-94,929	-132,951	
4	8	37,5	187,629	206,114	1,605	53,8756	34,699	-113,451	-113,451	-118,019	
5	16	18,75	227,073	231,884	25,001	36,862	31,492	-116,229	-116,229	-116,710	
Аналитич.реш			-240,134		30,75506			116,047			

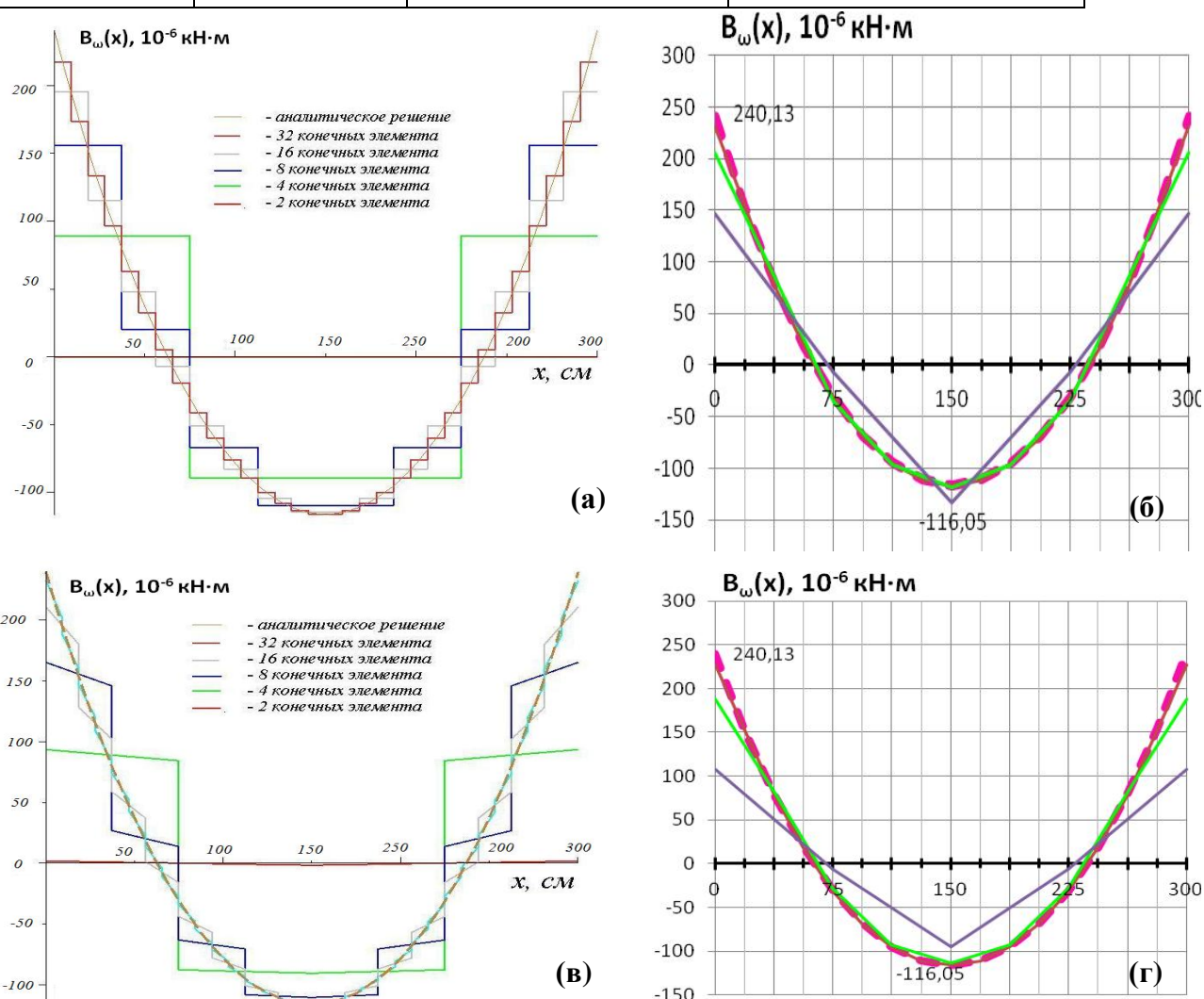


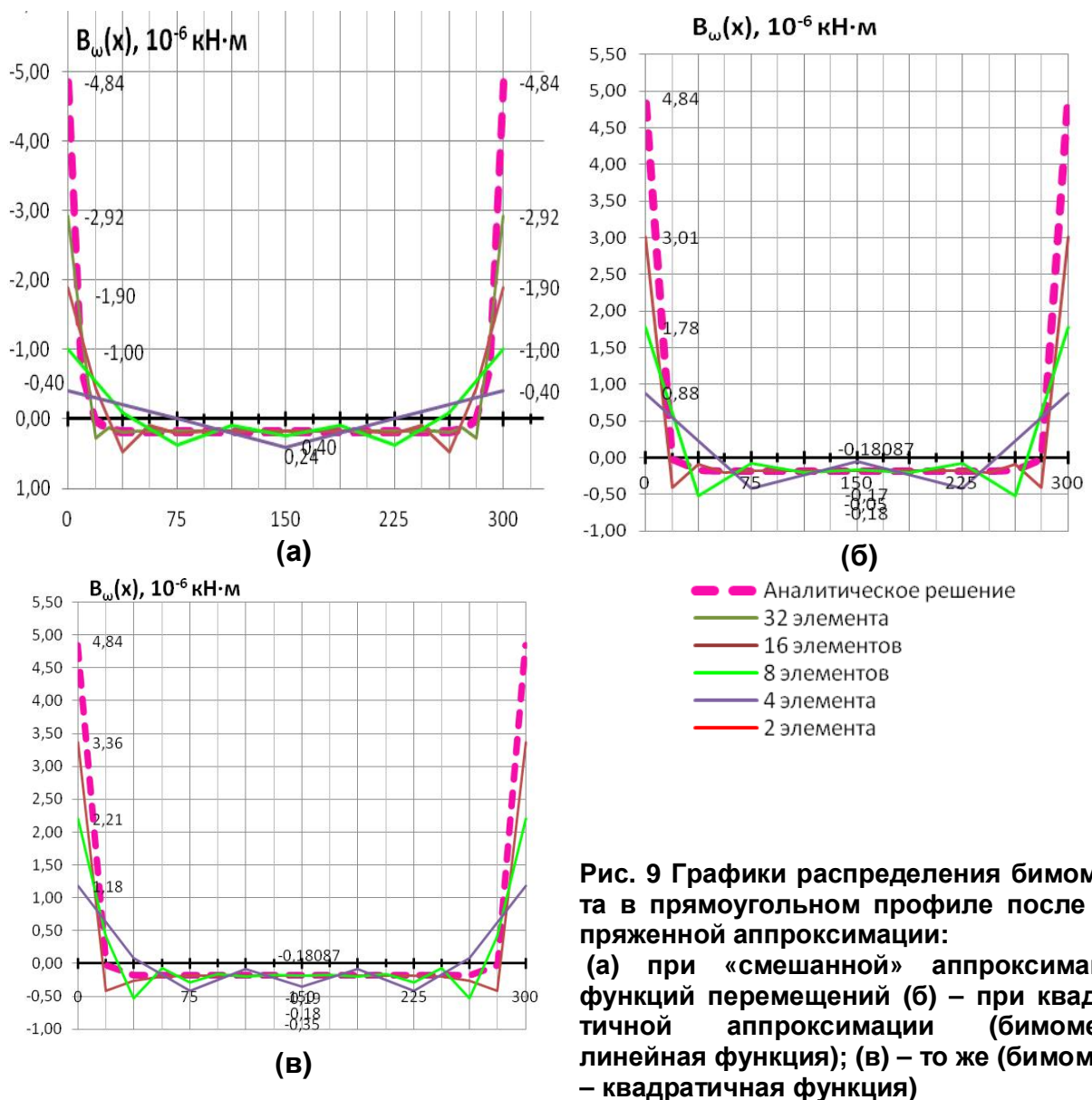
Рис. 8 График распределения бимомента по полусдвиговой теории до и после сопряженной аппроксимации: (а,б) – при «смешанной» аппроксимации функций перемещений; (в,г) – при квадратичной аппроксимации перемещений

- Аналитическое решение
- 32 элемента
- 16 элементов
- 8 элементов
- 4 элемента
- 2 элемента



Как видно из таблицы 4, приемлемая 5%-я погрешность в результатах наблюдается с использованием метода сопряженных аппроксимаций при разбиении на 8 конечных элементов, причем для получения такой же точности на границах (опорная зона) необходимо применение сопряженной аппроксимации при разбиении не менее, чем на 32 элемента при «смешанной» аппроксимации и не менее, чем на 16 элементов – при квадратичной.

В завершении главы получены результаты и рекомендации по выбору шага сгущения и способа аппроксимации при вычислении усилий в замкнутых прямоугольных профилях. Как видно из рис. 9, графики бимоментов имеют несколько «вытянутый» характер, сопровождающийся высоким значением производной на границах. Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости сопряженной аппроксимации функции бимомента с помощью нелинейной (например, квадратичной) функции – рис. 9в. и увеличении шага сгущения сетки до 32 конечных элементов.



В пятой главе приводится описание алгоритма программы расчета произвольной пространственной системы тонкостенных стержней на основе построенных конечных элементов по полусдвиговой теории при квадратичной аппроксимации функций кручения и депланации, а также пример расчета строительной конструкции и исследование на прочность характерных узловых соединений. Алгоритм реализован в среде программного пакета Maple 11.02.

В качестве примера одной из решенных практических задач рассмотрен фрагмент расчетной схемы (рис. 10) металлического каркаса мансарды, надстраиваемой над жилым зданием фонда первых массовых серий (рис. 11), к которому были приложены нагрузки: снеговая, ветровая и от веса кровли.

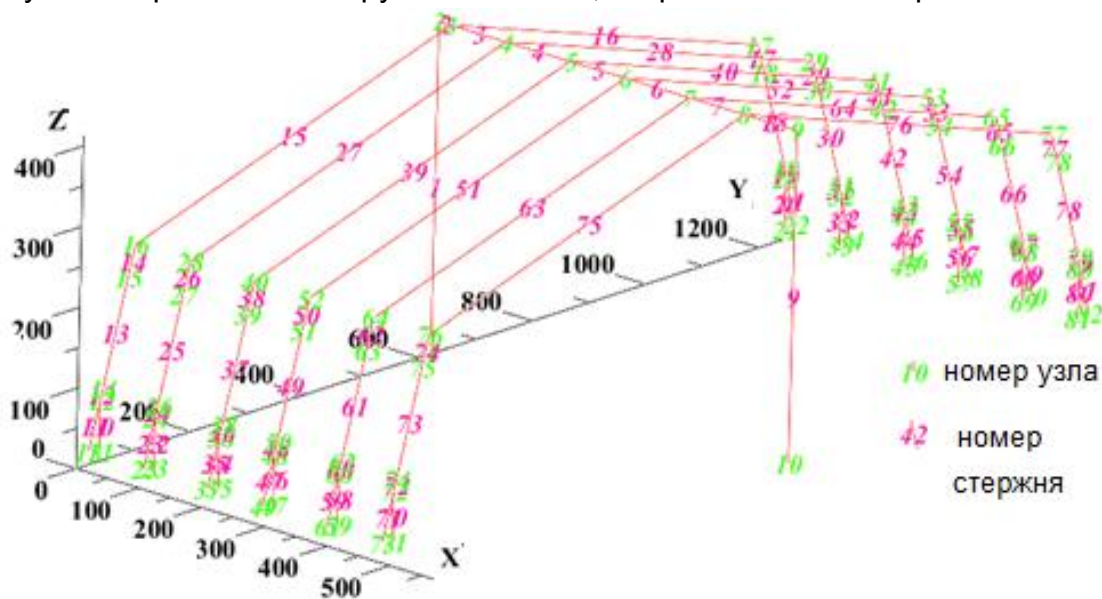
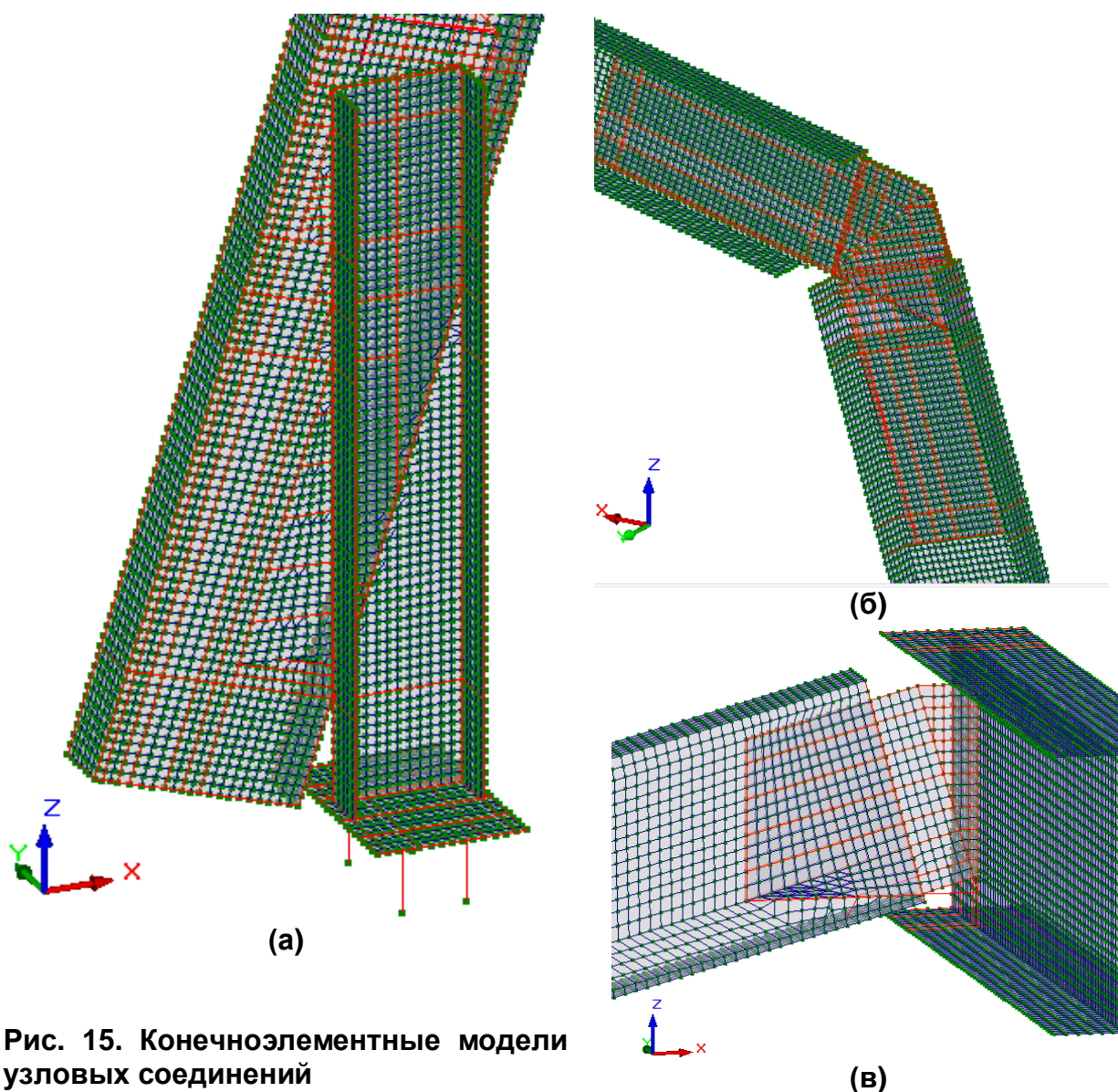


Рис. 10. Фрагмент расчетной схемы



Рис. 11. Модель металлического каркаса

Далее на основании полученных в программе внутренних усилий проанализировано напряженно-деформированное состояние основных узловых соединений элементов каркаса мансарды: болтовое соединение элементов в зоне опирания на железобетонный пояс (рис. 15а); болтовое соединение верхних и нижних стропильных ног в зоне перелома кровли с помощью стальных фасонки (рис. 15б); узел крепления верхней стропильной ноги к коньковой балке через стальной фланец (рис 15в).



**Рис. 15. Конечноэлементные модели узловых соединений**

Показано, что напряжения в стальных элементах в зонах соединения находятся в пределах допусковых по СП 16.13330.2011.

**В приложении 1** даны аналитические решения системы дифференциальных уравнений равновесия полусдвиговой теории стесненного кручения для простых балок, имеющих шарнирные (случай депланационного шарнира) и жесткие закрепления с одного и двух концов. Данные решения использованы в главе 4 для оценки достоверности результатов численных экспериментов.

**В приложении 2** представлены результаты расчета геометрических характеристик, в т.ч. параметра влияния  $\Psi$ , для двух наиболее часто встречающихся типов профилей открытого и замкнутого типов – соответственно, швеллерового и прямоугольного. Конкретные значения геометрических характеристик представлены для сортамента профилей по ГОСТ 30245-2003 «Стальные гнутые замкнутые сварные прямоугольные профили» и ТУ 1101-021-1383-0080-2003.

**В приложении 3** представлены акты о внедрении результатов диссертационной работы.

### **3. Заключение**

1. Получены аналитические решения по полусдвиговой теории для трех наиболее часто встречающихся в инженерной практике расчетных схем.
2. Построены 3 типа конечных элементов тонкостенных стержней по полусдвиговой теории, основанные на 3 видах аппроксимаций координатных функций:
  - линейная аппроксимация функций кручения и депланации;
  - квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции депланации;
  - квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации.
3. Проведено численное исследование построенных конечных элементов.
4. В аналитическом виде получены формулы для вычисления параметра влияния формы сечения для швеллерового и замкнутого прямоугольного профилей, сформирована база геометрических характеристик для швеллерового и прямоугольного профилей
5. Разработана и реализована для построенных конечных элементов процедура уточнения значений внутренних силовых факторов по методу сопряженных аппроксимаций.
6. Показано, что конечный элемент, основанный на квадратичной аппроксимации базисных функций, является наиболее подходящим для анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций.

#### **Список работ, опубликованных автором по теме диссертации**

По материалам диссертации опубликовано 22 работы, из них:– 3 в журналах из Перечня, рекомендованного ВАК.

#### **Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах из Перечня, рекомендованного ВАК:**

- 1) **Лалин, В.В., Рыбаков, В.А., Морозов, С.А.** Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем/ В.В. Лалин // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). – С. 53-73
- 2) **Лалин, В. В., Рыбаков, В.А.** Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей/ В.В. Лалин // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8(26). – С. 69-80.
- 3) **Недвиг, П.Н., Рыбаков, В.А.** Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных балок и балок со сплошной стенкой/ П.Н. Недвиг // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8. – С. 27-30

#### **Прочие публикации:**

- 1) **Рыбаков, В. А.** Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие/ В.А. Рыбаков – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2011.– 207 с.
- 2) **Альхименко, А.И., Ватин, Н.И., Рыбаков, В.А.** Технология легких стальных тонкостенных конструкций/ А.И. Альхименко – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008 – 27с.
- 3) **Ватин, Н.И., Рыбаков, В.А.** Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы/ Н.И. Ватин//Журнал «СтройПРОФИль». 2007. №3(57). – С. 32-35.



- 4) **Жмарин, Е.Н., Рыбаков, В.А.** ЛСТК – инструмент для реализации программы «Доступное и комфортное жилье»/Е.Н. Жмарин//Журнал «СтройПРОФИль». 2007. № 6(60). № 7(61). – С 166-167.
- 5) **Рыбаков, В.А.** Современные методы расчета металлоконструкций из открытых тонкостенных профилей/ В.А. Рыбаков //Материалы Всероссийского Форума студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и инновации в технических университетах», Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – С. 10-11
- 6) **Рыбаков, В.А.** Современные методы расчета металлоконструкций из тонкостенных профилей/ В.А. Рыбаков //Журнал «Стройметалл», № 2(2). 2007. – С. 36-38
- 7) **Рыбаков, В.А., Ватин, Н.И.** Современные методы автоматизированного расчета легких стальных тонкостенных конструкций (Технологии Microsoft в теории и практике программирования)/ В.А. Рыбаков // Материалы межвузовского конкурса-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Северо-Запада., СПб.:Изд-во Политехн. ун-та..2008. – С.234-235
- 8) **Ватин, Н.И., Рыбаков, В.А.** Новые технические решения для легких металлических конструкций/ Н.И. Ватин //Журнал для профессионалов «СтройПРОФИль». 2008. № 4(66). – С. 48-50
- 9) **Рыбаков, В.А.** Надежность металлоконструкций из тонкостенных профилей/ В.А. Рыбаков //Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды Междунар. Конф. СПб.: 2008. – С. 292-295
- 10) **Рыбаков, В.А., Гамаюнова, О.С.** Реализация методики определения геометрических характеристик поперечного сечения термопрофиля/ В.А. Рыбаков // XXXVII Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов. Ч.1. СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2008. – С.165-166.
- 11) **Рыбаков, В.А.** Алгоритмизация расчета геометрических характеристик поперечного сечения термопрофиля в легких стальных тонкостенных конструкциях/ В.А. Рыбаков // Молодые ученые – промышленности Северо-Западного региона: Материалы конференций политехнического симпозиума. – СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2008. – С.36-37.
- 12) **Рыбаков, В.А., Ватин, Н.И.** Аналитические и численные методы расчета поперечноизгибаемых стальных тонкостенных профилей/ В.А. Рыбаков // Молодые ученые – промышленности Северо-Западного региона: Материалы конференций политехнического симпозиума. – СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2009. – С.133-135.
- 13) **Золотарева, Е.А., Петров, К.В., Рыбаков, В.А.** Обоснование целесообразности реконструкции жилых домов фонда первых массовых серий (ФПМС) с надстройкой мансардных этажей/ Е.А. Золотарева // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2009. – С.206-207.
- 14) **Шарлыгина, К.А., Жмарин, Е.Н., Рыбаков, В. А., Столярова, Н. П.** Модернизация зданий детских дошкольных учреждений. Применение легких стальных тонкостенных конструкций/ К.А. Шарлыгина // Мир строительства и недвижимости. 2011. – С. 13-14
- 15) **Морозов, С.А., Рыбаков, В.А.** Применение численных методов для разложения матрицы жесткости систем тонкостенных конечных элементов/ С.А. Морозов // XL Неделя науки СПбГПУ: мат-лы междунар. научно-практической конференции. Ч.1. - СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2011. – С.210-212
- 16) **Рыбаков, В.А., Лалин, В.В.** Разработка алгоритма метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней/ В.А Рыбаков // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. - СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2011. – С.212-214
- 17) **Рыбаков, В.А.** Применение метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней/ В.А. Рыбаков //Материалы Пятого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – С. 30-32
- 18) **Морозов, С.А., Рыбаков, В.А.** Автоматизация метода конечных элементов на основе полусдвиговой теории для тонкостенных конечных элементов/ С.А. Морозов // Фундаментальные исследования и инновации в национальных исследовательских университетах: Материалы Всероссийской научно-методической конференции. Санкт-Петербург. Том 3. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 84-86
- 19) **Рыбаков, В.А., Тихонова, С.Ю.** Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем/ В.А.Рыбаков // Фундаментальные исследования и инновации в национальных исследовательских университетах: Материалы Всероссийской научно-методической конференции. Санкт-Петербург. Том 3. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С.100-101