

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПЛОТНЕНИЯ
ПОРОШКОВЫХ И ПОРИСТЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Пористые и порошковые материалы в отличие от компактных деформируются с необратимым изменением объема, увеличивая плотность за счет уменьшения объема пор. Для описания деформации некомпактных металлических материалов может быть применен аппарат механики сплошных сред, в частности теории пластичности [1]. В.Л. Колмогоров предлагает условно отказаться от дискретного распределения массы по частицам в порошке или гранулам и считать массу распределенной в объеме непрерывным образом. Достоинство континуального представления некомпактного тела состоит в возможности использования математического аппарата дифференциального, интегрального и вариационного исчисления, ориентированного на анализ непрерывных функций. Основные положения континуальной теории пластичности пористых тел математически строго изложены Б.А. Друяновым [2]. Идея представления пористого тела в виде полидисперсной среды с порами успешно использована в работе [3] для решения ряда задач обработки давлением пористых материалов. При этом делалось допущение о том, что пористая среда состоит из одинаковых геометрических элементов с одинаковыми порами внутри каждого из них. Корректность предложенного представления пористой среды можно сравнить с использованием такой характеристики компактного материала, как балл зерна.

Анализ технологических процессов обработки давлением порошковых металлических материалов возможен с тех же позиций теории пластического течения, с которых выполняется моделирование процессов обработки давлением компактных материалов. Для этого необходимо корректно сформулировать условие предельного состояния порошкового материала, т. е. построить поверхность текучести, и далее получить уравнение ассоциированного закона пластического течения, связывающего параметры напряженного и деформированного состояний.

Как отмечает В.Л. Колмогоров [1], физические уравнения для некомпактного материала включают две скалярные функции: T – интенсивность касательных напряжений и σ_0 – среднее нормальное напряжение, зависящие от начальной плотности материала, степени объемной деформации и степени деформации сдвига. Если для моделирования поведения компактных материалов достаточно иметь одну механическую характеристику – предел текучести в функции температуры, степени и скорости деформации, то для анализа процессов обработки давлением порошковых и пористых материалов необходим значительно больший объем сведений о материале.

Развитие идеи представления пористого тела в виде полидисперсной среды с порами, высказанной в работе [3], позволило математически строго сформулировать условие пластичности пористого материала и вычислить механические характеристики элемента среды с порой [4]. Пора рассматривалась нами как концентратор напряжений внутри элемента среды из компактного материала. Для вычисления упругих характеристик пористого материала (модуль Юнга, коэффициент Пуассона) методом конечных элементов решалась задача тео-

рии упругости: к элементу среды с порой прикладывалась растягивающая нагрузка и вычислялись деформации удлинения и укорочения элемента как единого целого. Аналогично из решения задачи теории пластичности определялись пределы текучести на чистый сдвиг и гидростатическое сжатие. Изменяя форму и размеры поры внутри элемента среды, получали механические характеристики в зависимости от пористости. Кривая текучести имела форму эллипса, симметричного относительно начала координат, т. е. пределы текучести на гидростатическое растяжение и сжатие одинаковы. Основное достоинство предложенного описания – в возможности расчета механических характеристик пористого тела исходя из известных свойств компактного материала, заданной пористости и формы пор.

Предложенную модель пористого тела можно использовать для описания процессов обработки давлением спеченного порошкового материала. Неспеченные порошковые материалы растягивающих нагрузок не выдерживают, поэтому условия пластичности порошкового и пористого материалов должны различаться. В работе [2] в качестве кривой текучести предложено использовать эллипс, смещенный относительно начала координат в сторону сжимающих напряжений

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_0 + c}{a} \right)^2 + \left(\frac{T}{\tau_s} \right)^2 = 1. \quad (1)$$

Здесь $a = 0,5(p_s + q_s)$ – длина горизонтальной полуоси эллипса; p_s – предел текучести при гидростатическом сжатии (МПа); q_s – предел текучести при гидростатическом растяжении (МПа); τ_s – предел текучести при пластическом сдвиге (МПа); $c = 0,5(p_s - q_s)$ – предел уплотнения (МПа).

В работе [5] показана возможность решения задачи теории течения с использованием кривой текучести в виде лемнискаты:

$$\Phi = \left((\sigma_0 - q_s)^2 + T^2 \right)^2 - (p_s + q_s)^2 \left((\sigma_0 - q_s)^2 - T^2 \right) = 0. \quad (2)$$

И в том, и в другом случае результаты расчетов носят приближенный характер, поскольку основываются на умозрительном выборе условия текучести.

Потребовался большой объем экспериментальных исследований, позволивший получить механические характеристики ряда порошковых материалов в зависимости от относительной плотности материала ρ [6] и сформулировать условие пластичности на всех стадиях уплотнения. Следует отметить, что предел уплотнения определялся наряду с пределами текучести как самостоятельная механическая характеристика, а не вычислялся как полуразность пределов текучести при гидростатическом сжатии и растяжении. Предел текучести при гидростатическом растяжении определялся оценочно и был близок к нулю.

В качестве примера на рис.1 приведены значения механических характеристик железного порошкового материала ПЖ4М2. Диапазон изменения относительной плотности: от плотности утрайки до $\rho = 0,95$.

Зависимости механических характеристик исследованных порошковых материалов носят единообразный характер и различаются лишь численными значениями. В таблице представлены результаты аппроксимации механических характеристик исследованных порошковых материалов, полученные с использованием ортогональных полиномов Чебышева.

Наличие трех механических характеристик исследованных металлических порошковых материалов (пределов текучести при гидростатическом сжатии и пластическом сдвиге и предела уплотнения) позволяет описать условие предельного состояния для определенной плотности материала в виде параболы третьей степени, которая задается в координатах: T – интенсивность касательных напряжений; $-\sigma_0$ – среднее напряжение. На рис. 2 инвариантные величины напряженного состояния отнесены к пределу текучести при гидростатическом сжатии, что позволяет, во-первых, компактно представить результаты во всем диапазоне изменения плотности, во-вторых, наглядно показать закономерности трансформации кривой предельного состояния по мере уплотнения материала. Точке максимума кривых соответствуют координаты τ_s и c .

На начальной стадии уплотнения при превышении плотности утряски предел уплотнения составляет 2/3 от предела текучести при гидростатическом сжатии. Уплотнение материала возможно лишь при схеме напряженного состояния, близкой к трехстороннему сжатию. Область разрыхления материала максимальна. По мере уплотнения материала максимум на кривой предельного состояния смещается в сторону меньших значений гидростатического давления, расширяется область напряженных состояний, обеспечивающих уплотнение, и сужается область разрыхления. При относительной плотности $\rho = 0,95$ предел уплотнения всех исследованных материалов приближается к 1/3 от величины предела текучести при гидростатическом сжатии. Область разрыхления минимальна.

В исследованном диапазоне изменения плотности механические характеристики порошковых материалов изменяются более чем на два порядка. Поскольку решение задачи пластического течения предполагает прослеживание процесса по стадиям нагружения, необходимо точно соотносить механические характеристики на каждой из этих стадий. Математическая постановка задачи теории пластического течения и ее конечно-элементная реализация представлены в работе [4].

На рис. 3 показаны графики изменения соотношений между пределами текучести при пластическом сдвиге и гидростатическом сжатии, пределом уплотнения и пределом текучести при гидростатическом сжатии при различных плотностях. Прослеживаются достаточно четкие зависимости: при превышении плотности утряски предел текучести τ_s и предел уплотнения c соответствуют величине 2/3 от предела текучести при гидростатическом сжатии p_s ; при уплотнении до $\rho = 0,95$ – достигают порядка 1/3 от величины p_s . Некоторые отличия формы зависимостей, представленных на рис. 3, могут отражать особенности конкретного порошкового материала или носить характер экспериментальных погрешностей.

Параллельно с уменьшением относительной величины предела уплотнения (относительно p_s) уменьшается отношение пределов текучести при пластическом сдвиге и гидростатическом сжатии. Очевидно, что было бы некорректно экстраполировать зависимости, приведенные на рис. 3, за пределы исследованного диапазона плотностей. При плотности, меньшей плотности утряски (точнее, плотности, определяющей нижнюю границу формуемости), связанный (сформованный) порошковый материал не существует. Эта область в рассматриваемой постановке задачи обработки давлением не рассматривается. При относительной плотности, приближающейся к плотности компактного материала, предел текучести при

гидростатическом сжатии стремится к бесконечности, тогда как предел текучести при пластическом сдвиге – к вполне конкретной величине, равной $\sigma_s/\sqrt{3}$ компактного металла; а отношение τ_s/p_s , очевидно, будет стремиться к нулю. Решение задачи пластического деформирования порошкового материала с использованием параболического условия предельного состояния может быть корректно выполнено в интервале изменения относительной плотности от плотности утряски до $\rho = 0,95$.

Поскольку положение предела уплотнения вдоль гидростатической оси существенно изменяется по мере уплотнения порошкового материала, представляется целесообразным воспользоваться для аппроксимации кривых предельного состояния уравнением параболы третьей степени

$$\Phi = \frac{T^2}{\tau_s^2} + A\sigma_0 + B\sigma_0^2 + C\sigma_0^3 = 0. \quad (3)$$

Свободный член этого полинома равен нулю: здесь учтено, что механические характеристики порошковых материалов при растягивающих напряжениях существенно ниже характеристик при сжимающих напряжениях, поэтому кривая проходит через начало координат. В выражении (3) нет слагаемого, содержащего T в первой степени: здесь учтено, что поверхность нагружения представляет собой тело вращения относительно гидростатической оси, а гидростатическая ось перпендикулярна поверхности нагружения. Коэффициенты A , B и C являются функциями механических характеристик порошкового материала:

$$A = \frac{p_s(2p_s - 3c)}{c(p_s - c)^2}; \quad B = \frac{p_s^2 - 3c^2}{c^2(p_s - c)^2}; \quad C = \frac{p_s - 2c}{c^2(p_s - c)^2}. \quad (4)$$

На основании уравнения поверхности нагружения (3) получаем уравнение ассоциированного закона течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \left[\frac{S_{ij}}{\tau_s^2} + \delta_{ij} \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B\sigma_0 + C\sigma_0^2 \right) \right] \quad (5)$$

Множитель Лагранжа λ может быть найден из решения квадратного уравнения, положительным корнем которого является большее из двух значений:

$$\Lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (6)$$

где $a = A \frac{\dot{\varepsilon}_0}{D}$; $b = \left(\frac{(\tau_s H^p)^2}{4} + B \frac{\dot{\varepsilon}_0^2}{D^2} \right)$; $c = C \frac{\dot{\varepsilon}_0^3}{D^3}$; $D = \frac{A}{\sigma_0} + 2B + 3C\sigma_0$.

Таким образом, использование кривой текучести в форме параболы третьей степени позволяет получить определяющие уравнения с одним искомым в ходе итерационного процесса параметром λ . Этот параметр является функцией предела уплотнения, пределов текучести порошкового материала при пластическом сдвиге и гидростатическом сжатии, а также напряженно-деформированного состояния на рассматриваемой стадии нагружения.

В отличие от эллипса, наиболее широко применяемого в качестве кривой текучести, кубическая парабола в общем случае не исключает наличия двух экстремумов и точек перегиба. Поверхность текучести всегда должна быть выпуклой. Поэтому использование кубиче-

ской параболы в качестве кривой текучести должно быть ограничено областью возможного применения.

Исследование на экстремум показывает, что кривая текучести выпукла, если предел уплотнения находится в интервале $1/3 < c/p_s < 2/3$. Если отношение c/p_s выходит за пределы этого интервала, то появляется второй корень уравнения, и использование параболического условия пластичности невозможно. Для большинства исследованных материалов соотношение $1/3 < c/p_s < 2/3$ соблюдается во всем диапазоне изменения относительной плотности.

В задачах обработки давлением уплотняемых материалов выбор вида поверхности нагружения определяется, как правило, либо возможностями аналитического решения, либо наличием точных данных о механических свойствах материала. При численном решении нет проблем, характерных для аналитических решений, и выбор условия пластичности обуславливается инженерной постановкой задачи. В таком случае нет смысла в использовании цилиндрического, конического или пирамидального условий пластичности, точно так же, как для компактных материалов нет смысла в использовании условия Треска–Сен-Венана. Поэтому ниже рассматриваются и сравниваются результаты, полученные с использованием кривых текучести в виде эллипса, лемнискаты, параболы третьей степени. При этом эллипс смещен вдоль гидростатической оси на величину $p_s/2$, так что эллипс, лемниската и парабола проходят через начало координат. Сопоставление результатов показывает, что наибольшие отличия обнаруживаются в области разрыхления материала, наименьшие – в области уплотнения. Поскольку в большинстве процессов обработки давлением происходит уплотнение порошкового материала, покажем, как различаются результаты, полученные решением задачи пластического течения с использованием кривых текучести в виде эллипса, лемнискаты, параболы третьей степени. Расчеты на сжатие в глухой матрице выполнены для железного порошка ПЖ4М2 с начальной относительной плотностью $\rho = 0,42$.

Общий вид зависимостей компонент напряжений (вертикальной и радиальной составляющих, гидростатического напряжения) не зависит от выбранного условия пластичности (рис. 4). При более детальном анализе напряженного состояния влияние выбранного условия пластичности оказывается заметным. Зависимости интенсивности напряжений по мере уплотнения материала не носят монотонного характера (рис. 5). Поэтому соотношение радиальной и вертикальной составляющих напряженного состояния, полученные по разным условиям пластичности, неодинаковы (рис. 6).

Зависимости гидростатического давления от плотности порошкового материала во всем исследованном диапазоне практически одинаковы при расчетах с использованием кривых текучести в виде эллипса, лемнискаты или параболы. Это связано с тем, что в задаче пластического течения имеется четыре независимых аргумента: три компоненты скорости течения и гидростатическое напряжение, определяемые из системы уравнений равновесия и условия изменения объема.

Величины пределов текучести на гидростатические растяжение и сжатие в рассматриваемых трех вариантах условия пластичности одинаковы. При прессовании в закрытой матрице преобладающим является гидростатическое напряжение.

Зависимости интенсивности напряжений (второй инвариант девиатора напряжений) количественно отличаются друг от друга во всем диапазоне изменения плотности (рис. 5). Наглядное объяснение этому факту дает рис. 7, *а* и *б*, где на кривых текучести (эллипсе, лемнискате, параболе) показано положение точки, характеризующей напряженное состояние при прессовании в закрытой матрице. Нетрудно заметить, что во всем диапазоне изменения плотности величины интенсивности напряжений, определенные по разным условиям пластичности, не только существенно различаются между собой, но и меняется соотношение между ними (на рис. 5 кривые пересекаются).

Зависимости вертикального напряжения от плотности, построенные по разным условиям пластичности, существенно не различаются, как не различаются гидростатические напряжения. Однако соотношение между компонентами напряжений (рис. 6) отличаются и количественно, и качественно. В области малых плотностей, где различие в положении точек на эллипсе и параболе несущественно (рис. 7, *а*), коэффициенты бокового давления, найденные с использованием эллиптического и параболического условий пластичности (рис. 6) почти одинаковы. По мере увеличения плотности (рис. 6 и 7, *б*) различия увеличиваются. Очевидно, что условное задание положения предела уплотнения на эллипсе не отражает физики процесса. Использование параболического условия пластичности и реальной механической характеристики – предела уплотнения – отражает реальный рост коэффициента бокового давления, в пределе стремящегося к единице. Условие текучести в виде лемнискаты с фиксированным (относительно предела текучести на гидростатическое сжатие) положением предела текучести на сдвиг и предела уплотнения в принципе не позволяет получить зависимость коэффициента бокового давления от плотности.

Напряженное состояние, соответствующее одноосному сжатию, характеризуется соотношением между гидростатическим напряжением и интенсивностью касательных напряжений $T = -\sigma_0 \sqrt{3}$. На рис. 7, *а*, *б*, это соотношение изображено прямой, проходящей через начало координат. В предположении, что предел текучести на гидростатическое растяжение $q_s = 0$, прямая $T = -\sigma_0 \sqrt{3}$ не пересекается с лемнискатой, т. е. кривая текучести в виде лемнискаты не позволяет моделировать процессы обработки давлением, где в какой-либо области тела формируется напряженное состояние, близкое к одноосному сжатию. На рис. 7, *б*, напряжения, необходимые для одноосного сжатия железного порошка с исходной плотностью $\rho = 0,95$, рассчитанные по параболическому условию пластичности, много выше, чем по эллиптическому. При малых плотностях, в пределах нижней границы формуемости (рис. 7, *а*), решение задачи об одноосном сжатии на базе параболического условия пластичности может отсутствовать (нет точки пересечения прямой с параболой). Решение по эллиптическому условию пластичности остается устойчивым для любых плотностей, однако не может быть признано верным.

В ходе экспериментальных и расчетных исследований установлен набор тех механических характеристик порошкового материала, который позволяет сформулировать уравнения предельного состояния и адекватно описать поведение материала как в области уплотнения, так и в области разрыхления. Определяющие уравнения, полученные как уравнения ассоциированного закона пластического течения, вместе с уравнениями равновесия и геометри-

ческими соотношениями образуют систему уравнений теории пластического течения порошковых материалов. Выбор условия пластичности определяется наличием надежных экспериментальных данных о механических характеристиках порошкового материала, напряженным состоянием, возникающим в исследуемом процессе обработки давлением, целью исследования, т. е. теми параметрами, которые интересуют исследователя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров В.Л.** Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. 688 с.
2. **Друянов Б.А.** Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989. 165 с.
3. **Григорьев А.К., Рудской А.И.** Деформация и уплотнение порошковых материалов. М.: Металлургия, 1992. 192 с.
4. **Рыбин Ю.И., Рудской А.И., Золотов А.М.** Математическое моделирование и проектирование технологических процессов обработки металлов давлением. СПб.: Наука, 2004. 640 с.
5. **Рыбин Ю.И.** Моделирование процессов обработки давлением порошковых металлических материалов // Компьютерное моделирование 2002: Тр. 3-й междунар. науч.-техн. конф. СПб. 2002. С. 78–87.
6. **Цеменко В.Н.** Деформирование порошковых сред. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 104 с.

Механические характеристики исследованных порошковых материалов

Порошковый материал	Аппроксимирующая формула
ПЖ4М2	$p_s = 7349\rho^3 - 10822\rho^2 + 5678\rho - 1026,5;$ $\tau_s = 1148,9\rho^2 - 953,5\rho + 201,4;$ $c = 837\rho^3 - 2488,9\rho^2 + 1278,7\rho - 234$
ПЖ-губка	$p_s = 4098,1\rho^3 - 4370,1\rho^2 + 1602,8\rho - 176,2;$ $\tau_s = 592\rho^3 - 203,2\rho^2 + 1,25\rho + 4,64;$ $c = 072\rho^3 - 1035,2\rho^2 + 374,46\rho - 40,56$
ПМС1	$p_s = 1638\rho^3 - 1426\rho^2 + 486,6\rho - 58,44;$ $\tau_s = 444\rho^3 - 363\rho^2 + 154,6\rho - 23,5;$ $c = 475\rho^3 - 410\rho^2 + 169,3\rho - 24,5$
ПНК2	$p_s = 1229\rho^3 + 826,3\rho^2 - 779,2\rho + 129$ $\tau_s = -1173,5\rho^3 + 2760,6\rho^2 - 1364,9\rho + 190,2$ $c = -223,9\rho^3 + 1201\rho^2 - 629,9\rho + 89,2$
САС1	$p_s = 32833\rho^3 - 67475\rho^2 + 47487,95\rho - 11327,81$ $\tau_s = 3333,3\rho^3 - 7750\rho^2 + 6661,67\rho - 1941,62$ $c = 5333,3\rho^3 - 11700\rho^2 + 9386,67\rho - 2590,75$
АКД12	$p_s = 4731\rho^3 - 9042,15\rho^2 + 6379,87\rho - 1543,48$ $\tau_s = -2739\rho^3 + 5948,35\rho^2 - 3796,64\rho + 756,8$ $c = -166\rho^3 + 37,9\rho^2 + 550\rho - 275,08$

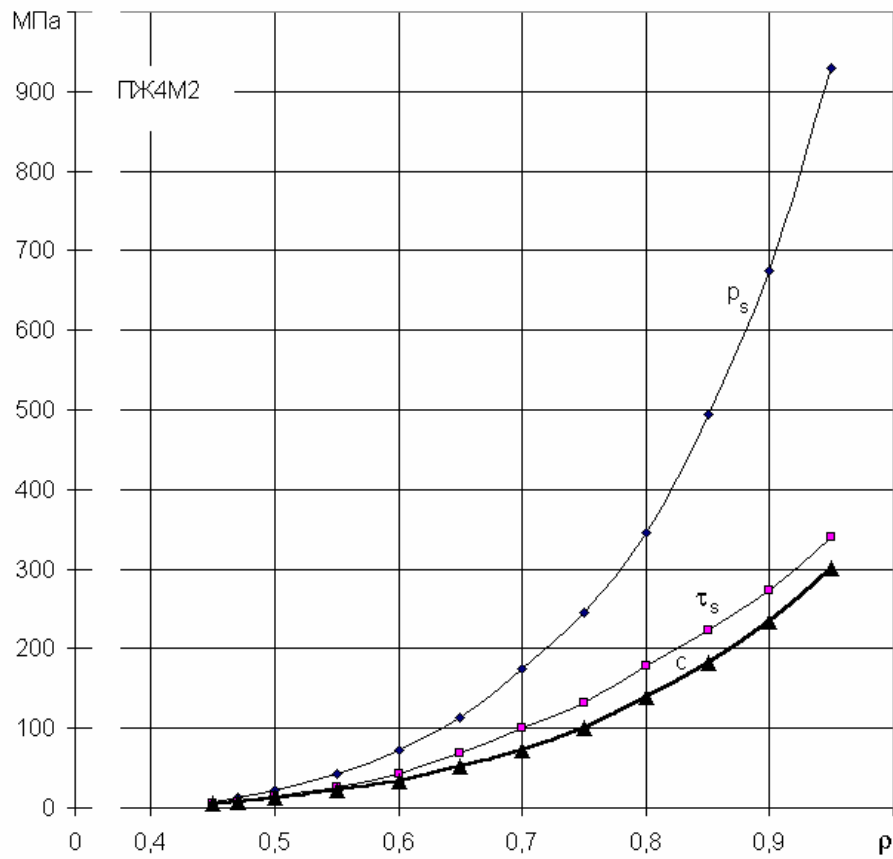


Рис. 1. Зависимости механических характеристик железного порошкового материала ПЖ4М2 от относительной плотности

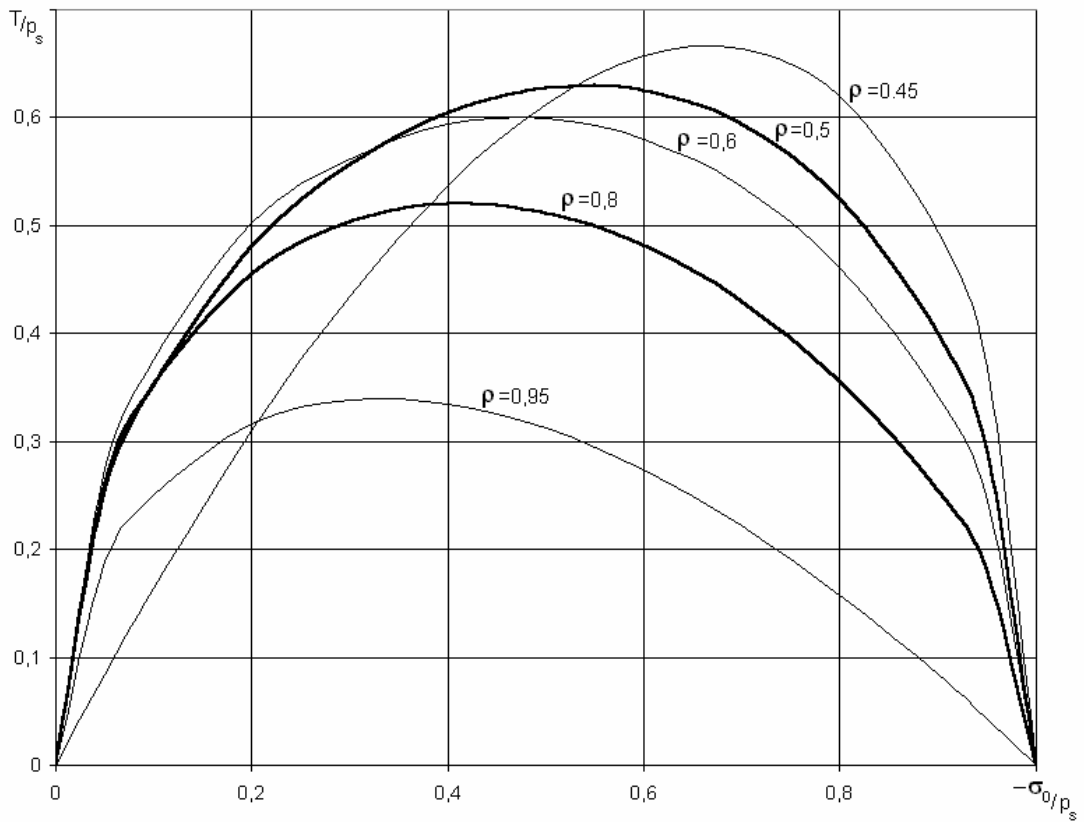


Рис. 2 Кривые предельного состояния порошкового материала ПЖ4М2 различной плотности

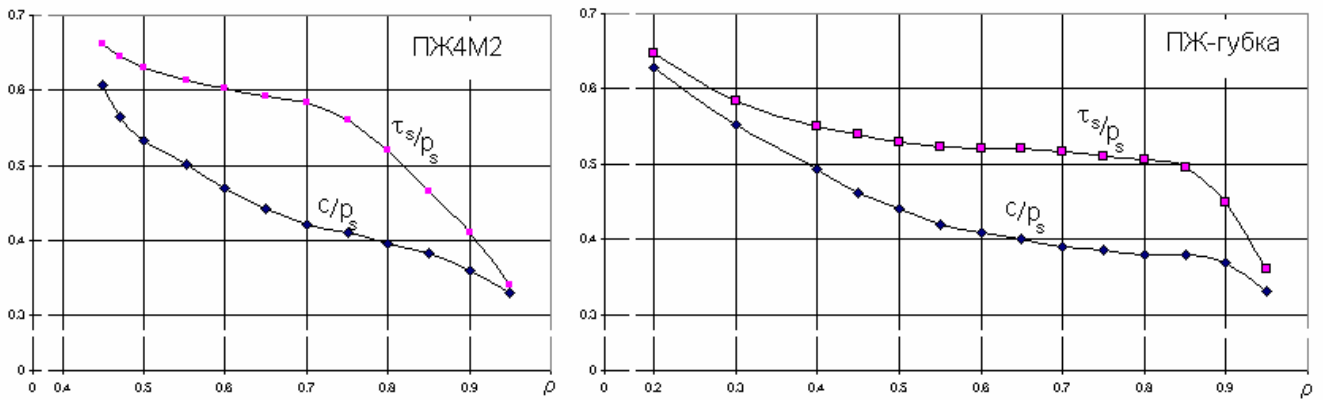


Рис. 3. Зависимости безразмерных величин предела текучести при пластическом сдвиге и предела уплотнения от относительной плотности порошковых материалов

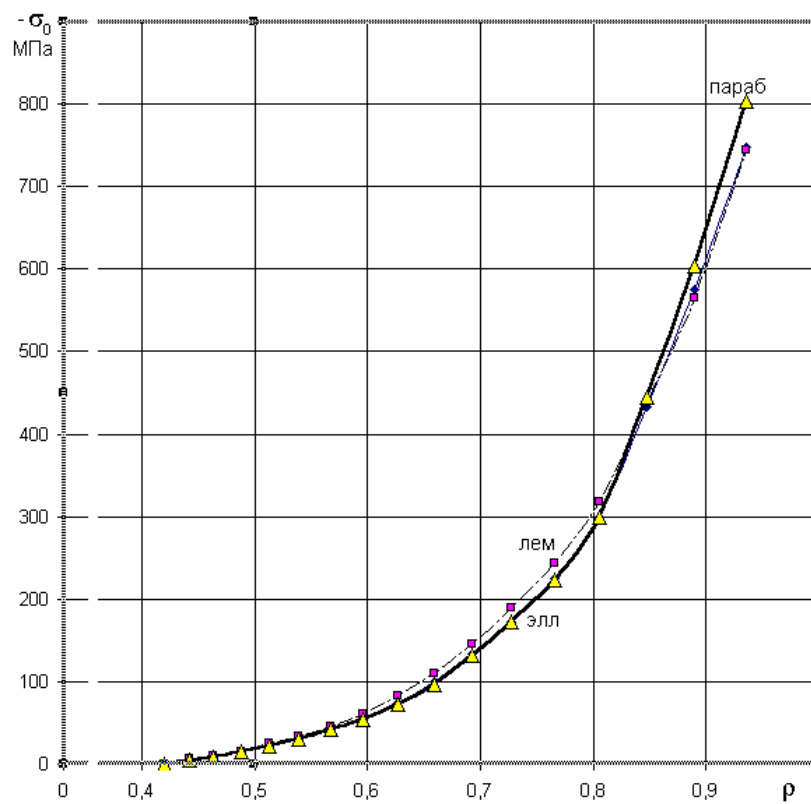


Рис. 4. Зависимость среднего (гидростатического) давления от относительной плотности

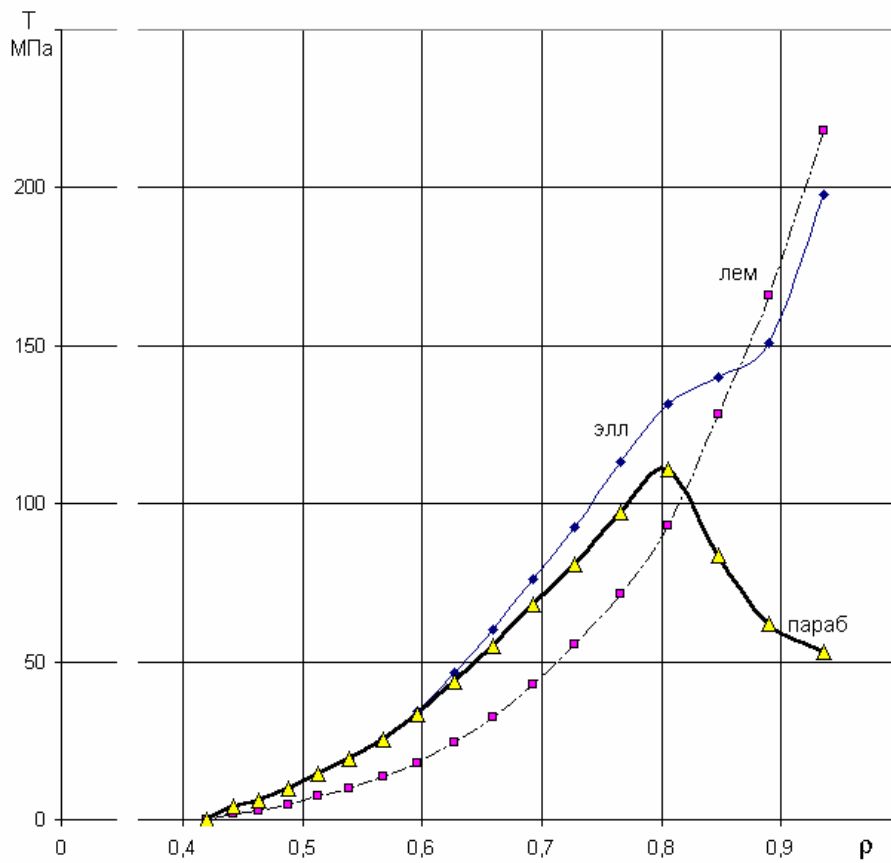


Рис. 5 Зависимость интенсивности касательных напряжений от относительной плотности

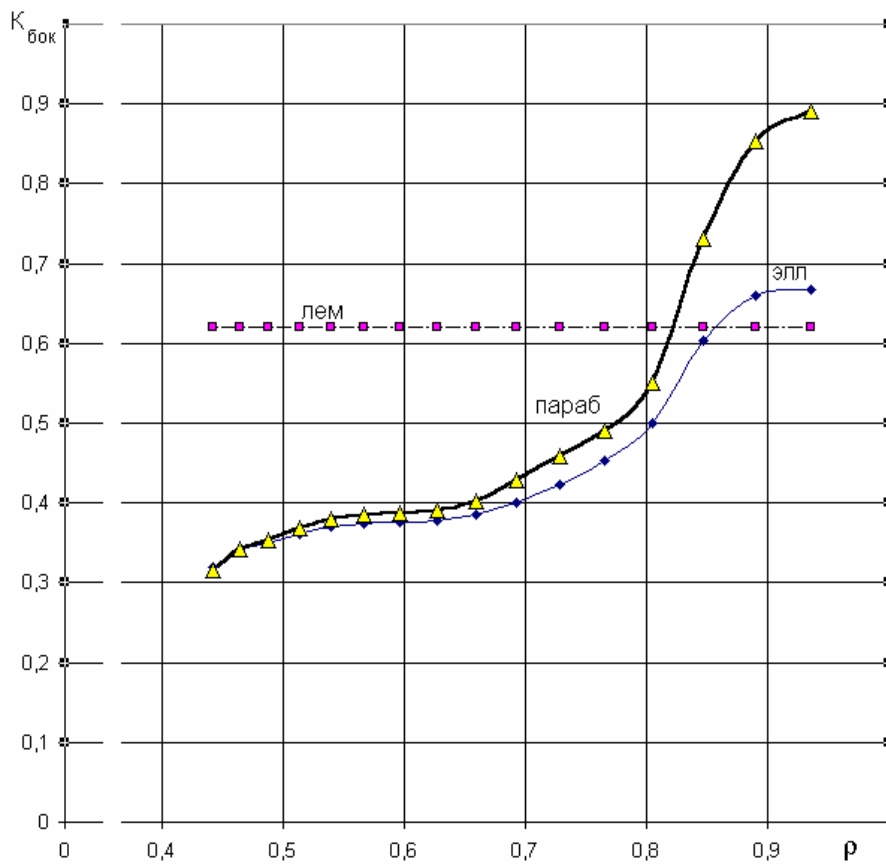


Рис. 6 Зависимость коэффициента бокового давления от относительной плотности

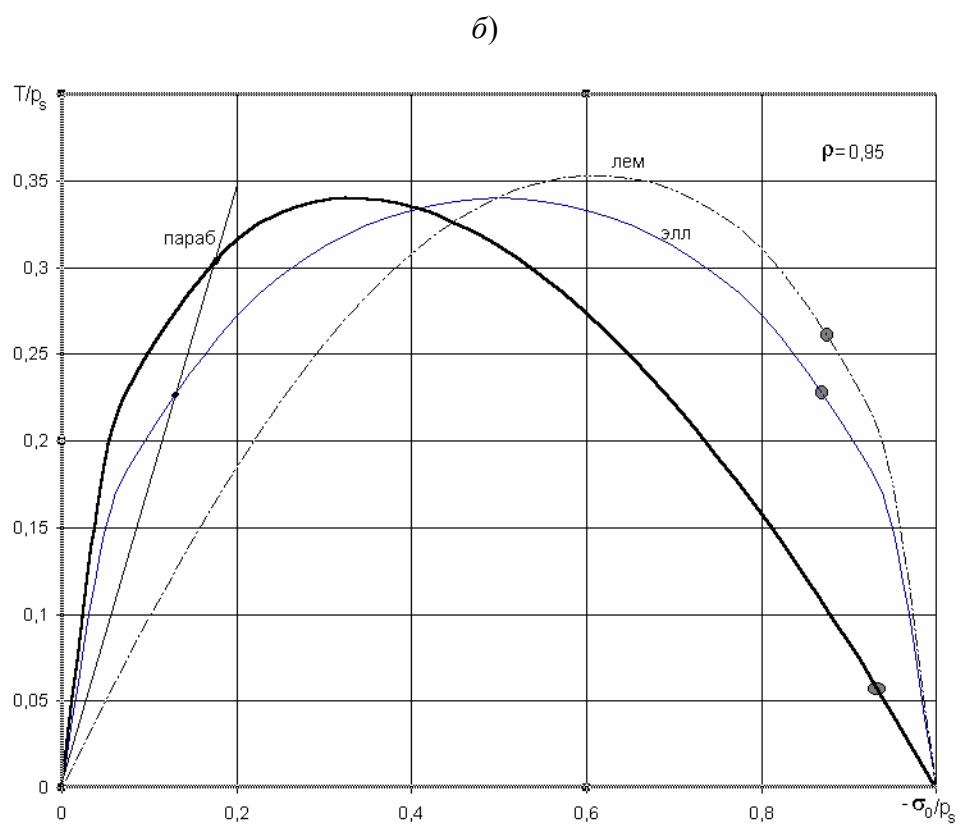
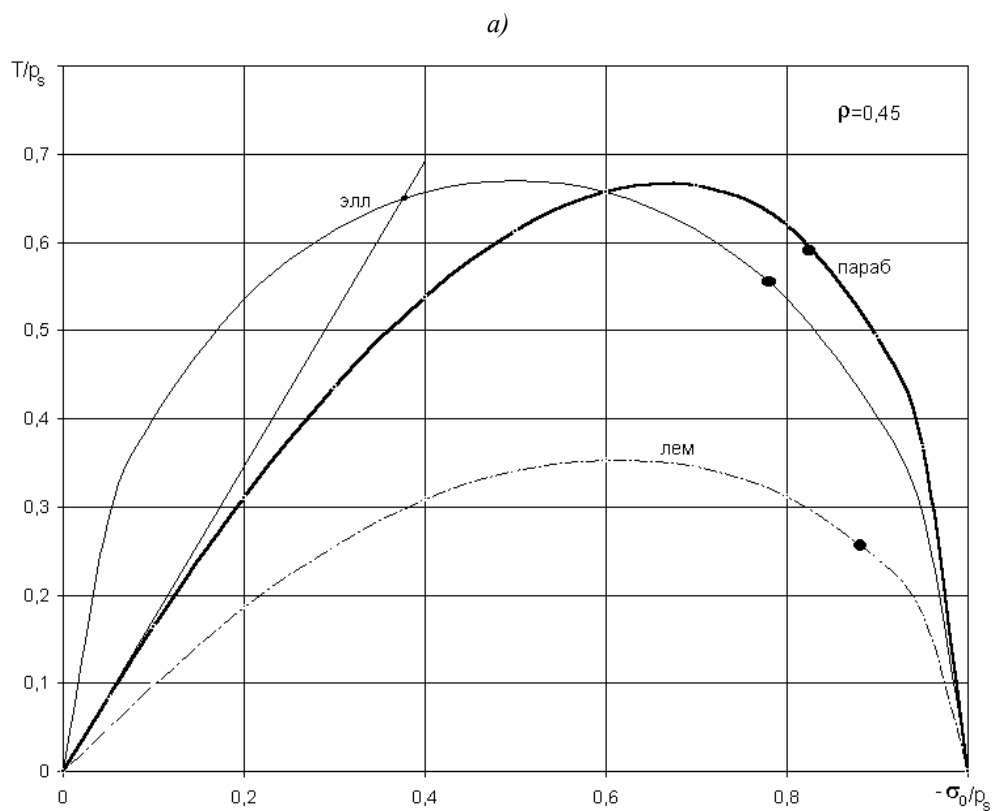


Рис. 7. Положение точки, соответствующей прессованию в закрытой матрице на кривой предельного состояния при относительной плотности $\rho = 0,45$ (а) и $\rho = 0,95$ (б)