А. В. Гарбарук

Механика жидкости и газа

Упражнения по общему курсу

Учебное пособие

Оглавление

1. Элементы тензорного анализа.

Изучение гидроаэродинамики практически невозможно без использования тензорного анализа. Тензоры, входящие в уравнения механики жидкости и газа, в большинстве своем являются тензорами второго ранга в трехмерном пространстве. Для упрощения изложения будем рассматривать их в ортонормированной декартовой системе координат.

Выражения с индексами.

Часто набор однотипных величин обозначают одной буквой, снабжая ее некоторым набором индексов (например, a_{ij}). В дальнейшем при отсутствии специальных оговорок считается, что каждый **индекс** независимо может принимать значения 1, 2, 3 (поскольку, как правило, рассматривается трехмерное пространство).

При использовании величин с индексами принято для сокращения записи **суммирование по повторяющемуся индексу**: если в одночленном выражении некоторый индекс встречается дважды, то рассматривается сумма соответствующих одночленов, взятых для каждого значения соответствующего индекса. Например $a_{ij}b_{jk} \equiv \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk} \equiv a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}$.

Тензоры

Для пары векторов можно ввести тензорное произведение $\vec{a}\vec{b}$. Всевозможные комбинации тензорных произведений образуют линейное пространство **тензоров второго ранга**. Базисом в этом пространстве являются тензорные произведения $\vec{e}_i\vec{e}_j$, где $\vec{e}_i$ - базис исходного векторного пространства. Таким образом, тензор второго ранга можно представить в виде $\overline{\overline{T}} = t_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, при этом числовые коэффициенты t_{ij} называются компонентами рассматриваемого тензора в этом базисе. Роль единичного элемента в тензорном пространстве играет так называемый символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Пусть $\vec{e}_i$ и $\vec{e}'_j$ – два ортонормированных базиса, связанных преобразованием $\vec{e}_i = A_{ij}\vec{e}'_j$ (следует помнить, что для матрицы ортогонального преобразования верно $A_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}$). Матрицы t_{ij} и t'_{ij} являются компонентами тензора второго ранга в этих базисах тогда и только тогда, когда выполнено условие $t_{ij} = A_{ik}A_{jl}t'_{kl}$. Эта формула называется **тензорным законом преобразования для компонент тензора второго ранга в декартовой системе координат**.

Аналогично при помощи тензорных произведений более высоких порядков можно определить тензоры третьего, четвертого и более высоких рангов. Следует помнить, что скаляр является тензором нулевого ранга, а вектор – тензором первого ранга.

Операции над тензорами.

Над тензорами допустимы следующие операции.

1. Умножение на скаляр.
2. Сложение двух тензоров одинакового ранга.
3. Тензорное произведение двух тензоров (ранг произведения равен сумме рангов умножаемых тензоров).
4. Свертка тензора по двум любым индексам (ранг результирующего тензора на 2 меньше ранга исходного тензора).
5. Скалярное произведение двух тензоров (ранг результирующего тензора на 2 меньше суммы рангов умножаемых тензоров). Следует отметить, что скалярное произведение является результатом тензорного произведения и последующей.

Некоторые свойства тензоров.

1. Любой тензор второго ранга можно единственным образом разложить на симметричную и антисимметричную составляющие.
2. Числа $I_1 = t_{kk}, I_2 = \left(t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij}\right)/2, I_3 = \det\left(t_{ij}\right)$ называются **тензорными инвариантами** и не зависят от выбора ортонормированного базиса, в котором рассматриваются компоненты тензора. Любые другие числовые функции, обладающие этим свойством, также называются инвариантами и могут быть выражены через I_1, I_2, I_3.
3. Для любого симметричного тензора второго ранга существует ортонормированный базис, в котором недиагональные компоненты тензора равны нулю. При этом прямые, вдоль которых направлены орты базиса, называются **главными осями** тензора, а диагональные компоненты тензора в этой системе координат называются **главными значениями**. Можно показать, что главные значения равны **собственным числам**, а главные оси соответствуют **собственным векторам** тензора (их можно найти из характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$ и $t_{ij}v_j = \lambda v_i$).
4. Любой тензор второго ранга можно единственным образом разложить на шаровую и девиаторную составляющие ($t_{ij}^{(s)} = \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}, t_{ij}^{(d)} = t_{ij} - \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}$).
5. По теореме Гамильтона-Кэли каждый тензор является корнем своего характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, т. е. $\overline{\overline{T}}^3 - I_1\overline{\overline{T}}^2 + I_2\overline{\overline{T}} - I_3\overline{\overline{E}} = 0$.

Задачи.

1.1. Вычислить суммы $\delta_{ii}, \delta_{ij}\delta_{ji}, \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$.

1.2. Записать в сокращенном виде формулу для вычисления индивидуальной производной *dA/dt* в эйлеровом описании используя суммирование по повторяющемуся индексу.

1.3. Пусть t_{ij} - компоненты тензора в ортонормированном базисе $\vec{e}_i$.

1.3.1. Показать, что набор $\tau_{ji}=t_{ij}$ является компонентами некоторого тензора.

1.3.2. Равны ли свертки $\tau_{ij}u_iu_j$ и $t_{ij}u_iu_j$.

1.3.3. Равны ли свертки $\tau_{ij}u_iv_j$ и $t_{ij}u_iv_j$.

1.4. Показать, что свойство симмертичности и антисимметричности тензора сохраняется при переходе к другому базису.

1.5. Чему равна полная (двойная) свертка симметричного и антисимметричного тензоров.

1.6. Показать, что представление тензора второго ранга в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров единственно.

1.7. Найти девиатор шаровой составляющей и шаровую составляющую девиатора тензора.

1.8. Найти главные компоненты и главные оси тензора, представленного в некотором ортонормированном базисе $\vec{e}_i$:

1.8.1. $t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

1.8.2. $t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.9. Показать, что следующие функции симметричного тензора второго ранга являются его инвариантами:
$I_1 = t_{ii}, I_2 = (t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij})/2, I_3 = \det(t_{ij}), J_2 = t_{ij}t_{ij}, J_3 = t_{ij}t_{jk}t_{ki}$.

1.10. Являются ли главные компоненты симметричного тензора $\boldsymbol{t}$ его инвариантами? Выразить I_1, I_2, I_3, J_2, J_3 через главные компоненты тензора.

Ответы.

1.1. 3, 3, 3.

1.2. $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{\partial A}{\partial t}+v_i\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$.

1.3.2. Да.

1.3.3. В общем случае нет.

1.5. 0.

1.6. $t_{ij}=0.5\left(t_{ij}+t_{ji}\right)+0.5\left(t_{ij}-t_{ji}\right)$.

1.7. 0, 0.

1.8.1. $\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=3,\vec{a}_1=\sqrt{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{a}_2=-\sqrt{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{a}_3=\vec{e}_3$.

1.8.2. $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=2$

$\vec{a}_1=\sqrt{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{a}_2=b_1\left(-\sqrt{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2\right)+2b_2\vec{e}_3,\vec{a}_3=b_2\left(-\sqrt{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2\right)-2b_1\vec{e}_3$, b_1 и b_2 – произвольные ненулевые параметры.

1.9. I_1, J_2, J_3 - суть скаляры, полученные путем свертки тензоров и инвариантные относительно базиса,

$I_2=0.5\left(I_1^2-J_2\right), I_3=\left(I_1^3-3I_1J_2+2J_3\right)/6$.

1.10.Да.

$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1, I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$

$J_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2, J_3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$.

2. Кинематика сплошной среды.

Лагранжево и Эйлерово описание движения сплошной среды.

Для описания движения сплошной среды, в частности жидкости или газа, существуют два способа.

Первый, связываемый с именем **Лагранжа,** заключается в задании текущих значений координат каждой из частиц среды X_1, X_2, X_3 как функций времени. Следует отметить, что этот способ совпадает со способом, применяемым в кинематике системы материальных точек. Кроме того, необходимо каким-либо образом отличать частицы друг от друга. Наиболее распространенным способом является задание значений координат a_1, a_2, a_3 для каждой из частиц в некоторый начальный момент времени $t=t_0$, причем эти координаты могут быть заданы в любой произвольной системе координат, а не только в прямоугольной декартовой. Поскольку частиц сплошной среды бесконечно много, то сами величины a_k образуют непрерывное поле. Величины a_k и t называют **лагранжевыми переменными.** Уравнения движения записываются при этом в следующем виде: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{a}, t)$.

Другой способ, принадлежащий **Эйлеру** и значительно шире применяемый в механике жидкости и газа, чем способ Лагранжа, заключается в задании поля скоростей как функции радиус-вектора и времени $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$. Переменные $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и t называют при этом **эйлеровыми переменными.**

Переход от Лагранжевой системы координат к Эйлеровой лучше всего показать на примерах.

<u>Задача: </u>движение жидкости задано способом Лагранжа (x,y,z - декартовы координаты, a,b,c - переменные Лагранжа, t - время).

$$x = a \cdot \cos(\alpha t + b);\ y = a \cdot \sin(\alpha t + b);\ z = c + \omega t.$$

Описать движение в переменных Эйлера.

<u>Решение:</u>

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -a \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha t + b) = -\alpha y$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = a \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha t + b) = \alpha x$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \omega$$

<u>Задача:</u> движение жидкости задано способом Эйлера.

$V_x = -\alpha t x; V_y = \alpha t y; V_z = 0$.

Описать движение в переменных Лагранжа.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha t x \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha t y \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = -\alpha t dt \\ \dfrac{dy}{y} = \alpha t dt \\ z = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = -\alpha t^2/2 + \tilde{C}_1 \\ \ln(y) = \alpha t^2/2 + \tilde{C}_2 \\ z = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 \cdot \exp\left(-\alpha t^2/2\right) \\ y = C_2 \cdot \exp\left(\alpha t^2/2\right) \\ z = C_3 \end{cases}$$

$$(x, y, z)\big|_{t=0} = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a = C_1 \\ b = C_2 \\ c = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot \exp\left(-\alpha t^2/2\right) \\ y = b \cdot \exp\left(\alpha t^2/2\right) \\ z = c \end{cases}$$

Траектории и линии тока

В векторных полях часто рассматривают **векторные линии**, т. е. линии на которых в каждой точке вектор направлен по касательной к этой линии. В частности, **линия тока** является векторной линией поля скорости. При определении линий тока время играет роль фиксированного параметра. Считая $\delta\vec{r}$ элементом линии тока, нетрудно записать условие его параллельности вектору скорости: $\vec{V} \times \delta\vec{r} = 0$ или $\dfrac{\delta x_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \dfrac{\delta x_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \dfrac{\delta x_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)}$. Проинтегрировав последнее уравнение можно найти искомую линию тока.

Траектории движения частиц - это геометрическое место точек последовательных положений частиц в пространстве в следующие друг за другом моменты времени. Это означает, что в каждый момент времени t дифференциал $d\vec{r}$ радиус-вектора $\vec{r}$ движущейся частицы будет совпадать по направлению с вектором скорости. Таким образом, дифференциальные уравнения **траекторий** будут аналогичны уравнениям **линий тока**, но с тем принципиальным отличием, что теперь уже время t будет такой же независимой переменной, как и координаты x_1, x_2, x_3, и уравнение траектории должно быть записано в виде $\dfrac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \dfrac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \dfrac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt$.

Задача: Записать уравнения линий тока и траекторий для движения жидкости, заданного проекциями скоростей: $V_x = x + t;\ V_y = -y + t;\ V_z = 0$.

Решение:линии тока:

$$\frac{\delta x}{V_x}=\frac{\delta y}{V_y}=\frac{\delta z}{V_z}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\delta x}{x+t}=\dfrac{\delta y}{-y+t}\\ \delta z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln(x+t)=-\ln(t-y)+\widetilde{C}_1\\ z=C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+t)(t-y)=C_1\\ z=C_2\end{cases}.$$

Траектории:

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}=\frac{dz}{V_z}=dt\Rightarrow\begin{cases}dx/dt=x+t\\ dy/dt=-y+t\\ dz/dt=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=C_1e^t-t-1\\ y=C_2e^{-t}+t-1\\ z=C_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=(1+x_0)e^t-t-1\\ y=(1+y_0)e^{-t}+t-1\\ z=z_0\end{cases}.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 - координаты жидких частиц в момент времени t=0.

Потенциальные течения

Течения, поле скорости которых можно представить в виде $\vec{V}=grad(\varphi)$, называются **потенциальными**, а φ – **потенциалом** поля скорости. Необходимым и достаточным условием потенциальности течения является $rot(\vec{V})=0$. По этой причине потенциальные течения часто называются **безвихревыми**.

Заметим также, что условием **несжимаемости** среды является $div(\vec{V})=0$, поэтому течения несжимаемой жидкости иногда называют **бездивергентными**.

Квазитвердая и деформационная составляющие движения

Аналогично теореме Эйлера о разложении вектора скорости в любой точке твердого тела в механике сплошных сред используется теорема **Гельмгольца,** гласящая: $\vec{V}(\vec{r})=\vec{V}_{KT}(\vec{r})+\vec{V}_{DEF}(\vec{r})$, где $\vec{V}_{KT}(\vec{r})$ – квазитвердая составляющая движения, а $\vec{V}_{DEF}(\vec{r})$ – деформационная. **Квазитвердая** составляющая скорости может быть найдена по формуле $\vec{V}_{KT}(\vec{r})=\vec{V}(\vec{r}_0)+\vec{\omega}(\vec{r}_0)\times\delta\vec{r}$, где $\vec{\omega}=\frac{1}{2}rot(\vec{V})$ – **угловая** или **вращательная** составляющая скорости. $\vec{V}_{DEF}(\vec{r})=\dot{S}(\vec{r}_0)\cdot\delta\vec{r}$ – **деформационная** составляющая скорости, $\dot{S}=def(\vec{V})$ – тензор **скоростей деформаций**, компоненты которого в декартовой системе координат равны $\dot{S}_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$.

Циркуляция и расход

Циркуляция скорости по кривой l равна $\int\limits_{(l)}\vec{V}\cdot d\vec{r}$.

Расход жидкости через кривую l представляет собой поток вектора через кривую l и равен $\int\limits_{(l)}(\vec{V}\cdot\vec{n})dl$.

Задачи.

2.1. Ввести пространственную систему координат, Лагранжевы координаты частиц и найти закон движения в следующих случаях:

2.1.1. твердое тело движется поступательно со скоростью, постоянной по направлению и имеющей постоянную величину v;

2.1.2. твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω.

2.2. Найти поля скорости и ускорения, если движение тела происходит по закону:

2.2.1. трехосное растяжение тела $x_1 = a(t)\xi_1,\ x_2 = b(t)\xi_2,\ x_3 = c(t)\xi_3$;

2.2.2. простой сдвиг $x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2,\ x_2 = \xi_2,\ x_3 = \xi_3$

2.2.3. однородная деформация при одновременном вращении тела с закрепленной точкой $x_i = A_{ij}(t)\xi_j,\ \det\|A_{ij}\| \neq 0$.

2.3. Движение жидкости задано способом Лагранжа (x,y,z - декартовы координаты, a,b,c - переменные Лагранжа, t - время, u,v,α,R,ω - параметры). Определить характер движения, найти скорость и ускорение потока, описать движение в переменных Эйлера.

2.3.1. $x = a + ut;\ y = b;\ z = c$.

2.3.2. $x = a + ut^2;\ y = b + vt;\ z = c$.

2.3.3. $x = a\cos(\alpha t^2 + b);\ y = -a\sin(\alpha t^2 + b);\ z = c$.

2.3.4. $x = a + R\cos(\alpha t);\ y = b + R\sin(\alpha t);\ z = c + \omega t^2$.

2.4. Движение жидкости задано проекциями скорости на оси декартовой системы координат (способ Эйлера). Определить характер движения и описать движение в переменных Лагранжа.

2.4.1. $V_x = sy;\ V_y = sx;\ \mathrm{V}_z = 0$.

2.4.2. $V_x = mx + nt;\ V_y = -ky + lt;\ \mathrm{V}_z = 0$.

2.4.3. $V_x = s\cdot\cos(\alpha t); V_y = s\cdot\sin(\alpha t); \mathrm{V}_z = s$.

2.4.4. $V_x = \dfrac{x}{t+\tau}; V_y = \dfrac{2ty}{t^2+\tau^2}; \mathrm{V}_z = \dfrac{3tz}{t^3+\tau^3}$.

2.4.5. $V_x = \dfrac{Q(t)x}{2\pi r^2}; V_y = \dfrac{Q(t)y}{2\pi r^2}; \mathrm{V}_z = 0; r = \sqrt{x^2+y^2}; Q(t) > 0$

2.4.6. $V_i = \dfrac{Q(t)x_i}{4\pi R^3}; i = 1,2,3; R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; Q(t) > 0$

2.5. Описать в переменных Эйлера и Лагранжа вращение жидкости вокруг оси z:

2.5.1. с постоянной угловой скоростью;

2.5.2. с постоянным угловым ускорением.

2.6. Записать уравнения линий тока и траекторий для движения жидкости, заданного проекциями скоростей.

2.6.1. $V_x = -sy;\ V_y = sx;\ \mathrm{V}_z = bt$.

2.6.2. $V_x = a \cdot \sin(\alpha t); V_y = a \cdot \cos(\alpha t); \mathrm{V}_z = 0$.

2.6.3. $V_x = atx/R^3; V_y = aty/R^3; V_z = atz/R^3; R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.7. Скорость жидкости в круглой трубе радиуса R_0 распределена по степенному закону. Определить, является ли течение потенциальным. Найти ротор скорости и построить вихревые линии.

2.7.1. $V = V_0\left(1 - r/R_0\right)^n$

2.7.2. $V = V_0\left(1 - r^2/R_0^2\right)$

2.8. Жидкость вращается вокруг оси z так, что скорости частиц убывают пропорционально расстоянию от оси вращения. Найти ротор и дивергенцию поля скорости.

2.9. Поле скоростей вращательного движения вокруг оси z имеет вид $V_x = -y \cdot f(R);\ V_y = x \cdot f(R);\ V_z = 0;\ R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Определить вид функции f если жидкость несжимаема, а течение безвихревое.

2.10. Определить составляющие угловой скорости частиц жидкости в потоке, для которого проекции скорости заданы выражениями: $V_x = axy;\ V_y = ayz;\ V_z = azx;\ a = const$.

2.11. Плоское движение жидкости задано проекциями скорости. Выделить квазитвердую и деформационную составляющие движения в окрестности точки $A(1,1)$.

2.11.1. $V_x = ay;\ V_y = 0$

2.11.2. $V_x = -ay;\ V_y = ax$

2.11.3. $V_x = -ay/(x^2 + y^2);\ V_y = ax/(x^2 + y^2)$

2.12. Вычислить циркуляцию скорости по отрезку прямой, соединяющему точки *A(1,0)* и *B(0,1)*, в потоке жидкости, заданном проекциями скорости $V_x = -ay/(x^2 + y^2);\ V_y = ax/(x^2 + y^2);\ V_z = 0$.

2.13. Плоское течение жидкости задано потенциалом скорости $\varphi = ax(x^2 - 3y^2)$. Определить расход жидкости через отрезок прямой линии, соединяющий точки *A(0,0)* и *B(1,1)*.

2.14. Движение сплошной среды описывается при помощи задания поля скорости $V_x = -\omega y; V_y = \omega x; V_z = 0, \omega = const$. При помощи подходящим образом распределенных источников тепла в пространстве создается поле температуры $T = T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau} - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right)$, $T_0, \tau, a, b, c = const$. Найти скорость изменения температуры индивидуальной частицы в момент t_0, если она находится в этот момент в точке пространства с координатами $x=a$, $y=b$, $z=c$.

2.15. Плоское движение сплошной среды происходит с полем скорости $V_x = at; V_y = -u\dfrac{y}{x}$ и полем температуры $T = T_0\left(1+\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\left(1+\dfrac{R^2}{x^2+y^2}\right)$, a, u, T_0, τ, $R=const$. Найти в момент времени $t=\tau$ скорость изменения температуры в индивидуальной частице, которая находится в точке пространства с координатами $x=\dfrac{u^2}{a}, y=2\dfrac{u^2}{a}$.

2.16. Для следующих простейших движений найти поля скорости и ускорений, уравнения линий тока, дивергенцию и завихренность поля, тензор скоростей деформаций.

2.16.1. Чистый сдвиг.

2.16.2. Квазитвердое вращение.

2.16.3. Потенциальный вихрь.

2.16.4. Источник (сток).

Ответы.

2.1.1. $x_1 = vt + a, x_2 = b, x_3 = c$

2.1.2. $x_1 = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t), x_2 = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t), x_3 = c$
$R = R_0, \varphi = \omega t + \varphi_0, z = z_0$

2.2.1. $v_i = \dfrac{da}{dt}\dfrac{x_i}{a}, a_i = \dfrac{d^2 a}{dt^2}\dfrac{x_i}{a}, i = 1,2,3$

2.2.2. $v_1 = \dfrac{db}{dt}x_2, v_2 = v_3 = 0, a_1 = \dfrac{d^2 b}{dt^2}x_2, a_2 = a_3 = 0$

2.2.3. $v_i = B_{ik}x_k, a_i = C_{ik}x_k, B = \dfrac{dA}{dt}A^{-1}, C = \dfrac{d^2 A}{dt^2}A^{-1}$

2.3.1. $V_x = u;\ V_y = 0;\ \mathrm{V}_z = 0$.

2.3.2. $\boxed{\qquad\qquad}$.

2.3.3. $V_x = 2\alpha yt; V_y = -2\alpha xt; \mathrm{V}_z = 0$.

2.3.4. $V_x = -R\alpha \cdot \sin(\alpha t); V_y = R\alpha \cdot \cos(\alpha t); \mathrm{V}_z = 2\omega t$.

2.4.1. $\begin{cases} x = [(a+b)\exp(st) + (a-b)\exp(-st)]/2 \\ y = [(a+b)\exp(st) - (a-b)\exp(-st)]/2 \\ z = c \end{cases}$.

2.4.2. $\begin{cases} x = \left(a + n/m^2\right)\exp(mt) - nt/m - n/m^2 \\ y = \left(b + l/k^2\right)\exp(-kt) + lt/k - l/k^2 \\ z = c \end{cases}$.

2.4.3. $x = a + \dfrac{s}{\alpha}\sin(\alpha t); y = b + \dfrac{s}{\alpha}[1 - \cos(\alpha t)]; z = c + st$.

2.4.4. $x = a\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right), y = b\left(1 + \dfrac{t^2}{\tau^2}\right), z = c\left(1 + \dfrac{t^3}{\tau^3}\right)$.

2.4.5. $x = \dfrac{ra}{r_0}, y = \dfrac{rb}{r_0}, z = c, r_0 = \sqrt{a^2 + b^2}, r = \sqrt{r_0^2 + \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^t Q(\tau)d\tau}$.

2.4.6. $x_i = \dfrac{Ra_i}{R_0}, R_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, R = \sqrt[3]{R_0^3 + \dfrac{3}{4\pi}\int\limits_0^t Q(\tau)d\tau}$.

2.5.1. $x = a \cdot \cos(\omega t + b); y = a \cdot \sin(\omega t + b); z = c; V_x = -\omega y; V_y = \omega x; \mathrm{V}_z = 0$.

2.5.2. $x = a \cdot \cos\left(\omega t^2 + b\right); y = a \cdot \sin\left(\omega t^2 + b\right); z = c; V_x = -2\omega yt; V_y = 2\omega xt; \mathrm{V}_z = 0$.

2.6.1. линии тока: $x^2 + y^2 = C_1^2; \mathrm{z} = \mathrm{C}_2 - bt/s \cdot \arcsin(y/C_1)$, траектории:
$x = x_0\cos(st) - y_0\sin(st); y = y_0\cos(st) + x_0\sin(st); z = z_0 + bt^2/2$.

2.6.2. линии тока: $x \cdot \cos(\alpha t) = y \cdot \sin(\alpha t) + C_1; \mathrm{z} = \mathrm{C}_2$, траектории:
$x = x_0 + a/\alpha[1 - \cos(\alpha t)]; y = y_0 + a/\alpha \cdot \sin(\alpha t); z = z_0$.

2.6.3. линии тока: $\varphi = C_1; \theta = \mathrm{C}_2$, траектории: $R^3 = R_0^3 + 1.5at^2; \varphi = \varphi_0; \theta = \theta_0$.

2.7.1. $\left(rot\left(\vec{V}\right)\right)_{\varphi} = \frac{V_0 n}{R_0}\left(1 - \frac{r}{R_0}\right)^{n-1}$

2.7.2. $\left(rot\left(\vec{V}\right)\right)_{\varphi} = \frac{2V_0 r}{R_0^2}$

2.8. $rot\left(\vec{V}\right) = 0; div\left(\vec{V}\right) = 0$.

2.9. $f(R) = C / R^2$.

2.10. $\left(rot\left(\vec{V}\right)\right)_X = ay; \left(rot\left(\vec{V}\right)\right)_Y = az; \left(rot\left(\vec{V}\right)\right)_Z = ax$.

2.11.1. $V_{KT} = a\begin{pmatrix} 1 + \delta y/2 \\ -\delta x/2 \end{pmatrix}; V_{DEF} = a\begin{pmatrix} \delta y/2 \\ \delta x/2 \end{pmatrix}$.

2.11.2. $V_{KT} = a\begin{pmatrix} -1 - \delta y \\ 1 + \delta x \end{pmatrix}; V_{DEF} = 0$.

2.11.3. $V_{KT} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; V_{DEF} = a\begin{pmatrix} \delta x/2 \\ -\delta y/2 \end{pmatrix}$.

2.12. $0.5\pi a$

2.13. $2a$

2.14. 0

2.15. $\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 \frac{2}{\tau}\left(1 + \frac{R^2 a^2}{5u^4}\right)$

2.16.1. $u = Uy/a, v = 0, a_x = a_y = 0, y = const$

$div\left(\vec{V}\right) = 0, rot\left(\vec{V}\right) = -\vec{k}\,U/a, S_{xy} = 0.5U/a, S_{xx} = S_{yy} = 0$

2.16.2. $u = -\omega y, v = \omega x, a_x = -\omega^2 x, a_y = -\omega^2 y, x^2 + y^2 = const$

$div\left(\vec{V}\right) = 0, rot\left(\vec{V}\right) = 2\omega\vec{k}, S_{xy} = S_{xx} = S_{yy} = 0$

2.16.3. $u = -cy/r^2, v = cx/r^2, a_x = -c^2 x/r^4, a_y = -c^2 y/r^4, x^2 + y^2 = const$

$div\left(\vec{V}\right) = 0, rot\left(\vec{V}\right) = 0, S_{xy} = c\left(y^2 - x^2\right)/r^4, S_{xx} = 2cxy/r^4, S_{yy} = -2cxy/r^4$

2.16.4. $u = cx/r^2, v = cy/r^2, a_x = c^2 x\left(y^2 - x^2\right)/r^4, a_y = -c^2 y\left(y^2 - x^2\right)/r^4, x/y = const$

$div\left(\vec{V}\right) = 0, rot\left(\vec{V}\right) = 0, S_{xy} = -2cxy/r^4, S_{xx} = c\left(y^2 - x^2\right)/r^4, S_{yy} = -c\left(y^2 - x^2\right)/r^4$

3. Сила давления жидкости (гидростатика).

Рассмотрим жидкость с распределением давления $p(\vec{r})$. В случае, если на жидкость действует только сила тяжести, давление в точке A выражается следующим образом: $p=p_0+\rho gh$, где p_0 - давление на поверхности жидкости, ρ – плотность жидкости, h – расстояние от точки A до поверхности жидкости. При этом ρgh называется избыточным давлением воды; $grad(p)=\rho\vec{g}$.

Определим силу, действующую со стороны жидкости на некую поверхность σ. Выделим на поверхности элементарную площадку $d\sigma$, внешнюю нормаль к которой обозначим $\vec{n}$. Тогда сила, действующая со стороны жидкости на эту площадку, будет равна $d\vec{F}=-p\vec{n}\cdot d\sigma$. Проинтегрировав по поверхности, получим $\vec{F}=\int\limits_{\sigma}d\vec{F}=-\int\limits_{\sigma}p\vec{n}\cdot d\sigma$. При этом поверхность σ может быть произвольной. Если же эта поверхность является замкнутой и ограничивает тело τ, то по теореме Остроградского-Гаусса можно записать $\vec{F}=-\int\limits_{\sigma}p\vec{n}\cdot d\sigma=-\int\limits_{\tau}grad(p)\cdot d\tau$. В случае жидкости, находящейся под воздействием только силы тяжести, легко получить закон Архимеда: $\vec{F}=-\int\limits_{\sigma}grad(p)\cdot d\tau=-\int\limits_{\tau}\rho\vec{g}\cdot d\tau=-\rho\vec{g}\cdot\int\limits_{\tau}d\tau=-\rho\vec{g}V=-\vec{G}$ (V – объем тела, $\vec{G}$ – вес жидкости, объем которой равен объему тела).

Далее определим точку приложения рассмотренной силы. Выберем некоторую произвольную точку A. Момент элементарной силы относительно точки A будет равен $d\vec{M}=\vec{r}\times d\vec{F}=-\vec{r}\times p\vec{n}\cdot d\sigma$. Момент силы давления жидкости на поверхность относительно точки A будет равен: $\vec{M}=\int\limits_{\sigma}d\vec{M}=-\int\limits_{\sigma}\vec{r}\times p\vec{n}\cdot d\sigma=\int\limits_{\sigma}\vec{n}\times p\vec{r}\cdot d\sigma$. Если поверхность σ ограничивает тело τ, то $\vec{M}=\int\limits_{\sigma}\vec{n}\times p\vec{r}\cdot d\sigma=\int\limits_{\tau}rot(p\vec{r})\cdot d\tau=-\int\limits_{\tau}\vec{r}\times grad(p)\cdot d\tau$. В случае жидкости находящейся под влиянием только силы тяжести, $\vec{M}=-\int\limits_{\tau}\vec{r}\times grad(p)\cdot d\tau=-\int\limits_{\tau}\vec{r}\times\rho\vec{g}\cdot d\tau=\frac{\rho g}{|\vec{F}|}\int\limits_{\tau}\vec{r}\times\vec{F}\cdot d\tau=\frac{\rho g}{|\vec{F}|}\int\limits_{\tau}\vec{r}\cdot d\tau\times\vec{F}=\vec{r}'\times\vec{F}$. Очевидно, что $\vec{r}'=\frac{\rho g}{|\vec{F}|}\int\limits_{\tau}\vec{r}\cdot d\tau$ – это расстояние от точки A до точки приложения силы давления жидкости на поверхность.

Заметим, что при решении задач удачный выбор точки A может заметно упростить вычисления. Кроме того, иногда удобно использовать относительную плотность $\gamma = \dfrac{\rho}{\rho_F}$, где ρ – плотность тела, а ρ_F – плотность жидкости.

Задача: Определить величину и точку приложения силы избыточного давления воды на плоскую вертикальную стенку прямоугольного вида с горизонтальной стороной a, вертикальной стороной b и центром на глубине b.

Решение: Для начала выберем систему координат. Пусть ось x направлена по поверхности жидкости параллельно верхней стороне прямоугольника, ось y направлена вниз и проходит через центр прямоугольника, ось z направлена перпендикулярно стенке внутрь жидкости. Пусть осям $x, y, z,$ соответствуют единичные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Момент силы будем отсчитывать от начала координат, которое расположено на поверхности жидкости над центром прямоугольника. Тогда:

$$\vec{n} = \vec{k};\ p = \rho g y$$

$$\vec{F} = -\int\limits_{\sigma} p\vec{n}\cdot d\sigma = -\rho g\vec{k}\int\limits_{\sigma} y\cdot d\sigma = -\rho g\vec{k}\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{b/2}^{3b/2} y\cdot dy = -\rho g a b^2\vec{k} = -\left|\vec{F}\right|\cdot\vec{k}$$

$$\vec{r}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}y - \vec{j}x$$

$$\vec{M} = -\int\limits_{\sigma} \vec{r}\times p\vec{n}\cdot d\sigma = -\rho g\int\limits_{\sigma}\left(\vec{i}y^2 - \vec{j}xy\right)\cdot d\sigma =$$

$$= -\rho g\vec{i}\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{b/2}^{3b/2} y^2\cdot dy + \rho g\vec{j}\int\limits_{-a/2}^{a/2} x\cdot dx \int\limits_{b/2}^{3b/2} y\cdot dy = -\frac{13}{12}\rho g a b^3\vec{i} = -\left|\vec{M}\right|\cdot\vec{i}$$

$$-\left|\vec{M}\right|\cdot\vec{i} = \vec{M} = \vec{r}_F\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_F & y_F & z_F \\ 0 & 0 & -\left|\vec{F}\right| \end{vmatrix} = -\left|\vec{F}\right|\cdot\left(\vec{i}y_F - \vec{j}x_F\right) \Rightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = \dfrac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{F}\right|} = \dfrac{13}{12}b \end{cases}$$

Задачи.

3.1. Определить величину и точку приложения силы, создаваемой избыточным давлением воды, на плоскую вертикальную стенку следующей формы:

3.1.1. круг радиуса R с центром на глубине $2R$;

3.1.2. равнобедренный треугольник высотой h с основанием a, которым он касается поверхности воды;

3.1.3. равнобедренная трапеция высотой h с верхним основанием a, касающимся поверхности воды, и нижним основанием b;

3.1.4. квадрат со стороной a и вертикальной диагональю, касающийся поверхности воды.

3.2. Вертикальная стенка высотой h из каменной кладки разделяет два отсека бассейна, уровень воды в которых равен h_1 и h_2 соответственно. Определить минимальную толщину стенки a, исходя из условия ее устойчивости против опрокидывания.

3.3. Прямоугольный щит разделяет два отсека бассейна, уровень воды в которых равен h_1 и h_2 соответственно. Щит может вращаться относительно шарнира в точке O. Со стороны меньшего уровня на дне установлен упор. На каком минимальном расстоянии h от дна следует установить шарнир, чтобы при превышении уровня h_2 щит открывался, а при понижении был закрыт.

3.4. Тонкая палочка шарнирно закреплена одним концом в точке O, расположенной над поверхностью воды. Найти плотность материала палочки, если при равновесии в воду погружена ее половина.

3.5. Сферический сосуд радиусом R заполнен водой. Определить силу избыточного давления воды на верхнюю половину шара.

3.6. На плоской вертикальной стенке сосуда с водой имеется выступ. Определить величину, направление и точку приложения силы избыточного давления воды на указанный выступ следующей формы:

3.6.1. куб с ребром a, касающийся поверхности воды одной из граней;

3.6.2. диск толщиной a радиусом R с центром на глубине $2R$;

3.6.3. диск толщиной a радиусом R, погруженный в воду наполовину;

3.6.4. вертикальный полуцилиндр радиусом R высотой h, касающийся поверхности воды;

3.6.5. горизонтальный полуцилиндр радиусом R высотой h, касающийся поверхности воды;

3.6.6. полусфера радиусом R с центром на глубине $2R$;

3.6.7. полусфера радиусом R с центром на поверхности.

3.7. В дне бака, заполненного водой, имеется отверстие радиусом R, закрытое шаром того же радиуса. Определить силу, действующую на шар, если уровень воды в баке $h>R$.
3.8. В горизонтальном дне первоначально пустого сосуда имеется отверстие радиусом r, закрытое шаром радиусом $R>r$. Сосуд медленно заполняется водой. Какова должна быть плотность материала шара, чтобы он не всплыл.
3.9. В горизонтальном дне сосуда с водой имеется отверстие радиусом R, закрытое легким шаром радиусом $2R$. При каком уровне воды шар не будет всплывать (шар полностью закрыт водой).
3.10. Отверстие в дне бака с водой закрыто коническим клапаном высотой h, изготовленным из латуни. Определить силу, необходимую для подъема клапана, если уровень воды в баке равен $5h$, диаметр основания конуса $D=2h/5$, а диаметр отверстия $d=2D/3$.
3.11. Определить величину и направление силы, действующей на боковую поверхность конуса высотой h с радиусом основания R, погруженного в воду. Центр основания находится на глубине H, а ось конуса наклонена под углом α к вертикали.

Ответы.

3.1. Система координат выбрана так, что ось x направлена по линии пересечения плоскостей поверхности воды и стенки, ось y направлена вертикально вниз, ось z направлена перпендикулярно стенке внутрь. Осям $x,y,z,$ соответствуют единичные орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

3.1.1. $\vec{F} = -2\pi\rho g R^3 \vec{k};\; x_F = 0;\; y_F = {}^9\!/_8\, R$ (начало координат на поверхности над центром круга).

3.1.2. $\vec{F} = -{}^1\!/_6\, \rho g a h^2 \vec{k};\; x_F = 0;\; y_F = {}^1\!/_2\, h$ (начало координат на поверхности в середине стороны).

3.1.3. $\vec{F} = -{}^1\!/_6\, \rho g (2a+b) h^2 \vec{k};\; x_F = 0;\; y_F = {}^{(a+3b)}\!/_{2(a+2b)} \cdot h$ (начало координат на поверхности в середине верхнего основания).

3.1.4. $\vec{F} = -{}^{\sqrt{2}}\!/_2\, \rho g a^3 \vec{k};\; x_F = 0;\; y_F = {}^{7\sqrt{2}}\!/_{12}\, a$ (начало координат на поверхности в вершине квадрата).

3.2. $a = \sqrt{\dfrac{\rho_B}{3\rho_K}\dfrac{\left|h_1^3 - h_2^3\right|}{h}}$

3.3. $h = \dfrac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3(h_1 + h_2)}$

3.4. γ=0,75

3.5. $\pi\rho g R^3/3$

3.6. Система координат выбрана так, что ось x направлена по линии пересечения плоскостей поверхности воды и стенки, ось y направлена вертикально вниз, ось z направлена перпендикулярно стенке внутрь. Осям $x,y,z,$ соответствуют единичные орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. C - произвольная константа.

3.6.1. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g a^3 \\ \rho g a^3/2 \end{pmatrix};\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a/3 + 2C \\ -a/2 - C \end{pmatrix}$

3.6.2. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \pi a R^2 \\ 2\rho g \pi R^3 \end{pmatrix};\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17R/8 + Ca \\ -a/2 - 2CR \end{pmatrix}$

3.6.3. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \pi a R^2/2 \\ 2\rho g \pi R^3/3 \end{pmatrix};\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\pi R/16 + Ca/2 \\ -a/2 - 2R/3 \end{pmatrix}$

3.6.4. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \pi h R^2/2 \\ \rho g R h^2 \end{pmatrix};\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2h/3 + C\pi R/2 \\ -4R/3\pi - Ch \end{pmatrix}$

3.6.5. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \pi h R^2/2 \\ 2\rho g h R^2 \end{pmatrix}; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(1+\pi C/2) \\ -2RC \end{pmatrix}$

3.6.6. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\rho g \pi R^3/3 \\ 2\rho g \pi R^3 \end{pmatrix}; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(1+C) \\ -3RC \end{pmatrix}$

3.6.7. $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \pi R^3/3 \\ 2\rho g \pi R^3/3 \end{pmatrix}; \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ RC \\ -2RC \end{pmatrix}$

3.7. $\pi \rho g R^2 (2R/3 + h)$

3.8. $\gamma > \left(1 - (r/R)^2\right)^{3/2}$

3.9. $h > R\left(3\sqrt{3} - 13/3 - \gamma\right)$

3.10. $F = \dfrac{\rho_F g \pi R^2 h}{3}\left(\gamma - 1 + \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\left(3\dfrac{H}{h} + \dfrac{r}{R}\right)\right) = \left\{\begin{matrix} R = h/5 \\ r = 2R/3 \\ 5h \end{matrix}\right\} = \rho_F g \pi h^3 \dfrac{1}{75}\left(\gamma + \dfrac{289}{8}\right)$

4. Плавучесть и остойчивость.

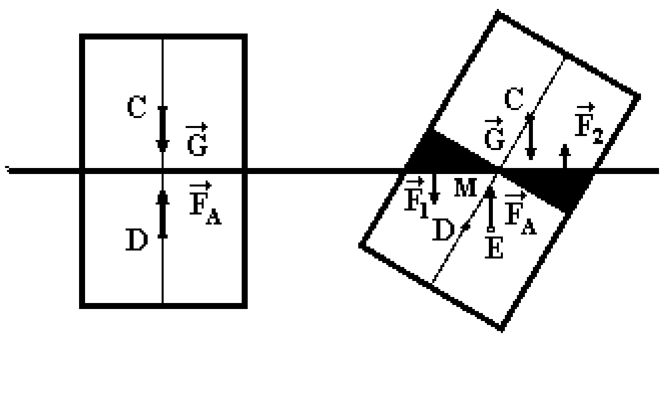
В данном разделе рассмотрен один из аспектов теории плавания – проблема устойчивости равновесного положения в жидкости (воде). Будем рассматривать этот вопрос с точки зрения гидростатики. Различают два вида устойчивости: к вертикальным перемещениям (**плавучесть**) и к угловым колебаниям вокруг горизонтальной оси (**остойчивость**). Вообще говоря, условия устойчивости при плавании по поверхности воды и под водой различны.

Вопрос плавучести тела на поверхности воды решается просто: для плавучести тела необходимо, чтобы при малом погружении тела относительно положения равновесия выталкивающая сила превышала силу тяжести. Для твердых тел это равносильно тому, что средняя плотность тела должна быть меньше плотности воды.

Проблему плавучести под водой можно проиллюстрировать одним примером. Рассмотрим батискаф, который открыт снизу и заполнен воздухом. При погружении давление увеличивается, воздух сжимается и, следовательно, объем воздуха уменьшается. Это приводит к уменьшению выталкивающей силы. Можно показать (задача 4.1), что существует критическая глубина, ниже которой сила тяжести превышает выталкивающую силу.

При плавании тела под водой условие остойчивости можно сформулировать следующим образом: равновесное положение устойчиво, если центр тяжести тела лежит ниже центра тяжести вытесненного объема (он называется центром давления). При совпадении центра тяжести и центра давления (например, для тел постоянной плотности) положение равновесия является безразличным.

Обратимся к задаче остойчивости тела, плавающего по поверхности воды. Итак, пусть по поверхности воды плотностью ρ плавает вертикальный цилиндр радиусом R и весом G. Глубина погружения равна $H = G/\rho S, S = \pi R^2$ (предполагается, что высота цилиндра h>H). Также очевидно, что выталкивающая архимедова сила равна весу тела $\vec{F}_A = \vec{G}$.



Пусть центр тяжести цилиндра расположен в точке C, а центр давления в точке D (см. рис). При этом сила тяжести и выталкивающая сила направлены по оси цилиндра в противоположные стороны и равны по модулю, поэтому суммарный момент этих сил равен нулю и это положение является положением равновесия.

Отклоним цилиндр от вертикального положения на малый угол α. Это приведет к тому, что один из закрашенных треугольников погрузится в воду, а второй поднимется из воды и, следовательно, центр давления переместится из точки D в точку E. При этом, вообще говоря, упоминавшиеся силы не лежат на одной прямой, что приводит к появлению момента M. Влияние этого момента может привести к возврату цилиндра в вертикальное положение, а может привести к дальнейшему опрокидыванию цилиндра. В первом случае положение равновесия является **устойчивым**, а во втором – нет.

Другими словами, если точка пересечения выталкивающей силы с осью цилиндра M находится выше, чем точка C, то положение равновесия устойчиво. С учетом малости угла α момент, создаваемый силой F_1 относительно оси вращения равен

$$M_1 = \int_{S_1} \rho \cdot (x \cdot \mathrm{tg}(\alpha)) \cdot (x \cdot \cos(\alpha)) dS = \rho\alpha \int_{S_1} x^2 dS .$$

Аналогично: $M_2 = \rho\alpha \int_{S_2} x^2 dS$.

Суммарный момент равен $M = M_1 + M_2 = \rho\alpha \int_S x^2 dS = \rho\alpha J_0$, где $J_0 = \int_S x^2 dS$ – момент инерции площади ватерлинии относительно оси качания. Уравнение сохранения момента относительно точки M (эта точка называется метацентром) запишется при этом следующим образом:

$$M - F_A \cdot (M, D) \cdot \sin(\alpha) = 0, F_A = G = \rho SH = \rho V_p ,$$ где V_p – водоизмещение.

Из этого соотношения легко определить расстояние между точками M и D, которое называется метацентрическим радиусом: $R_m = (M, D) = J_0 / V$.

Таким образом, положение равновесия устойчиво, если метацентрическая высота $h_m = R_m - (C, D)$ положительна. Если метацентрическая высота равна нулю, то устойчивость определяется нелинейными членами. При наличии осевой симметрии (шар, горизонтальный цилиндр) равновесие будет безразличным.

Для произвольного тела вопрос остойчивости может зависеть от выбора оси, относительно которой происходит начальное возмущение, т. к. значение момента инерции площади ватерлинии относительно оси качания J_0 зависит от выбора оси. Так, например, поставленная на ребро длинная деревянная доска будет опрокидываться только вокруг одной оси, параллельной длинной грани доски.

Задачи.

4.1. Определить критическую глубину для батискафа весом G и объемом V в предположении изотермичности. Считать, что на поверхности весь объем батискафа заполнен воздухом при атмосферном давлении.

4.2. Однородный куб плотностью ρ может поворачиваться вокруг своего ребра, находящегося на поверхности воды. Определить положение равновесия куба.

4.3. Найти глубину погружения и исследовать устойчивость найденного положения равновесия для плавающего в воде однородного тела плотности ρ, имеющего следующую форму:

4.3.1. длинный брус, имеющий в сечении квадрат со стороной a и вертикальной диагональю;

4.3.2. длинный брус, имеющий в сечении квадрат со стороной a и горизонтальной гранью;

4.3.3. куб с ребром a, одна из граней которого горизонтальна;

4.3.4. прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, c, одна из граней которого параллельна поверхности воды;

4.3.5. пирамида высотой h, имеющая в основании квадрат со стороной a и установленная вершиной вверх;

4.3.6. пирамида высотой h, имеющая в основании квадрат со стороной a и установленная вершиной вниз;

4.3.7. конус высотой h с радиусом основания R, который установлен вершиной вверх;

4.3.8. конус высотой h с радиусом основания R, который установлен вершиной вниз;

4.3.9. цилиндр радиусом R длиной $2R$ с горизонтальной образующей;

4.3.10. шар радиусом R.

4.4. Считая, что айсберг является однородным вертикальным цилиндром радиусом R, определить его максимальную высоту над уровнем воды.

4.5. По поверхности воды плавает легкий диск радиусом R высотой h. Какой груз можно положить в центре верхней грани диска без нарушения его остойчивости?

4.6. По поверхности воды плавает легкий вертикальный конус с радиусом основания R и высотой h. На какую глубину можно погрузить конус в воду без опрокидывания, нажимая на его вершину?

4.7. Тонкостенный вертикальный цилиндр радиусом R имеет вес G и заполнен водой до высоты h. На каком расстоянии от дна цилиндра должен находиться его центр тяжести, чтобы данное положение было устойчивым при плавании по поверхности воды? Как изменятся условия устойчивости, если вода внутри цилиндра замерзнет (без изменения плотности)?

Ответы.

4.1. $H = p_a\left(\frac{V}{G} - \frac{1}{\rho g}\right)$

4.2. Угол между нижней гранью и поверхностью

$$\alpha = \begin{cases} arctg(2\gamma), & \gamma < 1/2 \\ arctg(2(1-\gamma)), & 1/2 \le \gamma < 1 \\ 3\pi/4, & 1 < \gamma \end{cases}$$

4.3.1. $\begin{cases} h = \sqrt{\gamma}a, h_m = a\left(\frac{4}{3}\sqrt{\gamma} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \gamma < 0.5 \\ h = a\left(\sqrt{2} - \sqrt{1-\gamma}\right), h_m = a\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\gamma} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \gamma \ge 1/2 \end{cases}$

4.3.2. $h = \gamma a,\ h_m = a(\gamma - 1 + 1/6\gamma)/2$

4.3.3. $h = \gamma a,\ h_m = a(\gamma - 1 + 1/6\gamma)/2$

4.3.4. Пусть ребро b вертикально. $h = \gamma b, h_m = \frac{b}{2}\left(\gamma - 1 + \frac{1}{6\gamma}\left(\frac{\min(a,c)}{b}\right)^2\right)$

4.3.5. $h = H\left(1 - \sqrt[3]{1-\gamma}\right), h_m = {}^{3H}\!/_{4}\left(\left(a\left(1-\sqrt[3]{1-\gamma}\right)^2/H\right)^2\Big/\gamma - \left(1-(1-\gamma)^{4/3}\right)/\gamma + 1\right)$

4.3.6. $h = H\sqrt[3]{\gamma}, h_m = H/4 \cdot \left(3\left(\sqrt[3]{\gamma} - 1\right) + (a/H)^2\sqrt[3]{\gamma}\right)$

4.3.7. $h = H\left(1 - \sqrt[3]{1-\gamma}\right), h_m = {}^{3H}\!/_{4}\left(\left(R\left(1-\sqrt[3]{1-\gamma}\right)^2/H\right)^2\Big/\gamma - \left(1-(1-\gamma)^{4/3}\right)/\gamma + 1\right)$

4.3.8. $h = H\sqrt[3]{\gamma}, h_m = {}^{3H}\!/_{4}\left(\sqrt[3]{\gamma} - 1 + (R/H)^2\sqrt[3]{\gamma}\right)$

4.3.9. $h = R(1 - \cos(0.5\alpha)), \alpha - \sin\alpha - 2\pi\gamma = 0, h_m = 0$

4.3.10. $h = R\alpha, \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\gamma = 0, h_m = 0$

4.4. $h = R\sqrt{(1-\gamma)/2\gamma}$

4.5. $m < \pi\rho R^2\left(h - \sqrt{\max\left(h^2 - R^2/2, 0\right)}\right)$

4.6. $F < \frac{\pi\rho g R^2 h}{3}\left(1 - \left(\frac{h^2}{R^2 + h^2}\right)^{3/4}\right)$

4.7. $x < h + \frac{G}{2\pi\rho g R^2}, x < h + \frac{G}{2\pi\rho g R^2} + \frac{\pi\rho g R^4}{2G}$

5. Равновесие жидкости в поле объемных сил.

Рассмотрим уравнение движения жидкости в поле объемных сил:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+Div\left(\overline{\overline{P}}\right). \qquad (1.1)$$

В силу того, что жидкость неподвижна ($\vec{V}=0$) и находится в равновесии ($\overline{\overline{P}}=-p\overline{\overline{E}}$) из уравнения (1.1) можно получить основное уравнение гидростатики, которое иногда называют уравнением Эйлера:

$$\rho\vec{F}=grad\left(p\right). \qquad (1.2)$$

Из уравнения (1.2) можно получить необходимое условие для силы, в поле которой возможно равновесие:

$$\vec{F}\bullet rot\left(\vec{F}\right)=0. \qquad (1.3)$$

Среди сил, удовлетворяющих условию (1.3), наиболее часто встречаются так называемые потенциальные силы, для которых:

$$\vec{F}=-grad\left(\Pi\right). \qquad (1.4)$$

В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такими силами, хотя условие (1.3) выполняется и в других случаях (например, для любого плоского поля сил). Можно показать, что в поле действия потенциальных сил равновесие жидкости возможно тогда и только тогда, когда изобары (p=const) совпадают с изостерами (ρ=const). Из этого следует, что в случае равновесия граница раздела жидкостей различной плотности соответствует изобарам.

В дальнейшем будем рассматривать две группы задач. В задачах первой группы необходимо найти распределение параметров в атмосфере при тех или иных предположениях. В задачах второй группы рассматривается равновесие жидкости в неинерциальных системах отсчета (например, равновесие жидкости во вращающемся сосуде). Ниже рассмотрены примеры задач каждого класса.

Задача: определить форму свободной поверхности и распределение давления в объеме V несжимаемой жидкости, тяготеющей к неподвижному центру с силой, пропорциональной удалению от центра. Оценить давление в центре Земли, считая ее несжимаемой жидкостью ($R=6{,}4\cdot10^6$ м., $\rho=5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3).

Решение: перейдем в сферическую систему координат.

$$\vec{F}=-a\vec{r},\rho\vec{F}=grad\left(p\right)\Rightarrow\begin{cases}\partial p/\partial r=-\rho ar\\ \partial p/\partial\varphi=0\\ \partial p/\partial\theta=0\end{cases}\Rightarrow p=-\rho ar^2/2+C$$

Очевидно, что изобары в этом случае являются сферами с центром в начале координат и, соответственно, форма свободной поверхности также будет сферической. Перейдем к оценке давления в центре Земли (все вычисления проводятся в системе единиц СИ).

$$\begin{cases} F\big|_{r=R} = g \\ p\big|_{r=R} = p_A = 10^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = g/R \\ C = p_A + 0.5\rho a R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_C = C = 10^5 + 0{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \approx 1{,}725 \cdot 10^{11}$$

Таким образом, давление в центре Земли равно $1{,}725 \cdot 10^6$ атмосфер.

Задача: определить форму свободной поверхности жидкости, совершающей квазитвердое вращение вместе с сосудом с угловой скоростью ω.

Решение: перейдем в систему координат, связанную с вращающейся жидкостью. При переходе в неинерциальную систему координат появится центробежная сила. В цилиндрической системе координат можно записать: $\vec{F} = g \cdot \vec{e}_z + \omega^2 r \cdot \vec{e}_r$.

Из уравнения Эйлера следует, что $\partial p/\partial z = -\rho g, \partial p/\partial z = \rho\omega^2 r, \partial p/\partial \varphi = 0$. Следовательно $p = \rho\omega^2 r^2/2 - \rho g z + p_0$. Из постоянства давления на свободной поверхности будем иметь следующую форму свободной поверхности: $z = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0$. При этом константа z_0 определяется и дополнительных условий.

Задачи.

5.1. Найти распределение давления в политропной атмосфере сферической планеты, пренебрегая влиянием массы атмосферы на закон тяготения. Определить высоту атмосферы, если все условия на поверхности планеты известны. Оценить высоту и массу атмосферы Земли, принимая показатель адиабаты равным 1,4.

5.2. Найти распределение давления в изотермической атмосфере, пренебрегая кривизной поверхности и изменением силы тяжести с высотой. Оценить массу атмосферы Земли.

5.3. Изотермический совершенный газ притягивается к неподвижному центру с силой, пропорциональной удавлению от центра. Найти распределение давления, если известны условия в центре притяжения.

5.4. Найти распределение давления и плотности в так называемой стандартной атмосфере Земли, состоящей из двух слоев совершенного газа: нижнего слоя, в котором температура убывает по линейному закону (тропосфера), и верхнего слоя, в котором температура постоянна (стратосфера). Изменением силы тяжести с высотой пренебречь.

5.5. Определить форму свободной поверхности тяжелой несжимаемой жидкости, совершающей квазитвердое движение вместе с сосудом, который:

5.5.1. движется по горизонтальной плоскости со скоростью V;

5.5.2. движется по горизонтальной плоскости с ускорением a;

5.5.3. скользит без трения по наклонной плоскости;

5.5.4. вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω.

5.6. Высокий вертикальный цилиндрический сосуд радиусом R с жидкостью вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω.

Найти форму свободной поверхности, распределения давления в жидкости и силу давления на дно сосуда, если в отсутствие вращения уровень жидкости в сосуде равен h.

5.7. Вертикальный цилиндр радиусом R и высотой h заполнен до половины водой. С какой предельной скоростью можно вращать цилиндр вокруг его оси, чтобы вода не выливалась?

5.8. Закрытый вертикальный цилиндр радиусом R и высотой h заполнен водой на 3/4 своего объема. С какой скоростью должен вращаться цилиндр вокруг своей оси, чтобы свободная поверхность коснулась дна.

5.9. Открытый сосуд с вертикальной осью симметрии до краев наполнен несжимаемой жидкостью. Сосуд начинает вращаться вокруг своей оси так, что в каждый момент времени жидкость покоится относительно стенок сосуда (часть жидкости при этом выливается). Определить при какой скорости вращения свободная поверхность коснется дна сосуда и найти отвечающую этому режиму силу избыточного давления жидкости на дно. Сосуд имеет следующую форму:

5.9.1. цилиндр радиусом R и высотой h;

5.9.2. куб с ребром a;

5.9.3. куб с ребром a, который вращается относительно одного из ребер;

5.9.4. усеченный конус высотой h, с радиусом нижнего основания R и радиусом верхнего основания $2R$;

5.9.5. усеченный конус высотой h, с радиусом нижнего основания $2R$ и радиусом верхнего основания R;

Ответы.

При оценке массы атмосферы принимается во внимание ее малая толщина по сравнению с радиусом Земли.

5.1. $p = p_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0 g R_0}{p_0}\frac{h}{R_0+h}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, H = R_0\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0 g R_0}{p_0}-1\right]^{-1}$

$p_0 = 10^5, \rho_0 = 1{,}3, R_0 = 6{,}4\cdot 10^6, \gamma = 1{,}4 \Rightarrow H \approx 27{,}6\cdot 10^3, m \approx 5{,}25\cdot 10^{18}$

5.2. $p = p_0\cdot\exp[-(\rho_0 g/p_0)h], m \approx 5{,}25\cdot 10^{18}$

5.3. $\vec{F} = -a\vec{r}, p = p_0\cdot\exp\left[-(\rho_0 a/p_0)r^2/2\right]$

5.4. Тропосфера ($0<h<H_1$):

$$\begin{cases} T = T_0\left(1+(T_1/T_0-1)h/H_1\right), \\ \rho = \rho_0\left(1+(T_1/T_0-1)h/H_1\right)^{\frac{-T_0}{T_1-T_0}\frac{H_1}{H_*}-1}, H_* = p_0/\rho_0 g, \\ p = p_0\left(1+(T_1/T_0-1)h/H_1\right)^{\frac{-T_0}{T_1-T_0}\frac{H_1}{H_*}}, \end{cases}$$

стратосфера ($H_1<h$):

$$\begin{cases} p = p_1\cdot\exp\left(-(h-H_1)\rho_1 g/p_1\right), \\ \rho = \rho_1\cdot\exp\left(-(h-H_1)\rho_1 g/p_1\right). \end{cases}$$

5.5. Система координат выбрана так, что ось x параллельна земле, ось y – направлена по поверхности. При этом центр системы координат находится на поверхности жидкости.

5.5.1. $y=0$.

5.5.2. $gx+ay=0$.

5.5.3. $y=0$;

5.5.4. $z = \omega^2 r^3/(2g)$.

5.6. $z = h+\frac{\omega^2}{2g}\left(r^2-\frac{R^2}{2}\right), p = p_A+\rho g(h-z)+\frac{\rho\omega^2}{2}\left(r^2-\frac{R^2}{2}\right), F = \rho g\pi R^2 h$.

5.7. $\omega = \sqrt{2gh}/R$.

5.8. $\omega = 2\sqrt{gh}/R$.

5.9. Центр системы координат находится на дне сосуда.

5.9.1. $\omega = \sqrt{2gh}/R, F = 0.5\rho g\pi R^2 h$.

5.9.2. $\omega = 2\sqrt{g/a}, F = \rho g a^2/3$.

5.9.3. $\omega = \sqrt{g/a}, F = \rho g a^2/3$.

5.9.4. $\omega = \sqrt{2gh}/R, F = 8\rho g \pi R^2 h$.

5.9.5. $\omega = \sqrt{gh/2}/R, F = \rho g \pi R^2 h/8$.