

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

**Приоритетный национальный проект «Образование»  
Национальный исследовательский университет**

***В. Н. ШАШИХИН***

# **ХАОС И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

## **РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки «Системный анализ  
и управление»*

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2010

УДК 519.8  
ББК 22.161  
Ш

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
Санкт-Петербургского государственного технологического  
института *В. А. Холоднов*  
Доктор технических наук, профессор  
Санкт-Петербургского государственного политехнического  
университета *В. П. Шкодырев*

*Шашихин В. Н.* **Хаос и нелинейная динамика. Регулярная и хаотическая динамика:** учеб. пособие / В.Н. Шашихин. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 210 с.

ISBN 978-5-7422-1845-6

Приводятся методы анализа нелинейных систем с регулярной и хаотической динамикой. Представлена иерархия свойств динамических систем, вызывающих режим детерминированного хаоса. Рассмотрены численные методы расчета характеристических показателей Ляпунова и энтропии динамических систем, фрактальной размерности странных аттракторов.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Системный анализ и управление» и смежным направлениям при изучении дисциплины «Хаос и нелинейная динамика». Пособие может быть полезно для специалистов в области проектирования информационных систем, инженерно-технических работников и аспирантов.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-1845-6

© Шашихин В.Н., 2010  
© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	7
1. Модели нелинейных динамических систем .....	10
1.1. Потoki .....	10
1.2. Каскады .....	13
1.3. Связь уравнения движения и отображения .....	15
1.3.1. Непрерывное время .....	15
1.3.2. Дискретное время .....	16
1.4. Уравнения в вариациях .....	17
1.5. Диссипативные и консервативные системы .....	18
2. Регулярная динамика .....	20
2.1. Особые точки .....	20
2.1.1. Основные определения .....	20
2.1.2. Классификация особых точек линейных векторных полей .....	21
2.1.3. Классификация особых точек нелинейных векторных полей .....	23
2.1.4. Особые точки каскада .....	29
2.2. Периодические решения .....	31
2.2.1. Переход к системе с постоянными коэффициентами .....	31
2.2.2. Линеаризация уравнений с периодическим решением .....	34
2.2.3. Построение сечения Пуанкаре .....	35
2.2.4. Периодические решения (циклы) каскадов .....	37
2.3. Инвариантные, предельные и притягивающие множества .....	38
2.3.1. Инвариантные множества (многообразия) .....	38
2.3.2. Предельные множества .....	41
2.3.3. Притягивающие множества .....	42
2.3.4. Аттрактор .....	43
2.3.5. Поглощающее множество .....	45
2.4. Устойчивость .....	48
2.4.1. Понятие устойчивости .....	48

2.4.2. Устойчивость по Ляпунову .....	50
2.4.3. Устойчивость по Пуассону .....	57
2.4.4. Структурная устойчивость .....	58
3. Хаотическая динамика .....	62
3.1. Признаки хаотического поведения .....	62
3.1.1. Существенная зависимость от начальных данных ....	63
3.1.2. Инвариантная мера .....	64
3.1.3. Эргодичность и перемешивание .....	65
3.1.4. Энтропия .....	67
3.1.5. Автокорреляционная функция .....	68
3.1.6. Фрактальная структура странных аттракторов .....	69
3.2. Характеристические показатели Ляпунова .....	70
3.2.1. Непрерывные динамические системы .....	71
3.2.2. Дискретные динамические системы .....	77
3.2.3. Характеристические показатели и изменение фазового объема .....	81
3.2.4. Свойства характеристических показателей Ляпунова .....	84
3.3. Инвариантные меры динамических систем .....	87
3.3.1. Типы вероятностных мер .....	87
3.3.2. Инвариантная мера. Оператор Перрона–Фробениуса .....	91
3.3.3. Эргодическая мера .....	97
3.3.4. Физическая мера .....	100
3.3.5. Устойчивость и сходимости мер .....	102
3.4. Эргодичность и перемешивание .....	103
3.4.1. Эргодичность .....	103
3.4.2. Перемешивание .....	106
3.4.3. Перекладывание .....	109
3.5. Энтропия .....	110
3.5.1. Метрическая энтропия (энтропия Колмогорова–Синяя) .....	111

3.5.2. Энтропия каскада .....	113
3.5.3. Обобщенная энтропия (энтропия Реньи) .....	114
3.5.4. Топологическая энтропия .....	114
3.5.5. Связь энтропии с характеристическими показателями Ляпунова .....	115
3.5.6. Время предсказания .....	116
3.6. Автокорреляционная функция и спектральная плотность ..	118
3.6.1. Автокорреляционная функция .....	118
3.6.2. Спектральная плотность .....	120
3.6.3. Связь автокорреляционной функции и спектра .....	121
3.7. Фрактальные структуры и размерность аттрактора .....	123
3.7.1. Фракталы .....	123
3.7.2. Геометрические размерности .....	128
3.7.3. Вероятностные размерности .....	139
3.7.4. Динамические размерности .....	144
3.7.5. Странные аттракторы .....	145
3.8. Определение хаотического отображения .....	154
4. Вычислительные методы нелинейной динамики .....	157
4.1. Методы решения дифференциальных уравнений .....	157
4.1.1. Решение задачи Коши для автономной системы ....	157
4.1.2. Некорректность численных методов решения систем дифференциальных уравнений .....	158
4.2. Построение отображения Пуанкаре .....	160
4.3. Спектр характеристических показателей Ляпунова .....	162
4.3.1. Вычисление спектра по уравнениям динамической системы .....	163
4.3.2. Вычисление спектра по временному ряду .....	167
4.4. Численное исследование мер .....	173
4.5. Расчет размерности аттрактора .....	174
4.5.1. Определение емкости .....	174
4.5.2. Вычисление вероятностных размерностей .....	176
4.6. Корреляционный интеграл .....	177

4.7. Оценка энтропии .....	179
5. Управление хаотической динамикой .....	185
5.1. Задача управления .....	185
5.1.1. Постановка задачи .....	185
5.1.2. Методы управления .....	188
5.2. Задача идентификации .....	195
5.2.1. Постановка задачи .....	196
5.2.2. Реконструкция аттрактора. Теорема Такенса .....	197
5.2.3. Выбор параметров реконструкции .....	200
5.3. Задача прогноза .....	204
5.3.1. Предсказание временных рядов .....	204
5.3.2. Локальные методы .....	205
5.3.3. Глобальные методы .....	207
Библиографический список .....	210

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие разработано в рамках создания учебно-методического комплекса дисциплины «Хаос и нелинейная динамика», для подготовки магистров по направлению «Системный анализ и управление» в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом.

Учебное пособие направлено на достижение следующих целей, стоящих перед данной дисциплиной: освоение основных методов нелинейной динамики; развитие способностей к анализу и синтезу нелинейных систем с регулярной и нерегулярной динамикой; приобретение навыков использования основных свойств систем с хаотической динамикой для обработки информации в управлении, сжатии цифровых сигналов и криптографии.

Изучение материала учебного пособия ставит перед собой следующие задачи:

- освоение основных принципов моделирования нелинейных систем с регулярной и хаотичной динамикой;
- изучение конструктивных методов анализа устойчивости особых точек, циклов и аттракторов нелинейных систем;
- ознакомление с адекватными критериями возникновения хаотических движений в нелинейных системах;
- освоение методов синтеза регуляторов для решения задач управления нелинейными системами с нерегулярной динамикой;
- приобретение знаний по методам сжатия и кодирования информации с использованием нелинейных хаотических отображений.

Учебное пособие по дисциплине «Хаос и нелинейная динамика» решает воспитательные, развивающие и мировоззренческие задачи. В процессе изучения дисциплины формируются общекультурные компетенции:

- способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности;
- способность применять в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности;

– способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны,

а также профессиональные компетенции:

– способность вскрыть математическую, естественнонаучную и техническую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, провести их качественно-количественный анализ;

– способность анализировать, синтезировать и критически резюмировать информацию;

– способность оформить, представить и доложить результаты выполненной работы;

– способность разрабатывать практические рекомендации по использованию результатов научных исследований;

– способность применять перспективные методы системного анализа и принимать решения для исследования функциональных задач на основе мировых тенденций развития системного анализа, управления и информационных технологий;

– способность выбирать методы и разрабатывать алгоритмы решения задач управления сложными многомерными объектами управления.

Учебное пособие предназначено для реализации рабочей программы учебной дисциплины «Хаос и нелинейная динамика», разработанной в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению «Системный анализ и управление» (магистры, профессиональный цикл, вариативная часть). Разделы учебного пособия соответствуют дидактическим единицам учебной программы.

Учебная дисциплина «Хаос и нелинейная динамика» относится к вариативной части профессионального цикла. Для освоения данной учебной дисциплины требуется изучение дисциплин: «Математика», «Вычислительная математика», «Теория управления», «Функциональный анализ». Данная учебная дисциплина завершает подготовку

в магистратуре и необходима для адаптации в первичной должности и дальнейшего карьерного роста специалистов.

В последние годы нелинейная динамика вызывает большой интерес у широкого круга специалистов, работающих в самых разнообразных областях информационных технологий. Модели нелинейной динамики, в первую очередь, привлекают внимание разработчиков систем сжатия цифровых изображений и криптосистем на основе блочных шифров. Однако в учебной литературе эти сведения либо кратко упоминаются, либо отсутствуют вообще.

В учебном пособии рассматриваются методы исследования регулярных и хаотичных режимов нелинейных динамических систем и их взаимосвязь с фрактальными методами сжатия цифровой информации и шифрованием сообщений на основе хаотичных отображений с перемешивающими и рассеивающими свойствами.

Основное содержание первых четырех разделов направлено на знакомство студента с моделями и методами нелинейной динамики. Представлены модели непрерывных и дискретных динамических систем в виде тройки, состоящей из расширенного фазового пространства и однопараметрической группы (полугруппы) его преобразований. Приводятся методы исследования регулярных движений (особых точек, циклов, траекторий со счетным числом точек) на основе теоремы Грофмана–Хатмана о топологической эквивалентности непрерывного дифференцируемого векторного поля с гиперболической особой точкой.

Далее рассматриваются методы исследования устойчивости по Ляпунову и Пуассону, структурной устойчивости. Проанализированы признаки и критерии возникновения режима детерминированного хаоса в нелинейных системах (характеристические показатели Ляпунова, энтропия, инвариантная мера и свойства эргодичности и перемешивания), которые используются в новых технологиях обработки информации. Приведены численные методы расчета указанных характеристик.

# 1. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы нелинейной динамики используют модели, построенные на основе дифференциальных уравнений и дискретных отображений.

## 1.1. ПОТОКИ

Рассмотрим вещественное конечномерное линейное пространство  $\mathbf{R}^n$ . Векторным полем  $F$ , заданным в области  $P$  пространства  $\mathbf{R}^n$ , будем называть отображение, которое каждой точке  $x \in P$  ставит в соответствие приложенный к ней вектор  $F$  пространства  $\mathbf{R}^n$ .

Системой дифференциальных уравнений, соответствующей векторному полю  $F$ , называется система

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in P \subset \mathbf{R}^n, \quad (1.1)$$

где точка над буквой означает дифференцирование по  $t$ . Область  $P$  называется фазовым пространством системы, а прямое произведение  $I \times P$  – расширенным фазовым пространством. Здесь  $I$  – интервал вещественной оси времени  $t$ .

Система (1.1) называется автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Неавтономной называется система, правая часть которой зависит от времени  $t$ :

$$\dot{x} = F(t, x), \quad t \in I \subset \mathbf{R}, \quad x \in P \subset \mathbf{R}^n. \quad (1.2)$$

Семейством обыкновенных дифференциальных уравнений называется множество систем вида

$$\dot{x} = F(t, x, \mu), \quad t \in I \subset \mathbf{R}, \quad x \in P \subset \mathbf{R}^n, \quad \mu \in S \subset \mathbf{R}^s, \quad (1.3)$$

которые заданы в области  $P$  фазового пространства  $\mathbf{R}^n$  векторными полями  $F$  и зависят от координат векторов параметров  $\mu$ , лежащих в области  $S$  пространства  $\mathbf{R}^s$ .

Автономным семейством обыкновенных дифференциальных уравнений называется семейство уравнений (1.3), правая часть которых от времени не зависит

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in P \subset \mathbf{R}^n, \quad \mu \in S \subset \mathbf{R}^s. \quad (1.4)$$

Семейство вида (1.4) используется для исследования устойчивости динамической системы по отношению к изменениям параметра  $\mu$ .

*Определение 1.1.* Решением системы дифференциальных уравнений (1.2) называется дифференцируемое отображение  $x: I \rightarrow P$  интервала  $I$  вещественной оси  $t$  в фазовое пространство  $P$ , если для любого  $\tau \in I$  выполнено соотношение

$$\dot{x}(\tau) = F(\tau, x(\tau)).$$

Если вектор-функция  $F$  класса  $C^r$ ,  $r \geq 1$  в  $\mathbf{R}^n$  и  $x_0$  – произвольная точка  $\mathbf{R}^n$ , то по теореме существования и единственности найдется такое  $h > 0$ , что на промежутке  $[-h, h]$  существует единственное решение  $\varphi(t, x_0)$  системы (1.1) с начальным условием  $(0, x_0)$ .

*Определение 1.2.* Интегральной кривой системы дифференциальных уравнений называется график отображения  $\varphi(x_0, t): [-h, h] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , т. е.

$$\{(t, \varphi(t, x_0)) : t \in [-h, h]\},$$

а фазовой кривой – проекция интегральной кривой на фазовое пространство  $\mathbf{R}^n$  вдоль оси  $t$ , т. е. множество точек вида  $x = \varphi(t, x_0)$ ,  $t \in [-h, h]$ .

Фазовые кривые также называются траекториями решений системы дифференциальных уравнений (кратко – траекториями динамической системы).

В дальнейшем будем рассматривать неограниченный временной интервал  $I = [0, \infty)$  ( $I = (-\infty, \infty)$ ) и полагать, что начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

Обозначим траекторию системы (1.1) с начальными данными  $(t, x_0)$  в виде

$$x = \varphi(t, x_0). \quad (1.5)$$

При сделанных допущениях система (1.1) порождает отображение  $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , обладающее следующими свойствами:

$$\text{- для всех } x \in \mathbf{R}^n \quad \varphi(0, x) = x; \quad (1.6)$$

$$\text{- для любых } t, s \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n \quad \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)); \quad (1.7)$$

$$\text{- } \varphi \in C_{t, x}^{r+1, r}. \quad (1.8)$$

Свойство (1.6) следует из определения траектории (1.5). Его иногда формулируют так: ограничение  $\varphi$  на  $\mathbf{0} \times \mathbf{R}^n$  является тождественным отображением (и пишут:  $\varphi|_{\mathbf{0} \times \mathbf{R}^n} = Id$ ). Равенство (1.7) – основное тождество автономных систем. В свойстве (1.8)  $r$ -кратная непрерывная дифференцируемость  $\varphi$  по  $x$  следует из теоремы о дифференцируемости решений по начальным данным,  $(r + 1)$ -кратная дифференцируемость по  $t$  следует из определения решения и  $r$ -кратной дифференцируемости по  $x$ .

*Определение 1.3.* Отображение  $\varphi$  со свойствами (1.6) – (1.8) называется гладким потоком, или гладкой динамической системой с непрерывным временем на  $\mathbf{R}^n$ .

*Определение 1.4.* Множество

$$\{x = \varphi(t, x_0) : t \in \mathbf{R}\}$$

называется орбитой, или траекторией точки  $x_0$  под действием потока  $\varphi$ .

*Определение 1.5.* Функция

$$t \rightarrow \varphi(t, x)$$

называется движением точки  $x$ .

Динамическая система – это тройка  $(P, I, \varphi)$ , состоящая из пространства состояний или фазового пространства  $P$  (метрическое пространство или многообразие) и однопараметрической непрерывной

группы (полугруппы) его преобразований – отображения  $\varphi(t, x)$ , записываемого  $\varphi^t(x): I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Параметр группы, обозначаемый  $t \in I \subseteq \mathbf{R}$ , – время. Элементы множества  $P$  представляют всевозможные состояния системы. Состояние, получающееся из  $x \in P$  после воздействия отображения  $\varphi$  в течение времени  $t \in I$ , будем обозначать как  $\varphi^t(x)$ . Иначе,  $\varphi^t(x)$  – вектор, представляющий решение дифференциального уравнения (1.1) в момент времени  $t$  с начальным условием  $x$ .

В качестве фазового пространства  $P$  могут выступать:

- $n$ -мерное евклидово пространство или некоторая его область (например, отрезок  $[0, 1]$ );
- $n$ -мерный тор (например, окружность).

Отображение  $\varphi$  в этом случае, по крайней мере, локально, является обычной векторной функцией векторного аргумента. То есть для любого вектора (точки)  $x \in P$  и  $t \geq 0$  существует единственный вектор (точка)  $\varphi^t(x) \in P$ .

Для траекторий  $\varphi(t, x_0)$  может выполняться одна из трех возможностей:

- либо  $\varphi(t, x_0) = x_0$ , в этом случае точка  $x_0$  называется точкой покоя, или состоянием равновесия;
- либо траектория соответствует периодическому решению, отличному от постоянного, в этом случае существует такое число  $T > 0$ , что  $\varphi(t+T, x_0) \equiv \varphi(t, x_0)$ , а сама траектория называется периодической, или замкнутой;
- либо для любых  $t_1 \neq t_2$   $\varphi(t_1, x_0) \neq \varphi(t_2, x_0)$ .

## 1.2. КАСКАДЫ

В некоторых ситуациях для моделирования системы достаточно указать ее состояние в заданные дискретные моменты времени. В этом случае в качестве эволюционного оператора можно использо-

вать функцию, определяющую состояние системы в некоторый момент времени через ее состояние в предыдущий момент. Математической моделью динамической системы в этом случае служит разностное уравнение с заданным начальным условием

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad x_0 = x_*. \quad (1.9)$$

Рассмотрим диффеоморфизм  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  класса  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , т. е. гомеоморфизм  $\mathbf{R}^n$  на  $\mathbf{R}^n$  такой, что  $f$  и  $f^{-1}$  – отображения класса  $C^r$ . Свяжем с диффеоморфизмом  $f$  отображение  $\varphi : Z \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , определенное следующим образом:

$$\text{для } m > 0 \quad \varphi(m, x) = f^m(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{m \text{ раз}}; \quad \varphi(0, x) = x;$$

$$\text{для } m < 0 \quad \varphi(m, x) = f^m(x) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\dots(f^{-1}(x))\dots))}_{|m| \text{ раз}}.$$

Отображение  $\varphi$  обладает следующими свойствами:

$$- \varphi|_{0 \times \mathbf{R}^n} = Id; \quad (1.10)$$

- для любых  $m_1, m_2 \in Z$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$

$$\varphi(m_1 + m_2, x) = \varphi(m_1, \varphi(m_2, x)); \quad (1.11)$$

- при любом фиксированном  $m$  отображение

$$\varphi(m, x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ класса } C^r. \quad (1.12)$$

*Определение 1.6.* Отображение  $\varphi$  со свойствами (1.10) - (1.12) называется гладким каскадом, или гладкой динамической системой с дискретным временем на  $\mathbf{R}^n$ .

*Определение 1.7.* Множество

$$\{x = \varphi(k, x_0) : k \in Z\}$$

называется орбитой или траекторией точки  $x_0$  под действием каскада  $\varphi$ .

Для траектории  $\varphi(k, x)$  динамической системы (1.9) может выполняться одна из двух возможностей:

- либо при некотором  $m \neq 0$   $\varphi(m, x_0) = x_0$ , в этом случае существует наименьшее натуральное  $m_0$  такое, что  $\varphi(k + m_0, x_0) = \varphi(k, x_0)$  для всех  $k \in \mathbb{Z}$ , сама точка  $x_0$  называется периодической точкой периода  $m_0$ , а ее траектория состоит из  $m_0$  различных точек (при  $m_0 = 1$  точка  $x_0$  называется неподвижной);

- либо  $\varphi(m, x_0) \neq x_0$  для всех  $m \neq 0$ , в этом случае траектория  $x_0$  состоит из счетного множества различных точек.

### 1.3. СВЯЗЬ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

Локальные свойства динамических систем, т. е. их свойства при малых временах определяются видом исследуемых дифференциальных уравнений (уравнений движения). Асимптотическое поведение решений при  $t \rightarrow \infty$  зависит от свойств отображения  $\varphi^t(x)$ .

Чаще всего отображение  $\varphi^t(x)$  неизвестно, а динамическая система задается в виде уравнений движения, которые позволяют по точке  $x$  в момент времени  $t$  найти точку, отвечающую следующему моменту времени:  $t + dt$  для непрерывного времени и  $k + 1$  для дискретного. Т. е. определяется не вся траектория сразу, а задается правило, по которому траектория находится шаг за шагом. Такой способ оказывается более универсальным, чем задание отображения в явном виде. Например, для большинства хаотических систем не существует конструкций, позволяющих записать отображение, минуя все промежуточные моменты времени.

Одна из основных задач нелинейной динамики состоит в исследовании свойства отображения  $\varphi^t(x)$  по заданным уравнениям движения.

#### *1.3.1. Непрерывное время*

Если время меняется непрерывно, то динамическая система задается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

(1.1). Установим связь между функцией  $F(x)$  и отображением  $\varphi^t(x)$ . Пусть в некоторый момент  $t$  состояние динамической системы описывается точкой  $x = x(t)$ . Тогда  $x(t + dt) = x + dx = x + F(x)dt$ . С другой стороны,

$$x(t + dt) = \varphi^{dt}(x) = \varphi^0(x) + \frac{d\varphi^0(x)}{dt}dt + \dots = x + \frac{d\varphi^0(x)}{dt}dt + \dots,$$

т. е.

$$F(x) = \frac{d\varphi^0(x)}{dt} \equiv \left. \frac{d\varphi^t(x)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Таким образом, если  $x(t)$  – решение дифференциального уравнения  $\dot{x} = F(x)$  при начальных данных  $x(0) = x_0$ , тогда  $\varphi^t(x_0) = x(t)$ . Аргумент  $x$  функции  $\varphi^t(x_0)$  – это начальные данные для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Следовательно, производная  $\partial\varphi^t(x)/\partial x_0$  – это производная решения по начальным данным.

**Пример.**  $\dot{x} = ax$ ,  $a$  – положительное число. Решением уравнения с начальными данными  $x(0) = x_0$  будет  $x(t) = x_0 \exp\{at\}$ . Поэтому  $\varphi^t(x) = x \exp\{at\}$ .

**Пример.**  $\dot{x} = Ax$ ,  $A$  – постоянная матрица. Решение линейной системы  $x(t) = x_0 \exp\{At\}$ , тогда  $\varphi^t(x) = x \exp\{At\}$ .

### 1.3.2. Дискретное время

Если время меняется дискретно, то задается правило, позволяющее по точке  $x$  в момент времени  $k$ , находить точку в момент времени  $k + 1$ . Это определяет отображение  $x_{k+1} = f(x_k)$ . Таким образом,  $f(x) = \varphi^1(x) = \varphi(x)$ . Очевидно, что  $\varphi^2(x) = f(f(x))$ ,  $\varphi^3(x) = f(f(f(x))) = f^3(x)$  и т. д.

**Пример.** Пусть имеем линейную систему разностных уравнений  $x_{k+1} = Bx_k$ . Тогда отображение  $\varphi$  выписывается в явном виде  $\varphi^k(x) = B^k x$ .

## 1.4. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ

Пусть  $f$  – дифференцируемое отображение области  $P$  пространства  $\mathbf{R}^n$  в область  $M$  пространства  $\mathbf{R}^m$ . Производной отображения в точке  $x_0$  называется главная линейная часть отображения  $f$  в точке  $x_0$ , т.е. линейный оператор  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  такой, что

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

В координатах  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_m)$  отображение  $f$  записывается в виде векторной функции  $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Матрица линейного оператора  $A$  в координатах  $(x, y)$  – это матрица Якоби векторной функции  $f$ :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

*Теорема 1.1.* Пусть семейство дифференциальных уравнений (1.3) задано векторными полями  $F(t, x, \mu)$ , непрерывными в некоторой области пространства  $\mathbf{R}^{n+1+s}$  вместе со своими производными  $\partial F / \partial x$  и  $\partial F / \partial \mu$ . Тогда решение  $\varphi$  семейства (1.3) с начальным условием  $\varphi(0, \mu) = x$  непрерывно дифференцируемо по  $x, \mu$ . Если зависимость поля  $F$  от параметров  $\mu$  лишь непрерывна, то и зависимость решения от параметров непрерывна.

Уравнения для производных решения по начальным условиям и параметрам выписываются в явном виде. Обозначим через  $\varphi_\xi$  решение системы (1.2) с начальным условием  $\varphi_\xi(0) = \xi$ . Фиксируем  $\xi = x$  и положим

$$X(t) = \left. \frac{\partial \varphi_\xi(t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=x}.$$

При каждом  $t$  линейный оператор  $X(t)$  действует из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^n$ . Из уравнения (1.2) следует, что операторнозначная функция  $X(t)$  удовлетворяет следующему уравнению в вариациях:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \text{ где } A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi_x(t), t).$$

Последнее уравнение является линейным однородным неавтономным дифференциальным уравнением, причем  $X(0)$  – единичная матрица.

Найдем теперь уравнение в вариациях для производной решения семейства (1.3) по параметрам. Пусть  $\varphi_{\xi, \alpha}$  – решение семейства (1.3) с начальным условием  $\varphi_{\xi, \alpha}(0, \alpha) = \xi$ . Фиксируем  $\xi = x$  и положим

$$Y(t) = \left. \frac{\partial \varphi_{\xi, \alpha}(t)}{\partial \alpha} \right|_{\xi=x, \alpha=\mu}.$$

При каждом  $t$  линейный оператор  $Y(t)$  действует из  $\mathbf{R}^s$  в  $\mathbf{R}^n$ . Из уравнения (1.3) следует, что операторнозначная функция  $Y(t)$  удовлетворяет уравнению в вариациях:

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + D(t),$$

где

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi_{x, \mu}(t), t, \mu), \quad D(t) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(\varphi_{x, \mu}(t), t, \mu).$$

Это линейное неоднородное неавтономное дифференциальное уравнение, причем  $Y(0) = 0$ .

## 1.5. ДИССИПАТИВНЫЕ И КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Любая область  $\Omega_0$  фазового пространства под воздействием фазового потока переходит за время  $t$  в некоторую другую область  $\Omega_t = \varphi^t(\Omega_0)$ . Обозначим через  $V(\Omega_t)$  объем области  $\Omega_t = \varphi^t(\Omega_0)$  фазового пространства, получающейся при сдвиге в течение времени  $t$  всех точек некоторой начальной области  $\Omega_0$  вдоль фазовых кривых автономной системы дифференциальных уравнений (1.1). Тогда изменение объема  $V(\Omega_t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV(\Omega_t)}{dt} = \int_V \operatorname{div} F(x) dx,$$

где  $\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$  – сумма диагональных элементов оператора  $\partial F / \partial x$ , а  $dx$  – евклидов элемент объема.

*Определение 1.8.* Система уравнений (1.1) (динамическая система) называется консервативной, если объем произвольной области фазового пространства не меняется со временем, и диссипативной, если объем некоторой области фазового пространства со временем уменьшается.

Таким образом, если всюду в фазовом пространстве  $\operatorname{div} F(x) = 0$ , то система сохраняет объем и является консервативной. Если существует область фазового пространства, в которой  $\operatorname{div} F(x) < 0$ , то система (1.1) диссипативна в этой области.

## 2. РЕГУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА

Решение автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений может быть только одного из трех типов: постоянное  $x(t) = x^0$ ; периодическое  $x(t+T) = x(t)$ , где число  $T > 0$ , а  $x(t_1) \neq x(t_2)$  при  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ; непериодическое  $x(t_1) \neq x(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ .

### 2.1. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

#### 2.1.1. Основные определения

Особая точка (неподвижная точка, стационарная точка, точка покоя, положение равновесия) системы дифференциальных уравнений (1.1) – это особая точка соответствующего векторного поля  $F(x)$ .

*Определение 2.1.* Особой точкой векторного поля называется точка фазового пространства, в которой вектор поля обращается в нуль.

Пусть  $x^0$  – особая точка дифференцируемого векторного поля  $F(x)$ , определяющего правую часть автономной системы (1.1), а  $\partial F / \partial x$  – производная отображения  $F$ . Система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Ay \tag{2.1}$$

называется линеаризацией системы (1.1) в особой точке  $x^0$ , поле  $Ay$  – линейной частью поля  $F$  в точке  $x^0$ , оператор  $A$  – оператором линеаризации. Матрица оператора  $A = \frac{\partial F}{\partial x}(x^0)$  – матрица Якоби, вычисленная в точке  $x^0$ ;  $y = x - x^0$ .

*Определение 2.2.* Особая точка векторного поля называется невырожденной, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден.

Оператор линейной части поля невырожден, если соответствующая ему матрица Якоби невырождена, т. е., например, ее определитель не равен нулю ( $\det A \neq 0$ ).

*Определение 2.3.* Особая точка системы дифференциальных уравнений (1.1) называется гиперболической, если ни одно собственное значение оператора (матрицы) линейной части поля в этой точке не лежит на мнимой оси.

*Определение 2.4.* Две системы дифференциальных уравнений топологически эквивалентны в окрестности особых точек, если существует гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение), который переводит особую точку первой системы и траектории, лежащие в некоторой ее окрестности, в особую точку и траектории второй системы с сохранением ориентации траекторий.

*Теорема 2.1.* (теорема Гробмана–Хартмана). Непрерывно дифференцируемое векторное поле с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.

Из теоремы 2.1. следует, что качественное поведение решений автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) в окрестности гиперболической особой точки полностью определяется поведением решений системы линейных уравнений (2.1) с постоянным оператором (матрицей) линейной части поля в этой точке.

### ***2.1.2. Классификация особых точек линейных векторных полей***

Система линейных дифференциальных уравнений, определяемая линейной частью векторного поля, имеет в окрестности особой точки вид (2.1). Тип особой точки и характер поведения решений системы (2.1) в окрестности особой точки определяются собственными значениями линейного оператора  $A$ .

В случае двумерного фазового пространства невырожденная особая точка может быть одного из следующих четырех типов: седло, узел, фокус, центр. Собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  линейного оператора  $A$  определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \left( \operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A} \right),$$

где  $\text{tr } A$  – след матрицы  $A$ ,  $\det A$  – определитель матрицы  $A$ . Области, занимаемые различными типами особых точек уравнения (2.1) в плоскости  $(\det A, \text{tr } A)$ , представлены на рис. 2.1.

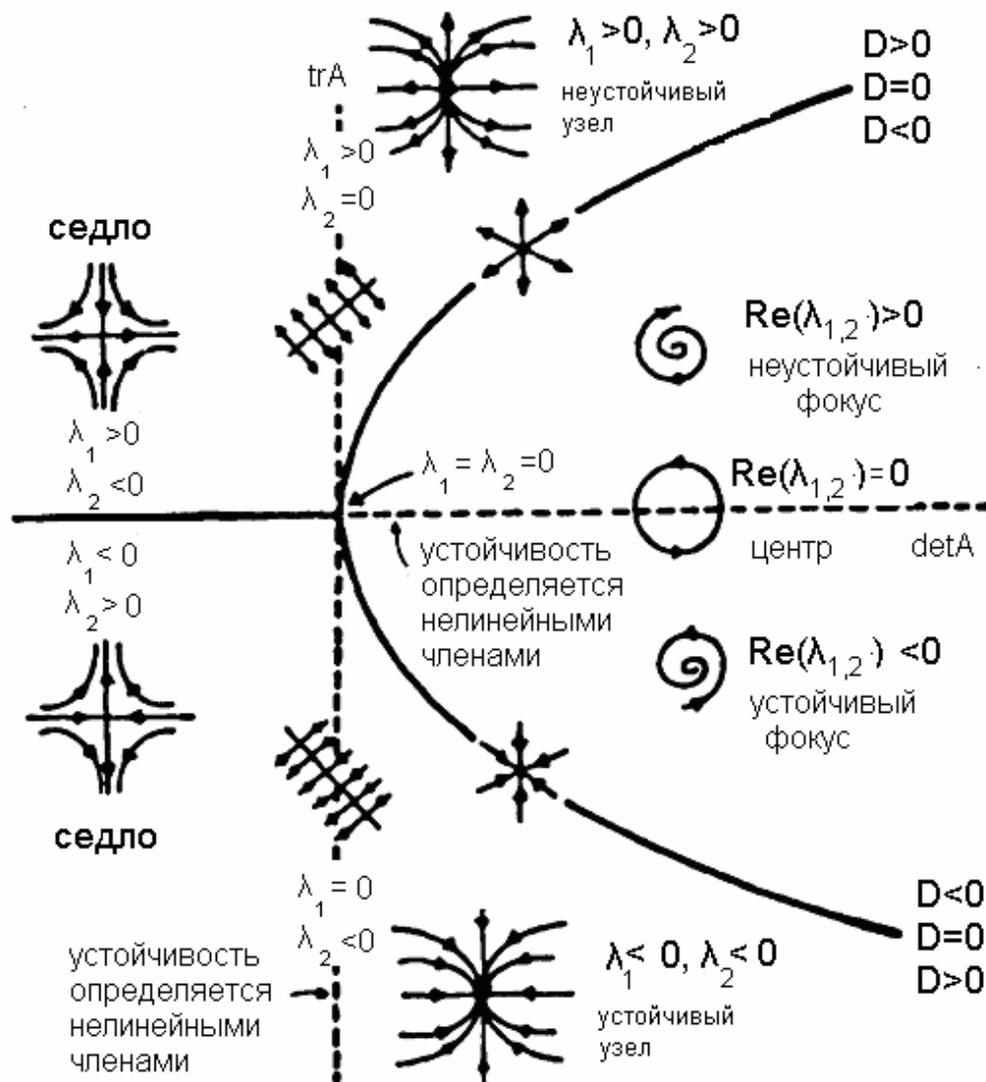


Рис. 2.1. Классификация особых точек линейных двумерных систем

В случае  $D = [(\text{tr } A)^2 - 4 \det A] = 0$  докритический узел соответствует скалярной матрице  $A = \lambda E$ , где  $E$  – единичная матрица, а вырожденный узел – матрице, подобной двумерной жордановой клетке.

Условие  $\det A = 0$  определяет линию вырожденных особых точек, среди которых можно выделить вырожденный плоский седло-узел, имеющий, как правило, один узловой и два седловых сектора. невырожденное седло, узел и фокус являются гиперболическими особыми точками. Поэтому, как следует из теоремы 2.1., все изображенные на рис. 2.1. особые точки, кроме центра, сохраняют свой тип при малых возмущениях линейной системы (2.1). Седло всегда устойчиво, а узел и фокус могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от знака вещественных частей собственных значений матрицы  $A$ .

### ***2.1.3. Классификация особых точек нелинейных векторных полей***

**Двумерные динамические системы.** Рассмотрим дифференциальные уравнения, которые описывают процессы в автономной нелинейной системе 2 - го порядка ( $n = 2$ ):

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad (2.2a)$$

$$\dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \quad (2.2b)$$

Особые точки динамической системы (2.2) определяются решениями двух алгебраических уравнений

$$P(x_1, x_2) = 0, \quad (2.3a)$$

$$Q(x_1, x_2) = 0. \quad (2.3b)$$

Пусть  $(x_1^0, x_2^0)$  – одно из решений системы (2.3). Пара чисел  $(x_1^0, x_2^0)$  определяет координаты особой точки в фазовом пространстве. Чтобы определить тип этой точки, т. е. характер поведения траекторий в ее окрестности, рассмотрим уравнение (2.2), линеаризованное в окрестности этой точки:

$$x_1(t) = \Delta x_1 + x_1^0, \quad x_2(t) = \Delta x_2 + x_2^0,$$

$$\Delta \dot{x}_1 = P(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) \approx P(x_1^0, x_2^0) + a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2, \quad (2.4a)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = Q(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) \approx Q(x_1^0, x_2^0) + a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2, \quad (2.4b)$$

где коэффициенты  $a_{11} = P_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ,  $a_{12} = P_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ ,  $a_{21} = Q_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ,  $a_{22} = Q_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$  – частные производные функций  $P(x_1, x_2)$  и  $Q(x_1, x_2)$  по  $x_1$  и  $x_2$ , определенные в точке  $(x_1^0, x_2^0)$ . Правые части уравнений (2.4) содержат первые три члена в соответствующих рядах Тейлора. Учитывая, что  $(x_1^0, x_2^0)$  – особая точка, удовлетворяющая алгебраическим уравнениям (2.3) и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получим линейные уравнения

$$\Delta \dot{x}_1 = a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2, \quad (2.5a)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2. \quad (2.5b)$$

Предположив, что  $\Delta x_1 = c_1 \exp\{\lambda t\}$ ,  $\Delta x_2 = c_2 \exp\{\lambda t\}$ , из (2.5) получим однородную систему

$$(a_{11} - \lambda)c_1 + a_{12}c_2 = 0, \quad (2.6a)$$

$$a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2 = 0. \quad (2.6b)$$

Чтобы система (2.6) имела невырожденное решение, величина  $\lambda$  должна удовлетворять характеристическому (вековому) уравнению

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (2.7a)$$

После очевидных преобразований получаем

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad (2.7b)$$

где  $\alpha_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{tr } A$  – след матрицы  $A$ ,

$\alpha_0 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det A$  – определитель матрицы  $A$ ,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  – матрица линеаризованной системы.

Решения характеристического уравнения (2.7) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \text{tr } A \pm \sqrt{(0,5 \text{tr } A)^2 - \det A}. \quad (2.8)$$

Тип особой точки  $(x_1^0, x_2^0)$  определяется корнями (2.8) уравнения (2.7). Разным типам особых точек соответствуют различные типы движений в окрестности равновесия, которые часто называются режимами. Классификация особых точек нелинейного двумерного потока представлена на рис. 2.2.

1.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – отрицательные действительные числа; особая точка – устойчивый узел. Точка  $(x_1, x_2)$ , определяющая состояние системы на фазовой плоскости, аperiodически приближается к состоянию равновесия.

2.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – положительные действительные числа; особая точка – неустойчивый узел. Точка  $(x_1, x_2)$ , определяющая состояние системы на фазовой плоскости, аperiodически удаляется от состояния равновесия.

3.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексные числа с отрицательной действительной частью; особая точка – устойчивый фокус. Точка  $(x_1, x_2)$ , определяющая состояние системы на фазовой плоскости, совершает затухающие колебания и асимптотически приближается к состоянию равновесия.

4.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексные числа с положительной действительной частью; особая точка – неустойчивый фокус. Точка  $(x_1, x_2)$ , определяющая состояние системы на фазовой плоскости, совершает колебания с растущей амплитудой и удаляется от состояния равновесия.

5.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – действительные числа, имеющие разные знаки; особая точка – седло; неустойчивый режим. При малом случайном отклонении от состояния равновесия точка  $(x_1, x_2)$ , определяющая состояние системы на фазовой плоскости, начинает удаляться от него.

6.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – чисто мнимые числа; особая точка – центр; положение равновесия устойчиво, но не асимптотически устойчиво. При малом случайном отклонении от состояния равновесия точка  $(x_1, x_2)$ ,

определяющая состояние системы на фазовой плоскости, начинает описывать эллипс вокруг точки  $(x_1^0, x_2^0)$ .

Характер особых точек линеаризованной системы (2.5) и исходной нелинейной системы совпадает, кроме следующих случаев:

- если особая точка линеаризованной системы – центр, то особая точка исходной нелинейной системы либо центр, либо фокус;

- если хотя бы один из корней линеаризованной системы равен нулю, то для анализа особой точки нелинейной системы требуется дополнительное исследование.

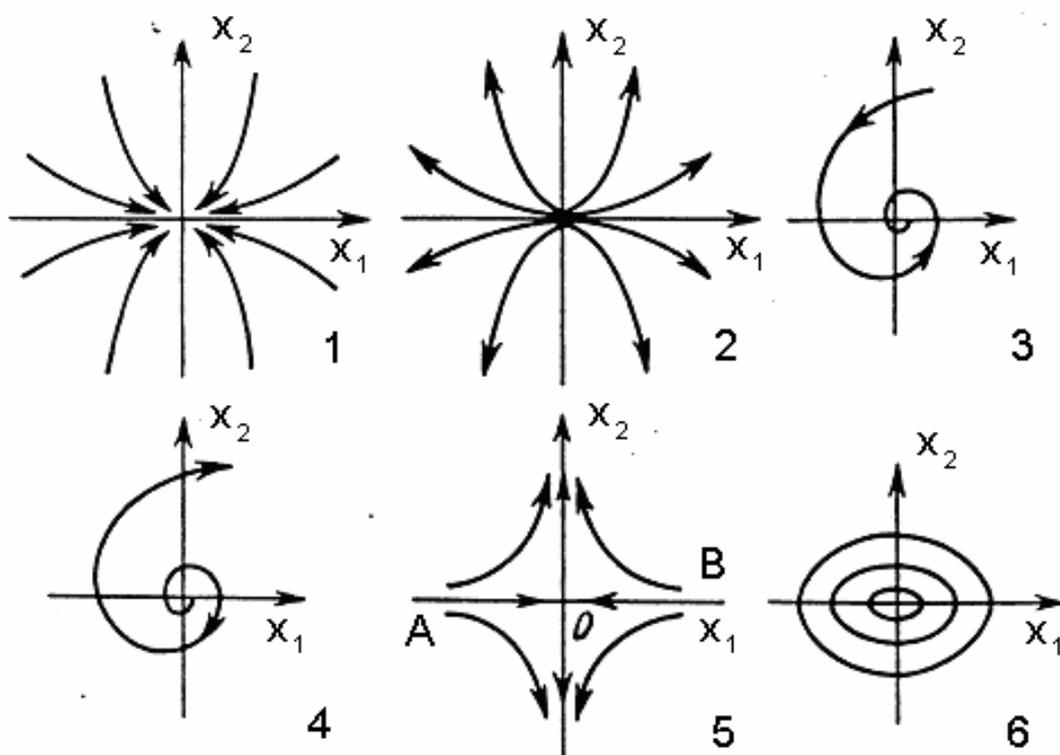


Рис. 2.2. Классификация особых точек нелинейного двумерного потока

**Трёхмерные динамические системы.** Исследование устойчивости в малом систем 3-го порядка ( $n=3$ ) приводит к кубическому характеристическому уравнению линеаризованной системы:

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0.$$

Как и в случае двумерной системы, тип особой точки определяется положением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. В трехмерном вещественном пространстве существуют более сложные гиперболические особые точки, являющиеся комбинациями седла с узлом или фокусом и называемые соответственно, седло-узлом (рис. 2.3) и седло-фокусом (рис. 2.4).

Седло-узел и седло-фокус всегда неустойчивы. Они имеют одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия (или наоборот). В окрестностях таких особых точек возможно существование сложной нерегулярной динамики (см. раздел 3). Эти точки могут играть важную роль в образовании хаотических аттракторов нелинейных динамических систем.

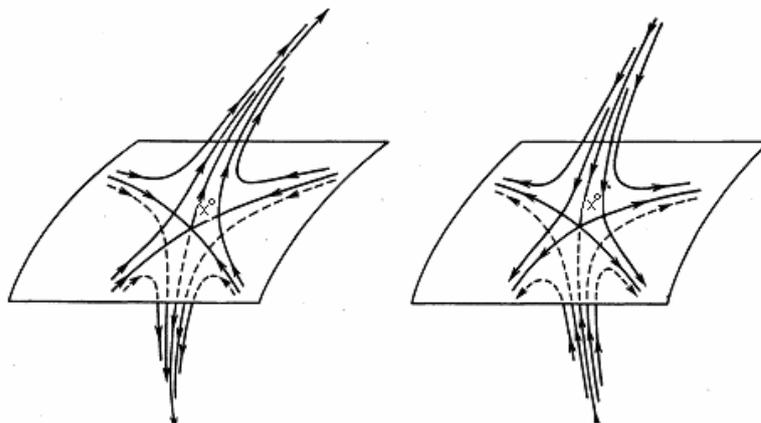


Рис. 2.3. Особая точка типа седло-узел

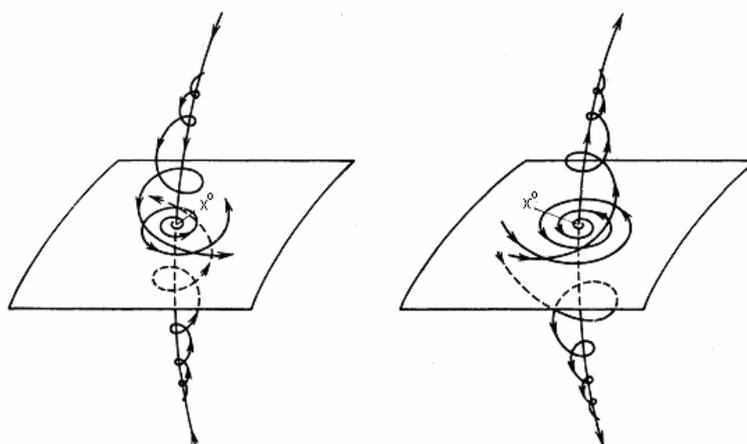


Рис. 2.4. Особая точка типа седло-фокус

**$n$  - мерные динамические системы.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Особые точки  $x^0 \in P \subseteq \mathbf{R}^n$  должны быть решениями системы алгебраических уравнений  $F(x) = 0$ . Стандартным подходом к определению типа особых точек является линеаризация системы (1.1) в окрестности этой точки. Возьмем  $x = x^0 + \varepsilon u$ , где  $\varepsilon$  мало и  $x, u \in P \subseteq \mathbf{R}^n$ . Подставив  $x = x^0 + \varepsilon u$  в уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon^{-1} (F(x^0 + \varepsilon u) - F(x^0)) = \\ &= DF(x^0)u + 0,5\varepsilon D^2F(x^0)(u, u) + \dots = Au + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $A = \left( a_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^0} \right)$  – матрица Якоби. Таким образом, линеаризованная система имеет вид

$$\dot{u} = Au. \quad (2.9)$$

Связь решений линеаризованной системы (2.9) и исходной системы (1.1) устанавливается теоремой Гробмана–Хартмана (теорема 2.1). Если у матрицы  $A$  нет собственных значений с нулевой действительной частью, то существует гомеоморфизм (взаимно однозначное, непрерывное, но, возможно, не дифференцируемое отображение)  $h$ , определенный в некоторой окрестности  $U$  точки  $x^0$ , который локально отображает траектории нелинейной системы в траектории линеаризованной системы. Отображение  $h$  сохраняет тип траекторий.

Особые точки, в которых у матрицы  $A$  нет собственных значений с нулевой действительной частью, являются гиперболическими. Таким образом, линеаризованная система дает исчерпывающую информацию относительно устойчивости гиперболической неподвижной точки, причем не только по отношению к бесконечно малым, но и к конечным возмущениям. Поведение линеаризованной и исходной системы в негиперболических особых точках может быть принципиально различным.

#### 2.1.4. Особые точки каскада

Для каскада (отображения)  $x_{k+1} = f(x_k)$  неподвижная точка должна удовлетворять соотношению  $x^0 = f(x^0)$ . Её устойчивость исследуется аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений. Возьмем  $x = x^0 + \varepsilon u$ , тогда

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \varepsilon^{-1} (f(x^0 + \varepsilon u) - x^0) = \varepsilon^{-1} (f(x^0 + \varepsilon u) - f(x^0)) = \\ &= Df(x^0)u_k + 0,5\varepsilon D^2 f(x^0)(u_k, u_k) + \dots, \end{aligned}$$

и задача сводится к исследованию линейного отображения с постоянной матрицей

$$u_{k+1} = Bu_k.$$

*Определение 2.5.* Особая точка  $x^0$  отображения называется гиперболической, если у матрицы  $B$  нет собственных значений  $\mu_i$  таких, что  $|\mu_i| = 1$ .

Для гиперболических точек отображения также существует теорема Гробмана–Хартмана.

Теорема Гробмана–Хартмана. Пусть отображение  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  имеет непрерывную первую производную. Тогда в некоторой окрестности  $U$  гиперболической точки  $x^0$  существует гомеоморфизм  $h$ , взаимно однозначно отображающий траектории исходной системы на траектории линеаризованной системы, т. е. такой, что  $h(f(x)) = Df(x^0)h(x)$  для любого  $x \in U$ .

Таким образом, и для гиперболических точек каскада (отображения) устойчивость по отношению к бесконечно малым и малым конечным возмущениям определяется свойствами собственных значений матрицы  $B$ .

**Пример.** Рассмотрим двумерное дискретное отображение (кошка Арнольда), заданное системой двух разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k \\ y_{k+1} = x_k + 2y_k \end{cases} \pmod{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения отображения  $B$ , удовлетворяющие характеристическому уравнению

$$\det [B - \mu E] = \det \begin{bmatrix} 1 - \mu & 1 \\ 1 & 2 - \mu \end{bmatrix} = (1 - \mu)(2 - \mu) - 1 = \mu^2 - 3\mu + 1 = 0,$$

равны:  $\mu_1 = 3 + \sqrt{5}/2$ ,  $\mu_2 = 3 - \sqrt{5}/2$ .

Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, их произведение равно единице. Они (корни) не лежат на мнимой оси, поэтому неподвижная точка является гиперболической. В окрестности неподвижной точки  $(0, 0)$ , которая является решением

нелинейного уравнения  $\begin{cases} 0 = x_k + y_k \\ 0 = x_k + 2y_k \end{cases} \pmod{1}$ , «кошка Арнольда» ведет себя как растяжение с коэффициентом  $\mu_1 = 3 + \sqrt{5}/2$  вдоль собственного вектора  $\xi_1 = (1, 1 + \sqrt{5}/2)^T$  и сжатие с коэффициентом  $\mu_2 = 3 - \sqrt{5}/2$  вдоль собственного вектора  $\xi_2 = (1, 1 - \sqrt{5}/2)^T$ .

Отображение «кошка Арнольда» представляет собой суперпозицию двух операций: растяжения и перекладывания фрагментов. Растяжение под действием матрицы  $B$  – линейное преобразование, которое переводит прямые в прямые. Вторая часть преобразования  $\pmod{1}$  – взятие дробной части) соответствует разрезанию параллелограмма, полученного при сжатии – растяжении исходного единичного квадрата на треугольники с последующим перекладыванием их в исходный единичный квадрат.

Итерации отображения «кошки Арнольда», определяемые матрицей  $B^k$ , равны

$$\begin{aligned} B^k &= \left\{ S \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} S^{-1} \right\}^k = \underbrace{S \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} S^{-1} \dots S \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} S^{-1}}_k = \\ &= S \begin{bmatrix} \mu_1^k & 0 \\ 0 & \mu_2^k \end{bmatrix} S^{-1}, \end{aligned}$$

где  $S$  - матрица преобразования  $B$  к диагональному виду.

## 2.2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

*Определение 2.6.* Решение  $x(t)$  автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) называется периодическим решением, если существует постоянная  $T > 0$  такая, что  $x(t+T) = x(t)$  для всех  $t$ . Минимальное значение  $T$  называется периодом решения  $x(t)$ , а само решение  $x(t)$  –  $T$ -периодическим.

Фазовая кривая (траектория) периодического решения системы (1.1) является замкнутой и называется циклом. Обратно, любой цикл (замкнутая фазовая кривая) системы (1.1) определяет периодическое решение системы с некоторым периодом.

### 2.2.1. Переход к системе с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(0) = u_0 \quad (2.10)$$

с  $T$ -периодической матрицей  $A(t+T) = A(t)$  и  $u(t)$  –  $n$ -мерным вектором состояния.

Существует замена переменных, превращающая систему с периодическими коэффициентами в систему с постоянными коэффициентами. Такая замена переменных основана на понятии фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$  системы (2.10). Если матрица  $A(t)$  невырождена, то среди всевозможных решений, отвечающих различным начальным условиям  $u_0$ , можно выделить ровно  $n$  линейно независимых решений  $u_1(t), \dots, u_n(t)$ . Формируя из них столбцы некоторой матрицы  $\Phi(t)$ , получим, что:

- матрица  $\Phi(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ ;
- любые  $n$  линейно независимых решений образуют базис, поэтому любое решение можно представить в виде комбинации базисных решений

$$u(t) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(t) = \Phi(t) c, \quad c = \text{const}, \quad c \in \mathbf{R}^n. \quad (2.11)$$

Вектор  $c$  можно найти из начальных условий

$$c = \Phi(0)^{-1} u(0) = \Phi_0^{-1} u_0.$$

Фундаментальная матрица позволяет выразить решение  $u(t)$  через начальные данные  $u_0$ . Решение системы (2.10) с учетом (2.11) представимо в виде

$$u(t) = \Phi(t) \Phi_0^{-1} u_0.$$

Матрица  $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) \Phi_0^{-1}$  – также фундаментальная матрица. Она отвечает начальным данным  $\tilde{\Phi}(0) = I$  ( $I$  – единичная матрица) и носит название нормированной фундаментальной матрицы. Фундаментальных матриц много, нормированная фундаментальная матрица одна. Очевидно, что  $u(t) = \tilde{\Phi}(t) u_0$ , поэтому для рассматриваемой линейной системы матрица  $\tilde{\Phi}(t)$  задает отображение  $\varphi^t(u) = \tilde{\Phi}(t) u$ . Для систем с постоянной матрицей  $A$  имеем  $\tilde{\Phi}(t) = \exp\{At\}$ . Определитель фундаментальной матрицы  $W(t) = \det \Phi(t)$  называется определителем Вронского. Поскольку фундаментальная матрица невырождена ( $W \neq 0$ ), то для определителя Вронского справедливо уравнение  $\dot{W} = (\text{tr } A)W$ , где  $\text{tr } A$  – след матрицы  $A$ .

Вернемся к системам с периодическими коэффициентами. Поскольку фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ , то

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T),$$

т. е.  $\Phi(t+T)$  будет другой фундаментальной матрицей. Любое решение можно выразить как комбинацию фундаментальных решений

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)D,$$

где  $D$  – постоянная матрица с собственными значениями  $\mu_i = \lambda_i(D)$ . Преобразование подобия можно привести матрицу  $D$  к диагональному виду  $J_D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Представим  $\mu_i = \exp(\sigma_i T)$ , откуда

следует  $\sigma_i = T^{-1} \ln \mu_i$ . С помощью величин  $\sigma_i$ , называемых характеристическими показателями, можно «прологарифмировать» матрицу  $J_D = \exp(J_R T)$  (жорданову форму матрицы  $D$ ). Здесь  $J_R = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Используя обратное преобразование, получим  $D = \exp(RT)$ . Характеристические показатели  $\sigma_i$  являются собственными значениями матрицы  $R$  ( $\sigma_i = \lambda_i(R)$ ). Обозначим  $Z(t) = \Phi(t) \exp(-Rt)$ . Тогда

$$\begin{aligned} Z(t+T) &= \Phi(t+T) \exp(-RT) \exp(-Rt) = \\ &= \Phi(t) D \exp(-RT) \exp(-Rt) = Z(t). \end{aligned}$$

Из последнего равенства имеем

$$\Phi(t) = Z(t) \exp(Rt). \quad (2.12)$$

Таким образом, фундаментальную матрицу можно выразить как произведение периодической матрицы на экспоненту постоянной матрицы.

При замене переменных

$$v(t) = Z(t)^{-1} u(t) \text{ или } u(t) = Z(t)v(t) \quad (2.13)$$

система с периодическими коэффициентами  $\dot{u} = A(t)u$  превратится в систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{v} = Rv. \quad (2.14)$$

*Теорема 2.2.* (теорема Флоке). Каждое фундаментальное решение линейной системы (2.10) с периодическими вещественными коэффициентами представимо в виде (2.12), где  $Z(t)$  – некоторая  $T$ -периодическая комплексная матрица, а  $R$  – некоторая постоянная комплексная матрица, причем существует невырожденная действительная матрица  $D$  такая, что  $D = \exp\{RT\}$ .

Матрица  $D$ , называемая матрицей монодромии, единственным образом определяется периодической матрицей  $A(t)$ .  $\lambda_i(D) = \mu_i$  – собственные значения матрицы  $D$ , которые называются мультипликаторами линейной системы (2.10) или мультипликаторами цикла.

Собственные значения  $\sigma_i = \lambda_i(R)$  матрицы  $R$  называются характеристическими показателями или показателями Флоке. Их вещественные части также определяются однозначно. Очевидно, что  $\mu_i = \exp\{\sigma_i T\}$ , а  $D = Z(T)$ , если  $Z(0)$  – единичная матрица. Неособая матрица  $D$  не обязана иметь действительный логарифм, т.е. не всегда существует действительная матрица  $R$  такая, что  $D = \exp\{RT\}$ . Примером является матрица  $D$ , имеющая простой отрицательный мультипликатор. Однако матрица  $D^2$  уже всегда имеет действительный логарифм. Поэтому каждое действительное фундаментальное решение линейной системы (2.10) с  $T$ -периодическими коэффициентами представимо в виде  $\Phi(t) = \tilde{Z}(t)\exp(\tilde{R}t)$ , где  $\tilde{Z}(t)$  – некоторая  $2T$ -периодическая матрица, а  $\tilde{R}$  – некоторая действительная матрица такая, что  $D^2 = \exp\{2\tilde{R}T\} = \exp\{2RT\}$ .

На практике найти замену вида (2.13), преобразующую систему (2.10) с периодическими коэффициентами к системе (2.14) с постоянными коэффициентами, удается очень редко, и анализ (например, нахождение показателей Флоке или характеристических показателей) проводится численно.

### 2.2.2. Линеаризация уравнений с периодическим решением

Пусть система (1.1) имеет периодическое решение  $x^0(t)$ . Для его исследования воспользуемся линеаризацией. Предположим, что  $x(t) = x^0(t) + \varepsilon u(t)$ , тогда

$$\dot{u} = \varepsilon^{-1}(F(x^0 + \varepsilon u) - \dot{x}^0) = \varepsilon^{-1}(F(x^0 + \varepsilon u) - F(x^0)) = DF(x^0)u + \dots$$

Проведя линеаризацию системы (1.1) на ее  $T$ -периодическом решении  $x^0(t) = x^0(t+T)$ , получим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.10) с  $T$ -периодической матрицей  $A(t+T) = A(t)$  и  $u(t) = x(t) - x^0(t)$ . Здесь  $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^0(t))$ . Поведение траекторий, близких к  $T$ -периодическим

траекториям, можно описывать линейной системой (2.10). По значениям мультипликаторов цикла или показателей Флоке линейной неавтономной системы (2.10) первого приближения можно сделать вывод о свойствах периодического решения нелинейной системы (1.1).

Однако вопрос об устойчивости периодического решения оказывается нетривиальным, поскольку матрица  $R$  системы (2.14) всегда имеет хотя бы одно нулевое собственное значение, что не позволяет сделать вывод об устойчивости. Покажем это.

Если  $x(t)$  – решение автономной системы (1.1), то  $x(t + \tau)$  также будет решением для любого  $\tau$  (это просто сдвиг вдоль траектории), т. е.  $\dot{x}(t + \tau) = F(x(t + \tau))$ . Продифференцируем это соотношение по  $\tau$ , предположим  $\tau = 0$  и обозначим  $v(t) = \dot{x}^0(t)$ . В результате получим  $\dot{v} = A(t)v$ , но  $x^0(t + T) = x^0(t)$ , поэтому  $v(t + T) = v(t)$ . Иными словами, уравнение  $\dot{u} = A(t)u$  имеет хотя бы одно периодическое решение  $v(t)$ . Выразим его через фундаментальную матрицу

$$\begin{aligned} v(t) &= \Phi(t) c = Z(t) \exp(Rt) c = v(t + T) = \\ &= Z(t + T) \exp(Rt) \exp(RT) c = \Phi(t) \exp(RT) c, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\exp(RT) c = c.$$

Таким образом,  $c$  – собственный вектор матрицы монодромии, отвечающий собственному значению  $\mu = 1$ , и одновременно собственный вектор матрицы  $R$ , отвечающий собственному значению  $\lambda = 0$ . Однако этот нулевой характеристический показатель связан с движением по циклу и не должен влиять на устойчивость. Это утверждение можно строго обосновать при помощи построения сечения Пуанкаре.

### ***2.2.3. Построение сечения Пуанкаре***

Сечение Пуанкаре позволяет избавиться от нулевого характеристического показателя, связанного с движением вдоль цикла. Каждая динамическая система с непрерывным временем порождает отображение вида

$$x(t + \tau) = \varphi^\tau(x(t)) \equiv f(x(t)).$$

Однако это отображение не избавляет от нулевого характеристического показателя, поскольку инвариантность относительно сдвига вдоль цикла остается. Избавиться от инвариантности можно, избавившись от самого движения по циклу. Для этого в  $n$ -мерном пространстве выбирается некоторая гладкая  $(n-1)$ -мерная гиперповерхность  $S$ , к которой предъявляются два требования. Циклическая траектория не должна касаться гиперповерхности. По возможности гиперповерхность выбирается так, чтобы траектории пересекали ее почти перпендикулярно. Точка замкнутой траектории должна пересекать гиперповерхность только один раз в некоторой точке  $s_0$ , двигаясь с одной стороны гиперповерхности  $S$  на другую. Точки, принадлежащие поверхности  $S$ , будем обозначать не  $x$ , а  $s$ . Возможно еще одно пересечение при движении в обратном направлении. Обычно гиперповерхность  $S$  определена глобально, но иногда  $S$  определяют только в окрестности  $s_0$ , и тогда цикл пересекает  $S$  один раз. Благодаря непрерывности отображения  $\varphi$  близкие к циклу траектории также не будут касаться  $S$ , и в окрестности цикла можно построить так называемое отображение первого возвращения, или отображение Пуанкаре (рис. 2.5).

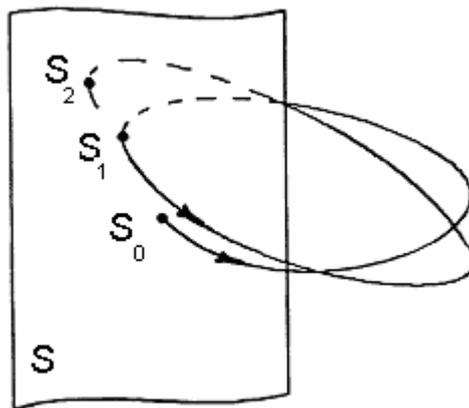


Рис. 2.5. Отображение Пуанкаре

Очевидно, что  $\varphi^T(s_0) = s_0$ . Возьмем некоторую точку  $s \in S$  при  $t = 0$  и рассмотрим траекторию  $\varphi^t(s)$ . Обозначим через  $\tau(s)$  момент времени, когда траектория снова пересечет гиперповерхность  $S$  в точке  $s_1 = \varphi^{\tau(s)}(s)$ . При  $0 < t < \tau(s)$  либо  $\varphi^t(s) \notin S$ , либо  $\varphi^t(s) \in S$ , но  $F(s)$  и  $F(\varphi^t(s))$  – векторы, определяющие направление движения, лежат по разные стороны от  $S$ . Точка  $s_1$  существует, если она лежит достаточно близко к циклу.

Определим новую динамическую систему с дискретным временем  $k$ . Ее фазовым пространством будет поверхность  $S$ , а сама система будет порождаться отображением

$$g : S \rightarrow S, \quad s_{k+1} = g(s_k) \equiv \varphi^{\tau(s_k)}(s_k), \quad s \in S \subset \mathbb{P}.$$

Целые числа  $k$  нумеруют моменты пересечения траекториями поверхности Пуанкаре, а цикл превращается в неподвижную точку  $x^0 = x_0$ . Размерность нового фазового пространства будет на единицу меньше. Обозначим через  $B$  матрицу производных  $Dg(s_0)$ . Существует теорема, которая утверждает, что собственные значения  $v_i$  матрицы  $B$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , совпадают с собственными значениями матрицы монодромии, за исключением значения  $\mu = 1$ , отвечающего движению вдоль цикла.

Сечение Пуанкаре позволяет свести задачу об устойчивости периодического решения к задаче об устойчивости неподвижной точки отображения  $g$ . Сечение Пуанкаре используется при исследовании сложных временных режимов, с целью упростить наблюдаемую картину и перейти от потока к каскаду меньшей размерности.

#### **2.2.4. Периодические решения (циклы) каскадов**

Для каскада (отображения)  $x_{k+1} = f(x_k)$  исследование его периодического решения сводится к исследованию неподвижной точки линейного отображения с постоянной матрицей  $u_{k+1} = Bu_k$ .

Достаточно перейти от  $x_{k+1} = f(x_k)$  к  $T$ -ой итерации функции  $f$ :

$$x_{k+1} = g(x_k) = f^T(x_k) = \underbrace{f(f(\dots f(x_k)\dots))}_T.$$

Тогда периодической траектории, состоящей из последовательности точек  $x_0, x_1, \dots, x_T = x_0$ , будет соответствовать  $T$  неподвижных точек отображения  $g$ . Аналогом матрицы  $B$  для неподвижной точки будет произведение матриц

$$B = Df(x_1)Df(x_2)\dots Df(x_T).$$

Конечное множество итераций, каждое из которых переходит в следующее под действием отображения  $f$ , и является циклом длиной  $T$ .

### 2.3. ИНВАРИАНТНЫЕ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ И ПРИТЯГИВАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА

Инвариантные, предельные и притягивающие множества играют существенную роль при изучении устойчивости особых точек и циклов нелинейных динамических систем.

#### 2.3.1. Инвариантные множества (многообразия)

Пусть задано множество  $Q$  фазового пространства  $P$ .

*Определение 2.7.* Функцией от множества  $Q$  называется множество образов всех точек из множества  $Q$ .

Функция от множества обозначается как  $\varphi^t(Q)$ .

*Определение 2.8.* Множество  $Q$  фазового пространства  $P$  называется инвариантным по отношению к фазовому потоку  $\varphi^t$  множеством или просто инвариантным множеством, если для всех допустимых  $t$  имеет место  $\varphi^t(Q) = Q$ .

Т. е. множество  $Q$  и его образ при отображении  $\varphi^t(Q)$  совпадают.

*Определение 2.9.* Многообразием называется множество  $Q$  евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$ , имеющее в каждой своей точке единственную касательную гиперплоскость.

В этом случае говорят, что множество  $Q$  гладко вложено в  $\mathbf{R}^n$ . Если множество  $Q$  гладко вложено в фазовое пространство  $P$  системы дифференциальных уравнений, то говорят, что  $Q$  является подмногообразием фазового пространства.

*Определение 2.10.* Инвариантное многообразие векторного поля и соответствующей системы дифференциальных уравнений – это такое подмногообразие фазового пространства, которое в каждой своей точке касается векторного поля.

Рассмотрим линейный оператор  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Пространство  $\mathbf{R}^n$  распадается на прямую сумму трех подпространств:

$$\mathbf{R}^n = T^s \otimes T^u \otimes T^c.$$

Все три подпространства в правой части равенства инвариантны относительно оператора  $A$ . Спектр ограничения оператора  $A$  на подпространство  $T^s$  лежит в открытой левой полуплоскости. Спектр ограничения оператора  $A$  на  $T^u$  – в правой полуплоскости. Спектр ограничения оператора  $A$  на  $T^c$  – на мнимой оси. Для оператора  $A$ , являющегося оператором линеаризации векторного поля  $F$  уравнения (1.1) в гиперболической особой точке, имеем  $T^c = \{0\}$ . Схематично инвариантные многообразия линейной и нелинейной системы представлены на рис. 2.6.

*Теорема 2.3.* (теорема Адамара–Перрона). Пусть  $F$  есть  $C^r$  – гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой в нуле и линейной частью  $Ax$  в нуле,  $T^s$ ,  $T^u$  – подпространства, соответствующие оператору  $A$ . Тогда система дифференциальных уравнений имеет два  $C^r$  – гладких инвариантных относительно  $F$  многообразия  $W^s$  и  $W^u$ , проходящих через 0 и касающихся в нуле плоскости  $T^s$  и

$T^u$ , соответственно. Решения с начальными условиями на многообразии  $W^s$  ( $W^u$ ) экспоненциально стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Многообразие  $W^s$  называется устойчивым, а  $W^u$  – неустойчивым многообразием особой точки 0.

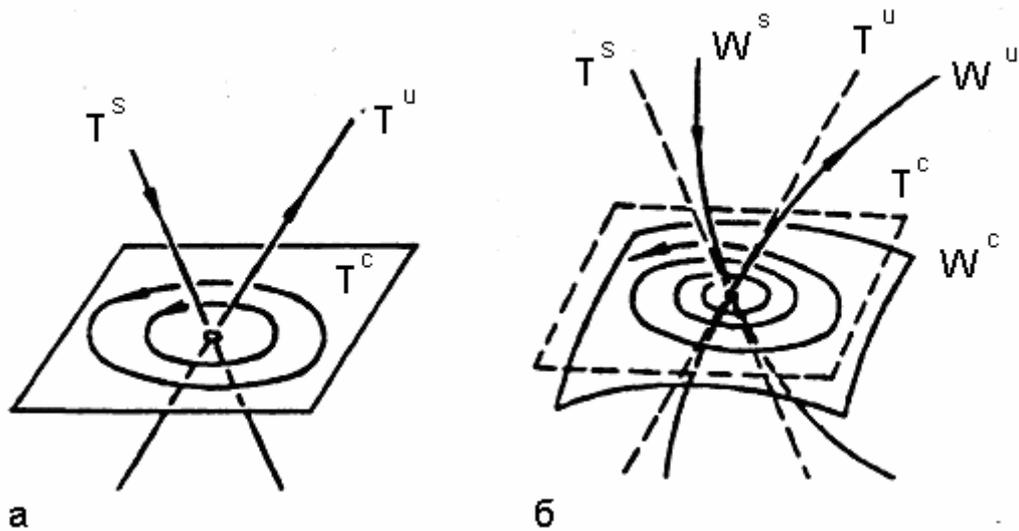


Рис. 2.6. Инвариантные многообразия линейной (а) и нелинейной (б) системы

*Теорема 2.4.* (теорема о центральном многообразии). Если в условиях предыдущей теоремы оператор  $A$  имеет собственные значения также и на мнимой оси, т. е.  $T^c \neq \{0\}$ , то система дифференциальных уравнений (1.1) имеет третье  $C^{r-1}$  – гладкое инвариантное многообразие  $W^c$ , проходящее через 0 и касающееся в нуле подпространства  $T^c$ .

Многообразие  $W^c$  называется центральным многообразием, а подпространство  $T^s \otimes T^u$  – подпространством гиперболических переменных. Поведение фазовых кривых на многообразии  $W^c$  определяется нелинейными членами.

**Пример.** Инвариантные множества каскада (линейного отображения). Для линейных дискретных систем  $x_{k+1} = Bx_k$  отображение  $\varphi$

выписывается в явном виде  $\varphi^n(x) = B^n x$ . Инвариантными множествами будут линейные оболочки (подпространства) собственных векторов матрицы  $B$ , среди которых выделяются три:  $E^s$  (устойчивое) подпространство собственных векторов, отвечающих собственным числам  $|\mu_i(B)| < 1$ ;  $E^u$  (неустойчивое) – подпространство собственных векторов, отвечающих собственным числам  $|\mu_i(B)| > 1$ ;  $E^c$  (центральное) – подпространство собственных векторов, отвечающих собственным числам  $|\mu_i(B)| = 1$ .

Эти подпространства используются при линеаризации дискретных систем (1.9) в окрестности неподвижных точек.

### 2.3.2. Предельные множества

Пусть  $x(t)$  – решение системы (1.1), начинающееся в точке  $x \in P$ , и ему соответствует некоторая траектория в фазовом пространстве.

*Определение 2.11.* Точка  $y$  называется  $\omega$ -предельной точкой для  $x \in P$ , если существует последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow +\infty$  такая, что  $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ .

*Определение 2.12.* Множество всех  $\omega$ -предельных точек для траектории, начинающейся в точке  $x$ , называется  $\omega$ -предельным множеством для  $x$  и обозначается  $\omega(x)$ .

Объединение всех множеств  $\omega(x)$  для всех  $x \in Q \subset P$  обозначается  $\omega(Q)$ . Аналогично для отрицательных моментов времени можно определить предельные точки множества,  $\alpha$ , для которых  $t_k \rightarrow -\infty$ .

Множество  $\omega(x)$  состоит из полных траекторий, т. е. если  $y \in \omega(x)$ , то  $\varphi^t(y) \in \omega(x)$ . Следовательно, множество  $\omega(x)$  является инвариантным множеством.

Приведем некоторые свойства предельных множеств.

1. Предельное множество замкнуто.

2. Предельное множество состоит из целых траекторий. Это свойство формулируется следующим образом: предельное множество является инвариантным множеством по отношению к потоку, определенному системой (1.1).

3. Для того, чтобы предельное множество было пустым, необходимо и достаточно, чтобы траектория при  $t \rightarrow \infty$  уходила в бесконечность.

4. Для того, чтобы предельное множество состояло из единственной точки, необходимо и достаточно, чтобы траектория входила в эту точку при  $t \rightarrow \infty$ .

Точка покоя является своей единственной предельной точкой; замкнутая траектория также является своим собственным предельным множеством. Предельные точки незамкнутых траекторий более интересны, так как позволяют определить характер поведения траекторий при больших моментах времени.

### ***2.3.3. Притягивающие множества***

В случае, когда траектория неустойчива, но не уходит из некоторой ограниченной области фазового пространства, естественно предположить, что движению (траектории) присуща какая-то устойчивость.

Множество  $Q$  положительно инвариантно, если при  $t > 0$   $\varphi^t(Q) \subset Q$ . Множество  $Q$  просто инвариантно, если  $\varphi^t(Q) = Q$ . Окрестностью множества  $Q$  называется открытое множество  $U$ , включающее замыкание множества  $Q$ . Расстояние между точкой  $x \in P$  и множеством  $Q$  определяется как  $l = \text{dist}(x, Q) = \inf_{y \in Q} \{ \|x - y\| \}$ .

$\varepsilon$ -окрестностью  $U$  множества  $Q$  называется окрестность, все точки которой удалены от множества  $Q$  на расстояние не более, чем  $\varepsilon$ .

*Определение 2.13.* Компактное инвариантное относительно потока  $\varphi^t$  множество  $Q \subset P$  называется притягивающим множеством, если для него существует окрестность  $U$  такая, что почти для всех

$x \in U$ ,  $\varphi^t(x) \rightarrow Q$  при  $t \rightarrow \infty$  (т. е.  $\text{dist}(\varphi^t(x), Q) = \inf_{y \in Q} \|\varphi^t(x) - y\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Наибольшее множество  $U$ , удовлетворяющее этому определению (наибольшее притягивающее множество), называется областью притяжения множества  $Q$ .

Реже используется термин «множество, устойчивое по Ляпунову». Множество  $Q$  называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое что для всякого  $x$ , удовлетворяющего  $\text{dist}(x, Q) < \delta$ , и любого  $t > 0$  расстояние  $\text{dist}(\varphi^t(x), Q) < \varepsilon$ . Если к тому же расстояние  $\text{dist}(\varphi^t(x), Q) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то множество  $Q$  называют асимптотически устойчивым. Таким образом, притягивающее множество  $\alpha$  – это множество, асимптотически устойчивое по Ляпунову.

Казалось бы, этого определения достаточно для описания асимптотического поведения динамических систем. Однако существует ряд примеров, показывающих, что притягивающее множество может, несмотря на инвариантность, содержать внутри себя «много лишнего». Например, для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

отрезок  $-1 \leq x_1 \leq 1$ ,  $x_2 = 0$  является притягивающим множеством. Однако практически все траектории при  $t \rightarrow \infty$  будут стремиться к одной из двух устойчивых неподвижных точек  $x_1 = \pm 1$ ,  $x_2 = 0$ .

Поэтому наряду с притягивающим множеством используется также понятие аттрактора – меньшего множества, к которому стремятся «почти все» траектории динамической системы.

#### **2.3.4. Аттрактор**

В настоящее время нет единого определения аттрактора. Это связано, в первую очередь, с тем, что до сих пор неясно как устроены

аттракторы динамических систем при хаотических режимах. Не все притягивающие множества являются аттракторами, а только те, которые обладают свойством неразложимости на отдельные компактные инвариантные подмножества. Приведем два наиболее популярных на сегодняшний день определения аттрактора.

*Определение 2.14.* Аттрактором называется неразложимое притягивающее множество.

*Определение 2.15.* Аттрактором называется притягивающее множество  $Q$ , содержащее всюду плотную траекторию, или, содержащее точку  $x$ , для которой  $\omega(x) = Q$ .

Согласно этим определениям, в рассмотренном выше примере отрезок  $[-1, 1]$  аттрактором не является, а аттракторов два – неподвижные точки  $\pm 1$ . Областью притяжения каждого из них является соответствующая полуплоскость, не включающая ось  $x_2$ . Если аттрактор единственный, и его областью притяжения является все фазовое пространство, его называют универсальным, или глобальным.

Аттракторы нелинейных динамических систем бывают простыми (регулярными) и сложными (нерегулярными). В современной литературе нет строгого определения регулярности аттрактора. Интуитивно это понятие связано с достаточно простым поведением решений систем дифференциальных уравнений на таком аттракторе и с достаточной гладкостью аттрактора. Считается, что самым сложным на регулярном аттракторе может быть эргодическое движение.

Движение системы дифференциальных уравнений по ее инвариантному множеству будет эргодическим, если относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри любой области этого множества, равно относительному объему этой области и не зависит от выбора начальных условий. С течением времени фазовая траектория равномерно и плотно покрывает инвариантное множество. Действие фазового потока  $\varphi^t$  на малую область сводится к простому перемещению этой области по множеству. Как и в случае периодического

движения, любые две близкие в начальный момент траектории остаются близкими и во все последующие моменты времени.

Таким образом, простыми (регулярными) аттракторами принято считать устойчивые (асимптотически устойчивые) особые точки, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) предельные циклы и устойчивые инвариантные торы. Все эти аттракторы являются подмногообразиями фазового пространства (например, предельный цикл и двумерный инвариантный тор – это, соответственно, одномерное и двумерное подмногообразия). Динамика систем с такими аттракторами не является хаотической, а носит асимптотически сходящийся, периодический или эргодический характер. Главное – это то, что траектории систем с простыми (регулярными) аттракторами глобально устойчивы по отношению к малым возмущениям, что означает их глобальную предсказуемость.

Определить тип регулярного аттрактора, к которому принадлежит исследуемая траектория системы, позволяют характеристические показатели Ляпунова системы первого приближения, полученной в результате линеаризации вдоль этой траектории. Если все характеристические показатели Ляпунова отрицательны, то траектория (аттрактор) является устойчивой особой точкой (узлом или фокусом). Если один (старший) показатель равен нулю, а все остальные показатели отрицательны, то траектория, скорее всего, является устойчивым предельным циклом.

### ***2.3.5. Поглощающее множество***

Во многих практических случаях аттрактор найти не удастся, но важно знать, существует ли он. Для этого используется понятие поглощающего множества, которое построить гораздо проще, чем аттрактор. Допустим, что удалось найти множество  $V$  фазового пространства, в которое траектории входят, а обратно уже не выходят, остаются в нем навсегда. Если множество  $V$  компактно (или в случае конечномерного фазового пространства просто ограничено), то в нем все траектории должны стремиться к некоторому предельно-

му множеству, которое можно обозначить  $\omega(B)$ . Существует теорема, утверждающая, что  $\omega(B) = \Pi$  – притягивающее множество.

Пусть задано множество  $U \subset \mathbb{R}$  (возможно, что  $U = \mathbb{R}$ ). Положительно инвариантное множество  $B \subset U$  (т. е.  $\varphi^t(B) \subset B$  при  $t > 0$ ) называется поглощающим в  $U$ , если любая траектория, начинающаяся в точке  $x \in U$ , в течение конечного времени входит в множество  $B$ . Если множество  $B$  компактно, то существует множество  $Q = \omega(B)$ , которое будет притягивающим множеством, т. е. для  $x \in U$  расстояние  $\text{dist}(\varphi^t(x), Q) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Определение 2.16.* Компактное инвариантное множество  $B \subset \mathbb{R}$  называется поглощающим множеством, если существует его окрестность  $U$  такая, что все траектории, начинающиеся в  $U$ , за конечное время входят в  $B$  и остаются там навсегда.

Система, обладающая поглощающим множеством  $B$ , имеет и аттрактор  $A \subset \omega(B)$ . В отличие от аттрактора и притягивающего множества, поглощающее множество неединственное. Можно построить семейство вложенных друг в друга поглощающих множеств. Более того, поглощающее множество можно построить наиболее удобным для доказательства его свойств методом. Чаще всего его строят как сферу или эллипсоид в фазовом пространстве и доказывают, что расстояние от точки траектории  $\varphi^t(x)$  до центра сферы с течением времени уменьшается.

Таким образом, доказательство существования аттрактора сводится к доказательству существования поглощающего множества.

**Пример.** Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -bZ + XY \end{cases}$$

Представим  $Z$  как  $Z = z + r + \sigma$ , а  $X$  и  $Y$  заменим на  $x$  и  $y$ , тогда уравнения можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy - b(r + \sigma) \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на  $x$ , второе – на  $y$ , третье – на  $z$  и сложим. В результате получим

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} = -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 - b(r + \sigma)z.$$

Предполагая, что  $b > 1$ , представим  $-bz^2 = -z^2 - (b-1)z^2$ . Первый член сохраним, а второй сложим с  $-b(r + \sigma)z$ :

$$\begin{aligned} & -(b-1)z^2 - b(r + \sigma)z = \\ & = -(b-1) \left( z^2 + 2z \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right) + \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right)^2 - \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right)^2 \right) = \\ & = -(b-1) \left( z + \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right) \right)^2 + (b-1) \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right)^2 \leq \\ & \leq (b-1) \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right)^2 \equiv \frac{\gamma^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma^2 = 2(b-1) \left( \frac{b(r + \sigma)}{2(b-1)} \right)^2$ . Обозначим  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,

$l = \min(\sigma, 1)$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{R^2}{2} \right) & = -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 - b(r + \sigma) \leq \sigma x^2 - y^2 - z^2 + \frac{\gamma^2}{2} \leq \\ & \leq -l(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\gamma^2}{2} = -lR^2 + \frac{\gamma^2}{2}. \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\frac{d(R^2)}{dt} + 2lR^2 = \exp\{-2lt\} \frac{d}{dt} (\exp\{2lt\} R^2) \leq \gamma^2.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до  $t$ , получим

$$R^2(t) \leq R^2(0) \exp\{-2lt\} + \gamma^2 (1 - \exp\{-2lt\}).$$

Если в качестве поглощающего множества выбрать шар радиуса  $R_0 > \gamma$ , то траектория войдет в него за время, не превышающее

$$t_0 = \frac{1}{2l} \ln \left( \frac{R^2(0) - \gamma^2}{R_0^2 - \gamma^2} \right),$$

после чего  $R(t) < R_0$ . Следовательно, данный шар является поглощающим множеством для системы Лоренца, которая должна иметь внутри него притягивающее множество и аттрактор.

## 2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ

Понятие устойчивости тесно связано с асимптотическим поведением системы, с существованием предельного и притягивающего множества, аттрактора.

### 2.4.1. Понятие устойчивости

Объектами научного исследования, как правило, выступают явления, которые на малые внешние воздействия отвечают малыми изменениями состояний. Это свойство и называется устойчивостью. Устойчивостью должны обладать математические модели, описывающие изучаемые явления, в том числе, и динамические системы.

У динамической системы два основных компонента – фазовое пространство и его преобразование (поток), и оба они могут подвергаться воздействию шума. Шум может изменять начальные данные или в процессе эволюции «сталкивать» точку, определяющую текущее состояние системы, с одной траектории на другую достаточно близкую траекторию. В результате мы имеем дело не с одной траекторией, а с пучком траекторий. Для описания движения системы важно знать поведение не только отдельно взятой траектории, а всего пучка.

Поток может зависеть от каких-либо параметров. Шум может влиять на эти параметры, меняя само отображение. Какие-то изменения параметров несущественны и приводят лишь к количественным изменениям в поведении системы. Другие вызывают качественные

изменения траекторий, вплоть до изменения их топологических свойств.

Под устойчивостью можно понимать воспроизводимость того или иного свойства системы при наличии воздействий на систему.

*Воспроизводимость отдельной траектории.* Ей соответствует устойчивость по Ляпунову – малые отклонения начальных данных ведут к малым искажениям траектории. Это одно из наиболее популярных определений устойчивости, однако, оно не выполняется для систем с хаотическим поведением. С понятием устойчивости по Ляпунову тесно связано понятие  $\omega$ -предельного множества.

*Воспроизводимость асимптотического поведения ансамбля траекторий.* Все траектории, начинающиеся в некоторой области фазового пространства, притягиваются к одному и тому же инвариантному множеству. При этом устойчивость каждой отдельной траектории не предполагается. Устойчивость ансамбля траекторий определяется устойчивостью инвариантного множества по Ляпунову, которая тесно связана с понятием аттрактора.

*Воспроизводимость повторного появления траектории* в сколь угодно малой окрестности некоторой ее точки. Этот тип устойчивости – своеобразное обобщение свойства периодичности. Этому признаку отвечает так называемая устойчивость по Пуассону. С ней тесно связано понятие неблуждающего множества динамической системы, а также свойство эргодичности и понятие инвариантной меры.

*Воспроизводимость топологической структуры траекторий* динамической системы при возмущении отображения (сохранение количества и взаимного расположения инвариантных и предельных множеств, направления движения по траектории и т.п.). Воспроизводимости топологической структуры соответствует понятие структурной устойчивости или «грубости» динамической системы.

Как связаны эти четыре понятия? Из устойчивости траекторий по Ляпунову обычно следует устойчивость инвариантного множества,

откуда в свою очередь следует устойчивость по Пуассону. Структурная устойчивость стоит особняком.

#### **2.4.2. Устойчивость по Ляпунову**

Устойчивость по Ляпунову связана с воспроизводимостью отдельно взятой траектории. Для гиперболических особых точек устойчивость или неустойчивость определяется собственными значениями матрицы линеаризованной системы (системы первого приближения). Для периодических решений ту же роль играют мультипликаторы цикла или показатели Флоке, для непериодических решений – характеристические показатели Ляпунова.

**Устойчивость особых точек.** Особая точка автономной системы называется устойчивой (асимптотически устойчивой), если устойчиво (асимптотически устойчиво) соответствующее ей стационарное решение.

*Определение 2.17.* Стационарное решение автономной системы (решение тождественно равно особой точке) называется устойчивым по Ляпунову, если все решения этой системы с начальными условиями из достаточно малой окрестности особой точки определены на всей положительной полуоси времени и сходятся равномерно по времени к исследуемому стационарному решению при стремлении начального условия к указанной особой точке.

Другими словами, стационарное решение  $x^0$  системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что для всех решений  $x(t)$  системы (1.1) из  $\|x(0) - x^0\| < \delta$  следует  $\|x(t) - x^0\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq t_1 > 0$ .

*Определение 2.18.* Стационарное решение автономной системы (1.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения  $x(t)$  системы (1.1) с достаточно близкими к исследуемой особой точке начальными условиями

$\|x(0) - x^0\| < \delta$  стремятся к ней при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.  $\|x(t) - x^0\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Определение 2.19.* Стационарное решение  $x^0$  системы (1.1) называется экспоненциально устойчивым, если в условиях асимптотической устойчивости стремление решений системы (1.1) к особой точке экспоненциально, т.е.  $\|x(t) - x^0\| < c \exp\{-\gamma t\}$  с некоторыми положительными постоянными  $c$  и  $\gamma$ .

Устойчивость и асимптотическая устойчивость стационарных решений (особых точек) – локальное свойство векторного поля, задающего систему дифференциальных уравнений.

*Теорема 2.5.* (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Если оператор линеаризации  $A$  дифференцируемого векторного поля  $F(x)$  системы (1.1) в особой точке имеет собственные значения только с отрицательной вещественной частью, то эта особая точка асимптотически устойчива. Если одно из собственных значений оператора  $A$  имеет положительную вещественную часть, то особая точка не устойчива по Ляпунову.

*Определение 2.20.* Дифференцируемая функция  $V(x)$  называется функцией Ляпунова для особой точки  $x^0$  векторного поля  $F(x)$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

- функция  $V(x)$  определена в некоторой окрестности  $x^0$  и имеет в этой точке строгий локальный минимум;
- производная функции  $V(x)$  вдоль векторного поля  $F$  в некоторой окрестности точки  $x^0$  неположительна, т. е.

$$\frac{d}{dt}(V(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \leq 0.$$

*Теорема 2.6.* Особая точка дифференцируемого векторного поля, для которой существует функция Ляпунова, устойчива.

**Устойчивость периодического решения.** По значениям мультипликаторов цикла или показателей Флоке линейной неавтономной

системы (2.10) первого приближения можно сделать вывод об устойчивости периодического решения  $x^0(t)$  нелинейной автономной системы (1.1).

**Определение 2.21.** Предельный цикл называется орбитально асимптотически устойчивым (или просто устойчивым), если для сколь угодно малой его окрестности  $U$ , все траектории, начинающиеся в ней, не выходят со временем из  $U$  и неограниченно приближаются к циклу при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.7.** Один простой мультипликатор цикла всегда имеет значение  $+1$ , соответствующий показатель Флоке равен нулю. Если один показатель Флоке равен нулю, а остальные  $n-1$  показатели имеют отрицательные вещественные части (или все мультипликаторы цикла, кроме единичного, имеют модули, меньше 1, то есть лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного), то периодическое решение  $x^0(t)$  системы (1.1) устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво). Если же хотя бы один показатель Флоке имеет положительную вещественную часть (или мультипликатор цикла лежит вне единичного круга), то периодическое решение  $x^0(t)$  системы (1.1) неустойчиво (Рис. 2.7).

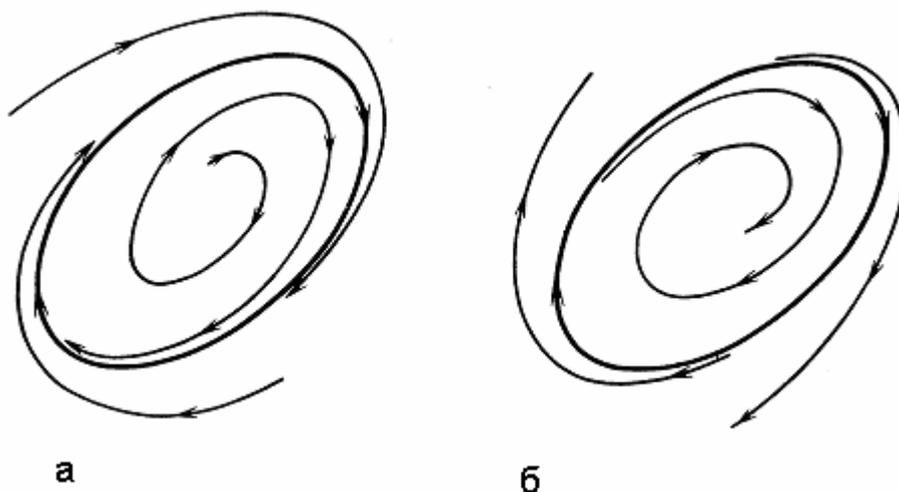


Рис. 2.7. Предельные циклы:  
а – устойчивый, б – неустойчивый.

В условиях сформулированной теоремы периодическое решение  $x^0(t)$  не только устойчиво, но каждое решение  $x(t)$ , лежащее вблизи его траекторий, обладает асимптотической фазой, т. е. существует постоянная  $c$  такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^0(t + c)\| = 0.$$

Производная  $y(t) = \dot{x}^0(t)$  исходного периодического решения нелинейной автономной системы (1.1) является одним из решений линейной неавтономной системы (2.10), так как

$$\dot{y} = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(x^0(t)) \dot{x}^0(t) = A(t)y(t).$$

Поэтому единичный мультипликатор цикла соответствует собственному вектору матрицы монодромии, касающемуся цикла. Он связан с движением вдоль цикла и не влияет на его устойчивость.

Периодическое решение не может быть асимптотически устойчивым, так как решения с начальными условиями в разных точках цикла не сближаются при  $t \rightarrow \infty$ .

**Устойчивость непериодических решений.** Понятия устойчивости, сформулированные для стационарных и периодических решений, естественным образом переносятся на произвольные решения автономной системы (1.1).

*Определение 2.22.* Решение  $x^*(t)$  автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) называется устойчивым по Ляпунову, если все решения этой системы с начальными условиями из достаточно малой окрестности начального условия указанного решения определены на всей положительной полуоси времени и сходятся равномерно по времени к исследуемому решению при стремлении начального условия к начальному условию указанного решения.

Другими словами, решение  $x^*(t)$  системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для

всех решений  $x(t)$  системы (1.1) из условия  $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta$  следует  $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .

*Определение 2.23.* Решение  $x^*(t)$  автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения  $x(t)$  системы (1.1) с достаточно близкими к исследуемому решению начальными условиями  $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta$  стремятся к нему при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.  $\|x(t) - x^*(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если в условиях асимптотической устойчивости стремление решений системы уравнений (1.1) к исследуемому решению  $x^*(t)$  имеет экспоненциальный характер ( $\|x(t) - x^*(t)\| \leq c \exp\{-\gamma t\}$  с некоторыми положительными константами  $c$  и  $\gamma$ ), то решение  $x^*(t)$  системы (1.1) называется экспоненциально устойчивым.

Для исследования устойчивости решения  $x^*(t)$  системы (1.1) проводится ее линеаризация на этом решении. В результате линеаризации получим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(t)y(t), \quad (2.15)$$

где  $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t))$ , а  $y(t) = x(t) - x^*(t)$ . В данном случае линейный оператор  $A(t)$  может иметь матрицу с произвольными ограниченными на полуоси  $0 \leq t \leq \infty$  элементами.

Рассмотрим решение  $y(t)$  линейной системы (2.15) и определим для него показатель Ляпунова  $\lambda(y)$  по формуле

$$\lambda(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}.$$

В частном случае, когда  $x^*(t) = x^0$  – стационарное решение, оператор линейной части имеет постоянную матрицу  $A(t) = A$ . При этом фундаментальная матрица решений линейной системы (2.15) имеет вид  $Y(t) = \exp(At)$ . Без ограничения общности будем считать, что матрица  $A$  имеет жорданову форму. Следовательно, каждой ее жордановой клетке порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  соответствует цепочка из  $k$  решений

$$y_i(t) = e^{\lambda t} \left( \xi_{i-1} + t\xi_{i-2} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \xi_0 \right), \quad i = \overline{1, k},$$

где  $\xi_0$  – собственный, а  $\xi_j$  – присоединенные векторы собственного значения  $\lambda$ . Для каждого из его решений показатель Ляпунова  $\lambda(y_i)$ , очевидно, равен  $\operatorname{Re} \lambda$ . Таким образом, линейная система (2.15) с постоянной матрицей  $A$  имеет  $m$  показателей Ляпунова с учетом их кратностей, совпадающих с вещественными частями собственных значений матрицы  $A$ . Кратность каждого показателя определяется порядком соответствующей ему жордановой клетки. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению стационарное решение (особая точка) системы (1.1) асимптотически устойчиво, если все показатели Ляпунова линейной системы первого приближения отрицательны.

Когда  $x^0(t)$  является периодическим решением автономной системы (1.1), показатели Ляпунова совпадают с вещественными частями показателей Флоке, что следует из представления фундаментальной матрицы решений в виде  $\Phi(t) = Z(t)\exp\{Rt\}$  с периодической и, следовательно, ограниченной матрицей  $Z(t)$ . Система имеет  $m$  показателей с учетом их кратностей, которые определяются порядками жордановых клеток матрицы  $R$ . Имеет место следующий результат.

*Теорема 2.8.* Если траектория автономной системы (1.1) остается в ограниченной области и не стремится к особой точке при  $t \rightarrow \infty$ ,

то по крайней мере один показатель Ляпунова линеаризованной на этом решении системы равен нулю.

Таким образом, если один из показателей Ляпунова системы, линеаризованной на периодическом решении, равен нулю, а все остальные показатели отрицательны, то предельный цикл устойчив. Нулевой показатель соответствует направлению, касательному к циклу.

В общем случае линейная неавтономная система (2.15) имеет  $n$  показателей  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ , среди которых могут быть и кратные. Показатели в этом случае уже не являются собственными значениями какой-либо постоянной матрицы, в том числе и матрицы  $A(\infty)$ , если даже соответствующий предел существует. Нулевой показатель соответствует направлению, касательному к ограниченному непериодическому решению и не стремящемуся к особой точке. Показатель Ляпунова  $\lambda_1$  называется старшим характеристическим показателем системы (2.15). Он обозначается  $\Lambda$  и равен

$$\Lambda = \sup_{y \neq 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}.$$

*Определение 2.24.* Линейная неавтономная система (2.15) с вещественными коэффициентами называется правильной, если сумма ее показателей Ляпунова совпадает со средним значением следа матрицы  $A(t)$ , который в свою очередь совпадает с дивергенцией векторного поля, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(s) ds = \\ &= \overline{\operatorname{tr} A(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} F(x^*(s)) ds. \end{aligned}$$

Принято считать, что все практически значимые системы являются правильными. Для правильных систем имеет место обобщенная теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

*Теорема 2.9.* Пусть решение  $x^*(t)$  неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) таково, что разность  $y(t) = x(t) - x^*(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = A(t)y(t) + f(y, t),$$

где  $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), t)$ ,  $\|f(y, t)\| \leq K\|y\|^q$ ,  $q > 1$ . Тогда, если система первого приближения  $\dot{y} = A(t)y(t)$  правильна и имеет отрицательный старший показатель  $\Lambda$ , то решение  $x^*(t)$  системы (1.2) асимптотически устойчиво. Если старший показатель Ляпунова положителен, то решение неустойчиво.

### **2.4.3. Устойчивость по Пуассону**

В случае сложных временных режимов, например, автоколебания с несколькими независимыми частотами или хаос, поведение траектории не является периодическим, однако немного напоминает его: траектория, побывав в какой-нибудь точке, с течением времени возвращается в ее окрестность и проходит достаточно близко от нее. Чем больше время, тем ближе к точке подойдет траектория. Близость к периодическому движению и положено в основу понятия неблуждающего множества и устойчивости по Пуассону.

*Определение 2.25.* Точка  $x$  называется неблуждающей для динамической системы, если для любой окрестности  $U$  точки  $x$  и для любого сколь угодно большого  $T > 0$  найдется момент времени  $t > T$ , такой что  $\varphi^t(U) \cap U \neq \emptyset$ . В противном случае точка называется блуждающей.

*Определение 2.26.* Множество  $\Omega$  всех неблуждающих точек динамической системы называется неблуждающим множеством.

Множество всех блуждающих точек открыто (если точка блуждающая, то существует ее окрестность, целиком состоящая из таких точек, в противном случае точка будет неблуждающей), а неблуждающее множество замкнуто.

Неподвижные точки и все точки периодических траекторий являются неблуждающими точками. Для более сложных аттракторов, при условии, что они являются компактными, удается установить даже более сильное свойство – устойчивость по Пуассону. Это результат известной теоремы Пуанкаре о возвращении.

*Определение 2.27.* Точка  $x$  называется (положительно) устойчивой по Пуассону, если для любой ее окрестности  $U$  и для любого  $T > 0$  найдется момент времени  $t > T$ , такой что  $\varphi^t(x) \in U$ .

Точка, устойчивая по Пуассону, является неблуждающей. Обратное, вообще говоря, неверно. Понятие неблуждающего множества используется в основном в теоретических построениях. В практических приложениях это понятие используется реже из-за трудностей доказательства данного свойства.

#### **2.4.4. Структурная устойчивость**

Перечисленные выше типы устойчивости связаны с поведением траекторий в фазовом пространстве. Векторное поле  $F$  и соответствующее ему отображение  $\varphi$  были фиксированными. Изучались свойства задаваемой ими системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим свойства семейства дифференциальных уравнений, например, вида (1.3), по отношению к возмущениям векторного поля. Определим устойчивость по отношению к возмущениям самого отображения  $\varphi$ , которую будем называть  $\varphi$ -устойчивостью.

Для исследования  $\varphi$ -устойчивости необходимо рассматривать не фазовое пространство  $P$ , а пространство динамических систем, определенных на  $P$ . Будем обозначать это пространство  $\mathbf{D}(P)$ . Например, это может быть подмножество пространства всех непрерывно дифференцируемых функций на  $P$ . Важно, чтобы в этом пространстве были определены понятия расстояния между динамическими системами и малой окрестности. Временной эволюции в пространстве  $\mathbf{D}(P)$  нет, а действие возмущения отображения  $\delta\varphi$  сводится к сдвигу

точки, отвечающей динамической системе  $\varphi$ , на небольшое расстояние  $\varepsilon = \|\delta\varphi\|$ .

Как определяется устойчивость в этом случае? Необходимо, чтобы все достаточно близкие динамические системы были в некотором смысле эквивалентны данной, т. е. все системы должны быть разделены на классы эквивалентности, и устойчивость будет иметь место, если такому классу будет соответствовать множества с ненулевой мерой (например, шар, куб). Проблема  $\varphi$ -устойчивости требует построения классификации динамических систем, когда классифицирующий признак меняется дискретно. Пространство динамических систем разбивается на множества – классы с ненулевой мерой, а границами их раздела должны быть множества нулевой меры (точка, отрезок, плоская фигура). При удачной классификации должна существовать возможность «подойти» к любой динамической системе сколь угодно близко по цепочке  $\varphi$ -устойчивых систем. Иными словами,  $\varphi$ -устойчивые динамические системы должны быть плотны в пространстве  $\mathbf{D}(\mathbf{P})$ .

Понятие структурной устойчивости (грубости) векторного поля или задаваемой им системы было предложено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным. Оно требует определений возмущения векторного поля и топологической эквивалентности векторных полей.

*Определение 2.28.* Возмущением векторного поля  $F(x) \in C^1$  амплитудой  $\varepsilon$  будем называть любое векторное поле  $F_1(x) \in C^1$ , для которого существует компактное множество  $K$ , вне которого  $F_1(x) \equiv F(x)$ , а на множестве  $K$  выполняется:

$$\|F(x) - F_1(x)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\partial(F(x) - F_1(x))/\partial x\| < \varepsilon.$$

*Определение 2.29.* Две системы дифференциальных уравнений (или два векторных поля) топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм фазового пространства одной системы на фазовое пространство второй системы, переводящий ориентированные траек-

тории первой системы в ориентированные траектории второй системы.

Данное определение является определением глобальной топологической эквивалентности, справедливой во всем фазовом пространстве. В случае топологической эквивалентности векторных полей направление времени вдоль эквивалентных траекторий должно сохраняться, но масштаб времени может изменяться.

*Определение 2.30.* Гладкое векторное поле  $F(x)$  (или дифференциальное уравнение (1.1)), заданное на гладком компактном многообразии  $M$ , называется структурно устойчивым, если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что все возмущения  $F_1(x)$  амплитудой меньшей, чем  $\varepsilon$ , топологически эквивалентны  $F(x)$ .

*Теорема 2.10.* Структурно устойчивые векторные поля образуют всюду плотное множество в пространстве всех непрерывно дифференцируемых полей на двумерном компактном многообразии.

Следовательно, структурно устойчивые векторные поля заполняют целые области в пространстве всех полей, и в любой окрестности любого структурно неустойчивого поля можно указать поле, являющееся структурно устойчивым. Таким образом, структурная устойчивость является типичным свойством для двумерных векторных полей.

Необходимые и достаточные условия структурной устойчивости двумерных автономных систем дифференциальных уравнений дает следующая теорема.

*Теорема 2.11.* Система дифференциальных уравнений (1.1) структурно устойчива (глобально структурно устойчива) на двумерном компактном многообразии  $M$  тогда и только тогда, когда:

- число особых точек конечно, и все они являются гиперболическими;
- число предельных циклов конечно, и все они невырождены;
- в многообразии  $M$  нет седловых связок, т. е. сепаратрис, идущих из седла в седло.

Выполнение первых двух условий теоремы обеспечивает в силу теоремы Гробмана–Хартмана локальную структурную устойчивость системы в окрестностях гиперболических особых точек и невырожденных предельных циклов, а дополнительное условие – отсутствие седловых гомоклинических и гетероклинических траекторий – является уже достаточным в двумерном случае условием для обеспечения глобальной структурной устойчивости системы в целом.

Для систем более высокой, чем два, размерности, перечисленные в теореме условия с заменой невырожденных циклов на гиперболические, являются необходимыми условиями глобальной структурной устойчивости. При невыполнении первых двух условий система не будет не только глобально, но даже и локально структурно устойчивой, а любая седловая связка разрушается малыми возмущениями векторного поля. Эти условия не являются достаточными для глобальной структурной устойчивости систем размерности выше двух. Более того, для таких систем множество структурно устойчивых векторных полей не является всюду плотным в пространстве всех непрерывно дифференцируемых векторных полей, т. е. существуют области, свободные от структурно устойчивых векторных полей, и, следовательно, типичным свойством является структурная неустойчивость.

### **3. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА**

Причины возникновения хаотических процессов в детерминированных нелинейных системах связаны, прежде всего, с экспоненциальной неустойчивостью, которая, в свою очередь, порождает высокую чувствительность к точности задания начальных данных. При этом вид траекторий свидетельствует о наличии сложного апериодического процесса, не отличающегося по физическим характеристикам от случайного процесса.

Сложные нерегулярные движения нелинейных систем получили название детерминированного хаоса. В этом понятии объединены прямо противоположные по смыслу термины: детерминизм, ассоциируемый с однозначной предсказуемостью и воспроизводимостью, и хаос, связываемый с непредсказуемостью. Внешне процесс эволюции системы ничем не отличается от случайного процесса. Однако при более детальном анализе вскрывается одно важное отличие – он воспроизводим. Повторив точно начальное состояние, мы вновь воспроизводим ту же самую траекторию независимо от ее сложности.

#### **3.1. ПРИЗНАКИ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ**

Классическая теория дифференциальных уравнений имеет дело с поведением на конечном временном интервале. Конечность временного интервала позволяет доказывать многие теоремы и строить вычислительные алгоритмы. Нелинейная динамика изучает асимптотическое поведение систем.

Хаотическая система объединяет в себе глобальную устойчивость (траектории не уходит из некоторой области фазового пространства) с локальной неустойчивостью (малые погрешности начальных данных нарастают, близкие траектории расходятся).

Хаос – одно из важных понятий нелинейной динамики, которому трудно дать строгое математическое определение, однако можно выделить его характерные признаки.

### 3.1.1. Существенная зависимость от начальных данных

Одним из ключевых признаков динамического хаоса является высокая чувствительность к начальным данным, которая подразумевает экспоненциальное удаление бесконечно близких траекторий. Траектории притягиваются к множеству, обладающему фрактальной структурой, – странному аттрактору. Движение на аттракторе непредсказуемо и хаотично.

Возьмем две первоначально близкие точки  $x'(0)$  и  $x''(0) = x'(0) + \varepsilon$ , лежащие на аттракторе, и определим расстояние между ними  $r(t) = |x'(t) - x''(t)|$ . Здесь  $x'(t)$  и  $x''(t)$  – решения исследуемой нелинейной системы с начальными данными  $x'(0)$  и  $x''(0)$ . Геометрически  $r(t)$  соответствует длине отрезка с концами в точках  $x'(t)$  и  $x''(t)$ . В момент времени  $t$  расстояние можно оценить через вектор  $\varepsilon$ , характеризующий погрешность задания начальной точки и некоторый коэффициент  $\lambda(x'(0), \varepsilon)$ :

$$|x'(t) - x''(t)| = \varepsilon \exp \{ \lambda(x'(0), \varepsilon) t \}.$$

Показатель  $\lambda(x'(0), \varepsilon)$ , определяющий скорость экспоненциального удаления траекторий, называется характеристическим показателем Ляпунова. Показатель Ляпунова характеризует аттрактор, а не отдельно взятую траекторию, если рассматривать множество бесконечно близких траекторий и среднюю скорость их удаления на большом интервале времени. Формально, характеристический показатель Ляпунова вводится следующим образом:

$$\lambda(x'(0), \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r(0) \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \ln \frac{r(t)}{r(0)} \right].$$

Движение на аттракторе оказывается неустойчивым по Ляпунову (локально неустойчивым). Чем больше величина характеристического показателя Ляпунова, тем более хаотичным выглядит движение.

### 3.1.2. Инвариантная мера

Неустойчивость траекторий хаотических динамических систем приводит к тому, что сколь бы малой ни была погрешность в определении исходного состояния системы, эта погрешность будет нарастать, пока не достигнет размера аттрактора. После этого попытки предсказания будущего поведения становятся лишенными всякого смысла.

Разбив область фазового пространства, в которой содержится аттрактор, на ячейки, вычислим отношение  $\omega_i(t) = t_i / t$ . Здесь  $t_i$  – время, проводимое траекторией в  $i$ -й ячейке,  $t$  – полное время движения на аттракторе. Если время  $t \rightarrow \infty$ , то это отношение стремится к некоторой фиксированной для данной ячейки величине. Отклонение от среднего значения уменьшается с ростом  $t$ . Это напоминает стремление частоты случайного события к его вероятности при увеличении числа испытаний. Возникает аналогия между теорией вероятностей и теорией динамических систем.

Подобно тому, как в теории вероятностей вводят меру на пространстве случайных событий (для дискретного пространства – это вероятность элементарного события, а для непрерывного – плотность вероятности), можно определить некоторую меру в фазовом пространстве, связанную с динамической системой. Эта мера получила название инвариантной меры. В данном случае она инвариантна при временном сдвиге траектории – переходе от точки  $x(t)$  к точке  $x(t + \tau)$ .

Инвариантная мера позволяет множеству в фазовом пространстве сопоставить некоторое число, которое можно интерпретировать как вероятность посещения траекторией данного множества. Определив, таким образом, понятие вероятности, можно для исследования динамических систем применять статистические методы, например, ввести понятие средней величины, корреляций, энтропии. Для динамического хаоса статистические методы оказываются весьма подходящим инструментом его изучения.

К понятию инвариантной меры можно прийти и иным путем, рассмотрев не одну траекторию, а целый ансамбль, начальные данные для которого распределены в фазовом пространстве с некоторой плотностью вероятностей  $\rho(x)$ . Пусть отображение  $x \rightarrow \varphi^t(x)$  определяет динамику исследуемого процесса. Для какой-либо траектории из ансамбля вероятности оказаться в бесконечно малой окрестности точки  $x$  и в окрестности ее образа  $\varphi^t(x)$  должны совпадать, т. е.  $\rho(x)dx = \rho(\varphi^t(x), t) d\varphi^t(x)$ . Из-за преобразования пространства размер этой бесконечно малой окрестности, вообще говоря, изменится, а поэтому изменится и плотность вероятности. Преобразование пространства  $x \rightarrow \varphi^t(x)$  порождает преобразование плотности вероятности  $\rho(x) \rightarrow \rho(x, t) = \Psi(\rho(x), t)$ . Таким образом, случайные последовательности можно представить как результат действия некоторого отображения на пространстве случайных событий, если это отображение сохраняет меру или мера для него является инвариантной.

Существование инвариантной меры в фазовом пространстве является важной характеристикой хаоса. Инвариантная мера характеризует частоту попадания фазовой точки в заданный объем, определяя «долю» всех итераций, попадающих в точку  $x$ , или с какой плотностью итерации исследуемого отображения размазаны по множеству.

### ***3.1.3. Эргодичность и перемешивание***

Движение системы называется эргодическим, а сама система – эргодической, если для любой интегрируемой функции  $h(x(t))$  и для любых начальных условий выполнено равенство

$$\langle h \rangle = \bar{h}(x_0),$$

т. е. среднее значение функции по времени равно фазовому среднему. Для эргодической системы относительное время, проводимое системой в подобласти  $E$  области  $A$ , пропорционально относительному объему  $V_E/V_A$  и не зависит от начального состояния. Иными словами, фазовая кривая эргодической системы равномерно и плотно за-

полняет весь объем области  $A$ .

Эргодичность – необходимое, но не достаточное условие хаотичности движения динамической системы. Для автономной гамильтоновой системы движение происходит по фазовому многообразию, размерность которого меньше чем размерность всего фазового пространства, так как в таких системах есть первый интеграл – энергия. Движение трехмерной гамильтоновой системы с одним первым интегралом будет происходить на двумерном торе. Выделенная начальная область  $E$  под действием фазового потока перемещается по тору без изменения ее формы.

Существуют системы с более сложными режимами движения, для которых начальный объем, перемещаясь по доступной части фазового пространства, сильно деформируется. С течением времени разные части исходной области  $E$  можно обнаружить в разных частях объема области  $A$  вне зависимости от формы и расположения  $E$ . Это свойство, называемое перемешиванием, может служить критерием хаотичности.

Перемешивание связано со сходимостью мер. Если преобразование плотности вероятности под действием оператора Перрона–Фробениуса независимо от начального распределения стремится к инвариантной мере, то говорят, что динамическая система обладает свойством перемешивания. Начальное распределение «перемешивается» и «растекается» по всему аттрактору, подобно тому, как капля чернил в стакане воды при перемешивании распространяется по всему стакану.

Если в начальный момент на множестве  $B$ , принадлежащем аттрактору  $A$ , задано некоторое распределение вероятностей, то с течением времени, благодаря неустойчивости траекторий, это распределение «расплывается» по всему аттрактору и стремится с точностью до множителя к распределению, соответствующему инвариантной мере.

Перемешивание – более сильное свойство, чем эргодичность. Из

него сразу вытекает, что автокорреляционная функция динамической системы должна экспоненциально убывать, а скорость убывания связана со скоростью сходимости меры к инвариантной мере. Однако если для эргодичности существуют теоремы, доказывающие, что этим свойством обладает большинство реальных систем, то перемешивание требует доказательства в каждом отдельном случае.

Полагают, что наличие положительного характеристического показателя Ляпунова (т. е. экспоненциальное разбегание близких траекторий) свидетельствует о перемешивании. Это утверждение в настоящий момент не доказано, хотя и не опровергнуто.

С течением времени малый объем фазового пространства размывается по всему аттрактору, и возникает эффект перемешивания. Если в начальный момент времени состояние системы было известно достаточно точно, то со временем, зависящим от скорости перемешивания, о состоянии системы можно говорить, что оно «где-то на аттракторе». На больших временах характеризовать систему можно, только указав вероятность появления траектории в окрестности некоторой точки, т. е. мы приходим к вероятностному описанию динамического хаоса с использованием инвариантной меры и энтропии — степени хаотичности системы.

#### **3.1.4. Энтропия**

В теории информации энтропия вводится для систем, которые могут находиться в различных состояниях  $x_i$  с различной вероятностью  $p_i = p(x_i)$ .

Шенноном было показано, что состояние неопределенности характеризуется энтропией, которая вводится как

$$H = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Мерой информации, содержащейся в сообщении, является изменение энтропии. Если сообщение полностью определяет текущее состояние системы, то после его получения  $H = 0$ . Тогда информация, содержащаяся в сообщении,  $I = \Delta H = H_0$ .

Разобьем фазовое пространство динамической системы на непесекающиеся множества  $A_i$ . Пусть каждое множество имеет диаметр не более  $\varepsilon$ , а его мера равна  $p_i = \mu(A_i)$ . Можно определить количество информации, которое дает знание текущего состояния системы с точностью  $\varepsilon$ . С течением времени, если система хаотическая (перемешивающая), образы почти всех множеств  $A_k$  будут иметь непустое пересечение со всеми остальными множествами  $A_i$ . Перемешивающая система с течением времени увеличивает неопределенность своего состояния. В таком случае говорят, что система производит информацию. Скорость производства информации или неопределенности называют метрической энтропией динамической системы.

Энтропия динамической системы позволяет определить время предсказуемости ее поведения

$$T_{pr} \approx H^{-1} \log \varepsilon^{-1}.$$

Различают объемную и линейную предсказуемость. Объемная предсказуемость зависит от нарастания количества фазовых объемов  $A_i$ , по которым расплзается пятно первоначальной погрешности. Линейная предсказуемость определяется разницей между истинной и возмущенной траекториями  $\|\varphi^t(x) - \varphi^t(x + \varepsilon \delta x)\|$ . Энтропия связана с объемной трактовкой предсказуемости. Линейная трактовка связана с характеристическими показателями Ляпунова.

### ***3.1.5. Автокорреляционная функция***

При изучении сложных режимов движения используется автокорреляционная функция, которая является достаточно эффективной характеристикой поведения исследуемой системы. При периодической или квазипериодической динамике автокорреляционная функция будет периодической или квазипериодической. Если с течением времени автокорреляционная функция стремится к нулю, и система не имеет устойчивых стационарных точек, то следует ожидать, что будет наблюдаться хаотический режим движения. Стремление к нулю авто-

корреляционной функции используется в качестве одного из критериев динамического хаоса.

Наряду с автокорреляционной функцией (особенно при экспериментальных исследованиях) для установления хаотичности движения часто применяется спектральная плотность (или просто спектр). Характер спектральной плотности – один из самых простых и вполне надежных критериев, используемых для анализа режимов движения. Если система демонстрирует периодическую динамику, то спектр такого движения будет дискретным. Он будет состоять из линий, отвечающих частотам движения и кратным гармоникам. Для случая хаотических режимов спектр будет сплошным.

### ***3.1.6. Фрактальная структура странных аттракторов***

Как уже отмечалось выше, одним из ключевых признаков детерминированного хаоса является высокая чувствительность к начальным данным или экспоненциальное (в среднем) удаление бесконечно близких траекторий.

Аттрактор для случая регулярной динамики может быть либо устойчивой стационарной точкой, либо устойчивым предельным циклом, либо инвариантным тором. Все эти подмножества являются подмногообразиями фазового пространства.

Математическим образом хаотических движений служит странный аттрактор, который уже не обладает гладкой структурой и достаточной непрерывностью, предполагаемых в понятии подмногообразия. Странные аттракторы имеют более сложное геометрическое строение, чем многообразия. На асимптотической стадии траектория стремится к притягивающему множеству, обладающему фрактальной структурой, или фракталу. Типичными чертами фрактальных множеств является масштабная инвариантность, несовпадение метрической и топологической размерностей, негладкие границы.

Масштабная инвариантность предполагает, что при увеличении масштаба некоторой подобласти странного аттрактора мы получим объект, геометрически сходный по своей структуре с целым аттрак-

тором. Топологической характеристикой, описывающей степень сложности фрактального множества, одновременно и степень хаотизации движения по аттрактору, является его дробная размерность, которая указывает на близость этого множества к соответствующему гладкому многообразию. Дробная размерность используется в качестве одного из критериев отличия странных аттракторов от простых аттракторов. Для описания странных аттракторов предложены также вероятностные размерности, при вычислении которых главную роль играет частота посещения различных областей аттрактора типичными фазовыми траекториями.

Размерность аттрактора служит характерным количественным критерием, позволяющим различать структуру аттрактора.

Таким образом, характерными признаками детерминированного хаоса являются:

- существенная зависимость движений динамических систем от начальных данных;
- размазывание малого объема фазового пространства по всему аттрактору и возникновение эффекта перемешивания;
- беспорядочное, нерегулярное поведение фазовой траектории на аттракторе;
- широкополосный спектр мощности исследуемого процесса;
- малый радиус корреляции процесса.

В качестве математических критериев динамического хаоса выступают: показатели Ляпунова, энтропия, плотность инвариантной меры, фрактальная размерность, автокорреляционная функция, спектр мощности.

### **3.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА**

Одна из особенностей нерегулярных режимов – неустойчивость траекторий, принадлежащих хаотическому или странному аттрактору. Количественной мерой этой неустойчивости являются характеристические показатели, введенные первоначально Ляпуновым для исследу-

дования поведения одной траектории. Характеристические показатели Ляпунова предлагались как обобщение собственных значений постоянных матриц на случай зависящих от времени матриц, которые возникают при исследовании устойчивости нелинейных динамических систем. Характеристические показатели являются усредненными аналогами собственных значений.

### 3.2.1. Непрерывные динамические системы

Пусть задана автономная динамическая система

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

где  $x_0$  - начальные данные. Определим изменение траектория  $x(t)$  при бесконечно малом приращении начальных данных  $\delta x_0$ , рассматривая бесконечно близкую траекторию  $x(t) + \delta x(t)$ . Решение системы (3.1) дифференцируемо по начальным данным для конечных значений времени  $t$ , поэтому

$$\delta \dot{x}(t) = \Phi(t) \delta x_0,$$

где  $\Phi(t) = (\phi_{ij}(t))_{i,j}^n$ ,  $\phi_{ij}(t) = \partial x_i(t) / \partial x_{0j}$  - матрица производных от решения по начальным данным.

Для линейных систем матрица  $\Phi(t)$  совпадает с нормированной фундаментальной матрицей. Для нелинейной системы по заданному начальному возмущению  $\delta x_0$  можно найти  $\delta x(t)$ , решая соответствующую линейную систему

$$\delta \dot{x}(t) = DF(x(t)) \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0, \quad (3.2)$$

где  $DF(x(t)) = (\partial F_i / \partial x_j)_{i,j=1}^n = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n \equiv A(t)$  - матрица Якоби.

В силу линейности уравнения (3.2) амплитуда решения несущественна. Важен «коэффициент приращения» решения за время  $t$ , поэтому от бесконечно малых величин  $\delta x$  можно перейти к конечным значениям  $u$ , считая  $\delta x = \varepsilon u$ . Бесконечно малая амплитуда  $\varepsilon$ , входящая, как в правую, так и левую части уравнений, сокращается. Тогда

исследование устойчивости системы (3.1) сводится к исследованию устойчивости линейной системы вида

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(0) = u_0. \quad (3.3)$$

Начальное возмущение  $u_0$  определяет направление, в котором мы выбираем бесконечно близкую траекторию в точке  $x_0$ . Векторы  $x$  и  $u$  принадлежат к разным пространствам:  $x$  принадлежит фазовому пространству  $P$  динамической системы, а  $u$  – касательному пространству  $\Sigma_t$  в точке  $x_0$  (рис. 3.1).

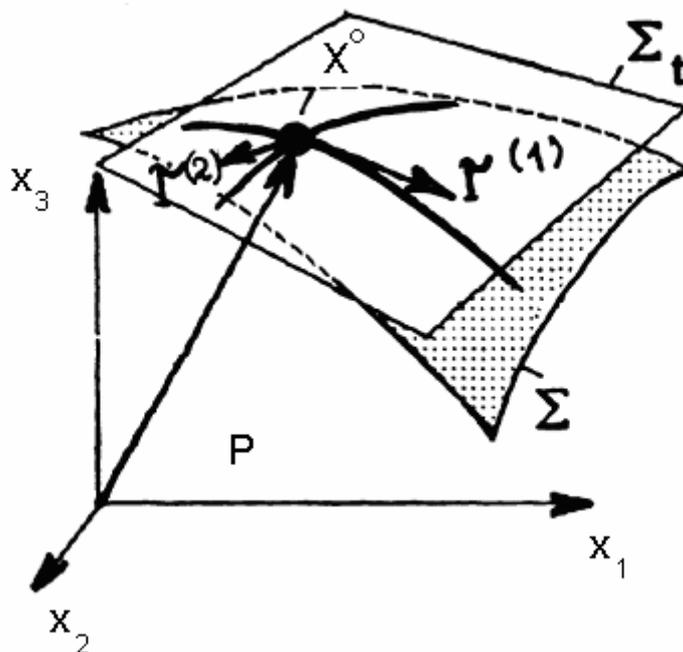


Рис. 3.1. Касательное пространство в точке  $x_0$

Решение  $u(t)$  системы (3.3) удобно выразить через нормированную фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$ , которая удовлетворяет тем же самым дифференциальным уравнениям

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

Тогда решение системы (3.3) можно представить в виде  $u(t) = \Phi(t)u_0$ . Для одних направлений вектора  $u_0$  (выбранного вектора начальных условий) близкие траектории будут экспоненциально удаляться. Для других векторов  $u_0$  траектории будут экспоненциально

сближаться, для третьих – расстояние между траекториями остается постоянным или меняется медленнее, чем экспоненциально. Для неподвижной точки имеем  $A(t) = A = \text{const}$ , и эти случаи соответствуют собственным значениям с вещественными частями:  $\text{Re } v_i > 0$ ,  $\text{Re } v_i < 0$ ,  $\text{Re } v_i = 0$ . Здесь  $v_i$  – собственные значения матрицы  $A$ .

А.М. Ляпунов для описания поведения решений динамической системы ввел характеристический показатель функции  $u(t)$ .

*Определение 3.1.* Характеристическим показателем функции  $u(t)$  называется число (или символ  $\pm \infty$ ), определенное как

$$\lambda(u) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln |u(t)|). \quad (3.4)$$

Характеристический показатель определяет изменение модуля функции по шкале показательных функций  $\exp\{\alpha t\}$ . Для этих функций характеристический показатель равен  $\alpha$ . Для произвольных функций  $u(t)$  справедливо тождество

$$|u(t)| = \exp(1/t) \ln |u(t)| t,$$

которое и поясняет определение 3.1.

Определим значения характеристического показателя  $\lambda(u)$  в случае неподвижной точки системы (3.1)  $x(t) = x_0 = \text{const}$ . Пусть все собственные значения  $v_i$  матрицы  $A$  линеаризованной системы (3.3) вещественны, различны и пронумерованы в порядке убывания:  $v_1 > v_2 > \dots > v_n$ . Обозначим соответствующие им собственные векторы  $r^{(i)}$ ,  $A r^{(i)} = v_i r^{(i)}$ ,  $\|r^{(i)}\| = 1$ . Собственные векторы  $r^{(i)}$  образуют базис в касательном пространстве в точке  $x_0$ . Любое решение  $u(t)$  системы (3.3) можно представить как линейную комбинацию базисных решений  $u_i(t) = \exp\{v_i t\} r^{(i)}$ , отвечающих начальным данным  $u_i(0) = u_{0i} = r^{(i)}$ . Если  $u(0) = \sum_i c_i r^{(i)}$ , то общее решение уравнения (3.3)

имеет вид

$$u(t) = \sum_i c_i u_i(t) = \sum_i c_i \exp\{v_i t\} r^{(i)}. \quad (3.5)$$

Пусть  $j$  – номер, при котором  $c_1 = c_2 = \dots = c_{j-1} = 0$ ,  $c_j, c_{j+1}, \dots, c_n \neq 0$ .

Тогда решение системы (3.3) будет определяться соотношением

$$u(t) = \sum_{i=j}^n c_i \exp\{v_i t\} r^{(i)} = \exp\{v_j t\} \left( c_j + \sum_{i=j+1}^n c_i \exp\{(v_i - v_j)t\} \right) r^{(j)},$$

и характеристический показатель Ляпунова (3.4) равен

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln \|u(t)\|) = \\ &= v_j + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( t^{-1} \ln \left\| c_j r^{(j)} + \sum_{i=j+1}^n c_i \exp\{(v_i - v_j)t\} r^{(i)} \right\| \right) = v_j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) имеет следующую геометрическую интерпретацию. Каждый собственный вектор  $r^{(j)}$  задает инвариантное направление в касательном пространстве  $\Sigma_t$  векторов  $u$ . Если вектор начального смещения  $u(0) = u_0$  направлен вдоль одного из векторов  $r^{(j)}$ , тогда  $u(t)$  остается параллельным ему. С течением времени расстояние между траекториями возрастает или убывает по экспоненциальному закону:  $\|u(t)\| \approx \exp\{\lambda_j t\}$ . При таком выборе вектора начального смещения  $u_0$  имеем  $\lambda(u) = \lambda_j = v_j$ .

В общем случае вектор начального смещения  $u_0$  имеет составляющие вдоль нескольких или всех векторов  $r^{(j)}$ . При больших моментах времени изменение расстояния между двумя траекториями  $\|u(t)\|$  будет определяться слагаемым с наибольшим показателем экспоненты в разложении (3.5) вектора  $u(t)$ . В зависимости от того, какие собственные векторы  $r^{(j)}$  присутствуют в разложении вектора начального смещения  $u_0$ , доминирующая экспонента будет различна.

Однако при достаточно больших моментах времени расстояние  $\|u(t)\|$  пропорционально какой-либо из экспонент  $\exp\{\lambda_j t\}$ . Следовательно, функция  $\lambda(u)$  может принимать значения, равные только

$\lambda_j = \nu_j$ , и при повороте вектора  $u_0$  могут происходить только скачкообразные изменения функции  $\lambda(u)$ . Таким образом, характеристический показатель может принимать только  $n$  различных значений  $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$  в зависимости от начальных данных.

У матрицы  $A$  могут быть кратные и комплексные собственные значения. В этом случае вещественных векторов может не быть, а будут минимальные инвариантные подпространства  $R_j$  (для любого  $u \in R_j \quad Au \in R_j$ ) размерности  $d_j = \dim R_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , при этом  $d_1 + d_2 + \dots + d_m = n$ .

Среди всего набора характеристических показателей Ляпунова наиболее важен наибольший (старший) показатель  $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ . Покажем, что при произвольном выборе начального смещения  $u_0$  предел (3.4) дает максимальный характеристический показатель Ляпунова. Произвольно взятый вектор  $u(t)$  будет иметь проекции на все векторы  $r^{(j)}$ , в том числе и на тот из них, который отвечает максимальному значению собственного числа  $\nu_1$ . При больших временах экспонента с этим значением  $\nu_1$  в разложении (3.5) будет доминировать, а поэтому предел в (3.6) будет давать значение  $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ .

Чтобы получить меньшее значение характеристического показателя  $\lambda(u) = \lambda_i$ , необходим специальный выбор начальных данных. Простейший случай соответствует выбору одномерных инвариантных подпространств  $R_j$  и

$$u_0 \in \text{span} \{r^{(i)}, r^{(i+1)}, \dots, r^{(n)}\} \setminus \text{span} \{r^{(i+1)}, \dots, r^{(n)}\}.$$

Здесь  $\text{span}$  - линейная оболочка системы векторов, перечисленных выше в фигурных скобках.

Кроме обычных показателей  $\lambda(u)$ , характеризующих одно решение (растяжение или сжатие в одном направлении), используют показатели Ляпунова порядка  $m > 1$ , которые определяют изменение  $m$ -мерных фазовых объемов ( $m \leq n$ ). Пусть  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  -

линейно независимые решения, а  $\text{Vol}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$  – объем образуемого ими  $m$ -мерного параллелепипеда, который равен

$$\text{Vol}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) = \left( \det \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle \end{bmatrix} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $\langle u_i, u_j \rangle$  – скалярное произведение векторов.

*Определение 3.2.* Характеристическим показателем порядка  $m$  называется число, определенное как

$$\Lambda_m(u_1, u_2, \dots, u_m) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{-1} \ln \text{Vol}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \right]. \quad (3.7)$$

Подобно тому, как типичным значением характеристического показателя  $\lambda(u)$  является  $\lambda_1$ , типичным значением характеристического показателя  $m$ -го порядка  $\Lambda_m$  является  $\Lambda_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ .

Среди всех  $\Lambda_m$  выделяется показатель  $n$ -го порядка. Любой набор  $n$  линейно независимых решений образует фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$ . Ее определитель называется определителем Вронского  $W(t) = \det \Phi(t)$ . С его помощью фазовый объем можно записать в виде

$$\text{Vol}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = |W(t)|.$$

Для уравнения (3.3) справедливо:  $\dot{W} = (\text{tr } A(t))W$  или  $d \ln |W| / dt = \text{tr } A(t)$ . Отсюда следует, что характеристический показатель  $n$ -го порядка равен

$$\Lambda_n = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{-1} \int_0^t (\text{tr } A(\tau)) d\tau \right].$$

Если существует точный предел, тогда

$$\Lambda_n = \overline{\text{tr } A}.$$

Здесь  $\overline{\text{tr } A}$  – среднее по времени значение следа матрицы  $A(t)$ .

В последнее соотношение для характеристического показателя  $\Lambda_n$  вектор  $u(t)$  не входит, поэтому этот показатель является характеристикой всей динамической системы, а не ее отдельно взятой траек-

тории. В зависимости от значения характеристического показателя  $n$ -го порядка динамические системы подразделяются на консервативные, сохраняющие  $n$ -мерные фазовые объемы ( $\Lambda_n = 0$ ), и диссипативные ( $\Lambda_n < 0$ ), фазовые объемы которых сжимаются.

Набор показателей Ляпунова линеаризованной системы (3.3) характеризует устойчивость траектории  $x(t)$  нелинейной системы (3.1). Если  $\lambda_1 < 0$ , то траектория  $x(t)$  асимптотически устойчива; если  $\lambda_1 > 0$  неустойчива. Набор характеристических показателей упорядоченных по убыванию  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  называют ляпуновским спектром нелинейной динамической системы (3.1).

**Пример.** Для системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

имеем

$$F(x) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ (r-z)x - y \\ xy - bz \end{pmatrix},$$

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(DF(x)) = \text{tr}A = -(\sigma + 1 + b).$$

Так как след матрицы  $A$  не зависит от траектории  $x(t)$  и от времени, он и будет средним значением. Для аттрактора системы Лоренца характеристический показатель (3.7) третьего порядка равен  $\Lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b)$ .

### 3.2.2. Дискретные динамические системы

Пусть задана динамическая система с дискретным временем

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x(0) = x_0, \quad (3.8)$$

где  $x_0$  - начальные данные. Оценим изменение траектории  $x_k$  при

бесконечно малом изменении начальных данных  $\delta x_0$ . Рассмотрим траектории  $x_k$  и  $x_k + \delta x_k$ . По заданному начальному возмущению  $\delta x_0$  можно найти  $\delta x_k$ , решая соответствующую линейную систему

$$\delta x_{k+1} = Df(x_k) \delta x_k, \quad \delta x(0) = \delta x_0,$$

где  $Df(x_k) = (\partial f_i / \partial x_j)_{i,j=1}^n = (b_{ij})_{i,j=1}^n \equiv B_k$  – матрица Якоби. Переход от бесконечно малых величин  $\delta x_k$  к конечным значениям  $u_k$  (например, считая  $\delta x_k = \varepsilon u_k$ ) позволяет свести исследование устойчивости системы (3.8) к исследованию устойчивости линейной системы

$$u_{k+1} = B_k u_k, \quad u(0) = u_0. \quad (3.9)$$

Начальное возмущение  $u_0$  определяет направление, в котором мы выбираем бесконечно близкую траекторию в точке  $x_0$ . Векторы  $x_k$  и  $u_k$  принадлежат разным пространствам:  $x_k$  принадлежит фазовому пространству динамической системы, а  $u_k$  – касательному пространству в точке  $x_k$ .

Для системы (3.9) решение бывает удобно выразить через нормированную фундаментальную матрицу  $\Phi_k$ , которая удовлетворяет тем же самым разностным уравнениям

$$\Phi_{k+1} = B_k \Phi_k, \quad \Phi_0 = I. \quad (3.10)$$

Тогда решение системы (3.9) можно записать в виде  $u_k = \Phi_k u_0$ . Для одних направлений выбранного вектора  $u_0$  близкие траектории будут экспоненциально удаляться, для других – экспоненциально сближаться, для третьих – расстояние примерно остается тем же или меняется медленнее, чем экспоненциально. Для неподвижной точки когда  $B_k \equiv B = \text{const}$ , эти случаи соответствуют собственным значениям  $|\mu_i| > 1$ ,  $|\mu_i| < 1$ ,  $|\mu_i| = 1$ . Здесь  $\mu_i$  – собственные значения матрицы  $B$ .

В случае дискретной системы характеристические показатели Ляпунова определяются из следующих соображений. Отрезок длины  $|\delta x_0|$  после  $k$  итераций в случае экспоненциального разбегания фазо-

вых траекторий будет иметь длину порядка  $|\delta x_0| \exp\{\lambda(x_0)k\}$ , т. е.

$$|\delta x_0| \exp\{\lambda(x_0)k\} = |f^{(k)}(x_0 + \delta x_0) - f^{(k)}(x_0)|.$$

Из последнего соотношения и следует формула для определения характеристического показателя дискретной системы

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \left[ k^{-1} \ln \left| \frac{f^{(k)}(x_0 + \delta x_0) - f^{(k)}(x_0)}{\delta x_0} \right| \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^{-1} \ln \left| \frac{df^{(k)}(x_0)}{d x_0} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Величина  $\exp\{\lambda(x_0)\}$  определяет «среднее» растяжение расстояния между близкими начальными точками за одну итерацию.

Воспользовавшись формулой для производной сложной функции

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} f^{(2)}(x) \right|_{x=x_0} &= \left. \frac{d}{dx} f(f(x)) \right|_{x=x_0} = \\ &= f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \end{aligned}$$

где  $x_1 = f(x_0)$ , можно соотношение (3.11) для характеристического показателя представить в виде

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^{-1} \ln \left| \frac{df^{(k)}(x_0)}{d x_0} \right| \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^{-1} \ln \left| \prod_{i=0}^{k-1} f'(x_i) \right| \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)| \right]. \end{aligned}$$

Если  $B(x_k) = \partial f / \partial x|_{x=x_k}$  – матрица Якоби для дискретного отображения  $f$ , тогда характеристические показатели могут быть определены следующим образом

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln |\mu_i(k)|,$$

$\mu_i(k)$  – собственные значения матрицы Якоби дискретного отображения  $B^{(k)} = [B(x_k) \cdot B(x_{k-1}) \cdot \dots \cdot B(x_0)]$ .

Фундаментальная матрица дискретной системы (3.9) удовлетворяет разностному уравнению (3.10), и для определителя Вронского имеем  $W_{k+1} = W_k \cdot \det B_k$ . Следовательно, показатель Ляпунова  $n$ -го порядка равен

$$\Lambda_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k=0}^k \ln |\det B_k|,$$

а при  $B_k \equiv B = \text{const}$  имеем

$$\Lambda_n = \overline{\ln |\det B|},$$

где  $\overline{\ln |\det B|}$  - среднее по времени от функции  $\ln |\det B_k|$ .

**Пример.** Рассмотрим треугольное отображение, которое задается соотношением

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $f(x_k) = r(1 - 2|0,5 - x_k|)$ . Модуль производной отображения  $f^{(k)}(x)$  равен  $2^n$ , а значение показателя Ляпунова  $\lambda = \ln 2r$ . При  $0,5 < r \leq 1$  показатель Ляпунова  $\lambda = \ln 2r > 0$ , и в системе наблюдается хаотический режим. При  $0 < r < 0,5$   $\lambda = \ln 2r < 0$ , и в системе есть притягивающая точка, т. е. хаоса не возникает.

**Пример.** Рассмотрим отображение Хенона

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad Df(x) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Df(x) = -b.$$

Определитель матрицы Якоби не зависит от вектора  $x$ . Он и будет средним значением, поэтому характеристический показатель второго порядка равен

$$\Lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = \ln |b|.$$

**Пример.** Рассмотрим отображение «кот Арнольда»

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \text{ mod } 1.$$

Отображение  $f$  («кот Арнольда») совпадает со своим касатель-

ным отображением  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , причем  $\det A = 1$ , т. е. оба отображения сохраняют площадь. Из характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \mu & 1 \\ 1 & 2 - \mu \end{pmatrix} = 0$$

получаем собственные значения и соответствующие им собственные векторы

$$\mu_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad r^{(1)} = \left( \frac{2}{5 - \sqrt{5}} \right)^{1/2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \hat{x} + \hat{y} \right),$$

$$r^{(2)} = \left( \frac{2}{5 + \sqrt{5}} \right)^{1/2} \left( -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \hat{x} + \hat{y} \right).$$

Растяжение происходит вдоль направления  $r^{(1)}$ , а сжатие – вдоль ортогонального направления  $r^{(2)}$ . При этом  $\mu_1 = 1/\mu_2$ . Чтобы подчеркнуть экспоненциальный характер растяжения, можно записать собственные значения в виде

$$v_{1,2} = \exp\{\pm \lambda\},$$

где значение  $\lambda = \ln[(3 + \sqrt{5})/2]$  одинаково для всех начальных условий. Поэтому характеристический показатель  $\lambda_1(x) = \lambda > 0$  не зависит от траектории  $x$ .

### ***3.2.3. Характеристические показатели и изменение фазового объема***

Характерной особенностью гамильтоновых систем является сохранение их фазового объема. В диссипативных системах фазовый объем в среднем сжимается. Вычислим изменение малого элемента объема  $\Delta V$  в точке  $x_0$

$$\Delta V(x_0, t) = \prod_i \Delta x_i,$$

где

$$\Delta x_i(x_0, t) = (\partial x_i(x_0, t) / \partial x_{i0}) \Delta x_{i0}. \quad (3.12)$$

Скорость изменения фазового объема равна

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \sum_i \frac{1}{\Delta x_i} \frac{d(\Delta x_i)}{dt}. \quad (3.13)$$

Из соотношения (3.12) имеем

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_{i0}} \frac{dx_i(x_0, t)}{dt} \Delta x_{i0}.$$

Используя уравнение (3.1), для нормированного изменения фазового объема из (3.13) при  $t \rightarrow \infty$  получаем

$$\Lambda(x) = \sum_i \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i} = \operatorname{div} F(x).$$

Относительное изменение фазового объема определяется знаком дивергенции вектора  $F(x)$ . Величина  $\Lambda(x)$  зависит от траектории  $x(t)$  и может быть как положительной (растяжение), так и отрицательной (сжатие). При движении гамильтоновой системы, как отмечалось выше, ее фазовый объем сохраняется. В диссипативных системах фазовый объем в среднем сжимается.

Среднюю скорость изменения фазового объема можно записать в виде

$$\Lambda_n(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{-1} \ln \left| \frac{\Delta V(x_0, t)}{\Delta V(x_0, 0)} \right| \right],$$

где  $\Delta V(x_0, 0)$ ,  $\Delta V(x_0, t)$  – фазовые объемы в момент времени  $t = 0$  и  $t$  (текущее время).

Для каскада фазовый объем сжимается за одну итерацию в  $|\det B_k|$  раз, и скорость сжатия равна

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dk} = \ln |\det B_k|.$$

Усредняя эту величину вдоль траектории, получим

$$\Lambda_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^{-1} \ln \left| \frac{\Delta V(x_0, k)}{\Delta V(x_0, 0)} \right| \right].$$

Среднюю скорость сжатия фазового объема можно выразить и через характеристические показатели Ляпунова

$$\Lambda_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (3.14)$$

Хаотическое движение связано с экспоненциальным увеличением расстояния между первоначально близкими траекториями, т. е. для хаотического движения  $\lambda_1 = \lambda_{\max} > 0$ . С другой стороны, фазовый объем диссипативных систем должен сжиматься. Из этих двух фактов следует, что хаотическое движение для одномерных и двумерных потоков невозможно. Для двумерного случая ( $n = 2$ ) отображение Пуанкаре одномерное и обратимое, поэтому из соотношения (3.14) следует, что  $\Lambda_1 = \lambda_1$ . Такое отображение не может быть одновременно и диссипативным ( $\Lambda_1 < 0$ ) и хаотическим ( $\lambda_1 > 0$ ). Наиболее простыми системами с хаотическим поведением являются трехмерные потоки или двумерные каскады. В последнем случае для хаотического движения должно быть  $\lambda_1 > 0$  и  $(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ .

Критерии, позволяющие по знакам характеристических показателей Ляпунова определить типы аттракторов динамических систем, имеют следующий вид.

Для одномерной системы, в которой аттракторами могут быть только устойчивые особые точки, существует один показатель Ляпунова, который отрицателен,  $\lambda_1 = (-)$ .

В двумерных системах аттракторы встречаются только двух типов: устойчивые стационарные точки и предельные циклы. Если оба показателя отрицательны,  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$ , то аттрактором является устойчивая стационарная точка. Если  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, 0)$ , то аттрактор – предельный цикл (один из показателей, соответствующий направлению движения вдоль цикла, равен нулю).

В трехмерных системах, помимо устойчивых особых точек и предельных циклов, аттракторами могут быть инвариантные торы и странные аттракторы:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$  – устойчивый фокус или узел;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, 0)$  – устойчивый предельный цикл;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, 0, 0)$  – устойчивый тор;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, 0, +)$  – странный аттрактор.

В  $n$ -мерных системах сигнатура спектра характеристических показателей фазовой траектории может принимать следующий вид:

$(\underbrace{-, -, -, \dots, -, -}_n)$  – состояние равновесия;

$(\underbrace{-, -, \dots, -, -}_{n-1}, 0)$  – предельный цикл;

$(\underbrace{-, -, \dots, -}_{n-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_m)$  –  $m$ -мерный тор,  $m \geq 2$ ;

$(-, \dots, -, 0, \underbrace{+, \dots, +}_s)$  – странный аттрактор,  $s \geq 1$ .

**Пример.** Для системы Лоренца (см. пример к пункту 2.3.5) при  $\sigma = 16$ ,  $b = 4$ ,  $r = 40$  характеристические показатели Ляпунова равны  $\lambda_1 = 1,37$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -22,37$ . Характеристический показатель третьего порядка равен  $\Lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -21 < 0$ . Фазовый объем сжимается, и имеет место локальная неустойчивость на аттракторе ( $\lambda_1 = 1,37 > 0$ ). Следовательно, при заданных параметрах в фазовом пространстве имеется странный аттрактор, и движение будет хаотическим.

### 3.2.4. Свойства характеристических показателей Ляпунова

Перечислим основные свойства характеристических показателей для диссипативных и консервативных систем.

1. Число характеристических показателей равно размерности фазового пространства исходной динамической системы и их можно упорядочить по убыванию:  $\lambda_1 = \lambda_{\max} \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

2. Для аттракторов, отличных от неподвижных точек, должен быть, по крайней мере, один нулевой характеристический показатель, отвечающий смещению вдоль траектории. Если уравнения движения динамической системы инвариантны относительно некоторого преобразования, то, как правило, они имеют нулевой характеристический

показатель, связанный с этим преобразованием. Действительно, пусть  $x(\alpha, t)$  – однопараметрическое семейство траекторий, причем  $\varphi^t(\cdot)$  явно от  $\alpha$  не зависит. Тогда  $x(\alpha, t) = \varphi^t(x(\alpha, 0))$ , а

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\alpha, t)}{\partial \alpha} &= D\varphi^t(x(\alpha, 0)) \frac{\partial x(\alpha, 0)}{\partial \alpha} = \\ &= \Phi(t) \frac{\partial x(\alpha, 0)}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

т. е.  $u(t) = \partial x(\alpha, t) / \partial \alpha$  – решение линеаризованной системы (3.3) для начальных данных  $u(0) = \partial x(\alpha, 0) / \partial \alpha$ . Если справедливо соотношение

$$c_1 \leq \left\| \frac{\partial x(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right\| \leq c_2, \quad (3.15)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  не зависят от времени, то характеристический показатель для этого решения будет равен нулю. Следовательно, в ляпуновском спектре динамической системы должен быть нулевой показатель.

Частным случаем этой ситуации является сдвиг по времени для автономных систем. Если  $x(t)$  решение, то  $x(t + \alpha)$  – тоже решение. Так как  $\partial x / \partial \alpha = \dot{x} = F(x)$ , то условие (3.15) сводится к требованию отсутствия на траектории неподвижных точек.

Таким образом, для аттракторов, отличных от неподвижных точек, должен быть, по крайней мере, один нулевой характеристический показатель.

3. Динамическую систему называют гиперболической, если она имеет как положительные, так и отрицательные характеристические показатели Ляпунова и не имеет характеристических показателей на мнимой оси.

4. Показатели Ляпунова характеризуют скорость разбегания бесконечно близких траекторий, а показатели высших порядков – скорость изменения бесконечно малых фазовых объемов. У консервативных систем, сохраняющих фазовый объем, всегда существует хотя бы один закон сохранения, что влечет существование соответ-

вующего ему нулевого показателя. Для диссипативных систем сумма показателей Ляпунова, равная среднему вдоль траектории значению дивергенции, всегда отрицательна.

5. Если от системы дифференциальных уравнений (3.1)  $\dot{x} = F(x)$  с набором показателей Ляпунова  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  перейти к каскаду  $x_{k+1} = f(x_k)$ , используя правило:  $x_k = x(t)$ ,  $x_{k+1} = x(t + \tau) \equiv \varphi^\tau(x(t))$ , то показателями Ляпунова для этого каскада будут  $\lambda'_i = \tau\lambda_i$ .

6. Если от каскада перейти к некоторой его степени

$$f^{(m)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(f(x))))}_m,$$

то для нового отображения показатели будут в  $m$  раз больше  $\lambda'_i = m\lambda_i$ .

7. При обращении времени “типичными” показателями Ляпунова будут  $-\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \dots, -\lambda_1$ . При этом вместо аттрактора, к которому притягиваются траектории при  $t \rightarrow +\infty$ , нужно рассматривать неустойчивое множество, к которому притягиваются траектории при  $t \rightarrow -\infty$ .

8. Характеристический показатель не зависит от обратимой замены переменных. Действительно, пусть

$$\bar{x} = g(x), \quad (3.16)$$

где  $g' \neq 0$ . Тогда исходное отображение  $x_{k+1} = f(x_k)$  перейдет в отображение  $\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k)$  с характеристическим показателем

$$\bar{\lambda} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ K^{-1} \sum_{k=1}^K \ln \left| \frac{d\bar{x}_{k+1}}{d\bar{x}_k} \right| \right].$$

Согласно соотношению (3.16) имеем

$$\frac{d\bar{x}_{k+1}}{d\bar{x}_k} = \frac{(dg/dx_{k+1})dx_{k+1}}{(dg/dx_k)dx_k},$$

откуда  $\bar{\lambda} = \lambda$ .

Положительность величины характеристического показателя Ляпунова говорит не только об экспоненциальной неустойчивости

движения, но и свидетельствует о наличии перемешивания. Следствием положительности показателя Ляпунова будут также сплошной спектр мощности и спадающая во времени автокорреляционная функция, что будет более подробно раскрыто в последующих разделах.

### 3.3. ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Понятие меры  $\mu(A)$  множества  $A$  является естественным обобщением понятий: длины  $l(\Delta)$  отрезка  $\Delta$ ; площади  $S(F)$  плоской фигуры  $F$ ; объема  $V(G)$  пространственной структуры  $G$ ; приращения  $\varphi(b) - \varphi(a)$  неубывающей функции  $\varphi(t)$  на полуинтервале  $[a, b)$ ; интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области.

Понятие меры первоначально возникло в функциональном анализе и теории вероятностей, а оттуда перешло в теорию динамических систем. На основе теории меры строятся статистические методы исследования хаотических режимов нелинейных динамических систем.

#### 3.3.1. Типы вероятностных мер

Мера – это отображение или функция: (множество  $A$ )  $\rightarrow$  (действительное неотрицательное число  $\mu(A)$ ). Рассмотрим свойства меры для множеств на плоскости, исходя из понятия площади прямоугольника.

Каждому прямоугольнику  $\Pi$  из класса  $\Sigma$  (класса всех прямоугольников на плоскости) поставим в соответствие число  $\mu(\Pi)$  – его меру. При этом выполняются следующие условия:

- 1) мера  $\mu(\Pi)$  принимает действительные неотрицательные значения;
- 2) мера  $\mu(\Pi)$  аддитивна, т. е. если  $\Pi = \bigcup_{i=1}^I \Pi_i$  и  $\Pi_i \cap \Pi_k = \emptyset$  при  $i \neq k$ ,

$$\text{то } \mu(\Pi) = \sum_{i=1}^I \mu(\Pi_i).$$

Эти свойства носят общий характер и в теории меры множеств абстрактной природы повторяются без существенных изменений.

*Определение 3.3.* Мерой множества  $A$  называется число  $\mu(A)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- для любого измеримого множества  $A$  (мера  $\mu(A)$  определена) мера принимает положительные значения  $\mu(A) > 0$ ;
- если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ;
- мера пустого множества равна нулю  $\mu(\emptyset) = 0$ .

*Определение 3.4.* Если мера пространства, которому принадлежат измеримые множества  $A$  (в дальнейшем это будет фазовое пространство  $P$ ), равна единице  $\mu(P) = 1$ , то мера  $\mu$  называется вероятностной мерой.

Для множеств в Евклидовом пространстве наиболее известна мера Лебега  $\mu_L$ . С ее помощью определяется интеграл Лебега, так что

$$\mu_L(A) = \int_A dx.$$

Если взять какую-либо интегрируемую функцию  $f(x) \geq 0$ , то можно ввести другую меру  $\mu_f(A) = \int_A f(x) dx$ . Функция  $f$  учитывает

неравноценность различных частей пространства. Например, если в некоторой области  $B \subseteq P$   $f(x) \equiv 0$ , то, даже если  $\mu_L(B) = \infty$ , то мера может быть равна нулю  $\mu_f(B) = 0$ . Если найти такую функцию  $p(x)$ ,

что  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$ , то на прямой линии будет определена некоторая ве-

роятностная мера  $\mu_p$ .

*Определение 3.5.* Носителем меры называется множество  $\Omega$ , на котором она “сосредоточена”, т. е. минимальное множество, дополнение которого имеет нулевую меру.

В дальнейшем будем предполагать, что  $P$  – евклидово пространство. На нем принято выделять три типа вероятностных мер.

1. Абсолютно непрерывная мера. Она определяется путем задания некоторой непрерывной функции  $\rho(x) \geq 0$ , называемой плотностью вероятности. В этом случае мера множества  $A$  определяется как интеграл вида  $\int_A \rho(x) dx$ . Носителем непрерывной меры должно быть множество с ненулевой мерой Лебега.

2. Дискретная мера. Она сосредоточена на конечном или счетном множестве точек  $x_k$ , каждой из которых придается значение вероятности – число  $P_k$ . Мера любого множества в этом случае определяется как сумма вероятностей точек, принадлежащих ему. Дискретную меру также можно представить в виде плотности вероятности, если воспользоваться  $\delta$ -функцией:

$$\rho(x) = \sum_k P_k \delta(x - x_k).$$

Интегральное представление меры множества остается таким же, как и для непрерывной меры.

3. Сингулярная мера. Если мера не является ни дискретной, ни непрерывной, ни их комбинацией, то она называется сингулярной. Как и дискретная, она сосредоточена на множестве, у которого мера Лебега равна нулю, но само множество не является ни многообразием (локально не эквивалентно евклидову пространству меньшей размерности), ни счетным множеством точек. Основной трудностью описания таких мер является отсутствие интегрального представления – ни обычные, ни обобщенные функции для этого непригодны. Меру любого множества определить можно, а разумную плотность вероятности – нет.

**Пример.** Рассмотрим канторово множество, схема построения которого приведена на рис. 3.2. Первоначально отрезок  $[0; 1]$  делится на три равные части, и вырезается средняя часть –  $(1/3; 2/3)$ . С каждым из оставшихся отрезков поступают аналогично. Эта процедура

повторяется бесконечное число раз. На первом шаге имеем два отрезка длиной  $1/3$  каждый. На втором – четыре длиной  $(1/9)$  и т. д. На  $k$ -м шаге имеем  $2^k$  не связанных друг с другом отрезков длиной  $(1/3)^k$ .

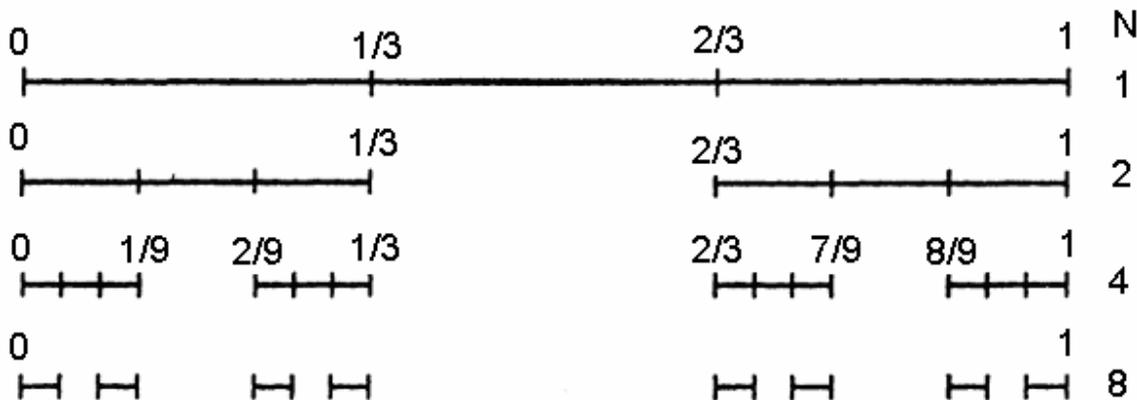


Рис. 3.2. Канторово множество

В пределе при  $k \rightarrow \infty$  на исходном отрезке останется множество точек, называемое канторовым множеством. Это множество нигде не плотно на отрезке, т. е. не содержит ни одного интервала сколь угодно малой длины. Но оно замкнуто и плотно в себе, т. е. не содержит изолированных точек, и, следовательно, является совершенным множеством. Более того, канторово множество имеет мощность континуума, но нулевую борелевскую меру. В чем легко можно убедиться, вычислив сумму длин всех вырезанных отрезков:

$$L = 1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = (1/3) \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = (1/3)/(1 - 2/3) = 1.$$

Построим сингулярную меру на канторовом множестве. Изначально припишем отрезку  $[0, 1]$  меру  $P_0 = 1$ . На первом шаге каждому из двух отрезков длины  $l_1 = 1/3$  – меру  $P_1 = 1/2$ , на втором шаге каждому из четырех отрезков длины  $l_2 = 1/9$  – меру  $P_2 = 1/4$ , и т. д. На

$k$ -м шаге каждому из  $2^k$  отрезков длины  $l_k = 3^{-k}$  – меру  $P_k = 2^{-k}$ . То, что получится при  $k \rightarrow \infty$ , и будет сингулярной мерой. Вероятность каждой точки канторова множества определить нельзя,  $P_k \rightarrow 0$ , плотность вероятностей тоже, поскольку  $(P_k / l_k) \rightarrow \infty$ . В то же время любому отрезку конечной длины можно сопоставить вполне определенное значение меры.

Таким образом, в случае сингулярных мер плотности вероятности не вводят, а пишут просто  $\mu(A)$ .

Несмотря на неудобство описания, сингулярные меры очень широко встречаются в хаотической динамике, поскольку носителем меры зачастую являются фрактальные множества. Чтобы избежать сингулярных мер и получить вместо них абсолютно непрерывные меры, на динамическую систему иногда накладывают малый шум.

### 3.3.2. Инвариантная мера. Оператор Перрона-Фробениуса

Рассмотрим преобразование плотности вероятности при замене переменных в случае, когда фазовое пространство  $P$  одномерно, например, представляет собой прямую линию или отрезок. Пусть  $x$  – случайная величина с плотностью распределения  $\rho(x)$ . Построим новую случайную величину  $y = f(x)$  и найдем ее плотность вероятности  $q(y)$ . Выберем некоторое значение  $y$  и маленький отрезок  $[y - 0,5\Delta y, y + 0,5\Delta y]$ . Мера (вероятность) этого отрезка будет равна  $q(y)\Delta y$ . Найдем все точки  $x_i$  такие, что  $f(x_i) = y$ , их может быть несколько, поскольку монотонность функции  $f$  не предполагается. В отрезок  $\Delta y$  попадут точки отрезков  $\Delta x_i$ , построенных около точек  $x_i$ . Мера каждого отрезка  $\Delta x_i$  равна  $\rho(x_i)\Delta x_i$ . Мера отрезка  $\Delta y$  должна быть равна сумме мер всех  $\Delta x_i$ , т. е.

$$q(y)\Delta y = \sum_{x_i: f(x_i)=y} \rho(x_i)\Delta x_i.$$

Так как  $(\Delta x_i / \Delta y) \cong (1/|f'(x_i)|)$ , то из последнего соотношения получаем

$$q(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y} \frac{\rho(x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

В случае пространств более высокой размерности и при замене переменных  $y = f(x)$  соотношение остается похожим, но вместо формулы преобразования длин используется формула преобразования бесконечно малых объемов, т. е. вместо производной  $f'$  используется якобиан преобразования  $J = \det(\partial f / \partial x)$ :

$$q(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y} \frac{\rho(x_i)}{|J(x_i)|}. \quad (3.17)$$

Используя свойства  $\delta$ -функции, формулу (3.17) можно записать в виде свертки

$$q(y) = \int \delta(f(x) - y) \rho(x) dx. \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) получается при замене переменной  $x$  на переменную  $f$  в интеграле, тогда  $dx = df / |J|$ , и появляется сумма по всем корням уравнения  $f(x) = y$ . Согласно свойствам  $\delta$ -функции получаем

$$\int \delta(f - y) q(f) df = q(y), \quad q(f) = (\rho(x(f)) / |J|).$$

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (3.19)$$

Пусть на  $k$ -м шаге в фазовом пространстве определена плотность вероятности  $\rho_k(x)$ . Будем рассматривать каскад как замену переменных, переход от переменной  $x$  к переменной  $f(x)$ , тогда для преобразования плотности вероятности, по формуле (3.18) получим

$$\rho_{k+1}(y) = \int \delta(f(x) - y) \rho_k(x) dx = \Psi_f(\rho_k).$$

*Определение 3.6.* Оператор  $\Psi_f$ , определяемый уравнением

$$\Psi_f(\rho_k) = \int \delta(f(x) - y) \rho_k(x) dx,$$

называется оператором Перрона - Фробениуса для отображения  $f(x)$ .

Это линейный несамосопряженный оператор со сложной структурой спектра. Подобно тому, как для некоторой начальной точки ди-

намическая система порождает последовательность точек (траекторию), она порождает, и последовательность вероятностных мер. В этой связи важными оказываются два понятия. Это аналоги неподвижной точки и сходимости к асимптотически устойчивой неподвижной точке – инвариантная мера и сходимость мер.

*Определение 3.7.* Плотность вероятности называется инвариантной, если она не меняется под действием оператора Перрона–Фробениуса  $\Psi_f$ .

Инвариантная мера должна удовлетворять уравнению Перрона–Фробениуса

$$\rho(x) = \Psi_f(\rho(x)).$$

Однако в случае сингулярной меры плотность вероятности не существует, поэтому чаще используется несколько иное определение инвариантной меры: мера множества должна быть равна мере его полного прообраза.

*Определение 3.8.* Мера  $\mu$  называется инвариантной мерой динамической системы (3.19), если для любого измеримого множества  $A$  выполнено

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Если отображение  $f$  обратимо, то каждая точка имеет только по одному образу и прообразу, и их можно менять местами. В этом случае для инвариантной меры выполняется:

$$\mu(A) = \mu(f(A)) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Пусть задана непрерывная динамическая система  $\varphi^t(x)$ , определенная дифференциальным уравнением  $\dot{x} = F(x)$ . Такая динамическая система для каждого  $\tau$  порождает каскад  $x_{k+1} = f(x_k) \equiv \varphi^\tau(x_k)$ , поэтому определение инвариантной меры для каскада переносится на потоки без изменений. Рассматривая непрерывную плотность вероятности, запишем аналог уравнения Перрона–Фробениуса для потока  $\varphi^t(x)$ . Из уравнения (3.18) имеем:

$$\rho(y, t + \tau) = \int \delta(\varphi^\tau(x) - y) \rho(x, t) dx.$$

Продифференцируем это соотношение по переменной  $\tau$  и положим  $\tau = 0$ . Учитывая, что  $\varphi^0(x) \equiv x$ ,  $(\partial \varphi^\tau / \partial \tau)|_{\tau=0} = F(x)$  и  $(\partial \rho(y, t + \tau) / \partial \tau) = (\partial \rho(y, t + \tau) / \partial t)$ , получим

$$\frac{\partial \rho(y, t)}{\partial t} = \int \rho(x, t) [\nabla \delta(x - y) \cdot F(x)] dx.$$

Здесь линейный оператор  $\nabla$ , определяемый по формуле  $\nabla \Phi(x) \equiv \sum_i (\partial \Phi / \partial x_i) \mathbf{e}_i$ , а  $\nabla F(x) \equiv \text{div } F(x) = \sum_i (\partial F_j / \partial x_i)$ . Интегрируя по частям и “перебросив” дифференцирование с  $\delta$ -функции на функцию  $\rho F$ , получим

$$-\int \text{div} (\rho(x, t) F(x)) \delta(x - y) dx = -\text{div} (\rho(y, t) F(y)).$$

Окончательно имеем

$$(\partial \rho(x, t) / \partial t) + \text{div} (\rho(x, t) F(x)) = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) называется уравнением непрерывности. Такое же уравнение описывает поток сжимаемой жидкости, движущийся со скоростью  $F(x)$ , который “увлекает распределение вероятности за собой”, причем  $\rho(x, t)$  играет роль плотности этой жидкости.

Инвариантная плотность вероятности не зависит от времени, т. е. она должна удовлетворять уравнению  $\text{div} (\rho(x) F(x)) = 0$ .

**Пример.** Рассмотрим дискретное отображение (3.19)

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

где  $f(x) = 4x(1-x)$  – логистическое квадратичное отображение, переводящее точки  $x_k$  в точки  $x_{k+1}$ . Зададим на оси  $x_k$  интервал  $\Delta_0$  начальных данных, распределенных с плотностью  $\rho_0$ . Отображение переводит интервал  $\Delta_0$  в интервал  $\Delta_1$  на оси  $x_{k+1}$ , на котором значения распределены с плотностью  $\rho_1$ . Алгоритм вычисления оператора Перрона–Фробениуса представлен на рис. 3.3.

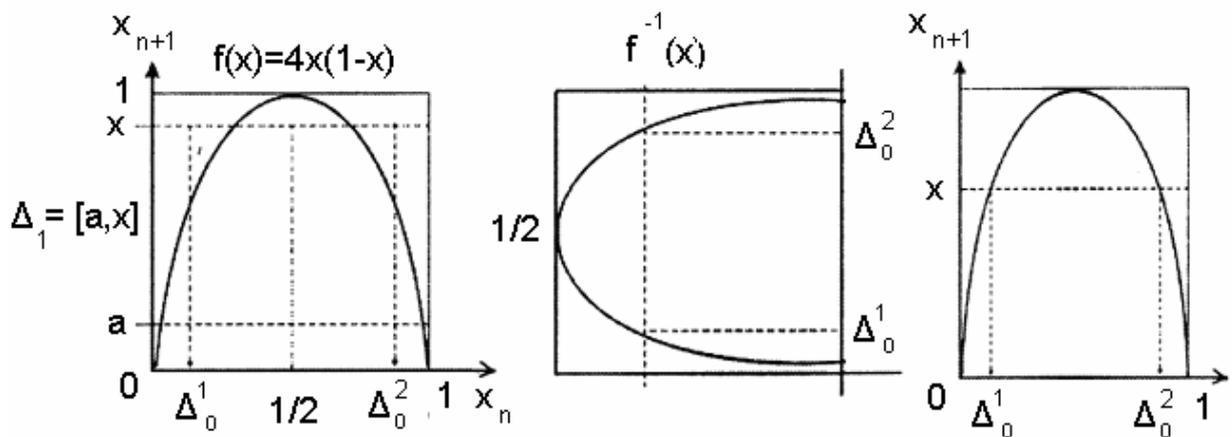


Рис. 3.3. Вычисление оператора Перрона–Фробениуса

Найдем оператор Перрона–Фробениуса, переводящий плотность  $\rho_0$  в плотность  $\rho_1$ . Так как отрезок  $\Delta_1$  состоит из точек, являющихся образами точек из отрезка  $\Delta_0$  при рассматриваемом отображении, то имеем

$$\int_{\Delta_1} \rho_1(v) dv = \int_{\Delta_0 = f^{-1}(\Delta_1)} \rho_0(u) du.$$

Пусть  $\Delta_1 = [a, x]$  – интервал оси  $x_{k+1}$  с переменным верхним пределом. Оператор Перрона–Фробениуса можно представить в виде

$$\rho_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[a, x]} \rho_0(x) dx.$$

Как видно, отрезок  $\Delta_0 = f^{-1}[a, x]$  – несвязное множество, представляющее собой теоретико-множественную сумму (объединение) двух подынтервалов  $\Delta_0^1 \cup \Delta_0^2$ , которые при  $a = 1$  равны

$$\Delta_0^1 = [0; 0,5 - 0,5\sqrt{1-x}], \quad \Delta_0^2 = [0,5 + 0,5\sqrt{1-x}, 1].$$

Уравнение Перрона–Фробениуса в этом случае имеет вид

$$\rho_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[0, x]} \rho_0(x) dx = \frac{d}{dx} \int_0^{f^{-1}(x)} f(x) dx = f(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)] =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^{0,5-0,5\sqrt{1-x}} \rho_0(x) dx + \frac{d}{dx} \int_{0,5+0,5\sqrt{1-x}}^1 \rho_0(x) dx.$$

Воспользовавшись формулой дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

получим

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \rho_0(0,5 - 0,5\sqrt{1-x}) \cdot ((-0,5)0,5(-1)(1/\sqrt{1-x})) - \\ &\quad - \rho_0(0,5 + 0,5\sqrt{1-x}) \cdot ((0,5)0,5(-1)(1/\sqrt{1-x})) = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} [\rho_0(0,5 - 0,5\sqrt{1-x}) + \rho_0(0,5 + 0,5\sqrt{1-x})]. \end{aligned}$$

Определим, как изменяется исходное равномерное распределение  $\rho_0(x) \equiv 1$  под действием найденного оператора Перрона–Фробениуса. Подставляя распределение  $\rho_0(x) \equiv 1$  в последнее соотношение, получаем

$$\rho_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} [1 + 1] = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Эволюция исходного распределения под действием оператора Перрона–Фробениуса для логистического квадратичного отображения приведена на рис. 3.4 (а – исходное равномерное распределение  $\rho_0 \equiv 1$ , б – эволюция исходного распределения  $\rho_2 = 1/(2\sqrt{1-x})$ .)

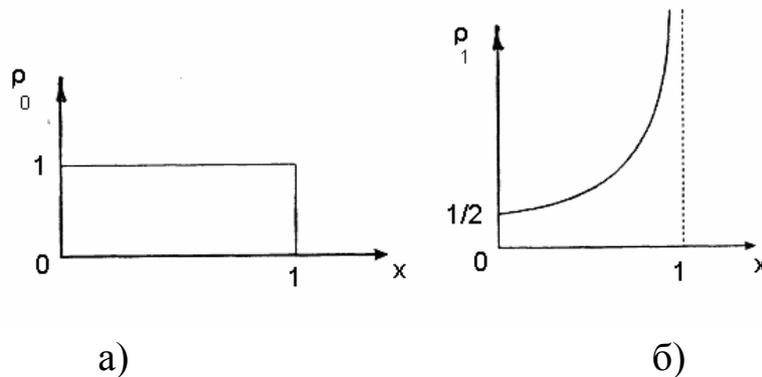


Рис.3.4. Преобразование исходного распределения под действием оператора Перрона–Фробениуса

Инвариантная плотность – это доля всех итераций, попадающих в точку  $x$ :

$$\rho^*(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \delta[x - f^{(k)}(x_k)].$$

Она показывает, с какой плотностью итерации отображения размазаны по оси  $x_{k+1}$ .

### 3.3.3. Эргодическая мера

Инвариантная мера не меняется под действием отображения, порождающего динамическую систему. Ее носителем должно быть некоторое инвариантное и неблуждающее множество. Простейшим примером являются особые точки. Очевидно, что мера, сосредоточенная на них, является дискретной и имеет вид  $\delta(x - x_0)$ . Это справедливо как для каскадов, так и для потоков. Если имеется несколько особых точек, устойчивых или неустойчивых, то каждая из них служит носителем своей собственной меры. Более того, можно построить сколь угодно много комбинированных мер, выбирая несколько точек с различными вероятностями, но такие меры обычно не представляют интереса, так как для них не выполняются эргодические теоремы.

*Определение 3.9.* Инвариантная мера  $\mu$  называется эргодической, если ее нельзя представить в виде комбинации нескольких различных инвариантных мер.

Или иначе, если некоторое инвариантное множество  $A$  имеет положительную меру  $\mu(A) > 0$ , то мера его дополнения должна быть равна нулю:  $\mu(P \setminus A) = 0$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение  $\dot{x} = x - x^3$ . У него есть три особые точки  $x_1 = 0$ ,  $x_{2,3} = \pm 1$ . Соответственно, существует три эргодические меры  $p_1(x) = \delta(x)$ ,  $p_{2,3}(x) = \delta(x \pm 1)$ . Кроме того, можно построить различные неэргодические инвариантные меры вида

$$p(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Мера  $p$  не будет эргодической, так как мера инвариантного

множества  $x_1$  равна  $\mu(x_1) = \alpha > 0$ , а мера его дополнения равна  $\mu(P \setminus x_1) = \beta + \gamma \neq 0$ .

Более сложным примером неблуждающего множества является периодическая траектория – цикл. Для цикла мера также будет дискретной. Если цикл образуют точки  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , то инвариантная мера будет иметь вид

$$\rho(x) = k^{-1} \sum_{i=1}^k \delta(x - x_i).$$

Сложные инвариантные множества, такие как странные аттракторы, имеют сингулярную меру.

Остановимся кратко на проблеме существования инвариантной меры. Пусть  $\mathbf{M}$  – компактное полное метрическое пространство и  $\varphi$  – непрерывное отображение  $\mathbf{M}$  в себя. Для произвольной начальной меры  $\nu_0$  построим меры  $\nu_n$ , где  $\nu_n(A) = \nu_0(\varphi^{-n}A)$ , и их средние арифметические  $\mu_n = (1/n) \sum_{k=0}^n \nu_k$ . Поскольку пространство вероятностных мер на  $\mathbf{M}$  слабо компактно, то из последовательности  $\mu_n$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $\mu_{n_i} \Rightarrow \mu$ . Покажем, что мера  $\mu$  – инвариантная мера для отображения  $\varphi$ . Для этого достаточно установить, что для любой непрерывной функции  $\rho$  выполняется:

$$\int \rho(x) d\mu(x) = \int \rho(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \int \rho(\varphi x) d\mu(x) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \int \rho(\varphi x) d\nu_k(x) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \int \rho(x) d\nu_{k+1}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=2}^{n_i+1} \int \rho(x) d\nu_k(x) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \int \rho(x) d\mu_{n_i}(x) + \frac{1}{n_i} \int \rho(x) d\nu_{n_i+1}(x) - \frac{1}{n_i} \int \rho(x) d\nu_0(x) \right] = \end{aligned}$$

$$= \int \rho(x) d\mu(x).$$

Метод, который был рассмотрен, появился в работе Боголюбова–Крылова. Приведем теорему, часто используемую при исследовании конкретных задач.

Теорема Боголюбова–Крылова (существования инвариантной меры). Если компактное множество  $A \subset P$  инвариантно относительно динамической системы  $\varphi^t(x)$ , то существует хотя бы одна вероятностная мера  $\mu$  ( $\mu(P) = 1$ ), инвариантная относительно  $\varphi$ . Инвариантная мера  $\mu$  может быть выбрана таким образом, что она будет неразложимой или эргодической.

Очень важным следствием инвариантности меры является, так называемая эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина. Пусть  $(P, M, \mu)$  – пространство с мерой,  $P$  – абстрактное множество (фазовое пространство динамической системы),  $M$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств,  $\mu$  – эргодическая инвариантная мера, а  $p \in L^1(P, M, \mu)$  – измеримая функция.

*Эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина.* Для  $\mu$  – почти каждой точки  $x$  и  $p \in L^1(P, M, \mu)$ :

1) в случае каскада  $\varphi$  существует предел

$$\bar{p}(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K+1} \sum_{k=0}^K p(\varphi^k x);$$

2) в случае потока  $\varphi^t$  существуют и равны пределы

$$\begin{aligned} \bar{p}(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(\varphi^t x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(\varphi^{-t} x) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(\varphi^t x) dt. \end{aligned}$$

При этом  $\bar{p}(x) = \bar{p}(\varphi^t x)$  для любого допустимого  $x$  и  $\int p d\mu = \int \bar{p} d\mu$ .

Функция  $\bar{p}$  называется средним по времени или средним вдоль траектории. Эргодическая теорема утверждает о существовании средних значений по времени.

*Эргодическая теорема.* Если  $\mu$  – эргодическая инвариантная мера, то почти для всех  $x$  по мере  $\mu$  и для любой измеримой непрерывной функции  $q(x): P \rightarrow \mathbf{R}^1$  существует среднее по времени, которое равно среднему по инвариантной мере:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ T^{-1} \int_t^{t+T} q(\varphi(x, \tau)) d\tau \right] = \int_N q(x) \mu(dx).$$

Иногда этот результат записывают в виде

$$\mu(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ T^{-1} \int_t^{t+T} \delta(\varphi(x, \tau)) d\tau \right]. \quad (3.21)$$

Здесь имеется в виду слабая сходимость интегралов.

### 3.3.4. Физическая мера

Понятие “физической меры” возникло из следующего простого соображения. Инвариантных мер у динамической системы может быть много. Но если взять конкретную систему, получить численно достаточно длинную траекторию на аттракторе и вычислить сумму (3.21), то результат будет отвечать не бесконечному числу мер, а некоторой одной, вполне конкретной, выделенной траектории, которая и соответствует реальному, “физическому” поведению системы. Ее и надо иметь в виду, когда упоминается свойство эргодичности. Такую меру принято называть физической или колмогоровской мерой.

Удовлетворительного определения физической меры, пригодного на все случаи жизни, пока не существует. Одна из идей связана с тем, что в реальных системах всегда присутствует малый шум. Если система имеет единственный аттрактор, то при введении шума остается единственная мера, которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к нужной физической мере. Когда у системы несколько аттракторов, добавление гауссового шума или виноровского случайного процесса приводит

иногда к перескакиванию с одного аттрактора на другой. Мера системы с таким шумом растекается по всем аттракторам сразу. В таких случаях физической меры не существует.

В гамильтоновых системах существование инвариантной меры часто вытекает из теоремы Лиувилля. Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbf{R}^n$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (3.22)$$

у которой правые части принадлежат классу  $C^2$ . Мы можем определить поток  $\varphi^t$ , где  $\varphi^t(x)$  есть решение  $x(t)$  системы (3.22), для которого  $x(0) = x$ . Пусть  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  – неотрицательная интегрируемая функция. С ее помощью можно построить меру  $d\mu_0 = \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ . Теорема Лиувилля утверждает, что если определить меру  $\mu_t$  равенством  $\mu_t(A) = \mu_0(\varphi^{-t}A)$ , то  $\mu_t$  будет иметь плотность  $\rho_t(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \rho_t(x_1, \dots, x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\rho_t F_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.23) – уравнение неразрывности. Из него видно, что  $\mu_0$  будет инвариантной мерой для потока  $\varphi^t$ , если  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\rho_t F_i)}{\partial x_i} = 0$ .

Иногда такая мера  $\mu_0$  называется мерой Лиувилля, а последнее уравнение – стационарным уравнением Лиувилля.

В диссипативных системах, где  $\operatorname{div} F(x) = (\partial F_i / \partial x_j) < 0$ , вообще говоря, может не быть инвариантной меры, задаваемой плотностью по мере Лебега, поскольку  $\operatorname{div} F(x)$  характеризует уменьшение меры Лебега любого множества под действием динамической системы. В таких системах, возможно, что сама динамика “вырабатывает” естественную инвариантную меру. Предположим, что для потока  $\varphi^t$ , определяемого системой (3.22), имеется компактная область  $O$  с гладкой границей  $\partial O$ , и на границе  $\partial O$  векторное поле  $F(x)$  направлено

внутри  $O$ . Тогда  $\varphi^t(O) \subset O$  при всех  $t > 0$ . Образует пересечение  $A \cap \varphi^t(O) \subset O$ . Часто такое пересечение называется аттрактором. Пусть  $dv_0(x) = \rho_0(x)dx$  – произвольная абсолютно непрерывная мера, сосредоточенная в компактной области  $O$ . Тогда мера  $\nu_t$ , где  $\nu_t(A) = \nu_0(\varphi^{-t}A)$ , сосредоточена в области  $\varphi^t(O)$ . Если существует слабый предел  $\mu$  мер  $\nu_t$  при  $t \rightarrow \infty$ , то этот предел будет инвариантной мерой, поскольку для любой непрерывной функции  $f$ , сосредоточенной в области  $O$ , имеем

$$\begin{aligned} \int f(\varphi^t x) d\mu(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(\varphi^t x) d\nu_t(x) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(x) d\nu_{t+s}(x) = \int f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Ясно, что мера  $\mu$  сосредоточена на аттракторе. Особенно важен случай, когда мера  $\mu$  не зависит от выбора начальной меры  $\nu_0$ . Тогда ее естественно принять за инвариантную меру, которая вырабатывается динамической системой.

### **3.3.5. Устойчивость и сходимости мер**

Когда динамическая система обладает хаотическим поведением, у нее наряду с аттрактором может существовать бесконечное число неустойчивых периодических циклов. Каждый из этих неустойчивых циклов является носителем своей эргодической меры, так что эргодических мер оказывается бесконечно много. С другой стороны, очевидно, что не все меры существенны, и наблюдаемому в эксперименте (вычислительном или физическом) поведению отвечает только одна из них. Такие меры и получили название физических мер. Они связаны с определенными свойствами устойчивости. Как устойчивое инвариантное множество обладает окрестностью, все точки которого стремятся к нему при  $t \rightarrow \infty$ , так и малые возмущения устойчивой меры должны “затухать” с ростом  $t$ . Очевидно, что носителем такой устойчивой меры должно быть притягивающее множество, аттрактор.

Существует два способа введения понятия устойчивости меры.

Первый связан с добавлением бесконечно малого случайного шума, амплитуда которого стремится к нулю.

Другой способ связан с исследованием сходимости последовательности мер  $\rho_n$  под действием оператора Перрона–Фробениуса. На этом пути возникают трудности. Первая трудность определяется необходимостью исследования спектра оператора Перрона–Фробениуса, а вторая – с тем, что пределом последовательности непрерывных мер часто бывает сингулярная мера. В этом случае уравнение Перрона–Фробениуса следует понимать в обобщенном смысле и использовать интегрирование по мере, а не по плотности вероятности.

Скорость сходимости мер зависит от их гладкости. Например, непрерывные распределения “хорошо” сходятся к инвариантным мерам. Распределение в виде  $\delta$ -функции сходитья вообще не будет, оставаясь таким всегда.

### **3.4. ЭРГОДИЧНОСТЬ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ**

Эргодичность часто определяют как совпадение средних значений по времени и средних по пространству. Понятие эргодичности было введено Больцманом в связи с основаниями статистической механики. Однако и многие динамические системы с фазовым пространством небольшой размерности, траектории которых равномерно и плотно заполняют фазовое многообразие, обладают свойством эргодичности.

Эргодичность – необходимое, но не достаточное условие хаотичности движения динамической системы. Если спустя некоторое время начальная область распределяется по всей гиперповерхности так, что ее “кусочки” можно обнаружить в любой ее части, то система обладает перемешиванием. Свойство перемешивания может служить критерием хаотичности движения.

#### ***3.4.1. Эргодичность***

Рассмотрим консервативную динамическую систему, для кото-

рой имеет место сохранение с течением времени фазового объема. Пусть  $x(t)$  – ее фазовые переменные и  $h(x(t))$  – интегрируемая, зависящая от фазовых координат функция.

Средним по времени значением функции  $h(x(t))$  называется величина

$$\bar{h}(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(x(t)) dt. \quad (3.24)$$

Обозначив через  $\varphi^t(\cdot)$  – фазовый поток, для которого справедливо  $\varphi^t(x) = x(t)$ , получим

$$\bar{h}(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\varphi^t(x_0)) dt.$$

Т. е. среднее значение функции  $h$  по времени зависит от начального состояния. Однако, для почти всех (кроме множества меры нуль) начальных условий функция  $\bar{h}(x_0)$  является инвариантной (не меняется при перенесении начального условия вдоль траектории). Пусть движение системы в фазовом пространстве  $\mathbf{R}^n$  происходит в ограниченной области  $A \subset \mathbf{R}^n$  с объемом  $V_A$ .

Фазовым средним значением функции  $h(x(t))$  называется величина

$$\langle h \rangle = \frac{1}{V_A} \int_A h(x(t)) dV, \quad dV \equiv dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n. \quad (3.25)$$

Здесь  $dV \equiv dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ .

Движение системы называется эргодическим, а сама система – эргодической, если для любой интегрируемой функции  $h(x(t))$  и для любых начальных условий имеет место равенство временных (3.24) и фазовых (3.25) средних значений.

$$\langle h \rangle = \bar{h}(x_0). \quad (3.26)$$

Таким образом, для эргодической системы среднее по времени (3.24) не зависит от начальной точки траектории.

Рассмотрим область  $E \subset A$ , и пусть  $h_E(x)$  – характеристическая функция множества  $E$ :

$$h_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \quad (3.27)$$

Функция (3.27) интегрируема

$$\frac{1}{V_A} \int_A h_E(x) dV = \frac{V_E}{V_A}.$$

Фазовое среднее характеристической функции (3.27) есть “относительный объем” области  $E$ . Если движение динамической системы обладает свойством эргодичности, то относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри любой области  $E$ , равно относительному объему этой области  $V_E / V_A$  и не зависит от выбора начальных условий. Иными словами, фазовая кривая эргодической системы равномерно и плотно заполняет весь объем области  $E$ .

Относительный объем  $V_E / V_A$  или относительная площадь  $S_E / S_A$  некоторой области  $E$  представляет собой меру  $\mu(E)$  этой области. Используя понятие меры, определение эргодичности (3.26) можно записать как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\varphi^t(x_0)) dt = \int_A h(x) d\mu,$$

где интегрирование ведется по всей доступной области фазового пространства. При этом

$$\mu(A) = \int_A d\mu = 1.$$

Примером эргодического поведения может служить квазипериодическое движение гамильтоновой системы, состоящей из двух гармонических осцилляторов с иррациональным отношением частот.

Действие фазового потока  $\varphi^t$  на малую область  $\Omega_0$ , принадлежащую поверхности двумерного тора представлено на рис. 3.5.

Характерной особенностью эргодического движения Гамильтоновой системы является сохранение не только объема, но и формы

исходной области. Фазовая кривая плотно покрывает поверхность тора.

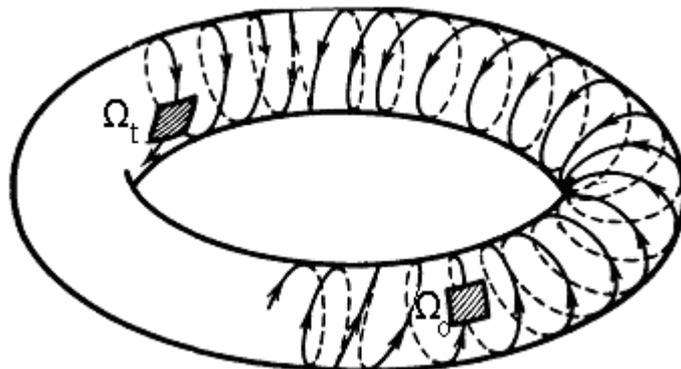


Рис. 3.5. Эргодическое движение на двумерном инвариантном торе

### 3.4.2. Перемешивание

Для иллюстрации перемешивания приведем классический пример Гиббса. В начальный момент рассматривается сосуд, на треть заполненный чернилами, а на две трети – водой, причем эти жидкости не перемешаны. После энергичного взбалтывания содержимого сосуда, спустя некоторое время (время перемешивания) любая часть его объема будет на треть состоять из чернил, и на две трети – из воды. Формализация подобного процесса при условии, что чернила и вода не разрываются на отдельные капли, приводит к понятию перемешивания.

Перемешивающий поток имеет место, если в фазовом пространстве близкие в начальный момент времени точки будут двигаться по сильно расходящимся траекториям.

Рассмотрим две подобласти  $E$  и  $B$  области  $A$  с мерами (объемами)  $\mu(E)$ ,  $\mu(B)$  и  $\mu(A)$ , соответственно. Будем считать, что область  $B$  неподвижна, а область  $E$  эволюционирует с течением времени под действием непрерывного отображения  $\varphi^t$ , порождаемого системой дифференциальных уравнений (3.1), т. е.  $E_t = \varphi^t(E)$ . Пусть  $E_t \cap B$  представляет собой совокупность всех частей  $E_t$ , оказавшихся в момент времени  $t$  внутри неподвижной области  $B$ .

*Определение 3.10.* Динамическая система (3.1) называется перемешивающей, а фазовый поток – перемешивающим, если при  $t \rightarrow \infty$  существует предел отношения меры (объема)  $\mu(E_t \cap B)$  области  $E_t \cap B$  к мере (объему)  $\mu(B)$  области  $B$ , равный

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(E_t \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(E)}{\mu(A)}. \quad (3.28)$$

Изменение исходной области  $E$  под действием перемешивающего потока  $\varphi^t$  представлено на рис. 3.6.

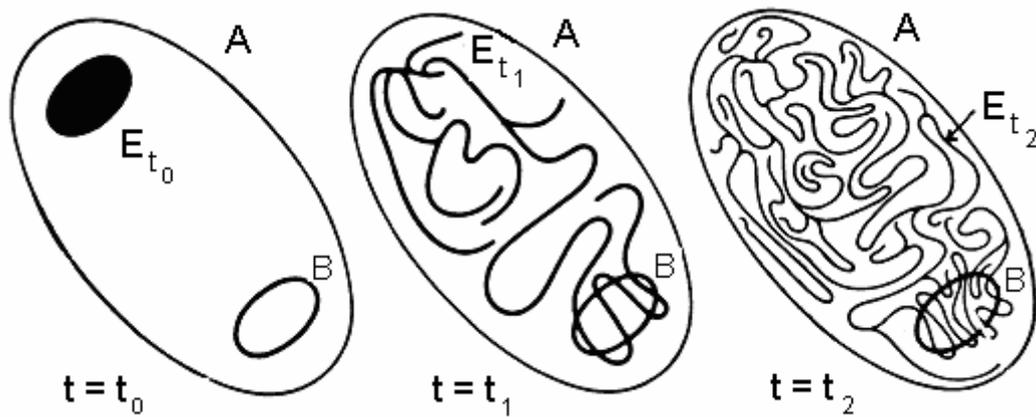


Рис. 3.6. Действие перемешивающего фазового потока

Определение перемешивающей динамической системы имеет следующий смысл. Если рассматриваемая динамическая система консервативна, то мера области  $E$  сохраняется  $\mu(E_t) = \mu(E)$ . Отношение  $\mu(E)/\mu(A)$  есть доля объема, занимаемого областью  $E$  в области  $A$ . Отношение  $\mu(E_t \cap B)/\mu(B)$  есть доля объема, занимаемая в области  $B$  попавшими внутрь нее в момент  $t$  частями области  $E_t$ . Определение (3.28) утверждает, что в пределе при  $t \rightarrow \infty$  эти два отношения совпадают независимо от размера, формы и взаимного расположения областей  $E$  и  $B$ .

Из определения перемешивающих систем можно сделать ряд выводов о характере поведения таких систем. Во-первых, область  $B$  можно сделать сколь угодно малой и поместить в любое место области  $A$ . Если выполнено соотношение (3.28), то это означает, что с ростом  $t$  части области  $E$  можно найти с одинаковым успехом в любой

точке фазового пространства, доступного для движения системы. Следовательно, область  $E$  с течением времени превращается в сколь угодно тонкую паутинку, пронизывающую всю область  $A$  фазового пространства. Объем этой паутинки равен объему исходной области  $E$ . Паутинка равномерно и однородно пронизывает фазовое пространство. Внутри любой, наугад взятой области, нити паутинки занимают одну и ту же относительную долю объема.

Исходную область  $E$  можно выбрать сколь угодно малой и расположить в любой доступной области фазового пространства. Тем не менее, как следует из (3.28), при  $t \rightarrow \infty$  эта область превратится в пронизывающую все паутинку. Это означает, что в динамической системе с перемешиванием фазовые траектории всегда неустойчивы по отношению к малым возмущениям и разбегаются с течением времени.

Во-вторых, поведение системы с перемешиванием непредсказуемо. Так как малая область фазового пространства с течением времени трансформируется во все пронизывающую паутинку, то малая область неопределенности начальных условий при достаточно больших временах наблюдения заполнит всю доступную область  $E$  фазового пространства. При достаточно большом времени наблюдения для любой точки области  $A$  фазового пространства найдется сколь угодно малая окрестность, содержащая фазовую траекторию, начинающуюся в малой окрестности начальной точки. Таким образом, если в начальный момент времени положение фазовой точки было известно с конечной точностью, т. е. известна принадлежность точки некоторой области с характерным размером  $\varepsilon$ , то сказать, где она окажется через достаточно длительный промежуток времени, невозможно.

В-третьих, перемешивание приводит к необратимости. Любая неопределенность начальных условий через некоторое время заполняет всю область  $A$ . Зная, что в момент времени  $t$  система находится в некоторой малой окрестности  $\varepsilon$  точки  $x(t)$  фазового пространства,

мы не можем указать начальное состояние системы, так как к моменту времени  $t$  в окрестность  $\varepsilon$  может попасть траектория, начинающаяся в малой окрестности любой начальной точки.

Поскольку математическое моделирование систем можно производить лишь с конечной точностью, то для систем с перемешиванием детерминированное описание при больших временах оказывается лишенным смысла, более адекватным будет стохастическое описание.

При эволюции диссипативной динамической системы фазовый объем с течением времени сокращается. Фазовые траектории притягиваются к некоторому множеству (аттрактору). В случае хаотического режима фазовая траектория на самом аттракторе выглядит как клубок перепутанных нитей, и малое возмущение траектории может существенно изменить направление движения. Поэтому диссипативная система со странным аттрактором характеризуется глобальным сжатием фазового объема и локальной неустойчивостью фазовых траекторий.

### 3.4.3. Перекладывание

Введем еще один класс преобразований с инвариантной мерой. Пусть  $M = [0, 1]$  и разобьем его на  $r$  отрезков  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ . Здесь считаем, что система отрезков задает разбиение, если

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \partial\Delta_i \cap \partial\Delta_j, \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \bigcup_i \Delta_i = [0, 1].$$

Зададим также какую-либо перестановку  $\pi$  из  $r$  элементов.

*Определение 3.11.* Перекладыванием отрезков называется преобразование  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , при котором  $\Delta'_i = T\Delta_i = \Delta_i + a_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , и новые отрезки  $\Delta'_i$  идут в порядке, определяемом перестановкой  $\pi$ .

Перекладывание отрезков задается вектором  $l = (l_1, \dots, l_r)$ , где  $l_i$  – длина отрезка  $\Delta_i$ , и перестановкой  $\pi$ . Ясно, что преобразование  $T$  сохраняет меру Лебега  $\mu$ .

Перекладывания возникают во многих задачах эргодической теории. Рассмотрим одну из конкретных ситуаций, где появляется

перекладывание отрезков, – бильярд Синая. Пусть  $\Pi$  – многоугольник на плоскости с рациональными  $\text{mod } \pi$  углами  $\theta_1, \dots, \theta_s$ . Не ограничивая общности, можно считать, что все  $\theta_i$  имеют вид

$$\theta_i = (q_i / p)\pi,$$

где  $q_i$  и  $p$  – целые числа. Рассмотрим бильярд  $\Pi$ , при котором каждая траектория представляет собой ломаную линию, отражающуюся от границ  $\Pi$  по закону “угол падения равен углу отражения”. Тогда углы различных отрезков ломаной линии имеют вид

$$\theta + (k / p)\pi,$$

при некотором значении  $\theta \in [0, (1 / p)\pi]$ . Зафиксировав  $\theta$ , мы получим инвариантное множество бильярда. Эргодические свойства бильярда на этом множестве сводятся к изучению эргодических свойств преобразования, действующего в пространстве отрезков, направленных под углами  $\theta + (k / p)\pi$ , и переводящего каждый отрезок в следующий отрезок вдоль траектории. Это преобразование можно реализовать как перекладывание отрезков.

### 3.5. ЭНТРОПИЯ

Экспоненциальное увеличение расстояния между двумя первоначально близкими траекториями определяется характеристическими показателями Ляпунова. Скорость “расползания” большого количества бесконечно близких траекторий – энтропией динамической системы, которая является фундаментальной характеристикой степени случайности. Термодинамическая энтропия определяет меру беспорядка в системе. Рост беспорядка связан с ростом нашего незнания о состоянии системы. Энтропия – количество информации, необходимое для определения местоположения системы в некотором состоянии, т. е. мера незнания о системе.

### 3.5.1. Метрическая энтропия (энтропия Колмогорова–Синая)

Энтропию Колмогорова, которая связана со степенью хаотичности динамической системы, можно определить формулой Шеннона, так как энтропия пропорциональна скорости потери информации о состоянии системы с течением времени.

Рассмотрим траекторию  $x(t)$  динамической системы на странном аттракторе и предположим, что  $n$ -мерное фазовое пространство разделено на ячейки размера  $l^n$ . Состояние системы будем измерять через интервалы времени  $\tau$ . Пусть  $P_{i_0 \dots i_k}$  – совместная вероятность того, что траектория  $x(t)|_{t=0}$  находится в ячейке с номером  $i_0$ , траектория  $x(t)|_{t=\tau}$  – в ячейке с номером  $i_1, \dots$ , траектория  $x(t)|_{t=k\tau}$  – в ячейке с номером  $i_k$ . По Шеннону, величина энтропии, определяемая формулой

$$H_k = - \sum_{i_0 \dots i_k} P_{i_0 \dots i_k} \ln P_{i_0 \dots i_k},$$

пропорциональна информации, необходимой для определения местоположения системы на заданной траектории  $i_1^* \dots i_n^*$  с точностью  $l$  (если априори известны только вероятности  $P_{i_0 \dots i_k}$ ). Поэтому  $(H_{k+1} - H_k)$  есть дополнительная информация, необходимая для предсказания, в какой ячейке окажется система в момент времени  $\tau(k+1)$ , если известно, что прежде она находилась в ячейках  $i_1^* \dots i_k^*$ . Это означает, что  $(H_{k+1} - H_k)$  описывает потерю информации о системе на интервале времени от  $\tau(k)$  до  $\tau(k+1)$ .

*Определение 3.12.* Энтропией Колмогорова (К-энтропией) называется средняя скорость потери информации, определяемая пределом

$$\begin{aligned} H &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{K\tau} \sum_{k=0}^{K-1} (H_{k+1} - H_k) \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{K\tau} \sum_{i_0 \dots i_K} P_{i_0 \dots i_K} \ln P_{i_0 \dots i_K} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Предел  $l \rightarrow 0$ , который берется после  $K \rightarrow \infty$ , делает величину энтропии независимой от частного вида разбиения фазового пространства. Рис. 3.7 иллюстрирует расчет величины К-энтропии для одномерной динамической системы.

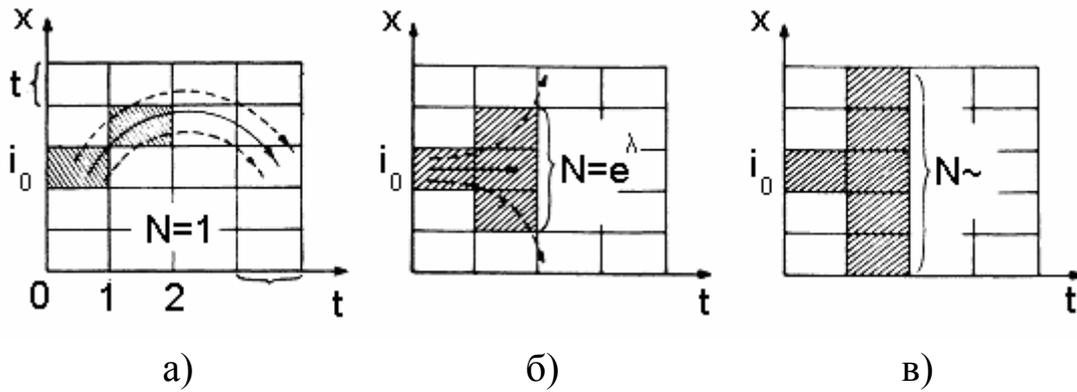


Рис. 3.7. К-энтропия одномерной динамической системы

Для регулярного движения первоначально близкие точки остаются близкими. Вероятность нахождения начальной точки траектории в ячейке  $i_0$  равна  $P_{i_0} = l$ . Совместная вероятность прохождения траекторией ячеек  $i_0$  и  $i_1$  равна  $P_{i_0 i_1} = 1 \cdot N$ , где  $N$  – количество ячеек, занимаемых траекторией в момент времени  $\tau = 1$ . Для регулярного движения  $N = 1$  (рис. 3.7. а) и энтропия  $H = 0$ .

Для хаотического движения первоначально близкие точки расходятся экспоненциально и  $P_{i_0} = l$ , а  $P_{i_0 i_1} = l \cdot \exp\{\lambda\}$ , так как  $N = e^\lambda$  и энтропия положительна  $H = \lambda > 0$  (рис. 3.7. б).

При случайном движении первоначально близкие траектории распределяются с равной вероятностью по всем возможным ячейкам:  $P_{i_0} = l$ ,  $N \sim 1/l$  (рис. 3.7в),  $P_{i_0 i_1} \sim l^2$  и энтропия  $H \sim -\ln l \rightarrow \infty$ .

Таким образом, К-энтропия может являться мерой хаоса: она равна нулю при регулярном движении, бесконечна для случайных систем, положительна и постоянна для систем с детерминированным хаосом.

### 3.5.2. Энтропия каскада

Дадим определение метрической энтропии (или энтропии Колмогорова–Синая) для дискретной системы. Пусть задан каскад

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

и его инвариантная мера  $\mu$  на компактном носителе  $A$ . В большинстве практически важных случаев это физическая мера и аттрактор. Пусть задано разбиение компактного носителя на конечное число измеримых множеств  $A_i$ . Обозначим множество точек, преобразуемых во множество  $A_i$ , отображением  $f^{(k)}$ , как  $f^{(-k)}(A_i)$ . Рассмотрим следующие разбиения, порожденные таким “обратным” отображением: на первом шаге разбиение множества  $A_i^{(1)} := A_i$ ; на втором шаге разбиение на множества  $A_{i_1 i_2}^{(2)} := A_{i_1} \cap f^{(-1)}(A_{i_2})$ , т. е. – это те точки из множества  $A_{i_1}$ , которые на следующем шаге попадут в множество  $A_{i_2}$ ; на третьем шаге разбиение на  $A_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} := A_{i_1} \cap f^{(-1)}(A_{i_2}) \cap f^{(-2)}(A_{i_3})$ , т. е. те точки из множества  $A_{i_1}$ , которые на следующих двух шагах попадут сначала в  $A_{i_2}$ , а затем в  $A_{i_3}$ ; и т. д.

Обозначим через  $\varepsilon = \max_i \text{diam } A_i$  – диаметр разбиения и вычислим энтропию каждого разбиения

$$H_k = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} \mu(A_{i_1 i_2 \dots i_k}) \ln \mu(A_{i_1 i_2 \dots i_k}).$$

*Определение 3.13.* Энтропией дискретной динамической системы называется предел

$$H(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} (H_{k+1} - H_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} (k^{-1} H_k),$$

т. е. асимптотическое увеличение неопределенности для разбиения бесконечно малого диаметра. Иногда предел  $k \rightarrow \infty$  сам по себе влечет измельчение разбиений, тогда первый предел не нужен.

Определенная таким образом энтропия зависит от использованной меры. Если о мере ничего не говорится, то подразумевается физическая мера.

### 3.5.3. Обобщенная энтропия (энтропия Реньи)

Обычная, или шенноновская энтропия обладает одним замечательным свойством: если необходимо рассчитать суммарную энтропию двух независимых подсистем, то она будет равна сумме энтропий каждой из них.

Однако если отказаться от этого свойства, то можно ввести и другие меры неопределенности состояния – энтропии Реньи  $H_q$  порядка  $q$ :

$$H_q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{K \tau (1-q)} \sum_{i_0 \dots i_K} P^q \right],$$

$$H_q = \frac{1}{(1-q)} \log \left( \sum_i p_i^q \right).$$

При  $q \rightarrow 1$  энтропия Реньи стремится к обычной шенноновской энтропии. Положим  $q = 1 + \gamma$ ,  $\gamma \ll 1$ . Тогда

$$p_i^q = p_i p_i^\gamma = p_i \exp\{\gamma \ln p_i\} \cong p_i (1 + \gamma \ln p_i),$$

$$H_1 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ -\gamma^{-1} \log \left( \sum_i p_i (1 + \gamma \ln p_i) \right) \right] =$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ -\gamma^{-1} \log \left( 1 + \gamma \sum_i p_i \ln p_i \right) \right] = -\sum_i p_i \ln p_i.$$

### 3.5.4. Топологическая энтропия

Предположим, что мы можем различать точки фазового пространства, отстоящие друг от друга на расстояние, превышающее некоторую величину  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим пучок траекторий, выходящих из окрестности начальной точки радиуса  $\varepsilon$ , т. е. в начальный момент не различимых. Число различимых траекторий в некоторый момент

времени  $t$  обозначим  $N(\varepsilon, t)$ . Топологической энтропией называется величина

$$h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left( \frac{1}{t} N(\varepsilon, t) \right),$$

которая характеризует степень разбегания близких фазовых траекторий. Если траектории со временем не разбегаются, либо разбегаются недостаточно сильно (например, по степенному закону), то энтропия  $h = 0$ . В противном случае, энтропия  $h > 0$ .

Покроем аттрактор динамической системы кубиками с ребрами  $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ . Пусть число этих кубиков равно  $N(\varepsilon)$ . Обозначим  $i$ -й кубик символом  $\varepsilon_i$ . Вероятность нахождения изображающей точки в кубике  $\varepsilon_i$  равна

$$p_i = \int_{\varepsilon_i} \rho(x) dx,$$

где  $\rho(x)$  – предельная плотность вероятностей.

Согласно Шеннону энтропия системы равна

$$H(\varepsilon) = - \inf_{\varepsilon_i} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log_2 p_i.$$

Величина  $H(\varepsilon)$  характеризует неопределенность нахождения изображающей точки в кубиках  $\varepsilon_i$ . При измельчении покрытия значение энтропии неограниченно возрастает.

### ***3.5.5. Связь энтропии с характеристическими показателями Ляпунова***

Для одномерных отображений энтропия совпадает с характеристическим показателем Ляпунова. Двумерное отображение преобразует окружность диаметра  $l$  в эллипс с осями  $l \cdot e^{\lambda^-}$  и  $l \cdot e^{\lambda^+}$  (рис. 3.8).

Отметим, что отрицательный характеристический показатель Ляпунова не вносит вклад в величину энтропии, так как не приводит к заполнению новых ячеек с течением времени. Энтропия определяется только положительным показателем Ляпунова. Для систем большей

размерности скорость потери информации о системе (энтропия) равна средней сумме положительных показателей Ляпунова

$$H = \int_A \left[ \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \right] dA.$$

Здесь суммирование производится по всем положительным показателям Ляпунова, а интеграл берется по некоторой инвариантной области фазового пространства.

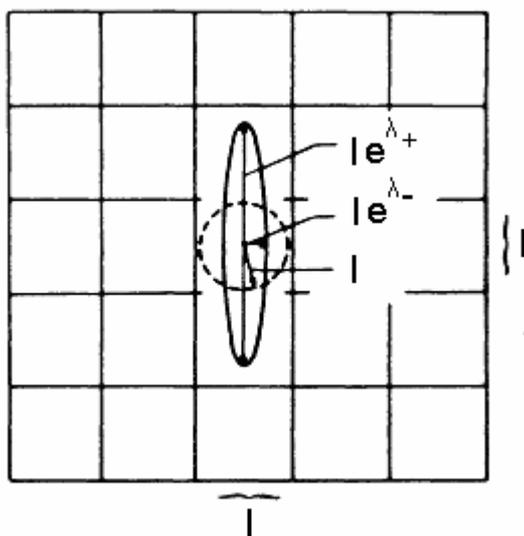


Рис. 3.8. Преобразование окружности двумерным отображением

Энтропия понимается как некоторая характеристика одной стохастической компоненты движения. В этом случае характеристический показатель  $\lambda_i$  не зависит от траектории  $x$ , и интеграл по множеству  $A$  равен единице. Отсюда энтропия равна

$$H = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i.$$

### 3.5.6. Время предсказания

Энтропия также определяет среднее время, на котором можно предсказать состояние системы с динамическим хаосом. Например, для одномерного треугольного отображения, ограниченного единичным квадратом, после  $k$  шагов по времени интервал  $l$  вырастает до

интервала  $L = l \cdot e^{\lambda k}$ . Если  $L$  становится больше единицы, невозможно определить местоположение траектории на отрезке  $[0, 1]$ , и можно сказать лишь, что система с вероятностью  $\rho_0(x)dx$  находится на интервале  $[x, x + dx] \in [0, 1]$ , где  $\rho_0(x)$  – инвариантная плотность системы. Другими словами, точное предсказание состояния этой системы возможно только на интервале времени  $T_{pr}$ , пока  $l \cdot \exp\{\lambda T_{pr}\} = 1$ , т. е.

$$T_{pr} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{l}\right).$$

На временах, больших  $T_{pr}$ , возможны лишь статистические предсказания. Последнее уравнение можно обобщить на динамические системы размерности  $n > 1$  заменой характеристического показателя на энтропию

$$T_{pr} \sim \frac{1}{H} \ln\left(\frac{1}{l}\right).$$

Величина обратная энтропии (при условии ее положительности) определяет характерное время перемешивания  $t_{\min} = H^{-1}$  в системе. По прошествии промежутка времени  $t \gg t_{\min}$  начальная область фазового объема расплывается по всей энергетически доступной гиперповерхности (в отсутствие диссипации) или по предельному подмножеству фазового пространства – странному аттрактору (для диссипативных систем). При большом времени движения  $t \gg t_{\min}$  описание может быть только вероятностным. При малых временах  $t \ll t_{\min}$  поведение системы можно предсказать с достаточной точностью (не превышающей точность задания начального положения фазовой точки).

Таким образом, энтропия является важной характеристикой динамической системы и широко используется в качестве критерия хаотичности. Энтропия является мерой средней скорости потери информации о состоянии динамической системы с течением времени.

Энтропия для одномерных отображений равна показателю Ляпунова. Для систем большей размерности энтропия есть мера средней деформации ячейки фазового пространства и равна усредненной по фазовому пространству сумме положительных показателей Ляпунова.

Энтропия характеризует хаотическое движение, а странный аттрактор можно определить как аттрактор с положительной энтропией.

### 3.6. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Для выявления хаотических режимов наряду с характеристическими показателями Ляпунова и энтропией используются автокорреляционная функция и спектр мощности. Характер кривых, полученных при вычислении корреляционного интеграла и спектральной плотности, один из самых простых и в то же время вполне надежных критериев, используемых для анализа режимов движения динамических систем.

#### 3.6.1. Автокорреляционная функция

Для непрерывной системы автокорреляционная функция вводится как среднее по временному интервалу  $T$  произведений  $x$ , взятых в два различных момента времени  $t$  и  $t + \tau$

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ T^{-1} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \right].$$

Обозначим через  $f^{(k)}(x_0)$ ,  $k = \overline{0, K}$  итерации дискретной системы  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $K$  – число итераций,  $x_0$  – начальное состояние.

Введем среднее (по числу итераций) значение

$$\bar{x} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ K^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} f^{(k)}(x_0) \right].$$

Зная среднее значение  $\bar{x}$ , можно для каждой итерации  $x_k = f^{(k)}(x_0)$  найти ее отклонение от среднего значения  $\hat{x}_k = x_k - \bar{x}$ . Рассмотрим две итерации, номера которых отличаются на величину  $m$

$$x_k = f^{(k)}(x_0) \text{ и } x_{k+m} = f^{(k+m)}(x_0).$$

Корреляционной (или автокорреляционной) функцией называется величина, определяемая пределом

$$C(m) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ K^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{x}_{k+m} \hat{x}_k \right].$$

Корреляционная функция показывает насколько отклонения от среднего значения  $\hat{x}_k = x_k - \bar{x}$ , вычисленные через  $m$  шагов (т. е.  $\hat{x}_{k+m}$  и  $\hat{x}_k$ ), связаны в среднем друг с другом. Если траектория  $\{f^{(k)}(x_0)\}$  хаотическая, то корреляция отсутствует, и функция  $C(m)$  спадает до нуля.

Если для данного отображения  $f(x)$  известна инвариантная мера, корреляционную функцию можно записать в следующем виде

$$C(m) = \int_0^1 dx p(x) x f^{(m)}(x) - \left[ \int_0^1 dx p(x) x \right]^2.$$

Здесь использовано свойство коммутативности итераций

$$x_{k+m} = f^{(k+m)}(x_0) = f^{(k)} f^{(m)}(x_0) = f^{(m)} f^{(k)}(x_0).$$

Последовательность  $x_0, f(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0), \dots, f^{(k+m)}(x_0)$  для одномерного случая, может быть охарактеризована с помощью:

- показателя Ляпунова, который определяет скорость разбегания близких точек под действием отображения  $f$ ;
- инвариантной плотностью вероятности, которая служит мерой того, как “плотно” точки итерационной последовательности распределяются на интервале;
- корреляционной функцией, которая измеряет зависимость между итерациями через  $m$  шагов.

**Пример.** В случае треугольного отображения

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{для } x \leq 1/2 \\ 2(x-1) & \text{для } x > 1/2 \end{cases},$$

для которого хаотическая последовательность равномерно покрывает единичный интервал, и инвариантная мера равна  $p(x)=1$ , для корреляционной функции имеем

$$C(m) = \int_0^1 dx x f^{(m)}(x) - \left[ \int_0^1 dx x \right]^2 = \int_{-0,5}^{0,5} dy y f^{(m)}(y + 0,5) + \\ 0,5 \int_{-0,5}^{0,5} dy f^{(m)}(y + 0,5) - 0,25 = (1/12) \delta_{m,0},$$

где  $\delta_{m,0}$  – дельта-функция Кронекера, равная нулю при несовпадающих значениях индексов. В случае треугольного отображения итерации коррелированы только при интервале корреляции  $m = 0$ , т. е. если номера итераций совпадают. Таким образом, последовательность итераций треугольного отображения дельта-коррелирована.

### 3.6.2. Спектральная плотность

Спектр мощности содержит ту же информацию, что и автокорреляционная функция. Фактически он может быть получен как преобразование Фурье от корреляционного интеграла  $C(m)$ . Спектральная плотность определяется формулой

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ (2\pi T)^{-1} |X(\omega)|^2 \right],$$

где  $X(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt$ . Здесь  $X_K(\omega)$  – Фурье-амплитуда:

$$X_K(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k \exp\{-i\omega_j k\},$$

и  $x_k = \sum_j A_j \exp\{i\omega_j k\} + r(k)$  – отсчеты фазовых координат.

Для дискретной системы спектр мощности определяется выражением

$$S(\omega) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \frac{K}{2\pi} |X_K(\omega)|^2 \right] =$$

$$= \sum_j |A_j|^2 \delta(\omega - \omega_j) - |r(\omega)|^2.$$

Спектр мощности есть мера количества энергии, которую данная реализация несет в каждом частотном интервале. Временные реализации, полученные из периодических (квазипериодических) траекторий, имеют спектр мощности, сконцентрированный на конечном или счетном множестве частот. Непрерывный спектр (т. е. абсолютно непрерывный относительно меры Лебега) является индикатором хаоса.

### 3.6.3. Связь автокорреляционной функции и спектра

Автокорреляционная функция и спектральная плотность тесно связаны между собой. Из определения спектральной плотности после несложных преобразований находим

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \pi^{-1} \int_0^T \cos(\omega\tau) d\tau T^{-1} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt \right].$$

Допустив, что имеется возможность перестановки порядка выполнения операций, получим

$$S(\omega) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) C(\tau) d\tau$$

или

$$S(\omega) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} C(\tau) d\tau.$$

Предположим, что  $x(t) = x(t + T_1)$  – периодическая функция с периодом  $T_1$ , тогда ее можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\{-in\omega_1 t\},$$

где  $\omega_1 = 2\pi/T_1$ , а  $C_n$  – коэффициенты Фурье. В этом случае автокорреляционная функция равна

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= T^{-1} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \\
&= T^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n'=-\infty}^{\infty} C_n C_{n'} \exp(-in'\omega_1\tau) \right] \int_0^T \exp(-i(n+n')\omega_1 t) dt \right\} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_{-n} \exp(-in\omega_1\tau) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \exp(-in\omega_1\tau).
\end{aligned}$$

Функция  $x(t)$  – действительная, поэтому имеет место равенство  $C_n = C_{-n}$ . Следовательно, автокорреляционная функция также является периодической с периодом  $T_1$ .

Спектральная плотность периодической функции равна

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \pi^{-1} \int_0^{\infty} \exp\{-i(n\omega_1 - \omega)\tau\} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_1).$$

Таким образом, спектр периодической функции, отвечающий периодическому движению динамической системы, является дискретным и будет содержать, помимо основной частоты  $\omega_1$ , кратные гармоники  $n\omega_1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Пусть  $x(t)$  – квазипериодическая функция  $x(t) = x(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))$ , где  $\varphi_i(t) = \omega_i t$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . По каждой переменной  $\varphi_i$  период равен  $2\pi$ . Разложим вектор  $x(t)$  в ряд Фурье по системе базисных функций  $\{\varphi_i\}$

$$x(t) = \sum_{n_1, \dots, n_k} C_{n_1} \dots C_{n_k} \exp\{-i(n_1\varphi_1 + \dots + n_k\varphi_k)\}.$$

Тогда для значений автокорреляционной функции и спектра квазипериодической функции имеем

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \sum_{n_1, \dots, n_k} |C_{n_1} \dots C_{n_k}|^2 \exp\{-i(n_1\omega_1 + \dots + n_k\omega_k)\tau\}, \\
S(\omega) &= \sum_{n_1, \dots, n_k} |C_{n_1} \dots C_{n_k}|^2 \delta(\omega - n_1\omega_1 - \dots - n_k\omega_k).
\end{aligned}$$

Следовательно, спектр квазипериодической функции содержит всевозможные линейные комбинации частот  $(n_1\omega_1 + \dots + n_k\omega_k)\tau$ . Если

число частот движения велико, то линии в спектре будут расположены достаточно плотно, однако спектр будет оставаться дискретным.

Если динамика системы является хаотичной, то функция  $x(t)$  будет апериодической функцией времени, а спектр – сплошным (или непрерывным).

### **3.7. ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ И РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРА**

Странный аттрактор – ограниченное притягивающее множество, которое одновременно является аттрактором и не является подмногообразием. Структура этих множеств весьма сложна, а топологические свойства – экзотичны. В частности, для них оказывается достаточно бесполезными обычные понятия объема (длины) или топологической размерности.

В диссипативной динамической системе фазовый объем с течением времени сокращается, фазовые кривые притягиваются к некоторому множеству (аттрактору). В случае хаотического режима фазовая траектория на аттракторе выглядит как клубок перепутанных нитей, и малое возмущение траектории может существенно изменить направление движения. Динамическая система со странным аттрактором характеризуется глобальным сжатием фазового объема и локальной неустойчивостью фазовых траекторий.

#### ***3.7.1. Фракталы***

Объекты, которые сейчас называются фракталами, впервые появились в математике при развитии понятия “линия”, “плоская фигура”. К фракталам относятся такие фигуры, которые нельзя назвать в полном смысле слова ни линией, ни плоской фигурой. Примером такого объекта может служить кривая Коха, которая образуется из отрезка прямой последовательной заменой каждого прямолинейного участка на ломаную линию. В пределе получается “линия”, соединяющая две точки, но имеющая бесконечную длину.

В основе первого определения фрактала, данного Б. Мандельбротом, лежит представление о топологической размерности. Формулируется оно так: «Фракталом называется такое множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности». «Дробная размерность» и выражает пограничное свойство фракталов лежать между точкой и линией, между линией и поверхностью.

Более позднее и менее формальное определение фрактала звучит следующим образом. «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в некотором смысле подобны целому». Причем понятие самоподобия трактуется весьма широко, что позволяет охватить достаточно мощное множество объектов, достойных называться фракталами. Формально подобие или самоподобие характеризуется тем, что некоторые свойства инвариантны относительно тех или иных преобразований. В простейшем случае речь идет о геометрических преобразованиях: плоскость переходит в себя при параллельном сдвиге и повороте.

Простейшие фракталы, такие как канторовская пыль, ломаная и снежинка Коха, ковер и губка Серпинского, обладают регулярной, геометрически правильной, структурой. Каждый фрагмент такого геометрически правильного фрактала в точности повторяет всю конструкцию в целом. При менее точном следовании самофинности или самоподобию возникают другие, не столь регулярные, например, случайные и динамические фракталы. Самоафинность случайных фракталов проявляется в сохранении законов случайного распределения в различных масштабах, возможно, с различными дисперсиями и средними.

До сих пор речь шла о фрактальности пространственных форм. Однако самоподобие можно увидеть и в динамике процессов, протекающих во времени. Фрактальность поведения сложных нелинейных систем рассматривается как их неотъемлемое свойство. Если система сложна, то в своем развитии она проходит через чередующиеся этапы

устойчивого и хаотического развития. Сценарии перехода от порядка к хаосу и обратно поддаются классификации, и все многообразие природных процессов распадается на некоторое число качественно подобных. Так нерегулярные движения динамической системы на аттракторе, при рассмотрении на различных временных масштабах, будут проявлять самоподобие – экспоненциальное разбегание бесконечно близких траекторий, т. е. имеет место свойство локальной неустойчивости.

Подобно другим геометрическим понятиям (точка, линия, поверхность) фрактал – прежде всего абстракция, теоретическая модель реальности, результат предельного перехода. Фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

**Дробная размерность.** Существует несколько принципиально разных определений размерности геометрического объекта: фрактальная размерность, или размерность Минковского; топологическая размерность и размерность Хаусдорфа. Топологическая размерность множества всегда выражается целым числом; это не противоречит интуитивному представлению о том, что кривые одномерны, а поверхности двумерны. Размерность Хаусдорфа лежит в основе фрактальной теории. Фрактал определяется как множество, размерность которого строго больше топологической размерности. Размерность Минковского может служить аналогом размерности Хаусдорфа. Эти размерности, как правило, совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского намного эффективнее.

**Размерность Минковского.** Рассмотрим известные выражения для длины, площади и объема “шара” в евклидовом пространстве. Длина “шара” радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}$  составляет  $2r$ . Площадь “шара” радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^2$  составляет  $\pi r^2$ . Объем “шара” радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^3$  составляет  $4/3\pi r^3$ . Формула в пространстве любого целого числа измерений имеет вид:

$$V_d = \gamma(d)r^d. \quad (3.30)$$

Первый шаг в построении теории дробной размерности состоит в определении  $d$  шара радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^n$ . Это достигается распространением формулы (3.30) на все вещественные  $d > 0$ . Например, объем (мера) шара в  $3/2$ -мерном пространстве определяется как  $V_{3/2} = \gamma(3/2)r^{3/2}$ . Конкретное значение коэффициента  $\gamma(d)$  в дальнейших рассуждениях роли не играет и его можно считать константой.

Следующий шаг состоит в переносе понятия  $d$ -меры с шара на произвольное множество  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Для этого аппроксимируем множество  $A$  объединением шаров и просуммируем их объемы. Пусть  $N(\varepsilon)$  – минимальное число шаров радиуса  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия компактного множества  $A$ . Тогда  $d$ -мера множества  $A$ , обозначаемая  $M_d(A)$ , удовлетворяет (приближенно) соотношению:

$$M_d(A) \sim N(\varepsilon)\varepsilon^d.$$

Полагая, что мера положительна  $M_d(A) > 0$ , для константы  $c > 0$  имеем

$$N(\varepsilon) \sim c/\varepsilon^d.$$

Логарифмируя левую и правую части последнего соотношения, получаем

$$\log N(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon.$$

Откуда

$$d = -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \frac{\log c}{\log \varepsilon}.$$

Так как значение  $\log \varepsilon \rightarrow -\infty$  при радиусе  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , то размерность Минковского  $d_M(A)$  множества  $A$  должна удовлетворять

$$d_M(A) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Если предел существует, то последнее выражение определяет размерность Минковского множества  $A$ .

**Самоподобные множества.** Рассмотрим ограниченное множество, например, отрезок прямой единичной длины. Если уменьшить его длину в  $r$  раз, то, параллельно перенося этот отрезок вдоль исходного отрезка, можно накрыть им исходный отрезок. Например, если  $r = 1/N$ , где  $N$  – целое число, то  $N$  отрезками соответствующей длины можно накрыть исходный отрезок.

Прямоугольник можно накрыть  $N$  его уменьшенными копиями, если коэффициент подобия  $r = 1/\sqrt{N}$ , прямоугольный параллелепипед – если  $r = 1/\sqrt[3]{N}$ , и т. д. В общем случае если  $N$  уменьшенных копий исходного объекта с коэффициентом подобия  $r = 1/(N)^{1/d}$  полностью накрывают его, то число  $d$  называют размерностью подобия, а сам объект является фракталом.

Компактное множество  $A$  самоподобно, если существуют такие преобразования подобия  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , что имеет место представление:

$$A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \dots \cup S_N(A), \quad (3.31)$$

причем множества  $S_i(A)$  имеют не очень много общих точек (попарно не пересекаются). Если все коэффициенты подобия  $r_1, r_2, \dots, r_N$  преобразований  $S_1, S_2, \dots, S_N$  лежат в интервале  $[0, 1]$ , и выполнено соотношение (3.31), то решение уравнения

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_N^d = 1$$

называется размерностью подобия множества  $A$ .

*Определение 3.14.* Компактное множество  $A$  называется самоподобным, если оно представимо в виде (3.31), и  $d$ -мера Хаусдорфа всех парных пересечений множеств  $S_i(A)$  равна нулю, где  $d$  – размерность подобия множества  $A$ .

Условие равенства нулю  $d$ -меры Хаусдорфа всех парных пересечений множеств  $S_i(A)$  всегда выполняется, когда множества  $S_i(A)$  имеют лишь конечное или счетное число общих точек.

**Пример.** Рассмотрим регулярный фрактал, получивший название “ломаная Коха” и обладающий самоподобием: каждый фрагмент при надлежащем увеличении воспроизводит структуру всего фрактала. Процесс построения “ломаной Коха” можно представить в следующем виде. Единичный отрезок делится на три равные части, средняя часть удаляется, а на ее месте как на основании строится равносторонний треугольник (точнее две его боковые стороны). Далее вся процедура повторяется снова и снова.

На первой итерации с масштабным множителем (коэффициентом подобия)  $r = 1/3$  мы получим фрагмент, состоящий из одной трети исходного отрезка, и таких фрагментов нужно четыре, чтобы покрыть весь исходный отрезок. Аналогично, на  $n$ -й итерации при масштабном множителе  $r = (1/3)^n$  нужно  $4^n$  фрагментов. Следовательно, размерность подобия кривой Коха равна  $d = \ln 4 / \ln 3$  и совпадает с фрактальной размерностью Хаусдорфа (см. ниже раздел 3.7.2).

### ***3.7.2. Геометрические размерности***

Размерность характеризует сложность аттрактора, позволяя дать ответ на вопрос, какое минимальное количество переменных должна включать математическая модель динамической системы, или хотя бы получить оценку этой величины (чаще всего снизу).

**Топологическая размерность.** Это наиболее привычная всем величина, которая равна  $n$  для  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$  или  $n$ -мерного многообразия. Топологическая размерность точки по определению равна нулю, линии – единице, поверхности – двум и т. п. Понятие топологической размерности апеллирует к нашим представлениям о линии, поверхности, объемном теле. Однако ее можно определить и для более сложных геометрических объектов фрактального типа.

Общее определение размерности для компактов и метрических пространств строится по индукции. Пустому множеству приписывается размерность  $d_T = -1$ . Перегородкой между множествами  $A$  и  $B$

называется замкнутое множество  $\Phi$  такое, что его дополнение – это сумма двух множеств  $C$  и  $D$ ,  $C \cap D = \emptyset$ . Из них одно содержит множество  $A$ , а другое –  $B$ . Допустим, что дано определение множества и пространства размерности  $\leq n$ . Тогда говорят, что пространство  $X$  имеет размерность  $\leq n+1$ , если между любыми двумя замкнутыми множествами  $A$  и  $B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  имеется перегородка размерности  $\leq n$ .

Например, точка имеет размерность  $d_T = 0$ , поскольку две несовпадающие точки можно считать разделенными пустым множеством. Счетное множество точек также имеет размерность  $d_T = 0$ . Прямая имеет размерность  $d_T = 1$ , так как любые два непересекающихся отрезка с несовпадающими концами можно разделить точкой. Плоскость можно разделить линией, и т. д. Канторово множество имеет размерность  $d_T = 0$ . Оно не содержит ни одного отрезка, и любые две его части можно считать разделенными пустым множеством.

Другой подход к понятию топологической размерности определяется посредством покрытий. Пусть дан компакт  $X$  и его покрытие открытыми множествами диаметра не более  $\varepsilon$ . Размерностью называется наименьшее число  $n$  такое, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое покрытие, что каждая точка компакта  $X$  принадлежит не более чем  $n+1$  покрывающему множеству. Топологическая размерность канторова множества равна 0. Его можно покрыть непересекающимися отрезками, так что каждая точка будет принадлежать только одному из них.

Топологическая размерность нечувствительна к гладкости множества. Она “не чувствует” извилистости линии, шероховатости поверхности, пористости объемного тела.

**Размерность Хаусдорфа** позволяет дать определение фрактального множества. Её определение также связано с покрытием множества или метрического пространства ячейками различной геометрической формы (кубы, шары и др.).

Пусть  $B$  – некоторое подмножество  $n$ -мерного пространства  $\mathbf{R}^n$ . Покроем подмножество  $B$  кубами из  $\mathbf{R}^n$ .

*Определение 3.15.* Хаусдорфовой размерностью множества  $B$  называется предел (если он существует)

$$d_X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3.32)$$

Здесь  $\varepsilon$  – сторона куба,  $N(\varepsilon)$  – число кубов, требуемое для покрытия множества  $B$ . В это число попадают те, и только те кубы, которые содержат хотя бы одну точку из множества  $B$ .

Хаусдорфова размерность (3.32) может быть обобщена и на случай покрытия множества или метрического пространства произвольными множествами  $A_i$ , диаметр которых удовлетворяет соотношению  $\text{diam } A_i < \varepsilon$ . Диаметр множества  $A_i \subset \mathbf{R}^n$  называется следующей величиной

$$\text{diam}(A_i) = \sup \{ \|x - y\|_2 \mid x, y \in A_i \}.$$

Пусть

$$m(\varepsilon, p) = \inf_{\{A_i\}} \sum_i (\text{diam } A_i)^p,$$

где нижняя грань берется по всем возможным покрытиям с диаметром  $\text{diam } A_i < \varepsilon$ . Тогда хаусдорфова размерность определяется как

$$d_X = \sup \left\{ p : \sup_{\varepsilon > 0} m(\varepsilon, p) > 0 \right\}. \quad (3.33)$$

Смысл этого определения можно пояснить на следующем примере. Возьмем квадрат со стороной  $A$  на плоскости в трехмерном пространстве и покроем его кубиками со стороной  $\varepsilon$ . Количество таких кубиков  $N(\varepsilon) \cong (A/\varepsilon)^2$ , а диаметр кубика равен  $\text{diam}(K) = \sqrt{3} \varepsilon$ . Здесь множитель  $\sqrt{3}$  возникает, поскольку мы покрываем плоскость трехмерными кубиками. Далее составим сумму

$$s(\varepsilon, p) = \sum_i d_i^p = N(\varepsilon) d^p \cong A \varepsilon^{p-2}.$$

Зависимость этой суммы от величины  $\varepsilon$  существенно определяется  $p$ . Если  $p < 2$ , то  $s$  при уменьшении  $\varepsilon$  неограниченно растет, поэтому  $\sup_{\varepsilon > 0} s(\varepsilon, p)$  дает бесконечное значение. Если  $p > 2$ , то с уменьшением  $\varepsilon$  сумма  $s(\varepsilon, p) \rightarrow 0$ , поэтому инфимум по всем покрытиям с диаметром меньше  $\varepsilon$  даст 0. Существует выделенное значение  $p = 2$ , равное топологической размерности квадрата и являющееся точной верхней гранью значений  $p$ , для которых  $s > 0$ .

Хаусдорфова размерность  $n$ -мерного многообразия  $d_X = n$ , т. е. совпадает с топологической размерностью. Для канторова множества  $d_X = \log_3 2 = (\ln 2 / \ln 3)$ . Покроем канторово множество отрезками длины  $\varepsilon$  (пусть  $\varepsilon = 3^{-k}$ , т. е. совпадает с длиной отрезков, возникающих на  $k$ -м шаге построения канторова множества). Количество таких отрезков  $N = 2^k$ , тогда  $s(\varepsilon, p) = 2^k 3^{-p} = (2 \cdot 3^{-p})^k$ . Измельчение покрытия ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) эквивалентно  $k \rightarrow \infty$ , поэтому поведение  $s$  зависит от того, больше или меньше единицы выражение в скобках  $2 \cdot 3^{-p}$ . Выделенному значению  $p$  будет отвечать случай  $2 \cdot 3^{-p} = 1$ , т. е.  $2 = 3^p$  или  $p = \log_3 2$ . Таким образом, для канторова множества  $d_T = 0$ , а  $d_X = \log_3 2 \cong 0,639\dots$ .

Множества, для которых хаусдорфова размерность строго больше топологической размерности, называются фрактальными множествами или фракталами. При этом предполагается, что множество принадлежит  $n$ -мерному евклидову пространству или многообразию, а диаметр покрывающего множества вычисляется в метрике этого пространства или многообразия. Значения хаусдорфовой размерности  $d_X$  может зависеть от того, каким образом вычисляется диаметр множества, т. е. от используемой метрики. А метрику можно определять по-разному и, соответственно, получать разные значения  $d_X$ . Оказывается, что точная нижняя грань размерности Хаусдорфа

$d_X$  по всем возможным метрикам равна топологической размерности  $d_T$ . Поэтому определение фрактала требует фиксации метрики.

Странные аттракторы чаще всего оказываются фрактальными множествами, поэтому естественно использовать размерность Хаусдорфа как одну из характеристик странного аттрактора. Однако вычислить размерность Хаусдорфа в большинстве случаев чрезвычайно трудно. Определение (3.33) не позволяет предложить какой-либо вычислительный алгоритм, так как трудно найти численно точную нижнюю грань по всем покрытиям. Поэтому численными методами находятся оценки другой величины – предельной емкости множества.

**Размерность Хаусдорфа–Безиковича.** Измерим величину множества метрического пространства  $M$ . Для этого разобьем множество на ячейки с характерным размером (диаметром)  $\delta$  (это могут быть шары, кубы и др.) и подсчитаем число ячеек, покрывающих множество. Уменьшая размер ячеек и контролируя скорость увеличения их числа, необходимого для покрытия множества, можно получить представление о размерности множества. В частности, можно вычислить “длину” множества, его “площадь”, “объем”. Пусть множество – спрямляемая кривая длины  $L_0$ . Выберем минимальное покрытие, т. е. такое, которое состоит из наименьшего числа ячеек. Существование такого покрытия для компактного множества следует из леммы Гейне–Бореля. Число ячеек  $N(\delta)$  в этом покрытии будет пропорционально отношению  $L_0 / \delta$ . Длину кривой получим предельным переходом при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$L = N(\delta) \cdot \delta \sim \frac{L_0}{\delta} \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0.$$

Множеству точек, представляющих собой кривую длины  $L_0$ , можно сопоставить и площадь. Так как каждая ячейка имеет характерную площадь  $\delta^2$ , то площадь множества пропорциональна  $N(\delta) \cdot \delta^2$ , и при  $\delta \rightarrow 0$  получим

$$S = N(\delta) \cdot \delta^2 \sim \frac{L_0}{\delta} \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Аналогично можно вычислить объем множества точек.

Если в качестве множества  $M$  взять часть поверхности площади  $S$ , то число ячеек, необходимое для покрытия этой поверхности, пропорционально  $N(\delta) = S / \delta^2$ . “Длина” поверхности, определяемая предельным переходом, равна

$$L = N(\delta) \cdot \delta \sim \frac{S}{\delta^2} \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty.$$

Площадь  $S$ , принимающая значения в интервале  $0 < S < \infty$ , задается соотношением

$$S = N(\delta) \cdot \delta^2 \sim \frac{S}{\delta^2} \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} S,$$

а объем равен нулю

$$V = N(\delta) \cdot \delta^3 \sim \frac{S}{\delta^2} \delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

В этих примерах для характеристики “величины” множества  $M$  используется пробная функция  $h(\delta) \sim \gamma(d) \delta^d$ , которая определяет величину ячейки – длину при  $d = 1$ , площадь при  $d = 2$ , объем при  $d = 3$ . “Величина” или мера множества  $M$  определяется как сумма “величин” всех ячеек, покрывающих множество

$$M_d(\delta) = \inf \sum_i h^d(\delta).$$

Константа  $\gamma(d)$  зависит от формы ячейки и от свойства множества, которое характеризует функция  $h(\delta)$ . Например, если  $h(\delta)$  – площадь круга, то константа равна  $\gamma(d) = 2\pi$  (для площади квадрата  $\gamma(d) = 1$ ). Существует некоторое критическое значение  $d$ . Выше критического значения мера  $M_d$  при  $\delta \rightarrow 0$  равна 0, а ниже критического значения мера  $M_d = \infty$ . Значение  $d$ , при котором  $M_d$  не равна ни нулю, ни бесконечности, отражает топологическую размерность множества. Результат не изменится, если в качестве значений  $d$  выбирать не

только целые числа, но и любые действительные. Это позволяет обобщить понятие размерности и дать следующее определение размерности Хаусдорфа–Безиковича.

*Определение 3.16.* Размерностью Хаусдорфа - Безиковича называется число  $d_{XB}$  такое, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} M_d = \begin{cases} 0, & d > d_{XB} \\ \infty, & d < d_{XB} \end{cases}.$$

Выше были рассмотрены достаточно простые множества, для которых размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с топологической размерностью. Существуют и более сложные множества, для которых скачок меры  $M_d$  от нуля до бесконечности происходит при нецелых значениях  $d$ .

Более наглядное представление о размерности Хаусдорфа–Безиковича можно получить, рассматривая  $N(\delta)$  как функцию  $\delta$  со степенной особенностью в нуле

$$N(\delta) = \frac{\text{const}}{\delta^d} + \alpha(\delta),$$

где  $\alpha(\delta)\delta^d \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Размерность Хаусдорфа–Безиковича равна степени особенности  $d$ . В этом смысле размерность Хаусдорфа–Безиковича определяет скорость роста числа элементов минимального покрытия множества, когда размер элемента стремится к нулю. Из приведенного представления  $N(\delta)$  имеем, что при критическом значении  $d$  с точностью до бесконечно малых величин выполняется соотношение  $N(\delta)\delta^d = \text{const}$ , откуда

$$d_{XB} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}.$$

Здесь числитель – число элементов в покрытии компактного множества ячейками с диаметром  $\delta$ , а знаменатель – число, показывающее, сколько раз укладывается диаметр ячейки в единице длины.

Данное определение обобщает понятие размерности Хаусдорфа в том смысле, что размерность Хаусдорфа–Безиковича не зависит от

формы ячейки – будь то сфера, эллипсоид, куб или ячейка другой формы.

**Емкость или фрактальная размерность множества** (метрическая размерность). Рассмотрим в  $n$ -мерном фазовом пространстве динамической системы некоторое множество  $B$ . Покроем это множество  $n$ -мерными кубиками со стороной  $\varepsilon$  так, чтобы эти кубики содержали все точки множества  $B$ . Пусть  $N(\varepsilon)$  – минимальное число таких кубиков, необходимых для покрытия  $B$ .

*Определение 3.17.* Если существует предел

$$d_F(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (3.34)$$

то этот предел  $d_F(B)$  называется емкостью или фрактальной размерностью множества  $B$ .

Покажем, что фрактальная размерность регулярных аттракторов диссипативных динамических систем равна целому числу и совпадает с обычной размерностью. Обозначим через  $d_E = 1, 2, 3$  обычные размерности одномерных, двумерных и трехмерных многообразий трехмерного евклидова пространства. Количество кубиков со стороной  $\varepsilon$ , необходимое для покрытия единичного отрезка, – пропорционально  $1/\varepsilon$ , для покрытия единичного квадрата –  $1/\varepsilon^2$ , для покрытия единичного объема –  $1/\varepsilon^3$ . Количество кубиков, покрывающих компактное подмногообразие размерности  $d_E$ , равно  $N(\varepsilon) = C\varepsilon^{-d_E}$ , где  $C$  – некоторая постоянная. Подставляя  $N(\varepsilon)$  в формулу (3.34), получим, что  $d_F = d_E$ . Фрактальная размерность компактных подмногообразий евклидова пространства совпадает с обычной (топологической) размерностью.

Для нерегулярных множеств и странных аттракторов, обладающих масштабной инвариантной структурой, фрактальная размерность имеет дробное значение. Покажем это на примере канторова множества. Рассмотрим последовательность  $\varepsilon_k = (1/3)^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Из построения канторова множества следует, что для любого  $k$  (номера

этапа построения) канторово множество полностью покрывается  $N(k) = 2^k$  отрезками длиной  $\varepsilon_k = (1/3)^k$  каждый. Тогда из формулы (3.34) следует, что

$$d_F(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(k)}{\ln(1/\varepsilon_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631 .$$

Странные аттракторы двумерных дискретных диссипативных динамических систем (каскадов) имеют дробную фрактальную размерность, значение которой лежит в интервале между единицей и двойкой, т. е. эти множества уже не являются линией, но еще не являются и поверхностями.

Нахождение значения фрактальной размерности является сложной вычислительной проблемой и не всегда может быть успешно реализовано.

Существует гипотеза, выдвинутая Капланом и Йорке, согласно которой фрактальная размерность связана с характеристическими показателями Ляпунова. Эта гипотеза предполагает, что фрактальная размерность совпадает с ляпуновской размерностью.

Ляпуновская размерность множества определяется следующим образом:

$$d_{L1} = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (3.35)$$

где все характеристические показатели Ляпунова упорядочены по возрастанию:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ;  $n$  – размерность фазового пространства, а число  $j$  определяется из условий:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{j+1} < 0.$$

Для трехмерных динамических систем в предположении, что движение происходит на странном аттракторе, формула (3.35) сводится к виду

$$d_{L1} = 2 + \lambda_1 / |\lambda_3|. \quad (3.36)$$

Так как для таких систем  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  и их сигнатура имеет вид  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ , то здесь  $j = 2$ .

Для того, чтобы установить геометрическую структуру странного аттрактора, необходимо взять какую-либо малую область фазового пространства и проследить, как она эволюционирует с течением времени. Информацию об изменении малого элемента фазового объема динамической системы дают характеристические показатели Ляпунова.

На примере трехмерной системы со странным аттрактором поясним смысл гипотезы Каплана–Йорке. Рассмотрим в начальный момент времени  $t = 0$  малый элемент  $V_0$  фазового объема. Так как система является диссипативной, а движение происходит на странном аттракторе, то с течением времени элемент объема будет сжиматься и сильно деформироваться. Этот деформированный объем  $V(t)$  будем покрывать трехмерными кубиками со стороной  $\varepsilon(t)$ . Характеристические показатели Ляпунова определяют степень сжатия фазового объема в одних направлениях, и растяжения – в других. Изменение во времени элемента фазового объема, используя показатели Ляпунова, можно записать следующим образом

$$V(t) \sim V_0 \exp\{(\lambda_1 - |\lambda_3|)t\},$$

где нумерация  $\lambda_i$  выбрана так, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  и  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 \leq 0$ . Изменение стороны кубика  $\varepsilon(t) \sim \exp\{-|\lambda_3|t\} \varepsilon(t)$  и, соответственно, объема равно

$$\varepsilon^3(t) \sim \exp\{-3|\lambda_3|t\}.$$

Здесь  $\varepsilon^3(t)$  – объем кубиков со стороной  $\varepsilon(t)$ , покрывающих элемент  $V(t)$  фазового объема в момент времени  $t$ . Число  $N(t)$  таких кубиков равно

$$N(t) \sim V(t) / \varepsilon^3(t) = \exp\{(\lambda_1 + 2|\lambda_3|)t\}.$$

Отсюда для фрактальной размерности  $d_F$  по формуле (3.34) имеем

$$d_F = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(t)}{\ln(1/\varepsilon(t))} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|},$$

что совпадает с (3.36). Из последнего соотношения легко получить, что  $d_F < n = 3$ . В самом деле, из условия диссипативности динамической системы вытекает, что ее фазовые траектории с течением времени стягиваются к некоторому подмножеству фазового пространства. Размерность этого подмножества всегда меньше размерности фазового пространства.

Используется еще одна формула для оценки размерности аттрактора, содержащая характеристические показатели Ляпунова,

$$D_{L2} = k + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{|\lambda_n|}, \quad (3.37)$$

где  $k$  – число неотрицательных характеристических показателей.

По формуле Мори размерность Ляпунова может быть определена следующим образом

$$d_{L3} = k + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i^+}{\sum_{i=1}^l |\lambda_i^-|}, \quad (3.38)$$

где  $k$  – число неотрицательных характеристических показателей Ляпунова,  $m$  и  $l$  – число положительных и отрицательных характеристических показателей, соответственно.

Для значений ляпуновской размерности, вычисленных по формулам (3.35), (3.37), (3.38), справедливо соотношение  $d_{L3} \leq d_{L2} \leq d_{L1}$ .

Гипотеза о равенстве фрактальной и ляпуновской размерности выполняется в ряде частных случаев, в общем случае она несправедлива. Можно показать лишь, что ляпуновская размерность дает оценку сверху для фрактальной (хаусдорфовой) размерности  $d_F \leq d_L$ . Поэтому при расчете размерности странных аттракторов часто приходится непосредственно использовать определение (3.34) величины  $d_F$

и опираться исключительно на численные расчеты, для проверки которых и используется гипотеза Каплана–Йорке.

### 3.7.3. Вероятностные размерности

Вероятностные размерности используют понятие меры и энтропии (метрической энтропии динамической системы). Предполагается, что на исследуемом множестве  $B$  определена мера, и все упоминаемые в этом пункте множества измеримы.

**Информационная размерность.** Разобьем множество  $B$  на минимально возможное количество непересекающихся множеств  $B_i$  таких, что  $\text{diam } B_i \leq \varepsilon_i$ . Вычислим энтропию этого разбиения

$$H(\varepsilon) = - \inf_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log_2 p_i, \quad p_i = \int_{\varepsilon_i} \rho(x) dx = \mu(B_i),$$

где  $\rho(x)$  – плотность вероятности,  $p_i$  – вероятность нахождения изображающей точки в кубике  $\varepsilon_i$ . Величина энтропии  $H(\varepsilon)$  характеризует неопределенность нахождения изображающей точки в кубике  $\varepsilon_i$ . При измельчении покрытия значение энтропии неограниченно возрастает. Однако может существовать предел

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon^{-1}}, \quad (3.39)$$

который задает информационную размерность аттрактора. Если предел (3.39) не существует, вводится понятие нижней и верхней информационной размерности

$$\underline{d}_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \frac{H(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon^{-1}}, \quad \overline{d}_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \frac{H(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon^{-1}}.$$

Энтропия достигает наибольшего значения при равенстве вероятностей  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N(\varepsilon)$ . В этом случае величина  $d_I$  достигает своего максимального значения

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon^{-1}},$$

которое равно фрактальной размерности.

Если рассматривать случай абсолютно непрерывной меры на множестве в  $\mathbf{R}^n$ , для которой существует плотность вероятности  $\rho(x)$ , то можно записать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вероятность  $p_i \cong \rho(x_i)V_i$ , где точка  $x_i \in B_i$ , а  $V_i \approx \varepsilon^n$  – объем (мера Лебега) множества  $B_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(\varepsilon) &\cong -\sum_i \rho_i V_i (\ln \rho_i + \ln V_i) \cong -\sum_i p_i (\ln \rho_i) - \sum_i p_i (\ln \varepsilon^n) = \\ &= -\langle \ln \rho \rangle - n \ln \varepsilon. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограничено, а второе слагаемое неограниченно возрастает. Отношение  $-H(\varepsilon)/\ln \varepsilon$  стремится к числу  $n$ , т. е. к размерности множества – носителя меры. Это справедливо и для фрактальных множеств. Таким образом, скорость увеличения энтропии при измельчении разбиения можно использовать для оценки размерности странных аттракторов.

*Определение 3.18.* Информационной размерностью множества  $B$  будем называть предел

$$d_I(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{H(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Не имеющими фрактальной структуры, могут быть некоторые хаотические (перемешивающие) отображения. Классическим примером является модифицированное отображение «кота Арнольда»

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (x_k + y_k + \delta \cos 2\pi y_k) \bmod 1 \\ y_{k+1} &= (x_k + 2y_k) \bmod 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Отображение (3.40) при условии  $\delta < 1/2\pi$  взаимно однозначно переводит единичный квадрат плоскости  $(x, y)$  в себя и является диссипативным в области  $1/2 < y < 1$ , т. е. при каждой итерации элемент площади этой области сжимается. Несмотря на сжатие площади, отображение является эргодическим и перемешивающим. Поэтому хаотическим аттрактором отображения (3.40) является весь единичный квадрат, имеющий фрактальную размерность, равную двум.

Точки, являющиеся последовательными итерациями отображения (3.40), практически полностью покрывают квадрат, но плотность их распределения неоднородна. Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности  $d_I$ , которую можно также определить следующим образом

$$d_I(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i,$$

где  $N(\varepsilon)$  – количество  $n$ -мерных кубиков со стороной  $\varepsilon$ , покрывающих множество  $B$  в  $n$ -мерном фазовом пространстве динамической системы,  $P_i$  – вероятность посещения траекторией  $i$ -го кубика,  $I(\varepsilon)$  – энтропия Шеннона.

Плотность распределения вероятностей точек в квадрате имеет неоднородный характер, поэтому информационные размерности аттракторов отображения (3.40) будут отличаться при разных значениях  $\delta$  и будут лежать в интервале  $1 < d_I < 2$ . Аттракторы автономных диссипативных систем (каскадов) более естественно различать по их информационной, а не фрактальной размерности.

**Обобщенная размерность.** Кроме обычной шенноновской энтропии можно использовать для этой цели и обобщенные энтропии Реньи  $H_q$  порядка  $q$ . Соответствующие размерности обычно называют обобщенными размерностями  $d_q$ . В этом случае для покрытия рассчитывается величина

$$H_q(\varepsilon) = (1 - q)^{-1} \ln \sum_i p_i^q,$$

а обобщенная размерность равна

$$d_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( - \frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

В случае  $q = 0$  получаем фрактальную размерность, при  $q = 1$  – информационную размерность. При  $q = 2$  размерность носит название корреляционной размерности или корреляционного показателя.

**Корреляционная размерность.** Непосредственный расчет размерности Хаусдорфа или емкости аттрактора с ростом числа степеней свободы динамической системы сильно усложняется. Значительно проще оказывается вычисление корреляционной размерности, величина которой определяется через корреляционный интеграл

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathcal{G}(\varepsilon - |x_i - x_j|),$$

где  $\mathcal{G}(z)$  – функция Хевисайда;  $x_i, x_j$  – векторы, описывающие положение изображающей точки в фазовом пространстве в моменты времени  $t_0 + i\tau$  и  $t_0 + j\tau$ ,  $\tau$  – некоторый заданный промежуток времени,  $N$  – число выборок. Величина  $C(\varepsilon)$  определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше  $\varepsilon$ . При малых  $\varepsilon$  корреляционный интеграл  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d_C}$ . Отсюда следует, что корреляционная размерность

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

Для определения корреляционной размерности  $d_C$  достаточно знать лишь одну реализацию процесса  $x(t)$ . Поэтому она легко поддается численному расчету и очень удобна для обработки результатов экспериментальных исследований.

**Пример.** Пусть на канторовом множестве задана однородная мера, которая строится следующим образом: на  $k$ -м шаге построения каждому из  $2^k$  отрезков длины  $3^{-k}$  припишем значение меры  $2^{-k}$ , т. е.  $\varepsilon = 3^{-k}$ ,  $p_i = 2^{-k}$ . Тогда

$$H = -\sum_i p_i \ln p_i = k \ln 2, \quad \ln \varepsilon = -k \ln 3, \quad d_I = (\ln 2 / \ln 3).$$

Для обобщенной размерности при  $\sum_i p_i^q = 2^k 2^{-qk} = 2^{(1-q)k}$  имеем  $H_q = k \ln 2$ . Откуда находим, что для  $q = 0, 1, 2$  соответствующие

размерности  $d_q = d_F = d_I = d_C$ . Таким образом, для однородной меры на канторовом множестве все размерности совпадают.

Спектр обобщенных размерностей характеризует неоднородность сингулярной меры. Для того, чтобы охарактеризовать сингулярность меры в окрестности некоторой фиксированной точки  $x$ , вводят поточечную размерность.

**Поточечная размерность.** Пусть  $B(\varepsilon, x)$  – шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x$ .

*Определение 3.19.* Поточечной размерностью называется предел (если он существует)

$$d_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(\varepsilon, x))}{\ln \varepsilon}.$$

Если поточечная размерность существует, то в окрестности точки  $x$  мера шара радиуса  $\varepsilon$  ведет себя как  $\varepsilon^{d_P}$ . Для меры Лебега в  $\mathbf{R}^n$  поточечная размерность каждой точки равна  $n$ . На однородном канторовом множестве поточечная размерность каждой точки одинакова и совпадает со всеми прочими размерностями. А вот для неоднородной меры на канторовом множестве поточечные размерности большинства точек оказываются разными. Наиболее «разряженной» оказывается мера в окрестности самой левой точки (при  $\alpha < 0,5$ ), наиболее «густой» – в окрестности самой правой точки. Прочие значения  $d_q$  могут быть равны поточечным размерностям для точек с ее промежуточными значениями. Таким образом, спектр обобщенных размерностей показывает, в каких пределах могут находиться значения поточечной размерности.

Если интересуют не детали фрактальной структуры аттрактора динамической системы, а лишь оценка числа существенных переменных динамической структуры, достаточно ограничиться расчетом какой-либо одной размерности. Чаще всего используют корреляционную размерность  $d_{q=2} = d_C$ . Вообще говоря, на практике для странных аттракторов детали фрактальной структуры оказываются несущими

ществены: для систем размерности больше 2–3 их не удается исследовать ни численно, ни аналитически, а на малых масштабах их истребляет шум.

### 3.7.4. Динамические размерности

Термин “динамическая размерность” не является устоявшимся. Используются различные термины: геометрическая размерность, число параметров порядка, локальная внутренняя размерность, число независимых степеней свободы. Суть термина вытекает из того, что движение динамической системы на аттракторе обычно проще, чем в общем случае. Если опустить переходный процесс, то переменные, входящие в динамическую систему, разделяются на две группы: “существенные”, которые определяют динамику, и “несущественные”, которые к первым подстраиваются и следуют за ними.

Рассмотрим некоторое дифференциальное уравнение  $\dot{x} = F(x)$ . Вектор  $x$  может быть как конечномерным, так и бесконечномерным. Допустим, что компоненты вектора  $x$  можно разделить на две части: вектор  $u$  конечной размерности  $m$  и вектор  $v$  – то, что останется. Тогда исходная система запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= F_1(u, v) \\ \dot{v} &= F_2(u, v) \end{aligned}$$

Пусть также существует положительно инвариантное множество (поверхность)  $V$ , задаваемое соотношениями

$$v = \Phi(u) \tag{3.41}$$

такое, что на нем второе уравнение автоматически выполняется, т. е.

$$\frac{d}{dt} \Phi(u) - F_2(u, \Phi(u)) \equiv 0.$$

В этих условиях исходная  $n$ -мерная система дифференциальных уравнений будет эквивалентна системе  $m$  дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F_1(u, \Phi(u)) \tag{3.42}$$

и  $n - m$  алгебраических уравнений (3.41). Для того чтобы подобная система на асимптотической стадии была типичной, множество  $B$  должно быть притягивающим, т. е. асимптотически устойчивым. Такое асимптотически устойчивое (т. е. экспоненциально притягивающее траектории) положительно инвариантное дифференцируемое многообразие  $B$ , содержащее аттрактор системы, называется инерциальным многообразием. Многообразие  $B$  задается уравнениями (3.41). Динамическую систему (3.42) меньшей размерности, фазовым пространством которой служит многообразие  $B$ , называют инерциальной формой.

Наличие у системы инерциального многообразия позволяет исследовать асимптотическое поведение не самой системы, а ее инерциальной формы. Если динамическая система обладает минимальным инерциальным многообразием размерности  $d_D$ , то на асимптотической стадии ее поведение описывается при помощи  $d_D$  существенных переменных. Эта величина является одной из наиболее существенных характеристик динамической системы – «сложности» ее поведения. Вычисление фрактальных размерностей для аттракторов динамических систем обычно оправдывают тем, что они дают оценку снизу для динамической размерности  $d_D$ . Величина  $d_D$  может представлять интерес как параметр для классификации динамических систем.

### ***3.7.5. Странные аттракторы***

Решения диссипативных динамических систем в асимптотике притягиваются к некоторому подмножеству фазового пространства. Это подмножество для случая регулярной динамики может быть либо устойчивой особой точкой, либо устойчивым предельным циклом, либо инвариантным тором. Все эти подмножества являются подмногообразиями фазового пространства.

Математическим образом хаотических движений диссипативных систем служит странный аттрактор, который не обладает гладкой структурой и достаточной непрерывностью, предполагаемой в поня-

тии подмножества. Строение странных аттракторов более сложно. Они обладают геометрической (масштабной) инвариантностью, которая состоит в том, что при увеличении масштаба некоторой подобласти мы получим геометрический образ, сходный по своей структуре с целым аттрактором. Иногда говорят, что странный аттрактор обладает скейлинговой структурой.

Странные аттракторы динамических систем и точечных отображений обычно имеют структуру канторова множества (рис. 3.5). Этим они с геометрической точки зрения отличаются от простых аттракторов, являющихся гладкими многообразиями. Другая особенность странных аттракторов – дробная размерность, указывающая на близость этого множества к соответствующему гладкому подмножеству. Значение размерности может быть использовано в качестве критерия отличия простых аттракторов от странных аттракторов. Термин “странный” аттрактор введен именно для того, чтобы подчеркнуть, что такие аттракторы не являются гладкими многообразиями.

Отличия в структуре предельного множества фазовых траекторий составляют основу классификации типов аттракторов динамических систем. Наряду со странным аттрактором различают гиперболические, квазигиперболические аттракторы и квазиаттракторы, отличительными особенностями которых является экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий и дробная размерность. Экспоненциальная неустойчивость является критерием хаотического поведения системы. Дробная метрическая размерность свидетельствует о том, что аттрактор – сложный геометрический объект.

Рассмотрим фазовое пространство потока (3.1) или каскада (3.5). Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область  $G_1 \subset \mathbf{R}^n$ , которая включает в себя подобласть  $G_0$ , области  $G_1$  и  $G_0$  удовлетворяют следующим условиям:

1) для любых начальных условий  $x_i(0)$  (или  $x_0^i$ ) из области при  $t \rightarrow \infty$  (или  $k \rightarrow \infty$ ) все фазовые траектории рано или поздно достигают области  $G_0$ ;

2) область  $G_0$  представляет собой минимальное компактное подмножество в фазовом пространстве системы;

3) если фазовая траектория принадлежит области  $G_0$  в момент времени  $t = t_1$  ( $k = k_1$ ), то она будет принадлежать  $G_0$  всегда, то есть для любых  $t \geq t_1$  ( $k \geq k_1$ ) фазовая траектория будет находиться в области  $G_0$ .

Если эти условия выполняются, то область  $G_0$  называется аттрактором динамической системы. Аттрактор  $G_0$  – это инвариантное относительно закона (3.1) минимальное предельное множество траекторий системы, куда стремятся и там остаются любые траектории из области  $G_1$ , охватывающей область  $G_0$ . Область  $G_1$  называется областью или бассейном притяжения аттрактора  $G_0$ . В области  $G_1$  могут существовать переходные, нестационарные типы движений. Предельное множество  $G_0$  отвечает установившимся (предельным) типам движений.

Фрактальная размерность простых аттракторов (точка в фазовом пространстве, предельный цикл, предельный  $m$ -мерный тор) строго совпадает с метрической размерностью аттракторов. Указанные типы решений являются асимптотически устойчивыми, а их размерность определяется целым числом и строго совпадает с метрической размерностью, что и позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из этих условий исключает аттрактор из класса регулярных.

**Гиперболические аттракторы.** Доказательство существования странного аттрактора было дано в предположении, что система является гиперболической (все фазовые траектории седловые) и грубой

(при возмущении правых частей уравнения (3.1) все траектории продолжают оставаться седловыми).

Гиперболические аттракторы должны удовлетворять следующим условиям:

1) состоять из континуума “неустойчивых листов” или кривых, всюду плотных на аттракторе, вдоль которых близкие траектории экспоненциально расходятся;

2) в окрестности любой точки иметь геометрию произведения канторова множества на интервал;

3) иметь окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие траектории сходятся к аттрактору.

Странные аттракторы всегда являются грубыми гиперболическими предельными множествами. Основная черта странного аттрактора, отличающая его от регулярных аттракторов, – экспоненциальная неустойчивость фазовой траектории на аттракторе. Спектр ляпуновских экспонент в этом случае включает, как минимум, один положительный показатель. Фрактальная размерность аттрактора всегда больше двух и выражается дробным числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое можно “вложить” странный аттрактор, оказывается равной трем.

**Квазигиперболические аттракторы.** Условия гиперболичности аттрактора для реальных систем не выполняются, известны лишь динамические системы, аттракторы которых близки к гиперболическим аттракторам. Такие аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных аттракторов и сохраняют эти свойства при возмущениях. С математической точки зрения в таких системах, по крайней мере, нарушается одно из трех условий гиперболичности. Почти гиперболические аттракторы называются квазигиперболическими.

Гиперболические и квазигиперболические аттракторы отражают классические свойства детерминированного хаоса и являются в определенной степени идеальной моделью хаоса. Это отражается в основ-

ных свойствах гиперболических аттракторов: аттрактор всегда единственный, имеет однородный бассейн притяжения, не меняет своей структуры при вариациях параметров системы и начального состояния; характеризуется экспоненциальной неустойчивостью на нем и фрактальной геометрией, т. е. является странным аттрактором.

**Квазиаттракторы** вводятся как математический образ хаоса в негиперболических динамических системах. В системах с квазиаттракторами реализуются режимы детерминированного хаоса, характеризующиеся экспоненциальной неустойчивостью и фрактальной структурой аттрактора. Однако есть существенное отличие, состоящее в одновременном существовании счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих множеств в ограниченном элементе объема фазового пространства. Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств и называется квазиаттрактором динамической системы.

Этим сложность не ограничивается. При конечной вариации параметров системы реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и нерегулярных аттракторов. Соответственно осуществляется бифуркационная перестройка их бассейнов притяжения. Причиной сложности квазиаттракторов являются эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий или возникновения петли сепаратрисы седло-фокуса.

Присутствие в квазиаттракторе устойчивых и седловых циклов наряду с хаотическими предельными множествами проявляется в структуре автокорреляционной функции, которая в среднем экспоненциально спадает во времени, и в структуре спектра мощности, который является сплошным. Однако в структуре автокорреляционной функции присутствуют периодические компоненты, и в спектре заметны резкие выбросы на некоторых характерных частотах. Эти особенности автокорреляционной функции и спектра хаотического режима являются типичными и существенно отличают квазиаттрактор от гиперболических аттракторов.

Фрактальность границ бассейнов притяжения и свойство системы, обусловленное множеством бифуркаций режимов при малых изменениях параметров, приводит к высокой чувствительности системы к внешним шумовым воздействиям.

Хаотические аттракторы описанных трех типов объединяют два принципиальных свойства: сложная геометрическая структура (как следствие – дробная метрическая размерность) и экспоненциальная неустойчивость траекторий. Именно эти свойства используются в качестве критериев при диагностике режимов детерминированного хаоса. Свойства регулярных и странных аттракторов приведены в табл. 3.1. В табл. 3.1. приняты следующие обозначения: Д – дискретный спектр, Н – непрерывный спектр, С – сингулярный спектр.

Однако нерегулярные аттракторы как математические образы сложной динамики вышеописанными типами хаотических аттракторов не исчерпываются. Хаотическое поведение в смысле наличия перемешивания и геометрическая “странность” аттрактора могут не соответствовать друг другу. Странные в геометрическом понимании аттракторы могут не быть хаотическими ввиду отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, есть примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются в строгом смысле странными, то есть не характеризуются фрактальной структурой и дробной метрической размерностью.

Другими словами, существуют примеры диссипативных структур, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

- 1) при регулярной геометрической структуре с точки зрения целочисленной метрической размерности индивидуальные фазовые траектории в среднем экспоненциально неустойчивы;
- 2) при сложной геометрической структуре траектории асимптотически устойчивы, перемешивание отсутствует.

Первый тип называют хаотическим нестранным аттрактором, второй странным нехаотическим аттрактором.

Таблица 3.1

## Типы аттракторов и их характеристики

характеристики			аттракторы							
			регулярные			странные			хаотические нестранные	странные нехаотические
			особые точки	предельные циклы	инвариантные торы	гиперболические	квазигиперболические	квазиаттракторы		
критерии	спектр характеристических показателей	отрицательные	+	+	+	+	+	+	+	+
		нулевые	-	1	$\geq 2$	-	-	$\geq 1$	-	-
		положительные	-	-	-	$\geq 1$	$\geq 1$	$\geq 1$	$\geq 1$	-
		мнимые	-	-	-	-	-	$\geq 1$	-	-
спектр мощности		Д	Д	Д	Н	Н	Н	Н	С	
свойства	локальная неустойчивость		-	-	-	+	+	+	-	+
	эргодичность		-	-	-	+	+	+	+	+
	перемешивание		-	-	-	+	+	+	+	-
	грубость		+	+	+	+	+	-	+	+
структура предельного множества	гладкость и непрерывность		+	+	+	-	-	-	+	-
	масштабная инвариантность		-	-	-	+	+	+	-	+
	дробная размерность		-	-	-	+	+	+	-	+

**Хаотические нестранные аттракторы.** Примером системы с хаотическим аттрактором, не являющимся с точки зрения его геометрии странными, является отображение “кошки Арнольда” с добавлением нелинейного периодического слагаемого:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k + \delta \cos 2\pi y_k \pmod{1} \\ y_{k+1} = x_k + y_k \end{cases} \quad (3.43)$$

При условии, что  $\delta < 1/2\pi$  последнее отображение есть диффеоморфизм на торе. Другими словами, отображение (3.43) взаимно однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат на плоскости  $(x_k, y_k)$  в себя. Отображение является диссипативным, то есть при каждой итерации элемент площади сжимается. Это легко показать, если вычислить якобиан преобразования (3.43):

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < \frac{1}{2\pi}.$$

Среднее по времени  $|J| < 1$ . При этом сигнатура спектра показателей Ляпунова представляет собой "+", "-", т.е. фиксируется наличие перемешивания.

Казалось бы, мы имеем дело с обычным хаотическим странным аттрактором. Но это не так. Главной отличительной особенностью рассматриваемого случая является то, что, несмотря на сжатие фазового объема, движение изображающей точки отображения (3.43) является эргодическим. При  $k \rightarrow \infty$  точка посещает любой элемент единичного квадрата, представляющего полную развертку двумерного тора. Свидетельством этого факта является то, что метрическая размерность равна двум. Плотность точек аттрактора, хотя и неравномерна в единичном квадрате, нигде не обращается в нуль. Таким образом, несмотря на сжатие, аттрактором системы (3.43) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор “кошки Арнольда” не является странным, так как ему нельзя приписать фрактальную геометрию.

Несмотря на то, что точки практически полностью покрывают квадрат, плотность их распределения неоднородна. Количественной мерой неоднородности является величина информационной размерности. В результате неоднородности плотности распределения вероятностей точек на аттракторе значения всех вероятностных размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале  $1 < d_I < 2$ . Эти размерности учитывают не только геометрические, но и динамические свойства аттракторов. Таким образом, перемешивание может не приводить к геометрической «странности» аттрактора.

**Странные нехаотические аттракторы.** Как уже отмечалось, хаотические аттракторы обладают геометрической “странностью” и перемешиванием. Сложная динамика перемешивающей системы порождает и геометрическую сложность аттрактора. В случае странных нехаотических аттракторов система демонстрирует сложный непериодический режим, асимптотически устойчивый (без перемешивания), а аттрактор при этом явно не является регулярным с точки зрения геометрической структуры. Ряд особенностей странных нехаотических аттракторов требует выделения их в отдельный класс.

*Геометрические характеристики.* Аттрактор на фазовой плоскости образуется кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек. Эта кривая плотно покрывает часть фазовой плоскости так, что метрическая размерность (емкость) странного нехаотического аттрактора оказывается строго равной двум. Но нельзя считать, что часть плоскости является аттрактором, так как совокупная мера точек, принадлежащих аттрактору, равна нулю. Этот факт отражается в равенстве информационной размерности единице, чему соответствует линии.

В связи с отсутствием положительного показателя в спектре Ляпуновская размерность равна единице. Несмотря на целочисленную метрическую размерность (емкость), странный нехаотический аттрактор, как правило, демонстрирует самоподобие структуры и вследст-

вие этого – свойство скейлинга. Совокупность этих свойств позволяет говорить о странной геометрии странных нехаотических аттракторов.

*Спектр ляпуновских характеристических показателей.* Динамика системы в режиме странного нехаотического аттрактора не является хаотической ввиду отсутствия перемешивания. Экспоненциальной неустойчивости траекторий на аттракторе в среднем нет. В спектре отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра фазовых траекторий на странном нехаотическом аттракторе не отличается от сигнатуры квазипериодического движения.

Однако странный нехаотический аттрактор нельзя считать квазипериодическим потому, что локальный (рассчитанный на конечном промежутке времени) старший характеристический показатель Ляпунова будет положительным.

*Спектр мощности и автокорреляционная функция.* Отсутствие перемешивания в режиме странного нехаотического аттрактора обуславливает отсутствие в строгом смысле непрерывной (сплошной) компоненты в спектре мощности. В то же время, спектр не является дискретным. Спектр занимает как бы промежуточное положение между дискретным и непрерывным случаями и имеет специальное название: сингулярно непрерывный спектр. Особенность сингулярно непрерывного спектра в том, что он включает плотное множество  $\delta$ -пиков самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов.

Странные нехаотические аттракторы обнаружены при введении квазипериодического воздействия в отображение окружности, логистическое отображение, отображение Хенона.

### **3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ**

Рассмотрим метрическое пространство  $M = (X, \rho)$  с множеством элементов  $X$  и расстоянием  $\rho$ .

*Определение 3.20.* Отображение  $f: X \rightarrow X$  называется хаотическим, если выполняются следующие условия.

1. Отображение  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных данных или сенситивно (если существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  и любой точки  $x' \in X$  найдется точка  $x'' \in X$  и число  $n \in \mathbf{N}$  такие, что  $\rho(x', x'') < \varepsilon$ , но  $\rho(f^{(n)}(x'') - f^{(n)}(x')) \geq \delta$ ).

2. Отображение  $f$  транзитивно (для любой пары  $U, V$  открытых множеств существует такое  $n \geq 0$ , что  $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ ).

3. Периодические точки отображения  $f$  плотны в  $X$  (в любой окрестности любой точки, принадлежащей  $X$ , существует, по крайней мере, одна периодическая точка и, следовательно, бесконечно много периодических точек).

Если метрическое пространство полное, то транзитивность (перемешивание) равносильна существованию плотной орбиты.

**Пример.** Рассмотрим простейший пример хаотического поведения. Обозначим через  $S^1$  – окружность (одномерную сферу) на плоскости  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ . В комплексной записи  $S^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbf{R}\}$ .

Определим отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$  уравнением:  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ . Если же обозначить элементы  $S^1$  как комплексные числа  $z$ , тогда получаем:  $f(z) = z^2$ , комплексный квадратичный полином.

Функция  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ , или, что эквивалентно, квадратичная функция  $f(z) = z^2$ , хаотична на окружности  $S^1$ .

Существенная зависимость от начальных данных. Предположим, что  $e^{i\theta} \in S^1$ ,  $U$  – открытое множество, содержащее  $e^{i\theta}$ , и  $A$  – открытая дуга в  $U$ , содержащая  $e^{i\theta}$ .  $f^{(n)}(A)$  представляет собой дугу, которая имеет в  $2^n$  раз большую протяженность, чем  $A$ , если допустить многократный обход окружности. При достаточно большом  $n$ ,  $f^{(n)}(A)$  покрывает всю окружность  $S^1$ . Для выбранного  $n$  существуют точки в  $A$ , и, следовательно, в  $U$ , которые разнесены посредством отображения  $f^{(n)}$ , по крайней мере, на единичное расстояние.

Таким образом, условие существенной зависимости выполняется при  $\delta = 1$ .

Транзитивность (перемешивание). Пусть  $U$  и  $V$  – открытые множества в  $S^1$ . Для достаточно большого  $n$  получаем, что  $f^{(n)}(U)$  покрывает сферу  $S^1$  и поэтому пересекает  $V$ .

Периодичность. Точки  $e^{i\theta}$ , имеющие период  $n$ , удовлетворяют равенству  $e^{i2^n\theta} = e^{i\theta}$ , то есть они являются корнями из единицы порядка  $2^n - 1$ . Множество всех корней такого вида (для всех  $n$ ) плотно в  $S^1$ .

## 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Аналитические методы расчета траекторий нелинейных систем весьма сложны и, как правило, для систем достаточно большой размерности их использование просто невозможно. Поэтому актуальны численные методы определения различных характеристик нелинейных динамических систем, включая расчет траекторий и критериев детерминированного хаоса.

### 4.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение задачи Коши для автономных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений только в исключительных случаях может быть найдено в явном виде. Поэтому для их решения используются численные методы интегрирования, основанные на различных вычислительных схемах.

#### *4.1.1. Решение задачи Коши для автономной системы*

Интегрирование нелинейной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0, \quad x \in P \subset \mathbf{R}^n \quad (4.1)$$

требует, как правило, аппроксимации решения различными линейными функциями на последовательных малых отрезках времени (шагах) длительности  $\tau$ . Самым распространенным методом такой аппроксимации является метод Рунге–Кутты 4-го порядка, дающий при малых  $\tau$ , разностные уравнения, аппроксимирующие решения с точностью  $O(\tau^4)$ .

Пусть  $y_k$  – уже найденное приближенное значение решения системы (4.1) в момент  $t_k$ . Приближенное значение решения в момент  $t_{k+1} = t_k + \tau$  находится по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + \tau(\sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3 + \sigma_4 f_4),$$

$$\text{где } f_1 = F(t_k, y_k), \quad f_2 = F(t_k + a_2\tau, y_k + b_{21}\tau \cdot f_1), \\ f_3 = F(t_k + a_3\tau, y_k + b_{31}\tau \cdot f_1 + b_{32}\tau \cdot f_2),$$

$f_4 = F(t_k + a_4\tau, y_k + b_{41}\tau \cdot f_1 + b_{42}\tau \cdot f_2 + b_{43}\tau \cdot f_3)$  – значения правой части решаемого дифференциального уравнения в соответствующих точках. Параметры, входящие в разностное уравнение, могут быть определены различными способами и принимают следующие значения:  $\sigma_1 = \sigma_4 = 1/6$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 2/6$ ,  $a_2 = a_3 = 1/2$ ,  $a_4 = 1$ ,  $b_{21} = b_{32} = 1/2$ ,  $b_{31} = b_{41} = b_{42} = 0$ ,  $b_{43} = 1$ .

Оценки точности приближенных решений совпадают, как правило, с оценками точности аппроксимации и существенно зависят от длины временного интервала  $T$ , на котором решается система дифференциальных уравнений. Например, в методе Рунге–Кутты 4-го порядка точность решения  $\|x(t_k) - y_k\| = CT \exp\{\alpha T\} \tau^4$ , где  $\alpha$  и  $C$  – некоторые постоянные.

#### ***4.1.2. Некорректность численных методов решения систем дифференциальных уравнений***

При численном решении нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих нерегулярной динамикой, задача, в большинстве случаев, состоит не в решении уравнения на каком-либо небольшом конечном отрезке времени, а в нахождении предельных множеств (аттракторов) траекторий при  $t \rightarrow \infty$ . В такой постановке оценки погрешностей численных методов теряют смысл. При этом огромной проблемой становится некорректность решаемой задачи.

Суть проблемы состоит в следующем. Любой метод численного решения дифференциального уравнения требует аппроксимации тем или иным способом производной функции, известной лишь приближенно в узлах некоторой сетки. Задача вычисления производной от неточно заданной функции является классической некорректной задачей. Малым погрешностям в задании функции могут соответствовать большие погрешности в вычислении ее производной. Например,

погрешность в задании функции имеет вид  $m^{-1} \sin m^2 t$ . Погрешность в вычислении производной при этом будет  $m \cos m^2 t$ . Следовательно, при  $m \rightarrow \infty$  погрешность функции в равномерной метрике неограниченно убывает, в то время как погрешность производной в той же метрике неограниченно растет.

Некорректность вычисления производной  $x'(t_k)$  сеточной функции  $x(t)$  приводит к тому, что шаг сетки  $\tau$  не может быть выбран произвольно малым. Он должен определяться погрешностью в вычислении самой функции. Действительно, пусть значения функции  $x(t)$  в точках  $t_{k+1}$  и  $t_k$  нам известны с точностью  $\delta$ , т. е. заданы значения  $y_{k+1}$  и  $y_k$  такие, что  $|x(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq \delta$ ,  $|x(t_k) - y_k| \leq \delta$ . Тогда точность замены производной  $x'(t_k)$  приближенной формулой, например,  $(y_{k+1} - y_k)/\tau$ , равна не  $O(\tau)$ , а  $O(\tau) + 2\delta/\tau$ . Погрешность при этом состоит из двух частей: погрешности метода аппроксимации производной  $O(\tau)$  и неустранимой погрешности  $2\delta/\tau$ , связанной с погрешностью вычисления самой функции. При  $\tau \rightarrow 0$  неустранимая погрешность неограниченно возрастает. Оптимальным в данном случае является выбор шага сетки  $\tau = O(\delta^{1/2})$ . Такой способ выбора оптимального шага называется регуляризацией по шагу.

Аналогичный эффект имеет место и при численном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1), например, методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Пусть  $y_{k+1} = y_k + \tau \cdot f(y_k)$ . Обозначим через  $y_k - x(t_k) = \delta_k$  ошибку в вычислении значения  $x(t)$  в точке  $t_k$ . Тогда

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \tau \cdot f'(x_k + \theta \delta_k) \delta_k - (x_{k+1} - x_k) + \tau \cdot f(x_k),$$

где  $|\theta| < 1$ . Так как точность аппроксимации метода равна  $O(\tau^4)$ , то

$$|\delta_{k+1}| \leq |\delta_k| \cdot |1 + \tau L| + K \tau^4.$$

Здесь  $L = f'(x_k + \theta \delta_k)$ . Очевидно, что если  $\tau \rightarrow 0$ , то  $\delta_{k+1} \rightarrow \delta_k$ , и суммарная погрешность со временем может только нарастать от шага

к шагу. В то же время, если  $-1/\tau < L < 0$ , то можно добиться значительного уменьшения ошибки при выборе оптимального шага, который минимизирует оценку погрешности.

В системах нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих сложной динамикой, при малом шаге могут наблюдаться якобы хаотическое поведение траекторий, а при некотором разумном шаге – устойчивый предельный цикл. Один из самых ярких примеров – система уравнений Лоренца.

## 4.2. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

При изучении систем дифференциальных уравнений построение отображения Пуанкаре и его производной возможно лишь численно. В  $n$ -мерном фазовом пространстве сечение Пуанкаре задает  $(n - 1)$ -мерную поверхность  $S$  уравнением

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (4.2)$$

Отображение Пуанкаре  $P$  преобразует точки поверхности  $S$  в точки той же поверхности

$$x_{k+1} = P(x_k),$$

где  $x_{k+1}$  и  $x_k$  – точки, лежащие на одной и той же фазовой траектории.

Для нахождения отображения Пуанкаре надо решить дифференциальное уравнение (4.1) с заданными начальными условиями и последовательно найти точки пересечения фазовой траектории с поверхностью  $S$ , заданной уравнением (4.2).

Здесь есть две различные задачи. Первая состоит в том, чтобы найти фазовую траекторию как решение задачи Коши для системы (4.1), а вторая задача заключается в определении координаты точки пересечения траектории с поверхностью  $S$ . Первая задача сама по себе сложна, если система неустойчива. Для ее решения может быть использован метод Рунге–Кутты 4-го порядка при контроле точности решения с помощью априорных и апостериорных оценок.

Для определения точек пересечения траектории с поверхностью на каждом шаге интегрирования вычисляется знак функции  $S$ . При смене знака, например, с минуса на плюс мы имеем две точки траектории –  $x(t_j)$  и  $x(t_{j+1})$ , лежащие по разные стороны от поверхности  $S$ . Точка пересечения траектории и поверхности может быть найдена тем или иным методом интерполирования траектории между точками  $x(t_j)$  и  $x(t_{j+1})$ . Рассмотрим метод, позволяющий найти координаты точки пересечения путем интегрирования системы (4.1) на одном шаге.

Добавим формально к системе (4.1) еще одно уравнение относительно дополнительной переменной  $x_{n+1} = S(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} F_i = F_{n+1}. \quad (4.3)$$

Секущая поверхность Пуанкаре определяется уравнением

$$x_{n+1} = 0.$$

Поделим формально все  $i$ -ые компоненты уравнения (4.1) на уравнение (4.3), а последнее обратим, рассматривая  $t$  как функцию  $x_{n+1}$ , и получим систему уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dx_{n+1}} = \frac{F_i(x)}{F_{n+1}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4a)$$

$$\frac{dt}{dx_{n+1}} = \frac{1}{F_{n+1}}. \quad (4.4b)$$

Теперь если  $S(t_j) = s_1 < 0$ , а  $S(t_{j+1}) = s_2 > 0$ , то координаты точки пересечения фазовой траектории с поверхностью  $S$  могут быть найдены из системы (4.4) на интервале изменения переменной  $x_{n+1}$  от  $s_2$  до нуля, например, за один шаг длиной  $-s_2$  с начальными условиями

$$x_i(x_{n+1}) \Big|_{x_{n+1}=s_2} = x_i(t_{j+1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$t(x_{n+1}) \Big|_{x_{n+1}=s_2} = t_{j+1}.$$

В результате решения системы (4.4) на интервале изменения  $x_{n+1}$  длиной  $|s_2|$  мы попадаем в точку  $x_{n+1} = 0$ , т. е. на поверхность  $S$ .

### 4.3. СПЕКТР ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Спектр характеристических показателей Ляпунова несет подробную информацию о качественном поведении системы. Аналитически показатели Ляпунова можно найти либо для простых аттракторов (неподвижная точка), либо для одномерных отображений. Для других случаев их рассчитывают численно. Спектр характеристических показателей можно вычислить двумя принципиально различными путями. Один основывается на вычислении траекторий, соответствующих линеаризованным уравнениям динамической системы, другой – на обработке значений временного ряда, полученного для выходных переменных динамической системы. Для качественного анализа динамики, включая и нерегулярную динамику, важны не столько абсолютные значения характеристических показателей, сколько их сигнатура. Возможность оценки только знаков характеристических показателей значительно упрощает вычислительную задачу.

Расчет показателей Ляпунова позволяет, например, вычислить горизонт предсказуемости  $T_{pr} \sim 1/\lambda_1$ , определяющий “среднее” время, в течение которого можно предсказывать поведение системы на аттракторе, и частоту измерения состояний системы при её мониторинге.

#### *4.3.1. Вычисление спектра по уравнениям динамической системы*

При численных расчетах, как правило, можно найти только «типичные» значения величин. Например, если численно решать линеа-

ризованную систему дифференциальных уравнений, соответствующую исходной нелинейной системе, то из-за ошибок округления практически всегда будет получаться значение показателя  $\lambda(u) = \lambda_1$ . Однако, типичным значением для старшего показателя  $\Lambda_m$   $m$ -го порядка будет сумма  $m$  наибольших показателей Ляпунова. Для численного расчета нескольких показателей используют эволюцию фазовых объемов. При таком подходе можно рассчитать любое количество показателей – от 1 до  $n$ .

Чтобы задать  $n$ -мерный фазовый объем, необходимо  $n$  линейно независимых решений  $u_i(t)$  линеаризованной системы

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(0) = u_0, \quad A(t) = DF(x). \quad (4.5)$$

Обычно начальные данные  $u_{i0}$  выбираются ортонормированными, что гарантирует линейную независимость. Далее проводится интегрирование системы (4.5), находится  $m$ -мерный фазовый объем  $V_m(t) = \text{Vol}(u_1(t), \dots, u_m(t))$  по формуле

$$\text{Vol}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) = \left( \det \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle \end{bmatrix} \right)^{1/2}$$

и вычисляется величина характеристического показателя  $m$ -го порядка

$$\hat{\Lambda}_m(t) = t^{-1} \ln V_m(t).$$

Если значение этой величины останавливается с ростом времени, его можно принять в качестве оценки обобщенного показателя Ляпунова  $\Lambda_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$  и тогда  $\lambda_m = \hat{\Lambda}_m - \hat{\Lambda}_{m-1}$ .

Однако этот простой подход оказывается неработоспособным по двум причинам.

1. Произвольно выбранные начальные данные  $u_{i0}$  обычно содержат ненулевую компоненту в направлении наибольшего растяжения  $r^{(1)}(x(0))$ , а если нет, то она обычно возникает в ходе расчетов из-за ошибок округления. Поскольку эта компонента растет, как

$\sim \exp\{\lambda_1 t\}$ , спустя некоторое время она станет доминирующей, все  $n$  векторов  $u_i(t)$  развернутся в направлении  $r^{(1)}(x(t))$  и станут практически коллинеарными. После этого расчет образуемого ими объема станет невозможен из-за конечной точности представления данных в ЭВМ.

2. Сама величина  $\exp\{\lambda_1 t\}$  может за сравнительно небольшое время выйти за пределы машинной точности. Обычно это время существенно меньше, чем время, требуемое для расчета показателя Ляпунова.

Таким образом, необходима борьба с коллинеарностью векторов и выходом за пределы машинной точности.

Первая проблема решается при помощи процедуры ортогонализации векторов  $u_i(t)$ , т. е. перехода к новой системе решений

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= u_1(t), \\ \tilde{u}_i(t) &= u_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} u_j(t), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Уравнения относительно  $u_i(t)$  линейны, поэтому векторы  $\tilde{u}_i(t)$  также будут решениями. Ортогонализация не меняет значение объема  $V_m(t) = \text{Vol}(u_1(t), \dots, u_m(t)) = \text{Vol}(\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_m(t))$ , и векторы  $\tilde{u}_i(t)$  образуют систему решений, отвечающую тем же самым значениям показателей Ляпунова  $\Lambda_m$ . Спустя некоторое время ортогонализацию надо повторять. Для ортогонализованной системы решений фазовый объем равен

$$\text{Vol}(\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_m(t)) = \|\tilde{u}_1(t)\| \cdot \|\tilde{u}_2(t)\| \cdot \dots \cdot \|\tilde{u}_m(t)\|,$$

и каждое из решений  $\tilde{u}_i(t)$  будет “отвечать” за свой характеристический показатель Ляпунова  $\lambda_i$ . Норма решения пропорциональна  $\|\tilde{u}_i(t)\| \sim \exp\{\lambda_i t\}$ .

Проблема переполнения решается при помощи запоминания текущего значения  $\sigma_i(t) = \ln \|\tilde{u}_i(t)\|$  и нормализации  $v_i(t) = \tilde{u}_i(t) / \|\tilde{u}_i(t)\|$ .

Далее полагая  $u_i(t) = v_i(t)$ , повторяем всю процедуру. Нормализация делает объем единичным, как в начальный момент, но не меняет направлений, а потому не меняет и приращения объема на следующем этапе расчета. После очередной ортогонализации надо добавить к  $\sigma_i(t)$  следующее значение  $\ln \|\tilde{u}_i(t')\|$ .

Полный алгоритм расчета показателей Ляпунова для отображения

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x(0) = x_0$$

и соответствующего ему линеаризованного уравнения

$$u_{k+1} = B_k u_k, \quad B_k = Df(x_k), \quad u(0) = u_0$$

имеет следующий вид.

1. Задаем  $n$  ортонормированных векторов  $v_{i0}$ , присваиваем  $\sigma_{i0} = 0$ ,  $t_0 = 0$  и  $u_{i0} = v_{i0}$ , а также определяем шаг перенормировки  $\Delta t$  (можно положить  $\Delta t = 1$ ). Предполагается, что точка  $x_0$  принадлежит аттрактору.

2. Делаем итерацию отображений, т. е. находим  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $u_{k+1} = B_k u_k$ .

3. Проводим ортогонализацию системы векторов  $u_{i,k+1}$ , получая векторы  $\tilde{u}_{i,k+1}$ :

$$\tilde{u}_{1,k+1} = u_{1,k+1}, \tag{4.6}$$

$$\tilde{u}_{2,k+1} = u_{2,k+1} + a_{2,1} u_{1,k+1}, \quad \langle \tilde{u}_{2,k+1}, \tilde{u}_{1,k+1} \rangle = 0,$$

.....

$$\tilde{u}_{i,k+1} = u_{i,k+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} u_{j,k+1}, \quad \langle \tilde{u}_{i,k+1}, \tilde{u}_{j,k+1} \rangle = 0, \quad j < i,$$

.....

4. Увеличиваем  $\sigma_i$  на логарифм нормы соответствующего вектора:

$$\delta\sigma_{i,k+1} = \ln \|\tilde{u}_{i,k+1}\|, \quad \sigma_{i,k+1} = \sigma_{i,k} + \delta\sigma_{i,k+1};$$

увеличиваем  $t$ :  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ . В качестве текущей оценки показателя Ляпунова можно использовать

$$\hat{\lambda}_i(t) = \sigma_{i,k+1} / t_{k+1}.$$

5. Нормируем систему векторов  $\tilde{u}_{i,k+1}$  вида (4.6), получаем ортонормированный базис следующего шага

$$v_{i,k+1} = \tilde{u}_{i,k+1} / \|\tilde{u}_{i,k+1}\|$$

и заносим его снова в вектора  $u$ :  $u_{i,k+1} = v_{i,k+1}$ .

6. Повторяем пункты 2-5 нужное число раз ( $N$ ).

7. Получаем окончательную оценку показателя Ляпунова. В простейшем случае выбираем

$$\lambda_i(t) \cong \sigma_{i,N} / t_N \quad \text{или} \quad \lambda_i(t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \delta\sigma_{i,k} = \frac{1}{\Delta t} \overline{\delta\sigma_i}.$$

Для потока

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0 \quad (4.7)$$

и соответствующей ему линеаризованной системы

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(0) = u_0 \quad (4.8)$$

алгоритм остается тем же самым за исключением следующих моментов.

1. Вместо итераций отображений решаются дифференциальные уравнения (4.7) и (4.8) на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  длины  $\Delta t$  с начальными данными  $x(t_k)$  и  $u(t_k)$ . Далее в алгоритме вместо векторов  $u_{i,k+1}$  используются векторы  $u_i(t_{k+1})$ . Векторы  $v_i$  будут определяться в точках  $t_k$ .

2. При численной реализации алгоритма уравнения (4.7) и (4.8) следует решать совместно, объединив две эти системы в одну. Это связано с особенностями численных методов решения дифференциальных уравнений, реализованных в стандартных пакетах программ.

3. При аппроксимации уравнений (4.7) разностной схемой дифференциальные уравнения заменяются отображением  $x_{k+1} = g(x_k, \tau)$ , где  $\tau$  – шаг разностной схемы. В простейшем случае использования

схемы Эйлера, это будет отображение  $x_{k+1} = x_k + \tau \cdot F(x_k)$ . Результаты расчета показателей Ляпунова будут зависеть от выбранного шага разностной схемы, но при  $\tau \rightarrow 0$  эта зависимость обычно исчезает.

#### **4.3.2. Вычисление спектра по временному ряду**

В ряде случаев удается определить показатели Ляпунова по временному ряду – множеству измерений состояния системы с заданным интервалом по времени. Чаще всего с разумной точностью удастся вычислить только старший, наибольший показатель  $\lambda_1$ , реже – два старших. Большее количество удастся вычислить лишь в модельных экспериментах, когда ряд порождается динамической системой малой размерности.

При исследовании траектории на аттракторе ее размерность будет совпадать с размерностью минимальной инерциальной формы  $d_N$ , и ровно столько показателей Ляпунова, совпадающих с показателями исходной динамической системы, могут быть измерены. Остальные  $n - d_N$  показателей исходной системы связаны с процессами притяжения к аттрактору и не могут быть вычислены по реконструкции траектории на аттракторе. Таким образом, по временному ряду может быть определено показателей Ляпунова не более чем  $d_N$ , где  $d_N$  – динамическая размерность аттрактора.

Кроме того, для вычисления показателей Ляпунова требуются, по крайней мере, две бесконечно близкие траектории. Однако в распоряжении имеется только одна траектория. В силу свойства возвращаемости она через некоторое время оказывается в достаточно малой окрестности почти всех своих точек. Поэтому в окрестности почти каждой точки можно найти различные участки этой траектории, которые можно считать другими траекториями и использовать для оценки показателей Ляпунова.

Существующие алгоритмы оценки показателей Ляпунова по временным рядам можно разделить на два класса.

*Матричные методы*, связаны с восстановлением в каком-либо виде уравнений движения и аппроксимацией матрицы  $Df$ . Получение уравнений движения по значениям временного ряда, основанное на решении задачи идентификации динамической системы, будет представлено в пятом разделе пособия. Техника расчета самих показателей Ляпунова та же, что и для аналитически заданных уравнений движения – метод Бенеттина, который рассмотрен в предыдущем пункте (см. раздел 4.3.1). В матричных методах используются те или иные аппроксимации матрицы  $Df$ , с помощью которой по значению вектора  $u_{i,k}$  рассчитывается следующее значение вектора  $u_{i,k+1} = Df u_{i,k}$ . Оно и используется для вычисления оценок показателей Ляпунова.

Суть методики проста, но аппроксимация уравнений движения включает большое количество параметров, оказывающих значительное влияние на результаты вычислений показателей Ляпунова. Это обстоятельство затрудняет практическую реализацию методов.

У. Парлитц предложил идею уточнения истинных показателей Ляпунова при варьировании параметров, которая основана на том, что при обращении времени, показатели Ляпунова меняют знак, оставаясь теми же самыми по абсолютной величине. Поэтому, обрабатывая временной ряд от начала к концу, а затем от конца к началу, можно при сопоставлении результатов уточнить оценки.

*Метод аналога* связан с непосредственным вычислением скорости расходимости близких траекторий. В методе предлагается построить «синтетическую» траекторию  $u(t)$  из отдельных кусочков, имеющих в наличии. Будем обозначать основную траекторию  $z(t)$ , а «соседние» траектории через  $z^0(t)$ , соответственно,  $u_i(t) = z_i^0(t) - z_i(t)$ . Обозначим  $L(t)$  – длину вектора  $\|u_i(t)\|$ . В момент времени  $t_0$  выбираем одну из соседних траекторий  $z_1^0(t_0)$  и полагаем  $u(t) = u_1(t) / \|u_1(t_0)\|$ . В некоторый момент времени  $t_1$  норма  $\|u_1(t_1)\|$  ста-

новится слишком велика. Выбранную соседнюю траекторию больше нельзя считать близкой. В этот момент времени производится смена соседа. Для «старой» длины будем писать  $L'(t_1)$ , а для «новой» –  $L(t_1)$ . Значение  $z_2^0(t_1)$  выбирается так, чтобы направления векторов  $u_1(t_1)$  и  $u_2(t_1)$  были как можно ближе друг к другу. Далее до некоторого времени  $t_2$  полагаем  $u(t) = u_2(t) \|u_1(t_1)\| / \|u_2(t_1)\|$ . Затем снова производим смену соседней траектории и т. д. Спустя  $k$  шагов в качестве оценки старшего показателя Ляпунова получаем

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{t_k - t_0} \left( \ln \frac{\|u_1(t_1)\|}{\|u_1(t_0)\|} + \ln \frac{\|u_2(t_2)\|}{\|u_2(t_1)\|} + \dots + \ln \frac{\|u_k(t_k)\|}{\|u_k(t_{k-1})\|} \right).$$

Метод можно обобщить на  $m$ -мерные фазовые объемы и вычислить сумму  $m$  показателей, но уже при  $m = 2$  практическая реализация метода сталкивается с большими трудностями. Поэтому в подавляющем случае им пользуются только для оценки старшего показателя.

Метод обладает следующими достоинствами: очень малое количество подбираемых параметров – размер окрестности, максимальное удаление от траектории и допуск на угол между векторами при смене близкой траектории; независимость реализации метода от размерности пространства реконструкции.

Существует методика оценки старшего показателя Ляпунова, не требующая смены траектории. Методика использует двойное усреднение. Сначала определяется средний локальный коэффициент разбегания близких траекторий в данной точке

$$r(t) = \left\langle \frac{\|u(t + \delta t)\|}{\|u(t)\|} \right\rangle,$$

где усреднение проводится по всем ближайшим траекториям или по всем ближайшим соседям  $z_i^0(t)$ . Затем получают оценку старшего показателя Ляпунова

$$\lambda_1 \cong \langle r(t) \rangle,$$

где усреднение выполняется по всем точкам  $z(t)$ .

*Комбинированная методика или фрейм-разложение.* В алгоритме Бенеттина с помощью аппроксимации матрицы  $Df$  строится фазовый вектор, который используется для вычисления оценок показателей Ляпунова. Если не ставить цели расчета всех показателей Ляпунова, а ограничиться только старшим показателем, то можно построить вектор  $u_{1,k+1}$ , не восстанавливая всю матрицу  $Df$ .

Пусть вычислен вектор  $u_i$  вдоль траектории вплоть до точки  $z_k$ . Рассмотрим ближайших соседей точки  $z_k$ , т. е. точки  $z_{j,k}$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Образы ближайших соседей на следующем шаге  $z_{j,k+1}$  также известны. Поэтому известен набор векторов  $y_j = z_{j,k} - z_k$ , которые на следующем шаге отображаются в векторы  $\hat{y}_j = z_{j,k+1} - z_{k+1}$ . Именно по набору пар  $(y_i, \hat{y}_i)$  в матричных методах строится аппроксимация оператора  $Df$ .

Если можно было бы получить разложение вектора  $u_{1,k}$  по этим векторам  $u_{1,k} = \sum_j c_j y_j$ , то на следующем шаге мы могли бы вычислить вектор  $u_{1,k+1}$ :  $u_{1,k+1} = \sum_j c_j \hat{y}_j$ . Т.е. вместо матрицы  $Df$  можно попытаться получить набор коэффициентов  $c_j$ . Разложение должно быть выполнено по системе линейно-зависимых векторов  $y_i$ . В теории вейвлет-преобразований системы линейно-зависимых векторов получили название фреймов, поэтому данный метод назван методом фрейм-разложения.

Пусть задано несколько векторов  $y_i$ ,  $i = \overline{1, s}$  и ляпуновский вектор  $u_{1,k}$ . Будем полагать, что  $\|u_{1,k}\| = 1$ , и искать разложение в виде

$$u_{1,k} = \sum_{i=1}^s c_i y_i. \text{ Тогда } u_{1,k+1} = \sum_{i=1}^s c_i \hat{y}_i, \text{ где } \hat{y}_k \cong Df y_k.$$

В реальных расчетах вектор  $u_{1,k}$  может немного отклоняться от линейной оболочки  $\text{span}\{y_i\}$ . Поэтому разложение будем обозначать

$$g = \sum_{i=1}^s c_i y_i. \quad (4.9)$$

Подобное разложение не единственно, поэтому необходимы дополнительные условия. Строго говоря, надо решать следующую задачу: найти

$$\max \langle u_{1,k}, g \rangle^2 \text{ при условии } g^2 = 1 \text{ и, например, } \sum c_i^2 = \min.$$

Это приводит к обобщенной задаче на собственные значения, что делает методику слишком сложной. Поэтому будем решать более простую задачу:

$$\text{найти } g, \text{ такое что } \langle u_{1,k}, g \rangle = 1 \text{ и } g^2 = \min.$$

Если  $u_{1,k} \in \text{span}\{y_i\}$ , то решение этой задачи совпадает с предыдущим случаем. В противном случае решение будет пропорционально проекции  $u_{1,k}$  на это подпространство. Далее его надо будет лишь перенормировать таким образом, чтобы  $g^2 = 1$ . Однако второй подход оказывается существенно проще. Благодаря линейности условия  $\langle u_{1,k}, g \rangle = 1$  по коэффициентам задача сводится к решению системы линейных уравнений, а не к задаче на собственные значения.

На коэффициенты разложения (4.9) накладываются следующие ограничения.

1. Угол между векторами  $u_{1,k}$  и  $c_i y_i$  не должен быть больше  $\pi/2$ . Этого можно добиться, например, выбирая  $c_i \sim \alpha_i \langle u_{1,k}, y_i \rangle / \langle u_{1,k}, y_i \rangle^\beta$ ,  $\beta \geq 0$ .

2.  $\sum \alpha_i^2 = \min$  – все “лишние” коэффициенты, для которых соответствующие вектора почти ортогональны  $u_{1,k}$ , должны быть близки к нулю.

3. Чем дальше находится соседняя точка, т. е., чем больше длина вектора  $y_i$ , тем меньший вклад должен вносить он в окончательный результат, поэтому выбираем  $c_i \sim (r_0 + |y_i|)^{-\gamma}$ .

Таким образом, наибольший вклад должны давать ближайшие вектора, имеющие то же направление, что и  $u_{1,k}$ .

Запишем

$$g = \sum_{i=1}^s l_i \alpha_i y_i, \quad l_i = \frac{(u_{1,k}, y_i) |y_i|^\beta}{(r_0 + |y_i|)^\gamma}. \quad (4.10)$$

Задачу на условный экстремум можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta_0 \sum \alpha_i^0 + \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^s l_i \alpha_i y_i, \sum_{i=1}^s l_i \alpha_i y_i \right\rangle + \\ & + \mu \left( 1 - \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|y_i|^{\beta+2}}{(r_0 + |y_i|)^\gamma} \right) = \min, \end{aligned}$$

где параметр  $\delta_0 > 0$  обеспечивает равенство нулю тех коэффициентов  $\alpha_i$ , для которых  $l_i \cong 0$ . Далее получаем систему уравнений для  $\alpha_i$

$$\delta_0 \alpha_j + \sum_{i=1}^s l_j l_i \langle y_j, y_i \rangle \alpha_i = \mu \frac{|y_j|^{\beta+2}}{(r_0 + |y_j|)^\gamma}.$$

Решая эту систему, находим отношение  $\alpha_i / \mu$ . Значение  $\mu$  определяется по формуле (4.10) из условия нормировки  $\langle u_{1,k}, g \rangle = 1$ .

Наличие нескольких методов расчета показателей Ляпунова принципиально важно. В реконструкции динамических систем по временному ряду могут возникать искажения, которые приводят к систематическим ошибкам в результатах. Разброс в значениях, которые получены разными алгоритмами при обработке одной и той же выборки, позволяет оценить реальную погрешность расчета, связанную с систематическими ошибками.

При расчете показателей Ляпунова по временным рядам следует придерживаться следующих рекомендаций.

Необходимо проводить расчет несколькими методами. Желательно одновременно провести расчет размерности аттрактора и энтропии при помощи корреляционного интеграла и сравнить со значениями, получающимися по значениям показателей Ляпунова.

Полезную информацию может давать расчет показателей для прямого и обращенного времени.

Желательно исследовать зависимость результатов от длины окна реконструкции. Это позволяет идентифицировать систематические ошибки, вносимые реконструкцией.

Достаточно надежный результат расчета показателей Ляпунова по временному ряду можно получить только как итог большой серии расчетов при помощи нескольких алгоритмов.

#### 4.4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕР

Инвариантная мера может представлять интерес либо как самостоятельная характеристика динамической системы, либо как средство вычислить какие-то средние значения, которые не удастся получить как временные средние.

Если необходимо построить распределение вероятностей, то носитель меры (какую-то область фазового пространства) разбивают на достаточно малые подмножества  $A_i$  и, решая дифференциальные уравнения, рассчитывают достаточно длинную траекторию, содержащую  $N$  точек  $x_k$ . Меру каждого множества оценивают как

$$\mu(A_i) = N_i / N,$$

где  $N_i$  – число точек, попавших в подмножество  $A_i$ , т. е. фактически при помощи гистограммы.

Этот метод хорошо работает, когда  $N_i$  достаточно велико. Если интерес представляют области, где траектории появляются очень редко, то для них такие оценки будут давать неприемлемо большую ошибку. Так как относительная погрешность равна

$$\frac{\delta\mu(A_i)}{\mu(A_i)} \cong \frac{\delta N_i}{N_i} \sim \frac{1}{\sqrt{N_i}}.$$

В этом случае необходимо либо аппроксимировать меру гладким распределением, либо решать уравнение Перрона-Фробениуса.

Задачи другого типа связаны с приложениями теории информации к динамическим системам. Для них необходимо строить разбиения фазового пространства, оценивать меру каждого из них, а затем рассчитывать энтропию, взаимную информацию и тому подобные характеристики. При таком подходе трудностей можно избежать, если разбивать носитель меры на части, примерно равные не по мере Лебега (объему), а по инвариантной мере, т. е. такие части, для которых все  $N_i$  будут примерно одинаковы и ни одно из них не будет слишком мало. Тогда оценки требуемых величин будут наиболее надежными.

## 4.5. РАСЧЕТ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРА

Расчет фрактальной размерности аттрактора по временному ряду представляет значительный интерес, так как позволяет оценить (обычно снизу) минимальное число существенных динамических переменных (или число параметров порядка, динамическую размерность, размерность минимального инерциального многообразия), необходимых для описания наблюдаемых процессов.

### 4.5.1. Определение емкости

Численные методы определения емкости первоначально основывались на сформулированном определении, за исключением того, что опускали этап минимизации количества покрывающих множеств. Алгоритм имеет следующий вид. Пусть по временному ряду построена  $m$ -мерная реконструкция, и в распоряжении находится набор векторов  $z_i$ . Хотя это могут быть и точки исходного фазового пространства  $x_i$ .

1. Задаем некоторое  $\varepsilon$  и разбиваем область фазового пространства, в которой лежат анализируемые вектора, на кубики со стороной  $\varepsilon$ . Подсчитываем, сколько кубиков покрывают все точки траектории. Получаем одно значение  $N(\varepsilon)$ . Для расчета числа кубиков можно воспользоваться следующей идеей. Поделим все координаты векторов  $z_i$  на величину  $\varepsilon$  и оставим только целую часть, преобразовав тем самым их в новые векторы  $v_i$ . Тогда для всех векторов  $z_i$ , попавших в одну ячейку, полученные векторы  $v_i$  будут совпадать. Т.е.  $N(\varepsilon)$  будет равно количеству различных векторов  $v_j$ .

2. Допустим, что мы вычислили число накрывающих кубиков  $N_s(\varepsilon_s)$  для различной длины стороны  $\varepsilon_s$ . Как следует из определения емкости (3.31), при малых  $\varepsilon$  число кубиков  $N(\varepsilon)$  должно вести себя как  $\sim \varepsilon^{-d_F}$ , а в таком случае  $\log N(\varepsilon) \cong -d_F \log \varepsilon$ . Поэтому оценивание емкости по полученным данным сводится к:

- поиску «наиболее линейного» участка зависимости  $\log N(\varepsilon)$  от  $\log \varepsilon$ ;

- построению на этом участке линейной аппроксимации вида  $\log N(\varepsilon) = b \log \varepsilon + c$ , например, по методу наименьших квадратов. В качестве оценки емкости берется  $d_F = -b$ .

Наиболее трудно в этом алгоритме формализовать выбор линейного участка, по которому следует оценивать емкость.

Алгоритмы приведенного типа получили название подсчета ячеек. С одной стороны они достаточно просты, с другой имеют существенные недостатки.

Первый недостаток связан с необходимостью исследования очень длинных выборок – миллионы точек и более. Для коротких выборок не удастся получить хорошего линейного участка.

Во-вторых, величину  $N(\varepsilon)$  не всегда удастся хорошо оценить, так как в ряде случаев заметный вклад вносят редко посещаемые области аттрактора. В некоторые из них точки  $z_i$  не попадут, и оценка

для числа кубиков  $N(\varepsilon)$  будет заниженной. Более того, для некоторых типов динамических систем (система Лоренца) при малых  $\varepsilon$  отсутствует сходимость  $N(\varepsilon)$  даже при числе векторов  $\sim 10^7$ .

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод о «непрактичности» алгоритмов подсчета ячеек. Поэтому внимание исследователей было обращено на вычисление вероятностных размерностей.

#### 4.5.2. Вычисление вероятностных размерностей

Напомним, что в основе вероятностных размерностей лежит вычисление обобщенных энтропий

$$H_q = (1 - q)^{-1} \log\left(\sum p_i^q\right),$$

где  $p_i$  – мера  $i$ -го кубика, покрывающего аттрактор. При  $q > 1$  основной вклад в сумму, стоящую под знаком логарифма, будут давать наиболее посещаемые кубики, а влияние редко посещаемых кубиков будет незначительным. Таким образом, одну проблему удастся решить. Используя различные разбиения на кубики, можно для каждого разбиения вычислить  $H_q(\varepsilon)$ , а затем, аналогично емкости, оценить  $d_I$  путем линейной аппроксимации  $H_q(\varepsilon) \cong -d_I \log \varepsilon + c$ . Однако такая методика также требует больших выборок.

Сумму  $C_q(\varepsilon) = \left(\sum p_i^q\right)^{1/(q-1)}$ , называемую обобщенным корреляционным интегралом, можно представить в виде

$$C_q(\varepsilon) = \left(\sum p_i^q\right)^{1/(q-1)} = \left(\sum p_i^{q-1} p_i\right)^{1/(q-1)} = \left(\overline{p_i^{q-1}}\right)^{1/(q-1)},$$

т. е. как среднее (в общем случае среднее геометрическое) значение меры кубика размера  $\varepsilon$ . Для оценки этого среднего значения рассчитывается мера кубика или шара радиуса  $\varepsilon$  с центром в каждой точке  $z_i$ , а затем усредняются полученные значения по всем таким шарам. Обозначим через  $k_i(\varepsilon)$  число точек  $z_j$  внутри  $\varepsilon$ -шара с центром  $z_i$ . Его меру можно приближенно оценить как  $P_i(\varepsilon, N) = k_i(\varepsilon)/N$ , а значение обобщенного корреляционного интеграла равно

$$C_q(\varepsilon) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i(\varepsilon))^{q-1} \right)^{1/(q-1)} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_i(\varepsilon)}{N} \right)^{q-1} \right)^{1/(q-1)}.$$

В случае  $q = 2$  это соотношение существенно упрощается

$$C_2(\varepsilon) \equiv C(\varepsilon) = N^{-2} \sum_{i=1}^N k_i(\varepsilon),$$

а величину  $C_2(\varepsilon)$  называют корреляционным интегралом. Последняя сумма – это удвоенное число пар точек, расстояние между которыми не превосходит  $\varepsilon$ . Таким образом, мы пришли к широко известному определению корреляционного интеграла

$$C(\varepsilon) = \frac{\text{число пар } c \text{ с } \|z_i - z_j\| < \varepsilon}{\text{полное число пар } (z_i, z_j)}.$$

Оказалось, что для того, чтобы оценить информационную размерность  $d_{I2}$  по корреляционному интегралу, необходимы выборки существенно меньшей размерности, чем в предыдущих случаях. Методика оценки та же самая – линейная аппроксимация зависимости  $\log C(\varepsilon) \cong -d_{I2} \log \varepsilon + c$  по «наиболее линейному» участку. Саму размерность  $d_{I2}$  называют корреляционной размерностью или корреляционным показателем.

Рассмотренный алгоритм расчета  $d_{I2}$  является самым популярным алгоритмом расчета по временным рядам. Платой за достоинства алгоритма является большой объем вычислений – расчет требует  $O(N^2)$  операций.

#### 4.6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Корреляционный интеграл, кроме расчета информационной размерности аттрактора, позволяет оценить уровень шума в системе, оценить энтропию, отличить хаотические системы от нехаотических систем.

Корреляционный интеграл можно рассчитать как для точек в исходном фазовом пространстве (по точкам  $x_i$ ), так и для реконст-

руированных векторов  $z_i$ . В первом случае при благоприятных условиях можно оценить размерность исследуемой системы. Во втором случае корреляционный интеграл становится функцией не только  $\varepsilon$ , но и параметров реконструкции  $m$  и  $\tau$  (или  $m$  и  $w$ ). Зависимость от двух последних параметров и позволяет диагностировать хаотичность, уровень шума, оценить энтропию, время предсказуемости, верхний предел допустимой длины окна реконструкции  $w_{\max}$ .

Будем сравнивать значения корреляционного интеграла, вычисленные при различных значениях  $m$ . Задержку  $\tau$  считаем фиксированной. Если использовать евклидово расстояние

$$\|z_i - z_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (z_{ik} - z_{jk})^2}, \quad (4.11)$$

то с увеличением  $m$  все расстояния будут монотонно увеличиваться, а среднее квадратичное расстояние приближенно можно оценить следующим образом  $\overline{\|z_i - z_j\|^2} \sim m$ . Это в свою очередь приводит к тому, что одни и те же характерные участки на графике  $C(\varepsilon)$  будут относиться к разным значениям  $\varepsilon$ . В некоторых случаях подобный сдвиг масштабов может препятствовать использованию описанных выше алгоритмов.

Если предполагается совместная обработка корреляционного интеграла для нескольких значений  $m$ , то необходимо использовать коррекцию метрики – нормировать расстояние на размерность  $m$ . Вместо формулы (4.11) расстояние следует вычислять по формуле

$$\|z_i - z_j\|_{2C} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{(z_{ik} - z_{jk})^2}{m}}. \quad (4.12)$$

Метрику (4.11) иногда обозначают как  $\|\cdot\|_2$  или  $L_2$ . Скорректированную метрику (4.12) обозначают как  $\|\cdot\|_{2C}$  или  $L_{2C}$ .

При расчете корреляционного интеграла часто используют и две другие метрики

$$\begin{aligned}\|z_i - z_j\|_1 &= \sum_{k=1}^m |z_{ik} - z_{jk}|, \\ \|z_i - z_j\|_\infty &= \sup_k |z_{ik} - z_{jk}|.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Каждая из метрик имеет свои достоинства и недостатки. Например,  $\|\cdot\|_2$  и  $\|\cdot\|_{2C}$  изотропны. При использовании  $\|\cdot\|_1$  или  $|z_{ik} - z_{jk}|$  (когда необходимо сравнивать различные  $m$ ) имеем

$$\|z_i - z_j\|_{1C} = \sum_{k=1}^m \frac{|z_{ik} - z_{jk}|}{m}.\tag{4.14}$$

Используя формулу (4.14), можно получить наиболее быстрые алгоритмы расчета (экономия на возведение в квадрат). Для нормы (4.13), которую называют  $L_\infty$  или sup-норма, также можно построить быстрый алгоритм, кроме того, данная норма не нуждается в коррекции. Для нее, однако, интервал значений  $\varepsilon$ , на котором изменяется корреляционный интеграл, обычно несколько короче, что не всегда удобно.

Далее будем предполагать, что расстояние между векторами вычисляются в скорректированных нормах  $\|\cdot\|_{1C}$ ,  $\|\cdot\|_{2C}$  или в норме  $\|\cdot\|_\infty$ . Это необходимо не для оценки размерности, а для иных, перечисленных выше, применений корреляционного интеграла.

## 4.7. ОЦЕНКИ ЭНТРОПИИ

Обобщенный корреляционный интеграл был предложен как способ расчета энтропии Реньи для некоторого разбиения аттрактора на кубики, но затем разбиение было заменено на усредненную меру одного кубика. Зафиксируем масштаб разбиения и посмотрим, что получится, если увеличивать размерность реконструкции  $m$ .

Пусть наблюдаемая величина  $x$  изменяется в пределах от значения  $x_{\min}$  до значения  $x_{\max}$ . Разбиение отрезка  $[x_{\min}, x_{\max}]$  на участки  $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$  длиной  $\varepsilon$  порождает некоторое разбиение аттрактора в ис-

ходном фазовом пространстве на множества  $A_i$ . Это будет множество всех векторов  $x_k$ , для которых  $h(x_k)$  принадлежит  $i$ -му отрезку. В простейшем случае, когда  $x$  – просто одна из компонент вектора  $x$ , получится нарезка аттрактора гиперплоскостями на «ломтики». Теперь представим себе двумерную реконструкцию с разбиением на отрезки  $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$  по обеим координатам вектора  $z$ . Пусть некоторая точка  $z_k$  попала в кубик  $\{i, j\}$ . Это будет означать, что  $x_k \in A_i$ , а  $x_{k+1} \in A_j$ . То есть кубики будут отвечать разбиению «2-го порядка» на множества  $A_{ij}^{(2)}$ , а «минус логарифм» корреляционного интеграла для него  $-\log C_q$  – энтропии этого разбиения  $H_q^{(2)}(\varepsilon)$ .

Рассуждая таким же образом, мы получим, что  $m$ -мерная реконструкция будет соответствовать некоторому разбиению  $m$ -го порядка, а корреляционный интеграл – давать значения  $H_q^{(m)}(\varepsilon)$ . Тогда можно ожидать, что при малых  $\varepsilon$  разность  $[H_q^{(m+1)}(\varepsilon) - H_q^{(m)}(\varepsilon)] \rightarrow K_q \tau$  или  $H_q^{(m)}(\varepsilon)/m \rightarrow K_q \tau$ , когда  $m \rightarrow \infty$ . Напомним, что энтропия динамической системы  $K_q$  отвечает свойствам отображения  $\varphi^1(x)$ , а для отображения  $\varphi^\tau(x)$ , которое отвечает временному шагу реконструкции аттрактора, соответствующее значение энтропии будет равно  $K_q \tau$ .

Строгого доказательства того, что корреляционный интеграл имеет отношение к энтропии, нет, но можно ожидать, что при малых значениях  $\varepsilon$  и достаточно больших  $m$  будет выполнено

$$\log C_q(\varepsilon) \cong d_q \log \varepsilon - K_q w + \text{const}. \quad (4.15)$$

Здесь использована длина окна реконструкции  $w = (m-1)\tau$  вместо  $m\tau$ , что удобнее. Фиксируя в формуле (4.15) масштаб  $\varepsilon$  и исследуя зависимость от величины  $w$ , можно оценить энтропию динамической системы  $K_q$ .

Соотношение (4.15) позволяет делать не только количествен-

ный, но и качественный вывод. Если система хаотична, то при увеличении  $m$  график корреляционного интеграла должен проходить все ниже и ниже. По этому признаку можно иногда просто сделать вывод о хаотичности системы.

Алгоритм расчета энтропии  $K_2$ . При  $q = 2$  алгоритм существенно упрощается. Перепишем соотношение (4.15) в виде

$$C(\varepsilon, w) \sim \varepsilon^{d_2} \exp\{-K_2 w\}. \quad (4.16)$$

Согласно известному определению корреляционного интеграла

$$C(\varepsilon) = \frac{\text{число пар } c \text{ с } \|z_i - z_j\| < \varepsilon}{\text{полное число пар } (z_i, z_j)}.$$

Величину  $C(\varepsilon, w)$  можно интерпретировать как вероятность того, что во множестве реконструированных векторов  $z_i$  для случайно выбранной пары расстояние между ними будет не больше  $\varepsilon$ . Параметры реконструкции  $m$  и  $\tau$  при этом предполагаются фиксированными. Соотношение (4.16) означает, что в реконструкциях с большим значением  $w$  должно быть очень мало близких пар. Действительно, для хаотических систем очень трудно найти два длинных куса временного ряда, которые повторяли бы друг друга с хорошей точностью.

Откажемся от последнего предположения и построим из одного и того же временного ряда много реконструкций для различных значений размерности  $m$ :  $m_L < m < m_U$ . Это будет отвечать значениям окна реконструкции  $w_L < w < w_U$ . Будет ли соотношение (4.16) справедливо для такого «сводного» ансамбля векторов? При малых значениях  $\varepsilon$  и не слишком малых  $w$  логично предположить, что будет. В таком случае  $dC/d\varepsilon$  можно уже приближенно рассматривать как совместную плотность вероятности, т. е. как вероятность того, что для данной пары векторов расстояние  $\cong \varepsilon$ , а длина окна реконструкции равна  $w$ .

Зафиксируем  $\varepsilon$ , тогда распределение пар векторов по длине окна при фиксированном расстоянии будет близко к экспоненциально-

му распределению  $p(w) = A \exp\{-K_2 w\}$ . Среднее для такого распределения равно

$$w_R = \frac{\int_{w_L}^{w_U} w p(w) dw}{\int_{w_L}^{w_U} p(w) dw} =$$

$$= \frac{w_L - w_U \exp\{-K_2(w_L - w_U)\}}{1 - \exp\{-K_2(w_L - w_U)\}} + \frac{1}{K_2} \xrightarrow{w_U \rightarrow \infty} w_L + \frac{1}{K_2}.$$

Т. е., вычислив среднюю длину реконструкции для данного значения  $\varepsilon$ , мы получим величину, обратную энтропии. Достоинством метода будет то, что искомая величина вычисляется сразу, без дополнительных преобразований.

Корреляционный интеграл и статистические тесты. Предположим, что обрабатывается временной ряд чисто случайных величин  $x_i$ , т. е.  $x_i$  – независимые и одинаково распределенные величины. Нам понадобятся свойства не самой величины  $x$ , а случайной величины  $y_{ij} = |x_i - x_j|$ , которая служит основным материалом для расчета расстояний  $\|z_i - z_j\|$ . Пусть случайные величины  $y$  распределены с плотностью  $\rho(y)$ , а их функция распределения  $F(y) = \int_{-\infty}^y \rho(x) dx$ . Очевидно, что  $\rho(y) = F(y) \equiv 0$  при  $y < 0$ . Для вычисления расстояний воспользуемся нормой  $\|\cdot\|_\infty$  (4.13). Тогда тот факт, что  $\|z_i - z_j\|_\infty < \varepsilon$ , означает, что одновременно должны выполняться неравенства  $y_{i+k, j+k} < \varepsilon$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ . Поскольку входящие в эти неравенства  $y$  – независимые величины, то вероятность такого события, т. е. значение корреляционного интеграла равно

$$C(\varepsilon) = F(\varepsilon)^m. \quad (4.17)$$

Если плотность вероятности не имеет особенностей в нуле, т. е.

$$\rho(u) \cong \rho_0 + \rho_1 u + \dots \text{ при малых } u, \text{ то } F(\varepsilon) = \rho_0 \varepsilon + \frac{\rho_1 \varepsilon^2}{2} + \dots, \text{ а}$$

$$\log C(\varepsilon) = m \log \varepsilon + \log(\rho_0 + O(\varepsilon)), \quad (4.18)$$

т. е. для таких плотностей  $\rho(y)$  размерность получающегося множества всегда равна размерности пространства реконструкции  $m$ . Для других плотностей результат может оказаться иным, но нетрудно получить общее правило, если при  $y \rightarrow 0$   $\rho(y) \sim y^\beta$ , то значение размерности получится равным  $(1 + \beta)m$ . Не столь важно велика эта оценка или мала, важно, что она монотонно возрастает с увеличением  $m$ .

Этот результат и используется в качестве детектора некоррелированного или слабо коррелированного шума. Предположим, что исследуется временной ряд динамической системы невысокой размерности, к которому в процессе измерения добавился малый шум  $\mu \xi_i$ , т. е. данные имеют вид  $x_i = h(x_i) + \mu \xi_i$ ,  $\mu$  – малый параметр. На масштабах  $\varepsilon \gg \mu$  влияние шума будет несущественно, и корреляционный интеграл получится почти таким же, как и в отсутствии шума. При малых масштабах  $\varepsilon < \mu$  данные будут выглядеть как случайные, и можно ожидать, что корреляционный интеграл будет похож на случай (4.18). Таким образом, на графике  $\log C$  от  $\log \varepsilon$  должны быть две области: на больших масштабах при достаточно больших  $m$  наклон стабилизируется, а на малых постоянно увеличивается с ростом  $m$ . По такому поведению корреляционного интеграла можно установить наличие шума и примерно определить его амплитуду.

Иногда можно сделать более точные оценки. Рассмотрим поведение наклона корреляционного интеграла

$$S(\varepsilon, m) = d \log C(\varepsilon) / d \log \varepsilon.$$

Для данных с шумом на больших масштабах  $S(\varepsilon, m) \cong d_2$ , а на малых, где сказывается влияние шума,  $S(\varepsilon, m) \cong \phi_0(\varepsilon)m + \text{const}$ .

Функцию  $\phi_0(\varepsilon)$  можно получить из рассчитанных значений корреляционного интеграла. Заметим, что для чисто случайных данных (4.18)  $\phi_0(\varepsilon) = \varepsilon \rho(\varepsilon) / F(\varepsilon)$ . Если предположить, что данные сопровождаются гауссовым шумом с нулевым средним и неизвестной дисперсией, то значение дисперсии можно установить по полученной функции  $\phi_0(\varepsilon)$ .

Данные для хаотической системы в случае короткой выборки можно принять за случайные. На графике корреляционного интеграла можно выделить два характерных масштаба: максимальное расстояние между точками  $\varepsilon_{\max}$  и масштаб, начиная с которого график корреляционного интеграла становится почти линейным, и ниже которого можно исследовать фрактальные свойства  $\varepsilon_{fr}$ . Очевидно, что  $C(\varepsilon_{\max}) = 1$ , а на масштабах меньших  $\varepsilon_{fr}$  должно быть справедливо соотношение (4.15), т. е.

$$\log C(\varepsilon_{fr}) \cong d_2 \log \varepsilon_{fr} - K_2 \tau m + \text{const} = c_1 - K_2 \tau m.$$

Поэтому средний наклон на участке  $[\varepsilon_{fr}, \varepsilon_{\max}]$  будет равен

$$S = \frac{\Delta \log C}{\Delta \log \varepsilon} = \frac{K_2 \tau m - c_1}{\log(\varepsilon_{\max} / \varepsilon_{fr})} = am + b,$$

т. е. будет линейно расти с увеличением  $m$ . Если выборка недостаточно длинная, то масштабы, меньшие  $\varepsilon_{fr}$ , могут оказаться неразрешимыми, и данные будут интерпретироваться как случайные. На самом деле это проявление искажений, характерных для реконструкции хаотических систем при слишком большой длине окна  $w$ . Искажения связаны с искривлением и образованием складок, из-за которых реконструированный аттрактор на больших масштабах выглядит подобно скомканному листу бумаги.

Отметим еще одно использование корреляционного интеграла, связанное со случайными данными и статистикой. Для независимых случайных данных справедливо соотношение (4.17). По отклонениям от этого соотношения можно судить о зависимости или независимости данных друг от друга.

## 5. УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

В разделе изучаются методы управления, идентификации и прогноза систем с хаотической динамикой, необходимые для практического применения систем данного класса.

### 5.1. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются три исторически первых и наиболее активно развивающихся направления: программное управление, основанное на периодическом возмущении системы; метод линеаризации отображения Пуанкаре (метод OGY); метод запаздывающей обратной связи (метод Пирагаса).

#### 5.1.1. Постановка задачи

Возможность существенного изменения свойств хаотической системы при помощи весьма малого изменения параметров вызвала большой интерес исследователей к задачам управления хаотическими процессами.

**Задача стабилизации.** Эта задача сводится к подавлению хаотических колебаний путем приведения их к регулярным колебаниям, либо полного подавления колебаний. Задача подобного типа возникает при подавлении шумов, вибраций различных конструкций, устранения нежелательных гармоник в системах связи. Задача стабилизации формализуется следующим образом.

Рассмотрим свободное (неуправляемое,  $u(t) \equiv 0$ ) движение  $x^*(t)$  системы

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (5.1)$$

где  $x = x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u = u(t)$  –  $m$ -мерный вектор входов (управлений). Пусть это движение является  $T$ -периодическим, т. е. таким, что для всех  $t \geq 0$  выполнено  $x^*(t+T) = x^*(t)$ . Поставим задачу его стабилизации, т. е. приведения решений  $x(t)$  системы (5.1) к виду  $x^*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x^*(t)) = 0 \quad (5.2)$$

для любого решения  $x(t)$  системы (5.1) при начальном состоянии  $x(0) = x_0 \in \Omega$ , где  $\Omega$  – заданное множество начальных условий.

Задача состоит в нахождении функции управления либо в разомкнутой форме (программное управляющее воздействие)

$$u(t) = U(t, x_0), \quad (5.3)$$

либо в форме обратной связи по состоянию

$$u(t) = U(x(t)), \quad (5.4)$$

обеспечивающей выполнение цели управления (5.2). В такой постановке задача стабилизации хаотических процессов совпадает с обычной для теории управления задачей слежения. Принципиальное отличие – управление (5.3) или (5.4) должно обеспечивать достижение цели при достаточно малом уровне управляющего воздействия.

Частным случаем является стабилизация неустойчивого состояния равновесия. Пусть правая часть системы (5.1) удовлетворяет условию  $F(x_0^*, 0)$ . Тогда при  $u(t) \equiv 0$  система (5.1) имеет состояние равновесия  $x_0^*$ , которое требуется стабилизировать выбором подходящего управления. Специфика задачи состоит в дополнительном требовании «малости» управления.

#### **Задача возбуждения или генерации хаотических колебаний.**

Эти задачи называются также хаотизацией или антиуправлением. Такие задачи возникают, когда хаотическое движение является желательным видом поведения системы (генераторы псевдослучайных чисел, источники хаотических сигналов в системах связи и радиолокации). Для подобных задач характерно, что траектория, по которой должен двигаться фазовый вектор системы, заранее не задана, не известна или не имеет значения для достижения цели.

Формально цель управления может быть представлена в виде (5.2), но здесь целевая траектория  $x^*(t)$  уже не является периодической. Более того, вместо движения по данной траектории может быть

поставлено требование, чтобы управляемый процесс удовлетворял некоторому формальному критерию хаотичности. Например, может быть задана скалярная целевая функция  $G(x)$ , и поставлена цель управления, состоящая в достижении предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) = G^* . \quad (5.5)$$

Обычно в качестве целевой функции (5.5) для задач хаотизации берется старший характеристический показатель Ляпунова. Иногда в качестве  $G(x)$  выбирается полная энергия колебаний.

**Задача синхронизации.** Задаче синхронизации хаотических процессов уделяется большое значение в системах передачи информации, в биологии и биотехнологиях. В общем случае под синхронизацией понимается согласованное изменение состояний двух, или более, систем, либо, возможно согласованное изменение некоторых их характеристик, например частот колебаний.

Формальным выражением синхронного движения двух подсистем с векторами состояния  $x_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$  и  $x_2 \in \mathbf{R}^{n_2}$  может быть полное или частичное совпадение векторов состояния, например, равенство  $x_1 = x_2$ . Это равенство выделяет в объединенном пространстве состояний взаимодействующих подсистем некоторое подпространство (диагональ). Требование асимптотической синхронизации состояний  $x_1$  и  $x_2$  двух систем можно выразить как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = 0 . \quad (5.6)$$

Относительно совокупного вектора состояний  $x = (x_1, x_2)^T$  системы в целом, соотношение (5.6) означает сходимость  $x(t)$  к диагональному множеству  $\{x : x_1 = x_2\}$ .

Особенностью задач управления возбуждением и синхронизацией колебаний является то, что желаемое поведение однозначно не фиксировано, а его характеристики задаются лишь частично. Удобным математическим выражением цели управления в подобных задачах является задание желаемых значений одного или нескольких чи-

словых показателей, например, энергии системы. В задачах синхронизации целью может быть асимптотическое совпадение значений некоторого показателя для обеих систем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (G(x_1(t)) - G(x_2(t))) = 0. \quad (5.7)$$

Часто цели управления (5.2), (5.6) и (5.7), оказывается, более удобно выразить в виде целевой функции  $Q(x, t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0. \quad (5.8)$$

Например, для того, чтобы привести цель управления (5.6) к виду (5.8) можно взять  $Q(x) = \|x_1 - x_2\|^2$ . Для цели (5.8) можно использовать целевую функцию вида  $Q(x(t), t) = (x(t) - x^*(t))^T \Gamma (x(t) - x^*(t))$ , где  $\Gamma$  – положительно определенная симметричная матрица.

### **5.1.2. Методы управления**

Рассматривается задача стабилизации не априори заданных или желаемых траекторий хаотических динамических систем, а неустойчивых периодических траекторий, бесконечное число траекторий которых вплетено в паутину хаотического (нерегулярного) аттрактора. Причем, какая-либо информация о положении этих траекторий в фазовом пространстве, о периоде и амплитуде их колебаний практически отсутствует. Представлены наиболее известные методы стабилизации неустойчивых периодических траекторий хаотических систем. Это OGY-метод, основанный на линеаризации отображения Пуанкаре, и метод Пирагаса, опирающийся на построение обратной связи с запаздыванием, близким к периоду существующего неустойчивого периодического решения. Изложен метод Магницкого, заключающийся в построении обратной связи в расширенном фазовом пространстве.

**OGY-метод.** Метод Отта–Гребоджи–Йорке заключается в стабилизации неустойчивого периодического решения хаотической системы путем применения дискретных управляющих воздействий в виде обратной связи в некотором сечении Пуанкаре в окрестности не-

подвижной точки отображения Пуанкаре, соответствующей исходному циклу. Вид обратной связи определяется линеаризацией отображения Пуанкаре в неподвижной точке. Метод основан на двух ключевых идеях:

1) использование при синтезе регулятора дискретной модели системы, основанной на линеаризации отображения Пуанкаре;

2) использование свойства рекуррентности хаотических траекторий и применение управляющих воздействий только в моменты времени, когда траектория возвращается в некоторую окрестность требуемого состояния или заданной орбиты.

Основа OGY-метода состоит в следующем. Пусть управляемый процесс описывается соответствующими уравнениями состояния (5.1), где  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}^1$ . Под переменной  $u$  понимается изменяемый параметр системы, а не стандартная «входная» управляющая переменная, но для нелинейного объекта эта разница несущественна. Пусть требуемая (целевая) траектория  $x^*(t)$  является одним из решений системы (5.1) при  $u(t) \equiv 0$ . Эта траектория может быть как периодической, так и хаотической, но в обоих случаях она рекуррентна (со временем эти траектории попадают в сколь угодно малую окрестность своего положения в прошлом). Построим поверхность (так называемое сечение Пуанкаре)

$$S = \{x | s(x) = 0\},$$

проходящую через заданную точку  $x_0 = x^*(0)$  трансверсально к траектории  $x^*(t)$ . Рассмотрим отображение  $x \rightarrow P(x, u)$ , где  $P(x, u)$  есть точка первого возвращения решения системы (5.1) на поверхность  $S$ , которое начинается в точке  $x$  и получено при постоянном входе  $u$ . Отображение  $x \rightarrow P(x, u)$  называется управляющим отображением Пуанкаре. Вследствие свойства рекуррентности траектории  $x^*(t)$  это отображение определено, по крайней мере, для некоторой окрестно-

сти точки  $x_0$ . Рассматривая последовательность таких отображений, получим дискретную систему

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k), \quad (5.9)$$

где  $x_k = x(t_k)$ ,  $t_k$  – момент времени  $k$ -го пересечения поверхности  $S$ , а  $u_k$  – значение управления  $u(t)$  на промежутке  $t_k$  и  $t_{k+1}$ .

Следующий шаг синтеза состоит в замене системы (5.9) линеаризованной в точке  $(x_0, u^*)$  дискретной системой

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B\hat{u}_k,$$

в которой  $\hat{x}_k = x_k - x_0$ ,  $\hat{u}_k = u_k - u^*$ ,  $A = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, u^*)$ ,  $B = \frac{\partial P}{\partial u}(x_0, u^*)$ .

Для полученной системы находится стабилизирующее управление (5.4), например, в виде линейной обратной связи по состоянию:  $\hat{u}_k = C\hat{x}_k$ . Тогда получим, что

$$\hat{x}_{k+1} = (A - BC)\hat{x}_k. \quad (5.10)$$

Таким образом, неподвижная точка  $x_0$  отображения Пуанкаре и, следовательно, искомый неустойчивый цикл  $x(t, u^*)$  системы (5.1) будут стабилизированы, если определить матрицу  $C$  так, чтобы матрица  $(A - BC)$  имела собственные значения по модулю меньше единицы. Окончательно, предлагаемый закон управления имеет вид:

$$u_k = \begin{cases} C\hat{x}_k, & \text{если } \|\hat{x}_k\| \leq \Delta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (5.11)$$

в котором  $\Delta > 0$  – некоторый достаточно малый параметр. Ключевой особенностью метода является то, что управление воздействует только в некоторой окрестности целевой траектории, т. е. в закон кусочно-постоянного управления вводится «внешняя» зона нечувствительности. Этим достигается малое значение управляющего воздействия, которое по норме не превышает  $|C\hat{x}_k| \leq \|C\|\Delta$ .

Для гарантии работоспособности метода следует выбирать параметры регулятора так, чтобы норма ошибки  $\|\hat{x}_k\|$  в линейной замкнутой системе убывала:  $\|(A - BC)\hat{x}_k\| \leq \rho\hat{x}_k$ , где  $\rho < 1$ . Тогда однажды

войдя в  $\Delta$ -окрестность цели, траектория замкнутой системы из нее не выйдет. С другой стороны, траектория наверняка войдет в любую  $\Delta$ -окрестность целевой траектории благодаря свойству рекуррентности.

Для того чтобы использовать OGY-метод, необходимо преодолеть два серьезных препятствия: неточность модели системы и неполноту измерений текущего состояния процесса. Для устранения второго из них предлагается вместо вектора состояния  $x$  перейти к так называемому вектору запаздывающих координат, который вводится как  $X(t) = [y(t), y(t-\tau), \dots, y(t-(N-1)\tau)]^T \in \mathbf{R}^n$ , где  $y(t) = h(x)$  – измеряемый выход (например, одна из координат системы), а  $\tau > 0$  – время запаздывания (параметр). При этом закон управления (5.11) принимает вид:

$$u_k = \begin{cases} u'_k, & \text{если } |y_{k,i} - y_{k,i}^*| \leq \Delta_y, \quad i = \overline{1, (N-1)}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $y_{k,i} = y(t_k - i\tau)$ ,  $y_{k,i}^* = h(x^*(t_k - i\tau))$ ,  $\Delta_y$  – максимальная желаемая разница между  $y_{k,i}$  и  $y_{k,i}^*$ ,  $u'_k = U(y_k, y_{k,1}, \dots, y_{k,N-1})$ ,  $U$  – функция, определяющая вид регулятора.

Чтобы преодолеть первое из отмеченных препятствий, связанное с неопределенностью линеаризованной модели объекта, предложено проводить оценку параметров модели в уравнениях состояния (5.10). Решение проблемы идентификации динамической системы рассмотрено в подразделе 5.2.

Преимуществом OGY-метода является то, что стабилизация неподвижной точки отображения Пуанкаре и предельного цикла системы достигается малыми управляющими воздействиями в дискретные моменты времени. Однако большим недостатком является то, что неподвижная точка отображения Пуанкаре неустойчива. Поэтому для применимости метода необходимо не только точно знать матрицу  $A$  (что для систем возможно только численно), но также и ее собственные значения и собственные векторы, соответствующие устойчивому

и неустойчивому многообразиям неподвижной точки отображения Пуанкаре. Траекторию при этом необходимо на каждой итерации корректировать в сторону устойчивого многообразия неподвижной точки.

**Метод Пирагаса.** Метод обратной связи с запаздыванием предложен К. Пирагасом для стабилизации  $\tau$ -периодической орбиты нелинейной системы (5.1) с помощью простого закона обратной связи:

$$u(t) = K(x(t) - x(t - \tau)), \quad (5.12)$$

где  $K$  – коэффициент передачи,  $\tau$  – время запаздывания. Если  $\tau$  равно периоду существующего периодического решения  $\bar{x}(t)$  уравнения (5.1) при  $u \equiv 0$ , и решение  $x(t)$  уравнения замкнутой системы (5.10), (5.12) начинается на орбите  $\Gamma = \{\bar{x}(t)\}$ , то оно остается в  $\Gamma$  для всех  $t \geq 0$ .

Закон обратной связи (5.12) используется также для стабилизации периодического возбужденного процесса в системе (5.1) с  $T$ -периодической правой частью. Тогда  $\tau$  следует брать равным  $T$ .

Предложен и расширенный вариант метода Пирагаса, при котором управление имеет вид

$$u(t) = K \sum_{k=0}^M r_k [y(t - k\tau) - y(t - (k+1)\tau)],$$

где  $y(t) = h(x(t)) \in \mathbf{R}^1$  – измеряемый выход;  $r_k$ ,  $k = \overline{1, M}$  – параметры алгоритма.

Аналитическое исследование асимптотических свойств решений замкнутой системы

$$\dot{x} = F(x(t), K(x(t) - x(t - T)))$$

является трудной задачей и до настоящего времени известны лишь численные и экспериментальные результаты, относящиеся к свойствам и области применимости метода Пирагаса. Проблема нахождения достаточных условий, гарантирующих применимость метода, до сих пор остается нерешенной. Большим недостатком метода является чувствительность к выбору времени запаздывания. Так что, если пе-

риод искомого цикла заранее не известен, а именно эта ситуация типична для хаотических систем, то получить требуемую сходимость можно только в исключительных случаях, удачно оценив величину периода каким-либо эвристическим методом.

**Метод Магницкого.** Метод предложен для локализации и стабилизации неустойчивых особых точек и периодических решений хаотических систем. Метод основан на построении координатно-параметрической обратной связи в расширенном пространстве. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (5.13)$$

определенную семейством гладких по совокупности переменных отображений  $F$ . Пусть  $x^*(\mu)$  – неподвижная точка системы (5.13), где  $\mu$  – скалярный параметр. Будем полагать, что существует критическое значение  $\mu^*$  системного параметра такое, что точка  $x^*(\mu)$  является устойчивой неподвижной точкой системы (11.13). При значениях  $\mu \leq \mu^*$  и при  $\mu \geq \mu^*$  точка  $x^*(\mu)$  становится неустойчивой неподвижной точкой системы (11.13), которая в этом случае имеет другие регулярные и хаотические аттракторы. Проблема состоит в локализации и стабилизации неустойчивой неподвижной точки  $x^*(\mu)$  системы (11.13) при значениях  $\mu > \mu^*$  с помощью малых возмущений параметра  $\mu$ .

Рассмотрим  $(n + 1)$ -мерную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \mu) + \varepsilon(q - \mu), \\ \dot{q} &= Q(x, \mu) + \beta(q - \mu), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $Q(x^*(\mu), \mu) = 0$ , а  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$  и  $\beta \in \mathbf{R}^1$  – управляющие параметры. Если точка  $x^*(\mu)$  – неподвижная точка системы (5.13), то точка  $(x^*(\mu), \mu)$  будет неподвижной точкой системы (5.14). Вычислим Якобиан правой части отображения (5.14) в точке  $(x^*(\mu), \mu)$

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} \partial F / \partial x & \varepsilon \\ \partial Q / \partial x & \mu \end{pmatrix} \Big|_{x = x^*(\mu), \mu = \mu}$$

Характеристический полином матрицы  $J(\mu)$  имеет вид

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mu) &= \det[J(\mu) - \lambda E] = \\ &= (-\lambda)^{n+1} + b_1(-\lambda)^n + \dots + b_n(-\lambda) + b_{n+1}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $b_k = \sum_{i=1}^{C_{n+1}^k} J_{ki}(\mu)$ ,  $J_{ki}$  — главный минор порядка  $k$  матрицы  $J(\mu)$ .

При этом  $b_1 = \text{tr}J(\mu)$ ,  $b_{n+1} = \det J(\mu)$ .

Потребуем, чтобы полином (5.15) имел в точке  $\mu^*$  все корни равные некоторому отрицательному значению  $d < 0$ . В этом случае  $D(\lambda, \mu^*) = (d - \lambda)^{n+1}$ , а  $b_k = C_{n+1}^k d^k$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ . Тогда управляющие параметры  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \beta$  должны удовлетворять системе из  $n+1$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{C_{n+1}^k} J_{ki}(\mu^*) = C_{n+1}^k d^k, \quad k = \overline{1, n+1}. \quad (5.16)$$

В частности, управляющий параметр  $\beta$  определяется непосредственно из уравнения  $\text{tr}J(\mu) = (n+1)d$ :

$$\beta = -\text{tr} \left\{ \frac{\partial F(x^*(\mu^*), \mu^*)}{\partial x} \right\} + (n+1)d = -\text{tr}J_0 + (n+1)d.$$

Имеет место следующая теорема.

*Теорема 5.1.* Если определитель системы линейных уравнений (5.16) отличен от нуля, то существует область  $\mu^* \leq \mu \leq \mu_1^*$  такая, что для любого  $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$  действительные части всех собственных значений матрицы  $J(\mu)$  отрицательны, и точка  $(x^*(\mu), \mu)$  является асимптотически устойчивой неподвижной точкой системы (5.14). Следовательно, неподвижная точка  $x^*(\mu)$  динамической системы (5.13) может быть локализована и стабилизирована при значениях

$\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$  с помощью решения системы (5.14) с начальными условиями  $x_0 = x^*(\mu^*)$ ,  $q_0 = \mu$ .

Используя  $\mu_1^*$  в качестве нового критического значения системного параметра и вычисляя новый Якобиан  $J(\mu_1^*)$ , можно скорректировать значения управляющих параметров  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \beta$  в (5.14) и снова локализовать и стабилизировать неподвижную точку  $x^*(\mu)$  системы (5.13). Этот процесс можно продолжить на всем интервале существования неподвижной точки системы (5.13).

Метод Магницкого позволяет вести поиск устойчивых (в отличие от OGY-метода) неподвижных точек или асимптотически орбитально устойчивых (в отличие от метода Пирагаса) периодических траекторий. Кроме того метод не имеет проблем с выбором начального приближения, применим к хаотическим системам в случае отсутствия информации о величине периода и положении искомого неустойчивого цикла в фазовом пространстве.

## 5.2. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ

В ряде случаев, в том числе и в проблеме управления хаосом, необходимо решать задачу восстановления системы дифференциальных уравнений, исходя из заданного множества точек в фазовом пространстве, принадлежащих аттрактору системы. Для решения этой задачи используются как методы синхронизации, так и прямые методы. Методы синхронизации основаны на использовании однонаправленной связи двух хаотических систем. При сильной связи амплитуды колебаний связанных систем идентичны и изменяются одинаково хаотически. Прямые методы основаны на аппроксимации производных, вычисляемых приближенно по заданному множеству точек, некоторыми функциями, чаще всего полиномами.

### 5.2.1. Постановка задачи

Важнейший метод исследования динамических процессов состоит в построении математических моделей изучаемых систем и их анализе. Наличие математической модели исследуемой системы существенно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачи предсказания поведения системы во времени и определения зависимости режимов ее функционирования от параметров.

Решение задачи моделирования теоретически не содержит проблем, если реальная система задана. Однако часто детальные сведения о реальной системе либо отсутствуют вовсе, либо явно недостаточны. Единственная информация о свойствах системы содержится лишь в экспериментальной зависимости одной из координат состояния системы во времени. Такая зависимость  $a(t)$ , измеренная в течение конечного времени  $t_0$ , называется временным рядом (или реализацией) системы, а при дискретизации с шагом  $\Delta t$ :  $a(i\Delta t) = a_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = (t_0 / \Delta t)$ , она также носит название временного ряда. Предположим, что временной ряд (наблюдения) является детерминированным, т. е. представляет собой одномерную проекцию фазовой траектории, порождаемой некоторой динамической системой. Задача реконструкции (идентификации) состоит в восстановлении модельной динамической системы, решение которой с определенной степенью точности воспроизводит одномерный временной ряд  $a(t)$  на заданном интервале времени  $t_0$  и для  $t > t_0$ . Проблема реконструкции динамической системы относится к классу обратных задач, решение которых неоднозначно.

В рамках данного пособия ограничимся рассмотрением проблемы восстановления (реконструкции) динамической системы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений или дискретных отображений по одномерному временному ряду. Предполагается, что временной ряд детерминирован, т. е. порожден некоторой реальной детерминированной динамической системой.

Решение проблемы восстановления динамической системы связано с решением следующих задач. Первая задача обусловлена необходимостью введения каким-либо образом координат состояния системы, так как нам известна зависимость во времени (на конечном интервале) лишь одной из координат реальной системы. Как ввести координаты, и сколько их должно быть?

Предположим, что нам удалось, каким-либо образом решить эту задачу, и нам известна размерность модельной динамической системы. Сразу возникает второй, но не менее важный вопрос: как записать уравнения? Каков вид оператора эволюции?

Н. Пакард показал, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду, если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд, взятый с некоторым запаздыванием. Позже Ф. Такенсом была доказана теорема, утверждающая, что по одномерной реализации динамической системы, обладающей аттрактором  $A$ , принадлежащим гладкому  $d$ -мерному многообразию, методом задержки можно получить  $n$ -мерную реконструкцию  $A_R$  исходного аттрактора как множество векторов  $\vec{x}(t)$  в  $\mathbf{R}^n$  при  $n \geq 2d + 1$ .

Таким образом, для получения динамического описания на основе одномерного временного ряда нужно решить следующие задачи: определить размерность пространства вложения, реконструировать аттрактор в новом модельном фазовом пространстве и записать явный вид модельной системы.

### **5.2.2. Реконструкция аттрактора. Теорема Такенса**

Пусть задана динамическая система  $\varphi^t(x)$  с фазовым пространством  $\mathbf{R}$ . Будем считать, что числа, образующие временной ряд, являются значениями некоторой «наблюдаемой» – скалярной функции состояния динамической системы  $x(t)$ :

$$x_i = h(x(t_i)) = h(\varphi^{t_i}(x_0)).$$



2) каждой траектории динамической системы будет соответствовать ее образ в  $z$  пространстве. Причем для образов будут иметь место те же свойства, что и для исходных траекторий, в частности, через каждую точку  $S^d$  будет проходить одна и только одна  $z$ -траектория;

3) на  $S^d$  можно определить динамическую систему; так как

$$x_i = \Lambda^{-1}(z_i), \quad x_{i+1} = \varphi^\tau(x_i) \text{ то}$$

$$z_{i+1} = \Lambda(x_{i+1}) = \Lambda(\varphi^\tau(\Lambda^{-1}(z_i))) \equiv \Psi(z_i), \quad z_i \in S^d, \quad (5.18)$$

где функция  $\Psi$  отображает  $S^d$  в  $S^d$ , а вне поверхности  $S^d$  отображение  $\Psi$  не определено; если оставить только одну последнюю компоненту соотношения (5.18), получим другой вариант динамической системы в виде отображения с запаздыванием или нелинейной авто-регрессии

$$x_i = F(x_{i-1}, \dots, x_{i-m}),$$

которая может быть использована для прогнозирования временного ряда;

4) таким образом, имеем два отображения

$$x_{i+1} = \varphi^\tau(x_i) \equiv \Phi(x_i), \quad x \in M^d, \quad \Phi : M^d \rightarrow M^d$$

и

$$z_{i+1} = \Psi(z_i), \quad z \in S^d, \quad \Psi : S^d \rightarrow S^d.$$

Их можно рассматривать как отображения, связанные невырожденной и обратной заменой переменных  $z = \Lambda(x)$ , или как различные представления одного и того же отображения. Следовательно, характеристики, инвариантные относительно невырожденной замены переменных, у обеих систем должны совпадать. К ним относятся фрактальные размерности аттрактора, набор обобщенных энтропий и все  $d$  характеристических показателей Ляпунова. Поэтому указанные свойства можно определить по экспериментальным данным, не зная всех переменных динамической системы. Можно попытаться восстановить (аппроксимировать) и саму функцию  $\Psi(z)$ .

Слова о «типичном свойстве» отображения  $\Lambda$  следует понимать в том смысле, что ранг отображения  $\Lambda$  равен  $d$ . Допустим, что требуется найти точку самопересечения поверхности  $S^d$ , т. е. две различные точки  $x_1, x_2 \in M^d$ ,  $x_1 \neq x_2$ , такие что  $\Lambda(x_1) = \Lambda(x_2)$ . Это соотношение можно рассматривать как систему  $m$  нелинейных алгебраических уравнений для определения  $2d$  неизвестных – компонент векторов  $x_1, x_2$ . При  $m > 2d$  число уравнений будет больше числа неизвестных, поэтому в типичном случае точек самопересечения быть не должно.

Теорема Такенса подводит строгую математическую основу под идеи нелинейной авторегрессии и прогнозирования методами нелинейной динамики.

### ***5.2.3. Выбор параметров реконструкции***

Практическая реализация реконструкции аттрактора часто сталкивается с проблемами, возникающими из-за ограниченности длины обрабатываемого ряда и связанными с возможностями хранения информации, скоростью обработки и стационарностью исследуемого объекта. Для простоты будем полагать, что имеется временной ряд из  $N$  чисел, которые являются значениями некоторой наблюдаемой, характеризующей одну и ту же динамическую систему. Тогда реконструированные  $z$ -вектора дадут  $(N - m)$  точек на поверхности  $S^d \in \mathbf{R}^m$ , по которым можно будет судить о динамической системе  $\Psi$  и ее аттракторе. Объем информации, который можно извлечь из этого множества точек зависит от свойств поверхности (насколько она искривлена, закручена и т. п.) и от свойств функции  $\Psi(z)$  (насколько велики ее производные). Так как точек конечное число, то существует некоторое характерное расстояние  $l$  между точкой и ее ближайшим соседом. Меньшие масштабы будут неразрешимы для данного временного ряда. Если на масштабах порядка  $l$  поверхность  $S^d$  сильно искривлена, а функция  $\Psi(z)$  сильно изменяется, то методы

нелинейной динамики будут, скорее всего, бесполезны. Эта же проблема в несколько ином виде встречается в задачах цифровой обработки сигналов (теорема Котельникова). Если временной интервал между отсчетами равен  $\Delta t$ , то частоты больше чем  $1/2\Delta t$  разрешить невозможно. Однако в задачах реконструкции свойства  $S^d$  и  $\Psi(z)$  априори неизвестны, поэтому аналогичных оценок (скажем, кривизна или производная, не превышающие  $\sim l^{-1}$ ) сделать невозможно. Можно только разумно распорядиться несколькими свободными параметрами. Чаще всего это  $\tau$  и  $m$ .

Свойства реконструкции (свойства поверхности  $S^d$  и отображения  $\Psi(z)$ ) зависят от динамической системы  $\varphi$ , наблюдаемой  $h$ , задержки  $\tau$  и размерности векторов  $m$  (иногда ее называют «размерность вложения»). Обычно первые два фактора менять невозможно. Можно изменять  $\tau$  и  $m$ . Поэтому задача оптимального выбора параметров реконструкции формулируется так, чтобы получаемый набор реконструированных векторов был наиболее информативен.

Для оценки информативности реконструкции необходимы критерии ее качества. Исчерпывающих критериев качества на сегодня не существует. Поэтому при практическом использовании не самым худшим оказывается простой подбор  $\tau$  и  $m$ : производится расчет некоторой величины (скажем размерности) для нескольких  $\tau$  и для последовательности  $m$ , пока результат не перестанет зависеть от  $m$ .

Одна из основных идей реконструкции состоит в следующем. Через каждую точку фазового пространства должна проходить единственная траектория реконструированной динамической системы, т. е. реконструкция не должна содержать самопересечений траекторий. Самопересечений в массиве дискретных точек  $z_i$  скорее всего никогда не будет, поэтому ищут так называемых «ложных близких соседей» – пары векторов, которые оказались близкими в реконструкции, но их прообразы находились далеко.

Пусть  $z_i^{(m)}$  и  $z_j^{(m)}$  – два близких соседа в реконструкции размерности  $m$ , а  $z_i^{(m+1)}$  и  $z_j^{(m+1)}$  – соответствующие им точки в реконструкции размерности  $m+1$ . Если мы имеем дело с истинно близкими соседями, то они чаще всего будут близкими в обеих реконструкциях. Ложные близкие соседи в реконструкции  $m$ , как правило, превращаются в отдаленных с ростом  $m$ . Пары для которых  $\|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\|$  мало, а  $\|z_i^{(m+1)} - z_j^{(m+1)}\|$  – нет, и получили название «ложных ближайших соседей».

**Выбор временного интервала.** Для выбора задержки может быть использована идея о том, что если компоненты, образующие вектор, будут независимы друг от друга, то реконструированные вектора будут нести в себе наибольшее количество информации о системе. Простейший способ добиться такой линейной независимости – выбрать  $\tau$ , близким к первому нулю автокорреляционной функции для ряда  $x_i$ .

На качество реконструкции влияет не сама по себе величина  $\tau$ , а временной интервал, захватываемый вектором  $z$  между первым и последним его элементами. Его называют окном реконструкции и обозначают  $\omega = (m-1)\tau$ . Влияние окна реконструкции отличается от влияния размерности  $m$ , но, тем не менее, может характеризоваться в терминах ложных соседей.

Рассмотрим действие искажений при малой длине окна. В данном случае удобно соотнести момент  $t$  с серединой окна реконструкции, а размерность  $m$  считать нечетным числом. Пусть

$$z(t) = \left\{ x\left(t - \frac{\omega}{2}\right), x\left(t - \frac{\omega}{2} + \tau\right), \dots, x\left(t + \frac{\omega}{2} - \tau\right), x\left(t + \frac{\omega}{2}\right) \right\}.$$

Будем считать, что функция  $x(t)$   $m$  раз дифференцируема, а аргумент  $x$  представим в долях половины длины окна  $x\left(t - \alpha \frac{\omega}{2}\right)$ , где  $\alpha$  принимает  $m$  дискретных значений  $\alpha_s$ : от  $\alpha_1 = -1$  до  $\alpha_m = +1$ . Тогда

$$\begin{aligned} x\left(t + \alpha \frac{\omega}{2}\right) &= x(t) + \frac{\alpha\omega}{2} x'(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 x''(t) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^{m-1} x^{(m-1)}(t) + O(\omega^m). \end{aligned}$$

Обозначим через  $e_{k+1}$ ,  $k = \overline{0, (m-1)}$  вектор, компоненты которого представляют собой просто значения  $(\alpha_s)^k$ . Тогда

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} x^{(k)}(t) \left(\frac{\omega}{2}\right)^k e_k + O(\omega^m). \quad (5.19)$$

Далее ортонормируем систему векторов  $e_k$ . Это даст систему векторов  $v_k$ , компонентами которых будут значения дискретных полиномов Лежандра, подобно тому, как ортогонализация полиномов вида  $Q_k(\alpha) = \alpha^k$  дает непрерывные полиномы Лежандра. Для разложения вектора  $z$  по  $v_k$  получится соотношение, аналогичное (5.19)

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k v_k + O(\omega^m),$$

где  $A_k = O(\omega^k)$ . Значения  $A_k$  можно получить приближенно, как  $A_k = \langle z, v_k \rangle$ , если заменить дискретные полиномы непрерывными, а сумму в скалярном произведении – интегралом:

$$A_k \cong \int_{-1}^1 x\left(t + \frac{\alpha\omega}{2}\right) P_k(\alpha) d\alpha.$$

Если воспользоваться соотношением

$$P_k(x) = \frac{\sqrt{k+1/2}}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2)^k,$$

то, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
A_k &\cong (-1)^k \frac{\sqrt{k+1/2}}{2^k k!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^k \int_{-1}^1 x^{(k)}\left(t + \frac{\alpha\omega}{2}\right) (1-\alpha^2)^k d\alpha = \\
&= (-1)^k \frac{\sqrt{k+1/2}}{2^k k!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^k x^{(k)}(t^*) \int_{-1}^1 (1-\alpha^2)^k d\alpha \cong \\
&\cong (-1)^k \frac{\sqrt{k+1/2}\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1+1/2)} \left(\frac{\omega}{4}\right)^k x^{(k)}(t).
\end{aligned}$$

Здесь  $t^*$  – некоторая точка отрезка  $\left[t - \frac{\omega}{2}, t + \frac{\omega}{2}\right]$ , с точностью  $x^{(k)}(t^*) \cong x^{(k)}(t)$ .

С помощью значений  $A_k$  можно примерно оценить «размеры» реконструированного множества в направлении  $v_k$  как среднеквадратичное отклонение

$$\sigma(A_k) = \frac{\sqrt{k+1/2}\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1+1/2)} \left(\frac{\omega}{4}\right)^k \sigma(x^{(k)}(t)).$$

Описанные алгоритмы реконструкции модельных динамических систем по одномерным временным рядам иллюстрируют как возможности современных методов моделирования, так и их недостатки. Техника реконструкции пока еще остается достаточно сложной и требует физической интуиции и экспериментального искусства.

### 5.3. ЗАДАЧА ПРОГНОЗА

Задача прогноза – одна из первых задач анализа временных рядов. О статистическом подходе к ее решению сказано достаточно много. В этом разделе остановимся на подходе, который основан на представлениях нелинейной динамики.

#### 5.3.1. Предсказание временных рядов

Предполагается, что мы имеем дело с реконструкцией некоторой динамической системы по скалярному ряду. Согласно теореме Такенса должно существовать отображение  $\Psi(z)$  такое, что

$$z_{i+1} = \Psi(z_i) \quad (5.20)$$

или

$$x_{i+1} = F(z_i). \quad (5.21)$$

Все динамические методы прогноза основаны на различных методах аппроксимации этих отображений. Методы прогнозирования принято делить на локальные, глобальные и «глобальные с локальными свойствами».

Задачу прогноза можно сформулировать следующим образом. Имеется временной ряд, заданы параметры реконструкции, и для  $N$  векторов  $z_i$  известны значения искомой функции, т. е.  $F_i = F(z_i)$ . Требуется найти значение искомой функции в новой точке  $z$ ,  $\hat{x} = F(z)$ . Априорные сведения о функции  $F$  скудны. Во-первых, если параметры реконструкции выбраны правильно, можно ожидать её непрерывность и дифференцируемость. Во-вторых, она чаще всего определена только на поверхности некоторой размерности  $d_N < m$ , хотя конкретное значение  $d_N$  неизвестно.

### 5.3.2. Локальные методы

При использовании методов этой группы функции  $F$  или  $\Psi$  строятся как множество локальных аппроксимаций в окрестностях отдельных точек, причем «сшивать» друг с другом эти отдельные аппроксимации не требуется.

Для поиска функции  $F(z)$  находим  $k$  ближайших соседей точки  $z$ , которые обозначим  $z_{0i}$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Пусть в окрестности точки  $z$  функцию  $F$  можно аппроксимировать полиномом степени  $n$ , т. е.  $F(z) = P_n(z)$ . Коэффициенты полинома можно найти методом наименьших квадратов, минимизируя функционал

$$\sum_{i=1}^k (P_n(z_{0i}) - F(z_{0i}))^2 = \min.$$

Количество точек временного ряда  $k$  должно быть больше числа искомых коэффициентов  $\sim m^n$ . Поэтому очень редко используются полиномы степени выше двух, обычно только при  $m \leq 3$ .

**Методы нулевого порядка.** В этом случае имеем полином нулевого порядка (константа). Для его построения находят ближайшего соседа  $z_0$  и полагают  $F(z_0) = P_n(z_0)$ , либо используют взвешенную сумму по нескольким ближайшим соседям

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^k q_i F(z_{0i})}{\sum_{i=1}^k q_i}.$$

Выбор весов  $q_i$  - самостоятельная задача. Возможен выбор, например,  $q_i = \exp(-c\|z - z_{0i}\|)$  или  $q_i = \|z - z_{0i}\|^{-1}$  и т. д. При удачном выборе весов метод работает не хуже методов первого порядка, но более устойчиво.

**Методы первого порядка.** Полином первого порядка содержит  $m + 1$  коэффициентов, которые можно представить как скаляр и вектор

$$F(z) = a_0 + \langle a, z \rangle.$$

Значения коэффициентов определяются методом наименьших квадратов. Недостатком метода является его неустойчивость при прогнозе на большое количество шагов вперед. Точность такой аппроксимации составляет  $o(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon = \max_i \|z - z_{0i}\|$ .

**Нелинейные локальные аппроксимации.** Для этих методов порядок точности может быть  $o(\varepsilon^2)$  и выше. Однако их использование связано с дополнительными проблемами. Во-первых, из-за большого количества искомых коэффициентов количество используемых соседей должно быть велико, что заставляет увеличивать окрестность, а поэтому снижается точность. Во-вторых, становится актуальной проблема выбора существенных переменных, число которых обычно

берется меньше  $m$ . В противном случае, если точки  $z_i$  лежат на поверхности размерности  $d_N < m$ , то среди одночленов, входящих в искомый полином, появятся линейно зависимые, что затруднит использование метода наименьших квадратов. В-третьих, возможны проблемы и с устойчивостью таких аппроксимаций.

### 5.3.3. Глобальные методы

К глобальным обычно относят те методы, в которых аппроксимация уравнений динамики осуществляется единой функцией во всей используемой области  $z$ -пространства, т. е. сразу по всему множеству известных пар  $(F_i, z_i)$ . Эти методы в первую очередь используются не для прогноза, а для анализа полученных уравнений движения или в случае необходимости глобальных идентификационных характеристик системы.

В качестве аппроксимирующей функции используются обычно многочлены. Коэффициенты многочлена находятся при минимизации полной ошибки

$$\sum_{i=1}^k (P_n(z_i) - F(z_{0i}))^2 = \min.$$

Методу присущи те же недостатки, что и локальной нелинейной аппроксимации, но устранить их еще труднее. Метод следует рассматривать скорее как статистическую модель.

При обработке временных рядов чаще используются методы, которые можно назвать глобальными аппроксимациями с локальными свойствами. К ним относится метод радиальных базовых функций.

**Радиальные базовые функции.** Для аппроксимации уравнений динамической системы выбирается  $M$  точек-центров  $z_{Ck}$ , которые могут и не совпадать с реконструированным вектором  $z_i$ , и базовая или базисная функция одной переменной  $\psi(r)$ . Отображение  $F$  строится в виде

$$F(z) = \sum_1^M \alpha_k \psi(\|z - z_{Ck}\|).$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  определяются из условия минимизации функционала ошибки

$$\sum_i (f_i - F(z_i))^2 = \sum_i \left( f_i - \sum_{k=1}^M \psi_{ik} \alpha_k \right)^2 = \min,$$

где  $\psi_{ik} = \psi(\|z_i - z_{Ck}\|)$ . В матричной форме это соотношение записывается в виде

$$(\Psi \alpha - f)^2 = \min.$$

Из последнего соотношения следует, что вектор коэффициентов  $\alpha$  является решением системы линейных уравнений

$$\Psi^T \Psi \alpha = \Psi^T f.$$

В ряде работ было показано, что для широкого класса функций  $\psi(r)$  матрица  $\Psi^T \Psi$  невырождена и, следовательно, метод реализуем.

Модификацией метода радиальных функций является метод ядер плотности – также статистическая модель. При этом функция  $\psi(r)$  используется для аппроксимации плотности вероятности  $p(z)$  и условной вероятности.

$$p_C(z|u) = \sum A_i \psi(\|z - z_{i+1}\|) \psi(\|u - z_i\|).$$

В качестве предсказания для следующего значения используется среднее значение по условной вероятности

$$F(z) = \int p_C(z|x) x dx.$$

В заключении следует отметить, что задача оценки параметров динамической системы по временному ряду в общем случае является некорректной. Отметим требования к динамической системе, при выполнении которых задача обработки становится корректной.

Свойства отображения  $\Psi$ . Теорема Такенса требует, чтобы отображение динамической системы было, по крайней мере, дважды не-

прерывно дифференцируемо. Кроме того, предполагается, что производные не просто непрерывны, но и «не слишком велики».

**Особенности геометрической структуры аттрактора динамической системы и неоднородности инвариантной меры.** Сравнительно редко посещаемые участки аттрактора могут вносить достаточно существенный вклад в измеряемые характеристики, чтобы сделать погрешность неприемлемо большой. При использовании алгоритмов нелинейной динамики, особенно оценок размерности, предполагается «однородность» свойств аттрактора, начиная с некоторого масштаба.

Длина выборки и точность измерений предполагается достаточной для применимости методов нелинейной динамики, в частности, реконструкции по Такенсу. Если характеристики при помощи некоторого функционала  $G(\varepsilon, N)$  необходимо рассчитывать на масштабах  $\varepsilon < \varepsilon_f$ , то необходимо, чтобы уровень шума был хотя бы в несколько раз меньше  $\varepsilon_f$ , а аттрактор должен быть заполнен точками с достаточной плотностью, чтобы расстояние до ближайшего соседа также было в несколько раз меньше  $\varepsilon_f$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пилюгин С. Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений / С. Ю. Пилюгин. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1988. - 159 с.
2. *Магницкий Н. А.* Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С.В. Сидоров. - М. : Едиториал УРСС, 2004. - 320 с.
3. *Малинецкий Г. Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. - М. : Эдиториал УРСС, 2000. - 336 с.
4. Теория показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов [и др.] - М. : Наука, 1966. - 576 с.
5. *Синай Я. Г.* Современные проблемы эргодической теории / Я. Г. Синай. - М. : Физматгиз, 1995. - 208 с.
6. *Лоскутов А. Ю.* Введение в синергетику: учебное руководство / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. - М. : Наука, 1990. - 272 с.
7. *Данилов Ю. А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение / Ю. А. Данилов. - М. : Постмаркет, 2001. - 184 с.
8. *Чуличков А. И.* Математические модели нелинейной динамики / А. И. Чуличков. - М. : Физматлит, 2003. - 296 с.
9. *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой / В. С. Анищенко. - Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. - 144 с.
10. *Лоскутов А. Ю.* Хаос и управление динамическими системами / А. Ю. Лоскутов // Нелинейная динамика и управление. Вып. 1 ; под ред. С. И. Емельянова, С. Л. Коровина. - М. : Физматлит, 2001. - С. 163-216.
11. *Андриевский Б. Р.* Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. - 2003. - № 5. - С. 3-45.
12. *Магницкий Н. А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений / Н. А. Магницкий // Доклады РАН. - 1996. - Т. 351. - № 2. - С. 175-177.

Шашихин Владимир Николаевич

# **ХАОС И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

## **Регулярная и хаотическая динамика**

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать .2010. Формат 60×84/16 Печать цифровая  
Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 13,25. Тираж 100. Заказ

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,  
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического  
университета:

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел. (812) 540-40-14

Тел./факс: (812) 927-57-76