

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет**

С. Ф. БУРДАКОВ

УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучаю-
щихся по направлению подготовки «Прикладная механика»**

Санкт-Петербург

**Издательство Политехнического университета
2010**

УДК 681.51

ББК 34.41

Б 91

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» *В. В. Путов*

Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета *А. Н. Тимофеев*

Бурдаков С. Ф. Управление механическими системами при параметрической неопределенности: учебное пособие/ С.Ф. Бурдаков – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 181 с.

В учебном пособии в систематическом виде представлены базовые положения теории управления механическими системами в условиях неопределенности. Рассмотрены вопросы анализа и синтеза грубых и робастных систем, способных функционировать в условиях регулярных и сингулярных возмущений математических моделей объекта управления. Содержательная интерпретация результатов обеспечивается параллельным использованием операторного метода и метода пространства состояний. Основные теоретические положения иллюстрируются примерами.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по магистерской программе «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» направления подготовки «Прикладная механика», изучающих дисциплину «Управление механическими системами при параметрической неопределенности». Формирует у студентов не только навыки решения типовых задач, но и профессиональные компетенции, позволяющие решать сложные практические задачи. Может быть полезно для студентов, обучающихся по другим направлениям подготовки и специальностям техники и технологии в области машиностроения, механики и процессов управления.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Бурдаков С. Ф., 2010

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2010

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ГРУБОСТЬ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	7
1.1. Грубость как сохранение характера устойчивости при малых возмущениях.....	8
1.2. Грубость как сохранение показателей качества	19
1.3. Робастная устойчивость.....	28
2. СИНТЕЗ ГРУБЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕ- СКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ	35
2.1. Синтез регуляторов по желаемому расположению корней харак- теристического полинома замкнутой системы.....	37
2.2. Синтез регуляторов методом компенсации.....	43
2.2.1. Линейные системы.....	43
2.2.2. Нелинейные системы.....	52
2.3. Методы определения желаемого расположения корней характе- ристического полинома замкнутой системы.....	56
2.3.1. Варианты желаемых расположений корней.....	56
2.3.2. Чувствительность систем управления к отклонениям пара- метров от расчетных значений.....	65
3. СИНТЕЗ ГРУБЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННО- СТИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ	80
3.1. Синтез многомерных линейных систем заданной точности ме- тодом LQ-оптимизации.....	82
3.1.1. Постановка задачи.....	82
3.1.2. Частотные свойства LQ-оптимальных систем.....	84
3.1.3. Точность LQ-оптимальных систем	86
3.1.4. Точность LQ-оптимальных систем с наблюдателем.....	88
3.1.5. Применение процедуры H_∞ -оптимизации.....	91
3.2. Метод большого коэффициента усиления.....	94
3.2.1. Постановка задачи.....	94
3.2.2. Устойчивость систем управления с большим коэффициентом усиления.....	97

3.2.3. Грубость систем управления с большим коэффициентом усиления.....	100
3.2.4. Учет амплитудных ограничений на управление.....	103
4. УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОЛЬШОГО КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ.....	105
4.1. Подавление вынужденных колебаний, вызванных произвольным возмущением.....	107
4.1.1. Подавление вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы.....	107
4.1.2. Подавление вынужденных колебаний в кинематическом механизме.....	113
4.2. Управление роботом с упругими шарнирами при неопределенности математической модели.....	120
4.2.1. Постановка задачи.....	120
4.2.2. Метод не прямой компенсации и разделение движений.....	122
4.2.3. Результаты моделирования для задач стабилизации и слежения.....	129
5. ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	133
5.1. Постановка задачи.....	134
5.2. Синтез грубых систем управления на основе процедуры LQ-оптимизации.....	135
5.2.1. LQ-оптимизация с учетом функций чувствительности переменных состояния.....	135
5.2.2. Пример синтеза грубой системы управления для колебательного объекта второго порядка.....	139
5.3. Синтез робастных систем управления с помощью минимаксной оптимизации.....	152
5.3.1. Управление по состоянию.....	152
5.3.2. Управление по выходу.....	159
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	178

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, динамической системой называется совокупность взаимосвязанных объектов любой физической природы, движение которых описывается уравнениями динамики. Законы динамики, открытые Ньютоном применительно к механическим явлениям, приобрели огромную сферу применимости, включающую не только различные области техники и технологий, но и социально-экономические, биологические и другие явления.

В области техники и технологий уже с появлением первых машин, предназначенных для облегчения физического труда человека, возникла проблема *управления* работой таких машин. Основными функциями при этом рассматривались сохранение устойчивости движения и поддержание заданных режимов работы машин. Значительно позже Н. Винером были сформулированы фундаментальные принципы управления, не утратившие своего значения до настоящего времени.

Общая постановка задачи об управлении динамическими системами состоит в необходимости придать движению системы желаемый характер. Факторы, препятствующие этому, с одной стороны связаны с инерционностью самой динамической системы, а с другой стороны – с влиянием внешней среды. Попытки преодоления этих факторов в ряде случаев могут привести к качественному изменению свойств системы, появлению неустойчивости, автоколебаний, уменьшению помехоустойчивости. Явление качественного изменения свойств системы при малых изменениях ее параметров впервые было отмечено А. А. Андроновым. Системы, в которых такое явление невозможно, названы им *грубыми* [2]. Только грубые системы могут использоваться на практике. Поэтому методы синтеза систем управления должны предусматривать обеспечение их грубости.

Нарушение грубости в системах управления происходит, например, при попытке прямой компенсации «плохих» (в смысле располо-

жения нулей и полюсов передаточной функции) динамических свойств объекта управления. Следует также иметь в виду, что объект, имеющий «хорошие» динамические свойства в режиме непрерывного управления, может приобрести «плохие» (в смысле расположения нулей передаточной функции) свойства в режиме дискретного управления. Наличие «плохих» динамических свойств у объекта управления обуславливает существование определенного предела точности управления им, а также ограничивает набор форм его возможных движений. Пренебрежение этим обстоятельством и приводит к нарушению грубости системы.

В современной теории управления помимо термина «грубость», который ориентирован только на малые вариации математической модели, используется термин «робастность» (от англ. robust – крепкий, сильный) [14]. При этом акцент делается на знание количественных оценок возможных вариаций математической модели.

В учебном пособии принята форма изложения с параллельным использованием наиболее употребительных в теории автоматического управления способов описания динамических систем: структурного (на основе аппарата передаточных функций) и пространства состояний. Это обеспечивает возможность всестороннего анализа рассматриваемых проблем, а также разнообразных интерпретаций получаемых решений. Достоинства и ограничения обоих методов иллюстрируются на многочисленных примерах. Некоторые важные результаты и выводы, известные из теории автоматического управления и необходимые для лучшего восприятия изучаемого материала, оформлены в виде теорем, доказательства которых в ряде случаев можно найти в книге А. А. Первозванского [20], которая до сих пор остается настольной книгой для студентов и специалистов в области управления механическими системами.

Постановки задач, рассмотренные в пособии, ориентируют студента на использование программных средств Control System Toolbox, Robust Control Toolbox и др. в рамках системы MATLAB.

1. ГРУБОСТЬ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Впервые понятие и строгое определение грубости динамических систем вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad (1.1)$$

было дано в работе А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина [2]. Для систем (1.1) второго порядка при аналитичности компонент векторной функции $f(x)$ и аналитичности возмущающих функций в правой части (1.1) были получены необходимые и достаточные условия грубости как структурной устойчивости, означающие сохранение топологической структуры решений при малых возмущениях правой части уравнения (1.1). Подробно вопросы структурной устойчивости рассмотрены в работе И. В. Арнольда [3]. Однако нахождение и применение условий структурной устойчивости при решении практических задач связано с определенными трудностями.

В п. 1.1 грубость динамических систем (1.1) рассматривается в смысле сохранения характера устойчивости при малых возмущениях правой части [15]. В более широком смысле речь может идти о сохранении некоторых желаемых свойств управляемых динамических систем при вариациях их математических моделей. Такая трактовка грубости была дана Н.Н. Красовским [17] (см. п. 1.2).

При решении практических задач часто требуется установить характер устойчивости системы управления для заданной области в пространстве параметров, например, многомерного параллелепипеда, ребра которого параллельны осям координат. В этом случае речь идет не об устойчивости одной фиксированной системы при малых вариациях параметров, а об устойчивости семейства систем, так как каждой точке заданной области в пространстве параметров соответствует конкретная система. Задачи такого типа, которые принято называть задачами робастной устойчивости, изучались многими авторами [13, 21, 25].

Для линейных систем в качестве параметров могут выступать коэффициенты характеристического полинома. Параллелепипед в пространстве коэффициентов полинома n -го порядка определяет 2^{n+1} угловых (краевых) полиномов, соответствующих вершинам параллелепипеда. Это условие даже при небольших n приводит к необходимости проверки устойчивости большого числа краевых полиномов. Было бы естественно ожидать, что необходимым и достаточным условием робастной устойчивости является гурвицевость этих краевых полиномов.

Однако оказалось, что необходимым и достаточным условием робастной устойчивости является гурвицевость лишь четырех из 2^{n+1} краевых полиномов, которые теперь принято называть, по имени автора теоремы, полиномами Харитоновна [25].

Работы Харитоновна вызвали большой поток публикаций по робастной устойчивости. Наряду с робастной устойчивостью непрерывных систем и непрерывных систем с запаздыванием рассматривалась задача робастной устойчивости дискретных систем. Оказалось, что для них не существует аналога теоремы Харитоновна об устойчивости четырех краевых полиномов [13]. Значительное число работ, появившихся в последнее время, посвящено частотным методам исследования робастной устойчивости систем управления как непрерывных так и дискретных [21] (см. п. 1.3).

1.1. Грубость как сохранение характера устойчивости при малых возмущениях

Пусть равновесное состояние $x = 0$ невозмущенной системы (1.1) имеет один из возможных характеров устойчивости (асимптотическая устойчивость, неасимптотическая устойчивость, неустойчивость) и нас интересуют условия, при которых равновесное состояние $x = 0$ возмущенной системы будет иметь такой же характер устойчивости при достаточно малых, в некоторой окрестности равновесного со-

стояния, возмущениях определенного класса. В этом случае для систем (1.1) возникает понятие грубости в смысле сохранения характера устойчивости [15].

Следуя [15], условия грубости будем рассматривать для класса нелинейных систем (1.1)

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad (1.2)$$

в правой части которых выделены линейная и нелинейная составляющие.

Представим уравнение (1.2) в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

где a_{ij} – постоянные элементы матрицы A ; $\varphi_i(x)$ – нелинейные скалярные функции такие, что $\varphi_i(0) = 0$, являющиеся компонентами векторной функции $\varphi(x)$ и обеспечивающие единственность решения системы (1.2) в некоторой окрестности равновесного состояния $x = 0$.

Пусть функции $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(x)}{\|x\|} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Так как $\|\varphi(x)\| = \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(x) \right]^{1/2}$, то из условий (1.3) следует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) и (1.4) означают, что каждая функция $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ нелинейна, а ее линейная часть равна нулю. Ибо в случае, когда функция $\varphi_i(x)$ содержит какую-либо линейную составляющую, правая часть соответствующего соотношения (1.3) будет отлична от нуля.

Каждому соотношению (1.3) удовлетворяет довольно широкий класс нелинейных функций $\varphi_i(x)$, включающий в себя как аналитиче-

ские, так и различного типа неаналитические функции, включая разрывные. Очевидно, что аналитическая функция $\varphi_i(x)$, удовлетворяющая соотношению (1.3), может содержать в своих разложениях в степенные ряды лишь члены не ниже второй степени. Примером непрерывных и разрывных функций, удовлетворяющих соотношению (1.3), служат функции, модуль которых в некоторой окрестности точки $x = 0$ ограничен сверху положительно определенной квадратичной формой.

При исследовании грубости возмущение правой части системы (1.2) будем рассматривать в виде суммы линейного $A'x$ и нелинейного $\varphi'(x)$ возмущений. Поэтому возмущенная система имеет следующий вид

$$\dot{x} = (A + A')x + \varphi(x) + \varphi'(x), \quad x \in R^n. \quad (1.5)$$

Постоянные элементы $a'_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ квадратной матрицы A' считаются достаточно малыми. Компоненты $\varphi'_i(x), \varphi'_i(0) = 0, i = \overline{1, n}$ векторной функции $\varphi'(x)$ тоже считаются достаточно малыми и являются функциями, которые удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (1.3), т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'_i(x)}{\|x\|} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6)$$

Заметим, что равновесное состояние возмущенной системы (1.5) $x = 0$ то же, что и у исходной невозмущенной системы (1.2).

Определение 1.1. Нелинейная динамическая система (1.2) является грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия $x = 0$ по отношению к классу возмущений $A'x + \varphi'(x)$, характеризующихся тем, что нелинейное возмущение $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию (1.6), а линейное возмущение $A'x$ имеет достаточно малые элементы матрицы A' , если при любых указанных возмущениях характер устойчивости точки равновесия $x = 0$ возмущенной системы (1.5) остается таким же, как у точки равновесия $x = 0$ невозмущенной системы (1.2).

Имеют место следующие необходимые и достаточные условия грубости системы (1.2) в смысле данного выше определения [15].

Теорема 1.1. Динамическая система (1.2) является по отношению к рассматриваемому классу возмущений $A'x + \varphi'(x)$ грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия $x = 0$ тогда и только тогда, если собственные числа матрицы A либо все имеют отрицательные вещественные части, либо хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть при любом расположении остальных собственных чисел на комплексной плоскости. В первом случае грубой является асимптотически устойчивая система (1.2), во втором случае грубой является неустойчивая система (1.2).

Из теоремы 1.1 следует, что:

– асимптотически устойчивая нелинейная система (1.2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \quad (1.7)$$

асимптотически устойчива, а неустойчивая система (1.2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система (1.7) неустойчива;

– нелинейная система (1.2) является по отношению к рассматриваемому классу возмущений негрубой тогда и только тогда, если среди собственных чисел матрицы A есть чисто мнимые, но при этом нет собственных чисел с положительными вещественными частями.

Таким образом, расположение собственных чисел матрицы A вне мнимой оси является достаточным условием грубости нелинейной системы (1.2).

Следует заметить, что в теоремах первого метода Ляпунова [20], который позволяет судить о характере устойчивости точки равновесия $x = 0$ нелинейной системы (1.1), приведенной к виду

$$\dot{x} = A_0x + \psi(x), \quad x \in R^n,$$

по расположению собственных чисел матрицы $A_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$, функции

$\psi(x)$ являются аналитическими и представляют собой степенные ря-

ды с членами не ниже второго порядка. Они тоже удовлетворяют условию типа (1.3), но принадлежат к более узкому классу, чем функции $\varphi(x)$, рассматриваемые в теореме 1.1. Это означает, что в силу определения 1.1 условия теорем первого метода Ляпунова можно рассматривать не только как редуцированные условия, сводящие исследование нелинейных систем на устойчивость к исследованию линейных систем первого приближения, но и как условия грубости (в смысле сохранения характера устойчивости) линейных систем (1.7) по отношению к классу нелинейных аналитических возмущений $\psi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi_i(x)}{\|x\|} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример 1.1.

Рассмотрим семейство нелинейных систем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 + \varphi_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – любые скалярные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям (1.3).

Равновесным состоянием любой системы семейства (1.8) является точка $x = 0$. Так как линеаризованной системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = x_3,$$

соответствуют корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm j,$$

т.е. один положительный и два чисто мнимых, то согласно теореме 1.1 любая система семейства (1.8) будет грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия $x = 0$ по отношению к рассматриваемым возмущениям.

Пример 1.2. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3^3, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 x_2, \tag{1.9}$$

имеющую точку равновесия $x = 0$. Нелинейные функции x_3^2, x_3^3, x_1x_2 аналитические и степень каждой из них не ниже второй. Поэтому эти функции удовлетворяют условию (1.4).

Линеаризованной системе

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = -x_3,$$

соответствуют корни

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm j,$$

т. е. один отрицательный и два чисто мнимых. При таком расположении корней согласно теореме 1.1 нелинейная система (1.9) является негрубой.

При решении практических задач очень важно конкретизировать возмущения, которые выше предполагаются в том или ином смысле малыми. Для этой цели в ряде случаев эффективным оказывается асимптотический метод (метод малого параметра) [12].

Пусть исходная (невозмущенная) система описывается уравнением (1.1), а влияние возмущений характеризуется малым параметром μ ($\mu > 0$) так, что возмущенная система задается уравнением

$$\dot{x} = f'(x, \mu), \tag{1.10}$$

где $f'(x, 0) = f(x)$.

Возникает вопрос, насколько близки решения $x(t)$ и $x(t, \mu)$ уравнений (1.1) и (1.10) при одних и тех же начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0, \mu) = x_0.$$

Рассмотрим сначала случай *регулярного* вхождения параметра μ в уравнения (1.10). Для этого случая существует теорема Пуанкаре [20].

Теорема 1.2. Если функция $f'(x, \mu)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам, то при достаточно малом μ

$$x(t, \mu) = x(t) + \mu x_1(t) + R(t, \mu), \tag{1.11}$$

где $R(t, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ как величина меньшего порядка, чем μ , равномерно по t , при этом решение (1.11) определено по крайней мере на конечном интервале $[t_0, t_0 + T]$.

Действительно, если функция $f'(x, \mu)$ аналитическая по всем аргументам, то при достаточно малом μ решение системы (1.10) можно представить в виде ряда

$$x(t, \mu) = x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x_k(t), \quad (1.12)$$

равномерно сходящегося на конечном интервале $[t_0, t_0 + T]$.

Подставим (1.11) в уравнение (1.10) и сделаем предельный переход при $\mu \rightarrow 0$. Тогда для функции $x_1(t) = \left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$, называемой

функцией чувствительности решения (1.11) по параметру μ , получим следующее линейное уравнение

$$\dot{x}_1 = A_1(t)x_1 + f_1(t), \quad x_1(t_0) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial f'(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=(t, x_0), \mu=0}, \quad f_1(t) = \left. \frac{\partial f'(x, \mu)}{\partial \mu} \right|_{x=(t, x_0), \mu=0},$$

а $x(t, x_0)$ – решение уравнения (1.1), удовлетворяющее заданному начальному условию x_0 .

Пусть уравнение возмущенного движения линейно

$$\dot{x} = (A + \mu A')x, \quad x(t_0, \mu) = x_0, \quad (1.14)$$

где A и A' – постоянные матрицы.

Согласно теореме 1.1 грубость системы (1.14) (параметрическая устойчивость решения) имеет место при устойчивой матрице A .

Уравнение для функции чувствительности x_1 решения системы (1.14) по параметру μ имеет вид

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + A'x(t, x_0),$$

где $x(t, x_0)$ – решение невозмущенной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.15)$$

Заметим, что начальное условие в (1.14) не зависит от μ , поэтому начальное условие для функции чувствительности $x_1(t)$ имеет вид $x_1(t_0) = 0$.

Параметрическая устойчивость решения при устойчивой матрице A имеет место и для слабо нелинейной системы вида

$$\dot{x} = (A + \mu A')x + \mu \varphi'(x), \quad x(t_0, \mu) = x_0,$$

где $\varphi'(x)$ – нелинейная векторная функция, удовлетворяющая условию Липшица [20].

Соответствующее уравнение для функции чувствительности x_1 будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + A'x(t, x_0) + \varphi'(x(t, x_0)),$$

где $x(t, x_0)$ – решение невозмущенной системы (1.15).

Заметим, что согласно теореме 1.2 близость решения $x(t, \mu) \cong x(t) + \mu x_1(t)$ к решению $x(t)$ невозмущенной системы даже при малых μ гарантирована, вообще говоря, лишь на конечном интервале времени.

Существенным условием применимости теоремы 1.2 является дифференцируемость правых частей уравнения возмущенной системы (1.10) по параметру μ в окрестности $\mu = 0$. Однако в ряде случаев, имеющих важное значение для теории и практики управления, это условие нарушается. Систему (1.10), у которой хотя бы одна из компонент векторной функции $f'(x, \mu)$ не ограничена при $\mu \rightarrow 0$, принято называть *сингулярно* возмущенной [20].

Наибольший практический интерес представляют сингулярно возмущенные системы, представимые в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y(y, z, \tau), \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\mu} f_z(y, z, \tau); \quad (1.16)$$

$$y(\tau = 0) = y_0, \quad z(\tau = 0) = z_0,$$

где вектор состояния x разбит на два подвектора y и z , причем при $\mu \rightarrow 0$ скорость изменения переменных $z(\tau)$ не ограничена. Переменные $z(\tau)$ называются быстрыми. Функции f_y и f_z предполагаются регулярно (в частности, аналитически) зависящими от μ .

В принципе, в уравнениях (1.16) при $\mu > 0$ можно сделать замену независимой переменной, положив $t = \frac{\tau}{\mu}$, и перейти к регулярно возмущенной системе

$$\frac{dy}{dt} = \mu f_y(y, z, \mu t), \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y, z, \mu t),$$

к которой применима теорема 1.2.

Однако приближенное решение, полученное в виде разложения по степеням μ , окажется пригодным лишь на конечном отрезке изменения переменной t , а следовательно на малом (порядка μ) отрезке изменения переменной τ , что недостаточно. Поэтому следует использовать другие подходы.

Вернемся к исходной записи (1.16). Уравнение для быстрых переменных перепишем в виде

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = f_z(y, z, \tau).$$

Полагая $\mu = 0$, запишем

$$f_z(y, z, \tau) = 0. \tag{1.17}$$

В результате получим вырожденную (порождающую для (1.16)) систему

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y(y, z, \tau), \quad f_z(y, z, \tau) = 0, \quad y(\tau = 0) = y_0, \tag{1.18}$$

которая имеет меньший порядок, чем исходная (возмущенная) система (1.16).

С подобной ситуацией часто приходится встречаться на практике, так как пренебрежение в математической модели объекта управления малыми постоянными времени, высокими собственными частото-

тами колебаний и т. п. всегда приводит к понижению порядка модели.

Предполагая, что малость μ обеспечивает быстрое затухание переходных процессов по переменным z , т. е. быстрый переход системы (1.16) в «квазиравновесное состояние» (1.18), выразим с помощью (1.17) z через y и τ

$$z = \varphi(y, \tau) \quad (1.19)$$

и подставим (1.19) в первое уравнение (1.18), тогда для медленной переменной y получим систему уравнений пониженного порядка

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y[y, \varphi(y, \tau), \tau]$$

Условия, при которых подобная процедура дает приемлемое приближение к поведению исходной системы (1.16), определяются теоремой Тихонова – Васильевой [12, 20]. Эти условия достаточно сильные, поэтому в каждом конкретном случае требуются дополнительные исследования с помощью прямого компьютерного моделирования системы (1.16).

Еще одним приложением теории сингулярных возмущений и, в частности, упомянутой выше теоремы Тихонова – Васильевой, являются системы с медленно меняющимися параметрами. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dy}{dt} = \mu f_y(y), \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y, z), \quad (1.20)$$

$$y(t=0) = y_0, \quad z(t=0) = z_0,$$

где μ – малый параметр.

Пусть нас интересует поведение системы (1.20) на большом, но конечном интервале времени $t \in [0, T/\mu]$. Параметр μ входит в уравнения (1.20) регулярно и, в принципе, можно было бы применить процедуру поиска решения в виде разложения по степеням μ (см. теорему 1.2). При этом в нулевом приближении (при $\mu = 0$)

$$y = y_0 = \text{const}, \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y_0, z).$$

Однако это приближение непригодно на большом интервале, так как в исходной системе (1.20) переменные y , изменяющиеся с малой скоростью, пропорциональной μ , за время T/μ могут измениться относительно своих начальных значений y_0 на конечную величину.

Для рассматриваемого случая целесообразно ввести новую переменную $\tau = \mu t$ («медленное время»). Тогда уравнения (1.20) примут вид

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y(y), \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = f_z(y, z), \quad (1.21)$$

$$y(\tau = 0) = y_0, \quad z(\tau = 0) = x_0,$$

являющийся частным случаем (1.16).

Проинтегрировав в «медленном времени» первое из уравнений (1.21), получим $\bar{y}(\tau)$.

Подставим это решение во второе уравнение (1.21)

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = f_z[\bar{y}(\tau), z] \quad (1.22)$$

и перейдем к исходной независимой переменной t . Тогда для $z(t)$ получим уравнение с медленно изменяющимися параметрами

$$\frac{dz}{dt} = f_z[\bar{y}(\mu t), z], \quad z(t = 0) = z_0.$$

Теорема Тихонова – Васильевой позволяет вычислить приближение $\tilde{z}(\tau, \mu)$ к точному решению $z(\tau, \mu)$ уравнения (1.22), которое при выполнении условий теоремы будет отличаться от точного решения не более, чем на малую величину порядка μ на всем интервале времени $\tau \in [0, T]$ или для исходной независимой переменной $t \in [0, T/\mu]$ [12, 20].

1.2. Грубость как сохранение показателей качества

При использовании для синтеза законов управления математической модели объекта возникает естественный вопрос о соответствии свойств модели свойствам описываемого ею объекта. Поскольку любая математическая модель описывает объект лишь приближенно, интерес для практики представляют только те свойства модели, которые сохраняются при вариациях математической модели в некоторых пределах. Только в этом случае можно ожидать у объекта управления проявления свойств, совпадающих со свойствами модели. Варьировать математическую модель необходимо и для учета особенностей реализации полученного закона управления на конкретных физических элементах. Если при вариациях модели некоторое свойство ее движений сохраняется, то такое свойство принято называть грубым по Н.Н. Красовскому [17].

Так как поведение системы управления оценивается различными показателями качества, то грубость системы можно определять через изменение этих показателей при вариациях математической модели.

Следуя [20], рассмотрим однопараметрическую задачу, т.е. любое малое изменение свойств системы сведем к вариациям в ее математическом описании, пропорциональным малому числовому параметру $\mu > 0$.

Определение 1.2. Показатель J называется грубым по параметру μ , если он непрерывно зависит от μ в точке $\mu = 0$, т.е.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J(\mu) = J(0).$$

Если при этом зависимость $J(\mu)$ дифференцируема при $\mu = 0$, то величина

$$K_J = \left. \frac{\Delta dJ}{d\mu} \right|_{\mu=0}$$

называется коэффициентом чувствительности показателя $J(\mu)$.

Если $K_J = 0$, то показатель $J(\mu)$ называется инвариантным (нечувствительным) «в малом» по μ .

Приведем некоторые результаты из математического анализа и теории управления, которые могут быть использованы при решении практических задач.

1. Пусть характеристический полином системы

$$Q(p, \mu) = a_n(\mu)p^n + a_{n-1}(\mu)p^{n-1} + \dots + a_0(\mu)$$

имеет коэффициенты, аналитически зависящие от μ в окрестности $\mu = 0$, т. е. они могут быть разложены в соответствующие ряды Тейлора. Тогда, если имеется:

– простой корень p_i полинома $Q(p, 0)$, то существует корень $p_i(\mu)$ полинома $Q(p, \mu)$, аналитический по μ такой, что $p_i(0) = p_i$ с коэффициентом чувствительности

$$K_i = \left. \frac{\Delta dp_i(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = - \left(\left. \frac{\partial Q(p, \mu)}{\partial p} \right) \right|_{\substack{p=p_i \\ \mu=0}}^{-1} \left. \frac{\partial Q(p, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\substack{p=p_i \\ \mu=0}} ; \quad (1.23)$$

– корень p_i кратности r полинома $Q(p, 0)$, то существует r корней $p_i(\mu)$ полинома $Q(p, \mu)$, вообще говоря, различных, но таких, что $p_i(0) = p_i$. При этом функции $p_i(\mu)$ не аналитичны по μ , но любая из них аналитична по параметру $\mu_1 = |\mu|^{1/m}$, $m \leq r$.

Таким образом, если

$$\deg Q(p, \mu) = \deg Q(p, 0), \quad (1.24)$$

т. е. число корней этих полиномов совпадает, то все корни $p_i(\mu)$ полинома $Q(p, \mu)$ грубы по μ , но коэффициенты чувствительности могут быть определены только для простых корней по формуле (1.23).

Пример 1.3.

Пусть $Q(p, \mu) = p^2 + 2\mu p - 1$. Полином $Q(p, 0)$ имеет два простых корня $p_1 = 1, p_2 = -1$. В соответствии с (1.23) их коэффициенты чувствительности равны

$$K_1 = -(2p + 2\mu)^{-1} 2p \Big|_{\substack{p=1 \\ \mu=0}} = -1, \quad K_2 = -1.$$

Это означает, что

$$p_1(\mu) \cong 1 - \mu, \quad p_2(\mu) \cong -1 - \mu,$$

т.е. при малых μ оба корня смещаются влево.

Пусть $Q(p, \mu) = p^2 + \mu$, тогда полином $Q(p, 0)$ имеет двукратный корень $p_{1,2} = 0$, которому соответствуют два различных корня $Q(p, \mu)$

$$p_1(\mu) = i\sqrt{\mu}, \quad p_2(\mu) = -i\sqrt{\mu},$$

причем оба недифференцируемы по μ при $\mu = 0$, так что коэффициенты чувствительности для них не определены.

2. Пусть коэффициенты характеристического полинома $Q(p, \mu)$ аналитически зависят от параметра μ в окрестности $\mu = 0$. Пусть также полином $Q(p, 0)$ устойчив. Тогда, если в этой окрестности выполнено условие (1.24), то при малых $\mu > 0$ полином $Q(p, \mu)$ также является устойчивым. Рассмотрим степень устойчивости полинома $Q(p, \mu)$

$$\delta(\mu) \stackrel{\Delta}{=} \min_i \{-\operatorname{Re} p_i(\mu)\}.$$

Очевидно, что при выполнении указанных выше условий степень устойчивости является грубым показателем свойств системы. Более того, если существует единственный доминирующий корень p_1 полинома $Q(p, 0)$ такой, что $\delta(0) = -\operatorname{Re} p_1$, то может быть определен коэффициент чувствительности этого показателя

$$K_\delta \stackrel{\Delta}{=} \frac{d\delta(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial Q(p, \mu)}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial Q(p, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\substack{p=p_1 \\ \mu=0}} \right\}.$$

3. Рассмотрим теперь сингулярный случай, когда условие (1.24) не выполнено, т. е. при $\mu = 0$ обращаются в нуль r старших коэффициентов ($0 < r < n$) полинома $Q(p, \mu)$.

Пример 1.4.

Пусть $Q(p, \mu) = \mu p^2 + (\mu + 1)p + 1$, тогда $p_1(\mu) = -\mu^{-1}$, $p_2(\mu) = -1$.

Первый из корней не имеет предела при $\mu \rightarrow 0$.

Дополнительную информацию дает следующее утверждение.

Пусть

$$Q(p, \mu) = \mu A(p) + B(p), \quad (1.25)$$

где

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0, \quad r = n - m > 0.$$

Тогда, при достаточно малых $\mu > 0$, m корней полинома $Q(p, \mu)$ близки к m корням полинома $B(p)$, а остальные r корней имеют асимптотическое представление вида

$$p_i(\mu) = \mu_1^{-1} [\rho_i + O(\mu_1)], \quad (1.26)$$

где $\mu_1 = \mu^{1/r} > 0$, а ρ_i – корни уравнения

$$a_n \rho^r + b_m = 0.$$

Следствием этого утверждения является следующий результат.

Если полином $B(p)$ – устойчив, то гарантировать устойчивость полинома $Q(p, \mu)$ можно только при $r = 1$ и $a_n b_m^{-1} > 0$.

При $r = 2$ в соответствии с представлением (1.26) появляются два корня, близкие к мнимой оси, и требуется дополнительный анализ знака их реальных частей с учетом величин меньшего порядка малости. При $r > 2$ полином $Q(p, \mu)$ всегда неустойчив, так как заведомо имеется хотя бы один «плохой» корень с большой положительной вещественной частью.

В рассмотренном примере полином $Q(p, \mu)$ можно представить в виде

$$Q(p, \mu) = \mu(p^2 + p) + p + 1$$

где $r = n - m = 1$, $a_n b_m^{-1} = 1$.

Таким образом, рассматриваемый полином $Q(p, \mu)$ устойчив при малых μ .

Пример 1.5.

Рассмотрим систему управления с обратной связью, описание которой задается соотношениями (рис. 1.1)

$$y(p) = G(p)u(p), \quad u(p) = -W(p)y(p),$$

где $G(p) = \frac{P_G(p)}{Q_G(p)}$ и $W(p) = \frac{P_W(p)}{Q_W(p)}$ – дробно-рациональные передаточные функции объекта и регулятора.

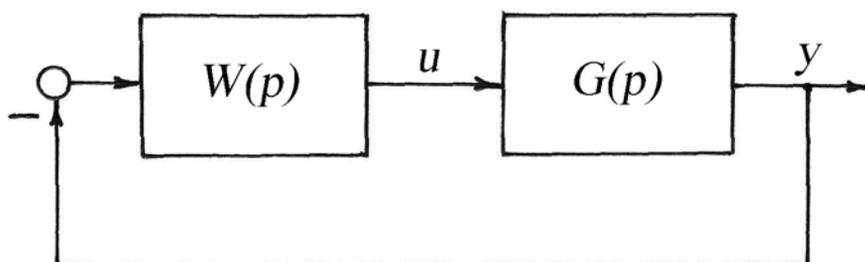


Рис. 1.1. Структурная схема системы управления (пример 1.5)

Примем

$$P_W(p) = \frac{1}{\mu} P'_W(p), \quad P'_W(0) = 1, \quad \mu \ll 1,$$

т. е. будем считать, что сигнал отрицательной обратной связи пропорционален большому коэффициенту усиления μ^{-1} . Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(p, \mu) = Q_W(p)Q_G(p) + \frac{1}{\mu} P'_W(p)P_G(p).$$

При $\mu \neq 0$ его корни совпадают с корнями полинома типа (1.25)

$$\mu Q_W(p)Q_G(p) + P'_W(p)P_G(p).$$

Если

$$\deg\{Q_W(p)Q_G(p)\} - \deg\{P'_W(p)P_G(p)\} = r > 0,$$

то при увеличении коэффициента усиления (уменьшении μ) часть корней характеристического полинома замкнутой системы приблизится к корням полиномов $P'_W(p)$ и $P_G(p)$, т. е. к корням числителя передаточной функции разомкнутой системы

$$R(p) = W(p)G(p) = \frac{P'_W(p)P_G(p)}{\mu Q_W(p)Q_G(p)},$$

а остальные r корней будут стремиться по модулю к бесконечности. При $r = 1$ и $r = 2$ для проверки устойчивости замкнутой системы требуется дополнительный анализ. При $r > 2$ замкнутая система при малых μ заведомо потеряет устойчивость.

4. Пусть характеристический полином представим в виде

$$Q(p, \mu) = \rho(\mu p)Q'(p, \mu),$$

где $\rho(s)$ – полином такой, что $\rho(0) = 1$, а полином $Q'(p, \mu)$ при фиксированном p аналитический по μ и при любых достаточно малых μ

$$\deg Q'(p, \mu) = \deg Q'(p, 0).$$

Тогда при $\mu \rightarrow 0$ часть корней $Q(p, \mu)$ приближается к корням $Q'(p, \mu)$, а остальные – к корням вида $\mu^{-1}s_i$, где s_i – корни полинома $\rho(s)$.

Если $Q'(p, \mu)$ и $\rho(s)$ – устойчивые полиномы, то при достаточно малых $\mu > 0$ полином $Q(p, \mu)$ устойчив.

Пример 1.6.

Вернемся к системе управления из примера 1.5 (см. рис. 1.1). Пусть передаточная функция объекта $G(p)$ является минимально-фазовой, т. е. не имеет «плохих» корней ни в числителе, ни в знаменателе. Передаточную функцию регулятора $W(p)$ будем выбирать из условия

$$H(p) \equiv H^d(p), \tag{1.27}$$

где $H(p) = \frac{G(p)W(p)}{1 + G(p)W(p)}$ – передаточная функция замкнутой системы, а $H^d(p)$ – желаемая передаточная функция.

Потребуем, чтобы замкнутая система была близка по своим свойствам к идеальному низкочастотному фильтру с характерной частотой ω_0 , определяющей полосу пропускания фильтра. Выберем в качестве желаемой передаточную функцию вида

$$H_n^d(p) = \frac{1}{\chi_n\left(\frac{p}{\omega_0}\right)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.28)$$

где $\chi_n\left(\frac{p}{\omega_0}\right)$ – устойчивые полиномы Баттерворта разных порядков, а ω_0 – достаточно большая величина [20].

Передаточная функция регулятора, найденная из условия (1.27), имеет вид

$$W(p) = \frac{H^d(p)}{G(p)[1 - H^d(p)]}.$$

С учетом (1.28) она может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{Q_G(p)}{P_G(p)} \frac{1}{\mu p \rho'_n(\mu p)},$$

где $\mu = \omega_0^{-1}$, $\mu p \rho'_n(\mu p) = \chi_n(\mu p) - 1$ и $\rho'_n(0) = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}$.

Таким образом, при малых μ (больших ω_0) вновь предлагается введение обратной связи с большим коэффициентом усиления. Однако в данном случае при сколь угодно малых μ характеристический полином замкнутой системы

$$Q(p, \mu) = P_G(p) Q_G(p) \chi_n(\mu p)$$

устойчив.

Заметим, что требование минимальной фазовости объекта в рассмотренном примере является существенным. Для неминимально-фазового объекта при выборе желаемой передаточной функции $H^d(p)$ необходимо дополнительно учитывать требования к грубости замкнутой системы (более подробно см. п. 2.2).

5. Рассмотрим дробно-рациональную передаточную функцию разомкнутой системы

$$R(p, \mu) = \frac{P(p, \mu)}{Q(p, \mu)},$$

где $P(p, \mu), Q(p, \mu)$ – полиномы, аналитические (при фиксированном p) по μ вблизи $\mu = 0$, причем $Q(p, 0) \neq 0$, а значит и $R(p, \mu)$ аналитична по μ .

Прямым дифференцированием по параметру μ найдем коэффициент чувствительности

$$\begin{aligned} K_R(p) &= \left. \frac{\Delta \partial R(p, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \left[\frac{\partial P}{\partial \mu} Q - \frac{\partial Q}{\partial \mu} P \right] Q^{-2} \Big|_{\mu=0} = \\ &= R(p, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [\ln R(p, \mu)] \Big|_{\mu=0}. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение. Пусть при всех μ ($0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$) передаточная функция $R(p, \mu)$ разомкнутой системы устойчива. Тогда при любом ω определен коэффициент чувствительности ее частотной характеристики

$$K_R(j\omega) = R(j\omega, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [\ln R(j\omega, \mu)] \Big|_{\mu=0}.$$

Если $H(p, \mu) = \frac{R(p, \mu)}{1 + R(p, \mu)}$ – передаточная функция замкнутой системы устойчива в некоторой окрестности $\mu = 0$, то коэффициент чувствительности ее частотной характеристики

$$K_H(j\omega) = \left. \frac{\Delta \partial H(j\omega, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = -H^2(j\omega, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [R^{-1}(j\omega, \mu)] \Big|_{\mu=0} \quad (1.29)$$

определен при любых ω .

Перепишем выражение (1.29) в виде

$$\left. \frac{\partial H(j\omega, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \frac{1}{[1 + R(j\omega, 0)]^2} \left. \frac{\partial R(j\omega, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}. \quad (1.30)$$

Из выражения (1.30) следует, что на всех частотах, где $|R(j\omega, 0)| \gg 1$, частотная характеристика замкнутой системы слабо зависит от изменения параметров в разомкнутой системе.

6. Пусть преобразование Лапласа $e(p, \mu) = L\{e(t, \mu)\}$ – дробно-рациональная функция p , коэффициенты числителя и знаменателя которой аналитически зависят от параметра μ . Кроме того $e(p, \mu)$ устойчива и имеет степень числителя меньше степени знаменателя при всех μ из малой окрестности $\mu = 0$. Тогда интегральный показатель качества, представимый (в соответствии с теоремой Парсеваля [7]) в виде

$$J(\mu) = \int_0^{\infty} e^2(t, \mu) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e(p, \mu) e(-p, \mu) dp,$$

является грубым по μ и существует его коэффициент чувствительности

$$K_J = \frac{\Delta}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\partial}{\partial \mu} [e(p, \mu) e(-p, \mu)] dp \Big|_{\mu=0}.$$

В заключение заметим, что установление свойства грубости показателя $J(\mu)$ или даже обнаружение того, что равен нулю коэффициент чувствительности K_J этого показателя еще не достаточно для того, чтобы говорить о малости его изменений при изменениях параметра μ на конечную величину. Например, если

$$J(\mu) = J(0) + \mu^2$$

то такой показатель груб, его коэффициент чувствительности равен нулю, однако с ростом μ показатель $J(\mu)$ быстро растет. Поэтому, формальное исследование чувствительности в окрестности $\mu = 0$ не может заменить конкретного анализа влияния конечных изменений свойств системы, который может быть проведен только путем прямой проверки условий устойчивости и вычисления соответствующих изменений показателей качества с помощью компьютерного моделирования. Вместе с тем, анализ чувствительности необходим, поскольку позволяет отбросить заведомо непригодные варианты.

1.3. Робастная устойчивость

Робастность существенно расширяет понятия грубости и параметрической нечувствительности систем, которые рассматриваются лишь при малых вариациях параметров (см. п. п. 1.1, 1.2). Теория робастной устойчивости используется при синтезе систем управления интервальными объектами, соответствующими некоторому множеству объектов, неопределенность параметров которых ограничена интервалами их возможных значений [13, 21]. Она позволяет синтезировать не только робастно устойчивые, но и робастно модальные системы управления интервальными объектами с фиксированными управляющими устройствами, т. е. такие системы, для которых корни семейства характеристических полиномов принадлежат заданным областям, лежащим в левой части комплексной плоскости для непрерывных систем или внутри единичного круга для дискретных систем.

Несмотря на большие достижения теории робастной устойчивости, существует и целый ряд нерешенных задач.

Уместно напомнить, что абсолютно устойчивые нелинейные системы, введенные в рассмотрение в 50-х годах прошлого века А.И. Лурье [19], по существу были первыми робастными системами для класса нелинейных характеристик, принадлежащих заданному сектору. В настоящее время при создании робастных абсолютно устойчивых нелинейных систем дополнительно учитывается неопределенность линейной части [21].

Приведем некоторые результаты теории робастной устойчивости.

1. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n. \quad (1.31)$$

Составим для нее характеристический полином

$$Q(p) = \det[A - pE] = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n, \quad (1.32)$$

где E – единичная матрица $n \times n$.

Будем предполагать, что из-за неопределенности параметров системы (1.31) заданы лишь пределы изменения коэффициентов полинома (1.32)

$$\underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 0, \dots, n, \quad (1.33)$$

где $\underline{a}_k, \bar{a}_k$ – нижняя и верхняя границы изменения коэффициентов.

Таким образом, приходим к следующей простейшей постановке задачи о робастной устойчивости. Дано семейство полиномов (1.32), (1.33). Требуется найти условия, при которых все полиномы этого семейства гурвицевы.

Полное решение этой задачи дано В.Л. Харитоновым в 1978 г. [25].

Теорема 1.3. Для робастной устойчивости семейства полиномов (1.32), (1.33) необходима и достаточна гурвицевость четырех полиномов

$$\begin{aligned} Q_1 &: \underline{a}_0 \underline{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4 \underline{a}_5 \dots, \\ Q_2 &: \underline{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4 \bar{a}_5 \dots, \\ Q_3 &: \bar{a}_0 \bar{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5 \dots, \\ Q_4 &: \bar{a}_0 \underline{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \underline{a}_5 \dots \end{aligned} \quad (1.34)$$

Очевидно, что для $n = 2$ от коэффициентов требуется лишь, чтобы они были одного знака. Для $n = 3, 4, 5$ количество краевых полиномов, подлежащих проверке, равно соответственно 1, 2 и 3.

Для комплексных многочленов Харитоновым была предложена другая теорема [21], в которой проверке подлежат восемь угловых многочленов.

Дискретных аналогов теоремы Харитонова пока не получено. В дискретном случае речь идет о системах, задаваемых матричным разностным уравнением

$$x_{k+1} = Fx_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x_k \in R^n. \quad (1.35)$$

Устойчивость системы (1.35) гарантируется, если

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.36)$$

где z_i – корни характеристического полинома $P(z) = \det[F - zE] =$

$$= b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n.$$

Полиномы $P(z)$ с корнями, удовлетворяющими условиям (1.36), обычно называют шуровскими.

Задачи о робастной устойчивости дискретных систем (1.35) формулируются так же, как и для непрерывных систем (1.31), но с заменой гурвицевых полиномов на шуровские. Таким образом, семейство полиномов в дискретном случае робастно устойчиво, если все полиномы этого семейства шуровские.

Рассмотрим контрпример, показывающий отсутствие «аналога» теоремы 1.3 для дискретного случая.

Пример 1.7.

Рассмотрим семейство характеристических полиномов

$$P(z) = z^4 + b_3 z^3 + 3/2 z^2 - 1/3,$$

в котором коэффициент b_3 может изменяться в интервале $[-17/8, 17/8]$. Видно, что оба угловых полинома при $b_3 = \pm 17/8$ устойчивы, т. е. имеют корни внутри единичного круга. В то же время при $b_3 = 0$ полином не устойчив.

Было показано, что степень полинома равная четырем – это минимальная степень, для которой дискретный вариант теоремы 1.3 не верен. Кроме того, для полиномов второй и третьей степени с единичными старшими коэффициентами оказался справедлив вариант «слабой» теоремы Харитоновой, согласно которой проверять на устойчивость надо не четыре полинома, а 2^{n+1} угловых полиномов.

Для дискретных систем при $n \geq 4$ самый сильный результат харитоновского типа – это реберная теорема [13]. Однако число ребер параллелепипеда n -го порядка равно $(n+1)2^n$ и проверка того, что всем ребрам соответствуют шуровские полиномы, очень трудоемка.

Заметим, что в теоремах Харитоновой предполагается, что коэффициенты изменяются независимо. Это существенное ограничение, так как при изменении физических параметров коэффициенты характеристического уравнения обычно зависят друг от друга.

Активная работа в данной области исследований ведется сравнительно недавно. Тем не менее, в обширной литературе по этому вопросу можно найти как доказательства теорем, упомянутых выше, так и детальное обсуждение других методов проверки робастной устойчивости, в том числе и не харитоновских. Несмотря на большие достижения в области робастной устойчивости, алгебраический (харитоновский) подход, сводящийся к проверке гурвицевости краевых и реберных полиномов, в ряде случаев наталкивается на вычислительные трудности. Эти трудности можно преодолеть на основе частотного подхода, который позволяет широко использовать простые графо-аналитические интерпретации.

2. Рассмотрим в рамках частотного подхода более общую задачу. Пусть вещественные коэффициенты характеристического полинома (1.32) принадлежат некоторому множеству A в пространстве коэффициентов R^{n+1}

$$a \in A \subset R^{n+1}, \quad a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \quad (1.37)$$

(в случае (1.33) таким множеством A был параллелепипед). Будем говорить о робастной устойчивости семейства (1.32), (1.37), если все полиномы $Q(p)$ гурвицевы.

Относительно множества A будем предполагать, что оно односвязно, а знаки старших коэффициентов постоянны, например, $a_n > 0$. Справедлив следующий результат («принцип исключения нуля») [21].

Теорема 1.4. Пусть для некоторого набора коэффициентов $a^0 \in A$ полином $Q^0(p) = a_0^0 + a_1^0 p + \dots + a_n^0 p^n$ (номинальный полином) гурвицев. Семейство (1.32), (1.37) робастно устойчиво тогда и только тогда, когда множество $Q(\omega) = \{Q(j\omega), a \in A\}$ на комплексной плоскости не содержит нуля для всех $0 \leq \omega < \infty$.

Смысл этого условия состоит в том, что потеря устойчивости полинома $Q^0(p)$ при изменении коэффициентов может произойти лишь тогда, когда в семействе (1.32), (1.37) найдется полином с чисто мни-

мыми корнями $\pm j\omega^*$. В силу непрерывной зависимости корней полинома степени n от его коэффициентов и связности множества A наличие чисто мнимых корней означает, что $0 \in Q(\omega)$. Проиллюстрировать сказанное можно с помощью годографа Михайлова [20].

Для конструктивного использования принципа исключения нуля нужно построить множество годографов Михайлова и указать способ проверки условия $0 \in Q(\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$.

Вернемся к семейству (1.32), (1.33), сделав границы изменения коэффициентов линейно зависящими от общего параметра γ , а именно рассмотрим семейство полиномов вида

$$Q(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n, \quad |a_k - a_k^0| \leq \gamma \alpha_k, \quad k = 0, \dots, n, \quad (1.38)$$

где a_k^0 – коэффициенты номинального полинома $Q^0(p)$; $\alpha_k > 0$ – заданные масштабы возмущений коэффициентов; $\gamma > 0$ – размах возмущений (при $\gamma = 0$ семейство состоит из одного номинального полинома $Q^0(p)$, увеличение γ соответствует росту возможных возмущений). Справедлив следующий результат.

Теорема 1.5. Для робастной устойчивости семейства (1.38) необходимо и достаточно, чтобы годограф

$$Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

$$X(\omega) = \frac{a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots}, \quad Y(\omega) = \frac{a_1^0 - a_3^0 \omega^2 + a_5^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_1 + \alpha_3 \omega^2 + \alpha_5 \omega^4 + \dots} \quad (1.39)$$

при изменении ω от 0 до ∞ :

- а) проходил в положительном направлении (против часовой стрелки) через n квадрантов;
- б) не пересекал γ -квadrата $\{| \operatorname{Re} Z | \leq \gamma, | \operatorname{Im} Z | \leq \gamma\}$;
- в) координаты начальной и конечной точек $Z(0), Z(\infty)$ лежали вне γ -квadrата.

Поясним приведенный результат. Условие а) гарантирует, что номинальный полином $Q^0(p)$ устойчив. Это следует из классическо-

го критерия Михайлова [20], в соответствии с которым годограф $\tilde{Z}(\omega) = \tilde{X}(\omega) + j\tilde{Y}(\omega)$, где $\tilde{X}(\omega) = a_0^0 - a_2^0\omega^2 + a_4^0\omega^4 - \dots$, $\tilde{Y}(\omega) = \omega(a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 - \dots)$ должен проходить в положительном направлении через n квадрантов, а знаки $X(\omega)$ и $\tilde{X}(\omega)$, равно как $Y(\omega)$ и $\tilde{Y}(\omega)$ совпадают. Условие б) эквивалентно принципу исключения нуля. Наконец, из условия в) следует, что $a_n^0 - \gamma\alpha_n > 0$, $a_0^0 - \gamma\alpha_0 > 0$, т. е. при всех возможных изменениях параметров степень характеристического полинома и знак свободного члена не изменяются.

Заметим, что критерий (1.39) можно рассматривать как обобщенный критерий Михайлова. Однако даже в невозмущенном случае $\gamma = 0$ годограф $Z(\omega)$ не совпадает с годографом Михайлова $\tilde{Z}(\omega)$ и в некотором отношении даже более удобен, так как лежит в ограниченной части комплексной плоскости в отличие от годографа Михайлова, который уходит в бесконечность. Действительно, из (1.39) видно, что $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ определяются дробно-рациональными функциями с одинаковыми степенями числителей и знаменателей.

Критерий (1.39) позволяет не только проверить робастную устойчивость при фиксированном γ , но и найти γ_{\max} , т. е. максимальный размах возмущений параметров, при которых сохраняется устойчивость семейства полиномов (1.38). В случае выполнения условия в) γ_{\max} определяется квадратом, вписанным в годограф $Z(\omega)$. Отметим, что критерий Харитонова (1.34) не дает γ_{\max} , а его графическая реализация требует проверки по критерию Михайлова четырех годографов, а не одного, как в случае критерия (1.39).

Основные положения частотного подхода для дискретных систем те же, что и для непрерывных. Принцип исключения нуля приобретает следующую формулировку [21]. Пусть семейство полиномов имеет вид

$$P(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n, \quad b \in B \subset R^{n+1}, \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_n), \quad (1.40)$$

где допустимое множество B – связное.

Теорема 1.6. Робастная устойчивость семейства (1.40) имеет место тогда и только тогда, когда номинальный полином $P^0(z)$ из этого семейства шуровский и множество $P(\omega) = \{P(e^{j\omega}), b \in B\}$ на комплексной плоскости не содержит нуля для всех $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Подобным образом можно модифицировать и другие теоремы о робастной устойчивости непрерывных и дискретных систем.

3. Выше рассматривались наиболее распространенные задачи о робастной устойчивости, связанные с нахождением корней характеристических полиномов в левой полуплоскости или внутри единичного круга (для дискретных систем). Однако возможна и более общая задача о робастной D -устойчивости (робастной модальности).

Пусть заданы семейство полиномов и область D комплексной плоскости. Требуется проверить, лежат ли все корни семейства полиномов в области D .

Зададим границу области D в параметрической форме $d(\omega)$, где ω – вещественный параметр.

Принцип исключения нуля в этом случае принимает следующую форму.

Семейство полиномов $\{Q(p)\}$ робастно модально, если полином $Q^0(p)$ из этого семейства имеет все корни в области D , а множество $\{Q(d(\omega))\}$ не содержит нуля для всех ω .

Если, например, D это левая полуплоскость, то $d(\omega) = j\omega$, $-\infty < \omega < \infty$ и справедлива теорема 1.4.

Пусть D это левая вещественная полуось, т. е. нас интересуют полиномы, у которых корни вещественные и отрицательные. В этом случае говорят о робастной апериодичности. Известен следующий результат харитоновского типа [21].

Теорема 1.7. Для робастной апериодичности семейства (1.32), (1.33) необходимо и достаточно, чтобы два полинома

$$Q_1 : \underline{a}_0 \bar{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \dots,$$

$$Q_2 : \bar{a}_0 \underline{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \dots$$

были апериодическими.

Частотный критерий робастной апериодичности для семейства (1.38) формулируется следующим образом [21].

Теорема 1.8. Семейство (1.38) является робастно апериодическим тогда и только тогда, когда годограф

$$Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

$$X(\omega) = \frac{a_0^0 - a_1^0 \omega^2 + a_2^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_0 + \alpha_1 \omega^2 + \alpha_2 \omega^4 + \dots}, \quad Y(\omega) = \frac{a_1^0 - 2a_2^0 \omega^2 + 3a_3^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_1 + 2\alpha_2 \omega^2 + 3\alpha_3 \omega^4 + \dots}$$

при изменении ω от 0 до ∞ проходит в положительном направлении через n квадрантов, не пересекает отрезка $\gamma[-Z_1, Z_1]$, $Z_1 = -1 + j$ и $a_0^0 > \gamma\alpha_0$, $a_n^0 > \gamma\alpha_n$.

Пусть D это полуплоскость $\operatorname{Re} p < \xi$, где $\xi < 0$. Если в этом случае для всех корней p_k рассматриваемого семейства полиномов $\operatorname{Re} p_k < \xi$, то говорят о робастной степени устойчивости семейства. Ссылки на результаты о робастной модальности для этой, а также для других областей можно найти в [21].

Аналогичный подход возможен и в дискретном случае. Очевиден и смысл робастной степени устойчивости дискретных систем. Здесь D это внутренность круга $|z| < \rho$, где $0 < \rho < 1$.

В [21] можно найти также ссылки на результаты по робастному D -разбиению, робастной абсолютной устойчивости, по робастности систем с запаздыванием, по робастности замкнутых систем и др.

2. СИНТЕЗ ГРУБЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе под синтезом понимается выбор при заданном объекте структуры и коэффициентов закона управления (регулятора),

обеспечивающего для замкнутой системы некоторые желаемые свойства. Важнейшим из этих свойств является устойчивость замкнутой системы, так как неустойчивые системы за редким исключением на практике не применяются. Второй задачей, ее часто называют задачей модального управления, является обеспечение желаемого расположения корней характеристического полинома замкнутой системы, от которого зависят показатели качества переходных процессов. К желаемым свойствам относят также астатизм, фильтрующее свойство по отношению к внешним возмущениям, ограничения на переменные состояния и управляющие воздействия и т. д.

Как правило, желаемые свойства устанавливаются путем компромисса между требованиями к замкнутой системе, приведенными в техническом задании на проектирование. Синтез регулятора при этом может осуществляться разными методами, большинство из которых стали уже традиционными для теории и практики управления. Тем не менее, известны случаи. Когда традиционные методики не работают и требуют дальнейшего развития и уточнения. В частности, это относится к случаям, когда передаточная функция объекта управления имеет близкие корни в числителе и знаменателе, когда объект является неустойчивым или неминимальнофазовым, когда в реальном объекте имеет место скрытая (не учтенная в математической модели) динамика и т. п.

Имеются и другие примеры. Так традиционные методики синтеза, исходя из требований к скорости затухания переходных процессов, малому перерегулированию и т. п., рекомендуют приближать корни характеристического полинома замкнутой системы к стандартным расположениям, например, к расположению Баттерворта, т. е. к левым вершинам правильного $2n$ -угольника [7, 20]. Однако, при этом не уточняется, какое отступление от стандартного расположения следует делать при тех или иных ограничениях на переменные состояния и управляющие воздействия. Традиционные методики синтеза рекомендуют так же сближать корни числителя и знаменателя передаточ-

ной функции замкнутой системы, но не уточняют, какая именно близость корней требуется при тех или иных возмущающих воздействиях.

В отличие от методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов, рассмотренных в следующей главе, методы синтеза регуляторов, о которых речь пойдет ниже, являются инженерными. В силу неоднозначности решений задачи синтеза они позволяют обеспечить приемлемый (с точки зрения проектировщика) компромисс между различными критериями. Несомненным преимуществом инженерных методов синтеза является возможность всестороннего учета грубости полученной системы управления как при регулярных, так и при сингулярных возмущениях математической модели объекта управления.

2.1. Синтез регуляторов по желаемому расположению корней характеристического полинома замкнутой системы

Пусть объект управления описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$Q_G(s)y(t) = P_G(s)u(t) + P'_G(s)\varphi(t), \quad (2.1)$$

где $Q_G(s)$, $P_G(s)$, $P'_G(s)$ – полиномы от оператора дифференцирования

$s = \frac{\Delta}{dt} \frac{d}{dt}$ порядков n, m, m' соответственно ($n \geq m, n \geq m'$); $y(t)$ – управляемая переменная (выход); $u(t)$ – управляющее воздействие (управление); $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие (возмущение).

Задача управления состоит в формировании по доступной информации об объекте такого ограниченного управления $u(t)$, при котором выход объекта $y(t)$ приближается к заданной функции времени $y^*(t)$, учитывающей в общем случае требования к показателям качества переходных процессов и способности замкнутой системы к подавлению возмущений.

Будем считать, что измерению доступна управляемая переменная $y(t)$. Рассмотрим замкнутую систему управления, структурная схема которой изображена на рис. 2.1, где $G(p)$ – передаточная функция объекта по управляющему воздействию $u(t)$, $W(p)$ – передаточная функция регулятора по ошибке $e(t) = y^*(t) - y(t)$.

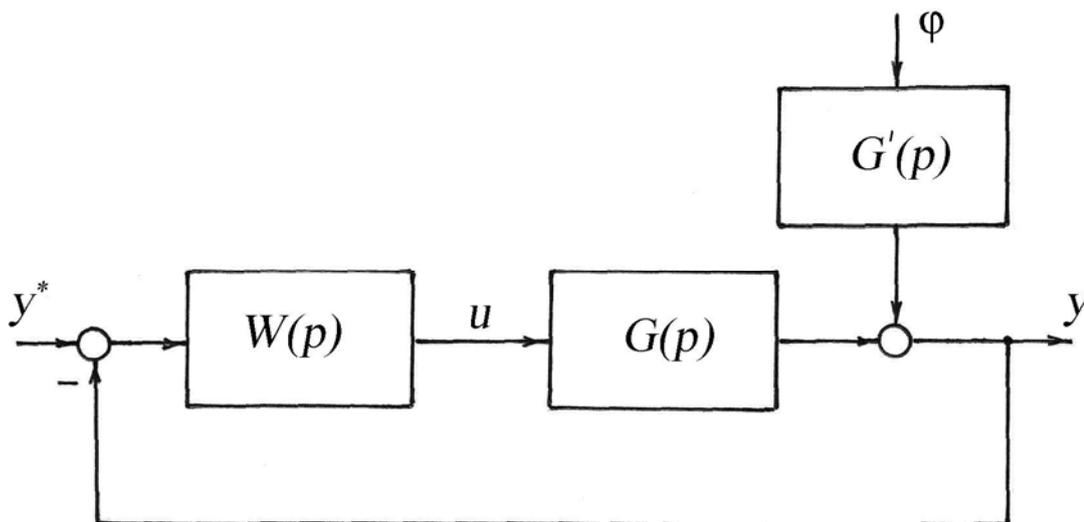


Рис. 2.1. Структурная схема системы управления

В соответствии с уравнением (2.1) передаточная функция $G(p)$ представляет собой отношение двух заданных полиномов

$$G(p) = \frac{P_G(p)}{Q_G(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.2)$$

Передаточную функцию $W(p)$ будем искать в виде отношения двух пока неизвестных полиномов

$$W(p) = \frac{P_W(p)}{Q_W(p)} = \frac{d_0 p^l + d_1 p^{l-1} + \dots + d_l}{p^k + c_1 p^{k-1} + \dots + c_k}, \quad (2.3)$$

где $l \leq k$.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы от задания $y^*(t)$ до выхода $y(t)$

$$H(p) = \frac{W(p)G(p)}{1+W(p)G(p)} = \frac{P_W(p)P_G(p)}{Q_W(p)Q_G(p) + P_W(p)P_G(p)}. \quad (2.4)$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(p) = Q_W(p)Q_G(p) + P_W(p)P_G(p). \quad (2.5)$$

Порядки и коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции регулятора (2.3) будем определять из следующего условия

$$Q(p) \equiv Q^d(p), \quad (2.6)$$

где $Q^d(p)$ – характеристический полином с желаемым расположением корней.

Порядок полинома (2.5) $\deg Q(p) = n + k$. Неизвестных коэффициентов в нем $k + l + 1$ (см. передаточную функцию (2.3)). Для их однозначного определения в соответствии с (2.6) должно выполняться условие

$$n + k = k + l + 1,$$

из которого следует, что

$$l = n - 1.$$

Условие $l \leq k$ физической реализуемости регулятора (2.3) позволяет установить, что

$$k \geq n - 1. \quad (2.7)$$

Таким образом, для физически реализуемого регулятора (2.3) минимального порядка получим

$$k = l = n - 1, \quad (2.8)$$

при этом порядок характеристического полинома замкнутой системы (2.5) будет равен $2n - 1$. Иными словами, задав желаемое расположение $(2n - 1)$ -го корня характеристического полинома $Q^d(p)$, можно определить все коэффициенты передаточной функции регулятора $W(p)$ (см. выражение (2.3)).

Обратим внимание на некоторые моменты, присущие данному методу.

1. Желаемое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы полностью определяет характер переходных процессов лишь по отношению к ненулевым начальным условиям. В общем случае на характере переходных процессов сказывается вид задания $y^*(t)$ и числитель передаточной функции замкнутой системы (2.4), а также возмущение $\varphi(t)$ и числитель передаточной функции замкнутой системы по возмущению $\varphi(t)$

$$H'(p) = \frac{G'(p)}{1 + W(p)G(p)} = \frac{Q_W(p)P'_G(p)}{Q_W(p)Q_G(p) + P_W(p)P_G(p)}, \quad (2.9)$$

где $G'(p) = \frac{P'_G(p)}{Q_G(p)}$ – передаточная функция объекта по возмущению.

В результате дифференциальное уравнение замкнутой системы (см. рис. 2.1) при выполнении условия (2.6) примет вид

$$Q^d(s)y(t) = P_W(s)P_G(s)y^*(t) + Q_W(p)P'_G(s)\varphi(t).$$

Если необходимо учесть дополнительные требования к замкнутой системе по отношению к заданию $y^*(t)$ и (или) по отношению к возмущению $\varphi(t)$, то следует повысить порядок регулятора (см. условие (2.7)) и с помощью дополнительных коэффициентов соответствующим образом повлиять на числители передаточных функций (2.4) и (2.9) [2].

2. Условие астатизма замкнутой системы

$$H(0) = 1$$

автоматически выполняется только при наличии нулевого корня в характеристическом полиноме $Q_G(p)$ объекта. В противном случае в закон управления необходимо включить интегральную составляющую, т. е. предусмотреть нулевой корень в характеристическом полиноме $Q_W(p)$ регулятора. Это приведет к повышению минимального порядка регулятора (см. соотношение (2.8)) на единицу и замкнутая система будет иметь порядок $2n$.

3. Известно [20], что вырождение передаточной функции объекта, т. е. появление общих корней в числителе и знаменателе выражения (2.2) свидетельствует о потере полной управляемости или полной наблюдаемости объекта. Для практики наличие общих корней является исключительным случаем, однако близкие корни в числителе и знаменателе выражения (2.1) вполне возможны [8]. В этом случае речь идет о «плохой» управляемости или о «плохой» наблюдаемости объекта по соответствующему корню, и рассмотренный выше метод, как впрочем и любые другие методы, наталкивается на определенные ограничения.

Пример 2.1.

Рассмотрим объект управления типа (2.1) второго порядка

$$(s^2 - 1)y(t) = (s + b)u(t) + \varphi(t).$$

Объект неустойчивый, так как характеристический полином $Q_G(p) = p^2 - 1$ имеет корни $p_{1,2} = \pm 1$, один из которых положительный.

Передаточная функция объекта по управлению u

$$G(p) = \frac{p + b}{p^2 - 1} \quad (2.10)$$

имеет второй порядок ($n = 2$). Поэтому в соответствии с соотношением (2.8) передаточная функция физического реализуемого регулятора минимального порядка имеет следующий вид

$$W(p) = \frac{d_0 p + d_1}{p + c_1}. \quad (2.11)$$

При этом замкнутая система будет иметь порядок $2n - 1 = 3$.

Потребуем, чтобы характеристический полином замкнутой системы имел трехкратный корень $p_{1,2,3} = -2$, т.е.

$$Q^d(p) = (p + 2)^3 = p^3 + 6p^2 + 12p + 8. \quad (2.12)$$

Тогда из условия (2.6) получим

$$d_0 = \frac{13b - 14}{b^2 - 1}, \quad d_1 = \frac{14b - 13}{b^2 - 1}, \quad c_1 = \frac{6b^2 - 13b + 8}{b^2 - 1}. \quad (2.13)$$

Из найденного решения видно, что при $b = \pm 1$, т. е. в тех случаях, когда передаточная функция объекта (2.10) имеет общие корни в числителе и знаменателе, регулятор вида (2.11) не существует. Более того, при $b = 1$, т. е. при отсутствии управляемости по положительному корню, ни один регулятор типа (2.3) не обеспечит стабилизацию замкнутой системы.

При всех других значениях параметра b регулятор (2.11) существует, но значения коэффициентов (2.13) становятся очень большими при приближении значения параметра b к ± 1 , т. е. при близких корнях в числителе и знаменателе передаточной функции объекта (2.10). При учете ограничения на управление u (см. рис. 2.1), такой регулятор может оказаться не пригодным.

Усиливается также влияние возмущения $\varphi(t)$ на управляемую переменную $y(t)$, так как в дифференциальном уравнении замкнутой системы

$$(s + 2)^3 y(t) = (s + b)(d_0 s + d_1) y^*(t) + (s + c_1) \varphi(t)$$

появляется большой коэффициент c_1 в правой части перед возмущением $\varphi(t)$.

Кроме того, с ростом коэффициентов регулятора повышается чувствительность замкнутой системы к изменению параметров объекта относительно расчетных значений (см. п. 2.3.2). Это выражается в том, что даже небольшие изменения параметров могут привести к резкому изменению характера переходных процессов по отношению к желаемому, заданному характеристическим полиномом (2.12). Следует также заметить, что сингулярные (структурные) возмущения, обусловленные неучтенной динамикой объекта, при больших коэффициентах регулятора оказывают, как правило, дестабилизирующее влияние на процессы в замкнутой системе, иными словами, замкнутая система становится негрубой.

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 2.2.

Вернемся к объекту из примера 2.1. Пусть реальная передаточная функция объекта

$$\tilde{G}(p) = \frac{p + b}{(\tau p + 1)(p^2 - 1)}$$

имеет третий порядок. В ограниченном частотном диапазоне при малой постоянной времени τ ($\tau\omega \ll 1$) передаточная функция $\tilde{G}(p)$ практически совпадает с расчетной передаточной функцией (2.10). Используя для реального объекта $\tilde{G}(p)$ регулятор (2.11) с коэффициентами (2.13), найденными по расчетной передаточной функции (2.10), получим для замкнутой системы характеристический полином

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(p) &= (\tau p + 1)(p^2 - 1)(p + c_1) + (p + b)(d_0 p + d_1) = \\ &= \tau p^4 + (1 + \tau c_1)p^3 + (6 - \tau)p^2 + (12 - \tau c_1)p + 8,\end{aligned}$$

отличающийся от желаемого характеристического полинома (2.12).

Анализ устойчивости полинома $\tilde{Q}(p)$ показывает, что примерно при $\tau c_1 \gtrsim 4,6$ он перестает быть гурвицевым, т. е. при большом коэффициенте c_1 потеря устойчивости может произойти даже при весьма малой постоянной времени τ .

2.2. Синтез регуляторов методом компенсации

2.2.1. Линейные системы

Формально метод компенсации весьма прост. Рассматривается замкнутая система, структурная схема которой приведена на рис. 2.1. В соответствии с требованиями технического задания определяется вид желаемой передаточной функции замкнутой системы $H^d(p)$, т. е. в отличие от метода, рассмотренного в п. 2.1, определяется не только ее знаменатель (характеристический полином $Q^d(p)$), но и числитель $P^d(p)$.

Передаточная функция регулятора находится из условия

$$H(p) \equiv H^d(p), \quad \text{где } H(p) = \frac{W(p)G(p)}{1 + W(p)G(p)}. \quad (2.14)$$

Решение имеет вид

$$W(p) = \frac{H^d(p)}{G(p)[1 - H^d(p)]}. \quad (2.15)$$

Как и прежде, передаточная функция объекта $G(p)$ считается заданной.

Из выражения (2.15) видно, что регулятор включает обратную передаточную функцию объекта, т.е. формально в прямой цепи происходит компенсация динамики объекта (см. рис. 2.1).

Подобный результат получается и в случае, когда в соответствии с требованиями технического задания определяется вид желаемой передаточной функции разомкнутой системы $K^d(p)$. В этом случае передаточная функция регулятора находится из условия

$$K(p) \equiv K^d(p), \quad \text{где } K(p) = W(p)G(p).$$

Решение имеет вид

$$W(p) = \frac{K^d(p)}{G(p)}, \quad (2.16)$$

где регулятор (2.16) тоже включает обратную передаточную функцию объекта.

Для этого случая имеется очень удобная реализация метода с использованием логарифмических амплитудных характеристик (ЛАХ) [7]. В соответствии с ней по хорошо разработанной методике строится желаемая ЛАХ разомкнутой системы $L^d(\omega) = 20 \lg |K^d(j\omega)|$, которая затем по формуле (2.16) пересчитывается в передаточную функцию регулятора.

Метод компенсации имеет существенное ограничение. Оно состоит в том, что компенсация с помощью регулятора $W(p)$ «плохих» корней (с положительной вещественной частью) числителя и знаме-

нателя передаточной функции объекта $G(p)$ не допустима, так как при этом замкнутая система становится негрубой.

Проиллюстрируем это положение следующим примером.

Пример 2.3.

Рассмотрим объект первого порядка

$$\dot{y} + ay = bu + \varphi, \quad b > 0. \quad (2.17)$$

При $a > 0$ объект устойчивый, при $a < 0$ – неустойчивый, т. е. имеет положительный корень в знаменателе передаточной функции

$$G(p) = \frac{b}{p + a}. \quad (2.18)$$

В соответствии с формулой (2.15) физически реализуемый регулятор минимального порядка для объекта (2.18) получается при $H^d(p)$ первого порядка. Потребуем дополнительно для замкнутой системы выполнения условия астатизма $H^d(0) = 1$. Тогда желаемая передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$H^d(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (2.19)$$

По формуле (2.15) найдем

$$W(p) = \frac{\alpha(p + a)}{bp}. \quad (2.20)$$

Структурная схема замкнутой системы приведена на рис. 2.2.

Видно, что в прямой цепи происходит полная компенсация динамики объекта. При этом передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$K(p) = W(p)G(p) = \frac{\alpha}{p},$$

а передаточная функция замкнутой системы

$$H(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \quad (2.21)$$

соответствует тому выражению (2.19), которое было заказано в качестве желаемого. Казалось бы задача решена, однако в правой части

уравнения объекта (2.17) помимо управления $u(t)$ присутствует возмущение $\varphi(t)$, которое также вносит свой вклад в процессы в замкнутой системе.

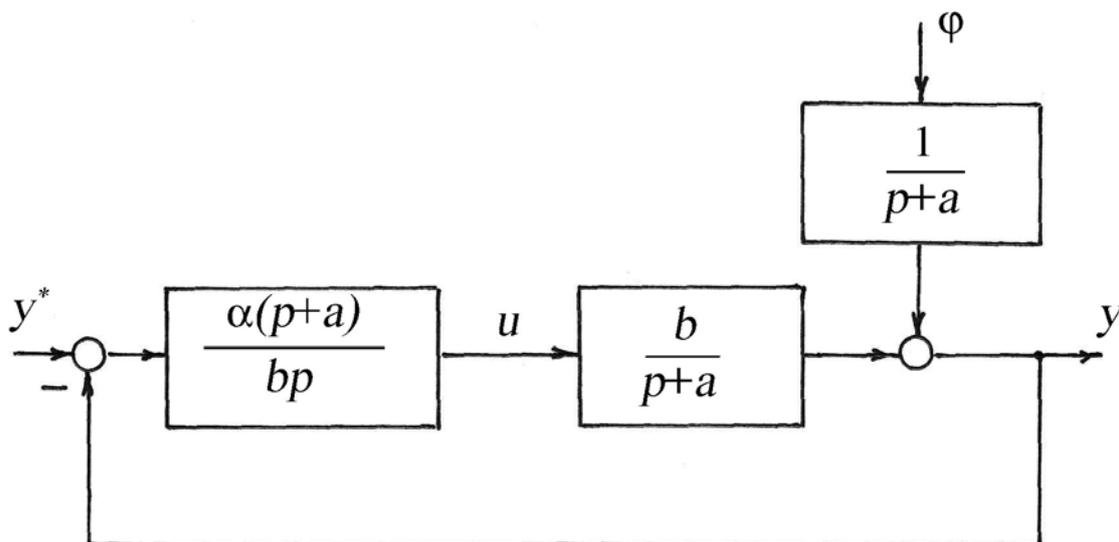


Рис. 2.2. Структурная схема системы управления (пример 2.3)

Проанализируем влияние возмущения $\varphi(t)$. Для этого запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы, подставив в уравнение (2.17) закон управления

$$u(p) = W(p)[y^*(p) - y(p)],$$

где $W(p)$ определяется выражением (2.20).

В результате получим

$$(s + a)(s + \alpha)y(t) = \alpha(s + a)y^*(t) + s\varphi(t). \quad (2.22)$$

Видно, что передаточная функция замкнутой системы по возмущению $\varphi(t)$ определяется выражением

$$H'(p) = \frac{p}{(p + a)(p + \alpha)},$$

которое показывает, что при неустойчивом объекте ($a < 0$) любое сколь угодно малое возмущение $\varphi(t)$ окажет на замкнутую систему дестабилизирующее влияние. При устойчивом объекте ($a > 0$) этого не произойдет. Заметим, что в том и в другом случае передаточная

функция замкнутой системы по заданию $y^*(t)$ формально одна и та же (см. выражение (2.21)). Однако, из дифференциального уравнения (2.22) видно, что передаточная функция (2.21) является вырожденной, так как происходит сокращение ее числителя и знаменателя на множитель $(p + a)$.

Покажем, что даже при отсутствии возмущения $\varphi(t)$ вырожденность передаточной функции замкнутой системы $H(p)$ при неустойчивом объекте ($a < 0$) приводит к негрубости, т. е. к неработоспособности замкнутой системы, полученной методом динамической компенсации.

Пусть передаточная функция регулятора имеет вид (2.20), где a представляет собой расчетное значение параметра объекта. Реальное же значение того же параметра $\tilde{a} = a + \delta a$, где δa – сколь угодно малая вариация, т. е. реальная передаточная функция объекта имеет вид

$$\tilde{G}(p) = \frac{b}{p + \tilde{a}}.$$

В этом случае вместо (2.22) при $\varphi(t) = 0$ получим следующее дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$[s^2 + (\alpha + \tilde{a})s + \alpha a]y(t) = \alpha(s + a)y^*(t)$$

и соответствующую ему передаточную функцию

$$\tilde{H}(p) = \frac{\alpha(p + a)}{p^2 + (\alpha + \tilde{a})p + \alpha a}.$$

Очевидно, что при $a < 0$ характеристический полином замкнутой системы

$$\tilde{Q}(p) = p^2 + (\alpha + \tilde{a})p + \alpha a \tag{2.23}$$

при любых $\alpha > 0$ имеет положительный корень, что свидетельствует о неустойчивости замкнутой системы.

Вариации параметров объекта имеют место всегда, поэтому при анализе устойчивости замкнутой системы, построенной методом компенсации, речь должна идти не только о желаемом полиноме

$$Q^d(p) = p + \alpha,$$

а о реальном полиноме (2.23), который при малых δa приводится к виду

$$\tilde{Q}(p) \cong (p + a)(p + \alpha). \quad (2.24)$$

Таким образом, скомпенсированный полюс объекта $p = -a$ (см. рис. 2.2) практически без изменения проявляется в динамике замкнутой системы (см. выражение (2.24)). Поэтому то при $a < 0$, т. е. при неустойчивом объекте, замкнутая система оказывается неустойчивой.

При $a > 0$, т. е. при устойчивом объекте, компенсация полюса $p = -a$ допустима, однако она приводит к тому, что скорость затухания переходных процессов в замкнутой системе от ненулевых начальных условий не может быть больше, чем у экспоненты e^{-at} , т. е. не больше, чем в объекте (2.18).

Обратим внимание на еще один факт, который должен настораживать проектировщика системы управления.

Запишем передаточную функцию регулятора (2.20) в эквивалентном виде

$$W(p) = K_P + K_I \frac{1}{p}, \quad (2.25)$$

где $K_P = \frac{\alpha}{b}$, $K_I = \frac{\alpha a}{b}$ – коэффициенты эквивалентного PI-регулятора.

Из выражения (2.25) видно, что при неустойчивом объекте ($a < 0$) коэффициент K_I становится отрицательным. Это соответствует положительной обратной связи по интегралу от ошибки (см. рис. 2.1), что не характерно для следящих систем.

Таким образом, при использовании метода компенсации для неминимальнофазового объекта, т. е. объекта, передаточная функция которого имеет положительные корни в числителе и (или) знаменателе, при задании $H^d(p)$ необходимо дополнительно учитывать *условие грубости* замкнутой системы.

Получим это условие следующим образом. Пусть передаточная функция регулятора найдена из условия (2.14) в виде (2.15), где $G(p)$ – расчетная передаточная функция объекта. Предположим, что реальный объект имеет передаточную функцию

$$\tilde{G}(p) = G(p) + \delta G(p),$$

отличающуюся от расчетной на малую вариацию $\delta G(p)$. Найдем вариацию передаточной функции замкнутой системы $\delta H(p)$, обусловленную вариацией $\delta G(p)$

$$\begin{aligned} \delta H(p) &= \frac{[1 + W(p)G(p)]W(p)\delta G(p) - W^2(p)G(p)\delta G(p)}{[1 + W(p)G(p)]^2} = \\ &= \frac{W(p)\delta G(p)}{[1 + W(p)G(p)]^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Подставив в выражение (2.26) найденную ранее передаточную функцию регулятора (2.15), получим

$$\delta H(p) = H^d(p)[1 - H^d(p)] \frac{\delta G(p)}{G(p)}. \quad (2.27)$$

Представим расчетную передаточную функцию объекта в виде

$$G(p) = \frac{P_G(p)}{Q_G(p)}. \quad (2.28)$$

Отклонения могут произойти как в числителе, так и в знаменателе передаточной функции (2.28), поэтому

$$\delta G(p) = \frac{\delta P_G(p)}{Q_G(p)} - \frac{P_G(p)\delta Q_G(p)}{Q_G^2(p)}. \quad (2.29)$$

Подставив выражение (2.29) в формулу (2.27), получим

$$\delta H(p) = H^d(p)[1 - H^d(p)] \left[\frac{\delta P_G(p)}{P_G(p)} - \frac{\delta Q_G(p)}{Q_G(p)} \right]. \quad (2.30)$$

Применяя к вариации $\delta H(p)$ обратное преобразование Лапласа, получим вариацию весовой функции

$$\delta h(t) = L^{-1} \{ \delta H(p) \}.$$

Очевидно, что малые изменения в объекте $\delta G(p)$ не будут приводить к неограниченному росту вариации $\delta H(p)$ при условии

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta h(t) = 0,$$

для выполнения которого вариация $\delta H(p)$ не должна иметь корней с положительными вещественными частями в знаменателе.

Анализ выражения (2.30) показывает, что такие корни в $\delta H(p)$ могут появиться только при наличии корней с положительными вещественными частями в полиномах $P_G(p)$ и (или) $Q_G(p)$. Чтобы этого избежать желаемую передаточную функцию замкнутой системы $H^d(p)$ следует назначать так, чтобы ее числитель содержал «плохие» корни полинома $P_G(p)$, а числитель выражения $1 - H^d(p)$ содержал «плохие» корни полинома $Q_G(p)$. В этом случае при использовании регулятора (2.15) не произойдет компенсация плохих корней числителя и знаменателя передаточной функции объекта $G(p)$.

Пример 2.4.

Рассмотрим объект из примера 2.3. Пусть $a < 0$, т. е. объект неустойчивый (напомним, что неустойчивые объекты относятся к классу неминимальнофазовых систем). Чтобы в рассматриваемом случае применить метод компенсации, т. е. воспользоваться формулой (2.15), зададим $H^d(p)$ с учетом условия грубости, т. е. так, чтобы

$$1 - H^d(p) = \frac{(p + a)p}{\alpha_0 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2}. \quad (2.31)$$

Множитель $(p + a)$ в числителе выражения (2.31) соответствует условию грубости замкнутой системы, множитель p – условию астатизма $H^d(0) = 1$. Порядок знаменателя выражения (2.31) должен быть равен порядку числителя. Значение $\alpha_0 = 1$ соответствует условию физической реализуемости регулятора (2.15). Два других коэффициента $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ задаются в соответствии с желаемым расположением корней характеристического полинома замкнутой системы

$$Q^d(p) = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2. \quad (2.32)$$

Таким образом, из выражения (2.31) окончательно получим

$$H^d(p) = \frac{(\alpha_1 - a)p + \alpha_2}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2}$$

и далее по формуле (2.15) найдем передаточную функцию регулятора

$$W(p) = \frac{(\alpha_1 - a)p + \alpha_2}{bp}. \quad (2.33)$$

Структурная схема замкнутой системы приведена на рис. 2.3. Видно, что в отличие от структурной схемы, приведенной на рис. 2.2, здесь не происходит компенсация положительного корня $p = -a$ ($a < 0$) передаточной функции объекта.

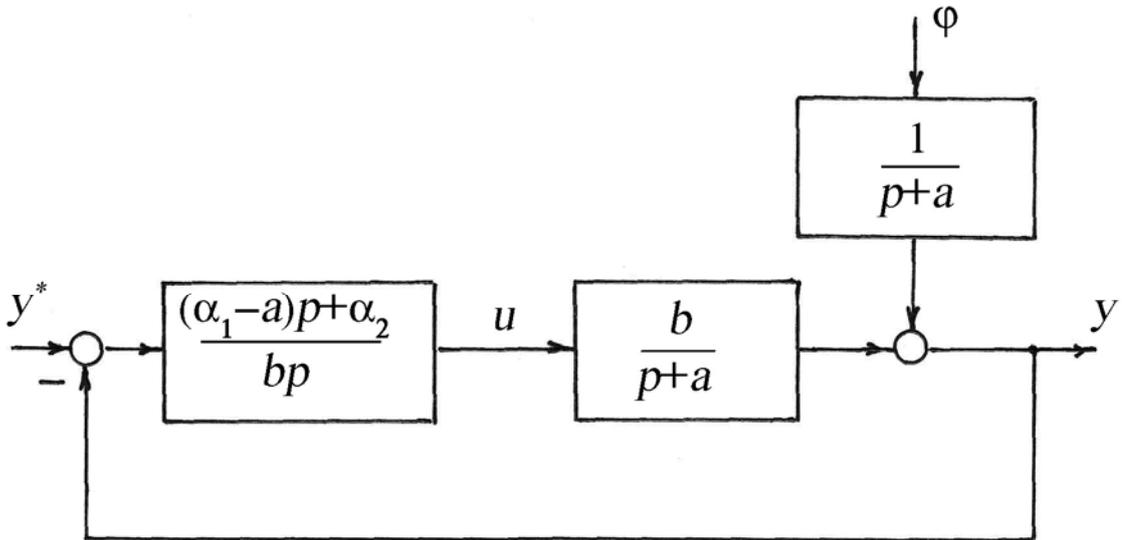


Рис. 2.3. Структурная схема системы управления (пример 2.4)

Запишем для рассматриваемого примера дифференциальное уравнение замкнутой системы с учетом возмущения $\varphi(t)$

$$(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)y(t) = [(\alpha_1 - a)s + \alpha_2]y^*(t) + s\varphi(t).$$

Видно, что вырождения передаточной функции замкнутой системы не происходит. Любое ограниченное возмущение $\varphi(t)$ не приводит к неограниченному росту переменной $y(t)$. При вариации параметра a в передаточной функции $G(p)$ замкнутая система сохраняет

устойчивость, так как при малых δa корни характеристического полинома замкнутой системы

$$\tilde{Q}(p) = p^2 + (\alpha_1 + \delta a)p + \alpha_2$$

лишь незначительно смещаются относительно желаемого расположения (см. выражение (2.32)).

Заметим также, что найденную передаточную (2.33) грубого регулятора можно представить в эквивалентном виде

$$W(p) = K_P + K_I \frac{1}{p},$$

где оба коэффициента $K_P = \frac{\alpha_1 - a}{b}$, $K_I = \frac{\alpha_2}{b}$ оказываются положительными.

2.2.2. Нелинейные системы

Для линейных систем метод компенсации в полной мере отражает суть задачи управления, а именно «заставить» управляемый объект двигаться некоторым заданным и обычно достаточно простым, стандартизованным образом. Любые отклонения от требуемого поведения играют роль возмущений и рассмотренная выше теория дает возможность выяснить, насколько они существенны.

Для нелинейных систем метод компенсации применим не всегда, однако существует целый ряд важных для практики случаев, когда его использование вполне уместно. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + B[f(y) + u] + \mu f_1(x),$$

$$y = Cx,$$

где пара матриц A и B полностью управляемая, а μ – малый параметр.

При $\mu = 0$ имеем систему, которая стабилизируется с помощью закона управления компенсационного типа

$$u = -f(y) - Kx,$$

если матрица коэффициентов обратных связей K выбрана так, чтобы матрица $A_1 = A - BK$ была гурвицевой.

Отличие μ от нуля можно интерпретировать как наличие малых нелинейных факторов, не учтенных при синтезе закона управления. Поскольку возмущенная система подчиняется уравнению

$$\dot{x} = A_1 x + \mu f_1(x)$$

с регулярно входящим малым параметром μ , то можно воспользоваться теоремой 1.2 (см. п. 1.1) и получить разложение (1.11), из которого следует

$$x(t, \mu) \cong x(t) + \mu x_1(t),$$

где $x_1(t)$ – решение уравнения чувствительности

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + f_1(x(t)),$$

которое необходимо рассматривать совместно с уравнением невозмущенного движения

$$\dot{x} = A_1 x.$$

Очевидно, что при устойчивой матрице A_1 в асимптотике $x(t) \rightarrow 0$ и $x_1(t) \rightarrow 0$, а следовательно, малые регулярные возмущения в описании объекта не смогут существенно исказить поведение замкнутой системы.

Рассмотрим возможность применения метода компенсации при сингулярных возмущениях, в частности при учете инерционности датчиков обратных связей.

Пусть формирование обратной связи осуществляется на основе инерционных измерителей, формирующих сигналы z , связанные с вектором состояния x соотношением

$$\tau \dot{z} = H(z - x),$$

где H – гурвицева матрица, а τ – параметр, характеризующий малость постоянных времени измерителей.

В результате закон управления примет вид

$$u = -f(y_1) - Kz, \quad y_1 = Cz,$$

а поведение замкнутой системы при $f_1(x) = 0$ будет описываться сингулярно возмущенными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B[f(y) - f(y_1) - Kz],$$

$$\tau \dot{z} = H(z - x),$$

$$y = Cx, \quad y_1 = Cz.$$

Прямое применение к этим уравнениям результатов работы [12] показывает, что при достаточно малых $\tau > 0$ асимптотическая устойчивость решений обеспечена при гурвицевости матриц A и H .

2. Пусть уравнение нелинейного объекта управления имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u).$$

Рассмотрим случай, когда может быть найдено решение уравнения

$$f(x, u) = v$$

в виде $u = \varphi(x, v)$.

Если теперь вектор v выбрать в виде линейной обратной связи по состоянию

$$v = -Kx$$

стабилизирующей линейную систему

$$\dot{x} = v,$$

то управление

$$u = \varphi(x, -Kx)$$

будет стабилизировать исходную нелинейную систему.

Анализ грубости замкнутой системы при неточной компенсации осуществляется так же как в предыдущем случае.

3. Рассмотрим задачу управления движением многозвенного робота-манипулятора по программной траектории. Уравнение движения робота с n степенями подвижности как системы твердых тел имеет вид

$$D(q, \theta) + b(q, \dot{q}, \theta) + g(q, \theta) = u,$$

где $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат; $u \in R^n$ – вектор управляющих воздействий; $D(q, \theta)$ – матрица инерции звеньев и роторов

двигателей; $b(q, \dot{q}, \theta)$ – вектор центробежных и кориолисовых сил (моментов сил) инерции; $g(q, \theta)$ – вектор сил тяжести; θ – вектор физических параметров.

Цель управления заключается в воспроизведении роботом с помощью ограниченного управления $u(q, \dot{q})$, сформированного по сигналам датчиков обратных связей, измеряющих текущее положение $q(t)$ и скорость $\dot{q}(t)$, программной траектории $q^d(t)$, $\dot{q}^d(t)$ с требуемой точностью

$$\|q(t) - q^d(t)\| < \delta_1, \quad \|\dot{q}(t) - \dot{q}^d(t)\| < \delta_2$$

и желаемым качеством переходных процессов в замкнутой системе, заданным уравнением

$$\ddot{e} + \alpha \dot{e} + \beta e = 0,$$

где $e(t) = q(t) - q^d(t)$ – вектор ошибок; α и β – положительно определенные диагональные матрицы.

В предположении достаточной гладкости программной траектории (ограниченной второй производной $\ddot{q}^d(t)$) в соответствии с методом компенсации можно сформировать реализуемое управление вида

$$u(q, \dot{q}) = g(q, \hat{\theta}) + b(q, \dot{q}, \hat{\theta}) + D(q, \hat{\theta})[\ddot{q}^d - \alpha(\dot{q} - \dot{q}^d) - \beta(q - q^d)],$$

где $\hat{\theta}$ – номинальный (расчетный) вектор параметров.

Поставляя управление $u(q, \dot{q})$ в уравнение движения робота после преобразований получим уравнение возмущенного движения замкнутой системы в виде

$$\ddot{e} + \alpha \dot{e} + \beta e = D(q, \hat{\theta})\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})\Delta\zeta,$$

где $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ – $n \times r$ – функциональная матрица, не зависящая от параметров; $\Delta\zeta = \hat{\zeta} - \zeta$ – вариация $r \times 1$ вектора обобщенных параметров ζ [9].

Видно, что уравнение невозмущенного движения замкнутой системы (при $\Delta\zeta = 0$) полностью соответствует цели управления и после затухания переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными

ми условиями e_0, \dot{e}_0 , и при отсутствии внешних воздействий достигается предельная точность воспроизведения программной траектории $e(t) = 0, \dot{e}(t) = 0$.

Очевидно, что в уравнении возмущенного движения замкнутой системы (при $\Delta\zeta \neq 0$) малые регулярные возмущения, обусловленные не точным знанием параметров объекта управления не приведут к существенному изменению характера движения по сравнению с невозмущенным движением.

Грубость замкнутой системы сохраняется и при учете инерционности датчиков обратных связей. Однако дополнительный учет упругой податливости элементов робота, например, кинематических передач, связывающих двигатели со звеньями, при том же наборе датчиков обратных связей может привести к отрицательному результату в отношении грубости замкнутой системы. Поэтому для практики актуальным остается многократно проверенное правило [20]: если необходимо улучшить динамические свойства замкнутой системы, то требуется уточнять модель динамики объекта во все более широком частотном диапазоне или, что то же самое, учитывать все более малые постоянные времени. При этом также требуется выбрать адекватный метод синтеза закона управления.

2.3. Методы определения желаемого расположения корней характеристического полинома замкнутой системы

2.3.1. Варианты желаемых расположений корней

Решению задачи выбора желаемого расположения на комплексной плоскости корней характеристического полинома замкнутой системы посвящено большое число работ [7, 14, 20]. Предложены так называемые стандартные расположения и даны соответствующие рекомендации по их применению. Так, например, биномиальное стандартное расположение строится на условии обеспечения равенства всех корней характеристического полинома, причем n -кратный ко-

речь должен быть действительным и отрицательным со значением модуля ω_0 , определяемым требованиями к быстродействию замкнутой системы. Характеристический полином при этом обращается в бином Ньютона

$$Q^d(p) = (p + \omega_0)^n, \quad (2.34)$$

раскрывая который при конкретном значении n можно найти все коэффициенты.

В качестве стандартного часто используют расположение корней, предложенное Баттервортом, которое уже упоминалось выше (см. п. 1.2). Это расположение характерно тем, что для него установлена тесная связь с оптимальными характеристическими полиномами в линейно-квадратичной задаче [20]. Полиномы Баттерворта, как и бином Ньютона, характеризуются симметричным распределением коэффициентов (табл. 2.1).

Таблица 2.1.

Полиномы Баттерворта при разных n

n	$Q^d(p)$
1	$p + \omega_0$
2	$p^2 + 1,41\omega_0 p + \omega_0^2$
3	$p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$
4	$p^4 + 2,61\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,61\omega_0^3 p + \omega_0^4$
5	$p^5 + 3,24\omega_0 p^4 + 5,24\omega_0^2 p^3 + 5,24\omega_0^3 p^2 + 3,24\omega_0^4 p + \omega_0^5$

Существуют и другие стандартные расположения корней. Естественно, что у пользователей возникает вопрос: какому из стандартных расположений корней отдать предпочтение. Ответ на этот вопрос может быть дан только в конкретном контексте задачи с учетом свойств объекта, условий его функционирования, цели управления, структуры замкнутой системы и т. д. путем сравнительного компьютерного анализа вариантов.

Дело в том, что в общем случае тип и показатели качества переходного процесса определяются не только корнями характеристического полинома, но и нулями передаточной функции замкнутой системы, а также видом задающих и возмущающих воздействий.

Тем не менее существуют и общие рекомендации для разных типов систем. Например, для замкнутых систем с астатизмом первого порядка, передаточные функции которых помимо полюсов имеют и нули, рекомендуется расположение корней характеристического полинома на отрицательной вещественной полуоси в арифметической прогрессии [7]. Для систем с астатизмом второго порядка корни также принимают вещественными, причем располагают их в геометрической прогрессии и т. д. Для уменьшения амплитуд собственных колебаний в переходном процессе рекомендуется располагать нули вблизи области расположения полюсов передаточной функции замкнутой системы. Целесообразно также удалять полюсы друг от друга и т. п. [7,14].

Учитывая отмеченные выше, а также другие рекомендации, все же следует иметь в виду, что расположение корней характеристического полинома оказывает определяющее влияние на характер переходных процессов. Поэтому рассмотрим этот вопрос более подробно, тем более, что даже не строя графиков переходных процессов можно сформулировать требования к их показателям качества, накладывая определенные ограничения на расположение корней характеристического полинома.

Пусть характеристический полином порядка n имеет вид

$$Q^d(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (2.35)$$

Мерой быстроты протекания переходных процессов может служить величина среднегеометрического корня

$$\omega_0 = \left[\prod_{i=1}^n p_i \right]^{1/n} = \left[\frac{a_n}{a_0} \right]^{1/n},$$

где p_i – корни характеристического полинома (2.35).

Для повышения быстродействия следует увеличивать ω_0 , т. е. увеличивать свободный член a_n характеристического полинома. Это можно осуществить, например, путем увеличения общего коэффициента усиления разомкнутой системы. Однако, следует иметь в виду, что качество переходного процесса в этом случае может оказаться не приемлемым с точки зрения перерегулирования и колебательности [7].

Другая характеристика быстродействия связана с понятием степени устойчивости [7,14]. Под степенью устойчивости η понимают абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического полинома. Существует оценка верхней границы времени переходного процесса

$$t_{\text{п}} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta},$$

где $\Delta = 0,01 \dots 0,05$ – величина, определяющая зону около установившегося значения переходной характеристики, попав в которую переходный процесс считается завершённым.

Если, например, принять пятипроцентную зону ($\Delta = 0,05$), то время переходного процесса составит

$$t_{\text{п}} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \cong \frac{3}{\eta}.$$

Оценить запас устойчивости замкнутой системы можно по склонности системы к колебаниям, которые будут наблюдаться, если среди корней характеристического полинома присутствуют комплексно-сопряженные корни вида $-\alpha \pm j\beta$. Склонность системы к колебаниям можно охарактеризовать отношением мнимой части корня к вещественной

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Показатель μ называют колебательностью корня. Он связан с другим важным показателем – с так называемым затуханием за пери-

од колебаний $T = \frac{2\pi}{\beta}$ соответствующей составляющей переходного процесса $Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi)$, где C и ψ – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Пусть при некотором $t = t_1$ амплитуда колебаний равна

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}.$$

Через один период $T = \frac{2\pi}{\beta}$ получим

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием за период называют величину

$$\theta = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Нетрудно также получить следующую формулу

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\theta}}.$$

Допустимым считается показатель θ порядка 0,9 ... 0,98, т. е. затухание амплитуды колебаний за один период должно быть не менее чем (90 ... 98)% [7]. Это соответствует значениям показателя μ из диапазона (2,72 ... 1,57).

Задание определенной колебательности μ ограничивает область желаемого расположения корней двумя лучами (рис. 2.4), которые составляют с вещественной осью угол

$$\varphi = \arctg \mu,$$

а задание определенной степени устойчивости η ограничивает эту область вертикальной прямой, проходящей левее мнимой оси на расстоянии η .

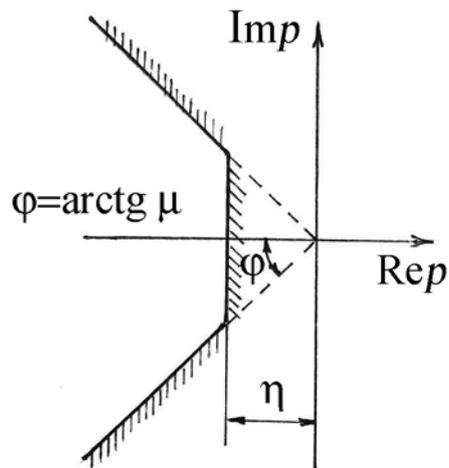


Рис. 2.4. Область желаемого расположения корней с ограничением по показателям μ и η

Пример 2.5.

Приведем результаты сравнительного анализа показателей качества переходных процессов в системе пятого порядка ($n = 5$)

$$(a_0s^5 + a_1s^4 + \dots + a_5)y(t) = 1(t) \quad (2.36)$$

при разных способах расположения корней характеристического полинома (2.35).

Рассматриваются три варианта (рис. 2.5).

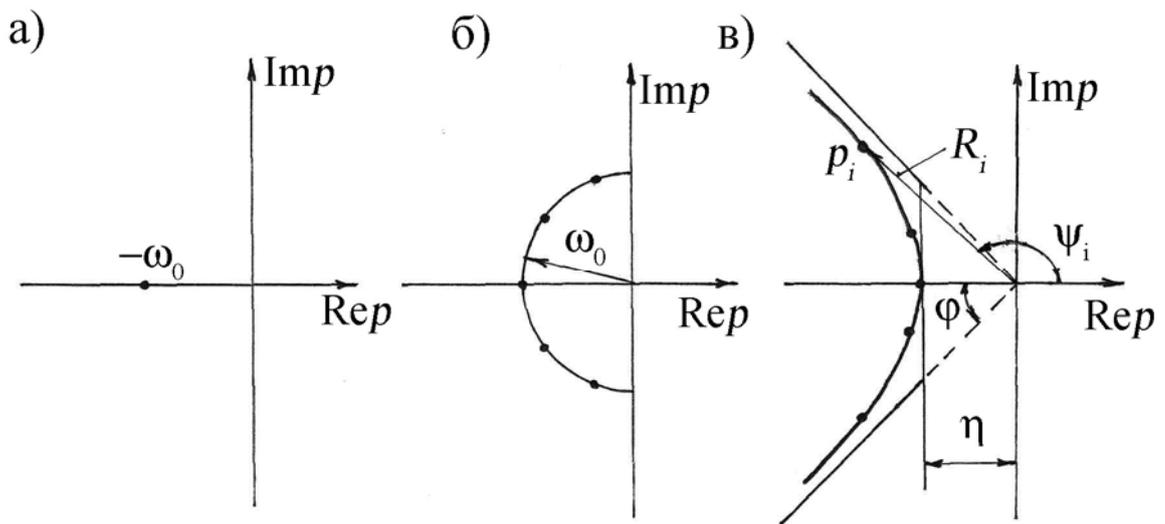


Рис. 2.5. Варианты желаемых расположений корней

1. Расположение по способу кратных корней (см. рис. 2.5, а) с характеристическим полиномом (2.34) при $n = 5$

$$Q^d(p) = p^5 + 5\omega_0 p^4 + 10\omega_0^2 p^3 + 10\omega_0^3 p^2 + 5\omega_0^4 p + \omega_0^5.$$

2. Расположение по способу Баттерворта со среднегеометрическим корнем ω_0 (см. рис. 2.5, б)

$$p_3 = -\omega_0, p_{2,4} = -\omega_0 \cos \psi_1 \pm j\omega_0 \sin \psi_1, p_{1,5} = -\omega_0 \cos \psi_2 \pm j\omega_0 \sin \psi_2,$$

где $\psi_i = \frac{\pi}{n}i, i = 1, 2, n = 5$.

Соответствующий характеристический полином записывается в виде (см. табл. 2.1)

$$Q^d(p) = p^5 + 3,24\omega_0 p^4 + 5,24\omega_0^2 p^3 + 5,24\omega_0^3 p^2 + 3,24\omega_0^4 p + \omega_0^5.$$

3. Расположение по способу, предложенному в работе [18] (см. рис. 2.5, в), когда корни располагаются на гиперболе, вписанной в допустимую по показателям μ и η область (см. рис. 2.4). Положение корней p_i на гиперболе определяется двумя величинами (см. рис. 2.5, в).

$$R_i = \frac{\mu\eta}{\sqrt{(\mu^2 + 1)\cos^2 \psi_i - 1}}, \quad \psi_i = \pi - \varphi + \frac{2\varphi}{n} \left(\frac{2i-1}{2} \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Выбрав показатель колебательности $\mu = 1,2$ ($\varphi \cong 50^\circ$), получим

$$\psi_1 = 140^\circ, \psi_2 = 160^\circ, \psi_3 = 180^\circ, \psi_4 = 200^\circ, \psi_5 = 220^\circ,$$

$$R_1 = 2\eta, R_2 = 1,12\eta, R_3 = \eta, R_4 = 1,12\eta, R_5 = 2\eta$$

и далее

$$p_3 = -\eta, p_{2,4} = -1,05\eta \pm j0,38\eta, p_{1,5} = -1,53\eta \pm j1,28\eta.$$

Соответствующий характеристический полином записывается в виде

$$Q^d(p) = p^5 + 6,17\eta p^4 + 16,87\eta^2 p^3 + 23,97\eta^3 p^2 + 17,28\eta^4 p + 5,02\eta^5$$

или с учетом среднегеометрического корня $\omega_0 = 1,38\eta$ в следующем виде

$$Q^d(p) = p^5 + 4,47\omega_0 p^4 + 8,85\omega_0^2 p^3 + 9,10\omega_0^3 p^2 + 4,75\omega_0^4 p + \omega_0^5.$$

На рис. 2.6 представлены графики нормированных переходных процессов в системе (2.36) при значении $\omega_0 = 1$ соответственно при выборе корней по способу кратных корней (кривая 1) по способу Баттерворта (кривая 2) и по способу с ограничением по показателям μ и η (кривая 3). При других значениях параметра ω_0 характер переходных процессов сохраняется.

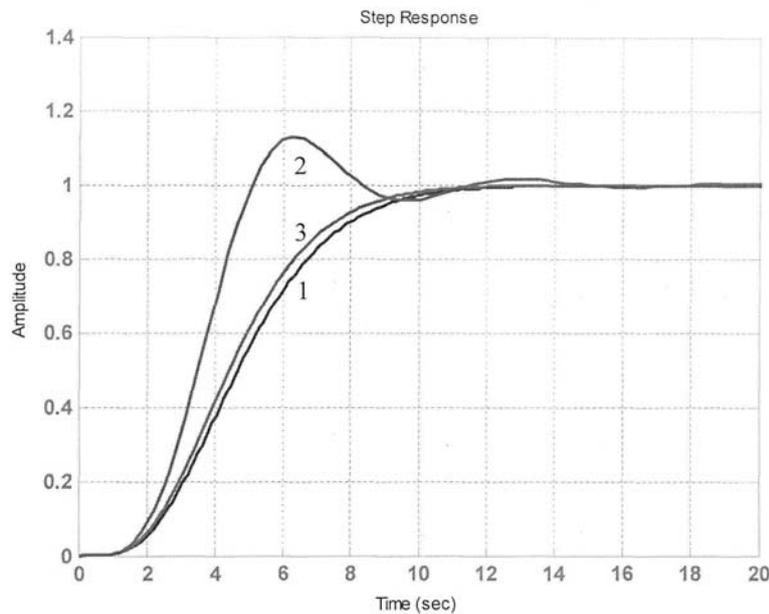


Рис. 2.6. Графики нормированных переходных процессов для разных вариантов расположения корней

Результаты сравнительного анализа показывают, что:

1) при кратных корнях переходный процесс имеет апериодический характер с временем переходного процесса $t_{\Pi} = 9,2$ с (при зоне установления в 5%);

2) при распределении Баттерворта корни располагаются в левой полуплоскости на полуокружности. Пересечение полуокружности с вещественной осью дает единственный вещественный корень. Остальные корни являются комплексно-сопряженными, равномерно распределенными по окружности. По мере увеличения порядка характеристического полинома вещественная часть ближайших к мни-

мой оси комплексных корней уменьшается по модулю, а мнимая часть увеличивается. В результате, с увеличением порядка характеристического полинома степень устойчивости системы η уменьшается, а показатель колебательности μ увеличивается. Время переходного процесса $t_{\Pi} = 7,7$ с здесь заметно меньше, чем в первом случае, однако появляется перерегулирование $\sigma = 13,5\%$;

3) при третьем способе показатели η и μ задаются заранее и по ним строится допустимая область расположения корней. Единственный вещественный корень определяется показателем η . Остальные комплексно-сопряженные корни располагаются на гиперболы с асимптотами, зависящими от показателя μ , и имеют вещественные части, большие по модулю, чем вещественный корень. Переходный процесс здесь, так же как при биномиальном расположении, апериодический. При этом время переходного процесса $t_{\Pi} = 8,7$ с немного меньше, чем в случае биномиального распределения.

Результаты проведения сравнительного анализа не позволяют дать четких рекомендаций относительно выбора того или иного стандартного расположения в качестве желаемого. Требуется дополнительный анализ, в частности, анализ чувствительности замкнутой системы с тем или иным желаемым расположением корней к отклонению параметров объекта или регулятора от расчетных значений. В этом отношении казалось бы вполне приемлемое биномиальное расположение при увеличении порядка n оказывается наиболее чувствительным, т. е. при отклонении параметров от расчетных значений вместо вещественного корня кратности n появляются комплексно-сопряженные корни, а значит переходные процессы уже не будут апериодическими.

2.3.2. Чувствительность систем управления к отклонениям параметров от расчетных значений

При выборе желаемого расположения корней характеристического полинома замкнутой системы необходимо учитывать, что реальные значения параметров объекта управления и регулятора всегда отличаются от расчетных. Если условия грубости замкнутой системы выполнены, то остается вопрос о том, как отклонения отдельных параметров сказываются на процессах и их показателях качества в реальной системе. Вполне возможной является ситуация, когда задание «хорошего» желаемого расположения корней при отклонениях параметров может привести к худшим показателям качества, чем те показатели, которые получаются при задании другого желаемого расположения корней, заранее учитывающего возможность отклонения параметров от расчетных значений.

В качестве примера здесь можно привести задачу управления объектом с ярко выраженными колебательными свойствами, когда параметры объекта по тем или иным причинам могут отклоняться от расчетных значений. Попытки получить в этих условиях в замкнутой системе апериодический характер переходных процессов с помощью соответствующего желаемого расположения корней, например, биномиального (2.34) вряд ли увенчаются успехом. В реальной замкнутой системе неизбежно возникнут колебания. При этом даже может оказаться, что задание желаемого расположения с комплексно-сопряженными корнями может в итоге обеспечить более стабильную работу замкнутой системы, т. е. работу без резких изменений процессов и их показателей качества.

Пример 2.6.

В качестве объекта управления рассмотрим колебательную систему второго порядка, находящуюся под воздействием управляющей F и возмущающей F_b сил

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F + F_b, \quad (2.37)$$

где m – масса; b – коэффициент вязкого трения; c – жесткость.

Приведем уравнение (2.37) к стандартному виду

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_1\dot{y} + \omega_1^2 y = u + \varphi, \quad (2.38)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – собственная частота; $\xi = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$ – безразмерный коэффициент демпфирования ($\xi < 1$); $u = \frac{F}{m}$ – управление; $\varphi = \frac{F_B}{m}$ – возмущение.

Структурная схема системы управления для задачи стабилизации системы (2.38) приведена на рис. 2.7.

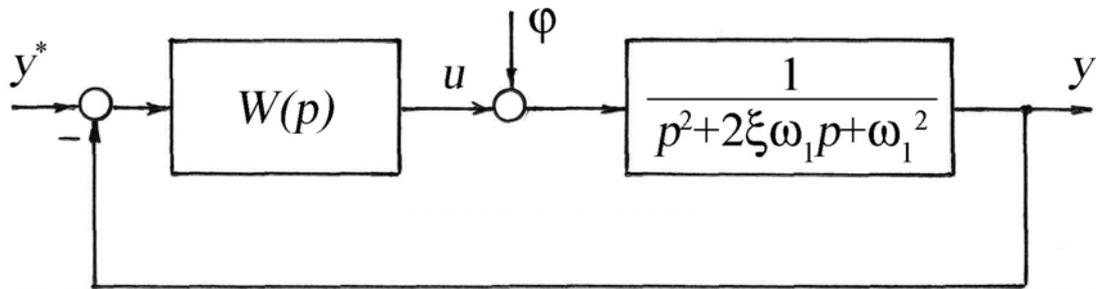


Рис. 2.7. Структурная схема системы управления (пример 2.6)

В соответствии с уравнением (2.38) расчетная передаточная функция объекта управления имеет вид

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2}. \quad (2.39)$$

Потребуем, чтобы желаемая передаточная функция замкнутой системы имела вид

$$H^d(p) = \frac{\alpha_2}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2}, \quad (2.40)$$

где коэффициенты характеристического полинома α_1 и α_2 определяют желаемое расположение корней.

Передаточная функция (2.40) имеет минимальный порядок $n = 2$, обеспечивающий физическую реализуемость регулятора, и удовлетворяет условию астатизма $H^d(0) = 1$. Для определения передаточной

функции регулятора $W(p)$ применим метод динамической компенсации. Подставляя выражения (2.39) и (2.40) в формулу (2.15) получим

$$W(p) = \alpha_2 \frac{p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2}{(p + \alpha_1)p}. \quad (2.41)$$

Для учета влияния возмущения φ запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$Q(s)y(t) = \alpha_2(s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2)y^*(t) + (s + \alpha_1)s\varphi(t), \quad (2.42)$$

где $Q(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2)$ – характеристический полином замкнутой системы при расчетных значениях параметров.

Из уравнения (2.42) видно, что при расчетных значениях параметров свойства замкнутой системы по заданию $y^*(t)$ определяются передаточной функцией (2.40). В то же время вид передаточной функции замкнутой системы по возмущению

$$H'(p) = \frac{(p + \alpha_1)p}{(p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2)(p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)}$$

показывает, что при любом ограниченном возмущении в замкнутой системе возникают колебания на собственной частоте ω_1 объекта управления (2.38), даже если желаемый характеристический полином $p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2$ в (2.40) имеет вещественные корни.

Заметим, что колебания в замкнутой системе будут иметь место и при ненулевых начальных условиях даже в случае отсутствия возмущения φ .

Подобный результат, характерный для метода динамической компенсации, уже обсуждался в п. 2.2.

Рассмотрим поведение замкнутой системы с регулятором (2.41) при отклонении параметров объекта управления от расчетных значений.

Если реальная передаточная функция объекта имеет вид

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\tilde{\xi}\tilde{\omega}_1 p + \tilde{\omega}_1^2},$$

то для замкнутой системы вместо (2.40) получим

$$\tilde{H}(p) = \frac{\alpha_2(p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)}{\tilde{Q}(p)},$$

где $\tilde{Q}(p) = (p^2 + 2\tilde{\xi}\tilde{\omega}_1 p + \tilde{\omega}_1^2)(p + \alpha_1)p + \alpha_2(p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)$.

Анализ характеристического полинома $\tilde{Q}(p)$ показывает, что малые отклонения параметров $\Delta\xi = \tilde{\xi} - \xi$ и $\Delta\omega_1 = \tilde{\omega}_1 - \omega_1$ не приведут к неустойчивости замкнутой системы, однако колебания на собственной частоте ω_1 все же неизбежны.

Пример 2.7.

Попробуем предъявить к замкнутой системе более жесткое требование, а именно требование полного гашения колебаний на собственной частоте ω_1 .

Для этого в соответствии с (2.27) выражение $1 - H^d(p)$ должно в числителе содержать множителем знаменатель передаточной функции объекта (2.39)

$$1 - H^d(p) = \frac{(p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)(p + \gamma)p}{p^4 + \alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4}. \quad (2.43)$$

Множитель p в числителе (2.43) обеспечивает выполнение условия астатизма $H^d(0) = 1$. Множитель $(p + \gamma)$ и четвертый порядок знаменателя необходимы для обеспечения физической реализуемости регулятора. Коэффициенты характеристического полинома α_i ($i = \overline{1,4}$) определяют желаемое расположение корней, например, биномиальное (2.34).

Из выражения (2.43) нетрудно получить желаемую передаточную функцию замкнутой системы

$$H^d(p) = \frac{\beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2}{p^4 + \alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4}, \quad (2.44)$$

где $\beta_0 = \alpha_2 - \omega_1^2 - 2\xi\omega_1\gamma$, $\beta_1 = \alpha_3 - \omega_1^2\gamma$, $\beta_2 = \alpha_4$, $\gamma = \alpha_1 - 2\xi\omega_1$.

Подставляя выражения (2.39), (2.43) и (2.44) в формулу (2.15) получим

$$W(p) = \frac{\beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2}{(p + \gamma)p}. \quad (2.45)$$

Регулятор (2.45) лишь настройками коэффициентов отличается от (2.41). Вместе с тем он не осуществляет прямой компенсации динамики объекта (см. рис. 2.7).

Запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы с регулятором (2.45)

$$Q(s)y(t) = (\beta_0 s^2 + \beta_1 s + \beta_2)y^*(t) + (s + \gamma)s\varphi(t), \quad (2.46)$$

где $Q(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$ – характеристический полином замкнутой системы при расчетных значениях параметров.

Таким образом, если коэффициенты α_i ($i = \overline{1,4}$) выбрать например, в соответствии с биномиальной формой четвертого порядка

$$Q(p) = (p + \omega_0)^4 = p^4 + 4\omega_0 p^3 + 6\omega_0^2 p^2 + 4\omega_0^3 p + \omega_0^4, \quad (2.47)$$

то при расчетных значениях параметров все переходные процессы в замкнутой системе (2.46) будут апериодическими.

Казалось бы цель достигнута, однако анализ характеристического полинома замкнутой системы при малых отклонениях параметров объекта от расчетных значений

$$\tilde{Q}(p) = (p^2 + 2\tilde{\xi}\tilde{\omega}_1 p + \tilde{\omega}_1^2)(p + \gamma)p + \beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2 \quad (2.48)$$

показывает, что в реальной системе колебания неизбежны, а при определенных условиях возможна даже потеря устойчивости.

Пусть, например, в системе (2.37) произошло небольшое изменение сил сопротивления, которое привело к отклонению $\Delta\xi = \tilde{\xi} - \xi$. В этом случае характеристический полином (2.48) приводится к виду

$$\tilde{Q}(p) = p^4 + (\alpha_1 + 2\omega_1 \Delta\xi)p^3 + [\alpha_2 + 2\omega_1 \Delta\xi(\alpha_1 - 2\xi\omega_1)]p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4. \quad (2.49)$$

Естественно, что расположение корней реального полинома (2.49) будет отлично от желаемого. Пусть в качестве желаемой вы-

брана биномиальная форма (2.47). Тогда полином (2.49) можно переписать в виде

$$\tilde{Q}(p) = p^4 + 2\omega_0(2 + \sigma\Delta\xi)p^3 + 2\omega_0^2[3 + 2\sigma\Delta\xi(2 - \sigma\xi)]p^2 + 4\omega_0^3p + \omega_0^4, \quad (2.50)$$

где $\sigma = \frac{\omega_1}{\omega_0}$.

Из выражения (2.50) видно, что при больших σ не зависимо от выбора в качестве расчетного для настройки регулятора завышенного ($\Delta\xi < 0$) или заниженного ($\Delta\xi > 0$) значения коэффициента ξ могут быть не выполнены необходимые условия устойчивости Стодолы. Большое σ возможно при высокой собственной частоте ω_1 объекта управления и малом значении параметра ω_0 , которое на практике всегда ограничено имеющимся ресурсом управления.

Если дополнительно рассмотреть колебательную границу устойчивости полинома (2.50), которая получается приравниванием к нулю предпоследнего определителя Гурвица

$$(2 + \sigma\Delta\xi)[10 + \sigma\Delta\xi(15 - 8\sigma\xi)] - 4 = 0,$$

то оказывается, что неустойчивости при больших σ предшествует возникновение в замкнутой системе колебаний.

При малых σ необходимые и достаточные условия устойчивости полинома (2.50) выполняются. Однако и в этом случае характер переходных процессов будет отличаться от апериодического, соответствующего биномиальной форме (2.47).

Рассмотренные примеры показывают, что при выборе желаемого расположения корней недостаточно только сравнительного анализа стандартных полиномов. Необходимо учитывать свойства объекта управления, возможные отклонения его параметров, а также вид и способ настройки регулятора.

Выше (см. п. 1.2) уже отмечалось, что степень влияния малых отклонений параметров системы управления от расчетных (номинальных, исходных и т. п.) значений на различные характеристики систе-

мы можно оценить посредством *функций чувствительности* или *показателей чувствительности*.

В общем случае функция чувствительности u_{ij} представляет собой частную производную i -ой переменной состояния системы x_i по j -му параметру α_j

$$u_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^* \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}), \quad (2.51)$$

вычисленную при расчетных значениях параметров $\alpha_j = \alpha_j^*$.

Показатель (коэффициент) чувствительности U_j представляет собой частную производную от используемого критерия качества I по j -му параметру α_j

$$U_j = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} \right)^* \quad (j = \overline{1, l}), \quad (2.52)$$

вычисленную при расчетных значениях параметров $\alpha_j = \alpha_j^*$.

Пусть номинальное движение в системе, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций, описывается совокупностью нелинейных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.53)$$

где x_i – переменная состояния; α_j ($j = \overline{1, l}$) – параметры.

Рассмотрим мгновенные вариации параметров $\Delta \alpha_j$ ($j = \overline{1, l}$). Если вариации параметров не вызывают изменения порядков дифференциальных уравнений (2.53), то в системе возникает варьированное движение, которое описывается совокупностью уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{F}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_l + \Delta \alpha_l) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.54)$$

где \tilde{x}_i – переменные состояния варьированного движения.

При условии дифференцируемости $\tilde{x}_i(t)$ и $x_i(t)$ по параметрам α_j ($j = \overline{1, l}$) дополнительное движение

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t) \quad (2.55)$$

можно разложить в ряд Тейлора в окрестности номинального движения. При малых вариациях параметров допустимо ограничиться для дополнительного движения первым приближением

$$\Delta x_i(t, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \alpha_l) \cong \sum_{j=1}^l \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^* \Delta \alpha_j,$$

где производные, находящиеся в скобках и вычисленные при расчетных значениях параметров, представляют собой функции чувствительности (2.51).

При значительных вариациях $\Delta \alpha_j$ может оказаться необходимым использование второго приближения с удержанием в ряде Тейлора, кроме линейных, также и квадратичных членов.

Дифференцирование исходных уравнений (2.53) по α_j приводит к так называемым уравнениям чувствительности

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} u_{kj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}). \quad (2.56)$$

Совместное интегрирование уравнений (2.53) и (2.56) позволяет получить искомые функции чувствительности. При интегрировании уравнения чувствительности (2.56) дополняются начальными условиями

$$u_{ij0} = \frac{\partial x_{i0}}{\partial \alpha_j} \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}),$$

где x_{i0} – начальные условия исходных уравнений (2.53).

Если начальные условия x_{i0} не зависят от параметров α_j , то уравнениям (2.56) соответствуют нулевые начальные условия.

Использование функций чувствительности для анализа дополнительного движения (2.55) представляется более удобным с вычисли-

тельной точки зрения по сравнению с интегрированием уравнения (2.54) и использованием прямой формулы (2.55), так как последняя во многих случаях может дать большие ошибки вследствие необходимости вычитать две близкие величины.

Напомним, что рассмотренные выше параметрические возмущения, не меняющие порядка дифференциального уравнения (2.53), называются регулярными. Им посвящены методы *теории чувствительности* [23].

Если порядок дифференциального уравнения (2.53) меняется, то параметрические возмущения называются сингулярными (см. п. 1.1). Для их рассмотрения необходимо привлекать методы *теории возмущений* [12, 20].

Приведем некоторые положения теории чувствительности.

1. Пусть рассматриваемая система описывается совокупностью линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{s=1}^m b_{is} f_s(t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.57)$$

где x_i – переменная состояния; $f_s(t)$ – внешние воздействия (задающие, возмущающие и т. п.); a_{ik} и b_{is} – коэффициенты, зависящие от параметров α_j .

Уравнения чувствительности получаются из (2.57) дифференцированием по варьируемому параметру α_j

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_{kj} + \sum_{k=1}^n c_{ikj} x_k + \sum_{s=1}^m d_{isj} f_s(t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.58)$$

где $c_{ikj} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial \alpha_j}$ и $d_{isj} = \frac{\partial b_{is}}{\partial \alpha_j}$ – частные производные от коэффициентов системы уравнений (2.57) по варьируемому параметру α_j , вычисленные при расчетных значениях параметров α_j^* ($j = \overline{1, l}$).

Уравнения типа (2.58) записываются для каждого варьируемого параметра. Они интегрируются совместно с уравнениями основного движения (2.57) при соответствующих начальных условиях.

2. Для нахождения функций чувствительности и оценки дополнительного движения линейных систем удобно использовать аппарат передаточных функций.

Пусть, например, управляемая переменная $y(t, \alpha_j)$ связана с задающим воздействием $y^*(t)$ зависимостью

$$y(t, \alpha_j) = L^{-1} \{ H(p, \alpha_j) Y^*(p) \}, \quad (2.59)$$

где $H(p, \alpha_j)$ – передаточная функция замкнутой системы; $Y^*(p) = L\{y^*(t)\}$ – преобразование по Лапласу задающего воздействия.

Функции чувствительности могут быть получены из (2.59) дифференцированием по параметру α_j

$$\frac{\partial y(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} = L^{-1} \left\{ \frac{\partial H(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} Y^*(p) \right\} \quad (2.60)$$

и вычислением частных производных (2.60) при расчетных значениях параметров $\alpha_j = \alpha_j^*$

$$u_j(t) = \left(\frac{\partial y(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right)^* \quad (j = \overline{1, l}).$$

Далее можно найти оценку дополнительного движения

$$\Delta y(t, \alpha_j) \cong u_j(t) \Delta \alpha_j,$$

где $\Delta \alpha_j = \alpha_j - \alpha_j^*$.

Можно также ввести функцию чувствительности передаточной функции

$$S_j(p) = \left(\frac{\partial H(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right)^*, \quad (2.61)$$

которая определяет первое приближение для разности варьированной и исходной (расчетной) передаточных функций

$$\Delta H(p, \alpha_j) = \tilde{H}(p, \alpha_j) - H(p, \alpha_j^*) \cong S_j(p) \Delta \alpha_j, \quad (2.62)$$

где $\Delta \alpha_j = \alpha_j - \alpha_j^*$ – вариация параметра (предполагается, что она не меняет порядка передаточной функции).

В общем случае, когда передаточная функция зависит от нескольких варьированных параметров. Вариация передаточной функции определяется по формуле

$$\Delta H(p, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \cong \sum_{j=1}^l S_j(p) \Delta \alpha_j.$$

Если помимо задающего $y^*(t)$ к системе приложены другие воздействия, то вариации находятся для всех передаточных функций по каждому из воздействий.

Пусть имеется дробно-рациональная передаточная функция

$$H(p, \alpha_j) = \frac{P(p, \alpha_j)}{Q(p, \alpha_j)},$$

представленная в виде отношения двух полиномов. Тогда по аналогии с (2.61) и (2.62) получим

$$\begin{aligned} \Delta H(p, \alpha_j) &\cong S_j(p) \Delta \alpha_j = \left(\frac{\partial H(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right)^* \Delta \alpha_j = \\ &= \frac{\Delta P(p, \alpha_j) - H(p, \alpha_j^*) \Delta Q(p, \alpha_j)}{Q(p, \alpha_j^*)}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $\Delta P(p, \alpha_j)$ и $\Delta Q(p, \alpha_j)$ – вариации полиномов числителя и знаменателя передаточной функции.

Далее по формуле (2.59) можно найти оценку дополнительного движения

$$\Delta y(t, \alpha_j) = L^{-1} \left\{ \Delta H(p, \alpha_j) Y^*(p) \right\}. \quad (2.64)$$

Структурная схема, соответствующая формулам (2.63) и (2.64), приведена на рис. 2.8.

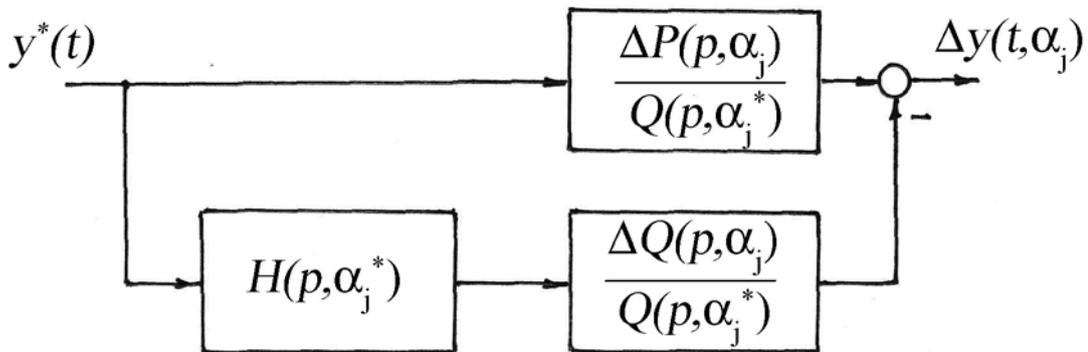


Рис. 2.8. Структурная схема модели чувствительности по параметру α_j

Приведенная на рис. 2.8 структурная схема удобна при компьютерном моделировании дополнительного движения в программной среде MATLAB^R (www.mathworks.com).

Пример 2.8.

Рассмотрим систему управления, структурная схема которой приведена на рис. 2.9.

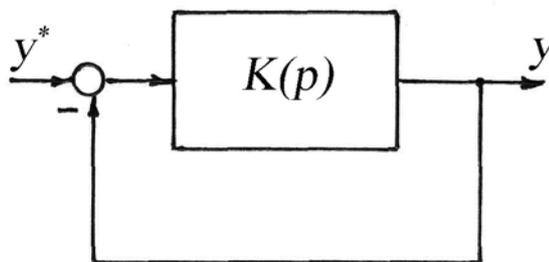


Рис. 2.9. Структурная схема системы управления (пример 2.8)

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$K(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p^2}.$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы

$$H(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)} = \frac{k(\tau p + 1)}{p^2 + k\tau p + k} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

В соответствии с изложенным выше построим модель чувствительности для замкнутой системы при вариации параметра τ . Нетрудно найти

$$\Delta P(p) = \Delta Q(p) = kp\Delta\tau$$

и эквивалентным преобразованием привести структурную схему модели чувствительности (см. рис. 2.8) к виду, изображенному на рис. 2.10.

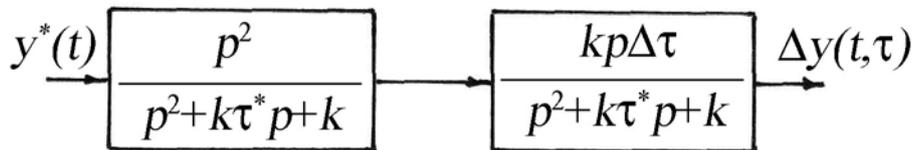


Рис. 2.10. Преобразованная структурная схема модели чувствительности по параметру τ

Моделирование при разных $\Delta\tau = \tau - \tau^*$, где τ^* – расчетное значение параметра τ проводится при интересующем исследователя задающем воздействии $y^*(t)$ и соответствующих начальных условиях.

3. Рассмотрим теперь показатели чувствительности критериев качества (2.52). Если в системе произошли изменения ряда параметров $\Delta\alpha_j$ ($j = \overline{1, l}$), то результирующее изменение критерия качества

$$\Delta I = \tilde{I} - I,$$

где \tilde{I} и I – соответственно варьированное и исходное (найденное при расчетных значениях параметров) значения критерия качества, можно оценить по формуле

$$\Delta I \cong \sum_{j=1}^l U_j \Delta\alpha_j. \quad (2.65)$$

Вариации параметров в большинстве случаев имеют случайный характер, поэтому при расчетах целесообразно использование вероят-

ностных методов. Однако, получить достоверные вероятностные характеристики вариаций параметров $\Delta\alpha_j$ удается далеко не всегда. Вместе с тем, если известны максимальные возможные отклонения параметров $\pm\Delta\alpha_{j\max}$, то при условии их независимости для оценки (2.65) можно найти среднеквадратичный максимум

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^l (U_j \Delta\alpha_{j\max})^2} \quad (2.66)$$

и относительный среднеквадратичный максимум

$$\delta_{\max} = \frac{\Delta I_{\max}}{I}.$$

Если известны дисперсии отклонений параметров $D_j = M\{(\Delta\alpha_j)^2\}$ и отклонения независимы, то можно найти дисперсию оценки (2.65)

$$D_I = \sum_{j=1}^l U_j^2 D_j.$$

Что касается критериев качества, то это могут быть, например, быстродействие, степень устойчивости, максимальные ошибки, интегральные показатели и т. п.

Пример 2.9.

Рассмотрим объект управления из примера 2.6. В соответствии с уравнением (2.37) передаточная функция объекта управления имеет вид

$$G(p) = \frac{1}{mp^2 + bp + c}. \quad (2.67)$$

Требуется определить среднеквадратичный максимум отклонения показателя колебательности, если $m = (1 \pm 0,1) \text{ кг}$, $b = (13 \pm 1,3) \text{ Нсм}^{-1}$, $c = (1000 \pm 100) \text{ Нм}^{-1}$.

Показатель колебательности динамической системы определяется по относительному максимуму ее амплитудно-частотной характеристики [7]. Для объекта управления (2.67) он равен (рис. 2.11)

$$I = \left| \frac{G(j\omega)}{G(0)} \right|_{\max} = \left| \frac{c}{m(j\omega)^2 + bj\omega + c} \right|_{\max} \quad (2.68)$$

Исследование на максимум выражения (2.68) показывает, что при $\frac{mc}{b^2} \leq 2$ показатель колебательности $I = 1$, а при $\frac{mc}{b^2} > 2$ показатель колебательности

$$I = 2 \frac{mc}{b^2} \left(4 \frac{mc}{b^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.69)$$

достигается на резонансной частоте $\omega_p = \left[\frac{b^2}{2m^2} \left(2 \frac{mc}{b^2} - 1 \right) \right]^{1/2}$.

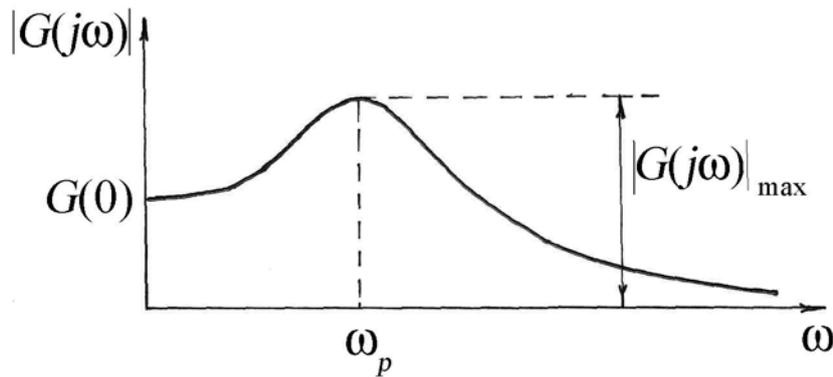


Рис. 2.11. Определение показателя колебательности по относительной высоте резонансного пика

Расчетное значение $I = 2,49$ показателя колебательности (2.68) находится при номинальных значениях параметров $m^* = 1$ кг, $b^* = 13$ Нсм⁻¹, $c^* = 1000$ Нм⁻¹. Им соответствует собственная частота $\omega_1 = 31,6$ с⁻¹ (5 Гц) и безразмерный коэффициент демпфирования $\xi = 0,2$ (см. уравнение (2.38)).

Для того, чтобы применить формулу (2.66), найдем показатели чувствительности по параметрам $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$.

$$U_1 = \left(\frac{\partial I}{\partial m} \right)^* = \left[\frac{2c}{b^2} \left(\frac{2mc}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{4mc}{b^2} - 1 \right)^{-3/2} \right]^* = 1,183 \text{ кг}^{-1},$$

$$U_2 = \left(\frac{\partial I}{\partial b} \right)^* = \left[\frac{4mc}{b^3} \left(\frac{2mc}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{4mc}{b^2} - 1 \right)^{-3/2} \right]^* = 0,182 \text{ Н}^{-1} \text{ с}^{-1} \text{ м},$$

$$U_3 = \left(\frac{\partial I}{\partial c} \right)^* = \left[\frac{2m}{b^2} \left(\frac{2mc}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{4mc}{b^2} - 1 \right)^{-3/2} \right]^* = 0,0012 \text{ Н}^{-1} \text{ м}.$$

В результате для среднеквадратичного максимума отклонения показателя колебательности получим

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{(1,183 \cdot 0,1)^2 + (0,182 \cdot 1,3)^2 + (0,0012 \cdot 100)^2} = 0,29.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере при десятипроцентных вариациях параметров m , b и c показатель колебательности составляет

$$I = 2,49 \pm 0,29.$$

При этом, наибольшая чувствительность наблюдается по параметру b .

3. СИНТЕЗ ГРУБЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Проблема достижения высоких показателей качества систем управления с обратной связью является одной из центральных для теории и практики управления. Эта проблема имеет два аспекта.

Во-первых необходимо обосновать требования исходя из цели управления, свойств объекта управления и возможностей средств управления, предполагаемых для использования. Основным инструментом здесь является теория оптимального управления, позволяющая получать локальные оценки максимально достижимых показателей качества.

Во-вторых, необходимо обеспечить разумный компромисс между требованиями, позволяющий гарантировать приемлемые показатели качества. В силу противоречивости показателей качества эта задача всегда является многокритериальной и для ее эффективного решения в той или иной степени требуется привлекать проектировщика.

Учитывая, что реальные системы управления, как правило, функционируют в условиях неопределенных, но ограниченных внешних возмущений, а также в условиях малых отклонений структуры и параметров от расчетных значений, в совокупности приводящих к отклонениям показателей качества от желаемых значений, на передний план выходит проблема обеспечения заданных допусков на эти отклонения, т. е. проблема обеспечения грубости систем управления (см. п. 1.2).

Можно выделить несколько основных направлений исследования этой проблемы.

Первое направление опирается на процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) или LQ-оптимизации как принято называть это направление в зарубежной литературе [23]. При этом главный упор делается на выбор структуры и весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимизации.

В рамках второго направления строятся алгоритмы управления, обеспечивающие наилучшие показатели качества при наихудшем ограниченном возмущении из определенного класса. Это направление развивается на базе методов минимакса и теории дифференциальных игр [5, 23], а также методов оптимизации по равномерно-частотным показателям [6].

Третье направление характеризуется тем, что структура и параметры системы управления выбираются так, чтобы управляемые переменные объекта по возможности не зависели от внешних возмущений. К этому направлению можно отнести работы по теории инвариантности, по теории систем с бесконечно большими коэффициентами усиления и систем с переменной структурой [16, 23].

Значительный интерес представляют постановки задач и результаты исследований, лежащих на пересечениях указанных направлений.

3.1. Синтез многомерных линейных систем заданной точности методом LQ-оптимизации

3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза регулятора, обеспечивающего для линейного объекта управления требуемую точность по управляемым переменным в установившемся режиме при действии на объект неизмеряемых ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами и частотами [1].

Пусть замкнутая система управления описывается следующими уравнениями:

– для объекта управления

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad y = C_1 x, \quad z = C_2 x, \quad (3.1)$$

– для регулятора

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r z, \quad u = C_r x_r + D_r z, \quad (3.2)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u(t) \in R^m$ – вектор управления; $y(t) \in R^{m_1}$ – вектор управляемых переменных; $z(t) \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных; $w(t) \in R^l$ – вектор внешних неизмеряемых возмущений; $x_r(t) \in R^{n_r}$ – вектор состояния регулятора; A, B_1, B_2, C_1, C_2 – известные постоянные числовые матрицы; A_r, B_r, C_r, D_r – неизвестные (настраиваемые) матрицы регулятора.

Предполагается полная управляемость (стабилизируемость) пары матриц (A, B_2) и полная наблюдаемость (детектируемость) пар матриц (A, C_1) и (A, C_2) .

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, l}, \quad (3.3)$$

где амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, l}, k = \overline{1, p}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, p}$) гармоник неизвестны.

Предполагается, что амплитуды гармоник подчинены условию

$$\sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2}, \quad i = \overline{1, l}, \quad (3.4)$$

где p – известное число гармоник; w_i^* ($i = \overline{1, l}$) – заданные числа.

Для каждого конкретного стабилизирующего регулятора (3.2) в замкнутой системе (3.1) – (3.4) введем следующие величины:

– установившиеся ошибки по управляемым переменным

$$y_{i,\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad (3.5)$$

– установившиеся значения управляющих воздействий

$$u_{i,\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |u_i(t)|, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.6)$$

Очевидно, что значения величин (3.5) и (3.6) зависят как от настроек регулятора (3.2), так и от конкретной реализации внешнего возмущения из класса (3.3), (3.4).

Сформулируем следующую задачу.

Требуется найти стабилизирующий регулятор (3.2) такой, что при действии на объект (3.1) возмущений из класса (3.3), (3.4) система (3.1), (3.2) удовлетворяет требованиям к точности

$$y_{i,\infty} \leq y_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (3.7)$$

где $y_i^* > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$) – заданные числа.

Решение поставленной задачи может существовать не всегда [1]. Рассмотрим два вида объектов (3.1), для которых поставленная задача разрешима для любых наперед заданных чисел $y_i^* > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$).

1. Первый вид объектов описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + B_2(u + w), \quad y = C_1 x, \quad z = x, \quad (3.8)$$

где $m_2 = n$, $l = m$, $C_2 = E$ (E – здесь и далее единичные матрицы соответствующих размеров).

2. Второй вид объектов определяется уравнением (3.1), где $y = z$, т. е. $C_1 = C_2$, $m_1 = m_2 = m$ и выполняется условие минимальной фазовости для передаточной матрицы объекта по управляющим воздействиям

$$G(p) = C_2(pE - A)^{-1}B_2, \quad (3.9)$$

которое требует отрицательности вещественных частей всех корней уравнения

$$\det[C_2 \text{adj}(pE - A)B_2] = 0,$$

где adj – символ присоединенной матрицы.

3.1.2. Частотные свойства LQ-оптимальных систем

Рассмотрим объект управления (3.8). Известно [23], что закон управления

$$u = Kx, \quad K = -R^{-1}B_2^T P, \quad (3.10)$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица $P = P^T \geq 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P = -C_1^T Q C_1, \quad (3.11)$$

доставляет минимум (при $w = 0$) квадратичному функционалу качества

$$J = \min_u \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (3.12)$$

где Q и R – симметричные неотрицательно определенная и положительно определенная весовые матрицы.

Если матрица A объекта (3.8) гурвицева, то часто матрицу $P \geq 0$ закона управления (3.10) находят путем решения матричного уравнения Ляпунова [1]

$$A^T P + PA = -C_1^T Q C_1. \quad (3.13)$$

В дальнейшем синтез регулятора (3.10) на основе решения уравнения (3.11) будем называть процедурой 1, а на основе уравнения (3.13) – процедурой 2.

Для исследования частотных свойств систем, построенных на основе процедур 1 и 2, запишем передаточные матрицы замкнутой системы (3.8), (3.10)

$$\begin{aligned} H_{wu}(p) &= K(pE - A - B_2K)^{-1} B_2, \\ H_{wy}(p) &= C_1(pE - A - B_2K)^{-1} B_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

связывающие соответственно вектор управляющих воздействий u и вектор управляемых переменных y с вектором внешних возмущающих воздействий w .

Показано [1], что в случае использования для синтеза регулятора состояния процедуры 1, передаточные матрицы (3.14) оптимальной системы (3.8), (3.10), (3.11) удовлетворяют при всех $\omega \in [0, \infty]$ следующим условиям:

а) частотному тождеству

$$[E + H_{wu}(-j\omega)]^T R [E + H_{wu}(j\omega)] = R - H_{wy}^T(-j\omega) Q H_{wy}(j\omega);$$

б) частотным матричным неравенствам

$$H_{wy}^T(-j\omega) H_{wy}(j\omega) \leq R,$$

$$[E + H_{wu}(-j\omega)]^T R [E + H_{wu}(j\omega)] \leq R,$$

$$H_{wu}^T(-j\omega) H_{wu}(j\omega) \leq 4E, \text{ при } R = rE, r > 0;$$

в) при $m = l = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $H_{wu}(j\omega)$ не покидает круга радиуса 1 с центром в точке $(-1, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.

В случае использования для синтеза регулятора состояния процедуры 2 передаточные матрицы (3.14) системы (3.8), (3.10), (3.13) удовлетворяют при $\omega \in [0, \infty]$ следующим условиям:

а) частотному тождеству

$$[E + 2H_{wu}(-j\omega)]^T 0,5R[E + 2H_{wu}(j\omega)] = 0,5R - H_{wy}^T(-j\omega)QH_{wy}(j\omega);$$

б) частотным матричным неравенствам

$$H_{wy}^T(-j\omega)H_{wy}(j\omega) \leq 0,5R,$$

$$[E + 2H_{wu}(-j\omega)]^T R[E + 2H_{wu}(j\omega)] \leq R,$$

$$H_{wu}^T(-j\omega)H_{wu}(j\omega) \leq E, \text{ при } R = rE, r > 0;$$

в) при $m = l = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $H_{wu}(j\omega)$ не покидает круга радиуса $1/2$ с центром в точке $(-1/2, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.

Заметим, что в обоих случаях условия в) дают геометрическую интерпретацию вторых матричных неравенств из б) при скалярных управляющих и возмущающих воздействиях.

3.1.3. Точность LQ-оптимальных систем

Сформулируем основные результаты решения поставленной задачи, которые являются прямыми следствиями частотных матричных неравенств, приведенных выше.

1. Установившиеся ошибки системы (3.8), (3.10), (3.11) (процедура 1) при действии полигармонических возмущений (3.3), (3.4) в случае фиксированных диагональных весовых матриц $Q = \text{diag}\{q_i\}$ и $R = \text{diag}\{r_i\}$ критерия (3.12) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i y_{i,\infty}^2 \leq p \sum_{i=1}^m r_i w_i^{*2}, \quad (3.15)$$

а установившиеся значения управляющих воздействий при фиксированных $R = rE, r > 0$ и $Q > 0$ принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^m u_{i,\infty}^2 \leq 4p \|w^*\|^2, \quad (3.16)$$

где $\|w^*\|$ – евклидова норма вектора $w^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_l^*]^T$ с компонентами из правых частей неравенств (3.4).

Из соотношения (3.15) видно, что:

– множество значений $y_{i,\infty}$ ($i = \overline{1, m_1}$) образует замкнутую область гиперэллипсоида, оси которого обратно пропорциональны q_i и прямо пропорциональны r_i , т.е. элементам соответствующих весовых матриц в критерии (3.12), выбор которых зависит от проектировщика. Отсюда, в частности, следует, что уменьшения установившихся ошибок можно добиться увеличивая весовые коэффициенты матрицы Q и уменьшая весовые коэффициенты матрицы R – факт в качественной форме давно известный [20];

– если элементы диагональных матриц Q и R критерия (3.12) удовлетворяют условиям

$$q_i \geq \frac{p \|w^*\|}{(y_i^*)^2} \quad (i = \overline{1, m_1}), \quad r_i = 1 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (3.17)$$

где $q_i > 0$ ограничены сверху, то закон управления (3.10), (3.11) для объекта (3.8) разрешает поставленную задачу (3.7).

Действительно, в силу (3.17) из соотношения (3.15) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{m_1} \left(\frac{y_{i,\infty}}{y_i^*} \right)^2 \leq 1.$$

Подчеркнем, что так как числа $y_i^* > 0$ – любые, то закон управления (3.10), (3.11), (3.17) позволяет обеспечить сколь угодно высокую точность управления независимо от частот ω_k внешнего возмущения (3.3). Кроме того, любая из переменных состояния (в этом случае $y = x$, т. е. $C_1 = E$, $m_1 = n$) может быть сделана сколь угодно малой в установившемся режиме, если внешние возмущения и управления приложены в одной точке (в этом случае $B_1 = B_2$).

Установившиеся ошибки системы (3.8), (3.10), (1.13) (процедура 2) при действии полигармонических возмущений (3.3), (3.4) в случае фиксированных диагональных весовых матриц Q и R принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i y_{i,\infty}^2 \leq 0,5 p \sum_{i=1}^m r_i w_i^{*2}, \quad (3.18)$$

а установившиеся значения управляющих воздействий при фиксированных $R = rE$, $r > 0$ и $Q > 0$ принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^m u_{i,\infty}^2 \leq p \|w^*\|^2, \quad (3.19)$$

Из соотношения (3.18) видно, что если выбрать весовые коэффициенты матрицы R в соответствии с (3.17), то для обеспечения выполнения требований к точности (3.7) элементы весовой матрицы Q можно выбрать в два раза меньшими по сравнению с процедурой 1 (см. выражение (3.17)). Кроме того, процедура 2 гарантирует четырехкратное уменьшение мощности управляющего воздействия в установившемся режиме по сравнению с процедурой 1, если объект устойчив (см. неравенства (3.16) и (3.19)).

Таким образом, если внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в одной точке, то всегда можно построить регулятор состояния, обеспечивающий сколь угодно высокую точность управления. В работе [1] показано, что гарантируемые запасы устойчивости по фазе и по коэффициенту усиления (по всем управляющим входам) составляют: для процедуры 1 – не менее 60° и не менее двух; для процедуры 2 – не менее 90° и бесконечность, соответственно.

3.1.4. Точность LQ-оптимальных систем с наблюдателем

Рассмотрим объект управления второго вида, у которого в общем случае $B_1 \neq B_2$.

Для решения задачи, сформулированной в п. 3.1.1 приведем вектор внешних возмущений w ко входу объекта так, чтобы измеряемые (управляемые) переменные не изменились. Для этого выразим из уравнения (3.1) вектор измеряемых переменных

$$z(p) = C_2(pE - A)^{-1} B_2 u(p) + C_2(pE - A)^{-1} B_1 w(p) \quad (3.20)$$

и введем вектор эквивалентных внешних возмущений, приведенных ко входу объекта, соотношением

$$\tilde{w}(p) = N_{w\tilde{w}}(p)w(p), \quad (3.21)$$

где $N_{w\tilde{w}}(p) = [C_2(pE - A)^{-1} B_2]^{-1} C_2(pE - A)^{-1} B_1$.

Теперь соотношение (3.20) можно представить в виде

$$z(p) = C_2(pE - A)^{-1} B_2 (u + \tilde{w}). \quad (3.22)$$

Заметим, что требование минимальной фазовости объекта (3.9) гарантирует устойчивость полюсов $N_{w\tilde{w}}(p)$, а также одинаковые установившиеся режимы в исходной (3.20) и эквивалентной (3.21), (3.22) системах при действии ограниченных внешних возмущений (3.3), (3.4). Конечно, это имеет место только в том случае, если управляющее воздействие u формируется лишь по измеряемым переменным z , которые в исходной и эквивалентной системах совпадают.

Представим уравнение (3.22) в переменных состояния

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_2(u + \tilde{w}), \quad z = y = C_2\tilde{x}, \quad (3.23)$$

где новый вектор состояния \tilde{x} , вообще говоря, отличен от вектора состояния x исходной системы (3.1), однако при этом векторы $z(t)$ в обеих системах при нулевых начальных условиях совпадают.

Заметим, что передаточная матрица $N_{w\tilde{w}}(p)$ в общем случае не является правильной, так как ее элементы могут иметь степени полиномов числителей выше степени полиномов знаменателей, поэтому для ограниченности величины \tilde{w} будем полагать, что частотный спектр внешнего возмущения w ограничен некоторым конечным числом ω^* , значение которого определяется проектировщиком из фи-

зических соображений. Это означает, что существует число ρ такое, что выполнено частотное матричное неравенство

$$N_{w\tilde{w}}^T(-j\omega)N_{w\tilde{w}}(j\omega) \leq \rho^2 E, \quad \omega \in [0, \omega^*].$$

Очевидно, что если $B_1 = B_2$, то $\rho = 1$, а $\omega^* = \infty$.

Как и прежде будем считать весовые матрицы Q и R функционала оптимизации (3.10) диагональными, матрицу коэффициентов обратных связей K будем выбирать на основе одной из двух процедур п. 3.1.2, условия применимости которых оговариваются ниже.

Представим закон управления в виде

$$u = Kx_r, \quad (3.24)$$

где $x_r \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя (фильтра) полного порядка

$$\dot{x}_r = Ax_r + B_2u + L(z - C_2x_r), \quad (3.25)$$

в котором матрица коэффициентов усиления L имеет вид

$$L = YC_2^T, \quad (3.26)$$

где Y – неотрицательно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$AY + YA^T - YC_2^T C_2 Y = -Q_0 - \beta B_2 V B_2^T. \quad (3.27)$$

В правой части (3.27) Q_0 и V – произвольные неотрицательно определенная и положительно определенная числовые матрицы, β – достаточно большой положительный весовой коэффициент.

Справедливо следующее утверждение [1].

При $R = rE$, $r > 0$ и достаточно большом β в уравнении (3.27) неравенства (3.16) – (3.19) из п. 3.1.3 для системы с наблюдателем (3.1), (3.24) – (3.27) остаются в силе с точностью до замены в указанных неравенствах $\|w^*\|^2$ на $\rho^2 \|w^*\|^2$.

Таким образом, если объект минимально-фазовый, то в асимптотике ($\beta \rightarrow \infty$) имеет место результат, аналогичный случаю полного измерения вектора состояния, если частоты внешнего возмущения не

превышают ω^* . Кроме того, гарантируемые границы запасов устойчивости в системе с наблюдателем сохраняют значения, имевшие место при полном измерении вектора состояния объекта.

Следует заметить, что высокая точность управления в установившемся режиме не гарантирует высокого качества переходных процессов. В первую очередь это касается быстродействия при обработке ненулевых начальных условий. Поэтому при решении практических задач окончательный выбор весовых матриц в процедурах 1 и 2, а также настраиваемых матриц в наблюдателе необходимо подтверждать результатами компьютерного моделирования с учетом всех требований к динамическим свойствам замкнутой системы.

3.1.5. Применение процедуры H_∞ -оптимизации

Достоинства метода LQ-оптимизации заключаются, прежде всего, в структуре регулятора, обеспечивающей простоту анализа промежуточных результатов и реализации системы, а также в строгой последовательности вычислительных процедур, позволившей создать пакет прикладных программ Control System Toolbox в системе MATLAB (www.mathworks.com) для синтеза соответствующих регуляторов на компьютере. Однако, методу LQ-оптимизации присущи и определенные недостатки:

- оптимизируемый критерий не вполне адекватен техническим требованиям, предъявляемым к реальным системам управления;
- LQ-регулятор, спроектированный для некоторого номинального объекта, не гарантирует устойчивости замкнутой системы с реальным объектом, даже если сам объект гарантированно устойчив, т. е. не гарантируется грубость замкнутой системы с LQ-регулятором к неточностям математического описания объекта управления.

Интересным оказался тот факт, что соответствующим выбором весовых матриц в оптимизируемом критерии в ряде случаев можно синтезировать грубые LQ-регуляторы [1]. При этом грубым LQ-регулятором назван регулятор, сохраняющий свойство быть опти-

мальным (в смысле какого-либо квадратичного критерия) при любых достаточно малых изменениях параметров объекта управления. Для такого регулятора получены необходимые и достаточные условия грубой оптимальности в виде требований к структуре весовой матрицы Q при координатах в критерии качества (3.12). Метод гарантирует грубость замкнутой системы лишь в малой окрестности расчетных значений параметров модели объекта, а не в заданной области варьирования параметров, как это требуется для большинства технических систем.

В ряде работ грубость регуляторов понимается в смысле ограничения, наложенного на квадратичную (H_2) и равномерную (H_∞) норму передаточной матрицы замкнутой системы $H_{wy}(p)$ от входного вектора w к вектору управляемых переменных y [6].

Интегральная квадратичная (H_2 -норма) определяется выражением

$$\|H_{wy}(p)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{tr} \{ H_{wy}^T(-j\omega) H_{wy}(j\omega) \} d\omega \right]^{1/2}, \quad (3.28)$$

а равномерная норма (H_∞ -норма) – выражением

$$\|H_{wy}(p)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max} \{ H_{wy}(j\omega) \}, \quad (3.29)$$

где tr – след (сумма элементов главной диагонали) матрицы; σ_{\max} – наибольшее сингулярное собственное число матрицы.

Простейшая физическая интерпретация показателей (3.28), (3.29) состоит в том, что H_2 -норма характеризует подавление импульсных или белозумных возмущений, а H_∞ -норма определяет подавление гармонических возмущений с произвольной частотой.

Процедура синтеза грубых LQ-регуляторов с ограничением на H -нормы (3.28) и (3.29) осуществляется итеративно. На каждом шаге задается весовая матрица Q в квадратичном критерии качества типа (3.12), и решается соответствующее уравнение Риккати, после чего

проверяется качество и грубость в смысле H -норм замкнутой системы. При неудовлетворительных свойствах замкнутой системы весовая матрица Q изменяется и процедура повторяется.

Показано [1], что итеративный процесс при квадратичном критерии качества (3.12) и ограничении на H_∞ -норму сходится к синтезу субоптимального H_∞ -регулятора, если такой регулятор существует. В противном случае коэффициенты последовательности грубых LQ-регуляторов неограниченно возрастают аналогично возрастанию коэффициентов «дешевого» LQ-регулятора при стремлении к нулю цены за управление (второго слагаемого в критерии качества типа (3.12)). Подробно синтез многомерных систем заданной точности с применением процедур H_∞ -оптимизации рассмотрен в работе [1].

Заметим, что выше было дано решение задачи синтеза LQ-регуляторов при действии полигармонических внешних возмущений для двух типов объектов, для которых достижима сколь угодно высокая точность управления. Работа [1] посвящена более широкому классу объектов, для которых сколь угодно высокая точность управления недостижима. При этом, наряду с заданными требованиями на величины установившихся ошибок по управляемым переменным (3.7) дополнительно учитываются ограничения на установившиеся величины управляющих воздействий

$$u_{i,\infty} \leq u_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

где u_i^* , ($i = \overline{1, m}$) – заданные положительные числа.

Кроме того, учитываются помехи в измерениях, принадлежащие классу ограниченных полигармонических функций с неизвестными амплитудами и частотами

$$z = C_2 x + \eta,$$

где $\eta(t) \in R^{m_2}$ – вектор помех измерения с компонентами

$$\eta_j(t) = \sum_{q=1}^l \eta_{jq} \sin(\omega_q t + \Phi_{jq}),$$

$$\sum_{q=1}^l \eta_{jq}^2 \leq \eta_j^{*2}, \quad j = \overline{1, m_2}.$$

Вводится понятие радиуса установившегося состояния замкнутой системы

$$r_\infty^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \left(\frac{y_{i,\infty}}{y_i^*} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{u_{i,\infty}}{u_i^*} \right)^2$$

и формулируется задача синтеза регулятора, обеспечивающего заданный радиус. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости на основе процедур синтеза H_∞ -субоптимальных регуляторов. Задача решается в игровой интерпретации с квадратичным минимаксным функционалом оптимизации. Установлено, что так же как в LQ-подходе, принципиальную роль в решении минимаксной задачи обеспечения заданной точности замкнутой системы играет выбор весовых матриц в квадратичном функционале.

Заметим, что по H_∞ -теории управления имеется много работ (в основном в зарубежной литературе). Основные постановки задач и результаты их решения можно найти в работе [6].

3.2. Метод большого коэффициента усиления

3.2.1. Постановка задачи

Пусть на объект управления с передаточной функцией $G(p) = G_1(p)G_2(p)$ действует внешнее возмущение φ так, как показано на рис. 3.1.

Предполагается, что:

- объект $G(p)$ необязательно устойчив;
- возмущение φ необязательно является малым или исчезающим со временем;

– отсутствует возможность прямого или косвенного измерения возмущения φ .

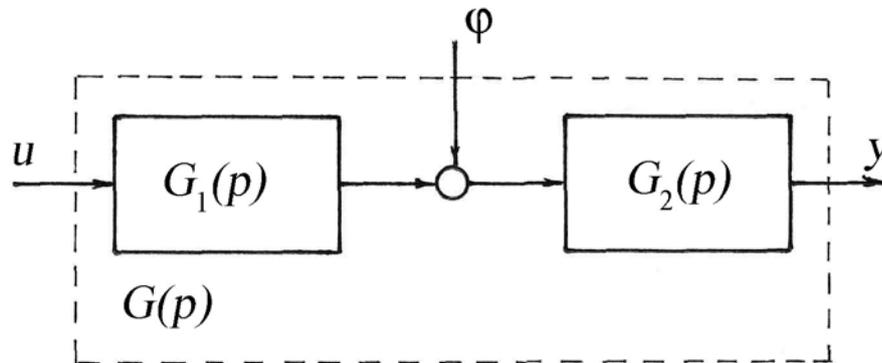


Рис. 3.1. Структурная схема объекта управления

Требуется выбором управления u обеспечить независимость управляемой переменной y от возмущения φ и, кроме того, обеспечить достижение и поддержание равенства (цели управления)

$$y = y^*, \quad (3.30)$$

где y^* – желаемое значение управляемой переменной [16].

При построении в рассматриваемых условиях системы управления неизбежно обращение к обратной связи (принципу управления по ошибке) в рамках одной из схем, приведенных на рис. 3.2, в которых требуется выбрать передаточную функцию $W(p)$ регулятора (обратной связи) (рис. 3.2, а) или вместе с $W(p)$ выбрать дополнительно передаточную функцию $S(p)$ прямой связи по заданию y^* (рис. 3.2, б).

Рассмотрим один из эффективных методов решения задачи слежения (3.30) в условиях неопределенности возмущения φ , а именно метод глубокой обратной связи, который для линейных систем сводится к использованию в регуляторе большого коэффициента усиления [16].

Поясним основную идею метода большого коэффициента усиления. Представим передаточную функцию регулятора в виде

$$W(p) = kW'(p),$$

где k – коэффициент усиления; $W'(p)$ – передаточная функция подлежащая определению.

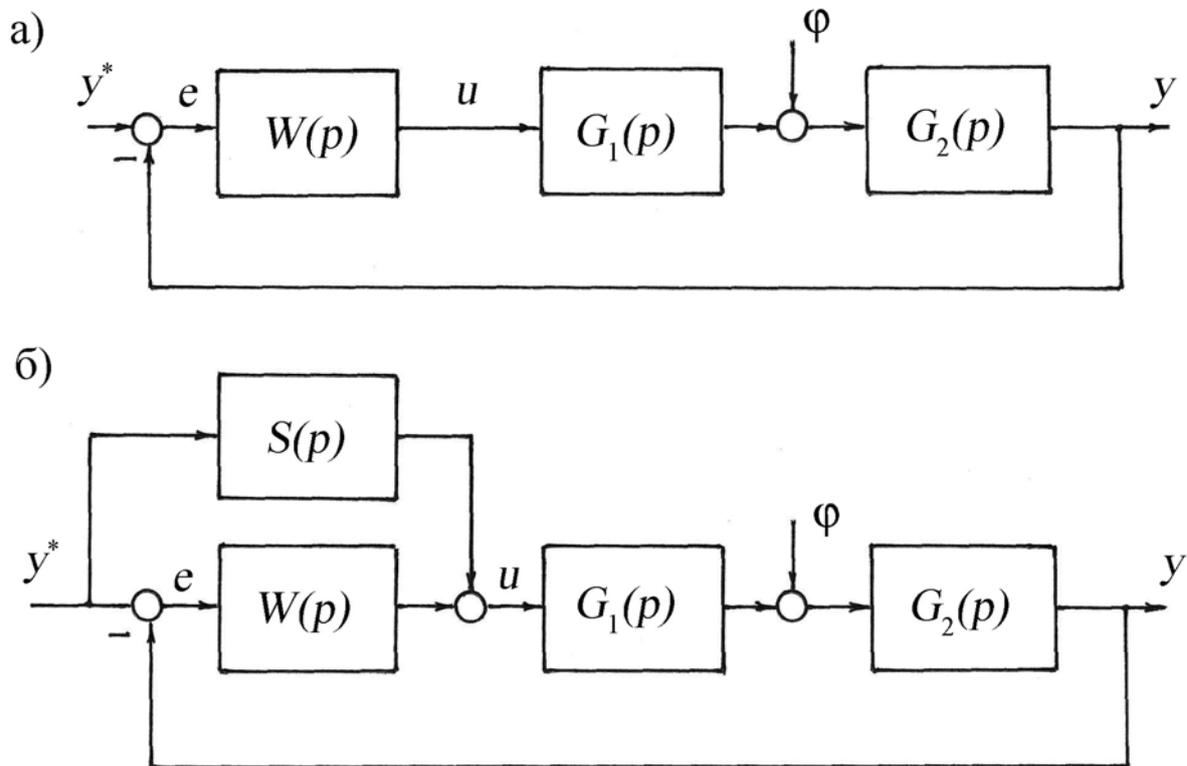


Рис. 3.2. Структурные схемы системы управления

В соответствии со схемой, представленной на рис. 3.2, а, запишем связь между управляемой переменной y и входными воздействиями y^* и φ

$$y = \frac{kW'(p)G(p)}{1 + kW'(p)G(p)} y^* + \frac{G_2(p)}{1 + kW'(p)G(p)} \varphi. \quad (3.31)$$

Видно, что при $k \rightarrow \infty$ первое слагаемое в правой части выражения (3.31) стремится к заданию y^* , а второе уменьшается до нуля, что и решает поставленную выше задачу слежения (3.30), если, конечно, при каждом значении $k \rightarrow \infty$ замкнутая система остается асимптотически устойчивой.

При использовании больших коэффициентов усиления помимо устойчивости необходимо также исследовать влияние ограничений, имеющих в любой реальной системе, поскольку увеличение коэф-

коэффициента усиления ведет к увеличению значений переменных системы. Кроме того, следует выяснить, насколько чувствительно решение, получающееся по методу большого коэффициента усиления, к вариациям условий задачи или, иными словами, проверить грубость замкнутой системы по отношению к регулярным и сингулярным возмущениям.

3.2.2. Устойчивость систем с большим коэффициентом усиления

Рассмотрим условия устойчивости замкнутой системы при каждом значении $k \rightarrow \infty$. Представим передаточные функции объекта и регулятора в виде отношений полиномов

$$G(p) = \frac{P_G(p)}{Q_G(p)}, \quad W(p) = k \frac{P_W(p)}{Q_W(p)}. \quad (3.32)$$

Тогда в соответствии с соотношением (3.31) характеристический полином замкнутой системы приводится к виду

$$Q(p) = Q_G(p)Q_W(p) + kP_G(p)P_W(p) \quad (3.33)$$

и проблема устойчивости замкнутой системы сводится к исследованию при $k \rightarrow \infty$ гурвицевости однопараметрического семейства полиномов (3.33).

Из (3.33) следует, что при $k \rightarrow \infty$ часть корней исследуемого полинома совпадает с корнями полиномов $P_G(p)$ и $P_W(p)$, которые должны обязательно иметь отрицательные вещественные части. Это одно из ограничений метода большого коэффициента усиления на допустимые передаточные функции объекта и регулятора (3.32).

Пусть по условию физической реализуемости объекта и регулятора

$$\deg[P_G(p)P_W(p)] < \deg[Q_G(p)Q_W(p)] \quad (3.34)$$

и, следовательно, полином (3.33) при $k \rightarrow \infty$ помимо корней, совпадающих с корнями полиномов $P_G(p)$ и $P_W(p)$ имеет другие корни, которые также должны иметь отрицательные вещественные части.

Анализ полинома (3.33) при каждом значении $k \rightarrow \infty$ показывает, что абсолютные значения его корней $p_i(k)$, не стремящихся при $k \rightarrow \infty$ к корням полиномов $P_G(p)$ и $P_W(p)$, увеличиваются до бесконечности, так как при любом k должно выполняться равенство

$$Q_G(p_i(k))Q_W(p_i(k)) + kP_G(p_i(k))P_W(p_i(k)) = 0.$$

По условию устойчивости эти корни при $k \rightarrow \infty$ должны уходить в бесконечность, оставаясь в левой полуплоскости комплексной переменной p . Это еще одно ограничение метода большого коэффициента усиления, требующее проверки вида корневых годографов при больших k .

Покажем как эту проверку можно осуществить более простым способом. Учитывая условие (3.34) поделим с помощью алгоритма Евклида полином $[Q_G(p)Q_W(p)]$ на полином $[P_G(p)P_W(p)]$. В результате получим равенство

$$Q_G(p)Q_W(p) = \alpha(p)P_G(p)P_W(p) + \beta(p), \quad (3.35)$$

где $\alpha(p)$ – частное, а $\beta(p)$ – остаток деления, причем его степень меньше степени делителя, т. е.

$$\deg \beta(p) < \deg [P_G(p)P_W(p)]. \quad (3.36)$$

Используя равенство (3.35) представим характеристический полином (3.33) в виде

$$Q(p) = P_G(p)P_W(p) \left[\alpha(p) + \frac{\beta(p)}{P_G(p)P_W(p)} + k \right].$$

В силу неравенства (3.36) и с учетом роста абсолютных значений корней $p_i(k)$ при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta(p_i(k))}{P_G(p_i(k))P_W(p_i(k))} = 0.$$

Теперь ясно, что бесконечно растущие при $k \rightarrow \infty$ корни полинома (3.33) стремятся к корням уравнения

$$\alpha(p) + k = 0.$$

Это, в свою очередь, означает, что устойчивость полинома (3.33) при каждом значении $k \rightarrow \infty$ имеет место только в двух случаях

- $\deg \alpha(p) = 1$, т.е. $\alpha(p) = \alpha_2 p + \alpha_1$ при $\alpha_2 > 0$;
- $\deg \alpha(p) = 2$, т.е. $\alpha(p) = \alpha_3 p^2 + \alpha_2 p + \alpha_1$ при $\alpha_3 > 0$ и $\alpha_2 > 0$.

Прочие ситуации, в том числе и $\deg \alpha(p) > 2$, ведут к неустойчивости.

Естественно, что первое ограничение метода, связанное с устойчивостью полиномов $P_G(p)$ и $P_W(p)$, должно быть удовлетворено.

Пример 3.1.

Пусть объект управления (рис. 3.1) имеет второй порядок

$$G_1(p) = \frac{1}{p + a_1}, \quad G_2(p) = \frac{1}{p + a_2},$$

причем a_1 и a_2 не обязательно положительные числа, т.е. объект не обязательно устойчив.

Передаточную функцию регулятора (рис. 3.2, а) примем в виде

$$W(p) = k \frac{P_W(p)}{Q_W(p)}, \quad k = \text{const}, \quad \deg Q_W(p) \geq \deg P_W(p). \quad (3.37)$$

Из (3.31) после соответствующих преобразований получим операторное соотношение

$$[(p + a_1)(p + a_2)Q_W(p) + kP_W(p)]y = kP_W(p)y^* + (p + a_1)Q_W(p)\varphi.$$

Если в последнем равенстве коэффициент усиления регулятора $k \rightarrow \infty$, то в пределе получим требуемое равенство $y = y^*$. Однако, выше было показано, что допустимость предельного перехода зависит от устойчивости полинома $P_W(p)$ и однопараметрического семейства полиномов

$$Q(p) = (p + a_1)(p + a_2)Q_W(p) + kP_W(p)$$

при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим конкретные варианты регулятора.

1. Пусть $P_W(p) = 1$. Тогда в соответствии с (3.37) регулятор минимального порядка получается при $Q_W(p) = 1$ и все определяется устойчивостью характеристических полиномов

$$Q(p) = p^2 + (a_1 + a_2)p + a_1 a_2 + k$$

при $k \rightarrow \infty$, которая будет иметь место при $a_1 + a_2 > 0$.

2. Пусть $P_W(p) = p + c$, где $c = \text{const} > 0$. Тогда при $Q_W(p) = 1$ устойчивость характеристических полиномов

$$Q(p) = p^2 + (a_1 + a_2 + k)p + a_1 a_2 + kc$$

будет иметь место при любых параметрах a_1 и a_2 .

Однако в этом случае передаточная функция регулятора

$$W(p) = k(p + c) \quad (3.38)$$

физически нереализуема.

3. Рассмотрим вместо (3.38) физически реализуемую передаточную функцию регулятора

$$W(p) = k \frac{p + c}{p + d}, \quad d = \text{const} > 0. \quad (3.39)$$

Тогда при $a_1 + a_2 + d > c$ и $k \rightarrow \infty$ семейство характеристических полиномов

$$Q(p) = p^3 + (a_1 + a_2 + d)p^2 + [a_1 a_2 + (a_1 + a_2)d + k]p + a_1 a_2 d + kc$$

будет устойчивым, а значит при $k \rightarrow \infty$ решается поставленная задача слежения $y = y^*$.

Заметим, что все выводы сделаны без учета возможных вариаций передаточной функции объекта.

3.2.3. Грубость систем с большим коэффициентом усиления

Рассмотрим влияние на устойчивость замкнутой системы двух типов возмущений:

- регулярных, т. е. обусловленных малыми отклонениями параметров объекта от расчетных значений;
- сингулярных, при которых меняется порядок объекта.

При регулярных возмущениях достаточно обратиться к характеристическому полиному (3.33). Очевидно, что если полиномы $P_G(p)$ и $P_W(p)$, а также семейство полиномов (3.33) при $k \rightarrow \infty$ устойчивы, то в силу непрерывной зависимости корней полиномов от парамет-

ров, малые изменения параметров полиномов $P_G(p)$ и $Q_G(p)$ (т. е. параметров объекта) не приведут к неустойчивости, т. е. не приведут к качественному изменению характера процессов в замкнутой системе (см. п. 1.2).

Таким образом, системы с большим коэффициентом усиления грубы по отношению к регулярным возмущениям.

При сингулярных возмущениях меняется порядок объекта, например, вместо передаточной функции $G(p) = \frac{P_G(p)}{Q_G(p)}$ рассматривают

передаточную функцию

$$\tilde{G}(p) = \frac{P_G(p)}{(\tau p + 1)Q_G(p)},$$

где τ – малая постоянная времени, которая ранее просто не учитывалась в передаточной функции объекта, т. е. предполагалось, что $\tau p + 1 \cong 1$.

Эта ситуация типичная, так как реальный объект всегда сложнее его математической модели. Так в механических системах неучет казался бы несущественных собственных высокочастотных колебаний объекта эквивалентен предположению, что в знаменателе передаточной функции объекта можно положить $\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1 \cong 1$ и т. д.

Таким образом, при сингулярных возмущениях устойчивость замкнутой системы вместо полинома (3.33) определяется полиномом

$$\tilde{Q}(p) = \tau(p)Q_G(p)Q_W(p) + kP_G(p)P_W(p), \quad (3.40)$$

где $\tau(p)$ – некоторый устойчивый, но неизвестный полином степени не ниже первой, т. е. $\deg \tau(p) \geq 1$.

Анализ полинома (3.40) показывает, что для физически реализуемого регулятора этот полином практически всегда неустойчив при $k \rightarrow \infty$, т. е. системы с большим коэффициентом усиления негрубы по отношению к сингулярным возмущениям.

Можно показать, что для каждого полинома $\tau(p)$ существует предельно допустимое по соображениям устойчивости значение ко-

ээффициента усиления \bar{k} такое, что при $0 \leq k \leq \bar{k}$ полином (3.40) устойчив, однако в этом случае цель управления (3.30) точно не выполняется и, кроме того, ошибка слежения $e = y^* - y$ зависит от возмущения φ .

Пример 3.2.

Вернемся к примеру 3.1. Учтем в передаточной функции объекта малую постоянную времени τ

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{(\tau p + 1)(p + a_1)(p + a_2)}.$$

Передаточную функцию регулятора оставим в виде (3.39). Тогда характеристический полином замкнутой системы будет иметь вид

$$\tilde{Q}(p) = (\tau p + 1)(p + a_1)(p + a_2)(p + d) + k(p + c). \quad (3.41)$$

Используя критерий устойчивости Гурвица можно показать, что ни при каком положительном значении τ полином (3.41) не может быть устойчивым при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, построенная в примере 3.1 система управления неработоспособна при $k \rightarrow \infty$. Ее практическое использование возможно только при $k < \bar{k}$. Если $a_1 + a_2 + d > c$, то оценка предельно допустимого коэффициента усиления имеет вид

$$\bar{k} \cong \frac{a_1 + a_2 + d - c}{\tau}.$$

При малом τ значение \bar{k} может оказаться довольно большим и эффект от использования глубокой обратной связи будет вполне приемлемым.

На практике, чтобы повысить точность поддержания требуемого равенства $y = y^*$ при конечных значениях коэффициента усиления $k < \bar{k}$, обычно используют схему, приведенную на рис. 3.2, б, в соответствии с которой связь между переменными y и y^* , φ может быть представлена в виде

$$y = \frac{[kW'(p) + S(p)]G(p)}{1 + kW'(p)G(p)} y^* + \frac{G_2(p)}{1 + kW'(p)G(p)} \varphi. \quad (3.42)$$

Сравнивая выражения (3.31) и (3.42) устанавливаем, что оператор $S(p)$ не влияет на устойчивость замкнутой системы, а также на точность компенсации возмущения φ . В то же время при конечном коэффициенте усиления $k < \bar{k}$ с помощью оператора $S(p)$ можно повысить точность поддержания требуемого равенства $y = y^*$.

3.2.4. Учет амплитудных ограничений на управление

В любой реальной системе управления всегда имеют место амплитудные ограничения сигналов. В системах с большим коэффициентом усиления в первую очередь это относится к управлению u , которое пропорционально большому коэффициенту усиления k (см. структурную схему на рис. 3.2, а). Рассмотрим фрагменты этой структурной схемы, представленные на рис. 3.3.

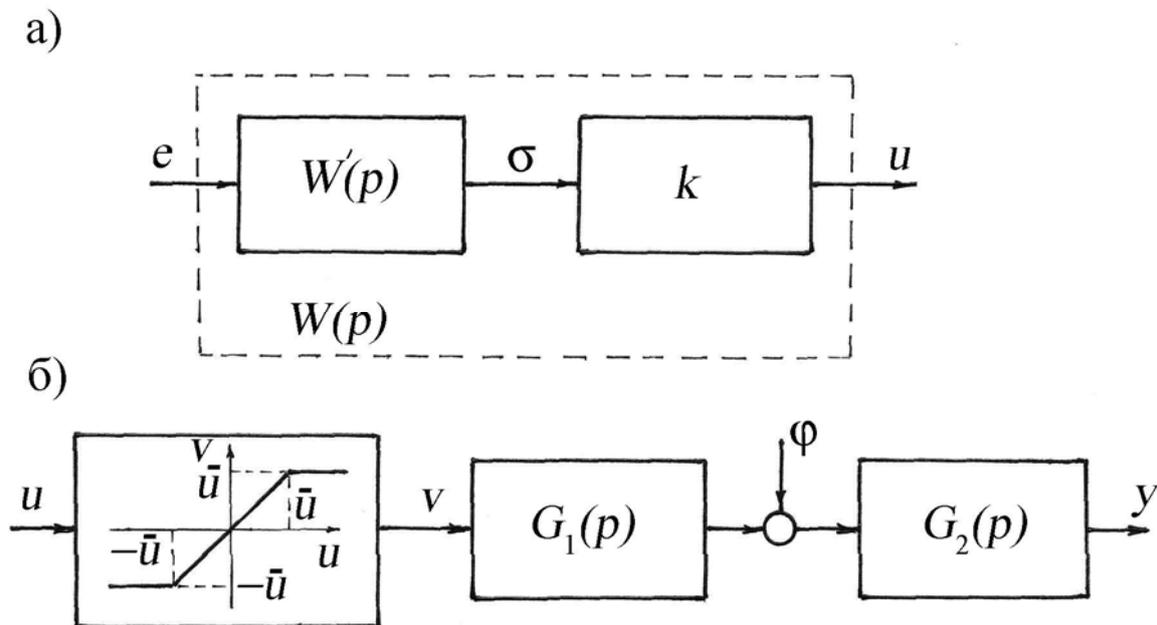


Рис. 3.3. Фрагменты структурной схемы с большим коэффициентом усиления в регуляторе (а) и с элементом насыщения в объекте (б)

На рис. 3.3 выделен коэффициент усиления k (рис. 3.3, а) и дополнительно введен элемент, описываемый функцией насыщения

$$v = \text{sat}(u) = \begin{cases} u, & |u| < \bar{u}, \\ \bar{u} \text{sign} u, & |u| \geq \bar{u}, \end{cases}$$

где \bar{u} – предельно допустимое значение управления (рис. 3.3, б).

Если $u = k\sigma$, то зависимость $v = \text{sat}(k\sigma)$ имеет вид, показанный на рис. 3.4.

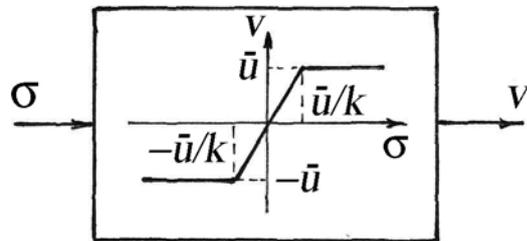


Рис. 3.4. Элемент насыщения с усилением

При $k \rightarrow \infty$ функция $\text{sat}(k\sigma)$ превращается в функцию идеально-го реле (рис. 3.5) и поведение замкнутой системы, которая становится релейной, качественно меняется по сравнению с тем, что может происходить в линейных системах.

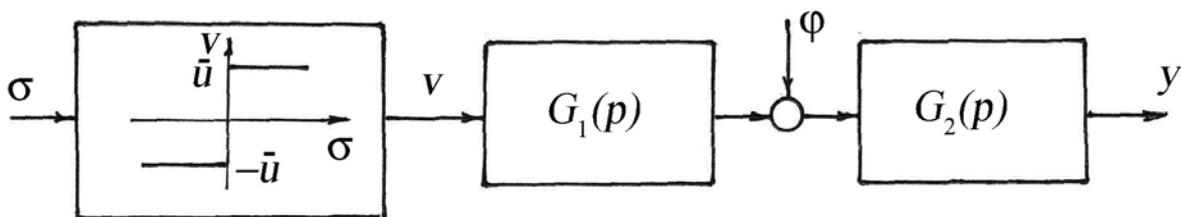


Рис. 3.5. Фрагмент структурной схемы с релейным элементом

Многообразие режимов, происходящих в релейных системах, делает их чрезвычайно перспективными. Именно на этом пути достигнуты наибольшие успехи современной теории и практики управления [16].

4. УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОЛЬШОГО КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ

Для управляемых механических систем характерна априорная неопределенность возмущающих воздействий, а также структурная и параметрическая неопределенность математических моделей. Эту особенность необходимо учитывать при синтезе законов управления.

Возмущающие воздействия приводят к возникновению вынужденных колебаний. Для их подавления широкое применение находят пассивные устройства, в которых используются инерционные элементы, пружины и демпферы. Хорошим примером таких устройств служат динамические гасители [4]. Существует и другой путь подавления колебаний, связанный с использованием возможностей активных систем [8, 24]. Известно, что активные системы с обратными связями обладают рядом преимуществ. Они могут, если это необходимо, как излучать энергию, так и поглощать ее, тогда как пассивные системы могут лишь поглощать и временно запасать энергию. Другое преимущество состоит в том, что активные системы могут создавать в данной точке силу, зависящую от сигналов с датчиков обратных связей, которые находятся далеко от этой точки. Пассивные же системы создают лишь локальные силы, связанные только с локальными параметрами. Активные системы с помощью настройки коэффициентов обратных связей можно адаптировать к различным условиям работы без существенного вмешательства в конструкцию механической системы. В качестве недостатка можно отметить относительную сложность активных систем, так как для их применения необходимо иметь внешний источник энергии и управляющее устройство, а также систему датчиков обратных связей. Возможности использования в активных системах большого коэффициента усиления для подавления вынужденных колебаний в условиях неопределенности возмущающих воздействий рассмотрены в п. 4.1.

Еще одна проблема, привлекающая внимание многих исследователей, связана с робастным управлением механическими системами, описываемыми уравнениями Лагранжа. В приложении к робототехнике основное внимание исследователей концентрировалось на ситуациях, когда возможно непосредственное управление обобщенными силами, прилагаемыми к каждой степени подвижности. Здесь были получены многочисленные результаты, поскольку легко применимы простейшие идеи динамической компенсации (feedback linearization) и сильной обратной связи (high gain feedback) по положению и скорости в линейной форме или в виде релейного управления [22]. Однако схемы компенсации не являются робастными по отношению к отклонениям параметров объекта управления от расчетных значений (см. п. 2.2), а схемы сильной обратной связи неробастны по отношению к сингулярным возмущениям (см. п. 3.2), неизбежно возникающим в силу неидеальной жесткости элементов конструкций, в особенности, нежесткости кинематических передач, связывающих звенья с двигателями.

В то же время в практических разработках для управления роботами по-прежнему в основном применяются классические (линейные) PID-регуляторы. Опыт показывает, что приверженность к таким законам управления является следствием не только консерватизма разработчиков, но и внутренних достоинств, заключающихся прежде всего в робастности подобных регуляторов. Но и здесь имеются определенные проблемы, так как применение PID-регуляторов для нежестких объектов управления связано с проблемой выбора типа и мест установки датчиков обратных связей. Ниже в п. 4.2 на примере многозвенного робота основное внимание уделяется схемам, основанным на измерениях положения управляемых звеньев и угловых скоростей двигателей, которые наиболее часто встречаются на практике. Рассмотрен модифицированный PID-регулятор с большим коэффициентом усиления и приведены условия робастной устойчивости замкнутой нелинейной системы.

4.1. Подавление вынужденных колебаний, вызванных произвольным возмущением

4.1.1. Подавление вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы

Ниже рассмотрен метод большого коэффициента усиления, позволяющий синтезировать управление, подавляющее действие на колебательную систему с одной степенью свободы произвольного возмущения [8]. Метод не требует измерения возмущения, а также знания его математической модели. Основная идея состоит в том, чтобы оценить мгновенное значение возмущения по имеющимся измерениям и с помощью обратной связи создать управляющее воздействие, равное по величине и противоположное по направлению возмущающему воздействию. Приводятся условия, при которых рассматриваемый метод является наиболее эффективным.

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + 2\xi\sigma\dot{x} + \sigma^2x = u + w, \quad (4.1)$$

где σ – собственная частота; ξ – безразмерный коэффициент демпфирования ($\xi < 1$); u – управляющее воздействие; w – произвольное возмущающее воздействие.

Предполагается, что измерению доступна только координата x . При таком измерении система (4.1) является полностью наблюдаемой [20]. Кроме того, она является и полностью управляемой. Это означает, что для системы (4.1) могут быть корректно поставлены и решены задачи оценки вектора состояния и управления с обратной связью по состоянию.

Обозначим через $v = u + w$ суммарное воздействие на колебательную систему (4.1) и запишем уравнения для оценки \hat{v} в следующем виде

$$\begin{aligned}
\dot{z} + \mu z &= A_1 x, \\
\dot{y} + \mu y &= A_2 x + Bz, \\
\hat{v} &= A_3 x + Cy,
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

где μ, A_1, A_2, A_3, B и C – настраиваемые параметры.

Нетрудно показать, что если принять

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2\xi\sigma\mu - \sigma^2 - \mu^2, \quad A_2 = 2\mu^3 - 2\xi\sigma\mu^2, \\
A_3 &= \mu^2, \quad B = \mu^2, \quad C = -1,
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

то из (4.1) и (4.2) для оценки \hat{v} суммарного воздействия v можно получить уравнение

$$\ddot{\hat{v}} + 2\mu\dot{\hat{v}} + \mu^2\hat{v} = \mu^2(\ddot{x} + 2\xi\sigma\dot{x} + \sigma^2x).
\tag{4.4}$$

Применяя к уравнению (4.4) преобразование Лапласа и учитывая (4.1), для связи изображений суммарного воздействия $V(p)$ и оценки суммарного воздействия $\hat{V}(p)$, получим

$$\hat{V}(p) = \frac{\mu^2}{(p + \mu)^2} V(p).
\tag{4.5}$$

Из (4.5) видно, что если значение μ выбрать существенно больше доминирующих частот возмущения $w(t)$, входящего в состав суммарного воздействия $v(t)$, то система (4.2) с настройкой (4.3) дает хорошую оценку $\hat{v}(t)$ суммарного воздействия $v(t)$.

Сформируем управляющее воздействие $u(t)$ в виде линейной отрицательной обратной связи по оценке $\hat{v}(t)$

$$u = -k\hat{v},
\tag{4.6}$$

где коэффициент обратной связи $k \gg 1$.

Объединяя соотношения (4.1), (4.2) и (4.6) получим уравнения замкнутой системы, из которых после перехода к изображениям по Лапласу можно установить связь между изображениями перемещения $X(p)$ и возмущающего воздействия $W(p)$

$$(p^2 + 2\xi\sigma p + \sigma^2)X(p) = \left[1 + \frac{k\mu^2}{(p + \mu)^2} \right]^{-1} W(p).
\tag{4.7}$$

При больших значениях μ и k правая часть выражения (4.7) приближенно равна $W(p)/k$, т.е. выбрав достаточно большое k , можно добиться значительного уменьшения вынужденных колебаний, даже в случае, если μ ненамного превышает доминирующие частоты возмущающего воздействия $w(t)$. Таким образом, в замкнутой системе (теоретически при $k \rightarrow \infty$) обеспечивается эффект полного уравнивания управлением $u(t)$ в виде (4.6) неизвестного возмущения $w(t)$.

Рассмотрим более общий случай, когда помимо подавления возмущения $w(t)$ управляющее воздействие $u(t)$ должно обеспечивать улучшение жесткостных и демпфирующих характеристик колебательной системы (4.1) с помощью обратных связей по координате $x(t)$ и скорости $\dot{x}(t)$. В этом случае для управления $u(t)$ вместо выражения (4.6) запишем

$$u = -k(\bar{v} + l_1\dot{x} + l_2x), \quad (4.8)$$

где l_1 и l_2 – постоянные коэффициенты.

Если скорость $\dot{x}(t)$ непосредственно не измеряется, то ее можно оценить при помощи той же системы оценки (4.2). Из первых двух уравнений системы (4.2) в изображениях по Лапласу получим

$$Y(p) = \left[\frac{2\mu^3 - 2\xi\sigma\mu^2}{(p + \mu)^2} p + \frac{\mu^4 - \mu^2\sigma^2}{(p + \mu)^2} \right] X(p).$$

Следовательно, при больших μ

$$y \cong 2\mu\dot{x} + \mu^2x.$$

Таким образом, закон управления типа (4.8) при отсутствии прямого измерения скорости $\dot{x}(t)$ можно записать в виде

$$u = -k(\bar{v} + \lambda_1y + \lambda_2x),$$

где $\lambda_1 = \frac{l_1}{2\mu}$, $\lambda_2 = l_2 - \frac{l_1\mu}{2}$.

Исследуем устойчивость замкнутой системы, описываемой уравнениями (4.1), (4.2) и (4.6). Система имеет четвертый порядок. Ее структурная схема приведена на рис. 4.1.

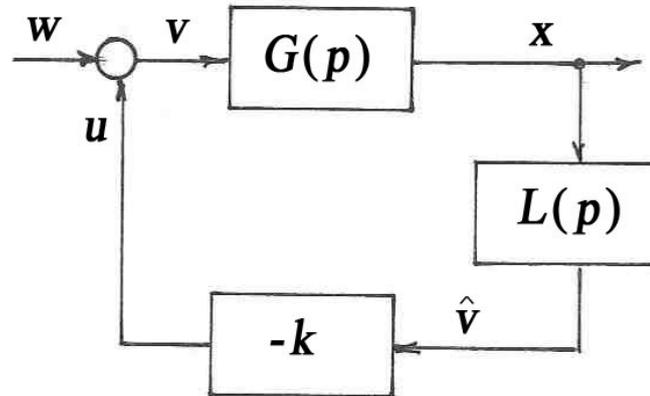


Рис. 4.1. Структурная схема замкнутой системы с подавлением вынужденных колебаний

На рис. 4.1 введены следующие обозначения:

$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi\sigma p + \sigma^2}$ – передаточная функция колебательной

системы (4.1) с одной степенью свободы;

$L(p) = \vartheta \frac{p^2 + \alpha p + \beta}{(p + \mu)^2}$ – передаточная функция системы (4.2) оцен-

ки суммарного воздействия $v(t)$,

где $\vartheta = A_3$, $\alpha = 2\mu + CA_2A_3^{-1}$, $\beta = \mu^2 + CA_2\mu A_3^{-1} + CBA_1A_3^{-1}$.

Структурная схема замкнутой системы (см. рис. 4.1) полностью сохраняется и при законе управления (4.8), поскольку коэффициенты λ_1 и λ_2 можно включить в C и A_3 (см. третье уравнение (4.2)). При $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ имеют место следующие (расчетные) значения настраиваемых параметров $\vartheta = \mu^2$, $\alpha = 2\xi\sigma$, $\beta = \sigma^2$.

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(p) = k\vartheta(p^2 + \alpha p + \beta) + (p^2 + 2\xi\sigma p + \sigma^2)(p + \mu)^2. \quad (4.9)$$

Примерный вид корневого годографа полинома (4.9) при $0 \leq k < \infty$ приведен на рис. 4.2.

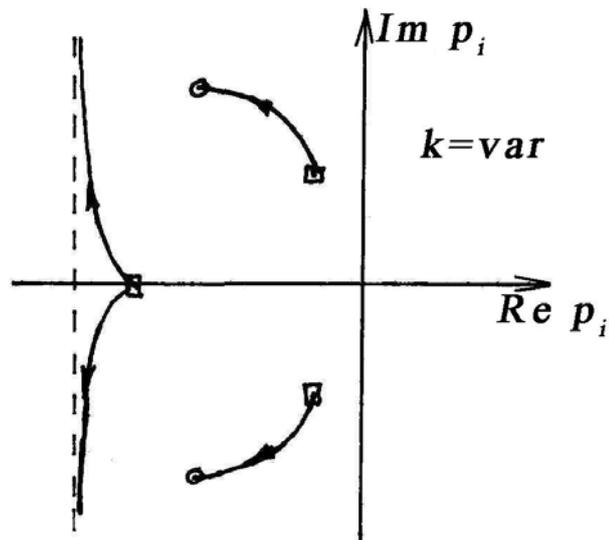


Рис. 4.2. Примерный вид корневого годографа характеристического полинома замкнутой системы

При $k = 0$ характеристический полином (4.9) имеет пару комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\sigma(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$ и пару кратных действительных корней $p_{3,4} = -\mu$ (на рис. 4.2 эти корни обозначены квадратиками). При $k \rightarrow \infty$ одна пара корней стремится к корням

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \quad (\text{на рис. 4.2 эти корни обозначены кружочками}),$$

а другая пара корней уходит в бесконечность. Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, т.е. полином $p^2 + \alpha p + \beta$ Гурвицев, то неустойчивость характеристического полинома (4.9) возможна только в случае, когда упомянутая выше другая пара корней, перед тем как уйти в бесконечность при $k \rightarrow \infty$, при некотором положительном значении k перейдет в правую полуплоскость, а при другом положительном значении k снова вернется в левую полуплоскость. Необходимое и достаточное условие несуществования двух таких значений k дает критерий Гурвица.

Покажем это следующим образом. Представим характеристический полином (4.9) в виде

$$Q(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4, \quad (4.10)$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2(\mu + \xi\sigma), \quad a_2 = \sigma^2 + \mu^2 + 4\xi\sigma\mu + k\vartheta,$$

$$a_3 = 2\mu\sigma(\sigma + \xi\mu) + k\vartheta\alpha, \quad a_4 = \sigma^2\mu^2 + k\vartheta\beta.$$

Для полинома четвертого порядка согласно критерию Гурвица при пересечении траекториями корней мнимой оси должно выполняться условие [20]

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 = 0. \quad (4.11)$$

Учитывая (4.10) нетрудно убедиться, что (4.11) – это квадратное уравнение относительно коэффициента усиления k

$$D_0 k^2 + D_1 k + D_2 = 0,$$

$$D_0 = \theta^2 \alpha [2(\mu + \xi\sigma) - \alpha],$$

$$D_1 = 2\theta \alpha [(\mu + \xi\sigma)(\sigma^2 + \mu^2 + 4\xi\sigma\mu) - \mu\sigma(\sigma + \xi\mu)] - 4\theta\beta(\mu + \xi\sigma)^2 + 2\theta\mu\sigma(\sigma + \xi\mu)[2(\mu + \xi\sigma) - \alpha],$$

$$D_2 = 4\mu\sigma[(\mu + \xi\sigma)(\sigma^2 + \mu^2 + 4\xi\sigma\mu) - \mu\sigma(\sigma + \xi\mu)](\sigma + \xi\mu) - 4(\mu + \xi\sigma)^2 \sigma^2 \mu^2,$$

которое не будет иметь двух различных положительных корней при $\frac{D_1}{D_0} > 0$. При выполнении этого условия замкнутая система будет ус-

тойчивой при всех значениях $k > 0$.

Исследуем грубость замкнутой системы (см. рис. 4.1) при отклонении параметров колебательной системы (4.1) от расчетных значений. Рассмотрим случай, когда обратная связь по x и \dot{x} отсутствует, т.е. в (4.8) $l_1 = 0$ и $l_2 = 0$. С точки зрения устойчивости это наихудший случай, поскольку обратная связь по \dot{x} обычно выбирается так, чтобы повысить степень устойчивости. В рассматриваемом случае величины α и β должны быть равны $2\hat{\xi}\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}^2$ соответственно, где $\hat{\xi}$ и $\hat{\sigma}$ – оцен-

ки параметров ξ и σ колебательной системы (4.1). Если при этом $\mu > \xi\sigma$ и имеет тот же порядок, что и σ , то условие $\frac{D_1}{D_0} > 0$ выполняется при $\bar{\sigma} < \sigma$.

Это означает, что для получения хороших оценок с помощью алгоритма (4.2) выбирается достаточно большое значение μ , а оценка $\bar{\sigma}$ собственной частоты системы (4.1) занижается. При этом обеспечивается грубость замкнутой системы по отношению к неточно известным параметрам колебательной системы (4.1).

Заметим, что согласно проведенному выше анализу коэффициент обратной связи k в управлении (4.6) желательно брать как можно бóльшим. Однако, из теории и практики известно, что при сингулярных (структурных) возмущениях чрезмерно большое значение k во многих случаях ведет к неустойчивости. Эффект дестабилизирующего влияния неучтенной (высокочастотной) динамики объекта управления уже рассматривался в п. 3.2. Для системы (4.1) это прежде всего динамика датчика обратной связи, измеряющего координату $x(t)$, и актуатора, реализующего управляющее воздействие $u(t)$. Учет этого обстоятельства при практической реализации законов управления (4.6) и (4.8) требует введения ограничения $k < \bar{k}$ (см. п. 3.2).

4.1.2. Подавление вынужденных колебаний в кинематическом механизме

Кинематический механизм в общем случае представляет собой колебательную систему со многими степенями свободы [8]. Если влияние демпфирования на вынужденные колебания системы пренебрежимо мало, то ее можно описать в главных координатах. Предположим, что количество имеющихся актуаторов равно количеству учитываемых форм колебаний, и их расположение позволяет подавить эти формы, т.е. имеет место полная управляемость. Пусть также существует возможность измерить составляющие перемещения, соответствующие собственным формам. Тогда управление колебаниями

теоретически можно осуществлять по каждой форме по отдельности так, как это делалось выше (см. п. 4.1.1). Учитывая, что прямое измерение составляющих перемещения, соответствующих собственным формам, по отдельности невозможно, в систему управления колебаниями как составная часть должна входить система оценки этих составляющих по имеющимся измерениям. При этом количество датчиков и места их установки должны быть такими, чтобы обеспечивалась полная наблюдаемость системы.

Однако, применять эти идеи к реальным конструкциям следует с большой осторожностью. В п. 4.1.1 уже отмечалось возможное дестабилизирующее влияние неучтенной динамики датчиков и актуаторов. Если динамика этих устройств не учитывается при синтезе закона управления, то следует позаботиться о том, чтобы их частотные характеристики оправдывали это допущение в диапазоне рабочих частот системы управления.

Не менее важно и то, что неучтенные слабодемпфированные высокочастотные формы колебаний самого объекта управления при использовании системы оценки тоже могут приводить к неустойчивости замкнутой системы. Это явление связано с тем, что в реальных условиях управляющее устройство влияет также и на те формы, которые не учитывались при составлении расчетной схемы. Движения по этим формам примешиваются к выходным сигналам датчиков. В результате при большом коэффициенте обратной связи замкнутая система может оказаться неустойчивой.

Следует упомянуть также о том, что эффективность системы оценки может оказаться недостаточной при высокочастотных шумах датчиков обратных связей, а также, если собственные частоты объекта управления группируются вокруг некоторой частоты.

Тем не менее, существует много примеров конструкций, которыми можно успешно управлять по крайней мере пока речь идет о задаче подавления колебаний [8, 24].

Рассмотрим более подробно задачу подавления колебаний в кинематическом механизме с использованием большого коэффициента усиления.

Функциональная схема кинематического механизма, осуществляющего вращательное движение, приведена на рис. 4.3. В электро-механическом варианте он включает в себя электродвигатель, который запитывается через усилитель, передаточный механизм (редуктор) и инерционную нагрузку.

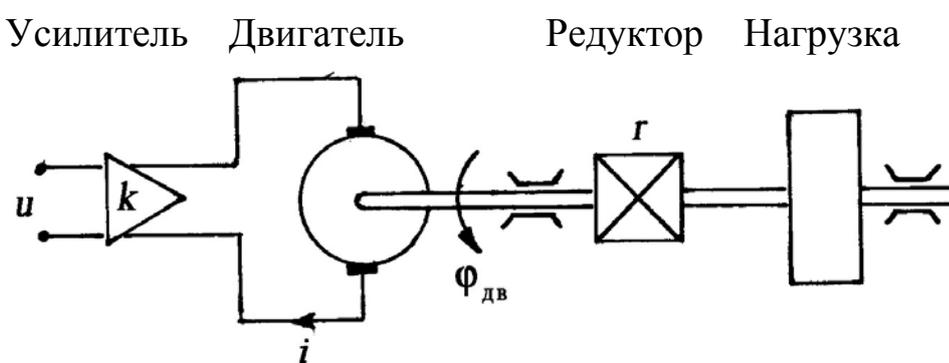


Рис. 4.3. Функциональная схема кинематического механизма

Кинематический механизм может работать:

- в режиме позиционирования, когда инерционную нагрузку требуется привести в заданное положение;
- в режиме стабилизации скорости вращения инерционной нагрузки;
- в следящем режиме при произвольном задании на движение инерционной нагрузки.

Конечная жесткость элементов кинематического механизма в большинстве случаев приводит к возникновению колебаний, сопутствующих основному движению. Если в подобных системах вторая резонансная частота значительно больше первой и находится за пределами диапазона рабочих частот, то для механической части (вращающегося ротора двигателя, редуктора с передаточным отношением r и

инерционной нагрузки) может быть выбрана двухмассовая расчетная схема [9].

Учтем в расчетной схеме кинематического механизма, функциональная схема которого приведена на рис. 4.3., помимо механической – электрическую часть (рис. 4.4) [8,9].

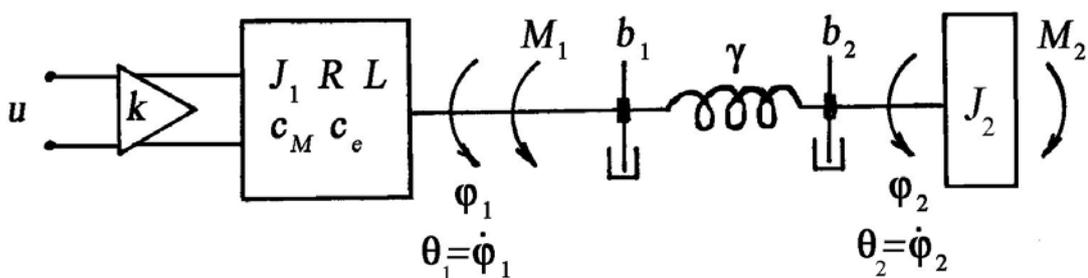


Рис. 4.4. Расчетная схема кинематического механизма

На рис. 4.4 введены следующие обозначения: J_2, b_2 и γ – соответственно момент инерции нагрузки (с учетом выходной ступени редуктора), коэффициент вязкого трения и жесткость редуктора на кручение, приведенные к выходу редуктора; φ_2 и $\theta_2 = \dot{\varphi}_2$ – угол поворота и угловая скорость нагрузки; J_1, R, L, b_1, c_M и c_e – соответственно момент инерции ротора двигателя (с учетом входной ступени редуктора), приведенный к выходу редуктора, активное сопротивление и индуктивность якорной цепи двигателя, коэффициент вязкого трения, постоянная крутящего момента двигателя и постоянная противо-ЭДС; φ_1 и $\theta_1 = \dot{\varphi}_1$ – угол поворота и угловая скорость ротора двигателя, приведенные к выходу редуктора; k, i и u – коэффициент усиления усилителя, ток цепи якоря и входное (управляющее) напряжение.

Математическая модель кинематического механизма, расчетная схема которого приведена на рис. 4.4 в предположении линейности всех элементов имеет вид

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 + \gamma(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1, \\
 J_2 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2 + \gamma(\varphi_2 - \varphi_1) &= M_2, \\
 \tau_1 \dot{M}_1 + M_1 &= k_1 u - h \dot{\varphi}_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

В уравнениях (4.12) дополнительно введены следующие обозначения: $M_1 = rc_M i$ – приведенный к выходу редуктора крутящий момент двигателя; $r = \frac{\dot{\varphi}_{\text{дв}}}{\dot{\varphi}_1}$ – передаточное отношение редуктора; M_2 – возмущающий момент нагрузки; $\tau_1 = \frac{L}{R}$ – электрическая постоянная времени двигателя; $k_1 = \frac{rc_M k}{R}$ и $h = \frac{r^2 c_e c_M}{R}$ – постоянные параметры [7, 20].

Электрическая постоянная времени τ_1 современных двигателей обычно не превышает тысячных долей секунды. Это существенно меньше периода упругих колебаний. Дополнительно уменьшить постоянную времени τ_1 можно с помощью отрицательной обратной связи по току i цепи якоря [8]. Механическая постоянная времени $\tau \cong \frac{J_1 + J_2}{b_1 + b_2 + h}$, характеризующая движение кинематического механизма как твердого тела, обычно на порядок и более превышает электрическую постоянную времени τ_1 . Поэтому последнее уравнение в (4.12) можно приближенно записать следующим образом

$$M_1 \cong k_1 u - h \dot{\varphi}_1.$$

В результате система уравнений (4.12) приводится к виду

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (b_1 + h) \dot{\varphi}_1 + \gamma(\varphi_1 - \varphi_2) &= k_1 u, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2 + \gamma(\varphi_2 - \varphi_1) &= M_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Требуется по измерению угловой скорости нагрузки $\theta_2(t) = \dot{\varphi}_2(t)$ сформировать управление $u(t)$, компенсирующее действие возмущающего момента нагрузки $M_2(t)$ на кинематический механизм с уравнениями (4.13).

Для решения поставленной задачи используем частотную интерпретацию результатов п. 4.1.1. Вернемся к структурной схеме замкнутой системы, представленной на рис. 4.1. Частотная интерпретация процессов в замкнутой системе сводится к следующему.

Блок оценки с передаточной функцией $L(p) = \vartheta \frac{p^2 + \alpha p + \beta}{(p + \mu)^2}$ при $\vartheta = \mu^2$, $\alpha = 2\xi\sigma$, $\beta = \sigma^2$ и $\mu > \sigma$ по существу представляет собой «фильтр-пробку» с настройкой на собственную частоту колебательной системы (4.1). Соответствующая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАХ) приведена на рис. 4.5.

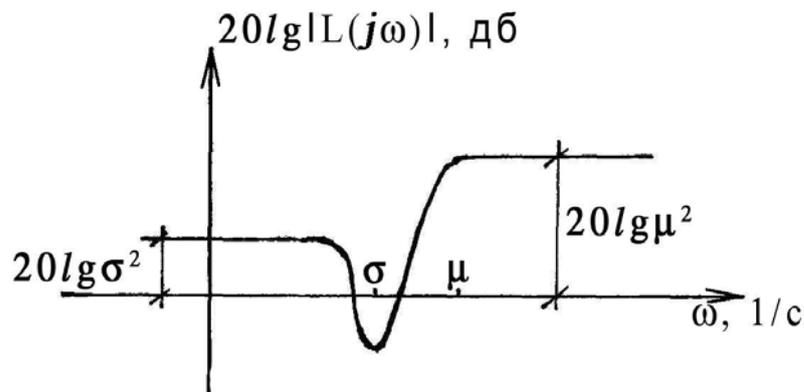


Рис. 4.5. Примерный вид ЛАХ блока оценки для системы (4.1)

Блок усиления с большим коэффициентом k в обратной связи уменьшает передачу внешнего возмущающего воздействия w на выход объекта управления с передаточной функцией $G(p)$.

При согласованной настройке параметров обоих блоков и обеспечивается эффект подавления колебаний, обусловленных внешним возмущением.

Подобная структурная схема замкнутой системы управления кинематическим механизмом с подавлением вынужденных колебаний, обусловленных внешним возмущением $M_2(t)$, представлена на рис. 4.6, где в соответствии с уравнениями (4.13) использованы следующие обозначения:

$$G_2(p) = \frac{\gamma}{J_1 J_2 Q(p)} \quad \text{— передаточная функция кинематического механизма}$$

по входу $k_1 u(t)$, где $Q(p) = (p + \eta)(p^2 + 2\xi\sigma p + \sigma^2)$;

$G'_2(p) = P_2(p)G_2(p)$ – передаточная функция кинематического механизма по входу $M_2(t)$, где $P_2(p) = \frac{p^2 + \frac{b_1 + \eta}{J_1} p + \frac{\gamma}{J_1}}{\frac{\gamma}{J_1}}$;

$L(p) = \vartheta \frac{p^2 + \alpha p + \beta}{(p + \mu)^2}$ – передаточная функция системы оценки, где $\vartheta = \mu^2$, $\alpha = \xi \hat{\sigma}$, $\beta = \hat{\sigma}^2$.

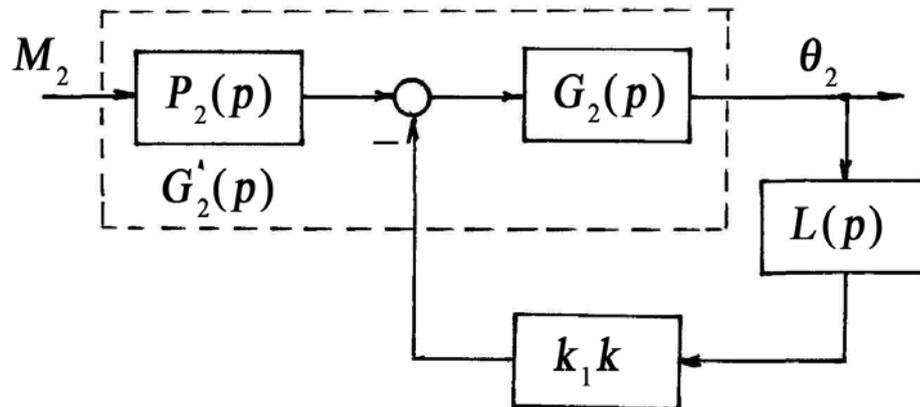


Рис. 4.6. Структурная схема замкнутой системы с подавлением вынужденных колебаний в кинематическом механизме

Устанавливая связь между изображениями по Лапласу угловой скорости нагрузки $\Theta_2(p) = L\{\theta_2(t)\}$ и возмущающего момента нагрузки $M_2(p) = L\{M_2(t)\}$ при $\alpha = 2\xi\sigma$ и $\beta = \sigma^2$, аналогично соотношению (4.7) получим

$$(p + \eta)(p^2 + 2\xi\sigma p + \sigma^2)\Theta_2(p) = \left[1 + \frac{k_1 k \mu^2}{(p + \mu)^2} \frac{\frac{\gamma}{J_1 J_2}}{(p + \eta)} \right]^{-1} P_2(p)M_2(p).$$

Видно, что при больших значениях μ и k влияние возмущающего момента нагрузки $M_2(t)$ на угловую скорость $\theta_2(t) = \dot{\varphi}_2(t)$ существенно ослабляется. Таким образом, фильтрация колебательной составляющей в измерении $\dot{\varphi}_2(t)$ и эффект большого коэффициента усиления k в цепи обратной связи позволяют значительно уменьшить вынужденные колебания в кинематическом механизме, обусловленные возмущением $M_2(t)$.

Сделаем несколько существенных замечаний.

1. Рассмотренная выше схема подавления вынужденных колебаний (см. рис. 4.6), обусловленных действием возмущающего момента $M_2(t)$, не может быть в полной мере использована при измерении угловой скорости ротора двигателя $\dot{\varphi}_1(t)$.

2. Замкнутая система, представленная на рис. 4.6, имеет пятый порядок. Поэтому анализ ее устойчивости, а также грубости при неточной настройке на собственную частоту кинематического механизма σ представляет собой существенно более сложную задачу, чем та, которая рассматривалась в п. 4.1.1.

3. Для повышения эффективности метода при значительной параметрической и структурной неопределенности объекта управления в замкнутую систему целесообразно вводить дополнительные контуры адаптации и обучения [23, 24]. Однако при этом следует иметь в виду, что увеличение сложности системы сужает область ее устойчивой работы даже при тщательной настройке параметров.

4.2. Управление роботом с упругими шарнирами при неопределенности математической модели

4.2.1. Постановка задачи

Рассматривается многозвенный робот с упругими шарнирами, уравнения движения которого имеют вид [9, 11]

$$\begin{aligned} J\ddot{q}_m + C(q_m - q) &= u, \\ A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) + C(q - q_m) &= w, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $q \in R^n$ и $q_m \in R^n$ – векторы обобщенных координат звеньев и роторов двигателей соответственно; $u \in R^n$ – вектор управляющих воздействий; $w \in R^n$ – вектор возмущающих воздействий; J – диагональная матрица инерции роторов двигателей; $A(q)$ – матрица инерции звеньев; C – диагональная матрица жесткостей передач, связывающих роторы двигателей со звеньями; $b(q, \dot{q})$ – вектор центробежных и кориолисовых сил инерции; $g(q)$ – вектор сил тяжести.

Предполагается, что:

1) в математической модели (4.14) с достаточной точностью известна только матрица J ;

2) измерению доступны скорости роторов двигателей \dot{q}_m и координаты звеньев q ;

3) программный закон движения $q^d(t)$ и его первая производная $\dot{q}^d(t)$ являются ограниченными функциями времени, при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} q^d(t) = q_\infty^d = \text{const}$.

Требуется построить управление u по принципу обратной связи, обеспечивающее для замкнутой системы:

1) асимптотическую устойчивость в большом конечной конфигурации $q_\infty^d = \text{const}$, $\dot{q}_\infty^d = 0$;

2) качество процессов, начиная с некоторого момента времени t_1 , сопоставимое с тем, которое можно получить при управлении роботом с абсолютно жесткими шарнирами с помощью реального PID-регулятора.

Использование метода динамической компенсации для решения поставленной задачи не представляется возможным, так как предполагается априорная неопределенность параметров математической модели объекта управления и неполное измерение вектора состояния.

Вместе с тем можно использовать PID-регулятор вида

$$u = -K_P(q - q^d) + v - K_D\dot{q}_m, \quad (4.15)$$

$$\dot{v} = -K_I(q - q^d), \quad K_P, K_I, K_D > 0.$$

Для него справедлива следующая теорема [10].

Теорема 4.1. Система (4.14) с законом управления (4.15) имеет единственное положение равновесия $q = q_\infty^d = \text{const}$, $q_m = \text{const}$, $v = \text{const}$ при условии

$$C^{-1} + K_P^{-1} < k_g^{-1}E,$$

где k_g – постоянная Липшица вектора сил тяжести $g(q)$

$$\|g(q_1) - g(q_2)\| \leq k_g \|q_1 - q_2\|.$$

Это равновесие является асимптотически устойчивым в целом, если

$$K_P < C, \quad K_I < k_I E,$$

где k_I – достаточно мало.

Доказательство основывается на идее разделения движений на быстрые (при $v = \text{const}$) и медленные, обусловленные интегральной составляющей v в законе управления (4.15) с малым коэффициентом усиления k_I , которая обеспечивает медленное смещение положения равновесия замкнутой системы к желаемому. Попытки увеличить скорость смещения приводят к нарушению условий устойчивости. Это вызывает определенные трудности настройки закона управления (4.15) при стремлении получить приемлемое качество процессов в замкнутой системе.

Ниже рассматривается модифицированный PID-регулятор с большим коэффициентом усиления, позволяющий получить иной характер разделения движений в замкнутой системе [10, 11].

4.2.2. Метод непрямо́й компенсации и разделение движений

Введем вектор новых переменных z , которые являются результатом преобразования с помощью реализуемого дифференцирующего

фильтра первого порядка линейной комбинации измеряемых переменных \dot{q}_m и q

$$\tau \dot{y} = -y + (\alpha - \tau^{-1}E)(\dot{q}_m - \zeta e), \quad (4.16)$$

$$z = y + \tau^{-1}(\dot{q}_m - \zeta e),$$

где $e = q - q^d$ – вектор ошибок обработки звеньями робота программного закона движения; τ – малая постоянная времени дифференцирующего фильтра; α и ζ – диагональные матрицы коэффициентов; E – единичная матрица.

В операторной форме уравнения (4.16) имеют вид

$$z = (\tau p + 1)^{-1}(Ep + \alpha)(\dot{q}_m - \zeta e). \quad (4.17)$$

Введем еще одну диагональную матрицу коэффициентов η и найдем линейную комбинацию $z + \eta e$. С учетом (4.17) получим

$$z + \eta e = (\tau p + 1)^{-1}(\ddot{q}_m + \alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e), \quad (4.18)$$

где $\theta = \zeta - \tau\eta$, $\beta = \eta - \alpha\zeta$.

Подставляя в выражение в скобках в правой части (4.18) производные \dot{q}_m и \ddot{q}_m , найденные из второго уравнения (4.14) после его дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + \alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e &= p(Ep + \alpha) \times \\ &\times \left\{ C^{-1}[A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q)] + \dot{q} \right\} - \theta \dot{e} + \beta e. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Домножая первое уравнение (4.14) слева на J^{-1} , приведем его к виду

$$\ddot{q}_m + \alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e = J^{-1}u - J^{-1}C(q_m - q) + \alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e. \quad (4.20)$$

Если бы была известна матрица жесткости C и, кроме измерений \dot{q}_m и q , дополнительно измерялись \dot{q} и q_m , то при ограниченных q^d и \dot{q}^d в соответствии с методом динамической (прямой) компенсации можно было бы построить управление

$$u^* = C(q_m - q) - J(\alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e), \quad (4.21)$$

при котором из (4.20) получаем

$$\ddot{q}_m + \alpha \dot{q}_m - \theta \dot{e} + \beta e = 0, \quad (4.22)$$

а значит, в соответствии с (4.19)

$$p(Ep + \alpha) \left\{ C^{-1} [A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q)] + \dot{q} \right\} - \theta \dot{e} + \beta e = 0. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) описывает замкнутую систему (4.14), (4.21) при точной компенсации. Напомним, что управление (4.21) при сделанных выше предположениях о неопределенности в задании матрицы жесткостей C и неполном измерении вектора состояния системы (4.14) является нереализуемым.

Путем несложных преобразований уравнение (4.23) приводится к виду, характерному для задачи управления роботом с абсолютно жесткими шарнирами при условии измерения только координат q звеньев

$$\begin{aligned} A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) &= \tilde{u}, \\ \tilde{u} &= -Cq^d - K(p)e, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $K(p) = K_P + p^{-1}K_I + p(Ep + \alpha)^{-1}\alpha K_D$ – передаточная матрица реального PID-регулятора; $K_P = C(E - \alpha^{-1}\theta - (\alpha^{-1})^2\beta)$; $K_I = C\alpha^{-1}\beta$; $K_D = C(\alpha^{-1})^2(\theta + \alpha^{-1}\beta)$.

Для построения реализуемого управления u типа (4.21) используем процедуру градиентного типа. Введем новое управление $v = J^{-1}u$ и показатель близости управления v к управлению $v^* = J^{-1}u^*$

$$I(t) = 1/2(v - v^*)^T(v - v^*), \quad (4.25)$$

где u^* определяется выражением (4.21).

Абсолютный минимум показателя (4.25) достигается при управлении (4.21). Управление v , обеспечивающее $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, имеет вид

$$\dot{v} = -\gamma \text{grad}_v I, \quad v(0) = v_0, \quad (4.26)$$

где $\gamma > 0$ – положительно определенная диагональная матрица коэффициентов усиления [20].

С учетом (4.20) и (4.21) выражение (4.26) приводится к виду

$$\dot{v} = -\gamma(\ddot{q}_m + \alpha\dot{q}_m - \theta\dot{e} + \beta e), \quad v(0) = v_0. \quad (4.27)$$

Используя выражение (4.18) для оценки линейной комбинации переменных в правой части (4.27) получим реализуемый закон управления, приближенно осуществляющий компенсацию типа (4.21)

$$\begin{aligned} u &= Jv, \quad \dot{v} = -\gamma[z + \eta(q - q^d)], \quad v(0) = v_0, \\ \tau\dot{s} &= -s + (\alpha - \tau^{-1}E)[\dot{q}_m - \zeta(q - q^d)], \\ z &= s - \tau^{-1}[\dot{q}_m - \zeta(q - q^d)], \end{aligned} \quad (4.28)$$

где v_0 – определяется по начальной оценке управления (4.21).

Объединяя (4.14) и (4.28) получим операторное уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} p[(\tau p + 1)\gamma^{-1}(Ep^2 + J^{-1}C) + Ep + \alpha] \times \\ \times \left\{ C^{-1}[A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q)] \right\} - \theta\dot{q} + \beta q = -\theta\dot{q}^d + \beta q^d, \end{aligned} \quad (4.29)$$

порядок которого равен $6n$.

Введем переменные состояния замкнутой системы (4.29) и объединим их в два подвектора

$$x = [q^T, \dot{q}^T, q_m^T, \dot{q}_m^T]^T, \quad y = [v^T, (\tau\dot{v} + v)^T]^T.$$

Тогда при больших коэффициентах усиления γ уравнение (4.29) приводится к системе дифференциальных уравнений с малыми параметрами τ и γ^{-1} при части производных

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -A^{-1}(x_1)[b(x_1, x_2) + g(x_1) + C(x_1 - x_3)], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= J^{-1}C(x_1 - x_3) + y_1, \\ \tau\dot{y}_1 &= -y_1 + y_2, \\ \gamma^{-1}\dot{y}_2 &= -y_1 - J^{-1}C(x_1 - x_3) - \alpha x_4 + \theta(x_2 - \dot{q}^d) - \beta(x_1 - q^d). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подсистема уравнений медленных движений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -A^{-1}(x_1)[b(x_1, x_2) + g(x_1) + C(x_1 - x_3)], \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -\alpha x_4 + \theta(x_2 - \dot{q}^d) - \beta(x_1 - q^d)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

получается из (4.30) при $\tau = \gamma^{-1} = 0$. Она эквивалентна системе (4.24), для которой получены условия асимптотической устойчивости в целом [10]. Для (4.31) это означает, что существуют α, θ, β , обеспечивающие асимптотическую устойчивость в целом подсистемы медленных движений.

Подсистема быстрых движений

$$\begin{aligned}
\tau \dot{y}_1 &= -y_1 + y_2, \\
\gamma^{-1} \dot{y}_2 &= -y_1 - v^*, \quad v^* = \text{const}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

линейная и ее устойчивость обеспечивается при $\tau > 0$ и $\gamma > 0$.

Таким образом, в положении равновесия $q_\infty^d = \text{const}$, $\dot{q}_\infty^d = 0$ выполняются условия основного утверждения о разделении движений в сингулярно возмущенных системах [12]. Это означает, что существуют достаточно малые τ и γ^{-1} , такие, что за сколь угодно малый промежуток времени t_1 движение замкнутой системы (4.30) будет происходить в сколь угодно малой окрестности поверхности медленных движений (4.22).

Аналогичный характер разделения движений в замкнутой системе можно получить с помощью модифицированного PID-регулятора с большим коэффициентом усиления γ

$$u = -\gamma[-\theta(q - q^d) + \dot{q}_m + r], \tag{4.33}$$

$$\dot{r} = \beta(q - q^d) + \alpha \dot{q}_m, \quad \gamma, \alpha > 0, \quad \beta = \beta^T > 0, \quad \theta = \theta^T > 0.$$

Сопоставление (4.33) с законом управления (4.28) при $\tau = 0$ показывает их идентичность. Действительно, в операторной форме закон управления (4.28) имеет вид

$$u = -\frac{\gamma}{(\tau p + 1)} \left(-\theta(q - q^d) + \dot{q}_m + \frac{1}{p}(\beta(q - q^d) + \alpha \dot{q}_m) \right),$$

где множитель $\frac{1}{\tau p + 1}$ представляет собой линейный фильтр с полосой пропускания порядка $\tau^{-1} \cong \gamma$.

Сопоставление (4.33) с классическим PID-регулятором (4.15) демонстрирует очевидное сходство двух законов, но вместе с тем имеются и принципиальные различия, проявляющиеся в наличии общего большого коэффициента усиления γ , неминимальнофазового слагаемого по рассогласованию $e = q - q^d$ с матрицей θ и интегратора от линейной комбинации измеряемых переменных $e = q - q^d$ и \dot{q}_m с матрицами β и α . Подчеркнем также, что величина $\|\beta\|$ в интегральной составляющей r является малой, но при большом γ (например, порядка $\|\beta\|^{-1}$ или $\|\beta\|^{-2}$) произведение $\gamma\beta$, определяющее эффект интегральной обратной связи в (4.33), можно сделать любой конечной или даже достаточно большой величиной. В классическом PID-регуляторе (4.15) коэффициент k_I в интегральной составляющей всегда малый.

Указанные различия позволяют обеспечить описанные выше динамические свойства замкнутой системы. Действительно, замкнутая система (4.14), (4.33) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) + C(q - q_m) &= 0, \\ J\ddot{q}_m + C(q_m - q) - u &= 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\gamma^{-1}\dot{u} = \theta\dot{e} - \beta e - \ddot{q}_m - \alpha \dot{q}_m.$$

Перепишем два последних уравнения из (4.34) в виде

$$\gamma^{-1}\dot{u} = -J^{-1}u + \theta\dot{e} - \beta e + J^{-1}C(q_m - q_l) - \alpha \dot{q}_m, \quad (4.35)$$

При больших значениях γ , переменная u является “быстрой” по отношению к остальным. Далее можно применить логику сингулярно возмущенных систем [20]. Быстрая подсистема экспоненциально ус-

тойчива в целом при фиксированных “медленных” переменных и быстро приходит к равновесию $u = u^*$ (см. (4.21)). При этом в соответствии с (4.35) выполняется соотношение (4.22), в котором при диагональных матрицах α, θ, β все уравнения полностью развязываются.

После затухания быстрых движений динамика замкнутой системы как и при законе управления (4.28) определяется уравнениями (4.24).

Показано, что для замкнутой системы (4.14), (4.33) справедлива следующая теорема [11].

Теорема 4.2. Существуют $\gamma^* > 0$, $\beta^* > 0$ такие, что при всех $\gamma > \gamma^*$, $\|\beta\| < \beta^*$ и

$$E - k_g C^{-1} > \alpha^{-1} \theta$$

замкнутая система (4.34) имеет единственное положение равновесия $q = q_\infty^d$, являющееся асимптотически устойчивым в целом.

Заметим, что при сохранении порядка уравнения, определяющего управление u , вместо (4.33) может быть использован нелинейный закон управления с большим коэффициентом усиления γ

$$u = -\gamma(\phi_1(q, \dot{q}_m) + r), \quad \dot{r} = \phi_2(q, \dot{q}_m),$$

где функции ϕ_1, ϕ_2 должны быть выбраны так, чтобы “быстрая” подсистема

$$\gamma^{-1} \dot{u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{q}_m} J^{-1}(u + C(q - q_m)) + \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \dot{q} + \phi_2 = 0, \quad q, q_m = \text{const},$$

и “медленная” подсистема

$$A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = C(q_m - q),$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \dot{q} + \phi_2 = 0$$

были асимптотически устойчивы в целом.

Сделаем несколько замечаний:

1) модифицированный PID-регулятор (4.33) обладает свойством астатизма и обеспечивает не только устойчивую стабилизацию же-

лаемого состояния $q_\infty^d = \text{const}$, но и слежение с ограниченной ошибкой за достаточно медленно изменяющимся заданием $q^d(t)$;

2) все указанные результаты носят асимптотический характер, что предопределяет необходимость компьютерного моделирования;

3) введение “сильной” интегральной обратной связи (большое значение γ) может привести к возбуждению высших форм колебаний механической конструкции, и этот эффект также желательно исследовать с помощью компьютерного моделирования.

4.2.3. Результаты моделирования для задач стабилизации и слежения

Пример 4.1.

Рассмотрим задачу стабилизации в поле сил тяжести однозвенного манипулятора с упругим шарниром. Уравнения (4.14) в этом случае скалярные

$$\begin{aligned} J\ddot{q}_m + C(q_m - q) &= u, \\ A\ddot{q} + h\cos q + C(q - q_m) &= w, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где q_m, q – координаты ротора двигателя и звена манипулятора; J, A – соответствующие моменты инерции; C – жесткость передаточного механизма; $h\cos q$ – момент сил тяжести; u – управление; w – возмущение.

Будем считать, что имеет место априорная неопределенность в задании инерционных и жесткостных параметров манипулятора, т. е. основные параметры, за исключением момента инерции J , который считается известным, заданы диапазонами своих значений $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}, \underline{C} \leq C \leq \bar{C}$.

Перейдем к безразмерному времени $t' = t(\underline{C}/J)^{1/2}$ и запишем уравнения (4.14) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + \xi(q_m - q) &= u', \\ \ddot{q} + \mu h' \cos q + \mu \xi(q - q_m) &= w', \end{aligned}$$

где $\underline{\mu} = J/A$ ($\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$), $\underline{\xi} = C/\underline{C}$ ($1 \leq \xi \leq \bar{\xi}$), $h' = h/\underline{C}$, $u' = u/\underline{C}$, $w' = \mu w/\underline{C}$, (штрихи в дальнейшем будем опускать).

Пренебрегая маятниковым эффектом ($h \ll C$), найдем параметры α, θ, β закона управления (4.33) из решения задачи робастной оптимизации по степени устойчивости медленной подсистемы (4.24)

$$(\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\beta}) = \arg \max_{\alpha, \theta, \beta \in S} \min_{1 \leq \xi \leq \bar{\xi}, \underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}} \{ \min_{i \in [1, 4]} |\operatorname{Re} \lambda_i| \}, \quad (4.37)$$

где $\lambda_i = \lambda_i(\xi, \mu, \alpha, \theta, \beta)$ – корни характеристического уравнения медленной подсистемы (4.24); S – область устойчивости в пространстве настраиваемых параметров α, θ, β (более подробно такие задачи будут рассмотрены в гл. 5).

При $1 \leq \xi \leq 2$, $1 \leq \mu \leq 5$ получим $\hat{\alpha} = 0,9$, $\hat{\theta} = 0,507$, $\hat{\beta} = 0,05$.

Для устойчивости замкнутой системы (4.34) достаточно принять $\gamma > 10$. При таких значениях γ имеет место выраженный эффект разделения движений на быстрые и медленные.

Звено манипулятора будем стабилизировать в положении $q_\infty^d = -1$, перемещая его из нижнего вертикального положения по программному закону $q^d(t)$ в виде ступенчатой функции. Возмущение w будем моделировать импульсным воздействием, поступающим на систему после завершения основного движения.

Приведенные на рис. 4.7 графики процессов $q(t)$ и $u(t)$ в замкнутой системе (4.34) при некоторых значениях параметров ξ, μ имеют приемлемое качество и хорошую стабильность. Заметим, что принятые диапазоны возможных значений параметров ξ и μ , при которых проводилось моделирование, соответствуют изменению жесткости шарнира в 2 раза и момента инерции звена манипулятора с грузом – в 5 раз.

Моделирование в условиях сингулярных возмущений показало, что малая постоянная времени, обусловленная неучтенной в модели (4.36) динамики двигателя, не нарушает устойчивости замкнутой сис-

темы, если коэффициент усиления γ в законе управления (4.33) не превышает величины, обратной неучтенной постоянной времени.

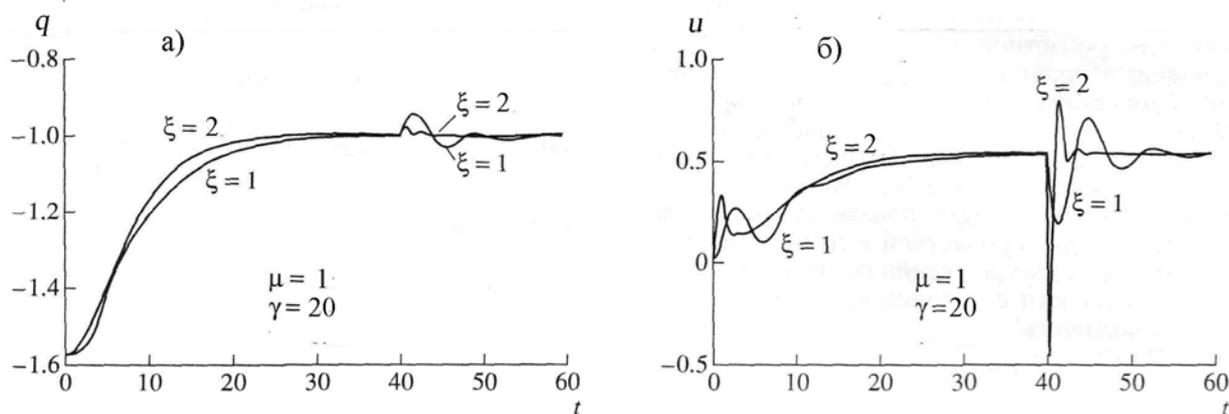


Рис. 4.7. Графики процессов в замкнутой системе

Пример 4.2.

Рассмотрим задачу слежения за программной траекторией плоским двухзвенным роботом-манипулятором с упругими шарнирами. Манипулятор расположен в вертикальной плоскости. Его звенья представляют собой однородные стержни. Координата q_1 первого звена отсчитывается от горизонтали. Координата q_2 второго звена отсчитывается от оси первого звена. Координаты роторов соответствующих двигателей $-q_{m1}, q_{m2}$. Звенья имеют массы $m_1 = m_2 = 1$ кг и длины $l_1 = l_2 = 0,3$ м. Масса груза $m = 0,5$ кг. В соответствии с уравнением (4.14) получим

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \cos q_2 & a_3 + a_2 \cos q_2 \\ a_3 + a_2 \cos q_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$b(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -a_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ a_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \end{bmatrix}, \quad g(q) = \begin{bmatrix} h_1 \cos q_1 + h_2 \cos(q_1 + q_2) \\ h_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix},$$

где $a_1 = 0,24$ кгм², $a_2 = 0,09$ кгм², $a_3 = 0,075$ кгм², $h_1 = 6$ Нм, $h_2 = 3$ Нм.

Примем также

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{кгм}^2, \quad C = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \text{Нм}.$$

Перейдем к безразмерным переменным так, как это было сделано в предыдущем примере, и зададим программную траекторию в безразмерном времени

$$q^d(t) = \begin{cases} q_i^0 + (q_i^* - q_i^0)(t/t^* - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t/t^*), & 0 \leq t \leq t^*, \\ q_i^*, & t > t^*, \end{cases} \quad (i=1,2),$$

где $q_1^0 = -\pi/2$, $q_2^0 = 0$, $q_1^* = 0$, $q_2^* = \pi/2$, $t^* = 40$.

В законе управления (4.33) по каждой степени подвижности выберем следующие настройки $\hat{\gamma} = 20$, $\hat{\alpha} = 0,9$, $\hat{\theta} = 0,01$, $\hat{\beta} = 0,3$. Такие значения обеспечивают близкую к максимальной степень устойчивости медленной подсистемы на множестве фиксированных конфигураций манипулятора из первого и четвертого квадрантов вертикальной плоскости.

Результаты моделирования процессов в замкнутой системе иллюстрирует координатная плоскость (e_x, e_y)

$$e_x = x - x^d, \quad e_y = y - y^d,$$

где $x = \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2)$, $y = \sin q_1 + \sin(q_1 + q_2)$ – безразмерные координаты груза (рис. 4.8).

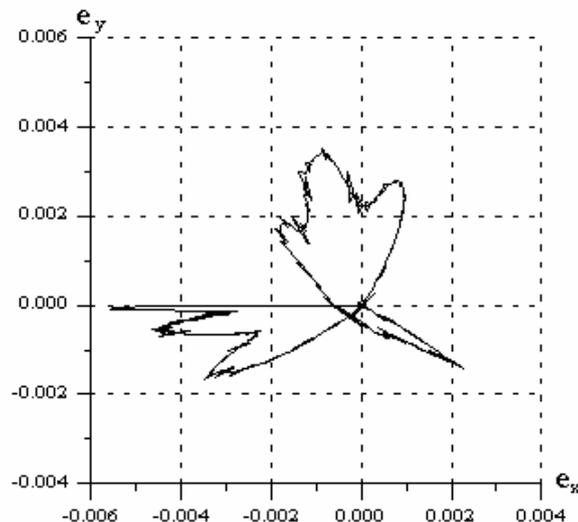


Рис. 4.8. Отклонения от программной траектории при движении

Видно, что максимальное отклонение от программной траектории в процессе движения не превышает 0,006. Заметим, что пример носит чисто иллюстративный характер. Точность слежения может быть повышена, так как далеко не исчерпана возможность оптимизации медленной подсистемы по элементам матриц α, θ, β . Например, вместо критерия оптимизации в виде степени устойчивости (4.47) можно использовать критерий, содержащий ту или иную норму ошибок e_x и e_y .

5. ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Синтез законов управления, обладающих ограниченной чувствительностью по отношению к некоторым неопределенным на стадии проектирования параметрам и условиям функционирования объекта управления, является одной из важнейших проблем теории и практики. При этом чувствительность системы управления по отношению к каким-либо внутренним или внешним факторам может быть определена различным образом (см. гл. 1 и 2). Все зависит от того, какие именно свойства, характеристики или показатели качества процессов в синтезируемой системе анализируются в контексте рассматриваемой задачи.

В настоящее время определились две основные тенденции в решении указанной выше проблемы. Одна из них связана с созданием адаптивных систем управления, приспособляющихся к условиям функционирования [24]. Другая – с созданием систем, обладающих ограниченной чувствительностью к заданному множеству параметров объекта управления [23]. Чему отдать предпочтение обычно зависит от контекста задачи.

Ниже, в рамках второго подхода, рассматриваются методы синтеза грубых и робастных систем управления на основе процедур LQ- и минимаксной оптимизации.

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления в следующей постановке. Для объекта управления, описываемого уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, \mu, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния; $u \in R^m$ – вектор управления; $\mu \in M \subset R^l$ – вектор параметров, определенных с точностью до некоторого множества M ; $t \in [t_0, t_k]$ – время работы системы, необходимо найти управление u , минимизирующее функционал

$$J = F(x(t_k), t_k) + \int_{t_0}^{t_k} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad (5.2)$$

где F и L – заданные дифференцируемые положительно определенные скалярные функции указанных аргументов.

Если в (5.1) вектор параметров μ считать фиксированным, то сформулированная задача приобретает вид традиционной задачи оптимального управления [7, 20]. Множество M значений вектора параметров μ будет порождать множество оптимальных законов управления

$$u = G(x(t), \mu, t) \quad (5.3)$$

как решений задачи (5.1), (5.2).

Решение (5.3) не имеет практического смысла, так как конкретные значения вектора параметров μ заранее неизвестны. Чтобы придать задаче прикладное значение, необходимо модифицировать исходную постановку.

В общем случае модификация должна затрагивать два связанных между собой момента:

– выбор некоторого фиксированного значения μ^* вектора μ из множества M , на которое настраивается закон управления;

– введение в задачу оптимизации дополнительных условий малой чувствительности решения к отклонениям вектора μ из множества M относительно значения μ^* .

В соответствии с принятой терминологией (см. гл. 1) подобная модификация в общем случае позволяет характеризовать синтезируемую таким образом систему как *робастную*. В случае, когда μ^* представляет собой номинальное (расчетное) значение вектора параметров μ , множество M является связанной ограниченной замкнутой областью в R^l достаточно малого диаметра, а рассматриваемые функции чувствительности являются гладкими синтезируемая система характеризуется как *грубая*.

5.2. Синтез грубых систем управления на основе процедуры LQ-оптимизации

5.2.1. LQ-оптимизация с учетом функций чувствительности переменных состояния

Будем предполагать, что система (5.1) линейная

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (5.4)$$

а матрица $A = A(\mu)$ зависит от одного скалярного параметра μ , номинальное значение которого равно μ^* .

В качестве критерия оптимизации (5.2) выберем квадратичный функционал качества на бесконечном интервале времени

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (5.5)$$

где $Q \geq 0$, $R > 0$ – весовые матрицы.

Задача (5.4), (5.5) известная как задача LQ-оптимизации имеет при $\mu = \mu^*$ решение в виде линейной обратной связи по вектору состояния

$$u = -K^* x, \quad K^* = R^{-1} B^T P^*, \quad (5.6)$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица $P^* = P^{*\top} \geq 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^{*\top}P + PA^* - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0, \quad A^* = A(\mu^*). \quad (5.7)$$

Для анализа чувствительности замкнутой системы (5.4), (5.6), (5.7) к отклонениям параметра μ в уравнении (5.4) от расчетного значения μ^* введем показатель чувствительности переменных состояния вида

$$J_\mu = \int_0^\infty v^\top M v dt, \quad (5.8)$$

где $M \geq 0$ – весовая матрица; $v(t) = \left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu^*}$ – функция чувствительности вектора переменных состояния замкнутой системы (5.4), (5.6), (5.7) по параметру μ .

Уравнение для функции чувствительности $v(t)$ имеет вид

$$\dot{v} = \left(A^* - BK^* \right) v + \left. \frac{\partial A(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu^*} x(t, \mu^*), \quad v(0) = 0, \quad (5.9)$$

где $x(t, \mu^*)$ – вектор состояния невозмущенной замкнутой системы (5.4), (5.6), (5.7), т. е. имеющий место при $\mu = \mu^*$ в уравнении (5.4).

Далее поступают следующим образом. Уравнение (5.9) интегрируют совместно с уравнением замкнутой системы при $\mu = \mu^*$

$$\dot{x} = \left(A^* - BK^* \right) x, \quad x(0) = x_0$$

и находят соответствующее значение показателя (5.8). Если оказывается, что это значение превышает допустимый уровень, то меняют весовые матрицы в (5.5) и находят другое решение задачи (5.4), (5.5) с меньшим значением показателя (5.8). Используя программную среду MATLAB путем сравнительного анализа можно найти наилучшее решение минимизирующее показатель (5.8) или такое решение, которое устраивает разработчика. Этот прием позволяет помимо показа-

теля (5.8), который характеризует параметрическую чувствительность вектора состояния, вводить в рассмотрение и другие показатели чувствительности, например, по быстроедействию, по перерегулированию и т. д.

Модифицируем рассмотренную задачу путем прямого использования показателя типа (5.8) в процессе синтеза LQ-оптимального управления. Для этого введем функцию чувствительности вектора состояния объекта управления (5.4) по параметру μ

$$w(t) = \left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu = \mu^*}.$$

Уравнение для функции чувствительности $w(t)$ имеет вид

$$\dot{w} = A^* w + \left. \frac{\partial A(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu = \mu^*} x(t, \mu^*), \quad w(0) = 0. \quad (5.10)$$

Введем расширенный вектор состояния

$$z(t) = [x(t, \mu^*)^T, w(t)^T]^T$$

и объединим уравнения (5.4) при $\mu = \mu^*$ и (5.10)

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ F^* & A^* \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (5.11)$$

где $F^* = \left. \frac{\partial A(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu = \mu^*}$.

Квадратичный функционал качества на бесконечном интервале времени для расширенной системы (5.11) запишем в виде

$$J_1 = \int_0^{\infty} (z^T Q_1 z + u^T R u) dt, \quad (5.12)$$

где весовая матрица

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}$$

размера $2n \times 2n$ составлена так, чтобы объединить исходный функционал качества (5.5) и показатель чувствительности вида

$$J_{\mu_1} = \int_0^{\infty} w^T M_1 w dt. \quad (5.13)$$

Решение задачи LQ-оптимизации для (5.11), (5.12) по стандартной схеме с использованием решения уравнения Риккати

$$A_1^{*T} P_1 + P_1 A_1^* - P_1 \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} [B^T \ 0] P_1 + Q_1 = 0, \quad A_1^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ F^* & A^* \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

в виде симметричной положительно определенной матрицы

$$P_1^* = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{12}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$$

размера $2n \times 2n$ приводит к линейному управлению по расширенному вектору состояния z вида

$$\begin{aligned} u &= -K_1^* z = -R^{-1} [B^T \ 0] P_1^* z = -R^{-1} B^T [P_{11}^* \ P_{12}^*] z = \\ &= -K_{11}^* x - K_{12}^* w, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $K_{11}^* = R^{-1} B^T P_{11}^*$, $K_{12}^* = R^{-1} B^T P_{12}^*$ – матрицы коэффициентов обратных связей.

При этом минимальное значение функционала (5.12) с учетом нулевых начальных условий по функции чувствительности w равно

$$J_{1\min} = z^T(0) P_1^* z(0) = x^T(0) P_{11}^* x(0).$$

Сделаем несколько важных замечаний.

1. Оптимальное управление (5.15) получено для расширенной системы (5.11) на множестве оптимальных в смысле показателя (5.12) систем. Для конкретизации решения необходимо выбрать ту или иную комбинацию весовых матриц Q, R и M_1 в показателе (5.12). Определение «наилучшей» комбинации остается в сфере ответственности разработчика.

2. Управление (5.15) должно обеспечивать для объекта (5.4) минимальную чувствительность по параметру μ в смысле показателя (5.13). Однако, как уже отмечалось выше, более значимыми для разработчика могут оказаться другие показатели чувствительности, на-

пример, по быстродействию, по перерегулированию, по колебательности и т. д. Поэтому может потребоваться дополнительная оценка чувствительности замкнутой системы по этим показателям.

3. Непосредственно реализовать управление (5.15) невозможно, из-за отсутствия прямых измерений вектора состояния x и функции чувствительности w . Однако полученное решение позволяет сформировать оптимальный в смысле квадратичного функционала (5.12) характеристический полином замкнутой системы

$$\det \left\{ \lambda E_{2n} - \begin{bmatrix} A^* - BK_{11}^* & -BK_{12}^* \\ F^* & A^* \end{bmatrix} \right\} = \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n},$$

который можно использовать в качестве желаемого для синтеза реализуемых регуляторов другой структуры (см. примеры 2.6 и 2.7 в п. 2.3).

5.2.2. Пример синтеза грубой системы управления для колебательного объекта второго порядка

В качестве объекта управления рассмотрим колебательную систему второго порядка (2.38) из примера 2.6. Будем считать, что безразмерный коэффициент демпфирования ξ , номинальное значение которого равно ξ^* ($\xi^* < 1$), может меняться в некоторых пределах. Требуется найти передаточную функцию $W(p)$ регулятора, обеспечивающего для системы управления, структурная схема которой приведена на рис. 2.7, малую чувствительность по отношению к небольшим отклонениям параметра ξ объекта управления от номинального значения ξ^* .

1. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу оптимальной стабилизации колебательной системы второго порядка по интегральному квадратичному показателю качества типа (5.5). Эта задача необходима для обоснования выбора весовых матриц Q и R из (5.5).

Запишем уравнение объекта управления (2.38) при номинальном значении параметра $\xi = \xi^*$ в переменных состояния $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - 2\xi^* \omega_1 x_2 + u + \varphi. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Оптимальность будем понимать в смысле минимума интеграла от взвешенной суммы энергии колебаний и энергии затраченной на управление

$$J = \int_0^{\infty} (\omega_1^2 x_1^2 + x_2^2 + ru^2) dt, \quad (5.17)$$

где весовой коэффициент $r > 0$ пока не зафиксирован.

Начальные и конечные условия для задачи стабилизации имеют вид

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_{1\infty} = 0, \quad x_{2\infty} = 0.$$

Задачу LQ-оптимизации (5.16), (5.17) будем решать методом Лагранжа [20]. С помощью множителей λ_1 и λ_2 составим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int_0^{\infty} [\omega_1^2 x_1^2 + x_2^2 + ru^2 + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \\ &+ \lambda_2(\dot{x}_2 + \omega_1^2 x_1 + 2\xi^* \omega_1 x_2 - u)] dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Необходимое условие экстремума функционала (5.18), состоящее в обращении в нуль его первой вариации, приводит к системе уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - 2\xi^* \omega_1 x_2 + u, \\ \dot{\lambda}_1 &= 2\omega_1^2 x_1 + \omega_1^2 \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= 2x_2 - \lambda_1 + 2\xi^* \omega_1 \lambda_2, \\ 2ru - \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Из последнего уравнения системы (5.19), которое представляет собой условие $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial u} = 0$ обращения в нуль частной производной функционала \tilde{J} по явно входящему управлению u , находим

$$u = \frac{\lambda_2}{2r}. \quad (5.20)$$

С учетом (5.20) оставшиеся четыре уравнения из (5.19) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - 2\xi^* \omega_1 x_2 + \frac{1}{2r} \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_1 &= 2\omega_1^2 x_1 + \omega_1^2 \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= 2x_2 - \lambda_1 + 2\xi^* \omega_1 \lambda_2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Запишем матрицу A системы (5.21)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi^* \omega_1 & 0 & 1/2r \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & \omega_1^2 \\ 0 & 2 & -1 & 2\xi^* \omega_1 \end{bmatrix}$$

и ее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \det[vE - A] &= \det \begin{bmatrix} v & -1 & 0 & 0 \\ \omega_1^2 & v + 2\xi^* \omega_1 & 0 & -1/2r \\ -2\omega_1^2 & 0 & v & -\omega_1^2 \\ 0 & -2 & 1 & v - 2\xi^* \omega_1 \end{bmatrix} = \\ &= v^4 + 2Bv^2 + C = 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $B = \omega_1^2(1 - 2\xi^{*2}) - \frac{1}{2r}$, $C = \frac{\omega_1^2}{r} + \omega_1^4 > 0$ – коэффициенты, зависящие от параметров ξ^* и ω_1 объекта управления и значения весового множителя r из функционала (5.17).

В зависимости от конкретных значений параметров ξ^* , ω_1 и r возможны два случая.

Случай $B^2 \geq C$. Если в этом случае $B > 0$, то все корни характеристического уравнения (5.22) чисто мнимые и оптимального стабилизирующего регулятора не существует. В частности, это может быть при большом значении r , которое соответствует малому ресурсу управления. Если $B < 0$, то корни характеристического уравнения (5.22) имеют вид

$$v_{1,2} = \pm\gamma_1, \quad v_{3,4} = \pm\gamma_2, \quad (5.23)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{-B + \sqrt{B^2 - C}}$, $\gamma_2 = \sqrt{-B - \sqrt{B^2 - C}}$.

Этот случай характерен при малом значении r , т. е. при большом ресурсе управления.

Решение системы уравнений (5.21) по переменной x_1 при вещественных корнях (5.23) записывается в виде

$$x_1(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_1 t} + C_3 e^{\gamma_2 t} + C_4 e^{-\gamma_2 t},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные константы интегрирования.

В силу конечных условий $C_1 = C_3 = 0$.

В соответствии с первым уравнением системы (5.21) найдем

$$x_2 = \dot{x}_1 = -\gamma_1 C_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_4 e^{-\gamma_2 t}. \quad (5.24)$$

Продифференцируем выражение (5.24) по времени

$$\dot{x}_2 = \gamma_1^2 C_2 e^{-\gamma_1 t} + \gamma_2^2 C_4 e^{-\gamma_2 t} \quad (5.25)$$

и добавим и вычтем из правой части (5.25) выражение $\pm \gamma_1 \gamma_2 (C_2 e^{-\gamma_1 t} + C_4 e^{-\gamma_2 t})$. В результате после преобразования получим

$$\dot{x}_2 = -\gamma_1 \gamma_2 x_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) x_2.$$

В соответствии со вторым уравнением системы (5.19) найдем оптимальный закон управления

$$u = -(\gamma_1 \gamma_2 - \omega_1^2) x_1 - (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\xi^* \omega_1) x_2. \quad (5.26)$$

В исходных переменных (см. уравнение (2.38) и структурную схему на рис. 2.7) оптимальное стабилизирующее управление (5.26) имеет вид

$$u = -K_1(y - y^*) - K_2\dot{y}, \quad (5.27)$$

где $K_1 = \gamma_1\gamma_2 - \omega_1^2$, $K_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\xi^*\omega_1$ – коэффициенты обратных связей.

Таким образом, оптимальный регулятор представляет собой PD-регулятор с передаточной функцией

$$W(p) = K_1 + K_2p. \quad (5.28)$$

Подставляя управление (5.27) в уравнение объекта (2.38) получим уравнение замкнутой системы

$$\ddot{y} + [\gamma_1 + \gamma_2 + 2\omega_1(\xi - \xi^*)]\dot{y} + \gamma_1\gamma_2 y = (\gamma_1\gamma_2 - \omega_1^2)y^* + \varphi. \quad (5.29)$$

Из уравнения (5.29) следует:

– свободное движение замкнутой системы при $\xi = \xi^*$ апериодическое с характеристическим уравнением

$$(v + \gamma_1)(v + \gamma_2) = 0;$$

– при $\xi \neq \xi^*$ характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$v^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + 2\omega_1(\xi - \xi^*)]v + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

и при $\xi < \xi^*$ свободное движение замкнутой системы может стать колебательным, поэтому если определена нижняя граница диапазона изменения параметра ξ объекта управления $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$, то в качестве номинального можно рекомендовать значение $\xi^* = \underline{\xi}$, т. е. наименьшее из возможных значений.

Случай $B^2 < C$. В этом случае корни характеристического уравнения комплексно сопряженные

$$v_{1,2} = \eta \pm j\delta, \quad v_{3,4} = -\eta \pm j\delta, \quad (5.30)$$

где $\eta = \sqrt{\frac{\sqrt{C} - B}{2}}$, $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{C} + B}{2}}$.

Этот случай характерен при среднем (ограниченном) ресурсе управления.

Решение системы уравнений (5.21) по переменной x_1 при комплексно сопряженных корнях записывается в виде

$$x_1(t) = e^{\eta t} (C_1 \cos \delta t + C_2 \sin \delta t) + e^{-\eta t} (C_3 \cos \delta t + C_4 \sin \delta t).$$

В силу конечных условий $C_1 = C_2 = 0$. Далее, выполняя соответствующие преобразования как и в предыдущем случае, последовательно получим

$$\begin{aligned} x_2 = \dot{x}_1 &= -\eta e^{\eta t} (C_3 \cos \delta t + C_4 \sin \delta t) + \delta e^{-\eta t} (C_4 \cos \delta t - C_3 \sin \delta t), \\ \dot{x}_2 &= -(\eta^2 + \delta^2)x_1 - 2\eta x_2. \end{aligned}$$

В результате, в соответствии со вторым уравнением системы (5.19), оптимальный закон управления будет иметь вид

$$u = -(\eta^2 + \delta^2 - \omega_1^2)x_1 - 2(\eta - \xi^* \omega_1)x_2. \quad (5.31)$$

По сравнению с предыдущим случаем меняется только настройка PD-закона управления

$$u = -K_1(y - y^*) - K_2 \dot{y}, \quad (5.32)$$

где $K_1 = \eta^2 + \delta^2 - \omega_1^2$, $K_2 = 2(\eta - \xi^* \omega_1)$.

При такой настройке даже при $\xi = \xi^*$ свободное движение замкнутой системы

$$\ddot{y} + [2\eta + 2\omega_1(\xi - \xi^*)]\dot{y} + (\eta^2 + \delta^2)y = (\eta^2 + \delta^2 - \omega_1^2)y^* + \varphi \quad (5.33)$$

будет колебательным.

При проведении числовых расчетов для объекта управления (2.38) используем следующие значения параметров

$$\omega_1 = 30 \text{ 1/c} \cong 5 \text{ Гц}; \quad \xi^* = 0,1 (0,05 \leq \xi \leq 0,15); \quad r = 1/\omega_1^2.$$

Для этих данных

$$B = 432 \text{ 1/c}^2, \quad \sqrt{C} = 900\sqrt{2} \text{ 1/c}^2,$$

т. е. имеем второй случай ($B^2 < C$). При этом

$$\eta^2 + \delta^2 = 900\sqrt{2} \text{ л/с}^2, \quad \eta = \sqrt{450(\sqrt{2} - 0,48)} \cong 20,5 \text{ л/с},$$

$$K_1 = 900(\sqrt{2} - 1) \cong 372,81 \text{ л/с}^2, \quad K_2 \cong 351 \text{ л/с}.$$

Видно, что в рассматриваемом случае собственная частота замкнутой системы (5.33)

$$\omega'_1 = \sqrt{\eta^2 + \delta^2} \cong 35,71 \text{ л/с},$$

а также безразмерный коэффициент демпфирования (при $\xi = \xi^*$)

$$\xi' = \eta / \sqrt{\eta^2 + \delta^2} \cong 0,57$$

увеличиваются по сравнению с теми же параметрами объекта управления (2.38). Увеличение собственной частоты составляет примерно 19%, а безразмерный коэффициент демпфирования увеличивается почти в шесть раз.

Если параметр ξ объекта управления может принимать любые значения из диапазона

$$0,05 \leq \xi \leq 0,15,$$

то диапазон значений параметра ξ' замкнутой системы определяется следующим образом

$$0,53 \leq \xi' \leq 0,62.$$

Таким образом, оптимальное стабилизирующее управление (5.32) дает вполне приемлемый результат. Недостатком в обоих случаях является то, что замкнутая система не обладает свойством астатизма и регулятор с передаточной функцией (5.28) физически не реализуем.

В принципе, теория управления располагает методами, позволяющими снять отмеченные недостатки [14]. Естественно, что показатели качества при этом несколько ухудшатся по сравнению с рассмотренным выше оптимальным случаем. Не вдаваясь в подробности этих методов напомним, что целью первой вспомогательной задачи был выбор весовых матриц Q и R из критерия (5.5).

2. Рассмотрим вторую вспомогательную задачу, позволяющую обосновать выбор весовой матрицы M_1 из показателя (5.13).

Введем для объекта управления (2.38) переменные состояния $x_1(t, \xi) = y(t, \xi)$ и $x_2(t, \xi) = \dot{y}(t, \xi)$ и их функции чувствительности

$$w_1(t) = \left. \frac{\partial x_1(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi^*}, \quad w_2(t) = \left. \frac{\partial x_2(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi^*}.$$

Запишем для уравнений невозмущенного движения объекта управления (5.16) соответствующие уравнения чувствительности

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -\omega_1^2 w_1 - 2\xi^* \omega_1 w_2 - 2\omega_1 x_2, \end{aligned} \tag{5.34}$$

где $x_2 = x_2(t, \xi^*)$.

Уравнения чувствительности (5.34) необходимо рассматривать совместно с уравнениями невозмущенного движения (5.16). Объединяя уравнения (5.16) и (5.34) получим

$$\dot{z} = A_1 z + B_1(u + \varphi), \tag{5.35}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi^* \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_1 & -\omega_1^2 & -2\xi^* \omega_1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $z = [x_1 \ x_2 \ w_1 \ w_2]^T$ – вектор состояния расширенной системы.

Учитывая, что возмущенное движение в первом приближении можно представить в виде суперпозиции невозмущенного и дополнительного движений (см. гл. 1)

$$x_1(t, \xi) \cong x_1(t, \xi^*) + (\xi - \xi^*) w_1(t),$$

$$x_2(t, \xi) \cong x_2(t, \xi^*) + (\xi - \xi^*) w_2(t),$$

по аналогии с (5.17) введем показатель чувствительности

$$J_{\mu_1} = \int_0^{\infty} (\omega_1^2 w_1^2 + w_2^2) dt, \tag{5.36}$$

характеризующий энергию дополнительного движения.

Дополняя показатель (5.17) при значении $r = 1/\omega_1^2$, выбранном на предыдущем этапе, показателем (5.36) получим функционал качества для расширенной системы (5.35) в виде

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left[\omega_1^2 x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{\omega_1^2} + m(\omega_1^2 w_1^2 + w_2^2) \right] dt, \quad (5.37)$$

где весовой коэффициент m пока не зафиксирован.

При выборе весового коэффициента m можно ориентироваться на максимальную оценку величины $\Delta\xi = |\xi - \xi^*|$. Окончательно установить приемлемое значение весового коэффициента m можно итеративным путем на основе сравнительного анализа решений LQ-задачи оптимального управления (5.35), (5.37) при разных значениях m с использованием программной среды MATLAB.

В соответствии с (5.14) оптимальное управление в рассматриваемом случае имеет вид

$$u = -K_1^* x_1 - K_2^* x_2 - K_3^* w_1 - K_4^* w_2, \quad (5.38)$$

где K_i^* ($i = \overline{1,4}$) – оптимальные значения коэффициентов обратных связей, найденные по стандартной схеме с использованием решения уравнения Риккати (5.14) при выбранном значении весового коэффициента m в функционале (5.37).

Подставляя управление (5.38) в уравнение (5.35) получим оптимальный по критерию (5.37) характеристический полином расширенной замкнутой системы

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \omega_1^2 + K_1^* & \lambda + 2\xi^* \omega_1 + K_2^* & K_3^* & K_4^* \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 2\omega_1 & \omega_1^2 & \lambda + 2\xi^* \omega_1 \end{bmatrix} = \quad (5.39)$$

$$= \lambda^4 + \alpha_1^* \lambda^3 + \alpha_2^* \lambda^2 + \alpha_3^* \lambda + \alpha_4^*,$$

где

$$\alpha_1^* = 4\xi^* \omega_1 + K_2^*; \quad \alpha_2^* = 2\omega_1^2 (2\xi^{*2} + 1) + K_1^* + 2\xi^* \omega_1 K_2^* - 2\omega_1 K_4^*;$$

$$\alpha_3^* = \omega_1^2 (2\xi^* \omega_1 + K_2^*) - 2\omega_1 K_3^* + 2\xi^* \omega_1 (\omega_1^2 + K_1^*); \quad \alpha_4^* = \omega_1^2 (\omega_1^2 + K_1^*).$$

В дальнейшем полином (5.39) будем рассматривать в качестве желаемого для замкнутой системы управления.

3. Вернемся к структурной схеме системы управления, приведенной на рис. 2.7. Найдем передаточную функцию $W(p)$ физически реализуемого регулятора минимального порядка, обеспечивающего для замкнутой системы астатизм первого порядка и желаемый характеристический полином (5.39). Решение определяется теми же формулами (2.44), (2.45), что и в примере 2.7 (см. п. 2.3), в которых параметры α_i принимают значения α_i^* ($i = \overline{1, 4}$).

Напомним, что в примере 2.7 регулятор (2.45) настраивался в соответствии со стандартной (биномиальной) формой четвертого порядка (2.47), а в рассматриваемом примере в соответствии с полиномом (5.39), рассчитанным по критерию (5.37) с минимизацией энергии не только основного движения (при $\xi = \xi^*$), но и дополнительного движения (при $\xi \neq \xi^*$).

Заметим, что в обоих случаях в систему управления целесообразно ввести предфильтр с передаточной функцией

$$L(p) = \frac{\beta_2}{\beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2},$$

исключающий влияние числителя передаточной функции регулятора (2.45) на показатели качества переходных процессов [14]. Соответствующая структурная схема приведена на рис. 5.1. В этом случае дифференциальное уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$Q(s)y(t) = \alpha_4 y^* + (s + \gamma)s\varphi(t), \quad (5.40)$$

где $Q(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$ – характеристический полином замкнутой системы.

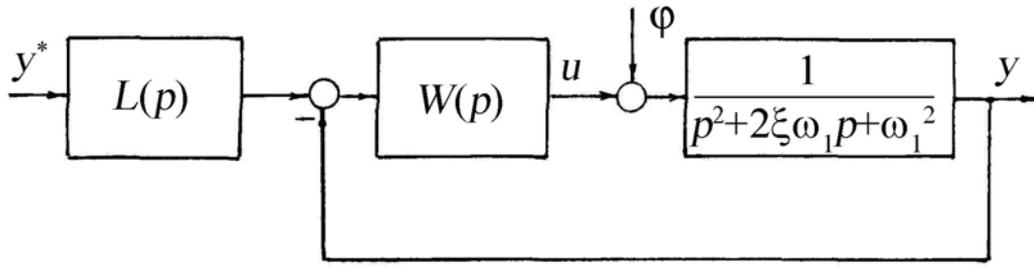


Рис. 5.1. Структурная схема системы управления с предфильтром

Для системы управления, структурная схема которой приведена на рис. 5.1, рассмотрено три варианта настройки регулятора, имеющего передаточную функцию (2.45). Во всех случаях дифференциальное уравнение замкнутой системы имеет одну и ту же структуру (5.40). Для разных вариантов настройки регулятора при $\xi = \xi^*$ получаются следующие характеристические полиномы:

– настройка по методу компенсации (см. пример 2.6 из п. 2.3)

$$Q(s) = (s^2 + 2\xi^* \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + \alpha'_1 s + \alpha'_2); \quad (5.41)$$

– настройка по методу компенсации с условием полного гашения колебаний (см. пример 2.7 из п. 2.3)

$$Q(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4; \quad (5.42)$$

– настройка оптимальная по критерию (5.37) (см. формулу (5.39))

$$Q(s) = s^4 + \alpha_1^* s^3 + \alpha_2^* s^2 + \alpha_3^* s + \alpha_4^*. \quad (5.43)$$

Напомним, что в первом и во втором случаях параметры α'_i ($i = 1, 2$) и α_i ($i = \overline{1, 4}$) оставались свободными и для их определения рекомендовалось использовать стандартные формы (биномиальную, Баттерворта и т. п.). В третьем случае параметры α_i^* ($i = \overline{1, 4}$) определяются расчетным путем с использованием процедуры LQ-оптимизации. Их конкретные значения зависят от выбора весовых матриц в критерии оптимальности (5.12).

Выберем в качестве стандартной для первых двух случаев биномиальную форму. Положим $\omega_1^2 \alpha'_2 = \alpha_4 = \alpha_4^* = \omega_0^4$ и приведем полино-

мы (5.41), (5.42) и (5.43) к общему среднегеометрическому корню $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \sqrt{\eta^2 + \delta^2}}$. На рис. 5.2 показаны варианты расположения корней характеристического полинома замкнутой системы:

– на рис. 5.2, а для полинома (5.41)

$$\lambda_{1,2} = (-3 \pm j29,85)1/c, \quad \lambda_{3,4} = -35,681/c;$$

– на рис. 5.2, б для полинома (5.42)

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\omega_0 = -32,721/c;$$

– на рис. 5.2, в для полинома (5.43) при малом весовом коэффициенте ($m \rightarrow 0$) в критерии оптимальности (5.37)

$$\lambda_{1,2} = (-3 \pm j29,85)1/c, \quad \lambda_{3,4} = (-20,5 \pm j29,2)1/c.$$

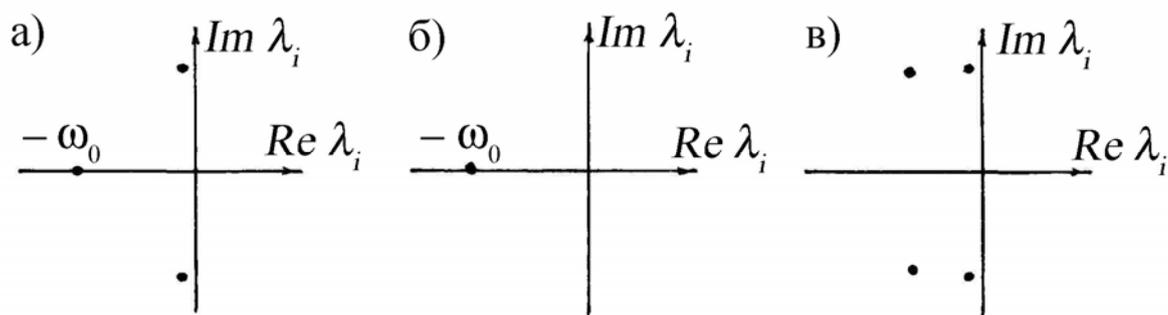


Рис. 5.2. Варианты расположения корней характеристического полинома замкнутой системы

Сравнительный анализ вариантов показывает, что наибольшей параметрической чувствительностью обладает первый вариант, для которого желаемый характеристический полином $s^2 + \alpha'_1 s + \alpha'_2$ никак не учитывает свойства объекта управления. Для этого варианта даже небольшое отклонение параметров объекта от расчетных значений приводит к существенному изменению расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. Переходные процессы при этом имеют ярко выраженный колебательный характер.

Для второго варианта вместо одного четырехкратного корня $\lambda = -\omega_0$ (см. рис. 5.2, б) появляются два различных вещественных

корня и пара комплексно-сопряженных корней. Однако колебания в замкнутой системе не возникают.

Это подтверждает тот факт, что при управлении механическими системами с ярко выраженными колебательными свойствами использовать в качестве желаемых стандартные формы, в частности биномиальную, следует с большой осторожностью [8, 20].

Наименьшей параметрической чувствительностью обладает третий вариант, для которого желаемый характеристический полином замкнутой системы в максимальной степени учитывает свойства объекта управления, включая чувствительность переменных состояния объекта к изменению параметра ξ . Так при $m = 10$ в функционале качества (5.37) желаемый характеристический полином (5.43) имеет корни $\lambda_1 = -7,31/c$, $\lambda_2 = -28,11/c$, $\lambda_{3,4} = -41,6 \pm j621/c$. В этом случае небольшое отклонение параметра объекта ξ от расчетного значения ξ^* приводит лишь к незначительному (локальному) изменению расположения корней характеристического полинома относительно их номинального (расчетного) расположения. При этом переходные процессы в замкнутой системе имеют аperiodический характер.

Запишем частотную характеристику замкнутой системы (5.40) по возмущению φ

$$H_{\varphi y}(j\omega) = \frac{j\omega(j\omega + \gamma)}{Q(j\omega)}. \quad (5.44)$$

Рассмотренные варианты различаются не только параметрами знаменателя в выражении (5.44), но и параметром γ в числителе, который принимает следующие значения: для полинома (5.41) $\gamma = 71,41/c$; для полинома (5.42) $\gamma = 124,91/c$; для полинома (5.43) $\gamma = 121,71/c$ (при $m = 10$). Видно, что высокочастотная асимптота амплитудно-частотной характеристики $|H_{\varphi y}(j\omega)| \cong 1/\omega^2$ не зависит от варианта. При этом происходит эффективное подавление возмущения φ . Низкочастотная асимптота

$$|H_{\varphi y}(j\omega)| \cong \frac{\gamma}{\omega_0^4} \omega$$

для первого варианта идет немного ниже, чем для второго и третьего вариантов. В среднечастотном диапазоне в силу меньшей колебательности замкнутой системы некоторое преимущество в смысле подавления возмущения φ имеет третий вариант.

5.3. Синтез робастных систем управления с помощью минимаксной оптимизации

5.3.1. Управление по состоянию

Рассмотрим линейный объект управления, описываемый уравнениями в переменных состояния

$$\dot{x} = A(\mu)x + B(\mu)u, \quad x_0, \quad (5.45)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^m$ – вектор управления, $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l]^T$, $\mu \in M \subset R^l$ – вектор параметров, которые могут принимать значения из некоторого множества M .

Требуется найти для объекта (5.45) стабилизирующую обратную связь по вектору состояния, при которой достигается минимальное значение интегрального показателя качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (5.46)$$

где $Q \geq 0$, $R > 0$ – весовые матрицы, определяющие значимость различных компонент в показателе (5.46).

В п. 5.1 уже отмечалось, что множество M порождает множество оптимальных законов управления. Для задачи (5.45), (5.46) оно имеет вид

$$u = -K(\mu)x, \quad K = R^{-1}B^T P, \quad (5.47)$$

где $P(\mu)$ – симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного алгебраического уравнения Лурье – Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Минимальное значение показателя качества (5.46) при каждом μ определяется только начальным состоянием x_0 системы (5.45)

$$J_{\text{опт}}(\mu) = x_0^T P(\mu)x_0. \quad (5.48)$$

Выберем из множества управлений (5.47) такое управление

$$u = -K^* x, \quad K^* = K(\mu^*) \quad (5.49)$$

с фиксированной настройкой на $\mu^* \in M$, которое обеспечивает для замкнутой системы (5.45), (5.49) гарантированное значение показателя качества (5.46), т. е. такое минимальное значение, которое не может быть превышено при любых $\mu \in M$ в объекте управления (5.45).

Иными словами, необходимо найти

$$\mu_{\text{гар}}^* = \arg \min_{\mu^* \in M} \max_{\mu \in M} J(\mu, \mu^*), \quad (5.50)$$

где величина $J(\mu, \mu^*) = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^{*\top} R K^*) x dt$ определяется на траекториях замкнутой системы (5.45), (5.49) при произвольных начальных условиях.

Тогда гарантированное значение показателя (5.46) будет равно

$$J_{\text{гар}} = \max_{\mu \in M} J(\mu, \mu_{\text{гар}}^*). \quad (5.51)$$

Очевидно, что $J_{\text{гар}} \geq J_{\text{опт}}(\mu)$, причем знак равенства имеет место в случае, когда множество M стягивается в точку в R^l .

Заметим, что закон управления (5.47) с переменной настройкой, для которого достигается оптимальное значение (5.48) показателя (5.46), может быть реализован, если имеется априорная или текущая информация о векторе параметров μ . Однако поведение такой сис-

темы требует дополнительного анализа с привлечением методов теории нестационарных систем [23].

Пример 5.1.

Пусть уравнение объекта управления имеет вид

$$\mu \dot{y} = u, \quad (5.52)$$

где параметр μ задан с точностью до диапазона $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$.

Введем вектор состояния $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ и получим из (5.52) уравнения вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u/\mu. \quad (5.53)$$

Запишем интегральный показатель качества

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + ru^2) dt, \quad (5.54)$$

где r – весовой коэффициент.

Из (5.53) и (5.54) для стандартной векторно-матричной формы записи получим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\mu \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = r.$$

Уравнение Лурье – Риккати в этом случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Выполним матричные операции

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r\mu^2} P_{12}^2 + 1 & P_{11} - \frac{1}{r\mu^2} P_{12} P_{22} \\ P_{11} - \frac{1}{r\mu^2} P_{12} P_{22} & 2P_{12} - \frac{1}{r\mu^2} P_{22}^2 \end{bmatrix} = 0$$

и приравняем к нулю все элементы получившейся матрицы, тогда получим три уравнения для определения трех элементов матрицы P

$$P_{12} = \pm\mu\sqrt{r}, \quad P_{11} = \frac{1}{r\mu^2}P_{12}P_{22}, \quad P_{22} = \pm\mu\sqrt{2rP_{12}}.$$

Матрица P должна быть положительно определенной. Это позволяет выбрать знаки и получить следующее решение уравнения Лурье – Риккати.

$$P_{12} = \mu\sqrt{r}, \quad P_{11} = \sqrt{2\mu\sqrt{r}}, \quad P_{22} = \sqrt{2\mu^3r\sqrt{r}}.$$

Множество оптимальных коэффициентов обратных связей при $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$ находится по формуле (5.47)

$$\begin{aligned} K(\mu) = [K_1 \quad K_2] &= \frac{1}{r} [0 \quad 1/\mu] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{r\mu} [P_{12} \quad P_{22}] = \\ &= \left[1/\sqrt{r} \quad \sqrt{2\mu/\sqrt{r}} \right] \end{aligned}$$

Определим начальное состояние системы (5.52) следующим образом

$$x_{10} = y_0, \quad x_{20} = \dot{y}_0 = 0,$$

тогда в соответствии с формулой (5.48) получим

$$J_{\text{опт}}(\mu) = P_{11}x_{10}^2 = \sqrt{2\mu\sqrt{r}} y_0^2.$$

При фиксированной настройке коэффициентов обратных связей на некоторое значение μ^* ($\underline{\mu} \leq \mu^* \leq \bar{\mu}$) получим следующее уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{K_1}{\mu}x_1 - \frac{K_2^*}{\mu}x_2, \quad (5.55)$$

где $K_1 = 1/\sqrt{r}$, $K_2^* = \sqrt{2\mu^*/\sqrt{r}}$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы (5.55)

$$\lambda^2 + \frac{1}{\mu}\sqrt{2\mu^*/\sqrt{r}}\lambda + \frac{1}{\mu\sqrt{r}} = 0$$

имеет корни, расположенные в левой полуплоскости и при $\mu = \mu^*$ эти корни $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2\mu^* \sqrt{r}}} (-1 \pm j)$ соответствуют расположению Баттерворта (см. п. 2.3).

Так как в объекте управления $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$, то при других значениях μ расположение корней, а значит и свойства замкнутой системы (5.55) меняются.

Найдем для рассматриваемого диапазона гарантированное значение показателя качества (5.46).

Для этого сначала надо решить задачу (5.50). Запишем показатель

$$\begin{aligned} J(\mu, \mu^*) &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^{*T} R K^*) x dt = \\ &= \int_0^{\infty} [x_1^2 + r(K_1^2 x_1^2 + 2K_1 K_2^* x_1 x_2 + K_2^{*2} x_2^2)] dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} (x_1^2 + a\sqrt{2} x_1 x_2 + a^2 x_2^2) dt, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где $a = \sqrt{\mu^* \sqrt{r}}$.

Представим показатель (5.56) в виде

$$\begin{aligned} J(\mu, \mu^*) &= 2 \int_0^{\infty} (x_1 + ax_2)^2 dt - 2(2 - \sqrt{2})a \int_0^{\infty} x_1 x_2 dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} (x_1 + ax_2)^2 dt - 2(2 - \sqrt{2})a \int_0^{\infty} x_1 \dot{x}_1 dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} (x_1 + ax_2)^2 dt - (2 - \sqrt{2})a x_1^2 \Big|_{x_{10}}^{x_{1\infty}=0} = \\ &= 2 \int_0^{\infty} (x_1 + ax_2)^2 dt + (2 - \sqrt{2})a x_{10}^2. \end{aligned}$$

Для вычисления оставшегося интеграла введем обозначение $z = x_1 + ax_2$ и используем теорему Парсеваля [7]

$$\int_0^{\infty} z^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(j\omega)|^2 d\omega, \quad (5.57)$$

где $Z(j\omega) = Z(p)|_{p=j\omega}$, $Z(p) = L\{z(t)\}$.

Определить изображение по Лапласу $Z(p)$ при ненулевом начальном условии можно из уравнений замкнутой системы (5.55) следующим образом

$$Z(p) = X_1(p) + aX_2(p), \quad X(p) = [pE - A + BK^*]^{-1} x_0,$$

где $X(p) = [X_1(p) \ X_2(p)]^T$, $x_0 = [x_{10} \ 0]^T$, $K^* = [K_1 \ K_2^*]^T$.

Осуществляя преобразования, получим

$$X_1(p) = \frac{(p + K_2^*/\mu)}{Q(p)} x_{10}, \quad X_2(p) = -\frac{K_1/\mu}{Q(p)} x_{10},$$

$$Z(p) = \frac{p + (1 - 1/\sqrt{2})K_2^*/\mu}{Q(p)} x_{10},$$

где $Q(p) = p^2 + \frac{K_2^*}{\mu} p + \frac{K_1}{\mu}$ – характеристический полином замкнутой системы (5.55).

Возвращаясь к теореме Парсеваля (5.57) и используя формулы табулированных интегралов по частоте ω при $n = 2$ получим

$$\begin{aligned} J(\mu, \mu^*) &= \left[\frac{\mu}{K_2^*} + \frac{K_2^*}{K_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (2 - \sqrt{2})a \right] y_0^2 = \\ &= \left(\mu \sqrt{\frac{\sqrt{r}}{2\mu^*}} + \sqrt{\frac{\mu^* \sqrt{r}}{2}} \right) y_0^2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Решение задачи (5.50) для выражения (5.58) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_{\text{гар}}^* &= \bar{\mu}, \quad J_{\text{гар}} = \sqrt{2\bar{\mu}\sqrt{r}} y_0^2, \\ K_1 &= 1/\sqrt{r}, \quad K_2^* = \sqrt{2\bar{\mu}/\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Таким образом, в рассмотренном примере при настройке закона управления (5.49) на $\mu_{\text{гар}}^* = \bar{\mu}$ гарантируется, что при любых $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$

в объекте управления (5.52) минимизируемый показатель качества (5.54) не превысит значения $J_{\text{гар}} = \sqrt{2\bar{\mu}}\sqrt{r} y_0^2$.

Сделаем два замечания.

1. Выше уже отмечалось, что перед практической реализацией любого решения необходим анализ процессов в замкнутой системе в сравнении с процессами, получающимися для альтернативных решений. Например, в рамках рассмотренного примера вместо задачи (5.50) можно решить близкую по смыслу задачу

$$\mu_{\text{гар}}^* = \arg \min_{\underline{\mu} \leq \mu^* \leq \bar{\mu}} \int_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} J(\mu, \mu^*) d\mu. \quad (5.60)$$

Решение задачи (5.60) имеет вид

$$\mu_{\text{гар}}^* = \frac{\bar{\mu} + \underline{\mu}}{2}, \quad J_{\text{гар}} = \sqrt[4]{r} \left(\frac{\bar{\mu}}{\sqrt{\bar{\mu} + \underline{\mu}}} + \frac{\sqrt{\bar{\mu} + \underline{\mu}}}{2} \right), \quad (5.61)$$

$$K_1 = 1/\sqrt{r}, \quad K_2 = \sqrt{(\bar{\mu} + \underline{\mu})/\sqrt{r}}.$$

Видно, что для узкого диапазона $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$ решения (5.59) и (5.61) оказываются близкими. Для широкого диапазона необходим сравнительный анализ решений с рассмотрением помимо (5.46) и других показателей качества переходных и установившихся процессов.

Показатели робастности, рассмотренные выше, характеризуют замкнутую систему при различных значениях параметра μ в объекте управления либо по наихудшему варианту (5.50), либо интегрально (5.60). В соответствии с контекстом задачи может потребоваться и другая трактовка робастности, например, на основе стабильности показателя качества

$$\mu_{\text{гар}}^* = \arg \min_{\underline{\mu} \leq \mu^* \leq \bar{\mu}} \left| J(\underline{\mu}, \mu^*) - J(\bar{\mu}, \mu^*) \right|.$$

2. Рассмотренный выше пример имеет в основном методическое значение, так как для реальных систем в большинстве случаев аналитическое решение получить не удастся. Поэтому для решения кон-

кретной задачи и сравнительного анализа решений необходимо использовать MATLAB или другие программные средства.

5.3.2. Управление по выходу

Рассмотрим линейный объект управления с одним входом и одним выходом, описываемый уравнениями в переменных состояния

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)x + B(\mu)u, \quad x_0, \\ y &= C(\mu)x, \end{aligned} \tag{5.62}$$

где $\mu \in M \subset R^l$ – вектор параметров, которые могут принимать значения из некоторого множества M .

Передаточная функция объекта, связывающая управление u и выход y имеет вид

$$G(\mu, p) = C(\mu)[pE - A(\mu)]^{-1}B(\mu).$$

Требуется синтезировать линейный регулятор по выходу y с фиксированной настройкой, обеспечивающий для замкнутой системы приемлемое качество на всем множестве значений вектора параметров μ .

Регулятор будем выбирать на множестве физически реализуемых регуляторов с дробно-рациональной передаточной функцией минимального порядка $W(\theta, p)$, где $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]^T$, $\theta \in \Theta \subset R^k$ – вектор настраиваемых параметров регулятора; Θ – множество возможных настроек, удовлетворяющих условиям асимптотической устойчивости замкнутой системы

$$H(\mu, \theta, p) = \frac{W(\theta, p)G(\mu, p)}{1 + W(\theta, p)G(\mu, p)}.$$

Введем в рассмотрение показатель качества замкнутой системы $J(\mu, \theta)$, имеющий смысл функции потерь и сформулируем задачу синтеза регулятора $W(\theta, p)$ в виде минимаксной задачи

$$\max_{\mu \in M} J(\mu, \theta^*) = \inf_{\theta \in \Theta} \max_{\mu \in M} J(\mu, \theta). \tag{5.63}$$

определения вектора настраиваемых параметров θ^* . Соответствующий регулятор с передаточной функцией $W(\theta^*, p)$ будем называть робастным.

Если считать, что вектор параметров объекта $\mu \in M$ может принимать конечное число значений N , то вместо (5.63) получим дискретную минимаксную задачу

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \max_{i \in [1:N]} J_i(\theta), \quad J_i(\theta) = J(\mu_i, \theta). \quad (5.64)$$

Некоторые особенности решения задач (5.63) и (5.64) рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 5.2.

Рассмотрим задачу позиционирования вращающегося ротора с помощью Р-регулятора положения при неопределенности коэффициента вязкого трения. Запишем уравнение движения ротора как объекта управления

$$J\ddot{q} + b\dot{q} = M + M_B, \quad (5.65)$$

где q – угловая координата; J – момент инерции ротора ($J = \text{const}$); b – коэффициент вязкого трения ($\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$); M и M_B – управляющий и возмущающий моменты.

Приведем уравнение (5.65) к виду

$$\ddot{q} + \xi\dot{q} = u + \varphi, \quad (5.66)$$

где $\xi = b/J$ ($\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$), $u = M/J$, $\varphi = M_B/J$.

Управление u для Р-регулятора имеет вид

$$u = -K(y - q^*), \quad K > 0, \quad (5.67)$$

где $y = q + v$ – измеряемый выход; v – высокочастотный шум датчика обратной связи; q^* – задание на позиционирование ($q^* = 1(t)$); K – настраиваемый коэффициент обратной связи.

Возмущение φ зададим с помощью импульсной δ -функции Дирака ($\varphi = \delta(t)$).

Требуется найти робастную настройку регулятора по интегральному квадратичному критерию качества

$$J(\xi, K) = \int_0^{\infty} (e^2 + ru^2) dt, \quad (5.68)$$

где $e = q - q^*$ – ошибка по контролируемому выходу q ; r – весовой коэффициент, зависящий от имеющегося ресурса управления u .

В соответствии с (5.63) робастность Р-регулятора достигается при

$$K^* = \arg \min_{K > 0} \max_{\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}} J(\xi, K). \quad (5.69)$$

Обычно при этом дополнительно должна обеспечиваться малая чувствительность контролируемого выхода q к высокочастотному шуму v датчика обратной связи и быстрое завершение переходных процессов при импульсном возмущении φ .

Объединяя (5.66) и (5.67), получим уравнение замкнутой системы

$$\ddot{q} + \xi \dot{q} + Kq = Kq^* - Kv + \varphi. \quad (5.70)$$

Полагая в (5.70) $v = 0$, $\varphi = 0$ и переходя к изображениям по Лапласу, с использованием теоремы Парсеваля (5.57) получим

$$J(\xi, K) = \frac{1}{2} (1 + rK^2) \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{K} \right). \quad (5.71)$$

Рассмотрим два характерных случая.

Случай большого ресурса управления ($r \rightarrow 0$). В этом случае

$$J(\xi, K) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{K} \right).$$

Соответствующие зависимости при разных значениях K , приведенные на рис. 5.3, показывают, что для достижения робастного оптимума в смысле (5.69) требуется увеличивать коэффициент обратной связи K . При этом в зависимости от диапазона $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$ максимум

$J(\xi, K^*)$ достигается либо на левой, либо на правой границе диапазона. Минимум $J(\xi, K^*)$ имеет место при $\xi = \sqrt{K^*}$.

Анализ расположения корней

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} - K^*} \quad (5.72)$$

характеристического полинома замкнутой системы (5.70) показывает,

что при больших K^* ($K^* \gg \frac{\xi^2}{4}$) корни (5.72) являются комплексно-

сопряженными с большим показателем колебательности

$\mu = \frac{\sqrt{4K^* - \xi^2}}{\xi}$ (см. п. 2.3). Иными словами, увеличение K^* приво-

дит к ухудшению прямых показателей качества переходного процесса по полезному сигналу $q^* = 1(t)$.

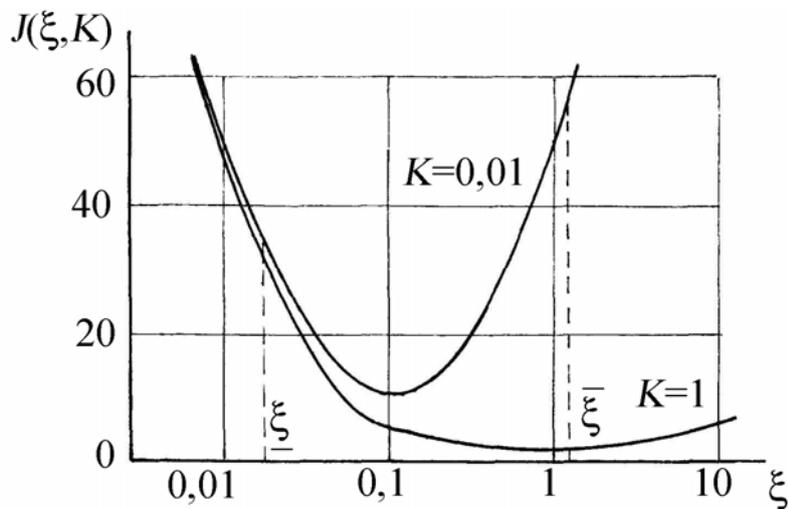


Рис. 5.3. Зависимости показателя качества $J(\xi, K)$ при разных значениях коэффициента обратной связи K

Реакция замкнутой системы (5.70) на импульсное возмущение $\varphi = \delta(t)$ также имеет колебательный характер

$$q_{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{K^* - \frac{\xi^2}{4}}} e^{-\frac{\xi}{2}t} \sin \sqrt{K^* - \frac{\xi^2}{4}} t.$$

Однако интенсивность колебаний убывает с увеличением K^* .

Оценить влияние высокочастотного шума ν датчика обратной связи можно по асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристике $20\lg|H_{vq}(j\omega)|$ (рис. 5.4), где

$$H_{vq}(j\omega) = H_{vq}(p)\Big|_{p=j\omega}, \quad H_{vq}(p) = \frac{K^*}{p^2 + \xi p + K^*}.$$

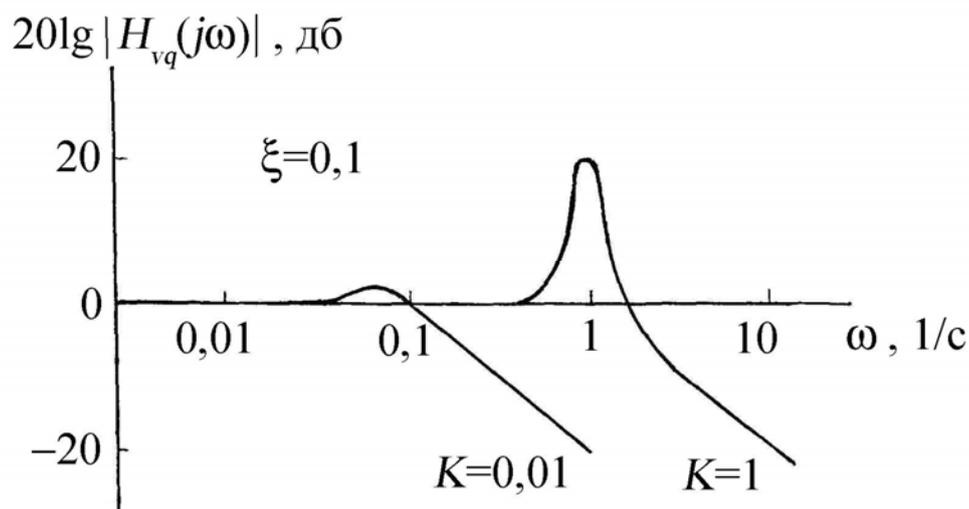


Рис. 5.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы по высокочастотному шуму ν

Видно, что для эффективной фильтрации высокочастотного шума ν величина K^* должна быть ограничена.

Таким образом, при выборе максимального значения K^* можно обеспечить приемлемый компромисс между основными требованиями к замкнутой системе.

Случай ограниченного ресурса управления ($r > 0$). Если максимум показателя $J(\xi, K)$ достигается на левой границе диапазона $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$, то решение K^* задачи (5.69) находится из уравнения

$$2K^3 + \underline{\xi}^2 K^2 - \frac{\underline{\xi}^2}{r} = 0, \quad (5.73)$$

если же на правой границе диапазона, то – из уравнения

$$2K^3 + \bar{\xi}^2 K^2 - \frac{\bar{\xi}^2}{r} = 0.$$

Видно, что K^* находится в диапазоне $0 < K^* < \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Положим $r = 1$ и построим зависимости $J(\xi, K^*)$, характеризующие качество робастно оптимальной замкнутой системы по показателю (5.68). На рис. 5.5 кривая 1 построена для диапазона $0,01 \leq \xi \leq 1$ ($K^* = 0,037$), кривая 2 – для диапазона $0,1 \leq \xi \leq 10$ ($K^* = 0,99$). В указанных диапазонах кривые показаны сплошными линиями. Минимум показателя $J(\xi, K^*)$ как и в предыдущем случае имеет место при $\xi^* = \sqrt{K^*}$.

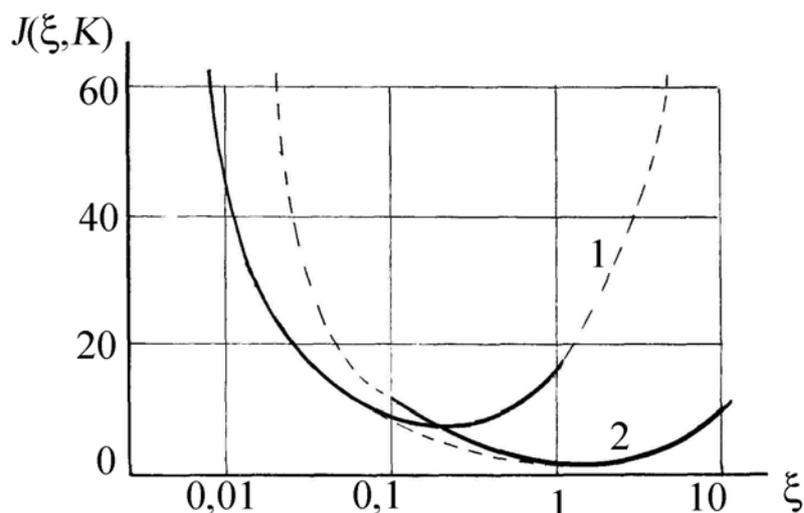


Рис. 5.5. Зависимости показателя качества $J(\xi, K^*)$ при робастно оптимальной настройке регулятора

На рис. 5.5 огибающая (снизу) кривая соответствует предельно достижимому качеству замкнутой системы по показателю (5.68), когда известно значение параметра ξ объекта управления (5.66) либо априори, либо в виде оценки идентификатора в адаптивной системе управления. При этом зависимость $K = K(\xi)$ определяется из уравнения

$$2K^3 + \xi^2 K^2 - \frac{\xi^2}{r} = 0.$$

Соответствующая кривая при $r = 1$ приведена на рис. 5.6.

Из рис. 5.5 видно, что предельно достижимое качество (по показателю (5.68)) может быть заметно выше, чем качество при робастной (минимаксной) оптимизации, т. е. рассчитанное на диапазон $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$, особенно, если этот диапазон достаточно широкий.

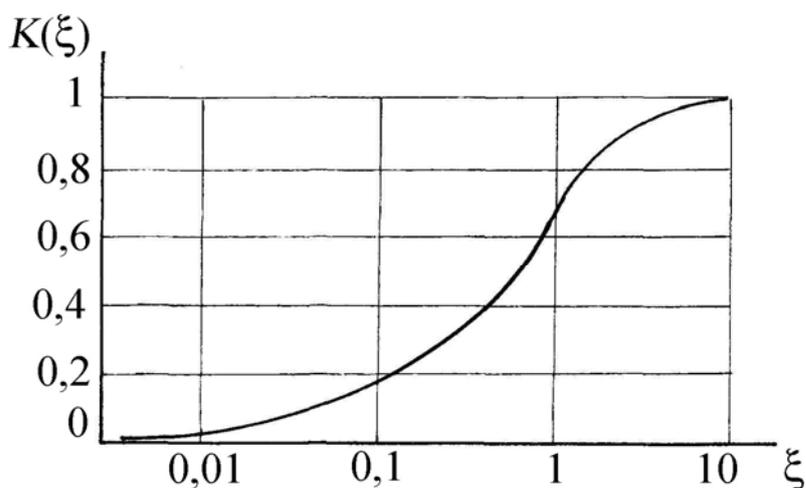


Рис. 5.6. Зависимость оптимального коэффициента обратной связи от параметра ξ объекта управления

Необходимо заметить, что найденное решение задачи (5.69) не должно восприниматься как окончательное, оно дает лишь ориентир для дальнейшего анализа. Пусть, например, $0,01 \leq \xi \leq 1$. Решение задачи (5.69) для этого диапазона имеет вид (см. кривую 1 на рис. 5.5)

$$K^* = 0,037, \quad J_{\text{гар}} = J(0,01, K^*) = 50,2, \quad (5.74)$$

где $J_{\text{гар}}$ – максимальное (гарантированное) значение показателя качества для диапазона $0,01 \leq \xi \leq 1$.

В то же время решение

$$K^* = 0,17, \quad J_{\text{гар}} = J(0,1, K^*) = 5,45,$$

найденное для более узкого диапазона $0,1 \leq \xi \leq 1$, имеет в этом диапазоне заметное (почти на порядок по показателю $J_{\text{гар}}$) преимущество и лишь немного уступает решению (5.74) в диапазоне $0,01 \leq \xi \leq 0,1$.

Решение, найденное для диапазона $0,1 \leq \xi \leq 10$ (см. кривую 2 на рис. 5.5)

$$K^* = 0,99, \quad \bar{J} = J(10, K^*) = 10,1$$

в указанном диапазоне позволяет обеспечить для замкнутой системы почти предельно достижимое качество (см. огибающую кривую на рис. 5.5). В то же время для более широкого диапазона $0,01 \leq \xi \leq 10$ это решение может оказаться неприемлемым.

Как и в предыдущем случае, рекомендуемая настройка робастного регулятора K^* должна учитывать свойства замкнутой системы по отношению к возмущению φ и шуму ν . Дополнительную информацию при выборе того или иного решения может дать анализ корневого годографа, построенного по выражению (5.72).

Пример 5.3.

Рассмотрим задачу управления движением вращательной степени подвижности робота с нежесткой кинематической связью между двигателем и звеном робота при неопределенности задания жесткостных и инерционных характеристик. Запишем уравнение объекта управления при двухмассовой расчетной схеме

$$\begin{aligned} J_m \ddot{q}_m + b_m \dot{q}_m + c(q_m - q) &= u, \\ J \ddot{q} + b \dot{q} + c(q - q_m) &= w, \end{aligned} \quad (5.75)$$

где q_m, q – координаты двигателя и звена; u, w – управляющее и возмущающее воздействия; J_m – момент инерции двигателя; J ($\underline{J} \leq J \leq \bar{J}$) – момент инерции звена; c ($\underline{c} \leq c \leq \bar{c}$) – жесткость передаточного механизма; b_m, b – коэффициенты вязкого трения.

Введем новые параметры $\xi = c/\underline{c}$, $\mu = J/J_m$, $\beta_m = b_m(\underline{c} J_m)^{-1/2}$, $\beta = b(\underline{c} J_m)^{-1/2}$ и перейдем к безразмерным переменным

$$t' = t(\underline{c}/J_m)^{1/2}, \quad q'_m, \quad q', \quad u' = u/\underline{c}, \quad w' = w/\underline{c},$$

тогда уравнения объекта управления (5.75) в безразмерных переменных примут вид (штрихи опускаются)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + \beta_m \dot{q}_m + \xi(q_m - q) &= u, \\ \mu \ddot{q} + \beta \dot{q} + \xi(q - q_m) &= w, \end{aligned} \tag{5.76}$$

где $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$, $1 \leq \xi \leq \bar{\xi}$.

Требуется для объекта управления (5.76) построить реализуемый регулятор минимальной сложности, обеспечивающий в условиях неопределенности параметров μ и ξ приемлемое качество процессов для двух основных режимов движения:

- разгона (торможения) звена;
- позиционирования звена.

При этом необходимо предусмотреть возможность расположения датчиков обратных связей как на двигателе, так и на звене. Качество отработки заданий во всех случаях определяется по звену:

- в режиме разгона (торможения) звена ошибкой по скорости $\delta = \dot{q}^* - \dot{q}$, где $\dot{q}^* = 1(t)$;
- в режиме позиционирования звена ошибкой по положению $\varepsilon = q^* - q$, где $q^* = 1(t)$.

При решении поставленной задачи будем использовать следующие критерии качества:

- интегральный квадратичный критерий;
- показатель степени устойчивости замкнутой системы;

– H_∞ – норму передаточной функции замкнутой системы по возмущению w .

1. Рассмотрим сначала задачу разгона (торможения) звена. Пусть управление осуществляется в условиях неопределенности только момента инерции звена. В этом случае $\xi = 1$ и уравнения (5.76) в предположении малости коэффициентов вязкого трения β_m и β принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + q_m - q &= u, \\ \mu \ddot{q} + q - q_m &= w, \quad \underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Будем считать, что датчик скорости связан с двигателем, тогда простейший Р-регулятор скорости

$$u = -K_m(\dot{q}_m - \dot{q}^*) \quad (5.78)$$

позволяет стабилизировать замкнутую систему (5.77), (5.78). При этом характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$Q_m(p) = p^3 + K_m p^2 + (1 + 1/\mu)p + K_m/\mu. \quad (5.79)$$

Устойчивость замкнутой системы для любых $\mu > 0$ имеет место при $K_m > 0$. Учет малого вязкого трения в объекте управления (5.77) немного расширяет область устойчивости и при этом появляется установившаяся ошибка $\delta_\infty = (\beta_m + \beta)/(\beta_m + \beta + K_m)$.

Применяя к уравнениям замкнутой системы (5.77), (5.78) при $\dot{q}^* = 1(t)$ преобразование Лапласа и учитывая, что $L\{1(t)\} = 1/p$, получим изображения для ошибки $\delta(t)$ и управления $u(t)$

$$\Delta(p) = \frac{p^2 + K_m p + 1 + 1/\mu}{Q_m(p)}, \quad U(p) = \frac{K_m(p^2 + K_m p + 1 + 1/\mu)}{Q_m(p)}, \quad (5.80)$$

а также передаточную функцию

$$H_{w\dot{q}}(p) = \frac{p^2 + K_m p + 1}{\mu Q_m(p)} \quad (5.81)$$

от возмущения w до угловой скорости \dot{q} .

Введем следующие показатели качества замкнутой системы:

– интегральный квадратичный показатель

$$J^{(1)}(\mu, K_m) = \int_0^{\infty} (\delta^2 + ru^2) dt, \quad r \geq 0;$$

– показатель степени устойчивости замкнутой системы

$$J^{(2)}(\mu, K_m) = \max_{i \in [1,3]} (\operatorname{Re} p_i),$$

где p_i – корни характеристического полинома (5.79);

– H_{∞} – норма передаточной функции (5.81), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$J^{(3)}(\mu, K_m) = \max_{0 \leq \omega < \infty} |H_{w\dot{q}}(j\omega)|.$$

Очевидно, что робастные (минимаксные) настройки регулятора (5.78)

$$K_m^{(s)} = \arg \min_{K_m > 0} \max_{\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}} J^{(s)}(\mu, K_m), \quad s = 1, 2, 3, \quad (5.82)$$

рассматриваемые на диапазоне возможных значений параметра μ , зависят от вида показателя $J^{(s)}(\mu, K_m)$. В частности для первого показателя

$$J^{(1)}(\mu, K_m) = \frac{1}{2K_m} (K_m^2 + 1 + \mu + rK_m^2(1 + \mu))$$

получается следующая настройка

$$K_m^{(1)} = \left(\frac{1 + \bar{\mu}}{1 + r(1 + \bar{\mu})} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что первый показатель является аналитическим и его можно рассчитать по табулированным интегралам с использованием теоремы Парсеваля (5.57) и выражений (5.80). Для второго показателя задача (5.82) может быть решена только численно. Для третьего показателя, в принципе, можно получить аналитическое решение задачи (5.82), однако численное решение и здесь оказывается предпочтительным. Третий показатель в классической теории управления извест-

тен как показатель колебательности [7]. В теории функций эта же величина именуется нормой функции $H_{w\dot{q}}(p)$ комплексной переменной p в пространстве Харди $\|H_{w\dot{q}}(p)\|_{\infty} = \max_{0 \leq \omega < \infty} |H_{w\dot{q}}(j\omega)|$.

Сравнительный анализ процессов $\dot{q}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ в замкнутой системе при $0,5 \leq \mu \leq 5$ и различных настройках регулятора (5.78) показывает:

- процессы различаются не очень существенно с некоторым преимуществом по прямым показателям качества (перерегулированию, времени установления и колебательности) при робастной оптимизации замкнутой системы по показателю степени устойчивости $J^{(2)}(\mu, K_m)$;

- робастная оптимизация по показателю $J^{(3)}_{(\mu, K_m)}$ приводит к большему, чем для других показателей, значению коэффициента обратной связи K_m и, как следствие, к ухудшению прямых показателей качества;

- наибольшая колебательность процессов при всех настройках наблюдается при малых μ , что связано с плохой наблюдаемостью объекта управления (5.77) по измерению \dot{q}_m [8].

Плохая наблюдаемость в данном случае означает, что при малом μ , т. е. при массивном роторе двигателя и малоинерционном звене в измерении \dot{q}_m недостаточно информации о колебаниях звена.

Пусть датчик скорости связан со звеном, тогда Р-регулятор скорости имеет вид

$$u = -K(\dot{q} - \dot{q}^*). \quad (5.83)$$

Регулятор (5.83) не может стабилизировать объект (5.77). Если же в объекте учесть вязкое трение, то замкнутая система (5.76), (5.83) при $\xi = 1$ будет иметь следующий характеристический полином

$$Q(p) = p^3 + (\beta_m + \beta/\mu)p^2 + (1 + 1/\mu + \beta_m \beta/\mu)p + (\beta_m + \beta + K)/\mu \quad (5.84)$$

и условия устойчивости примут вид

$$0 < K + \beta_m + \beta < \mu(\beta_m + \beta/\mu)(1 + 1/\mu + \beta_m \beta/\mu). \quad (5.85)$$

При небольшом вязком трении область устойчивости (5.85) характеристического полинома (5.84) получается весьма малой, особенно при малых μ , поэтому при любом способе робастной оптимизации процессы $\dot{q}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ в замкнутой системе имеют большую колебательность. Необходимо также учитывать установившуюся ошибку δ_∞ . Поэтому для задачи разгона (торможения) звена робота целесообразно использовать PI- или PID- регуляторы, робастная (минимаксная) настройка которых осуществляется по двум (для PI-регулятора) или по трем (для PID- регулятора) коэффициентам также как и настройка рассмотренного выше P-регулятора.

2. Рассмотрим задачу позиционирования звена робота. Будем считать, что на роботе установлены датчик скорости и датчик положения, причем датчик скорости связан с двигателем.

Пусть датчик положения также связан с двигателем, тогда закон управления с P-регуляторами по скорости и по положению имеет вид

$$u = -K_m \dot{q}_m - L_m (q_m - q^*), \quad (5.86)$$

где K_m, L_m – настраиваемые коэффициенты обратных связей.

Характеристический полином замкнутой системы (5.77), (5.86)

$$R_m(p) = p^4 + K_m p^3 + (1 + L_m + 1/\mu)p^2 + (K_m/\mu)p + L_m/\mu \quad (5.87)$$

будет устойчивым при $K_m > 0$, $L_m > 0$.

Пусть датчик положения связан со звеном, тогда

$$u = -K_m \dot{q}_m - L(q - q^*). \quad (5.88)$$

В законе управления (5.88) настраиваются коэффициенты K_m, L . Характеристический полином замкнутой системы (5.77), (5.88) в этом случае имеет вид

$$R(p) = p^4 + K_m p^3 + (1 + 1/\mu)p^2 + (K_m/\mu)p + L/\mu. \quad (5.89)$$

В отличие от предыдущего случая область устойчивости характеристического полинома (5.89) ограничена $K_m > 0$, $0 < L < 1$.

Настройки регулятора (5.86) находятся из решения задачи

$$(K_m^{(s)}, L_m^{(s)}) = \arg \min_{\substack{K_m > 0 \\ L_m > 0}} \max_{\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}} J^{(s)}(\mu, K_m, L_m), \quad s = 1, 2, 3.$$

Для определения настроек регулятора (5.88) требуется решить задачу

$$(K_m^{(s)}, L^{(s)}) = \arg \min_{\substack{K_m > 0 \\ 0 < L < 1}} \max_{\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}} J^{(s)}(\mu, K_m, L), \quad s = 1, 2, 3.$$

Результаты робастной оптимизации процессов $q^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ в замкнутых системах (5.77), (5.86) и (5.77), (5.88) в довольно широком диапазоне $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$ принципиально не различаются. При этом вид показателя качества слабо сказывается на результатах.

Выберем показатель степени устойчивости ($s = 2$). Для замкнутой системы (5.77), (5.86) он имеет вид

$$J^{(2)}(\mu, K_m, L_m) = \max_{i \in [1, 4]} (\operatorname{Re} p_{mi}),$$

где p_{mi} – корни характеристического полинома (5.87).

Для замкнутой системы (5.77), (5.88) показатель качества имеет следующий вид

$$J^{(2)}(\mu, K_m, L) = \max_{i \in [1, 4]} (\operatorname{Re} p_i),$$

где p_i – корни характеристического полинома (5.89).

Заметим, что по расположению датчиков обратных связей для роботов более распространенным является случай (5.88). Робастная оптимизация по степени устойчивости для этого случая в диапазоне $0,5 \leq \mu \leq 5$ позволяет получить почти апериодические переходные процессы $q^{(2)}(t)$ с временем установления t_{Π} менее 20 условных единиц и перерегулированием не превышающим 7%. Причем эти показатели могут быть улучшены, так как реально для роботов диапазон неопределенности параметра μ заметно уже, рассмотренного в числовом примере.

Пример 5.4.

В общем случае управление звеном робота осуществляется в условиях неопределенности момента инерции звена и жесткости передаточного механизма, поэтому уравнения объекта управления (5.76) в предположении малости коэффициентов вязкого трения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + \xi(q_m - q) &= u, \\ \mu \ddot{q} + \xi(q - q_m) &= w, \end{aligned} \quad (5.90)$$

где $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$, $1 \leq \xi \leq \bar{\xi}$.

Будем считать, что на роботе установлен один датчик обратной связи, измеряющий положение звена q .

Требуется синтезировать робастный регулятор по положению звена с реализуемой дробно-рациональной передаточной функцией минимального порядка, обеспечивающий гарантированное качество замкнутой системы на всем множестве неопределенностей в задании параметров ξ, μ объекта управления (5.90).

Регулятор первого порядка не обеспечивает стабилизацию объекта управления (5.90). Поэтому рассмотрим регулятор второго порядка

$$u = -K(p)(q - q^*), \quad K(p) = K \frac{b_2 p^2 + b_1 p + 1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (5.91)$$

Регулятор (5.91) имеет пять настраиваемых параметров. В принципе стабилизация объекта управления (5.90) возможна и при $b_2 = 0$, т. е. при четырех настраиваемых параметрах, однако область устойчивости такого регулятора оказывается не достаточной для достижения приемлемых показателей качества процесса $q(t)$.

Характеристический полином замкнутой системы (5.90), (5.91) имеет шестой порядок

$$Q(p) = p^2[\mu p^2 + \xi(1 + \mu)](a_2 p^2 + a_1 p + 1) + \xi K(b_2 p^2 + b_1 p + 1). \quad (5.92)$$

Объединим искомые параметры передаточной функции (5.91) в вектор $\theta = [K, a_1, a_2, b_1, b_2]^T$ и сформулируем две задачи:

– задачу синтеза множества локально оптимальных регуляторов

$$\theta_{\text{опт}}(\xi, \mu) = \arg \min_{\theta/\sigma < 0} \sigma, \quad \sigma(\xi, \mu, \theta) = \max_{i \in [1, 6]} (\operatorname{Re} p_i), \quad (5.93)$$

где p_i – корни характеристического полинома (5.92) замкнутой системы (5.90), (5.91);

– задачу синтеза робастно оптимального регулятора

$$\theta_p = \arg \min_{\theta/\sigma < 0} \max_{\substack{1 \leq \xi \leq \bar{\xi} \\ \underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}}} \sigma. \quad (5.94)$$

Для обеих задач оптимальность понимается в смысле степени устойчивости замкнутой системы (5.90), (5.91). Показатель σ для упругого объекта без трения (5.90) представляется вполне адекватным, хотя как и в предыдущем примере, можно было бы использовать и другие показатели качества: интегрально-квадратичный показатель, норму передаточной функции замкнутой системы по возмущению w , а также прямые показатели качества переходного процесса $q(t)$, например, время установления и т. п.

Во всех случаях ищется численное решение задачи на сетке параметров ξ, μ . Решений задачи (5.93) столько, сколько узлов в сетке. Эти решения могут быть реализованы только при наличии дополнительной системы оценивания параметров ξ, μ .

Решение задачи (5.94) одно. Оно дает гарантированный результат, т. е. обеспечивает максимальную степень устойчивости замкнутой системы для наихудшей комбинации параметров ξ, μ из заданных диапазонов.

В качестве иллюстрации на рис. 5.7 для диапазонов параметров $1 \leq \xi \leq 2, 0,1 \leq \mu \leq 10$ приведены сечения (при $\xi = 1$) поверхностей $\sigma_{\text{опт}}(\xi, \mu, \theta_{\text{опт}}(\xi, \mu))$ и $\sigma_p(\xi, \mu, \theta_p)$, характеризующих степени устойчивости замкнутой системы (5.90), (5.91) при локально оптимальной и робастно оптимальной настройках регулятора (5.91). Их анализ показывает следующее:

– стремление к получению гарантированного результата для широких диапазонов параметров ξ, μ может привести к существенному

(в рассматриваемых диапазонах ξ, μ почти на порядок) ухудшению показателя качества замкнутой системы по сравнению с локально оптимальным случаем, когда параметры ξ, μ считаются известными;

– при уменьшении диапазонов возможных значений параметров ξ, μ робастно оптимальное решение приближается к локально оптимальному;

– высокая чувствительность локально оптимального решения к вариациям параметров ξ, μ затрудняет использование методов адаптивного управления, так как для них требуется с достаточно высокой точностью находить оценки параметров $\hat{\xi}, \hat{\mu}$ на интервале времени в несколько раз меньшем периода свободных колебаний

$$T_0 \cong \frac{2\pi}{\sqrt{\xi(1+1/\mu)}} \text{ объекта управления (5.90).}$$

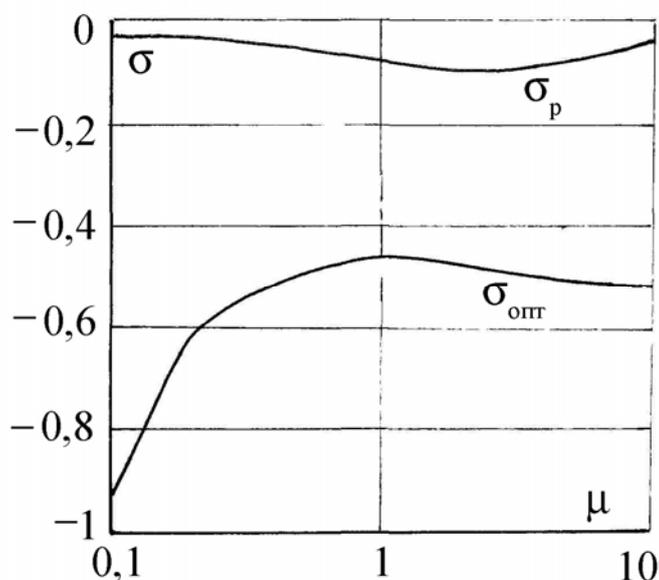


Рис. 5.7. Кривые, характеризующие степени устойчивости локально оптимальной (1) и робастно оптимальной (2) систем

Таким образом, при управлении упругим объектом (5.90) робастные регуляторы могут составить реальную альтернативу адаптивным регуляторам, особенно для не очень широких диапазонов неопределенности параметров объекта управления. С точки зрения практиче-

ской реализации робастные регуляторы, для которых все вычисления связаннее с настройкой осуществляются заранее, находятся вне конкуренции.

В заключение обратим внимание на некоторые трудности численного решения задачи минимаксной оптимизации (5.94) для системы управления (5.90), (5.91).

1. В процессе вычислений установлено, что в общем случае одно и то же оптимальное значение показателя качества $\sigma(\xi, \mu, \theta)$ может быть достигнуто при различных θ_p , несмотря на отсутствие внутренних связей между компонентами вектора настраиваемых параметров θ . Считалось, что оптимум достигнут, если найдено хотя бы одно значение θ_p , доставляющее минимальное значение показателю качества. При этом достижение оптимума определялось по результатам серии последовательных численных экспериментов с различными начальными условиями.

2. При неопределенности одного из параметров ξ или μ минимум может оказаться на дне очень глубокого оврага, где частные производные по компонентам вектора θ испытывают скачки на большие значения. Это, как правило, приводит к увеличению объема вычислений, а также к закливанию некоторых методов оптимизации [27].

При неопределенности двух параметров ξ и μ может оказаться, что в значительной окрестности минимума показателя качества абсолютные значения всех компонент первого и второго градиентов очень малы, т.е. минимум находится на дне очень широкой и "мелкой" впадины. Поэтому помимо вычислительных сложностей (резкого увеличения числа обращений к подпрограмме вычисления $\sigma(\xi, \mu, \theta)$) возникает проблема выбора правила останова процесса оптимизации [27]. При введении ограничений на возможные значения вектора θ_p оптимум, как правило, достигается на границе области задания, а при отсутствии ограничений необходимо модифицировать алгоритм оптимизации, так как стандартные алгоритмы чаще всего приводят к из-

менению компонент вектора θ на порядок, улучшая при этом значение показателя качества на доли процента. Эти особенности проявляются и при использовании вместо степени устойчивости других показателей, например, интегрально-квадратичного, H_∞ -норм передаточных функций и т. п.

3. В определенных точках оптимизируемый показатель может иметь разрывы (скачки) производной, оставаясь при этом непрерывным. Появление этих разрывов имеет место, например, при вычислении максимального из имеющихся вещественных частей корней характеристического уравнения, т. е. с выбором наихудшего значения показателя $\sigma(\xi, \mu, \theta)$ в пространстве параметров (ξ, μ) . На рис.5.8, а приведено расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы $\lambda_i, i \in [1,6]$ для регулятора $\theta_p = [0,026 \ 10,13 \ -36,83 \ 1,02 \ 0,4]^T$ при $\xi = 1$ и изменении параметра μ в диапазоне от 0,1 до 10. На рис. 5.8, б приведены соответствующие зависимости от $\lg \mu$ действительных частей $\lambda_i, i \in [1,6]$. Верхняя огибающая графиков $\text{Re} \lambda_i$ представляет собой показатель качества $\sigma(\mu)$ замкнутой системы.

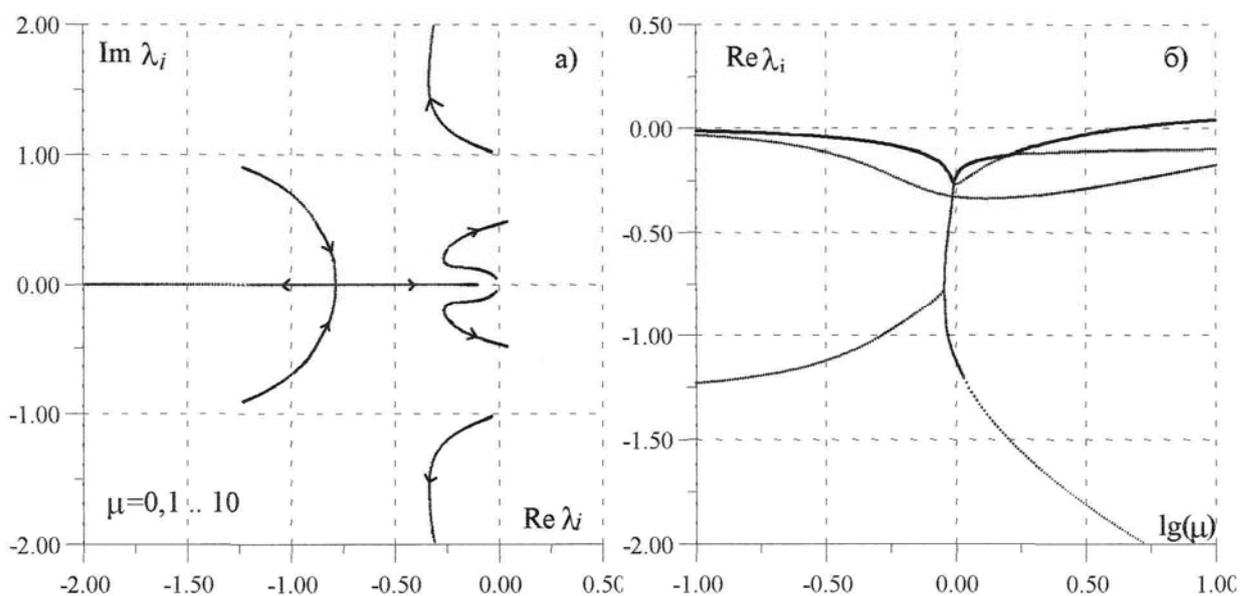


Рис. 5.8. Корневой годограф для робастно оптимальной системы

На рис. 5,8 б хорошо видно, что показатель испытывает скачок производной по μ во время перехода на другую ветвь корневого графа (см рис. 5,8 а). Скачок возникает из-за того, что одна пара комплексных корней, испытывая бифуркацию, переходит в пару вещественных.

Из сказанного выше следует, что оптимизируемый показатель существенно негладкий и для его оптимизации целесообразно применять поисковые методы. При этом метод должен справляться как с ситуацией очень мелкого оврага с плохо выраженным минимумом, так и с ситуацией хорошо выраженного минимума, когда имеют место скачки частных производных. В этом отношении неплохо зарекомендовал себя метод Нелдера – Мида, реализация которого на языке FORTRAN приведена в [26].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная

1. Александров А. Г., Честнов В. Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедуры LQ-оптимизации// А и Т. 1998. №7. С. 83 – 95. II. Применение процедуры H_∞ -оптимизации// А и Т. 1998. №7. С. 83 – 95.
2. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы// Доклады АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. С. 247 – 250.
3. Арнольд И. В. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
5. Барабанов А. Е. Синтез минимаксных регуляторов. – СПб.: Изд-во Петербургского университета, 1996. – 224 с.
6. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H-теория)// А и Т. 1992. №9. С. 3 – 32.

7. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 2003. – 768 с.
8. Бурдаков С. Ф. Управление колебаниями в кинематических механизмах: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 107 с.
9. Бурдаков С. Ф. Идентификация механических систем: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 139 с.
10. Бурдаков С. Ф., Первозванский А. А., Фрейдович Л. Б. Робастное управление нелинейными механическими системами с помощью линейных обратных связей// А и Т. 1999. №11. С.69 –80.
11. Бурдаков С. Ф. Синтез управления упругим роботом при неопределенности математической модели методом непрямой компенсации // Изв. РАН. Теория и системы управления. №1. 1998. С. 149-155.
12. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
13. Джури Э. И. Робастность дискретных систем// А и Т. 1990. №5. С. 3 – 28.
14. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. <http://www.prenhall.com/dorf>.
15. Жуков В. П. О грубости нелинейных динамических систем// Проблемы управления. 2008. № 5. С. 8 – 13.
16. Емельянов С. В., Коровин С. К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 348 с.
17. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движеия. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
18. Литвинов Н. Д. Метод расположения корней характеристического полинома, обеспечивающий заданные степень устойчивости и колебательность системы// А и Т. 1995. №4. С. 53 – 61.
19. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.: Гостехиздат, 1951. – 216 с.

20. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
21. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
22. Пятницкий Е. С. Критерий полной робастной управляемости механических систем с ограниченными управлениями // Доклады РАН. 1997. Т. 352. №5. С. 620-623.
23. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
24. Управление мехатронными вибрационными установками/ Под ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова.– СПб.: Наука, 2001.– 278 с.
25. Харитонов А. Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений// Диф. Уравнения. 1978. Т. 14. №11. С. 2086 – 2088.
26. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
27. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления: учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2004. – 256 с.

БУРДАКОВ Сергей Федорович

**УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2;
95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 09.11.2010. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 100. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в Цифровом типо-
графском центре Издательства Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 550-40-14.

Тел./факс: (812) 297-57-76.