

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Л.Б. Иванова, Н.С. Иванова, Г.А. Красильникова,
С.А. Юрова**

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА**

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ
(Часть первая)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2013

УДК 514.181.22(075.8)

ББК 22.151.3я73

И 20

Начертательная геометрия. Инженерная графика. Пересечение геометрических образов (Часть первая): учеб. пособие / Л.Б. Иванова, Н.С. Иванова, Г.А. Красильникова, С.А. Юрова СПб.: 2013. — 51 с.

Пособие соответствует государственным образовательным стандартам направления бакалаврской подготовки 150700 «Машиностроение», 151600 «Прикладная механика», 151000 «Технологические машины и оборудование», 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 141100 «Энергетическое машиностроение», 221400 «Управление качеством» и содержанию учебной программы дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика».

Содержит основные положения теории по разделам дисциплины «Начертательная геометрия»: моделирование геометрических образов, позиционные отношения на проекционных моделях, а также примеры решения типовых позиционных задач с подробными текстовыми комментариями и графическими фрагментами последовательности построения.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся в области техники и технологии, при самоподготовке к рубежному контролю, зачёту и экзамену.

Может быть использовано студентами дистанционной формы обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
1. Пересечение прямой с плоскостью	4
1.1. Пересечение проецирующей прямой с проецирующей плоскостью.....	6
1.2. Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения.....	7
1.3. Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью.....	9
1.4. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения.....	10
2. Пересечение прямой с поверхностью.....	21
2.1. Пересечение проецирующей прямой с проецирующей поверхностью.....	21
2.2. Пересечение проецирующей прямой с поверхностью общего положения.....	23
2.3. Пересечение непроецирующей прямой с проецирующей поверхностью.....	30
2.4. Пересечение непроецирующей прямой с поверхностью общего положения.....	32
Заключение.....	50
Библиографический список.....	51

ВВЕДЕНИЕ

С изучения дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика» начинается цикл общепрофессиональных дисциплин, предусмотренных учебным планом направлений бакалаврской подготовки 150700 «Машиностроение», 151600 «Прикладная механика», 151000 «Технологические машины и оборудование», 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 141100 «Энергетическое машиностроение», 221400 «Управление качеством».

«Начертательная геометрия. Инженерная графика» — одна из учебных дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Целью изучения раздела «Начертательная геометрия» является развитие у студентов пространственного представления, геометрического мышления, способности к анализу форм, размеров и взаимного расположения пространственных объектов на основе их проекционных моделей.

К основным видам занятий при изучении курса относятся:

- лекционные занятия;
- аудиторные практические занятия;
- самостоятельная работа студентов.

В течение семестра проводится текущий, промежуточный и итоговый контроль знаний студентов. Итоговая аттестация по разделу «Начертательная геометрия» проводится в форме письменного экзамена.

Для освоения курса рекомендуется использовать учебную литературу [1, 3, 6], рабочие тетради [2, 5].

Происходящая в настоящее время реформа высшего образования предполагает, что самостоятельная работа студентов должна стать основой образовательного процесса. Данное пособие позволяет студентам самостоятельно изучить ряд основных вопросов учебной программы курса.

Учебное пособие содержит основные положения теории по рассматриваемым темам, рекомендации по последовательности выполнения построений при решении конкретных графических задач. Разбивка решения задачи на отдельные этапы с подробным описанием каждого из них, значительно облегчает восприятие теоретического материала.

Пособие является логическим продолжением учебного пособия [4], в котором освещены основные теоретические аспекты построения проекционных моделей пространственных объектов по методу Монжа, приведены поэтапные

решения типовых позиционных задач на инцидентность геометрических элементов. В данном пособии рассмотрены позиционные задачи на пересечение геометрических образов: прямой с плоскостью и прямой с поверхностью.

В пособии используются общепринятые обозначения геометрических элементов пространства [5]: точки обозначены прописными буквами латинского алфавита ($A, B, C\dots$) или арабскими цифрами ($1, 2, 3\dots$); прямые, кривые линии — строчными буквами латинского алфавита ($a, b, c\dots$); плоскости — строчными буквами греческого алфавита ($\alpha, \beta, \gamma\dots$); поверхности — прописными буквами греческого алфавита ($\Sigma, \Psi, \Omega\dots$).

Пособие может быть использовано в качестве дополнительной литературы для самоорганизации учебной деятельности, а также при подготовке к рубежному контролю, зачету и экзамену.

1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Решение задач данного типа нужно начинать с анализа положения прямой и плоскости относительно аппарата проецирования. Рассмотрим следующие случаи.

1.1. Пересечение проецирующей прямой с проецирующей плоскостью

При решении позиционных задач на пересечение геометрических образов, занимающих проецирующее положение, используется собирательное свойство вырожденной проекции.

ЗАДАЧА 1

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой m с плоскостью $\alpha(A, B, C)$ (рис. 1, а).

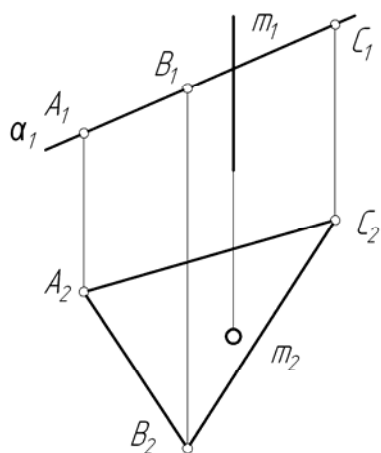


Рис. 1, а

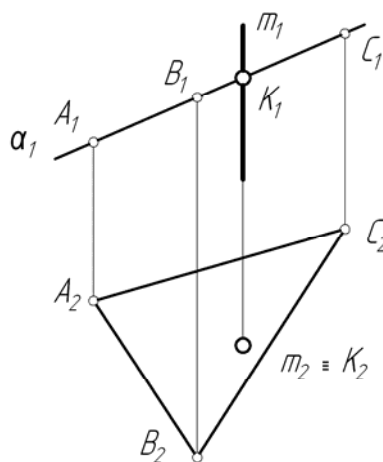


Рис. 1, б

Комментарии к решению задачи:

Точка пересечения K — это общая точка прямой m и фронтально-проецирующей плоскости α , поэтому первая проекция K_1 может располагаться только на пересечении вырожденной проекции плоскости α_1 с проекцией прямой m_1 , а вторая проекция K_2 совпадать с вырожденной проекцией прямой m_2 (рис. 1, б).

ЗАДАЧА 2

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения F прямой b с плоскостью β (m, n) (рис. 2, а).

Комментарии к решению задачи:

Прямая b — фронтально-проецирующая прямая (b_1 — вырожденная проекция), поэтому первая проекция точки пересечения F_1 совпадает с b_1 , а F_2 располагается на вырожденной проекции горизонтально-проецирующей плоскости β (β_2) (рис. 2, б).

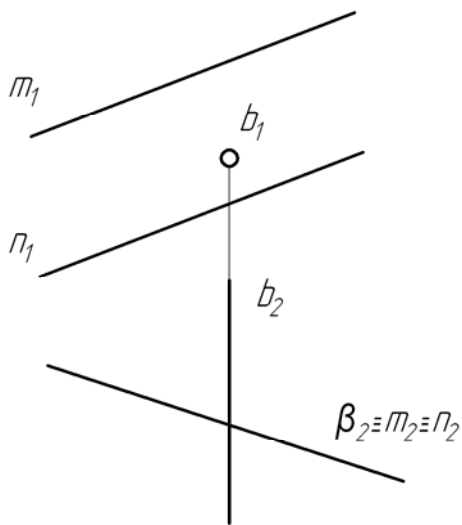


Рис.2, а

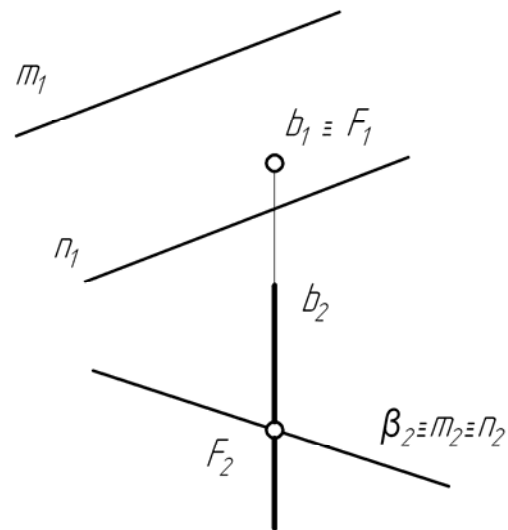


Рис. 2, б

1.2. Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения

При определении точки пересечения проецирующей прямой и плоскости общего положения следует учесть, что вырожденная проекция прямой обладает собирательным свойством: все точки прямой, в том числе и точка пересечения прямой с плоскостью проецируются в вырожденную проекцию прямой. Таким образом, на модели уже имеется проекция точки пересечения, ее нужно только отметить. Другая проекция общей точки прямой и плоскости определяется из условия принадлежности точки плоскости. Таким образом, решение задачи сводится к решению позиционной задачи на инцидентность точки и плоскости.

ЗАДАЧА 3

На эпюре Монжа построить проекции точки пересечения K фронтально-проецирующей прямой b с плоскостью общего положения $\alpha(m, n)$. Определить видимость прямой (рис. 3, а).

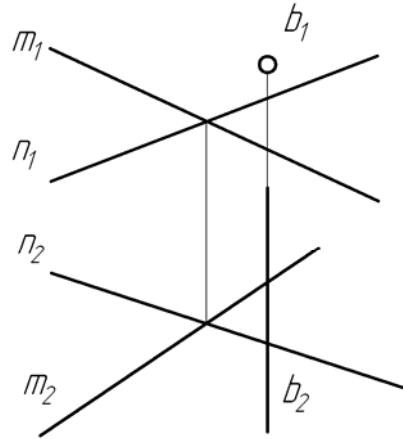


Рис. 3, а

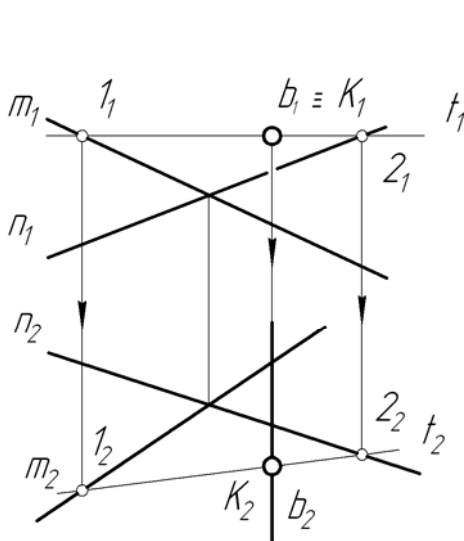


Рис. 3, б

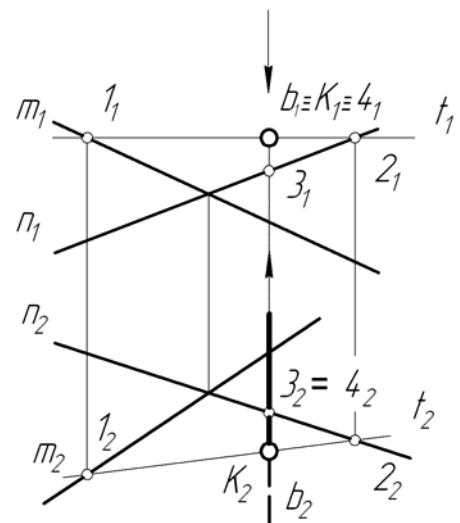


Рис. 3, в

Комментарии к решению задачи:

Прямая b — фронтально-проецирующая прямая (b_1 — вырожденная проекция), поэтому первая проекция точки пересечения K_1 совпадает с b_1 (рис. 3, б). На π_2 находим K_2 из условия принадлежности точки K плоскости $\alpha(m, n)$. Строим проекции вспомогательной прямой t , проходящей через точку K . Проводим проекцию t_1 через известную проекцию точки K_1 до пересечения с про-

екциями репера плоскости α — проекциями m_1 и n_1 (t_1 пересекает m_1 в точке 1_1 , а n_1 в точке 2_1), затем строим горизонтальную проекцию прямой t_2 и на ней отмечаем проекцию K_2 .

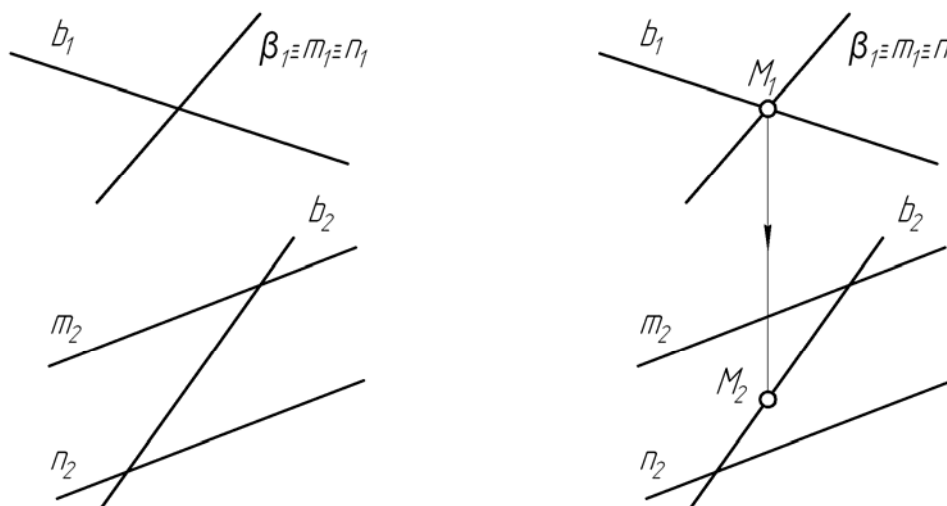
Точка K делит прямую на видимую и невидимую часть относительно бесконечной и непрозрачной плоскости α . Определяем видимость прямой b при проецировании на плоскость π_2 при помощи конкурирующих точек 3 и 4 , горизонтальные проекции которых совпадают (рис. 3, в). Пусть точка 4 принадлежит прямой b , а 3 прямой n плоскости α . Определяем фронтальные проекции точек 3 и 4 . По расположению проекций 4_1 и 3_1 можно сделать вывод, что точка 4 выше точки 3 , т.е. ближе к наблюдателю. Значит точка 4 — видимая, следовательно, часть прямой b , содержащая эту точку видна до точки пересечения. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой линии на проекции b_2 отмечена штриховой линией.

1.3. Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью

При решении задач этого типа следует учесть, что одна из проекций точки пересечения прямой и проецирующей плоскости лежит на пересечении вырожденной проекции плоскости и соответствующей проекции прямой. Другая проекция общей точки прямой и плоскости определяется из условия принадлежности точки прямой. Таким образом, решение этого вида задач сводится к решению позиционных задач на инцидентность точки и прямой.

ЗАДАЧА 4

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения M прямой b с проецирующей плоскостью $\beta(m, n)$. Определить видимость прямой (рис. 4, а).



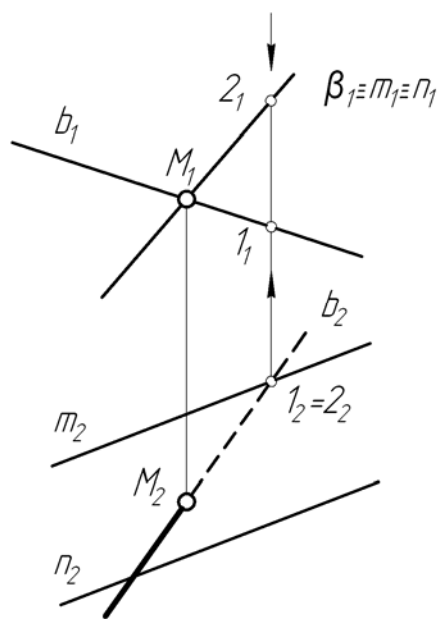


Рис. 4, в

Комментарии к решению задачи:

Плоскость β занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому на плоскости π_1 отмечаем единственно возможное расположение проекции M_1 общей точки M для плоскости и прямой — на пересечении β_1 и b_1 (рис. 4, б). На плоскости π_2 находим проекцию M_2 , принадлежащую проекции b_2 прямой b .

Определяем видимость прямой b при проецировании на плоскость π_2 по конкурирующим точкам 1 и 2 , горизонтальные проекции которых совпадают (рис. 4, в). Точка 1 принадлежит прямой b , а точка 2 — прямой m плоскости α . Определяем их проекции на π_1 . По расположению проекций 1_1 и 2_1 можно сделать вывод, что точка 2 выше точки 1 . Значит точка 1 невидимая, следовательно, часть прямой b , содержащая эту точку, тоже невидимая. В точке M видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_2 отмечена штриховой линией.

1.4. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

Одним из способов решения данного типа задач является способ введения вспомогательной секущей плоскости-плоскости посредника.

Для определения точки пересечения прямой l с плоскостью α выполним следующие действия:

1. Заклучим прямую l во вспомогательную плоскость-посредник — плоскость β (рис. 5). В качестве посредника используется фронтально или горизонтально-проецирующая плоскость. Выбор плоскости определяется исходными данными задачи — проекциями репера плоскости и прямой.

2. Построим линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной плоскости β — прямую m .

3. Определим точку пересечения K прямой линии l с построенной линией m .

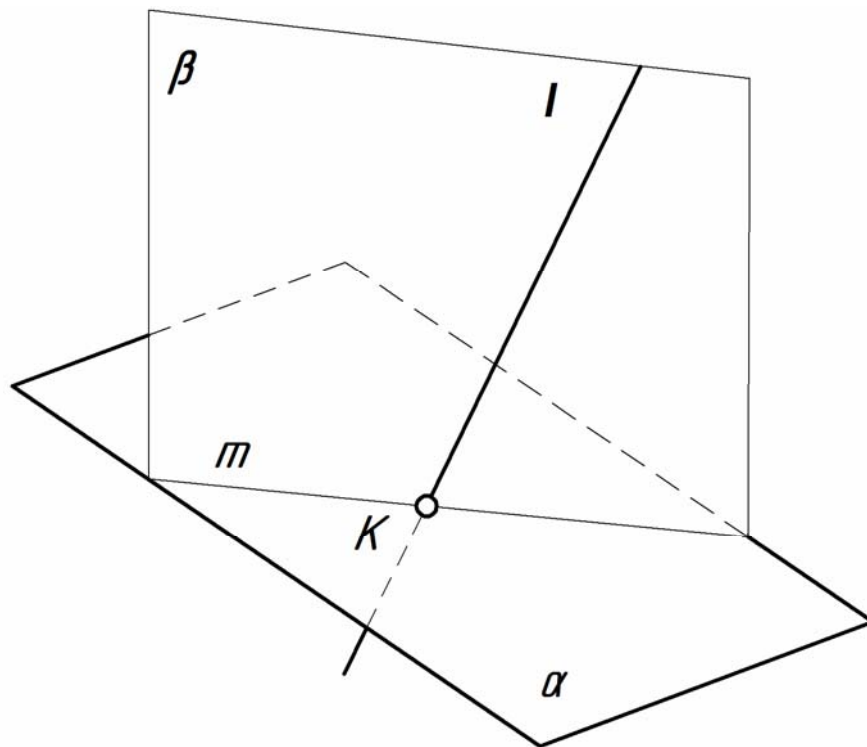


Рис. 5

Так как линия m принадлежит заданной плоскости α , следовательно, точка K будет искомой точкой пересечения прямой l с плоскостью α .

Для решения поставленной задачи сначала решим вспомогательную *Задачу 5* — на построение линии пересечения плоскостей, одна из которых проецирующая, а вторая — общего положения.

ЗАДАЧА 5

На эпюре Монжа построить проекции линии пересечения t фронтально-проецирующей плоскости β с плоскостью $\alpha(m, n)$, занимающей общее положение (рис. 6, а).

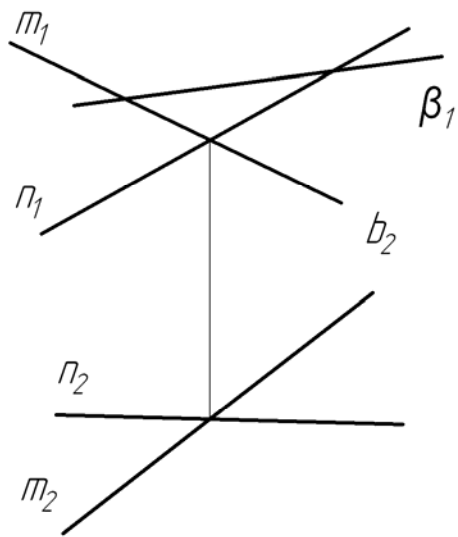


Рис.6, а

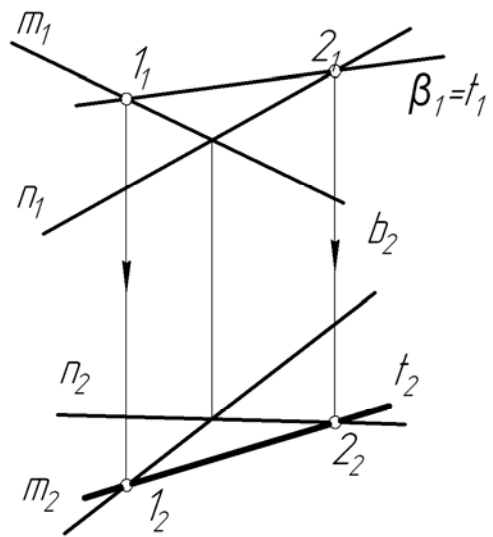


Рис.6, б

Комментарии к решению задачи:

Плоскость β занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому на π_1 проекция линии пересечения t_1 располагается на вырожденной проекции β_1 (рис. 6, б). На π_2 строим проекцию t_2 , как проекцию прямой, принадлежащей плоскости α . Отмечаем точки пересечения t_1 с m_1 и n_1 ($1_1, 2_1$). Находим проекции точек 1 и 2 на π_2 и через них проводим горизонтальную проекцию линии пересечения t_2 . Для этого типа задач видимость плоскостей допускается не определять.

ЗАДАЧА 6

На эпюре Монжа построить проекции линии пересечения t горизонтально-проецирующей плоскости β с плоскостью $\alpha(A, B, C)$ (рис. 7, а).

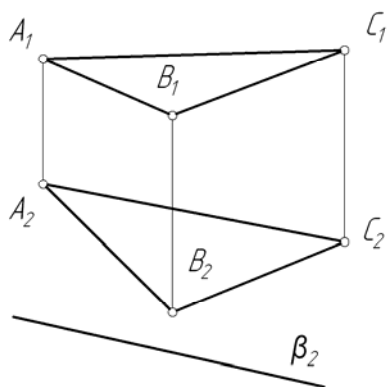


Рис. 7, а

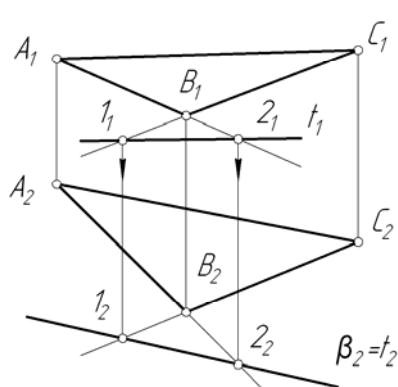


Рис. 7, б

Комментарии к решению задачи:

Плоскость β занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому на π_2 проекция линии пересечения t_2 совпадает с вырожденной проекцией β_2 (рис. 7, б). На π_1 строим проекцию t_1 из условия принадлежности прямой t плоскости $\alpha(A, B, C)$. Продлеваем проекции сторон треугольника A_2B_2 и C_2B_2 до пересечения с t_2 . Отмечаем точки 1_2 и 2_2 . Находим проекции точек 1 и 2 на π_1 и через них проводим фронтальную проекцию линии пересечения t_1 .

ЗАДАЧА 7

На эпюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой общего положения l с плоскостью общего положения $\alpha(A, B, C)$ (рис. 8).

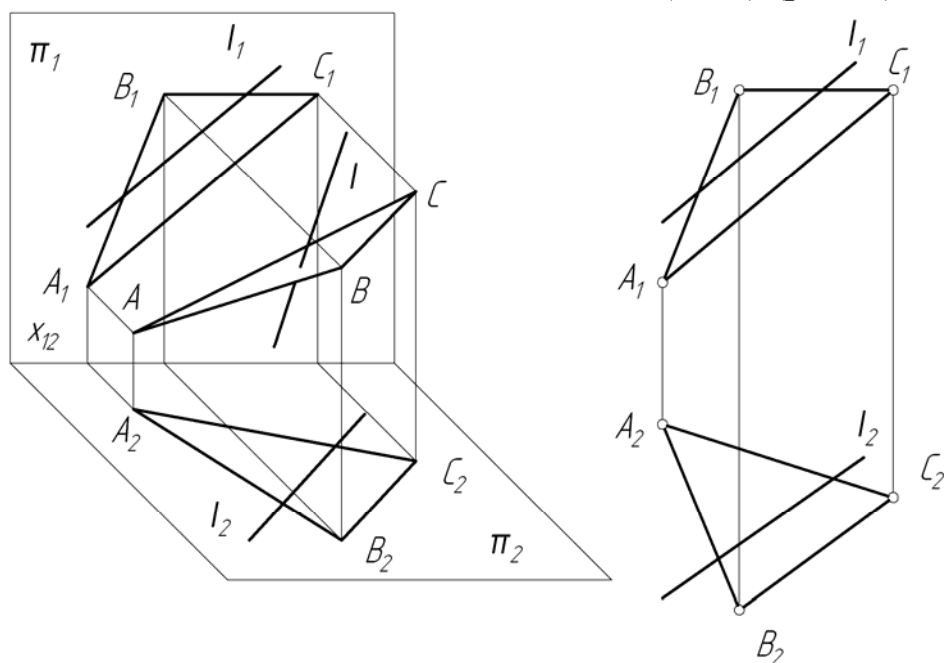


Рис. 8.

Комментарии к решению задачи:

1. Закljučаем прямую линию l во вспомогательную плоскость: фронтально-проецирующую или горизонтально-проецирующую. Пусть плоскость-посредник β будет фронтально-проецирующей (проекция l_1 совпадает с проекцией β_1) (рис. 9).

2. Строим линию пересечения t заданной плоскости α и вспомогательной плоскости β : t_1 совпадает с β_1 и проходит через точки 1_1 и 2_1 ; t_2 проводим через проекции точек 1_2 и 2_2 .

3. Определяем точку пересечения K прямой линии l с построенной линией t следующим образом:

–отмечаем проекцию K_2 ($K_2 = l_2 \cap t_2$);

–на пересечении l_1 и линии проекционной связи отмечаем проекцию K_1 .

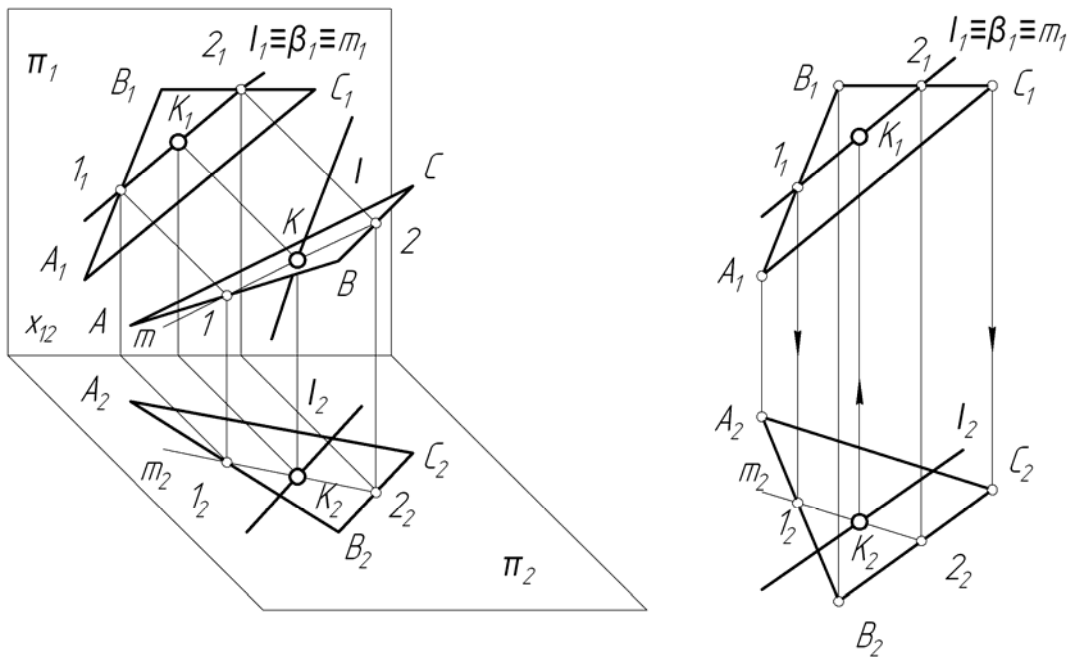


Рис. 9

4. Определяем видимость прямой l относительно плоскости α (рис. 10).

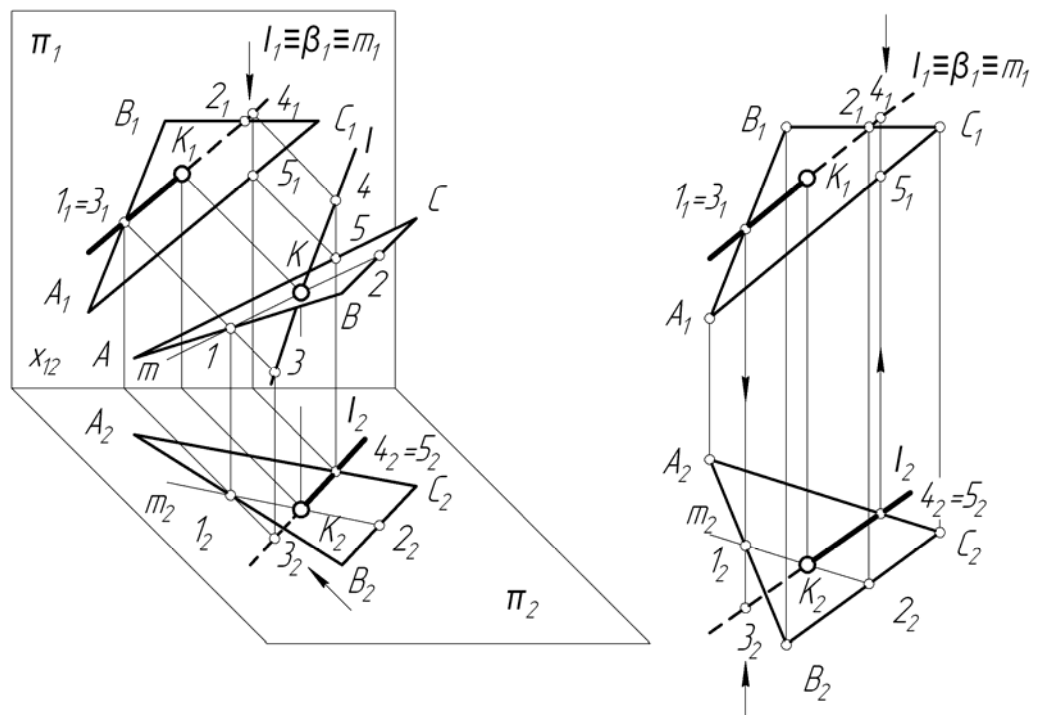


Рис.10

Точка K делит прямую l на две части — видимую и невидимую (плоскость α считаем бесконечной и непрозрачной). Невидимая часть прямой находится за плоскостью при проецировании на π_1 и под плоскостью при проецировании на π_2 .

Для определения видимости прямой при проецировании на плоскость π_1

используем конкурирующие точки 1 и 3 , фронтальные проекции которых совпадают. Точка 3 принадлежит прямой l , а точка 1 — прямой AB плоскости α . Строим горизонтальные проекции точек 1 и 3 . По расположению проекций 1_2 и 3_2 можно сделать вывод, что точка 3 ближе к наблюдателю. Значит точка 3 — видимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку тоже видимая. В точке K видимость прямой l меняется. Невидимая часть прямой на проекции l_1 отмечена штриховой линией.

Внимание! Видимость прямой при проецировании ее на π_1 определяем по расположению проекций конкурирующих точек в поле π_2 , а отмечаем видимость на проекции прямой в поле π_1 .

Для определения видимости прямой при проецировании на плоскость π_2 используем конкурирующие точки 4 и 5 , горизонтальные проекции которых совпадают. Точка 4 принадлежит прямой l , а 5 — прямой AC плоскости α . Строим фронтальные проекции точек 4 и 5 . По расположению проекций 4_1 и 5_1 можно сделать вывод, что точка 4 выше точки 5 . Значит, точка 4 — видимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку тоже видимая. В точке K видимость прямой l меняется. На проекции l_2 невидимая часть прямой отмечена штриховой линией.

Внимание! Видимость прямой при проецировании на π_2 определяем по расположению проекций конкурирующих точек в поле π_1 , а отмечаем видимость на проекции прямой в поле π_2 .

ЗАДАЧА 8

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой b с плоскостью $\alpha(m, n)$. Определить видимость прямой (рис. 11, а).

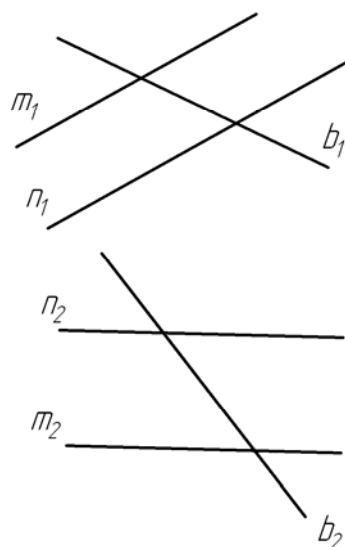


Рис.11, а

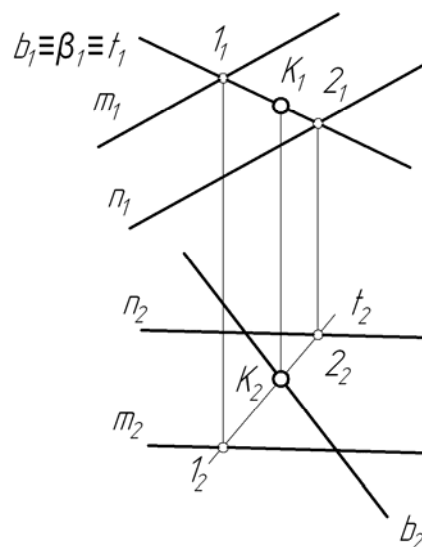


Рис.11, б

Комментарии к решению задачи:

Закключаем прямую b во фронтально-проецирующую плоскость β (проекция b_1 совпадает с проекцией β_1) (рис. 11, б). Строим линию пересечения t плоскости β с плоскостью α : t_1 совпадает с β_1 и проходит через точки 1_1 и 2_1 ; t_2 проводим через проекции точек 1_2 и 2_2 . Отмечаем горизонтальную проекцию K_2 искомой точки K на пересечении b_2 с t_2 . Проводим линию проекционной связи через K_2 и отмечаем K_1 на b_1 .

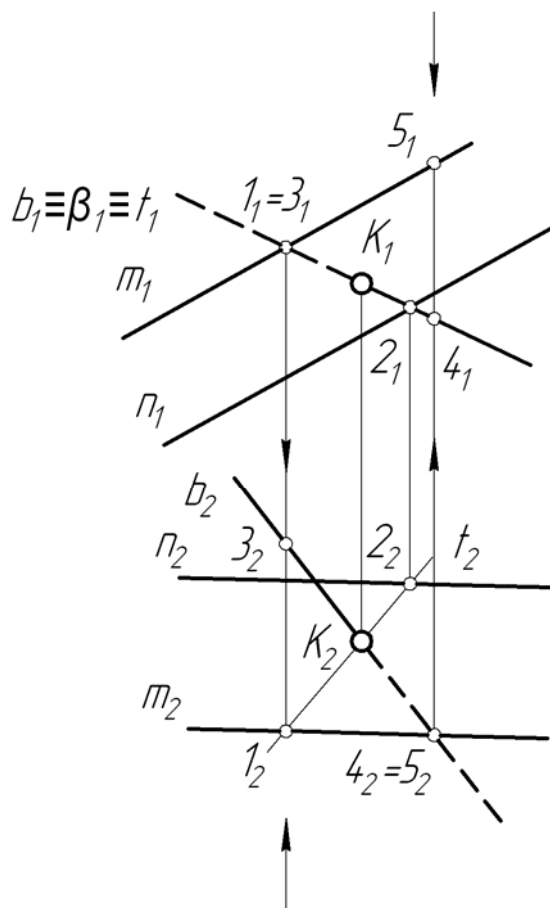


Рис. 11, в

Определим видимость прямой b при проецировании на плоскость π_1 (рис. 11, в) по конкурирующим точкам 1 и 3 , фронтальные проекции которых совпадают. Точка 3 принадлежит прямой b , а точка 1 — прямой t плоскости α . Строим горизонтальные проекции точек 1 и 3 . По расположению проекций 1_2 и 3_2 можно сделать вывод, что точка 1 ближе к наблюдателю. Значит, точка 3 — невидимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку, тоже невидимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_1 отмечена штриховой линией.

Определим видимость прямой b при проецировании на плоскость π_2 , используя конкурирующие точки 4 и 5 , горизонтальные проекции которых сов-

падают. Точка 4 принадлежит прямой b , а точка 5 — прямой t плоскости α . Строим фронтальные проекции точек 4 и 5. По расположению проекций 4_1 и 5_1 можно сделать вывод, что точка 5 выше точки 4. Значит, точка 4 — невидимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку, тоже невидимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_2 отмечена штриховой линией.

ЗАДАЧА 9

На эпюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой b с плоскостью $\alpha(m, n)$. Определить видимость прямой (рис. 12, а).

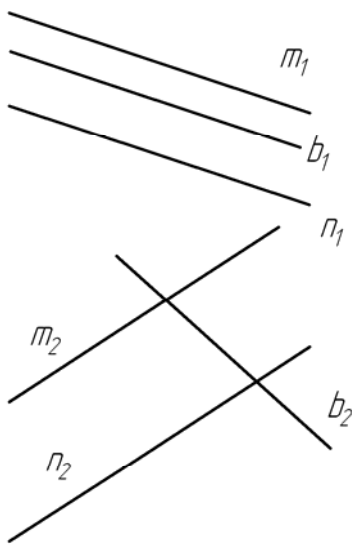


Рис. 12, а

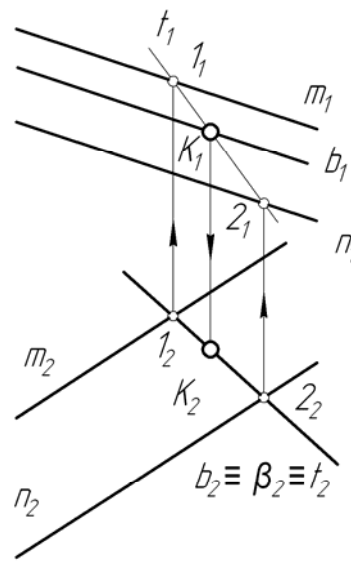


Рис. 12, б

Комментарии к решению задачи:

При решении этой задачи заключим прямую b в горизонтально-проецирующую плоскость β (β_2 — вырожденная проекция) (рис. 12, б). Строим линию пересечения t (t_1, t_2) плоскостей α и β . Отмечаем на пересечении t_1 и b_1 первую проекцию точки пересечения K_1 , затем находим K_2 и определяем видимость прямой по конкурирующим точкам.

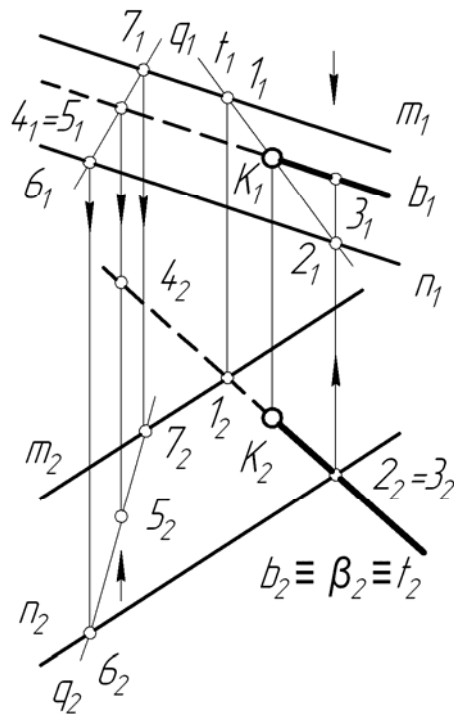


Рис. 12, в

Для определения видимости прямой b при проецировании на плоскость π_2 (рис. 12, в) используем конкурирующие точки 2 и 3, а при проецировании на плоскость π_1 — точки 4 и 5. Точка 4 принадлежит прямой b , а 5 — плоскости α . Строим их проекции на π_2 . Отмечаем 4_2 на b_2 , а для определения проекции 5_2 вводим вспомогательную прямую q , принадлежащую плоскости α . Проводим q_1 через 5_1 до пересечения с m_1 и n_1 . Отмечаем точки 6_1 и 7_1 . Проводим проекцию q_2 через точки 6_2 и 7_2 и на ней отмечаем 5_2 . По расположению проекций 4_2 и 5_2 видно, что точка 4 — невидимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку тоже невидимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_1 отмечена штриховой линией.

Для определения видимости прямой b при проецировании на плоскость π_2 строим фронтальные проекции точек 2 и 3. По расположению проекций 2_1 и 3_1 можно сделать вывод, что точка 3 — видимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку тоже видимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_2 отмечена штриховой линией.

ЗАДАЧА 10

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой b с плоскостью $\alpha(A, g)$. Определить видимость прямой (рис. 13, а).

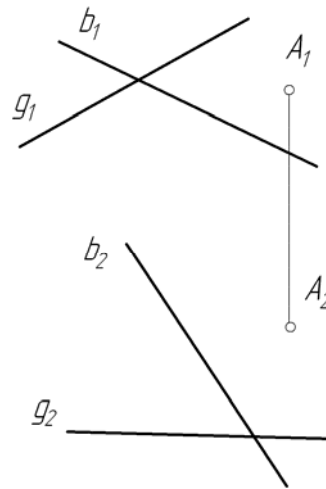


Рис. 13, а

Комментарии к решению задачи:

При решении этой задачи следует перейти от заданного репера плоскости α (точка A и прямая g) к более наглядному реперу (например, две параллельные прямые: g и q) (рис.13, б). Решение задачи представлено на Рис. 13, в.

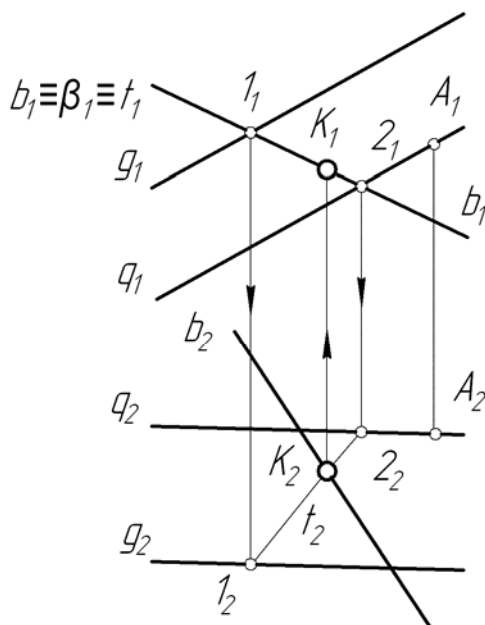


Рис. 13, б

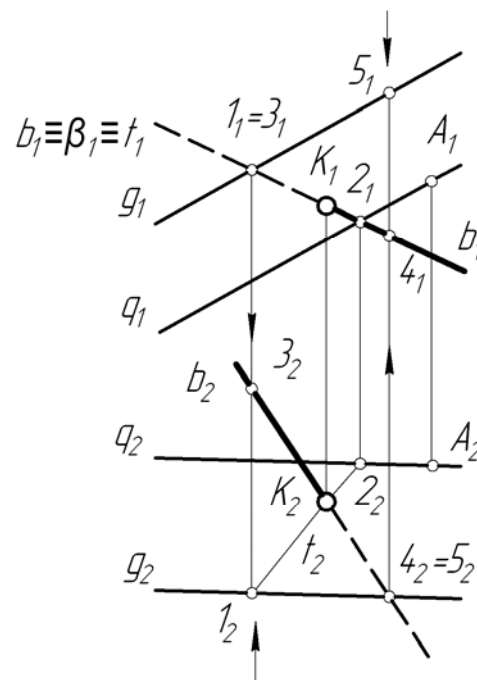


Рис. 13, в

ЗАДАЧА 11

На эюре Монжа построить проекции точки пересечения K прямой b с плоскостью $\alpha(m, n)$. Определить видимость прямой (рис. 14, а).

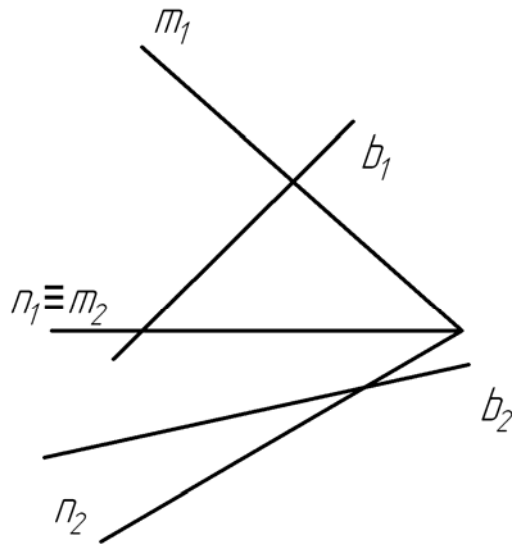


Рис. 14, а

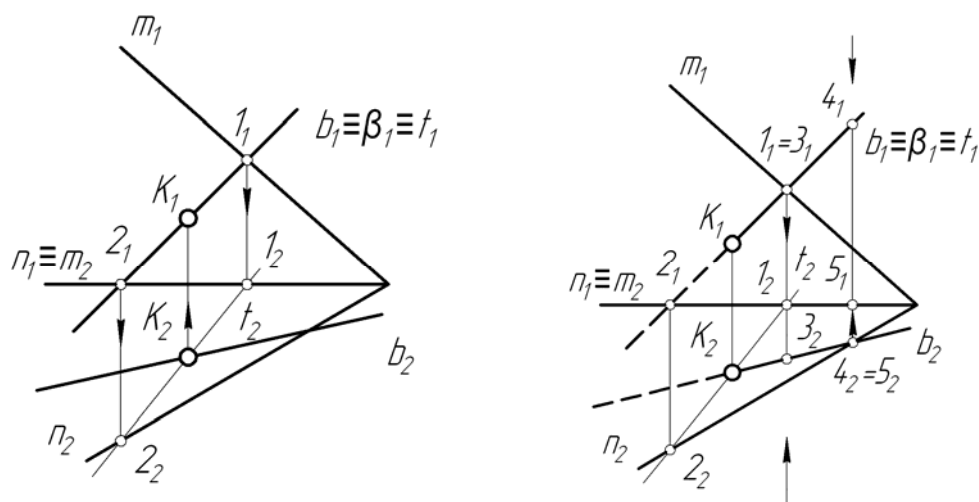
Комментарии к решению задачи:

Заключаем прямую b во фронтально-проецирующую плоскость β (рис. 14, б). Строим линию пересечения t плоскости β с плоскостью α : t_1 совпадает с β_1 и проходит через точки 1_1 и 2_1 ; t_2 проводим через проекции точек 1_2 и 2_2 . Отмечаем горизонтальную проекцию K_2 искомой точки K на пересечении b_2 с t_2 . Проводим линию проекционной связи через K_2 и отмечаем K_1 на b_1 .

Определим видимость прямой b при проецировании на плоскость π_1 (рис. 14, в), используя конкурирующие точки 1 и 3 , фронтальные проекции которых совпадают. Точка 3 принадлежит прямой b , а точка 1 — прямой m плоскости α . Строим горизонтальные проекции точек 1 и 3 . На основании расположения проекций 1_2 и 3_2 делаем вывод, что точка 3 — видимая, следовательно, часть прямой, содержащая эту точку тоже видимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_1 отмечена штриховой линией.

Определим видимость прямой b при проецировании на плоскость π_2 , используя конкурирующие точки 4 и 5 , горизонтальные проекции которых совпадают. Точка 4 принадлежит прямой b , а точка 5 — прямой n плоскости α . Строим фронтальные проекции точек 4 и 5 . По расположению проекций 4_1 и 5_1 можно сделать вывод, что точка 4 — видимая, следовательно, часть прямой,

содержащая эту точку тоже видимая. В точке K видимость прямой b меняется. Невидимая часть прямой на проекции b_2 отмечена штриховой линией.



2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Решение задач данного типа нужно начинать с анализа положения прямой и поверхности относительно аппарата проецирования. Рассмотрим следующие случаи.

2.1. Пересечение проецирующей прямой с проецирующей поверхностью

При определении точек пересечения прямой и поверхности, которые являются проецирующими относительно разных плоскостей проекций, нужно иметь в виду, что результат уже имеется на модели: проекции точек пересечения лежат на вырожденных проекциях пересекающихся геометрических образов. Решение задачи в данном случае является тривиальным и заключается в том, чтобы отметить проекции точек пересечения на эпюре Монжа.

ЗАДАЧА 12

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с цилиндрической поверхностью $\Sigma(T, b)$ (рис. 15, а).

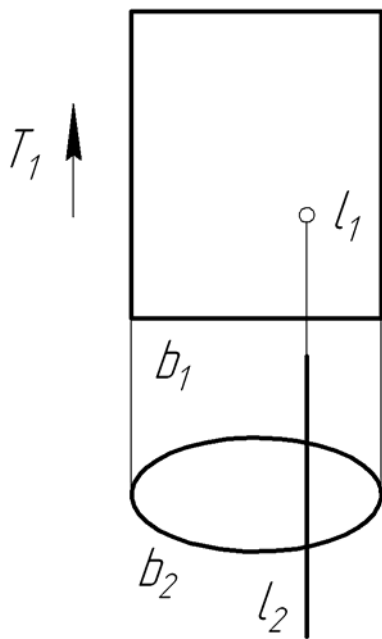


Рис. 15, а

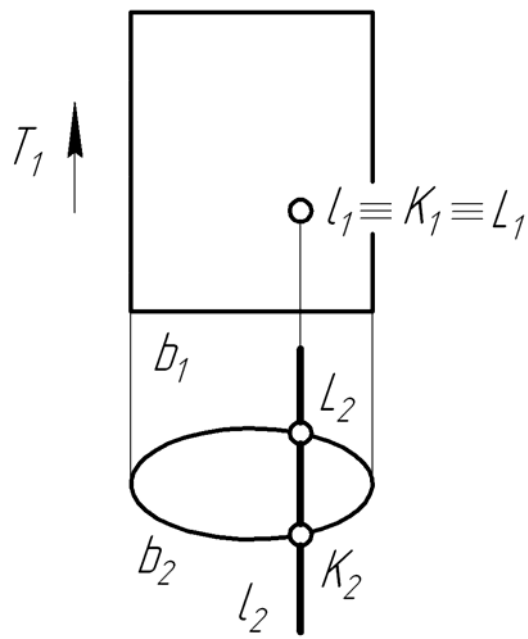


Рис. 15, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает фронтально-проецирующее положение, фронтальные проекции всех точек прямой, включая точки K и L пересечения прямой l с цилиндрической поверхностью Σ , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_1 \equiv K_1 \equiv L_1$ (рис. 15, б).

Аналогично, проекции всех точек горизонтально-проецирующей цилиндрической поверхности Σ в поле π_2 лежат на ее вырожденной проекции, которая совпадает с проекцией b_2 направляющей b цилиндрической поверхности.

Точки пересечения должны одновременно принадлежать прямой l и цилиндрической поверхности Σ , поэтому проекции точек пересечения K_2 и L_2 в поле π_2 находятся на пересечении проекции прямой и вырожденной проекции цилиндрической поверхности.

ЗАДАЧА 13

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с призматической поверхностью $\Omega(T, a)$ (рис. 16, а).

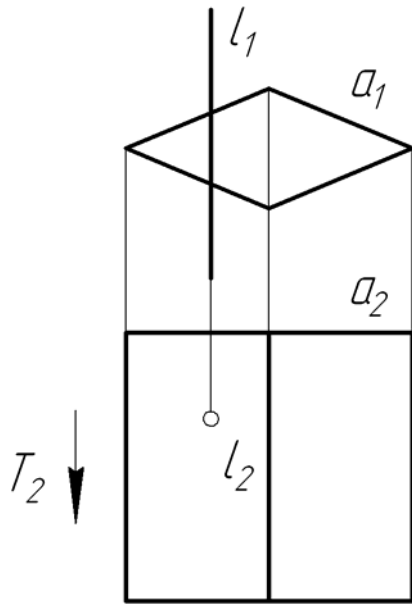


Рис. 16, а

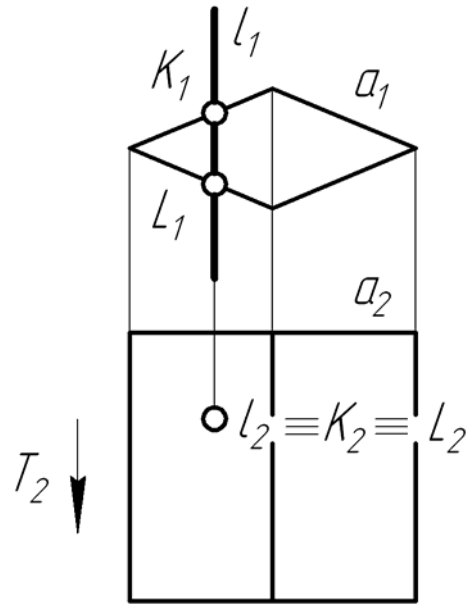


Рис. 16, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает горизонтально-проецирующее положение, горизонтальные проекции всех точек прямой, включая точки K и L пересечения прямой l с призматической поверхностью Ω , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_2 \equiv K_2 \equiv L_2$ (рис. 16, б).

Аналогично, проекции всех точек горизонтально-проецирующей призматической поверхности Ω в поле π_1 лежат на вырожденной проекции a_1 .

Точки пересечения должны одновременно принадлежать прямой l и призматической поверхности Ω , поэтому проекции точек пересечения K_1 и L_1 в поле π_1 находятся на пересечении проекции прямой и вырожденной проекции призматической поверхности.

2.2. Пересечение проецирующей прямой с поверхностью общего положения

При определении точек пересечения проецирующей прямой и поверхности общего положения следует учесть, что вырожденная проекция прямой обладает собирательным свойством: все точки прямой, в том числе и точки пересечения прямой с поверхностью, проецируются в одну точку, совпадающую с

вырожденной проекцией прямой.

Таким образом, на модели уже имеются проекции точек пересечения, их нужно только отметить. Другая проекция общих точек прямой и поверхности определяется из условия их принадлежности поверхности. Таким образом, решение задачи сводится к решению позиционной задачи на инцидентность точки и поверхности.

ЗАДАЧА 14

На эпюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с конической поверхностью $\Sigma(T, k)$ (рис. 17, а). Определить видимость.

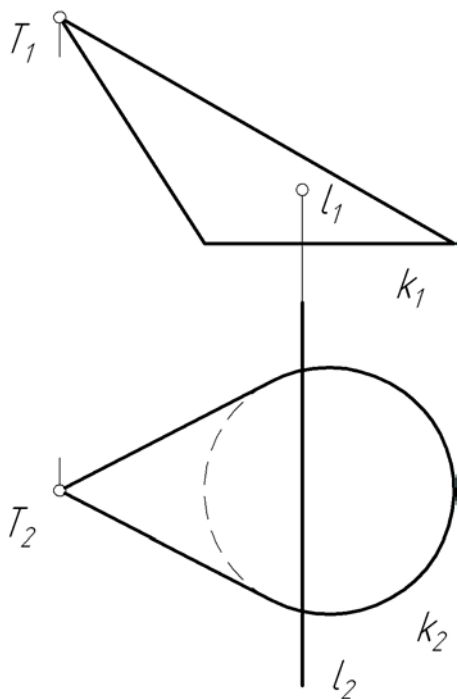


Рис. 17, а

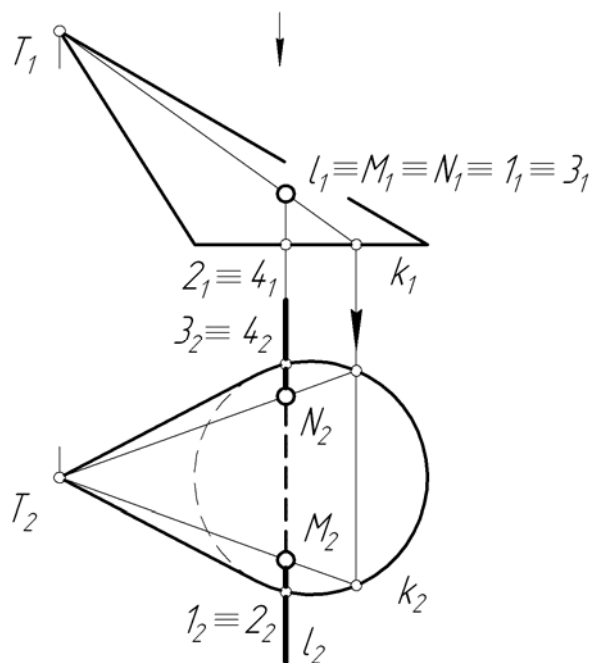


Рис. 17, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает фронтально-проецирующее положение, фронтальные проекции всех точек прямой, включая точки M и N пересечения прямой l с конической поверхностью Σ , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_1 \equiv M_1 \equiv N_1$ (рис. 17, б). Горизонтальные проекции общих точек прямой и поверхности определяются из условия принадлежности точек конической поверхности.

Для определения видимости прямой можно использовать, например, конкурирующие точки 1 и 2 , а также 3 и 4 . Точка 1 принадлежит прямой l , а точка 2 принадлежит направляющей k конической поверхности. По расположению фронтальных проекций точек 1 и 2 можно сделать вывод, что точка 1 ,

принадлежащая прямой l , — видимая, а точка 2, принадлежащая конической поверхности, — невидимая. Следовательно, часть прямой, которая содержит точку 1, находится над поверхностью. На проекции π_2 этот участок прямой отмечен основной линией. Аналогично определяется видимость части прямой l , содержащей точку 3.

Участок прямой между точками M и N пересечения прямой с поверхностью — невидимый, поэтому в поле π_2 он отмечен штриховой линией.

ЗАДАЧА 15

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с призматической поверхностью $\Psi(F, a)$ (рис. 18, а). Определить видимость.

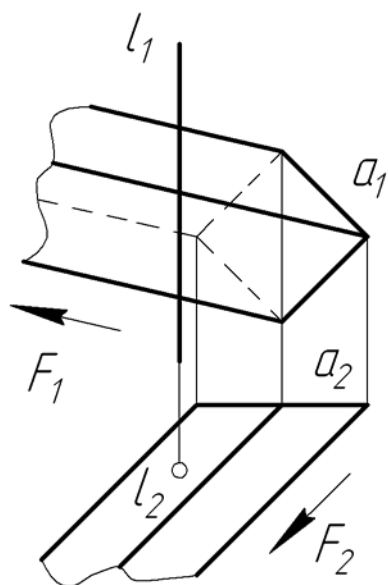


Рис. 18, а

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает горизонтально-проецирующее положение, горизонтальные проекции всех точек прямой, включая точки M и N пересечения прямой l с призматической поверхностью Ψ , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_2 \equiv M_2 \equiv N_2$ (рис.18, б). Фронтальные проекции общих точек прямой и поверхности определяются из условия принадлежности точек призматической поверхности.

Для определения видимости прямой можно использовать конкурирующие точки 1 и 2, а также 3 и 4. Точка 1 принадлежит ребру призматической поверхности AF , а точка 2 принадлежит прямой l . По расположению горизонтальных проекций точек 1 и 2, можно сделать вывод, что точка 2, принадлежащая прямой l , — невидимая. Следовательно, часть прямой от точки M до точки 2 находится за поверхностью. Аналогично, по горизонтальным проекциям точек 3 и 4, определяем, что участок прямой от точки 4 до точки N — невидимый. Отрезок прямой MN также является невидимым, так как точки M и N принадлежат невидимым граням призматической поверхности.

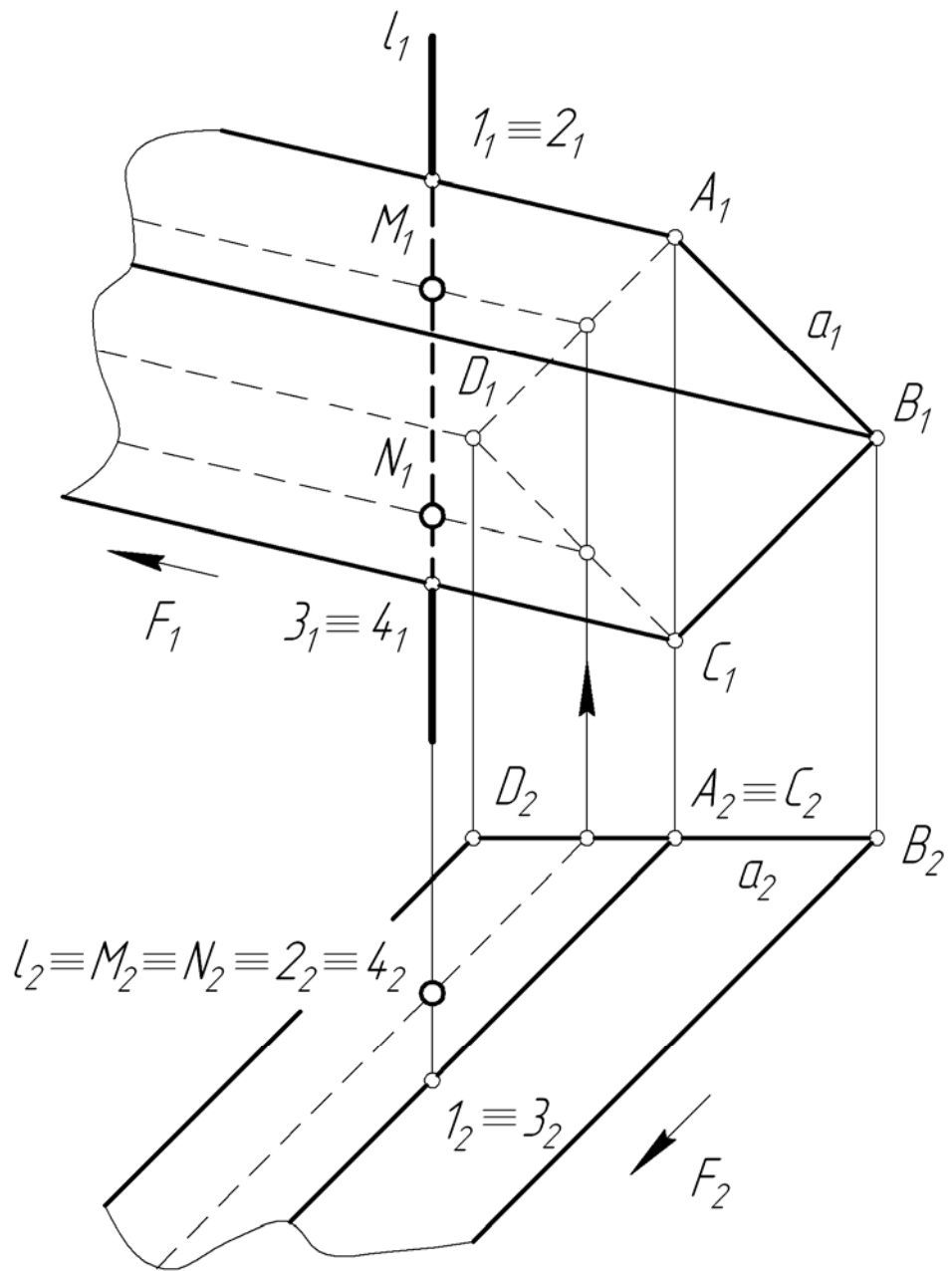


Рис. 18, б

ЗАДАЧА 16

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с пирамидальной поверхностью $\Omega(T, ABCD)$ (рис. 19, а). Определить видимость.

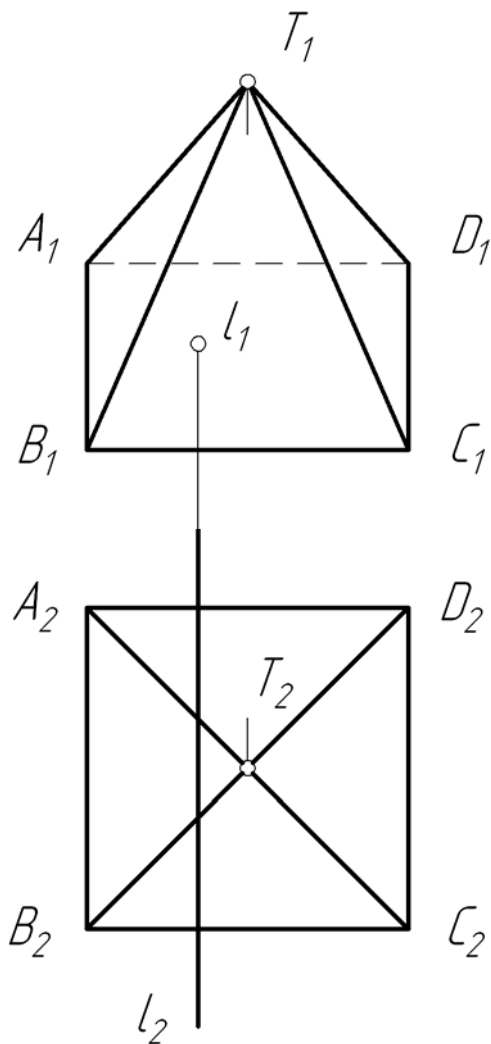


Рис. 19, а

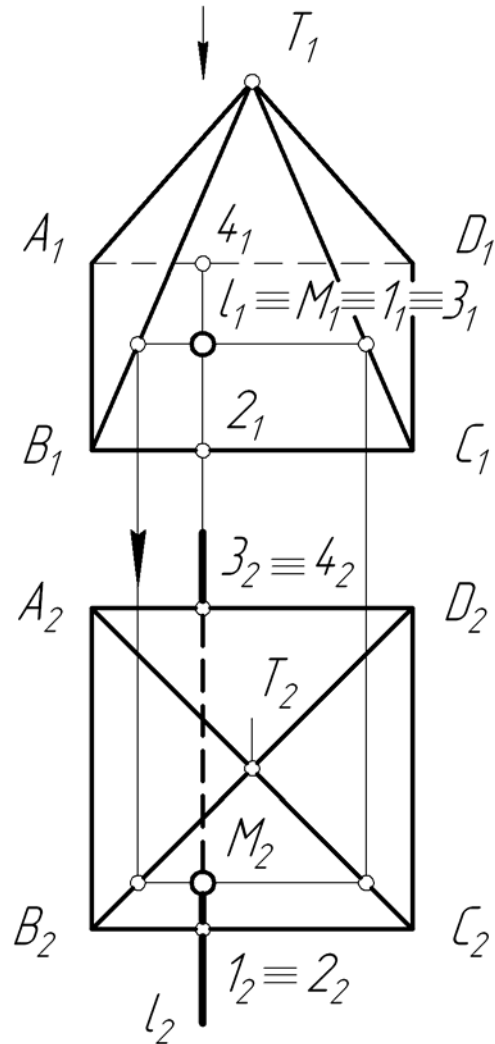


Рис. 19, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает фронтально-проецирующее положение, фронтальные проекции всех точек прямой, включая точки пересечения прямой l с пирамидальной поверхностью Ω , совпадают с вырожденной проекцией прямой. В данном случае, результат решения задачи — одна точка — точка M пересечения прямой с гранью BTC пирамидальной поверхности. Отметим в поле π_1 её фронтальную проекцию: $M_1 \equiv l_1$ (рис. 19, б). Горизонтальная проекция точки M определяется из условия её принадлежности пирамидальной поверхности Ω .

Видимость прямой l при проецировании на плоскость проекций π_2 определим с помощью конкурирующих точек 1 и 2 (точка 1 принадлежит прямой l , точка 2 — отрезку BC), а также точек 3 и 4 (точка 3 принадлежит прямой l ,

точка 4 — отрезку AD).

ЗАДАЧА 17

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l со сферой $\Phi(f, h)$ (рис. 20, а). Определить видимость.

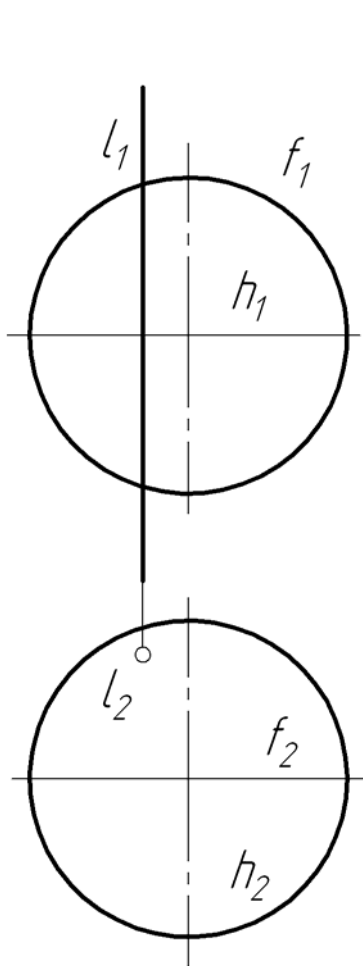


Рис.20, а

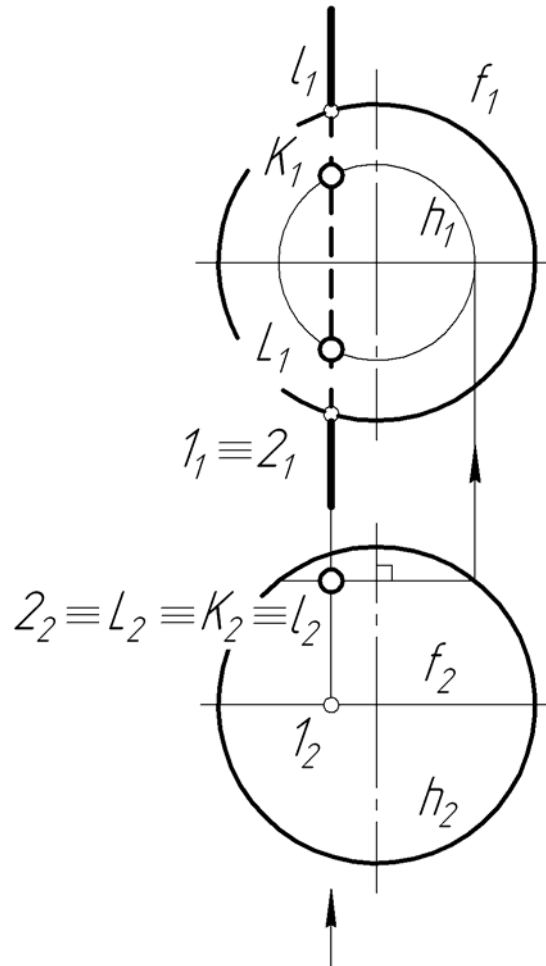


Рис. 20, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает горизонтально-проецирующее положение, горизонтальные проекции всех точек прямой, включая точки K и L пересечения прямой l со сферой Φ , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_2 \equiv K_2 \equiv L_2$ (рис. 20, б). Фронтальные проекции общих точек прямой и поверхности определяются из условия принадлежности точек сфере.

Для определения видимости прямой при проецировании на плоскость π_1 используем конкурирующие точки 1 и 2 (точка 1 принадлежит главному меридиану f поверхности Φ , точка 2 принадлежит прямой l).

ЗАДАЧА 18

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с поверхностью глобоида $\Psi(i, d)$ (рис.21, а). Определить видимость.

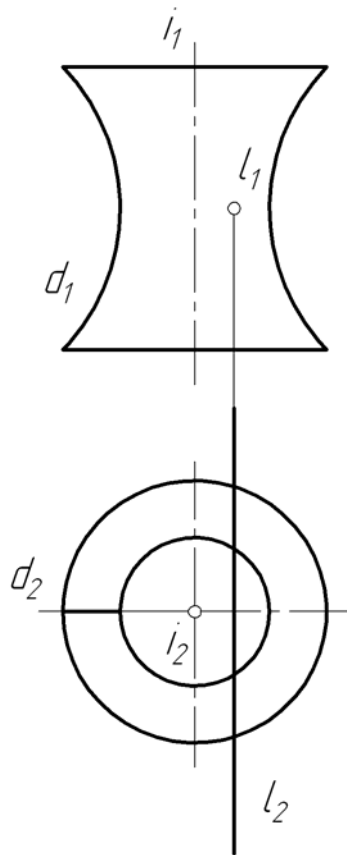


Рис. 21, а

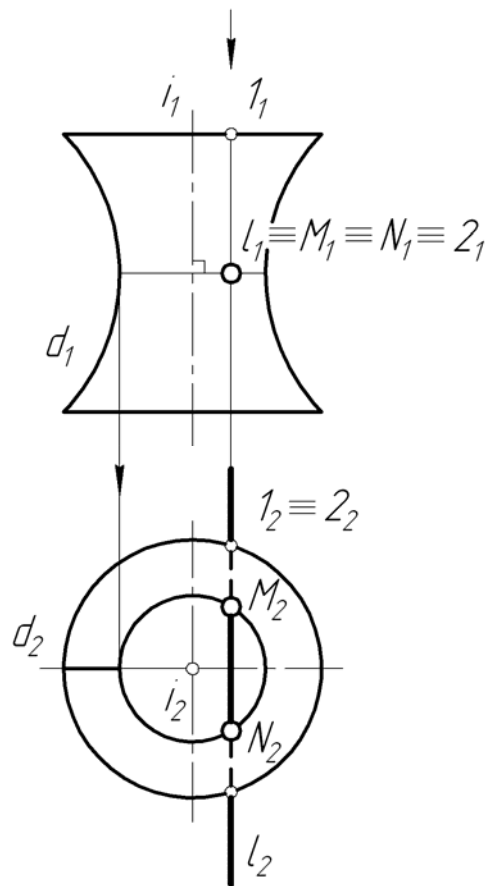


Рис. 21, б

Комментарии к решению задачи:

Так как прямая l занимает фронтально-проецирующее положение, фронтальные проекции всех точек прямой, включая точки M и N пересечения прямой l с поверхностью глобоида Ψ , совпадают с вырожденной проекцией прямой, то есть $l_1 \equiv M_1 \equiv N_1$ (рис. 21, б). Горизонтальные проекции общих точек прямой и поверхности определяются из условия принадлежности точек поверхности глобоида. В данном случае, они принадлежат параллели наименьшего радиуса — горлу.

Видимость прямой l при проецировании на плоскость π_2 определим с помощью конкурирующих точек 1 и 2 (точка 1 принадлежит поверхности глобоида, точка 2 — прямой l).

2.3. Пересечение непроецирующей прямой с проецирующей поверхностью

При решении задач этого типа следует учесть, что проекции точек пересечения прямой и проецирующей поверхности в одном из полей проекций лежат на пересечении вырожденной проекции поверхности и соответствующей проекции прямой. Проекция общих точек прямой и поверхности в другом поле определяются из условия их принадлежности прямой. Таким образом, решение этого вида задач сводится к решению позиционных задач на инцидентность точки и прямой.

ЗАДАЧА 19

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с призматической поверхностью $\Delta(F, f)$, (рис. 22, а). Определить видимость.

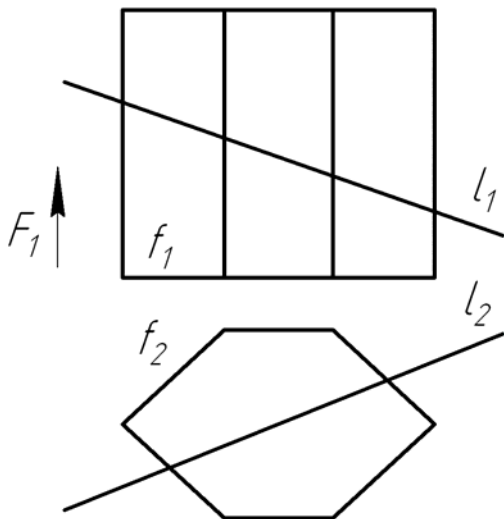


Рис. 22, а

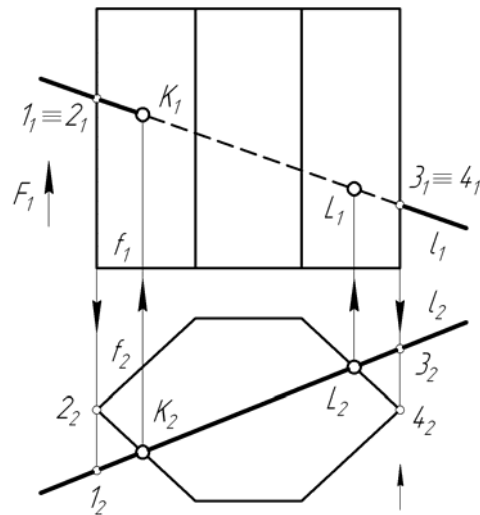


Рис. 22, б

Комментарии к решению задачи:

Проекция всех точек горизонтально-проецирующей призматической поверхности $\Delta(F, f)$ в поле π_2 лежат на проекции f_2 (рис. 22, б).

Точки пересечения должны одновременно принадлежать прямой l и призматической поверхности Δ , поэтому проекции точек пересечения K_2 и L_2 в поле π_2 находятся на пересечении проекции l_2 прямой и вырожденной проекции f_2 призматической поверхности.

Фронтальные проекции общих точек прямой и поверхности K_1 и L_1 определяются из условия их принадлежности прямой.

Для определения видимости прямой при проецировании на плоскость π_1

используем конкурирующие точки 1 и 2 (точка 1 принадлежит прямой l , точка 2 принадлежит ребру призматической поверхности), а также точки 3 и 4 (точка 3 принадлежит прямой l , точка 4 принадлежит ребру призматической поверхности).

ЗАДАЧА 20

На эпюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с цилиндрической поверхностью $\Sigma(F, a)$ (рис. 23, а).

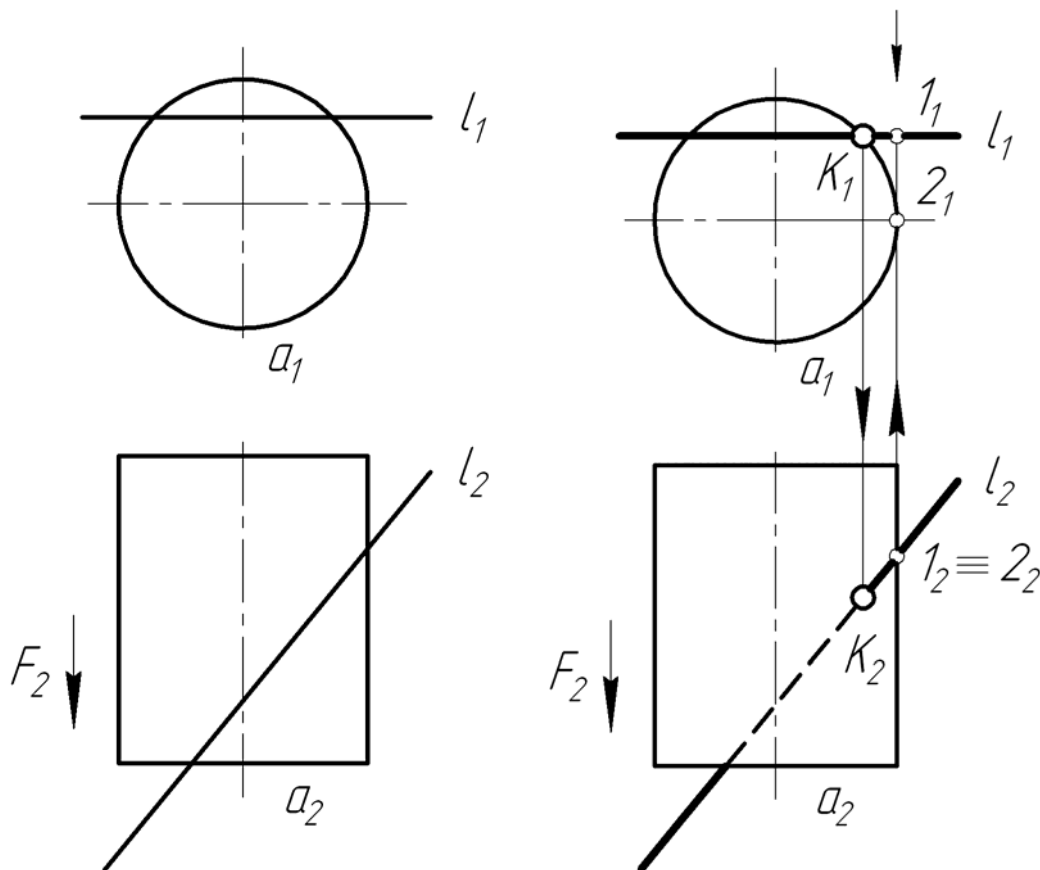


Рис. 23, а

Рис. 23, б

Комментарии к решению задачи:

В данном случае, результат решения задачи — одна точка — точка K пересечения прямой с цилиндрической поверхностью (рис. 23, б). Её фронтальная проекция K_1 находится на пересечении проекции l_1 прямой и вырожденной проекции цилиндрической поверхности.

Горизонтальная проекция точки пересечения K_2 определяется из условия её принадлежности прямой.

Для определения видимости прямой при проецировании на плоскость π_2 можно использовать конкурирующие точки 1 и 2 (точка 1 принадлежит прямой l , точка 2 принадлежит образующей цилиндрической поверхности).

2.4. Пересечение непроецирующей прямой с поверхностью общего положения

Одним из способов решения данного типа задач является способ введения вспомогательной секущей плоскости — плоскости посредника.

Для построения точки пересечения прямой l с поверхностью Σ необходимо:

1. Заключить прямую l во вспомогательную секущую плоскость β (рис. 24).
2. Построить линии пересечения заданной поверхности Σ и вспомогательной плоскости β (в данном случае, это линии m и n).
3. Определить точки M и N пересечения прямой l с построенными линиями m и n .

Так как линии m и n принадлежат заданной поверхности Σ , точки M и N являются общими точками прямой и поверхности.

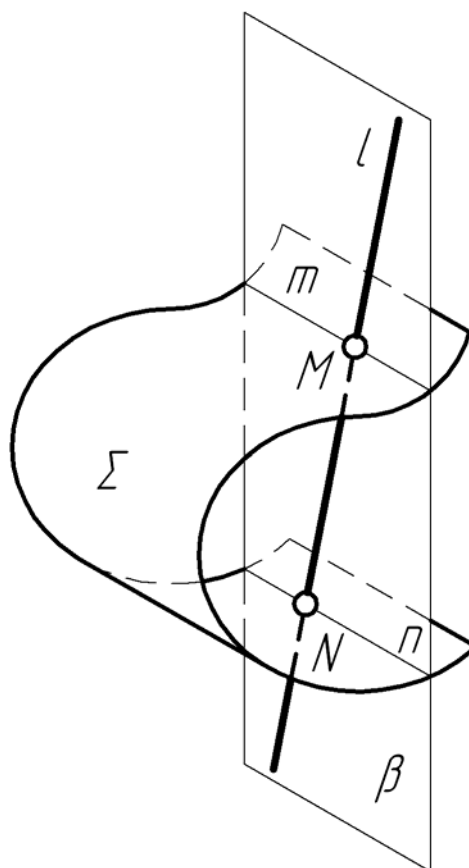


Рис. 24

В каждом отдельном случае при решении задач вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы проекции сечения поверхности этой плоскостью, по возможности, представляли собой графически простые линии

(например, прямые или окружности). В качестве вспомогательной плоскости может использоваться проецирующая плоскость или плоскость общего положения.

ЗАДАЧА 21

На эпюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с цилиндрической поверхностью $\Theta(F, a)$ (рис. 25, а). Определить видимость.

Комментарии к решению задачи:

Для решения задачи целесообразно заключить прямую l во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β : $\beta_1 \equiv l_1$. Линиями пересечения вспомогательной проецирующей плоскости β с цилиндрической поверхностью будут графически простые линии — две прямолинейные образующие: m ($1F$) и n ($2F$) (рис. 25, б). Использовать в качестве вспомогательной горизонтально-проецирующую плоскость γ : $\gamma_2 \equiv l_2$ нерационально, так как в сечении цилиндрической поверхности получится эллипс — линия, трудоёмкая для построения.

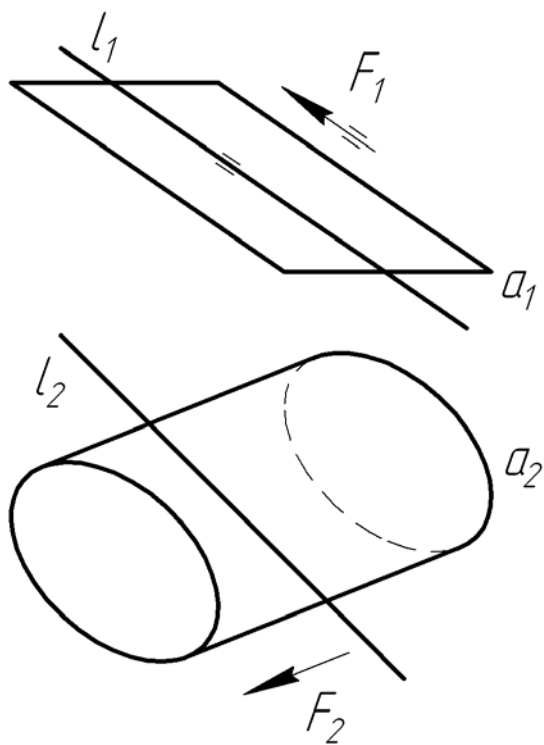


Рис.25, а

Определим точки пересечения M, N прямой l с построенными линиями пересечения m и n (рис. 25, в). Точки M и N являются искомыми точками пересечения прямой l с поверхностью $\Theta(F, a)$.

Для определения видимости прямой l при проецировании на плоскость π_1 (рис. 25, г) используем конкурирующие точки 2 и 3 (точка 2 принадлежит направляющей a цилиндрической поверхности, точка 3 принадлежит прямой l), а также точки 4 и 6 (точка 4 принадлежит цилиндрической поверхности, точка 6 принадлежит прямой l).

По расположению горизонтальных проекций точек 1, 2 и 3, можно сделать вывод, что точка 3, принадлежащая прямой l , — видимая. Следовательно, при проецировании на фронтальную плоскость проекций, участок прямой l от точки 3 до точки N находится перед поверхностью. Отмечаем его основной линией.

По расположению горизонтальных проекций точек 4, 5 и 6, определяем, что точка 6, принадлежащая прямой l , — невидимая. Следовательно, при проецировании на фронтальную плоскость проекций, участок прямой l от точки M до точки N находится за поверхностью. Отмечаем его штриховой линией.

Участок прямой между точками пересечения прямой с поверхностью M и N также является невидимым.

Для определения видимости при проецировании на плоскость π_2 используем конкурирующие точки 7 и 8 (точка 7 принадлежит прямой l , точка 8 — образующей AF цилиндрической поверхности), а также точки 9 и 10 (точка 10 принадлежит прямой l , точка 9 — образующей BF цилиндрической поверхности) (рис. 25, д). По расположению фронтальных проекций точек 7 и 8 определяем, что точка 7, принадлежащая прямой l , — видимая. Следовательно, часть прямой, содержащая точку 7, находится над поверхностью. По фронтальным проекциям точек 9 и 10, определяем, что точка 10 при проецировании на плоскость π_2 является невидимой. Исходя из этого, участок прямой l , содержащий точку 10, находится под поверхностью.

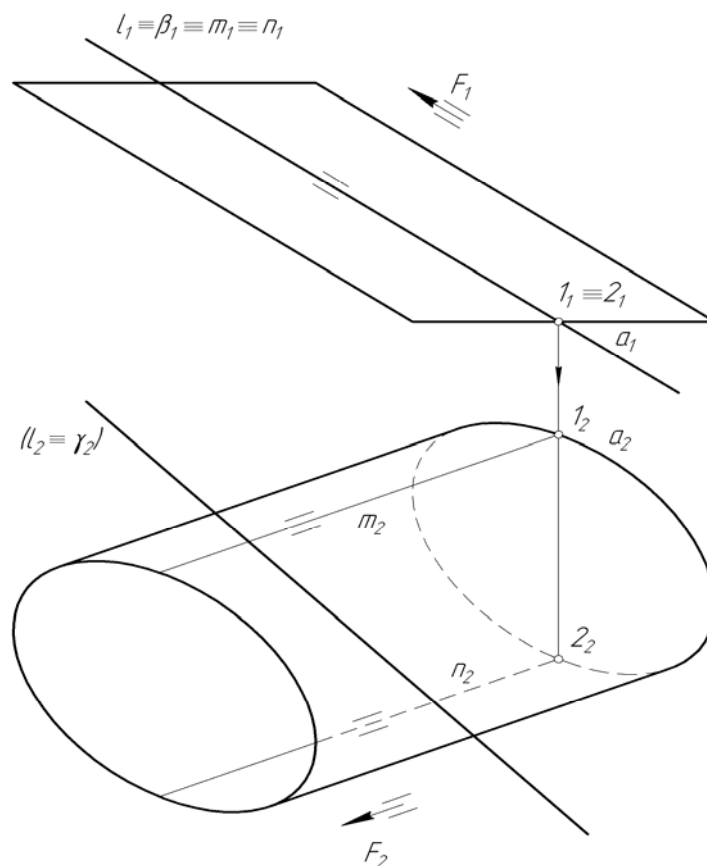


Рис. 25, б

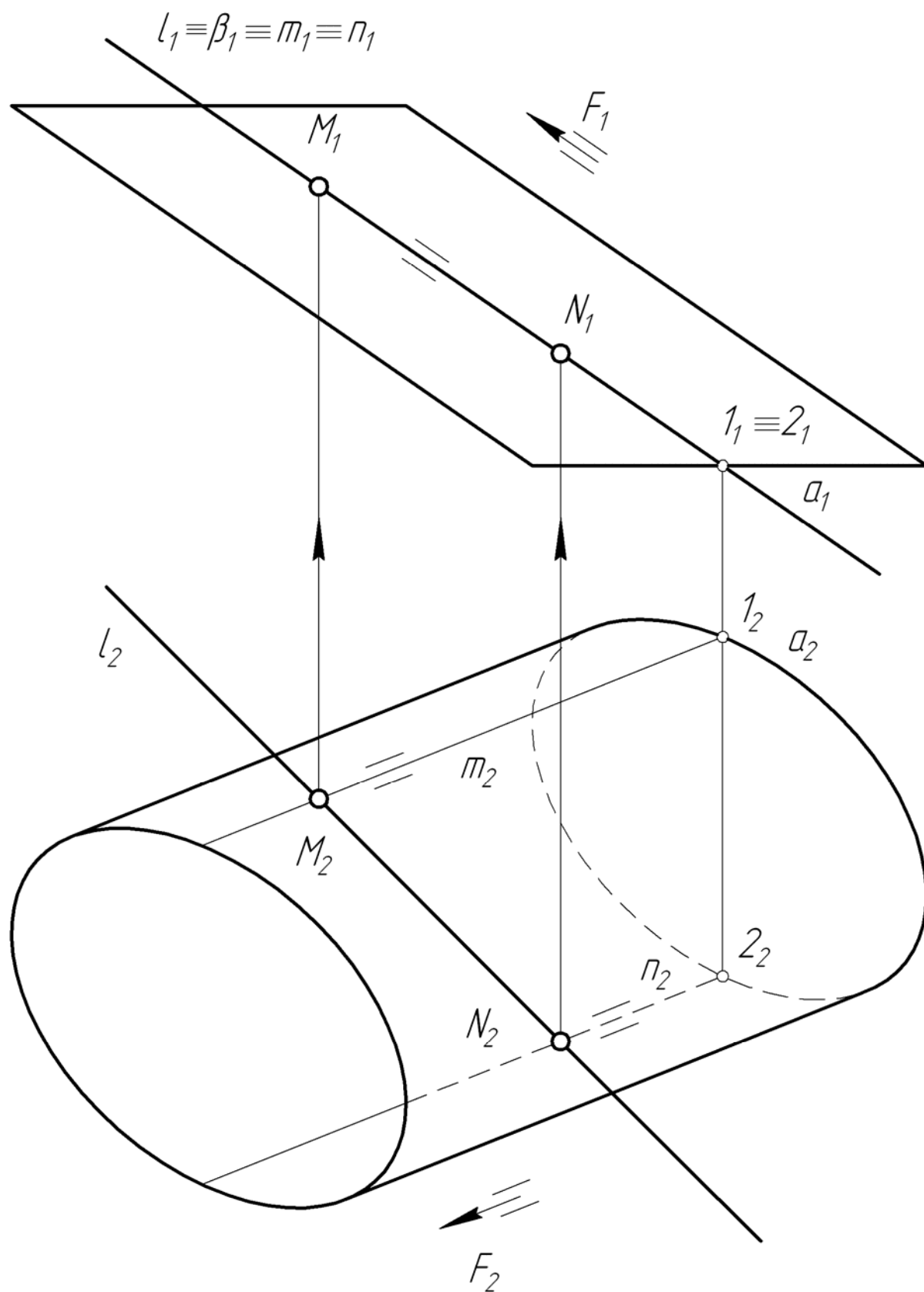


Рис. 25, в

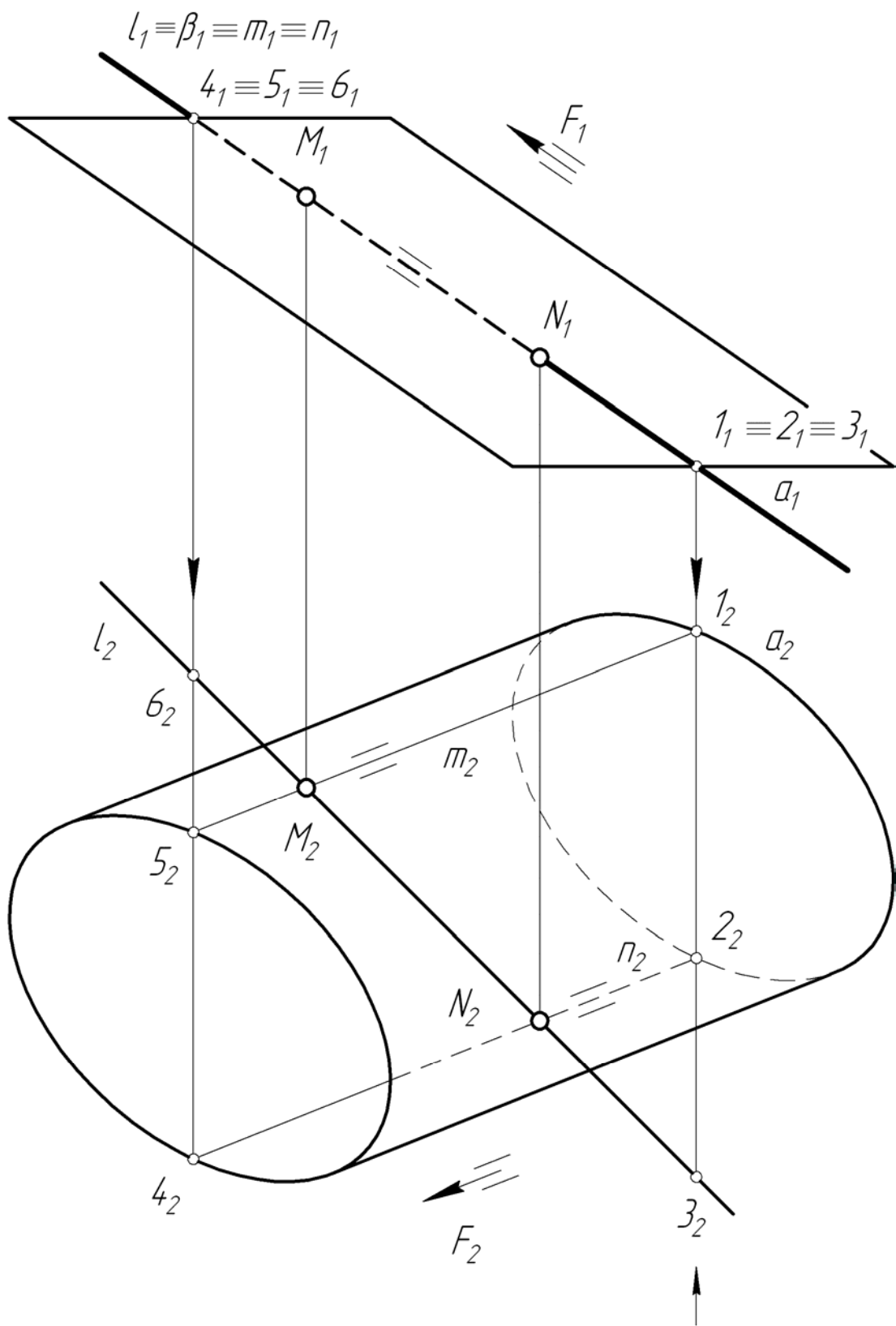


Рис.25, г

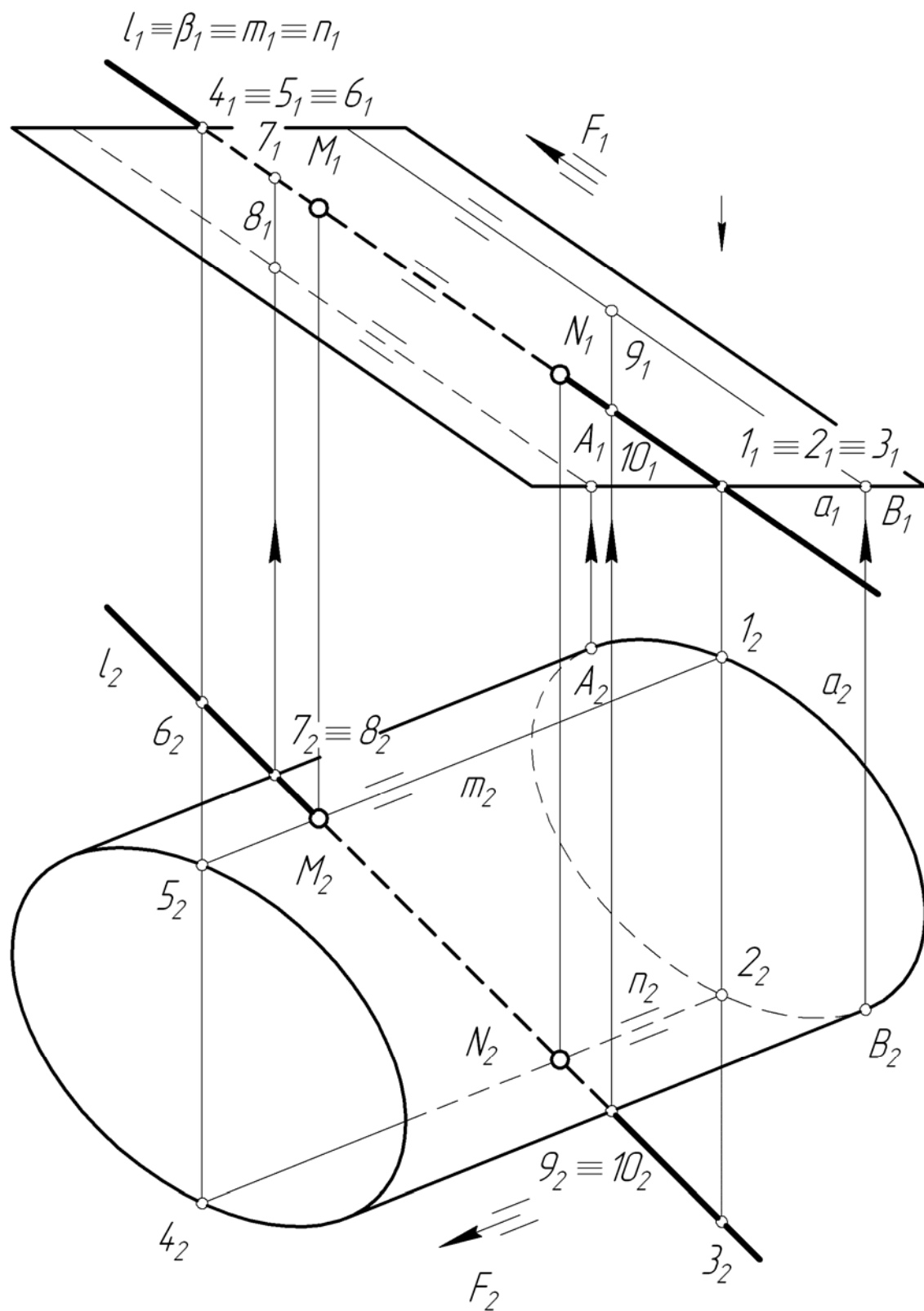


Рис. 25, д

ЗАДАЧА 22

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с конической поверхностью $\Sigma(T, f)$ (рис. 26, а). Определить видимость.

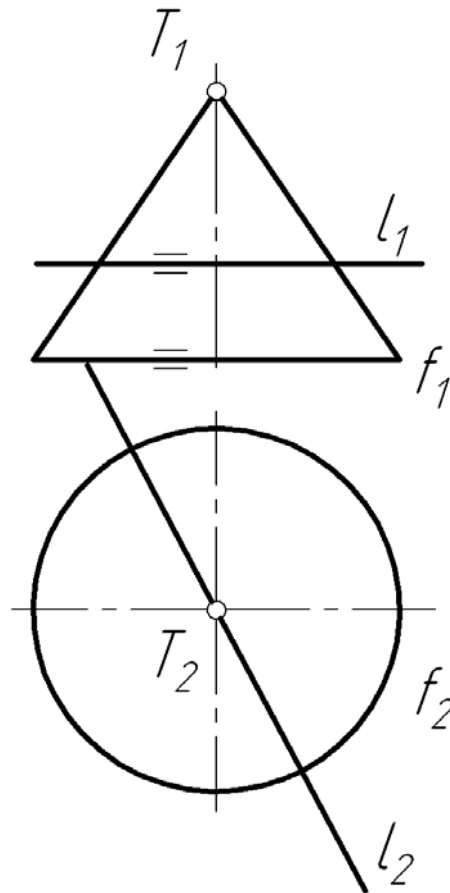


Рис. 26, а

Комментарии к решению задачи:

Если расечь коническую поверхность вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью β : $\beta_1 \equiv l_1$, в сечении получится окружность m (рис. 26, б).

Если в качестве вспомогательной использовать горизонтально-проецирующую секущую плоскость γ : $\gamma_2 \equiv l_2$, результатом пересечения будут прямолинейные образующие конической поверхности — $T1$ и $T2$.

Таким образом, в обоих случаях, проекции сечения поверхности вспомогательной плоскостью представляют собой графически простые линии. Поэтому способы решения равнозначны.

Продолжим решать задачу, выбрав в качестве вспомогательной горизонтально-проецирующую плоскость γ : $\gamma_2 \equiv l_2$. Определим точки пересечения K и L прямой l с построенными линиями пересечения $T1$ и $T2$. Точки K и L являются искомыми точками пересечения прямой l с поверхностью $\Sigma(T, f)$

(рис. 26, в).

Для определения видимости прямой l при проецировании на плоскость π_1 (рис. 26, г) используем конкурирующие точки 3 и 4 (точка 3 принадлежит прямой l , точка 4 принадлежит образующей $TВ$ конической поверхности), а также точки 5 и 6 (точка 5 принадлежит образующей $ТА$ конической поверхности, точка 6 принадлежит прямой l).

Для определения видимости при проецировании на плоскость π_2 используем конкурирующие точки 1 и 7 (точка 1 принадлежит направляющей f конической поверхности, точка 7 принадлежит прямой l), а также точки 2 и 8 (точка 2 принадлежит направляющей f конической поверхности, точка 8 — прямой l).

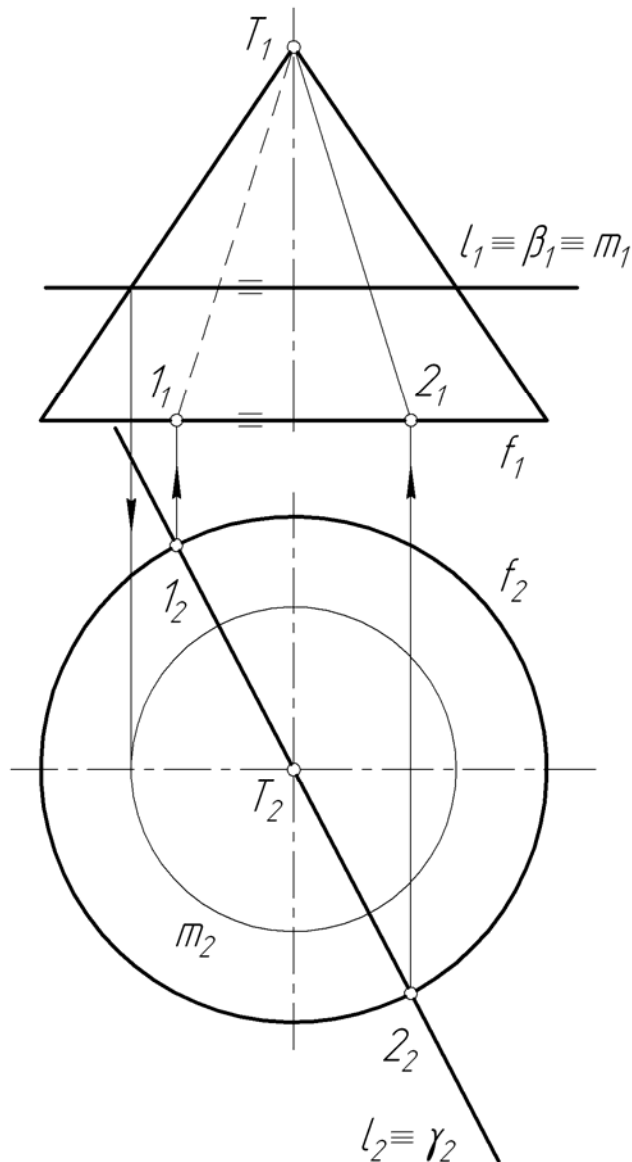


Рис. 26, б

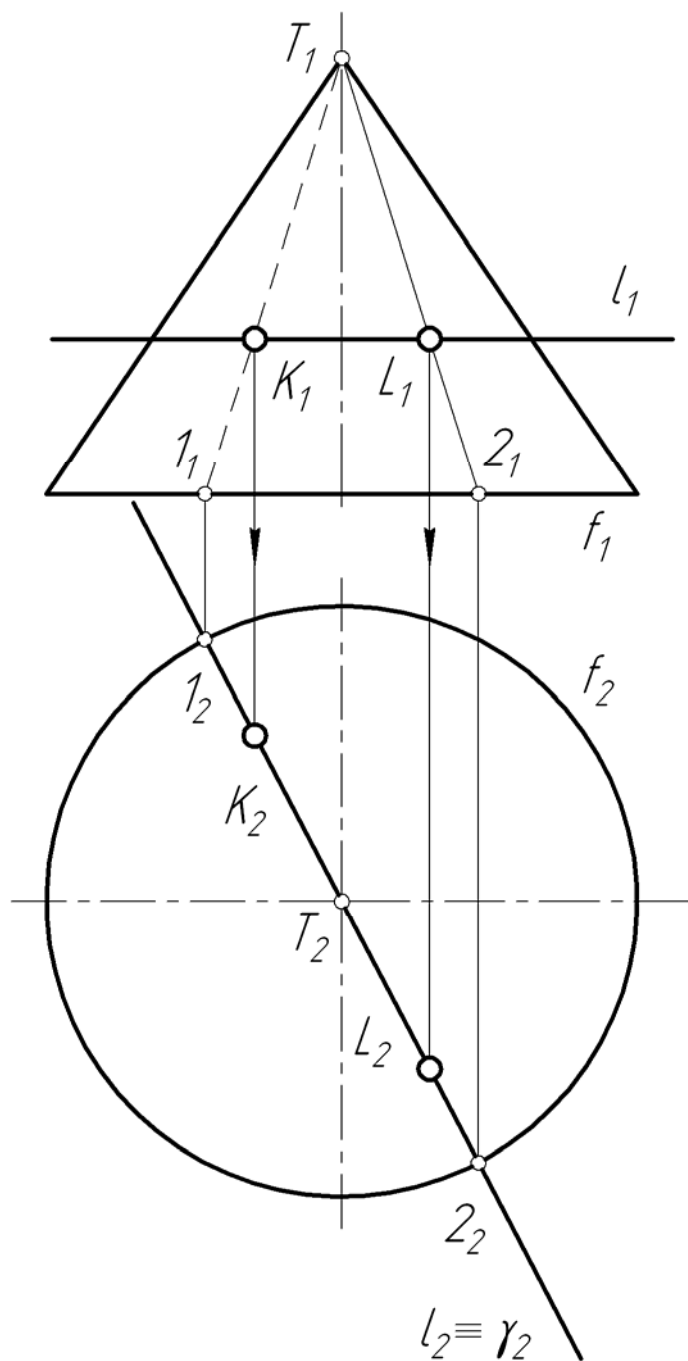


Рис. 26, в

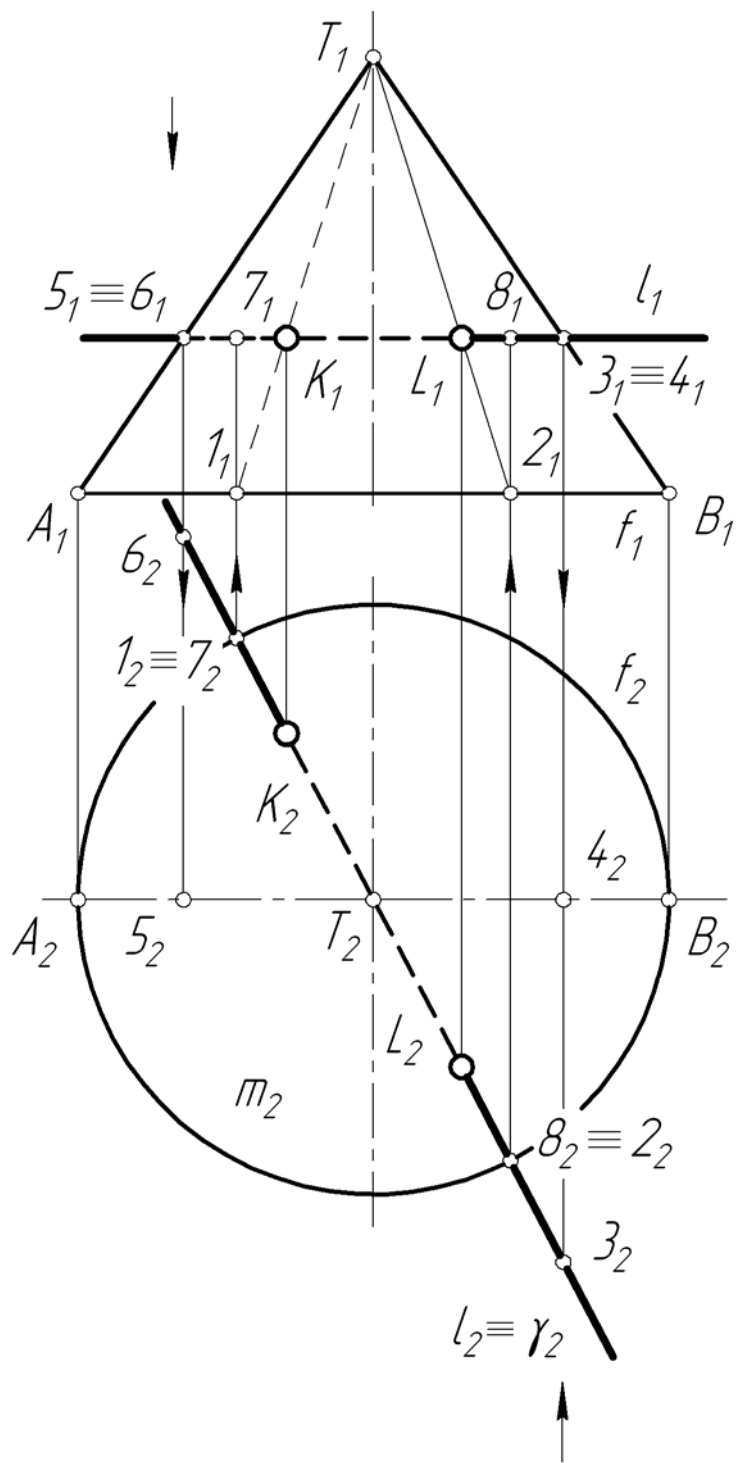


Рис. 26, г

ЗАДАЧА 23

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с пирамидальной поверхностью $\Phi(S, f)$ (рис. 27, а). Определить видимость.

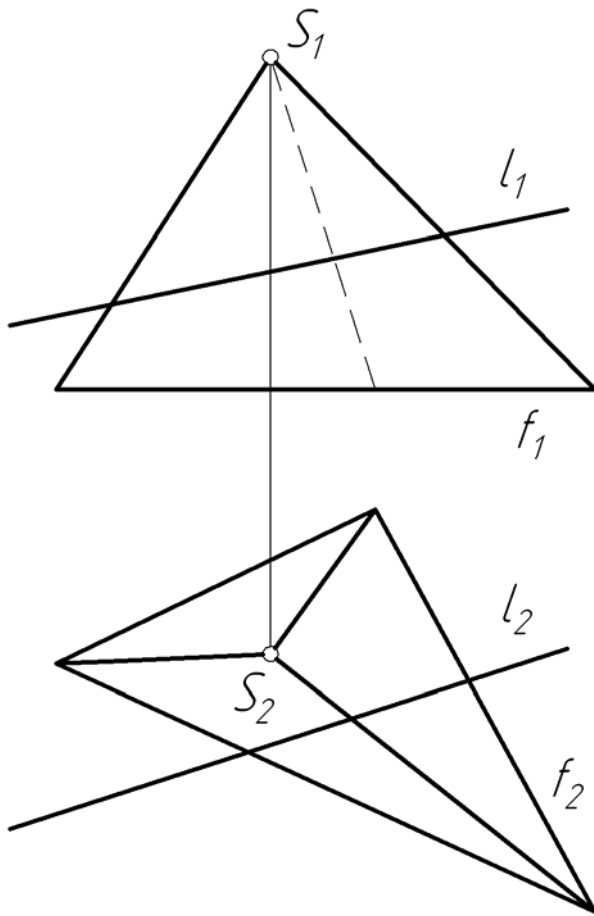


Рис. 27, а

Комментарии к решению задачи:

Для решения задачи применим способ вспомогательных проецирующих плоскостей.

Заключаем прямую l во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β ($l_1 \equiv \beta_1$). Линия пересечения вспомогательной плоскости β с заданной поверхностью в данном случае - треугольник $m(123)$ (рис. 27, б).

Определяем точки пересечения K, L прямой l с построенной линией m . Эти точки являются результатом пересечения прямой l с поверхностью $\Phi(S, f)$ (рис. 27, в).

Заметим, что задачу можно было бы также успешно решить, заключив прямую l во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость.

Для определения видимости прямой l при проецировании на плоскость π_2 (рис. 27, г) используем конкурирующие точки 6 и 7 (точка 6 принадлежит прямой l , точка 7 принадлежит направляющей f пирамидальной поверхности), а также точки 8 и 9 (точка 8 принадлежит прямой l , точка 9 принадлежит направляющей f пирамидальной поверхности).

Для определения видимости при проецировании на плоскость π_1 используем конкурирующие точки 1 и 4 (точка 1 принадлежит ребру AS пирамидальной поверхности, точка 4 — прямой l), а также точки 3 и 5 (точка 3 принадлежит ребру CS пирамидальной поверхности, точка 5 — прямой l).

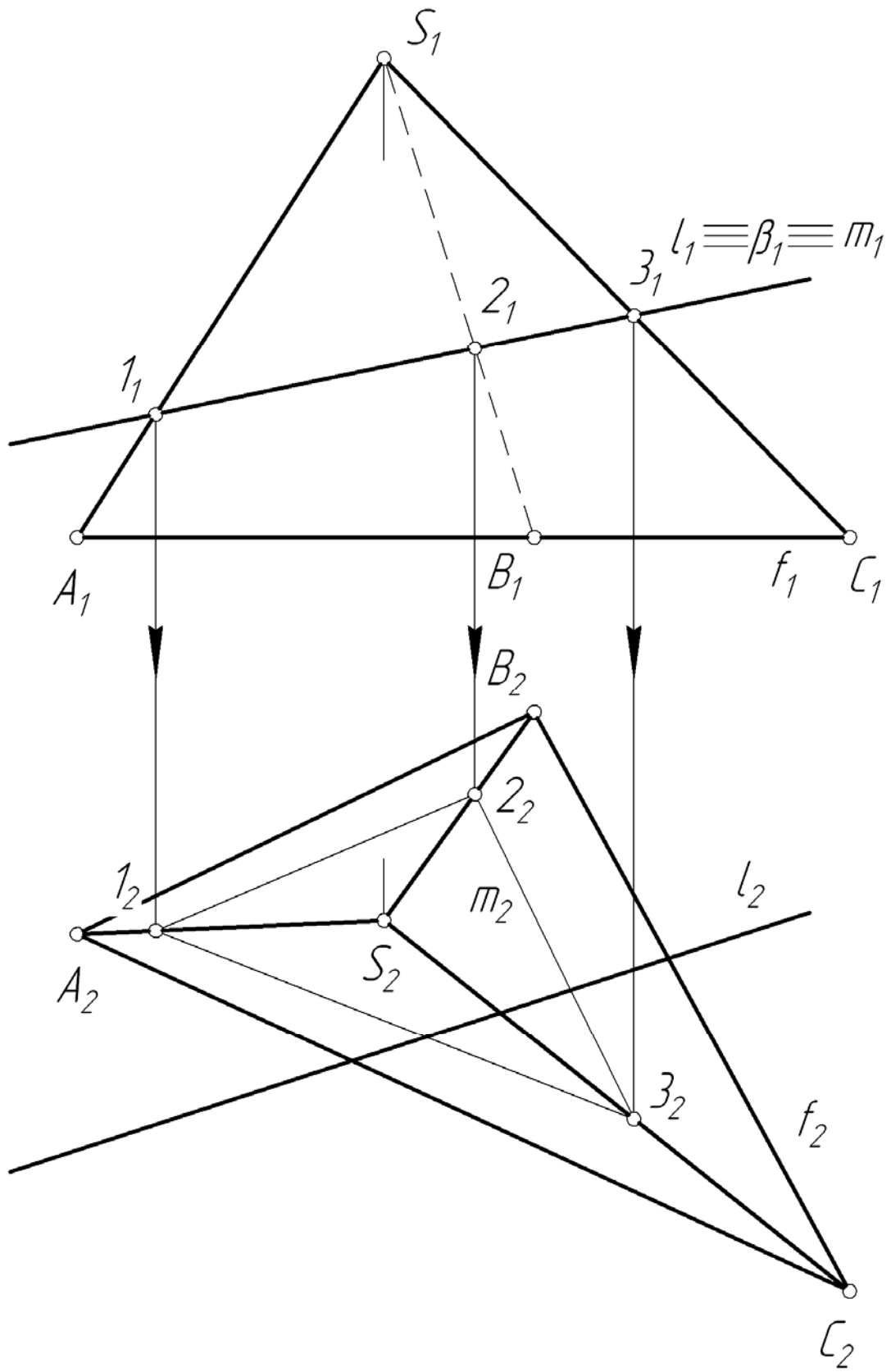


Рис. 27, б

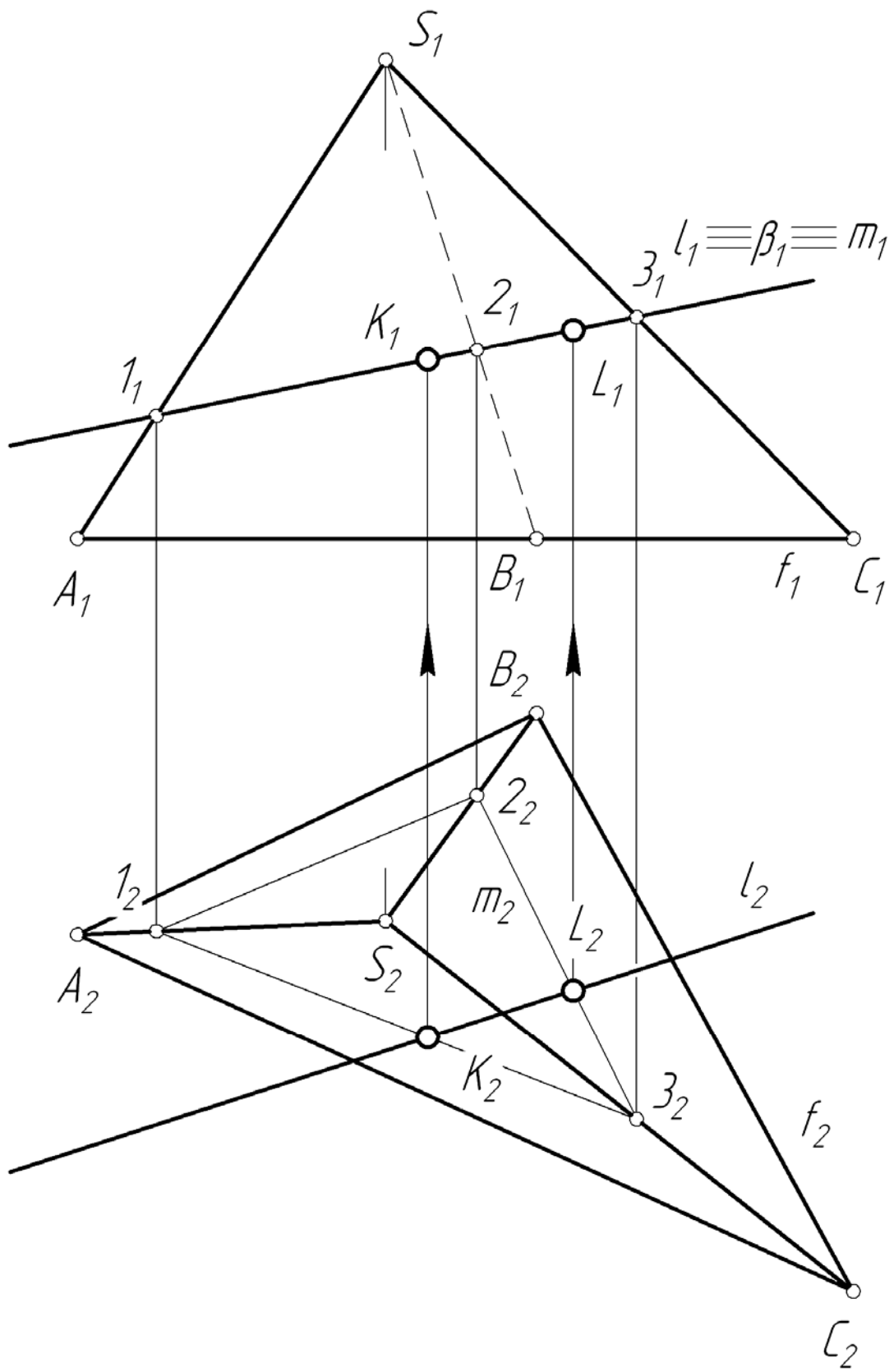


Рис. 27, в

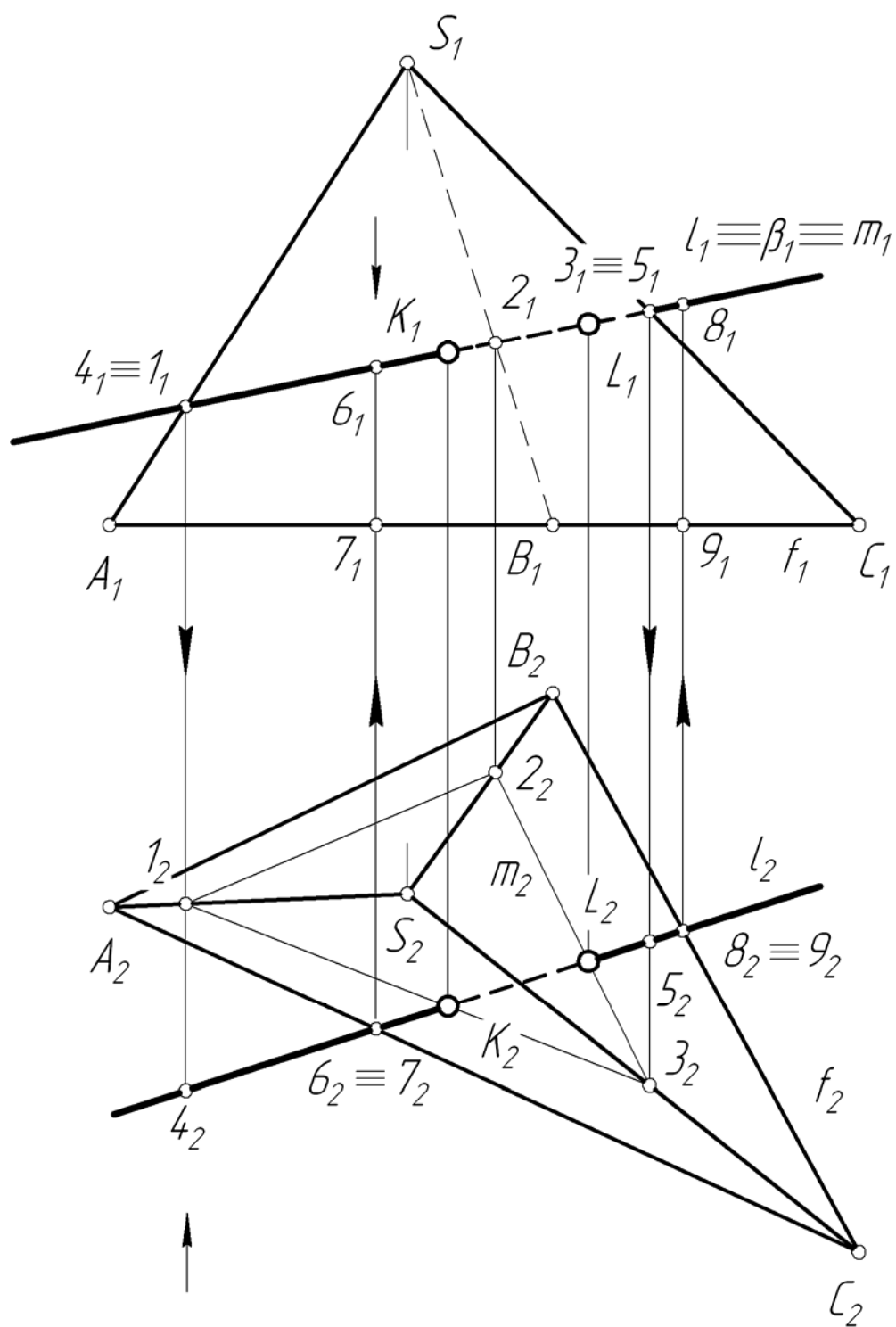


Рис. 27, г

ЗАДАЧА 24

На эюре Монжа построить проекции точек пересечения прямой l с торовой поверхностью $\Psi(i, a)$ (рис. 28, а). Определить видимость.

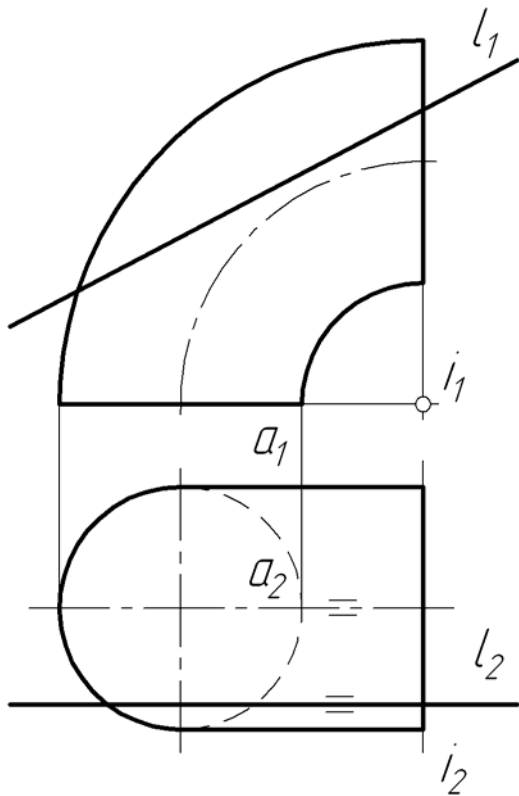


Рис. 28, а

Комментарии к решению задачи:

Для решения данной задачи целесообразно заключить прямую l во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость γ : $\gamma_2 \equiv l_2$. Линиями пересечения вспомогательной проецирующей плоскости γ с торовой поверхностью будут графически простые линии — две дуги окружности: m и n (рис. 28, б). Использовать в качестве вспомогательной фронтально-проецирующую плоскость нерационально, так как в сечении поверхности получится кривая линия, трудоёмкая для построения.

Определим точки пересечения прямой l с построенными линиями пересечения m и n (рис. 28, в). В данном случае, результат решения задачи — одна точка — точка M пересечения прямой с торовой поверхностью.

Горизонтальная проекция M_2 точки пересечения определяется из условия её принадлежности прямой.

Для определения видимости прямой l при проецировании на плоскость π_1 (рис. 28, г) используем конкурирующие точки 3 и 4 (точки 3 принадлежит прямой l , точка 4 — торовой поверхности).

Для определения видимости при проецировании на плоскость π_2 используем конкурирующие точки 1 и 5 (точка 1 принадлежит образующей окружности a торовой поверхности, точка 5 — прямой l), а также точки 6 и 7 (точка 6 принадлежит прямой l , точка 7 — торовой поверхности).

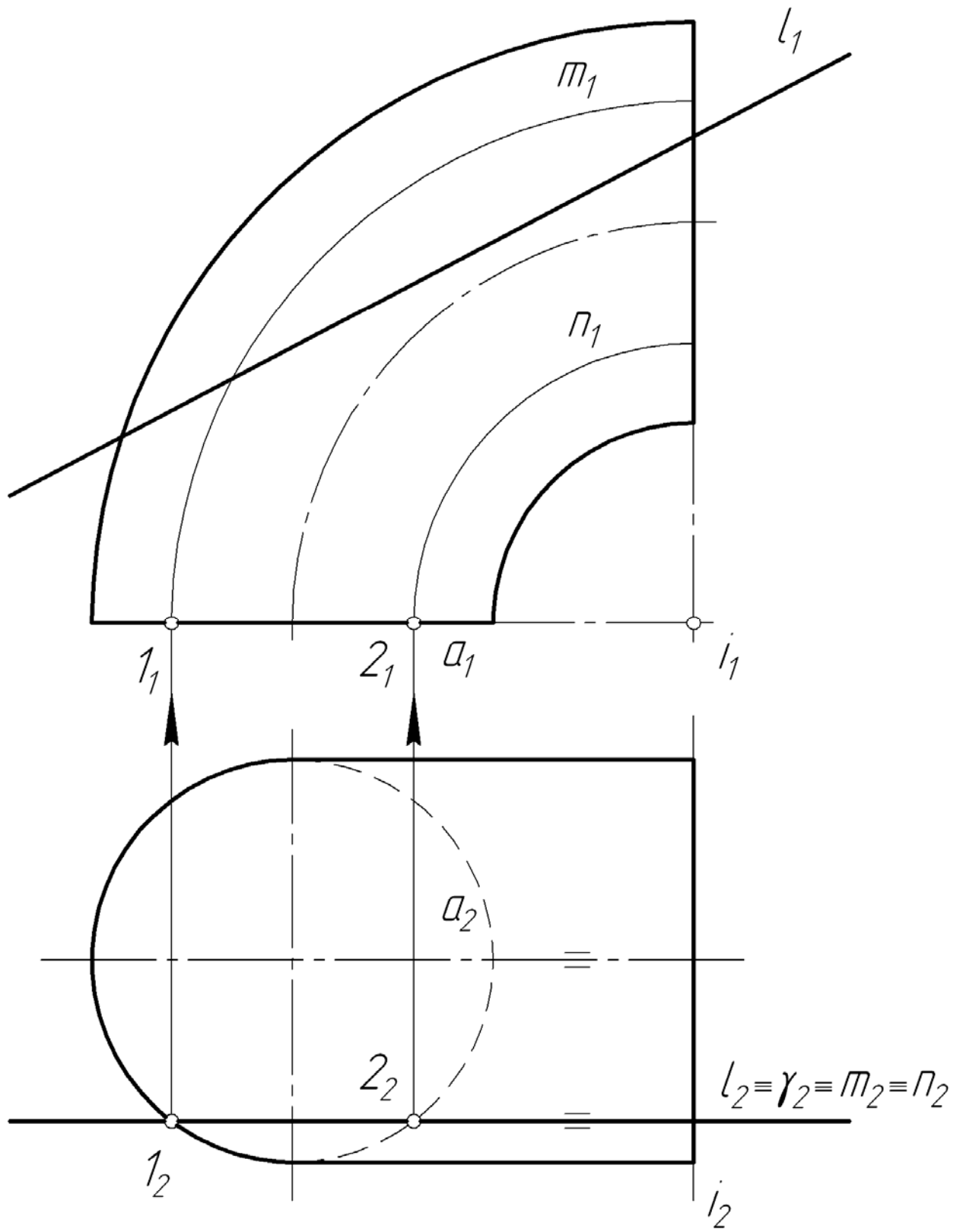


Рис. 28, б

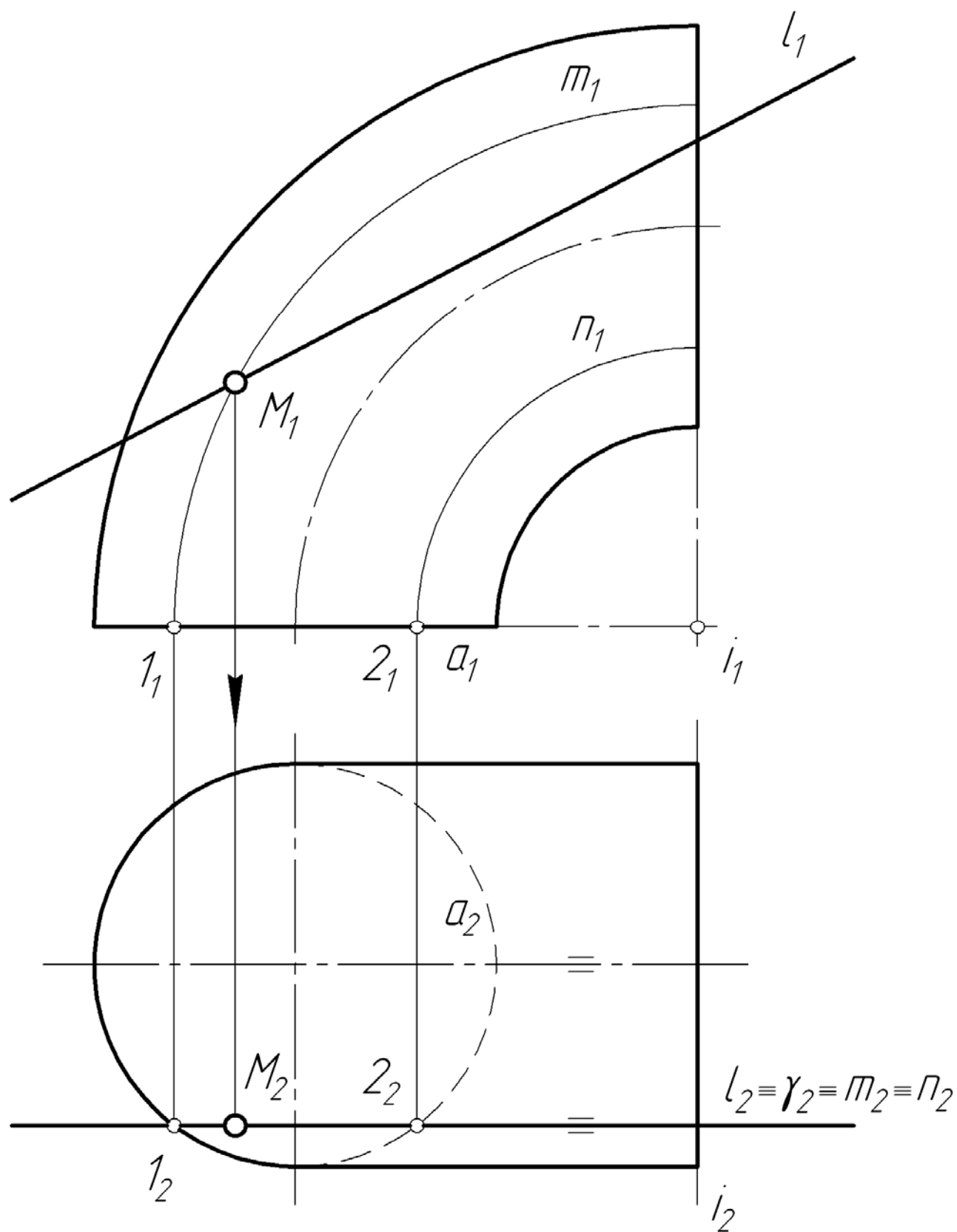


Рис. 28, в

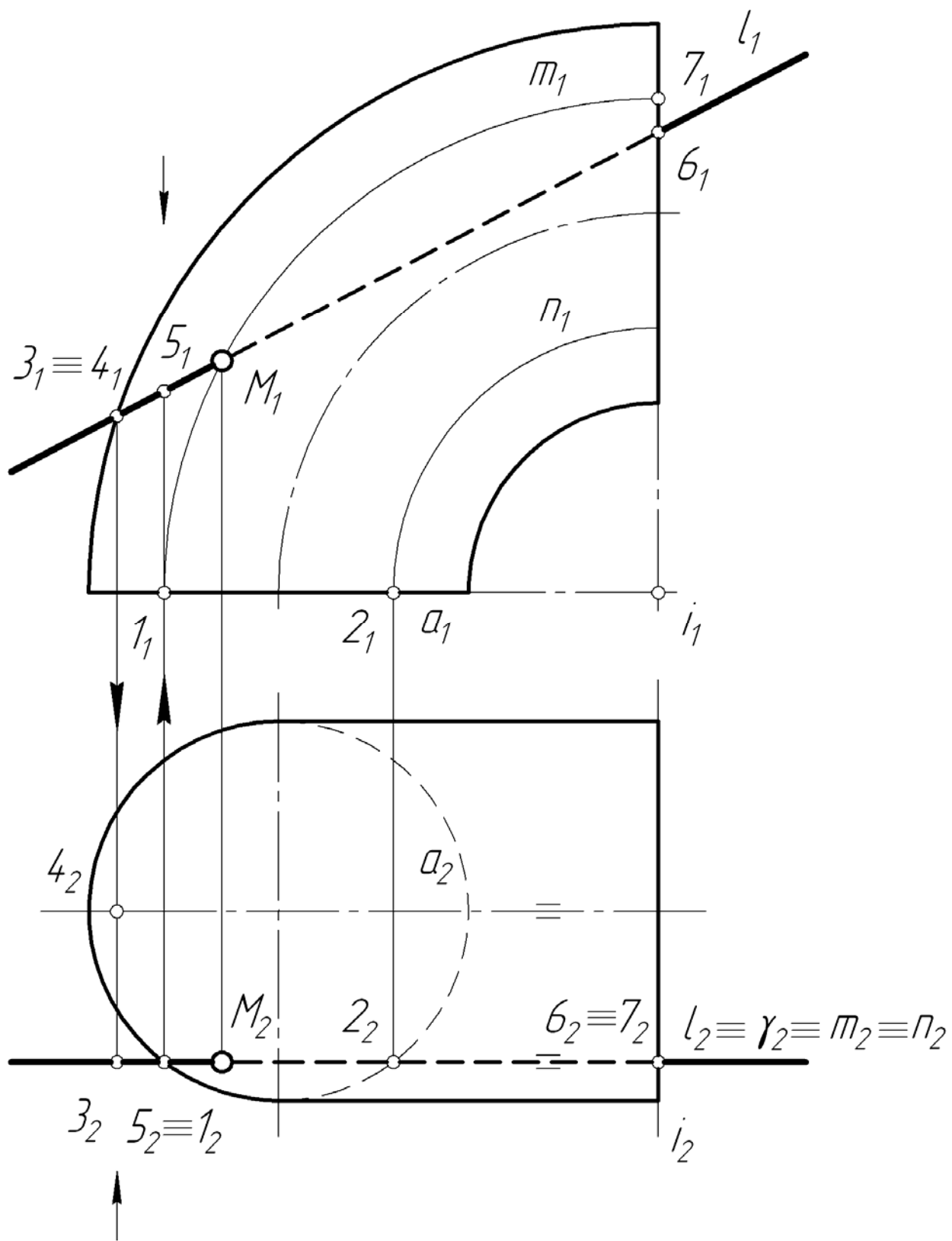


Рис. 28, г

В этом разделе учебного пособия подобраны задачи, при решении которых возможно использовать в качестве плоскости-посредника проецирующую плоскость.

В ряде других случаев, для упрощения построений, целесообразно применять в качестве вспомогательной плоскости плоскость общего положения или использовать способы преобразования чертежа [1, стр. 65], [3, стр. 169].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части предложенного Вашему вниманию учебного пособия были рассмотрены позиционные задачи на пересечение прямой с плоскостью и прямой с поверхностью. Задачи на пересечение плоскостей, плоскости с поверхностью и пересечение поверхностей будут включены во вторую часть пособия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Волошинов В.А.* Основы проекционного моделирования: учеб. пособие / В.А. Волошинов, М.Д. Половинкин, Л.Н. Шерешкова. — Обнинск: Фабрика офсетной печати ВНИИГМИ-МЦД, 1989. — 86 с.
2. *Волошинов В.А.* Начертательная геометрия. Инженерная графика. Позиционные задачи на проекционных моделях трехмерного пространства: учеб. пособие / В.А. Волошинов. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. — 30 с.
3. *Иванов Г.С.* Начертательная геометрия: учебник / Г.С. Иванов — М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2008. — 338 с.
4. *Иванова Н.С.* Начертательная геометрия. Инженерная графика. Позиционные задачи на инцидентность геометрических элементов: учеб. пособие / Н.С. Иванова. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2003. — 78 с.
5. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Проекционные модели трехмерного пространства. Моделирование геометрических объектов: учеб. пособие / Ю.Я. Андрейченко [и др.] — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 36 с.
6. *Фролов С.А.* Начертательная геометрия: учебник для вузов / С.А. Фролов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1983. — 240 с.