На правах рукописи

Семёнов Евгений Александрович

Квантовые двумерные осцилляторы с полиномиальными потенциалами

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена на кафедре теоретической физики ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВПО «СПбГПУ» Санин Андрей Леонардович.*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН» Баграев Николай Таймуразович.*
	доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики ФГБОУ ВПО «СПбГПУ» Ипатов Андрей Николаевич.
Ведущая организация:	*НИЦ «Курчатовский институт» ФГБУ Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова*

Защита состоится «20» марта 2013 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.229.29 ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»*, по адресу: *195251, г.Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, Главный учебный корпус, ауд.118*.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке *ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»*.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент *Ермакова Наталья Юрьевна*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В течение последних десятилетий проблема квантовых динамических свойств в осцилляторах и волноводных системах приобрела особое значение. С одной стороны, это объясняется успехами в точных технологиях, материаловедении и достижениями измерительной техники. С другой, это открыло новые возможности в экспериментальном изучении законов движения микрочастицы в физике, химии, объектах нанометровых масштабов, в отдельных молекулах и атомах. Фундаментальное значение как теоретических, так и экспериментальных исследований состоит в том, что они являются базой для создания нового поколения электронных приборов, в том числе квантовых компьютеров.

В настоящее время квантовые волново-пакетные динамические закономерности тщательно изучены для наиболее простых потенциальных систем: с бесконечными стенками, в форме бильярдов, прямоугольных ям и барьеров. Квантовый гармонический осциллятор, являющийся простой и точно решаемой задачей, сыграл фундаментальную роль в моделировании множества явлений в различных областях физики и химии. Однако, во многих ситуациях он не может обеспечить описания квантовых систем, так как появилась необходимость в исследовании систем с полиномиальными потенциалами высоких степеней. Квантовый осциллятор стал ангармоническим, и динамика ангармонических осцилляторов стала занимать достойное положение в исследованиях. Здесь следует отметить исследования квантовой динамики электрона в двухъямном полиномиальном потенциале молекул, который в классической механике называется потенциалом Дуффинга. Классические нелинейные задачи с осциллятором Дуффинга послужили основой в формулировке квантовых осцилляторов Дуффинга и открыли новые возможности в объяснении динамических свойств. Например, наномеханические осцилляторы с потенциалом Дуффинга при понижении температуры переходят в квантовый режим функционирования. Характерные частоты колебаний таких осцилляторов находятся в диапазоне СВЧ, вплоть до нескольких гигагерц. Одномерные модели квантовых систем стали недостаточными и пришлось обобщить их на два измерения. Квантовые двумерные системы с полиномиальными потенциалами Паллена-Эдмондса, Хенона-Хейлеса и некоторые другие также интенсивно исследовались в течение последних десятилетий. Несмотря на это, в научной литературе отмечается недостаток информации о свойствах квантовых двумерных систем, высказывается точка зрения, что для реализации рабочих элементов квантового компьютера и других приборов необходим более широкий фронт исследований, включая компьютерное моделирование. Рассматриваемые динамические системы, квантовые осцилляторы и волноводы, могут обладать сложными динамическими свойствами. Одна из проблем—исследование квантовых систем, которые в классическом пределе характеризуются хаотическим динамическим поведением.

Предлагаемая диссертационная работа посвящена исследованиям квантовых двумерных осцилляторов со связью между степенями свободы движения. С одной стороны, она может рассматриваться как продолжение существующих известных исследований в научной литературе, их развитие. Однако, с другой стороны, в ней обобщаются модели классических осцилляторов, формулируются их квантовые аналоги и проводятся исследования их свойств. Такие исследования мотивируются необходимостью развития теории квантовых осцилляторов со связью между степенями свободы движения и имеют прикладное значение. В этой связи проведенные в диссертации исследования являются несомненно актуальными.

Цели и задачи исследования состоят в развитии теории квантовых двумерных осцилляторов с полиномиальными потенциалами методами численного моделирования. Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Анализ анизотропного гармонического осциллятора со связью между степенями свободы движения, пропорциональной произведению координат.
2. Исследование системы с двухъямным осциллятором и туннелированием вдоль одной координаты и свободным движением вдоль другой.
3. Изучение регулярных режимов колебаний квантового осциллятора Паллена-Эдмондса (изотропного и анизотропного).
4. Изучение режимов колебаний двухъямного осциллятора Дуффинга, связанного с гармоническим осциллятором.
5. Моделирование одно- и двухъямного осцилляторов Дуффинга со связью.
6. Разработка модели двумерного двухъямного осциллятора Дуффинга (изотропного и анизотропного).

В этих исследованиях необходимо проанализировать эволюцию волново-пакетных решений в двумерных системах с полиномиальными потенциалами при помощи средних значений координат, скоростей, частотных спектров временных реализаций, произведений неопределённостей. Необходимо установить области параметров, при которых в процессе эволюции волновые пакеты остаются локализованными и произведение неопределённостей остается близким к минимизированному значению или, наоборот, происходит делокализация, а колебания средних величин усложняются по форме и частотному спектру; при этом произведение неопределенностей существенно превышает минимальное. Одной из задач является проверка корректности полученных решений, а так же контроль их точности.

Научная новизна. Рассмотрен процесс возбуждения колебаний двумерного квантового гармонического осциллятора коротким импульсом. Изучен обмен спектральными компонентами между колебательными степенями свободы системы.

Изучена система двух волноводных каналов, представляющая собой комбинацию двухъямного полиномиального потенциала, зависящего от одной из координат, и постоянного потенциала вдоль другой координаты. Рассмотрен процесс туннелирования между каналами. Прототипом такой модели является широко обсуждаемая в литературе система с прямоугольными каналами и барьером. В диссертации исследовано влияние связи между степенями свободы, а также внешнего воздействия на динамические закономерности, включающие временные масштабы туннелирования и свободного движения.

Для двумерного осциллятора с потенциалом Паллена-Эдмондса, характеризующего связь между квантовыми гармоническими осцилляторами, проведены исследования режимов квазипериодических колебаний, ранее не изучавшихся в литературе. В отличие от существующих работ детально исследован анизотропный осциллятор Паллена-Эдмондса при слабой анизотропии и разных парциальных частотах.

Исследованы режимы колебаний волнового пакета в системе осциллятора Дуффинга, связанного с гармоническим осциллятором при помощи потенциала, пропорционального произведению координат. Исследованы временные реализации и частотные спектры средней координаты, проведено сравнение с частотами перехода между состояниями стационарной задачи. Показано влияние высоковозбужденных состояний на туннелирование, выражающееся в высокочастотной модуляции низкочастотного перехода волнового пакета из одного крайнего положения в другое и обратно. Установлена зависимость этого перехода от потенциала связи, выражающееся в уменьшении частоты туннелирования при увеличении параметра связи.

Исследованы связанные квантовые осцилляторы Дуффинга—двухъямный и одноямный. Переход от гармонического осциллятора к одноямному осциллятору Дуффинга, потенциал которого имеет слагаемое, пропорциональное четвертой степени координаты, приводит к качественным изменениям в системе. При разных параметра связи изучены частотные спектры и взаимное влияние осцилляторов друг на друга.

Разработана модель квантового двумерного двухъямного осциллятора которая является обобщением классической модели двумерного двухъямного осциллятора Дуффинга. Предложенная модель может рассматриваться как квантовая система с четырьмя стабильными состояниями. Изучены режимы колебаний волнового пакета в данной системе, зависимость времени перехода из одного экстремального положения в другое от начальных условий и величины связи.

Для двумерного анизотропного осциллятора (или двух связанных одномерных неидентичных осцилляторов) проведено исследование влияния шума вдоль одной из координат на связанные колебания. Частотные спектры являются широкополосными. При относительно слабом шуме в частотных спектрах имеется много совпадающих частот, и происходит передача сигнала из одной степени свободы в другую. При увеличении шума характер процесса изменяется, спектр частот сильно обогащается. Колебания средних координат уменьшаются по амплитуде относительно нулевых значений.

Практическая значимость. Теоретические исследования квантовых двумерных осцилляторов, проведенные методом компьютерного моделирования, визуализация расчетов формируют научные представления и базу знаний, необходимых в разработках квантовых приборов и компьютеров, в наноэлектронике, физике конденсированного состояния и других областях науки. Практически значимыми являются динамическая модель квантового волновода с туннельно связанными каналами и квантовый двумерный осциллятор Дуффинга как обобщение классического, в том числе наномеханического, осциллятора Дуффинга. Апробированный программный продукт может быть использован для последующих исследований динамики микрочастицы в квантовых системах с полиномиальными потенциалами, а также в учебных целях.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Частотные спектры квантового анизотропного осциллятора с квадратичным потенциалом и связью при гауссовом начальном условии или импульсном возбуждении одной из степеней свободы.

2. Режимы регулярных колебаний квантового осциллятора Паллена- Эдмондса при разных парциальных частотах.

3. Передача спектральной компоненты на частоте туннелирования от двухъямного осциллятора к гармоническому при слабой связи между степенями свободы.

4. Квантовая модель классического двумерного двухъямного осциллятора Дуффинга и численный анализ её свойств при одинаковых параметрах и анизотропии.

Апробация работы Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: 1. XIV, XV Всероссийские конференции «Фундаментальные исследования и инновации в национальных исследовательских университетах» (Санкт-Петербург, 2010, 2011).
2. 9-я Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2010)» (Саратов, 2010).
3. Международные конференции «Лазеры. Измерения. Информация.» (Санкт-Петербург, 2010, 2011).
4. XVIII, XIX Международные семинары «Нелинейные явления в сложных системах» (Беларусь, г. Минск, 2011, 2012).
5. Российско-белорусский семинар «Нелинейные явления в сложных системах» (Санкт-Петербург, 2011)
6. Семинары кафедры теоретической физики СПбГПУ.

Публикации. По результатам исследований, вошедших в диссертацию, опубликовано 12 научных работ. Из них 5 статей в журналах из списка ВАК, 1 тезис в электронном архиве, 4 тезиса и 2 статьи в сборниках трудов конференций.

Личный вклад автора Соискатель выполнил все численные расчеты, принимал участие в анализе результатов, а также в постановке ряда задач. Критически изучил методы численного решения квантовых динамических уравнений и адаптировал их реализацию для использования на компьютерах общего назначения.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 143 страницы, включая 81 рисунок. Библиография содержит 107 наименований на 12 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и задачи обсуждается научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава является обзорной. Она состоит из 4 разделов, в которых представлено описание текущего состояния исследований в научных областях, к которым относится диссертация. Квантовые волноводы исследуются уже достаточно давно. Наряду с теоретическим описанием существующих режимов колебаний в них, имеется значительное количество экспериментальных исследований ([13], [14]). Несмотря на это, теоретические модели все еще в подавляющем большинстве случаев являются стационарными. В разделе, посвященном квантовым двумерным осцилляторам описываются наиболее популярные среди исследователей потенциалы (гармонический, Паллена-Эдмондса, Хенона-Хейлеса, Морса) и физические системы, моделируемые данными потенциалами: [15]. Также здесь упомянуты основные методы анализа решений уравнения Шредингера (численные и аналитические) [16] для исследуемых потенциалов: анализ временных реализаций, соотношения неопределенностей, частотных спектров, автокоррелятора([17]), расстояния в фазовом пространстве. В третьем разделе основное внимание уделяется процессу туннелирования в двухъямном потенциале, который описывается в двух видах: как непрерывная функция координат, так и как прямоугольный барьер в системе с бесконечными стенками. В работах представлены решения для собственных энергий и функций указанных систем, условия возникновения резонансов в случае несимметричного потенциала,а также получены оценки времен перехода из одной ямы в другую. Особое внимание уделено методу квантовых траекторий Бома.

В четвертом разделе рассматриваются работы, посвященные осцилляторам Дуффинга с потенциалом в виде: $U(x) = ax^4 + bx^2$, где параметры a и b могут иметь как одинаковые, так и разные знаки. Из всего множества исследований данного типа осцилляторов приведены базовые классические работы, описывающие основные режимы колебаний в таких осцилляторах, хаотизацию, бифуркации, поведение системы при внешнем периодическом воздействии, а также ряд работ, изучающих квантовый одномерный осциллятор Дуффинга. В этих исследованиях квантовые двумерные осцилляторы Дуффинга не обсуждаются.

Во второй главе как тестовый пример анализируется анизотропный гармонический осциллятор со связью между степенями свободы, пропорциональной произведению координат. Для начального условия в виде гауссова пакета вычисляются временные реализации средних координат и их частотные спектры, проводится сравнение с аналогичной классической задачей и устанавливается квантово-классическое соответствие. Если осциллятор находится в основном состоянии, для которого средние значения координат и компонент скорости пакета равны нулю, и возбуждается в некоторый момент времени ($t = 50$) коротким импульсом вдоль оси x, то вдоль оси y возбуждаются колебания на частоте колебаний вдоль оси x; передача спектра является невзаимной (Рисунки 1, 2).

Двумерная квантовая система, в которой распространение волнового пакета происходит

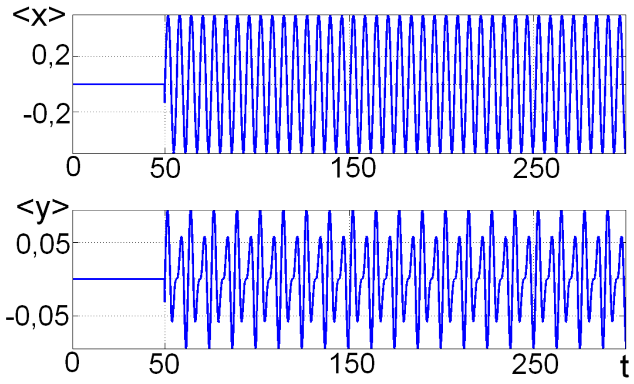

Рис. 1. Временные реализации средних координат в анизотропном гармоническом осцилляторе под воздействием импульса.

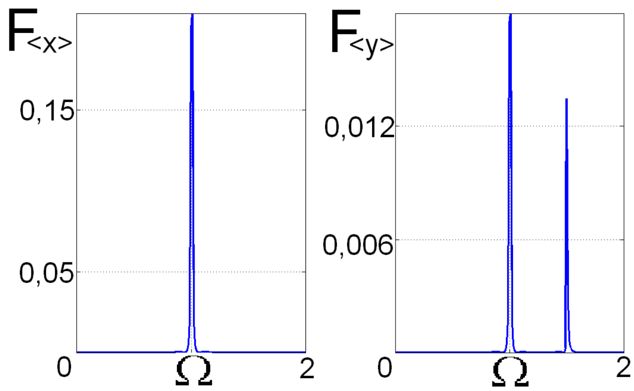

Рис. 2. Фурье-спектры средних координат в анизотропном гармоническом осцилляторе под воздействием импульса.

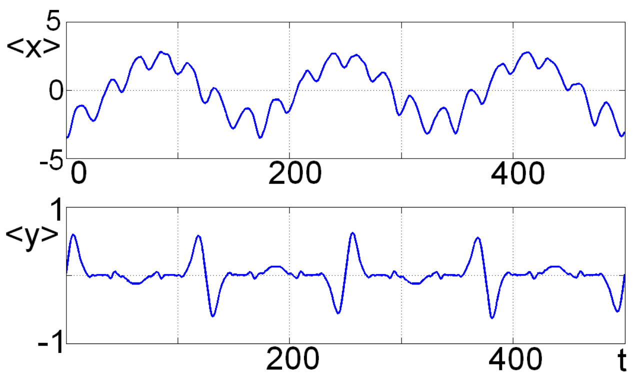

Рис. 3. Временные зависимости колебаний средних координат пакета в квантовом волноводе.

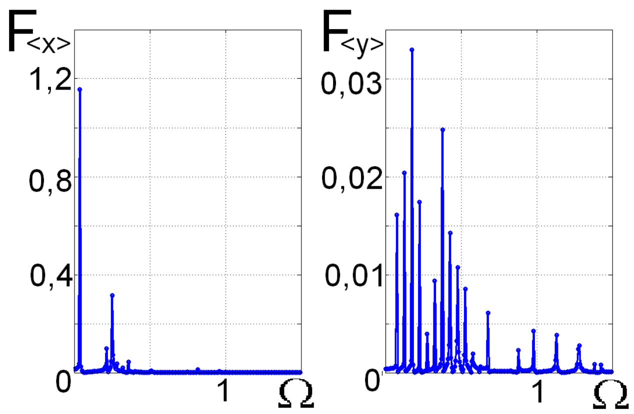

Рис. 4. Фурье-спектры временных зависимостей колебаний средних координат пакета в квантовом волноводе.

вдоль одной координаты под влиянием двухъямного полиномиального потенциала, а вдоль другой–является свободным вплоть до столкновения со стенками, рассматривается как альтернативный вариант известной модели волновода на основе $GaAs/GaAlAs$ (в данном случае в качестве массы в уравнение Шредингера входит m^*–эффективная масса электрона в полупроводнике) с прямоугольным профилем барьера и каналов, которая изучалась лишь в рамках стационарного уравнения Шредингера ([18]). В диссертации для потенциала вида $U(x,y) = ax^4 + bx^2$, $a = 0{,}002$, $b = -0{,}05$ и начального гауссова пакета проведено численное интегрирование нестационарного двумерного уравнения Шредингера, результаты для временных реализаций средних координат $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ и их частотных спектров даны на Рисунках 3, 4. В процессе эволюции средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии были переменными величинами, а их сумма– сохранялась и была меньше высоты барьера. В частотных спектрах колебаний вдоль координаты x присутствует частота, соответствующая перемещению пакета из одной ямы двухъямного потенциала в другую. Полученное численное значение данной частоты совпадает с частотой перехода из первого возбужденного состояния в основное и характеризует частоту туннелирования.

В следующем разделе поведение такой системы изучалось под воздействием однократного импульсного воздействия. Показано, что спектр возбуждаемых колебаний сильно зависит от величины возбуждающего воздействия. Результаты данного раздела были опубликованы в работах и представлены на конференциях: [1], [6], [7], [8], [9].

Значительное внимание во второй главе уделено исследованию осциллятора Паллена-Эдмондса с потенциалом: $U(x,y) = \frac{1}{2}(\Omega_x^2 x^2 + \Omega_y^2 y^2) + \gamma x^2 y^2$. В литературе данный потенциал изучается в основном в связи с исследованиями сложной динамики, когда в классическом пределе есть хаос. В данной работе, однако, рассматриваются регулярные колебания волнового пакета в данном потенциале. В главе описаны типы передачи спектров колебаний из одной степени свободы в другую при варьируемых величинах параметра связи γ и разных начальных средних значениях координат и скорости волнового пакета ([10]).

В третьей главе обсуждаются квантовые осцилляторы Дуффинга. В первом разделе главы приведены примеры физических систем, которые приближенно могут описываться исследуемыми гамильтонианами. Подробно рассмотрены двухъямная ловушка для ультрахолодных атомов, описанная в работе [19] и наномеханический осциллятор, подробно исследованный в работе [20].

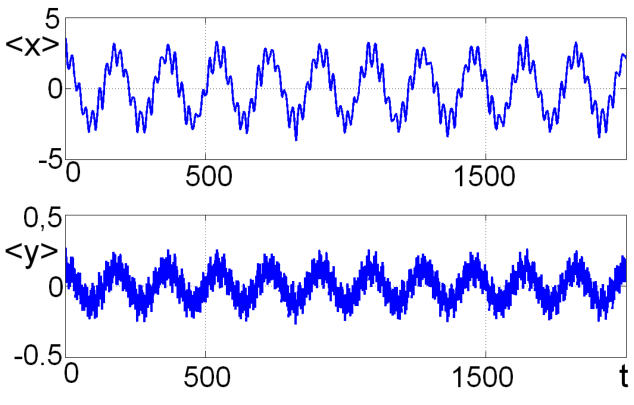

Рис. 5. Средние координаты как функции времени.

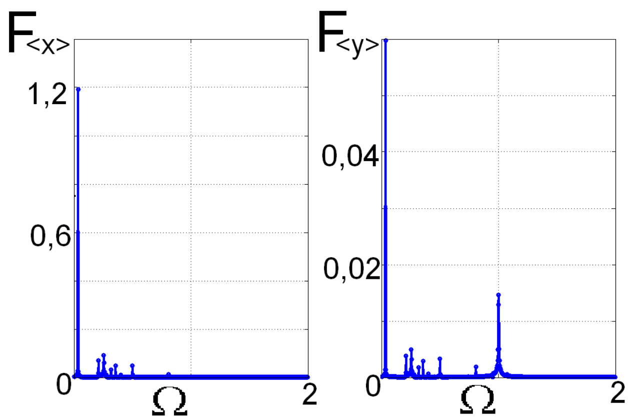

Рис. 6. Частотные спектры средних координат.

Далее в главе обсуждаются квантовые системы с двумя степенями свободы, в которых силовое поле, воздействующее на волновой пакет квазичастицы, обусловлено потенциалом,

состоящим из трех полиномиальных слагаемых: $U_\Sigma = U_1(x)+U_2(y)+U_3(x,y)$, где $U_1(x)$ есть двухъямный потенциал, $U_2(y)$—квадратичный потенциал и $U_3(x,y)$—потенциал связи. Эти потенциалы ограничены стенками внешней ямы в точках $\pm x_\alpha, \pm y_\alpha$. Если используются формулы $U_1(x) = ax^4+bx^2+c$, $U_2(y) = \frac{1}{2}\Omega_y^2 y^2$,
$U_3(x,y) = \gamma xy$, то мы имеем связанные осцилляторы: двухъямный осциллятор Дуффинга и гармонический. Для начального условия в виде гауссова пакета и слабой связи типичные решения представлены на Рисунках 5, 6. Колебания средней коордиаты $\langle x\rangle$ характеризуются двумя резко выраженными временными масштабами: крупным и мелким. Крупномасштабные колебания характеризуются наибольшей амплитудой Фурье-компоненты и связаны с туннелированием. Их частота обусловлена переходом из первого возбужденного состояния в основное. Мелкомасштабные колебания обусловлены переходом из второго и следующих возбужденных состояний в ниже лежащие. Уровни энергии первых двух состояний ниже высоты барьера. Расчеты автокорреляторов и фигур Лиссажу подтверждают квазипериодический характер колебаний. Спектр колебаний $\langle y\rangle$ содержит характеристическую частоту $\Omega \approx 1$, частоту туннелирования как модулирующую и ряд других частот, наведенных колебаниями вдоль оси x. Для данного типа двумерного осциллятора исследована передача спектральных компонент из

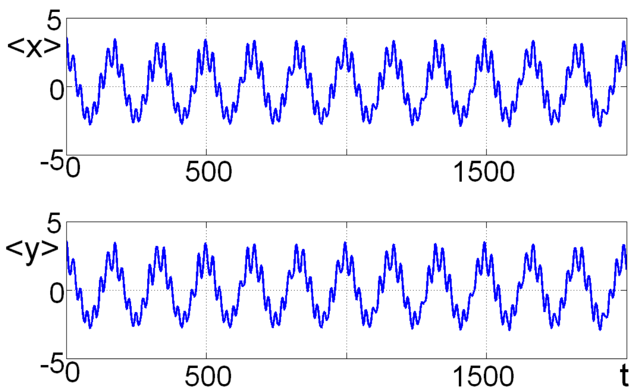

Рис. 7. Временные реализации средних координат для свободного изотропного осциллятора Дуффинга.

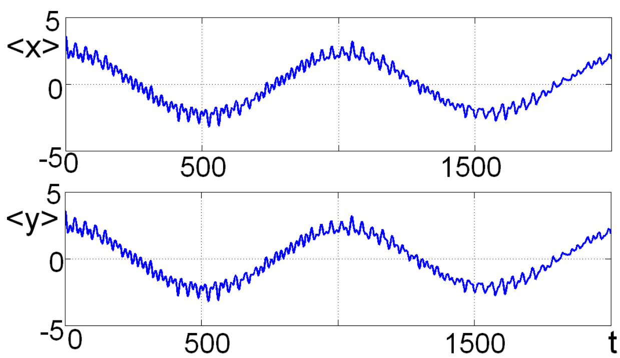

Рис. 8. Временные реализации средних координат для осциллятора Дуффинга со связью.

одной колебательной степени свободы в другую при различных величинах параметра связи γ; показано сохранение взаимной интенсивности Фурье-амплитуд колебаний в двухъямном потенциале переданных под воздействием связи в степень свободы, связанную с гармоническим осциллятором. Установлен характер изменения частоты туннелирования в двухъямном потенциале при вариации величины параметра связи. По материалам данных исследований были опубликованы работы [2], [3], [11], [12]. Следующим шагом было исследование квантового дву-

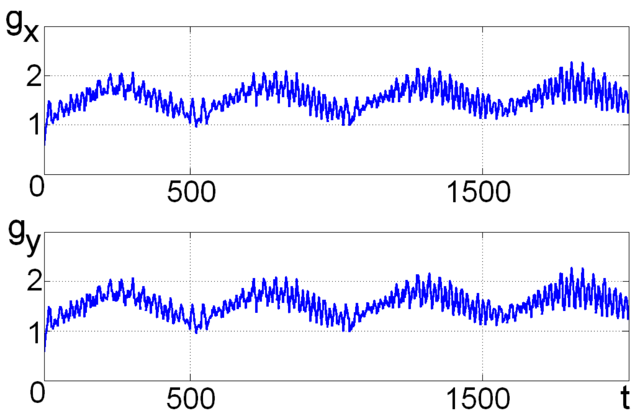

Рис. 9. Временные реализации произведений неопределенностей для осциллятора Дуффинга со связью.

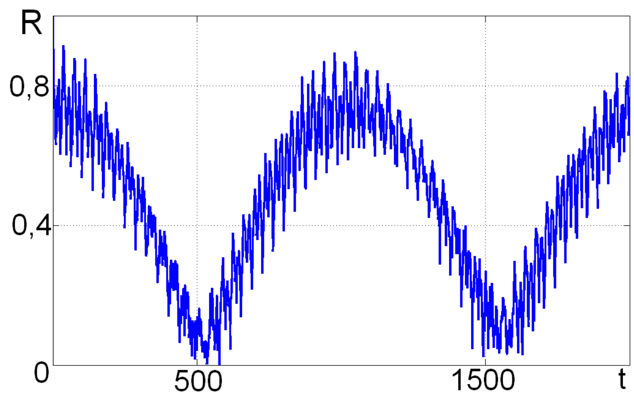

Рис. 10. Временная реализация автокоррелятора для осциллятора Дуффинга со связью.

мерного двухъямного осциллятора Дуффинга–как обобщение соответствующего классического осциллятора. Потенциал описывается следующими выражениями: $U_1(x) = a_x x^4 + b_x x^2 + c$, $U_2(y) = a_y y^4 + b_y y^2 + c$, $U_3(x,y) = \gamma xy$.

Для оценки влияния квантовых эффектов на процесс переноса вероятностной жидкости из одной ямы в другую было выполнено численное решение классической задачи движения материальной точки в двумерном двухъямном потенциале Дуффинга. Параметры потенциала и начальные условия были выбраны совпадающими с квантовой задачей. Расчеты показывают отсутствие перехода частицы из одной ямы в другую в классическом случае, что говорит о существенном влиянии туннелирования на колебания квантового волнового пакета.

При решении квантовой задачи рассматривались как изотропный, так и анизотропный осцилляторы. Решение стационарной задачи говорит о малом изменении структуры энергетического спектра системы при наличии малой связи между степенями свободы по сравнению с системой свободных осцилляторов Дуффинга. Тем не менее, в обоих случаях установлено скачкообразное уменьшение частоты туннелирования при включении связи. Временные реализации средних координат и произведений неопределенностей для свободных и связанных изотроных осцилляторов Дуффинга представлены на Рисунках 7,8,9, 10. Характерной особенностью решения является осцилляция произведений неопределенностей на уровне заметно выше минимального (0,5 в безразмерных единицах). Такое поведение существенно отличается от случая связанных гармонического и двухъямного осцилляторов, рассмотренных ранее в данной главе.

В случае анизотропного двумерного двухъямного осциллятора расчеты свидетельствуют о стремлении системы к синхронизации колебаний по обеим степеням свободы даже под воздействием малой (в смысле смещения энергетических уровней) связи, что сильно отличается от рассмотренного в предыдущей главе поведения осциллятора Паллена-Эдмондса. Результаты исследования данных типов потенциала были представлены автором в статьях [4], [5].

В четвертой главе рассмотрены методы численного решения стационарных и нестационарных задач, которые использовались в диссертации при проведении исследований. Для решения первых применялся метод конечных элементов, вторых–метод чередующихся направлений (модификация метода Кранка-Никольсона). Так же подробно обсуждается вопрос устойчивости и точности метода чередующихся направлений. В главе также рассматриваются методы контроля точности решения, обусловленные физическими соображениями: сохранение интеграла от квадрата модуля волновой функции,

$$I = \int\int \Psi(x,y)^* \cdot \Psi(x,y)dxdy, \tag{1}$$

а также проверка обратимости решения уравнения Шредингера при изменении знака перед переменной времени. Сохранение интеграла вероятности проверялась для всех вычислений в диссертации. На каждом шаге интегрирования вычислялась величина 1. Характерная зависимость данной величины от времени представлена на Рисунке 11. Обратимость решения

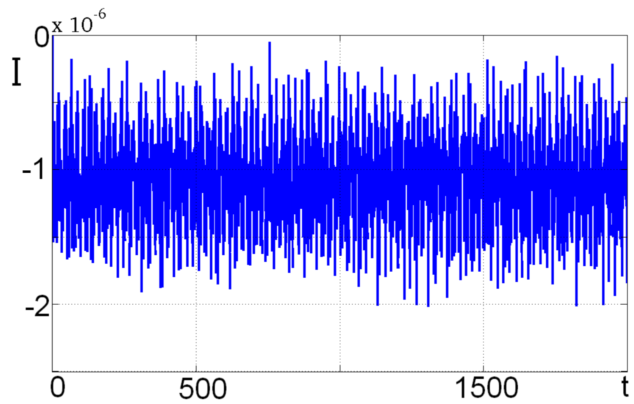

Рис. 11. Отклонение интеграла вероятности от значения 1 на каждом шаге интегрирования.

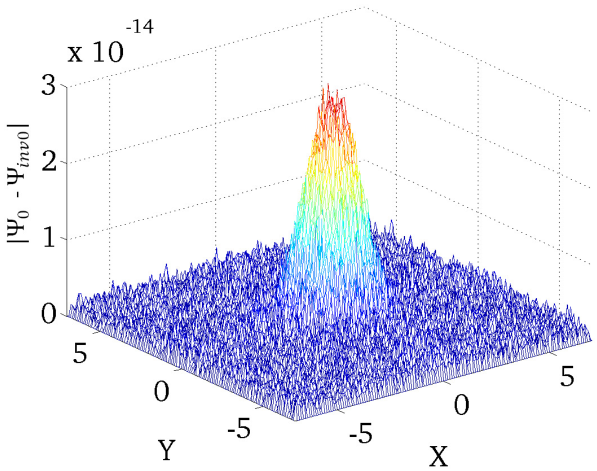

Рис. 12. Отличие нулевых начальных условий уравнения Шредингера от результата инверсии времени.

уравнения во времени исследовалась следующим образом: решается уравнение Шредингера $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi + U\Psi$ с нулевыми граничными условиями и начальными условиями ви-

да $\Psi(x,y,t=0)=\Psi_0(x,y)$. Промежуток интегрирования: $t\in[0,T]$. Обозначим волновую функцию, рассчитанную на последнем шаге интегрирования как
$\Psi(x,y,t=T)=\Psi_T(x,y)$. Далее будем решать уравнение $i\frac{\partial\Psi}{\partial(-t)}=-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi+U\Psi$ с нулевыми условиями $\Psi(x,y,t=0)=\Psi_T(x,y)$, теми же граничными условиями и на том же промежутке интегрирования. Пусть на последнем шаге интегрирования мы получили функцию Ψ_{invT}. Исходя из обратимости уравнения Шредингера, ожидаем получить: $\Psi_0(x,y)=\Psi_{invT}(x,y)$. Характерный график модуля разности указанных функций представлен на Рисунке 12. Очевидно, что при используемых в вычислениях пространственных размеров области вычислений и шага по координате невозможно получить точность 10^{-14}. График модуля разности $\Psi_0(x,y)-\Psi_{invT}(x,y)$ нужно понимать как то, что отклонение от ожидаемого значения существенно ниже погрешности численного счета.

Данные проверки были выполнены при проведении интегрирования исследуемых моделей. Они показали, что полученные решения вполне соответствуют физическим принципам, лежащим в основе изучаемой задачи.

Результаты и выводы Итогом проведенных исследований является развитие теории квантовых осцилляторов с двумя степенями свободы и связью между ними. Фундаментальное значение в теории и приложениях имеют осцилляторы, которые в классическом пределе являются нелинейными. В рамках нестационарного двумерного уравнения Шредингера и существующих методов компьютерного моделирования изучены различные многочастотные режимы колебаний, которые могут быть классифицированы как сложные нехаотические процессы. Установлено влияние потенциала связи на частотные спектры и их передачу из одной степени свободы в другую, что можно рассматривать как способ управления сигналами. Сформулирована квантовая модель двумерного двухъямного осциллятора Дуффинга. Проведены качественные сравнения свойств и частотных спектров разных осцилляторов. Предложены методы контроля качества решения при численном интегрировании уравнения Шредингера.

Список публикаций в журналах, рекомендуемых ВАК

[1] Санин А., Семенов Е. Свободные и связанные колебания электрона в двумерной квантовой системе с распределенным потенциалом и лазерным импульсом // Научно-технические ведомости СПбГПУ, физико-математические науки. 2010. Т. 3, № 104. С. 156–163.

[2] Sanin A., Semyonov E. Two-dimensional oscillations in a quantum well with polynomial potential // Nonlinear phenomena in complex systems. 2011. Vol. 14, no. 6. P. 411–416.

[3] Санин А., Семенов Е. Квантовые связанные осцилляторы в двумерной системе с полино-

миальным потенциалом // Электромагнитные волны и электронные системы. 2012. Т. 17, № 8. С. 8–13.

[4] Sanin A., Semyonov E. Quantum Duffing oscillators // Nonlinear phenomena in complex systems. 2012. Vol. 15, no. 3. P. 274–282.

[5] Санин А., Семенов Е. Свободные и связанные квантовые осцилляторы Дуффинга, влияние шума // Научно-технические ведомости СПбГПУ, физико-математические науки. 2012. Т. 3, № 153. С. 171–181.

Публикации в других изданиях

[6] Санин А., Семенов Е. Динамика электрона в квантовой системе с двумерным квадратичным потенциалом и сверхкороткими лазерными импульсами // Труды конференции "Лазеры. Измерения. Информация-2010". 2010. Т. 2. С. 6–16.

[7] Санин А., Семенов Е. Динамика электрона в квантовой системе с двумерным квадратичным потенциалом и сверхкороткими лазерными импульсами // Труды конференции "Лазеры. Измерения. Информация.". 2010. С. 104.

[8] Санин А., Семенов Е. Двумерный пространственно-ограниченный квантовый осциллятор // Фундаментальные исследования и инновации в национальных исследовательских университетах. Материалы XIV Всероссийской конференции. 2010. Т. 1. С. 38–39.

[9] Санин А., Семенов Е. Туннелирование и колебания электрона в квантовой системе с двумерным полиномиальным потенциалом // Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах. Материалы XV Всероссийской конференции. 2011. Т. 1. С. 41–42.

[10] Санин А., Семенов Е. Динамика квантового пакета волн в системе с потенциалом Паллена-Эдмондса // Материалы X Международной школы «ХАОС-2010». 2010. С. 72.

[11] Санин А., Семенов Е. Квантовые связанные осцилляторы в двумерной системе // Доклады конференции "Лазеры. Измерения. Информация.". 2011. С. 245–255.

[12] Санин А., Семенов Е. Квантовые связанные осцилляторы в двумерной системе // Труды конференции "Лазеры. Измерения. Информация.". 2011. С. 114–115.

Цитированная литература

[13] Bagraev N., Gehlhoff W., Ivanov V. et al. Charge carrier interference in modulated quantum wires // Semiconductors. 2000. Vol. 34, no. 4. P. 462–472.

[14] Bagraev N., Ivanov V., Klyachkin L. et al. Ballistic conductance of a quantum wire at finite temperatures // Semiconductors. 2000. Vol. 34, no. 6. P. 712–716.

[15] Chung N., Chew L. Two-step approach to the dynamics of coupled anharmonic oscillators // Phys.Rev.A. 2009. Vol. 80. P. 012103.

[16] Belov V., Dobrokhotov S., Tudorovskii T. Asymptotic Solutions of Nonrelativistic Equations of Quantum Mechanics in Curved Nanotubes: I. Reduction to Spatially One-Dimensional Equations // Theoretical and Mathematical Physics. 2004. Vol. 141, no. 2. P. 267–303.

[17] Елютин П. Проблема квантового хаоса // УФН. 1988. Т. 155, № 3. С. 398–437.

[18] Wang J.-Q., Yuan S.-Q., Gu B.-Y., Yang G.-Z. Guided electron waves in coupled deep quantum wells // Phys.Rev. B. 1991. Vol. 44, no. 24. P. 13618–13625.

[19] Peano V., Thorwart M., Kasper A., Egger R. Nanoscale atomic waveguides with suspended carbon nanotubes // Appl.Phys.B. 2005. Vol. 81. P. 1075–1080.

[20] Kolkiran A., Agarwal G. Amplitude noise reduction in a nano-mechanical oscillator // Mathematical and Computational Applications. 2011. Vol. 16, no. 1. P. 290–300.