

На правах рукописи

АРТЕМЬЕВА
Мария Станиславовна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТОКОПРОВОДЯЩИХ
ТЕЛ В БЫСТРОПЕРЕМЕННОМ И ПОСТОЯННОМ
МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2002

Работа выполнена на кафедре механики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета при поддержке гранта РФФИ 01-01-00074.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор Скубов Дмитрий Юльевич

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,
профессор Блехман Илья Израилевич

доктор физико-математических наук
профессор Ветюков Михаил Михайлович

Ведущая организация

НИИ Математики и механики имени
ак. В.И. Смирнова при СПбГУ

Защита состоится в _____ часов на заседании диссертационного совета Д212.229.13 в Санкт-Петербургском государственном техническом университете по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул.29, к. _____, ауд. _____.

Автореферат разослан

“ _____ ” _____ 20__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д212.229.13 д.б.н.

А.В. Зинковский

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Проблема изучения движения твердых проводящих тел в магнитном поле издавна находится в центре внимания многих ученых механиков. Эту проблему условно можно разделить на две. Первая из них связана с исследованием динамики электромеханических систем с линейными токами, образующими электрическую цепь, что характерно для таких технических систем как электрические приборы и машины, некоторые типы магнитоэлектрических гасителей и т.д. Задачи второго типа возникают при исследовании движения объемных проводящих тел во внешнем магнитном поле. В этом случае распределение наведенных вихревых токов заранее неизвестно и взаимосвязано с движением. Таким задачам также отвечают многочисленные технические приложения: гироскопы, магнитные подвесы и подшипники, устройства транспортирования и ориентировки деталей, а также некоторые виды электрических машин, например, униполярные и др.

Возможны различные подходы к исследованию электромеханических систем с наведенными распределенными токами. Первый связан с совместным решением граничной электродинамической задачи и уравнений механики. Второй подход основан на дискретном описании электромагнитного поля путем представления распределенных вихревых токов в виде разложения по некоторой полной системе соленоидальных функций с коэффициентами, зависящими от времени. Такая процедура, по существу, сводит исходную задачу к изучению электромеханических систем со счетным набором линейных контурных токов.

Основные трудности, возникающие при исследовании динамики электромеханических систем, связаны с высокой размерностью, большим числом варьируемых параметров и существенной нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих математические модели соответствующих физических установок. Кроме того, при непосредственном анализе электромеханической системы путем ее численного интегрирования возникают определенные вычислительные трудности, связанные с так называемой проблемой «жесткости». Решения исходных уравнений для таких систем содержат либо быстро осциллирующие функции, либо описывают переходные процессы с сильно различающимися скоростями.

Эффективным способом решения указанных проблем являются методы асимптотического разделения движений, позволяющие значительно упростить исходные математические модели, выделить существенные комбинации параметров и т.д. Такое упрощение во многих случаях дает возможность проведения качественного анализа, благодаря которому можно предсказать поведение отдельных электромеханических систем или целого их класса при различных соотношениях исходных параметров.

Задачам устойчивости упругих токонесущих твердых тел в постоянном внешнем магнитном поле к настоящему времени посвящено сравнительно мало работ. В то же время в связи с разработкой новой электрофизической техники

такие вопросы становятся все более актуальными. Задачи устойчивости возникают, например, при проектировании сильноточных соленоидальных катушек, взаимодействия шин высокого напряжения и т.д.

Определенный интерес к задачам магнитоупругости связан также с идеей создания в космическом пространстве саморазворачивающихся каркасных конструкций, которые приобретают жесткость за счет пондеромоторного взаимодействия их составляющих при пропускании электрического тока.

Цель работы

Цель работы состоит в создании физически адекватных асимптотически упрощенных математических моделей некоторых электромеханических систем контурного типа во внешнем магнитном поле и проведении качественного или численно-качественного исследования их динамики во всем многообразии технически допустимых параметров.

Основные задачи работы

1. Создание асимптотически упрощенных уравнений динамики систем маятникового типа в быстропеременном магнитном поле и качественное исследование их движений на основе полученных упрощенных уравнений
2. Обоснование возможности создания пассивного электромагнитного подвеса с использованием тока высокой частоты и исследование движений подвеса с одной степенью свободы; доказательство возможности устойчивой левитации полностью свободного проводящего тела, запитанного током высокой частоты, в быстропеременном внешнем магнитном поле.
3. Исследование равновесия упругого кругового кольца с током в неоднородном осесимметричном магнитном поле; определение границ потери устойчивости круговой конфигурации и форм потери устойчивости при вариации параметров магнитного поля.

Научная новизна работы

Математическому моделированию движений проводящих твердых тел в магнитном поле посвящено значительное число работ, но большинство из них связано с совместным решением краевой электродинамической и механической задач. Работ же, в которых проводящие тела заменяются системой контуров с линейными токами, сравнительно мало. Поэтому исследованные в диссертационной работе задачи, как по постановке, так и по способу решения и полученному результату являются новыми.

Достоверность результатов

Достоверность результатов обеспечивается использованием в работе классических асимптотических методов исследования динамики нелинейных систем, а также сравнением результатов, полученных путем непосредственного численного анализа исходных систем и качественного анализа упрощенных.

Практическая ценность

Практическая ценность работы заключается в теоретическом обосновании возможности создания нового типа пассивного магнитного подвеса, принцип действия которого основан на обеспечении устойчивости равновесия проводящего контура, запитанного током высокой частоты в быстропеременном магнитном

поле. Положением равновесия такого типа подвеса можно управлять, изменяя величину питающего напряжения.

Методы исследования

Основными методами решения поставленных задач являются методы теории нелинейных колебаний, в частности, элементы качественной теории динамических систем и асимптотические методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, методы теории устойчивости и ветвления решений краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в сочетании с прямыми методами численного моделирования изучаемых систем.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Всероссийских и международных конференциях: «Nonlinear oscillations in mechanical systems» (Репино, 1999), «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 1999), «Actual problems in mechanics» (Репино, 2001), «Восьмой всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике» (Пермь, 2001) и «Actual problems in mechanics» (Репино, 2002), «Второй международный конгресс «Нелинейный динамический анализ»» (Москва, 2002), «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2002), а также на семинарах кафедр: «Механика и процессы управления» СПбГТУ, «Теоретическая механика» СПбГУ и в Институте проблем машиноведения РАН.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста и заключения. Она содержит 80 страниц текста и иллюстрирована 27 рисунками. Список литературы включает 31 наименование.

Публикации

По теме диссертации опубликовано семь работ.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение к диссертации содержит общую характеристику изучаемой проблемы, обзор посвященной ей литературы, а также, краткое содержание самой работы.

Первая глава диссертации посвящена изучению динамики маятниковых систем в быстропеременном магнитном поле. Эта задача возникла как попытка объяснения экспериментов М. Бетено и Я.Б. Дубошинского, описанных в [1], в которых наблюдались стационарные колебания железного шарика, подвешенного на нити над торцом соленоида с переменным током. В литературе приводятся различные математические модели исследования этого эффекта, но все они основаны на введении эвристических формул либо для силы взаимодействия, либо для взаимной индукции шарика и соленоида.

Факт возможности нескольких положений равновесия проводящего твердого тела, имеющего неподвижную точку, в быстропеременном магнитном поле был доказан в общем виде К.Ш. Ходжаевым [2]. В диссертационной работе проводится исследование некоторых частных задач такого рода. Используя метод усреднения

для систем маятникового типа, удалось построить существенно более простую модель, допускающую полное качественное исследование движений.

В качестве простейшей модели был рассмотрен маятник, содержащий один проводящий контур (рис.1),

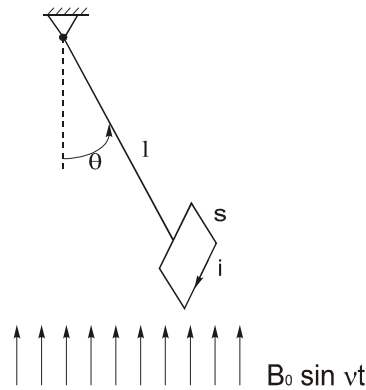


Рис. 1

находящийся в однородном переменном магнитном поле, частота которого значительно выше собственной частоты его малых свободных колебаний. Исследуются только плоские движения маятника. Уравнения Лагранжа-Максвелла в этом случае имеют вид:

$$I\ddot{\theta} - B_0 S i \sin \nu t \cos \theta + mgl \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$L\dot{i} + B_0 S \dot{\theta} \sin \nu t \cos \theta + B_0 S \nu \cos \nu t \sin \theta + Ri = 0$$

здесь θ - угол отклонения маятника от нижнего положения, i - ток в контуре маятника, L - коэффициент самоиндукции контура, S - площадь контура, m - масса маятника, l - длина подвеса, B_0 - амплитуда индукции внешнего магнитного поля, ν - частота изменения поля.

После введения малого параметра, как отношения частоты свободных колебаний маятника к частоте магнитного поля: $\varepsilon^2 = (mgl)/I\nu^2$, и перехода к быстрому времени $\tau = \nu t$, уравнения (1) могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\theta'' - \varepsilon^2 \gamma i \sin \tau \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$i' + \theta' \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta + ri = 0, \quad ()' = \frac{d}{d\tau},$$

здесь γ - параметр, характеризующий соотношение между величиной индукции внешнего магнитного поля и весом маятника, r - отношение активного сопротивления контура к его индуктивному сопротивлению.

Для того чтобы найти медленные движения исследуемой системы (с частотой, сравнимой с частотой свободных колебаний маятника) перепишем (2) в виде:

$$\theta' = \varepsilon \omega$$

$$\omega' = \varepsilon \gamma i \sin \tau \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \quad (3)$$

$$i' + \theta' \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta + ri = 0$$

Эта система квазилинейная с одной не критической быстрой переменной. Как показано в [2], первое приближение асимптотического метода для подобного рода уравнений описывает консервативную систему. Поэтому для нахождения

качественно определенных движений необходимо построение второго приближения. Решение системы (3) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \varepsilon \theta_1(\theta_0, \omega_0, t) + \dots, & \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(\theta_0, \omega_0, t) + \dots, \\ i &= i_0(\theta_0, t) + \varepsilon i_1(\theta_0, \omega_0, t) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в уравнения (3), сохраняя в полученных уравнениях только члены порядка ε и затем, полагая в третьем уравнении (3) θ_0 и ω_0 постоянными, получим значение тока во втором приближении.

$$i_1 = -\frac{\sin \theta_0}{1+r^2} (\sin \tau + r \cos \tau) + \varepsilon \frac{\omega_0 r \cos \theta_0}{(1+r^2)^2} ((1-r^2) \sin \tau + 2r \cos \tau) \quad (5)$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения системы (3), и усредняя их по времени, получим автономное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее медленные движения маятника:

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(n - \alpha \cos^2 \theta)\dot{\theta} + (\beta \cos \theta + 1)\sin \theta = 0 \quad (6)$$

Это уравнение записано в медленном времени t , кроме того, здесь введено внешнее трение с коэффициентом n ; $\alpha = \frac{\gamma r(1-r^2)}{2(1+r^2)^2}$, $\beta = \frac{\gamma}{2(1+r^2)}$.

Равновесные состояния определяются условием $(\beta \cos \theta + 1)\sin \theta = 0$. При $\beta > 1$ уравнение (6) допускает четыре положения равновесия. За счет осцилляции поля в системе возможно появление «отрицательного» трения, что ведет к возможности развития автоколебаний. Чтобы найти предельные циклы, соответствующие этим автоколебаниям, для уравнения (6) строится и исследуется функция последования. На рис.2 показаны параметрические границы устойчивости положений равновесия и существования предельных циклов. При большом внешнем трении верхнее и нижнее положения равновесия маятника устойчивы, при уменьшении трения из этих положений равновесия одновременно происходит мягкое рождение предельных циклов, отвечающих автоколебаниям (граница 1). При дальнейшем уменьшении трения сначала пропадает предельный цикл около верхнего положения равновесия (граница 2), а затем около нижнего – (граница 3) и все медленные движения маятника становятся неустойчивыми.

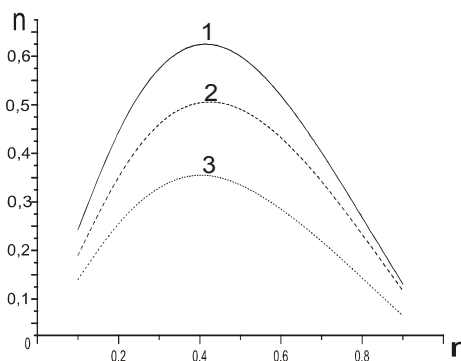


Рис. 2

Чтобы исследовать вращательные движения маятника, уравнения (2) переписываются относительно отклонения движения от вращения с постоянной угловой скоростью $\nu\Omega$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi} - \varepsilon^2 \gamma \sin \tau \cos(\psi + \Omega \tau) + \varepsilon^2 \sin(\psi + \Omega \tau) + \varepsilon^2 n(\psi + \Omega) &= 0 \\ i + (\psi + \Omega) \sin \tau \cos(\psi + \Omega \tau) + \cos \tau \sin(\psi + \Omega \tau) + ri &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

В результате показано, что исследуемая электромеханическая система допускает либо два (с одинаковыми частотами, но противоположными направлениями), либо четыре вращения (по два в каждую сторону) с угловыми скоростями меньшими частоты внешнего магнитного поля. На рис. 3 приведены параметрические границы существования различного числа вращений.

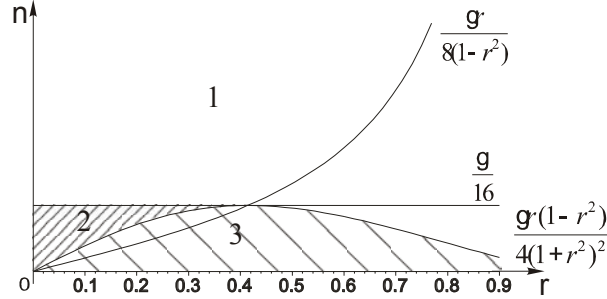


Рис. 3

При большом внешнем трении вращений в рассматриваемой маятниковой системе не существует (зона 1). При уменьшении трения возможно наличие четырех вращений. В этом случае вращения с большими угловыми скоростями оказываются устойчивыми, с меньшими скоростями – неустойчивыми (зона 2). При малом трении, когда медленные движения становятся неустойчивыми, в системе существуют только два устойчивых вращения с противоположными направлениями (зона 3), к которым асимптотически стремятся все движения маятника. Таким образом, в зависимости от соотношения параметров, все движения маятника сходятся либо к верхнему или нижнему положениям равновесия, либо к предельным циклам вокруг них, либо к вращению с угловой скоростью, не превосходящей частоты магнитного поля.

Далее был рассмотрен двухконтурный маятник. Предполагается, что контуры изолированы друг от друга, но имеют жесткое соединение. Они расположены в плоскостях, ортогональных плоскости колебаний, и перпендикулярны друг другу. Уравнение медленных движений маятника в случае разных контуров имеет вид:

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(n - \alpha_1 \cos^2 \theta - \alpha_2 \sin^2 \theta)\dot{\theta} + ((\beta_1 - \beta_2) \cos \theta + 1) \sin \theta = 0 \quad (8)$$

Параметры в этом уравнении определяются так же, как и ранее, с той лишь разницей, что индексы 1 и 2 означают принадлежность к разным контурам.

Уравнение (8) качественно соответствует уравнению (6). Следовательно, выводы, сделанные для одноконтурного маятника, оказываются справедливы и в отношении двухконтурного.

Иная ситуация возникает, если контуры маятника одинаковые. Такой маятник может служить грубой моделью проводящего шара. Усредненное уравнение движений симметричного маятника имеет вид

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(n - \alpha)\dot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad (9)$$

и является уравнением физического маятника. В подобной системе, ни при каких параметрах, автоколебаний не возникает. Однако эта система допускает вращения

с постоянными угловыми скоростями, меньшими значения частоты внешнего поля.

Более точная модель, основанная на исследовании уравнения колебаний проводящей сферы в высокочастотном магнитном поле, получена Ю.Г.Мартыненко [3].

$$\ddot{\theta} + \varepsilon n \dot{\theta} + \sin \theta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi \Omega^2}} \sin \nu t / \Omega \int_0^{t/\Omega} \frac{\sin(\theta(\tau) - \theta(t/\Omega)) \sin \nu \tau d\tau}{\sqrt{t/\Omega - \tau}} \quad (10)$$

здесь Ω - собственная частота малых колебаний шара.

Исследуя это уравнение при помощи функции Понтрягина, было доказано, что такая система, как и симметричный двухконтурный маятник, не допускает автоколебаний. То есть все ранее рассмотренные модели не могут объяснить эксперименты М. Бетено и Я.Б. Дубошинского.

Существенным отличием рассмотренных ранее примеров от указанных экспериментов является предполагаемая однородность внешнего магнитного поля. Если полагать, что внешнее поле неоднородно, то усредненное уравнение медленных движений маятника с двумя одинаковыми контурами приобретает вид:

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(n - \alpha(\Phi^2 + \Phi_\theta^2))\dot{\theta} + \beta\Phi\Phi_\theta + \sin \theta = 0 \quad (11)$$

Φ - функция изменения внешнего поля, Φ_θ - производная от Φ по углу отклонения маятника.

Из (11) следует, что количество положений равновесия и возможность возникновения автоколебаний целиком определяется характером изменения магнитного поля. В частности, автоколебания маятников в экспериментах Бетено и Дубошинского объясняются неоднородностью поля соленоида.

В качестве примера, иллюстрирующего этот вывод, в конце первой главы рассмотрено уравнение движения симметричного маятника в поле кольца с переменным током.

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению нового типа пассивного магнитного подвеса. В отличие от первой части работы, где основной интерес представляло дестабилизирующее действие электромагнитных сил, здесь изучается эффект стабилизации при помощи переменных электромагнитных воздействий.

В качестве простейшей модели подвеса в высокочастотном магнитном поле рассматривалась система, состоящая из двух одинаковых колец, одно из которых закреплено, а другое свободно. В закрепленном кольце задан переменный ток, а к свободному кольцу подведено напряжение той же частоты.

Если рассматриваемая система допускает движения только по вертикали (рис.4), то уравнения Лагранжа - Максвелла имеют вид:

$$m\ddot{y} - iI \sin \alpha \frac{dL_e}{dy} \pm mg = 0$$

$$Li + Ri + L_e I \omega \cos \alpha t + I_y \sin \alpha t \frac{dL_e}{dy} = U_s \sin \alpha t + U_c \cos \alpha t \quad (12)$$

Здесь y - расстояние между кольцами по вертикали, i - ток в свободном кольце, I , U_s и U_c - амплитуда заданных в кольцах тока и составляющих напряжений соответственно, L_e и L - коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции колец, ω - частота изменения тока и напряжения, R - активное сопротивление колец, m - масса подвешиваемого кольца. Знак «плюс» в первом уравнении соответствует случаю, когда свободное кольцо находится над закрепленным (ось y направлена вверх), а знак «минус» - случаю, когда свободное кольцо расположено снизу (ось y направлена вниз).

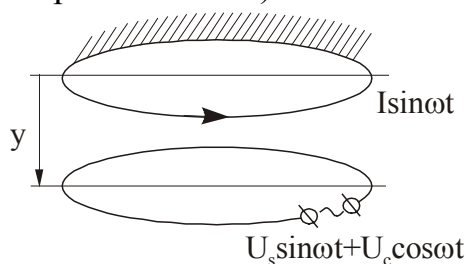


Рис. 4

Коэффициент взаимной индукции соосных одинаковых колец определяется выражением, содержащим полные эллиптические интегралы:

$$L_e = \frac{\mu_0 a}{k} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right], \quad k^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + y^2} \quad (13)$$

где a - радиус колец, y - расстояние между их центрами.

Вводя быстрое время $\tau = \omega t$, малый параметр $\varepsilon^2 = g/a\omega^2$ и применяя, асимптотическую процедуру к системе (12), можно получить среднюю электромагнитную силу, действующую на свободное кольцо:

$$P = \frac{\gamma}{2(1+r^2)} (U - L_e) \frac{dL_e}{dy}, \quad U = \frac{U_c}{L\omega I} + \frac{RU_s}{L^2\omega^2 I} \quad (14)$$

здесь γ - параметр, зависящий от величины подвешиваемой массы; U - параметр, характеризующий задаваемые ток и напряжение. Выражение (14) получено в первом приближении. Сила (14) имеет потенциал. Т.е. за счет переменных токов изменяется потенциальная энергия системы. Похожее явление известно для движений твердых тел с наложением высокочастотной вибрации.

На рис.5 приведены качественные зависимости электромагнитной силы от расстояния между кольцами при различных значениях параметра напряжения.

Точки пересечения этих графиков с прямой, параллельной оси y и отвечающей весу подвешенного кольца, соответствуют положениям равновесия. Если свободное кольцо находится над закрепленным, то в зависимости от значения параметра U либо положений равновесия не существует, либо есть одно равновесное состояние, которое всегда устойчиво. Если же свободное кольцо находится под закрепленным, то возможны три варианта: 1) может не существовать положений равновесия; 2) может существовать одно, всегда неустойчивое положение равновесия; 3) может существовать два равновесных состояния, при этом ближнее к фиксированному кольцу - устойчивое, дальнее - неустойчивое.

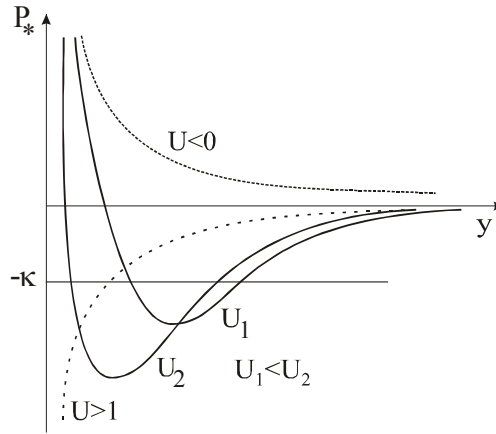


Рис. 5

Поскольку первое приближение по току описывает консервативную систему, то для того чтобы судить о реальной устойчивости положений равновесия необходимо получить второе приближение. Учет слагаемых второго порядка по ε показал, что, как и ранее, при исследовании движений маятника, электромагнитные силы вносят в механическую систему диссипацию только при $r > 1$, т.е. когда частота магнитного поля меньше величины обратной постоянной времени контура.

При дальнейшем исследовании был рассмотрен случай, когда движения подвешиваемого кольца ничем не ограничены.

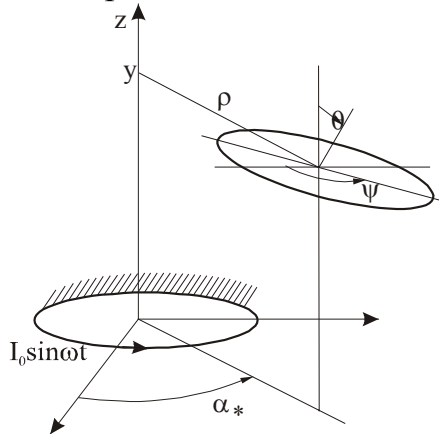


Рис. 6

В этом случае свободное кольцо имеет шесть степеней свободы (рис.6) и его движение описывается шестью координатами: y , ρ и α_* - характеризуют положение центра кольца, θ , ψ и φ - углы Эйлера, определяют его ориентацию.

Коэффициент взаимной индукции колец в этом случае принимает достаточно сложную форму. Оказывается, что он зависит только от четырех координат: y , ρ , θ , $\sigma = \alpha_* - \psi$. Две угловые переменные оказываются циклическими: φ - угол вращения кольца вокруг своей оси и ψ , поскольку взаимная индукция зависит только от разности $\alpha_* - \psi$.

$$L_e = \frac{\mu_o a}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k \rho_*^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] (\cos \theta + \rho (\sin \alpha \sin \sigma + \cos \alpha \cos \theta \cos \sigma)) d\alpha$$

здесь $k^2 = \frac{4\rho_*}{(1+\rho_*)^2 + z^2}$, $z = \sin\alpha \sin\theta + y/a$,

$$\rho_* = (1 - \sin^2\alpha \sin^2\theta + \frac{\rho}{a}(\frac{\rho}{a} + 2\cos\alpha \cos\sigma + 2\sin\alpha \cos\theta \sin\sigma))^{1/2}.$$

Поскольку в рассматриваемой системе существуют две циклические координаты, для определения устойчивости равновесия используется потенциальная энергия, измененная по Раусу.

$$\Pi = -\frac{\gamma}{2(1+r^2)} \left[UL_e - \frac{L_e^2(\rho, \theta, y, \sigma)}{2} \right] \pm y - \frac{1}{2} \frac{(p_1 - p_2 \cos\theta)^2}{(ma^2 \rho^2 + I_1 \sin^2\theta)mga} \quad (15)$$

здесь $p_1 = I_2(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta)$, $p_2 = ma^2 \rho^2(\dot{\sigma} + \dot{\psi}) + I_1 \dot{\psi} \sin^2\theta + p_2 \cos\theta$ - обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам φ и ψ , I_1 и I_2 - моменты инерции колец.

Исследование измененной потенциальной энергии (15) показало, что положение равновесие свободного кольца над закрепленным, устойчивое при вертикальном отклонении, является неустойчивым при любых параметрах в радиальном направлении. Однако, если существует устойчивое по u положение равновесия под закрепленным кольцом, то оно устойчиво для всех параметров и в радиальном направлении, кроме того, оно имеет зону устойчивости при повороте. Границы устойчивости положения равновесия под закрепленным кольцом приведены на рис.7.

Следует заметить, что зона устойчивости достаточно мала. Численный расчет показывает, что для того чтобы осуществить устойчивый подвес кольца массой 10гр на расстоянии порядка 20см от закрепленного при размерах: радиус - 10см, толщина - 2мм, нужна сила тока порядка 10кА, что для практических целей неосуществимо.

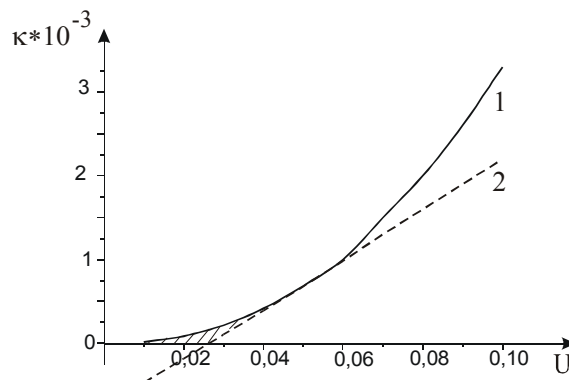


Рис. 7

Проведенный анализ показал, что неустойчивость положения равновесия под закрепленным кольцом связана с сильной неоднородностью магнитного поля вблизи него, поэтому был рассмотрен подвес, содержащий кольца разного радиуса. Отношение радиуса закрепленного кольца к радиусу подвешиваемого предполагалось большим 1. В этом случае параметрическая зона устойчивости

расширяется. На рис.8 приведены границы устойчивости при различных соотношениях радиусов $g = a_2 / a_1$.

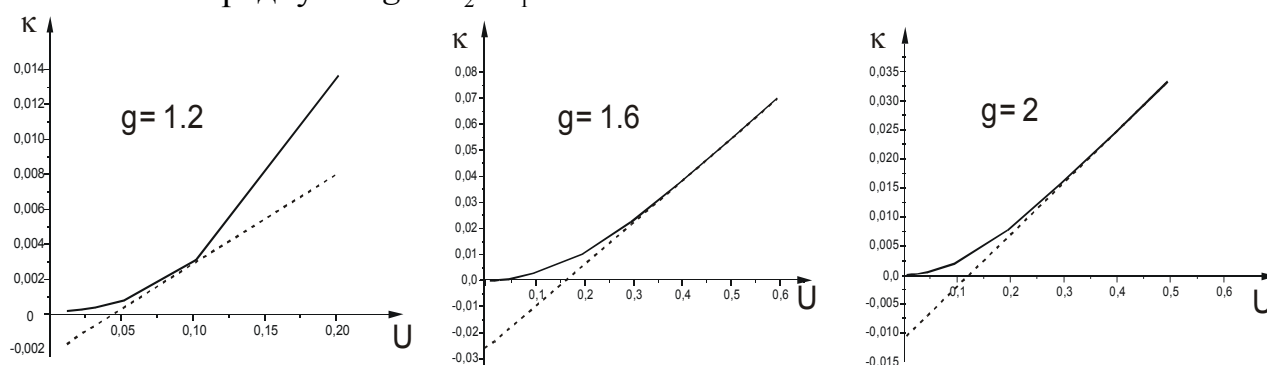


Рис. 8

Однако, зависимость максимума электромагнитной силы от соотношения радиусов, достижимого в зоне устойчивости, имеет нелинейный характер. Максимум силы начинает убывать при $g > 1.8$. Таким образом, при $g = 1.8$ имеется наибольший диапазон параметров, при которых осуществим устойчивый подвес. В этом случае, чтобы подвесить кольцо массой 10г на расстоянии 20см от закрепленного, нужен ток порядка 1кА. Таким образом, при использовании разных колец удастся снизить силу тока на порядок. Еще меньшее значение тока потребуется, если вместо закрепленного кольца использовать соленоид.

Неустойчивость свободного кольца в первую очередь связана с возможностью его поворота из горизонтальной плоскости. Если предположить, что подвешиваемое кольцо не имеет степени свободы на поворот, то вес 10г можно устойчиво зафиксировать на расстоянии порядка 6см от закрепленного кольца при токе 20А и напряжении 10В, что является приемлемым для практического использования рассмотренного типа подвеса.

Поскольку техническая реализация подвеса с заданным переменным током достаточно сложна, удобнее подавать на закрепленное кольцо заданное переменное напряжение. В соответствии с этим, была рассмотрена система, в которой оба кольца запитывались переменными напряжениями одинаковой частоты. В этом случае потенциал усредненных электромагнитных сил носит характер кубической зависимости от коэффициента взаимной индукции колец и содержит четыре параметра. Исследование потенциала показало, что осуществить устойчивый по всем координатам подвес в такой системе возможно, но только на расстояниях больших, чем диаметр колец. Зона устойчивости под закрепленным кольцом, как и в предыдущем случае, мала. Однако к данной системе применимы те же рассуждения, что и ранее.

Последняя глава диссертации посвящена исследованию устойчивости круговой формы равновесия замкнутого тонкого провода с током. Эта задача актуальна для магнитных подвесов, когда свободное проводящее кольцо с током находится над источником магнитного поля, создаваемого другим кольцом, и суммарная сила поля действует против силы тяжести. Сила, действующая на каждый элемент кольца, складывается из трех компонент: вертикальной и радиальной (направленной к центру кольца) составляющих, обусловленных

внешним полем и радиального усилия (направленного от центра), вызванного собственным полем подвешиваемого кольца. Сжимающая компонента силы может привести к потере устойчивости круговой конфигурации и, следовательно, к изменению свойств системы.

В качестве модели проводящего кольца использовалась тонкая нерастяжимая замкнутая нить, запитанная постоянным током в неоднородном осесимметричном магнитном поле (рис.9). Предполагалось, что рассматриваемый проводник может деформироваться только в плоскости.

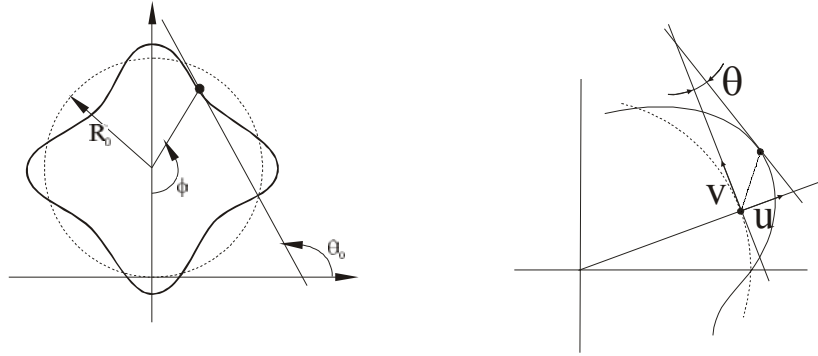


Рис. 9

Для вывода уравнений равновесия кольца использовался вариационный принцип Остроградского-Гамильтона с учетом условий нерастяжимости провода, введенных с помощью множителей Лагранжа. Энергия собственного магнитного поля замкнутого тонкого проводника имеет достаточно сложный вид:

$$W = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1 + \varphi_0}^{2\pi + \varphi_1 - \varphi_0} \frac{\cos(\theta_{01} - \theta_{02})}{R(u, v)} R_{\varepsilon 1} R_{\varepsilon 2} d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (15)$$

где $R(u, v) = ((R_0 + u_1)^2 + (R_0 + u_2)^2 - 2(R_0 + u_1)(R_0 + u_2)\cos\varphi + v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi - 2((R_0 + u_2)v_1 - (R_0 + u_1)v_2)\sin\varphi)^{1/2}$,

$k = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}$, $u_i = u(\varphi_i)$ и $v_i = v(\varphi_i)$ - отклонения конфигурации кольца от окружности, $\theta_{0i} = \theta_0(\varphi_i)$, - угол между касательной к контуру и горизонтальной осью, $R_{\varepsilon i} = R_{\varepsilon}(\varphi_i) = ((u_i' - v_i')^2 + (R_0 + u_i - v_i')^2)^{1/2}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Выбор значения угла φ_0 в пределах интеграла определяется условием $R(u, v) \geq a/2$, где a - характерный размер сечения проводника.

Функционал энергии с учетом условий нерастяжимости проводника имеет вид:

$$\Lambda = W - i\Psi + \int [\lambda(u_1' - v_1 + R_0 \sin\theta_1) + \mu(R_0(1 - \cos\theta_1) + u_1 + v_1')] d\varphi_1 \quad (16)$$

здесь $\Psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{((R_0 + u_1)^2 + v_1^2)^{1/2}} B(r)r(1 + \frac{v_1'}{R_0}) dr d\varphi_1$ - поток внешнего осесимметричного поля

(с индукцией $B(r)$) через поверхность, охватываемую проводником.

Применяя теорему об устойчивости системы с квазициклическими скоростями, при исследовании устойчивости конфигураций кольца ток в его контуре можно считать постоянным.

Из условия равенства нулю вариации функционала (16) получается система пяти интегро-дифференциальных нелинейных уравнений равновесия. При рассмотрении этих уравнений на исходной круговой конфигурации было получено известное в литературе выражение для силы натяжения тонкого нерастяжимого провода во внешнем магнитном поле. Для исследования устойчивости в малом была проведена линеаризация исходной системы относительно круговой конфигурации. К полученной линейной системе применялась процедура Галеркина. В результате, для каждой собственной формы колебаний было получено характеристическое уравнение четвертого порядка, которое определяет параметрические границы потери устойчивости исходной круговой конфигурации. Эти границы зависят от двух параметров, характеризующих значение напряженности поля и ее производной на круговой конфигурации. В зависимости от скорости изменения напряженности поля устойчивость круговой формы может теряться по различным формам колебаний. Чем больше значение производной на контуре кольца, тем по более высокой форме происходит потеря устойчивости при соответствующем значении напряженности внешнего поля.

Помимо нахождения бифуркационных значений параметров исследуемой задачи, интерес представляет определение характера зависимости ее решения при изменении этих параметров, т.е. построение диаграммы ветвления. Поскольку исходная интегро-дифференциальная система имеет сложный нелинейный характер, аналитически эта зависимость может быть найдена только приближенно, вблизи круговой формы. После представления отклонения равновесной конфигурации от окружности в виде Фурье-разложения были получены качественные зависимости коэффициентов формы от изменения параметров поля.

Далее была рассмотрена математическая модель сверхпроводящего кольца. Исследование его устойчивости показало, что уравнения, определяющие параметрические границы потери устойчивости для кольца с постоянным током и для сверхпроводящего кольца одинаковы, с разницей только в определении параметров.

В последней части третьей главы было проведено исследование влияния изгибной жесткости на устойчивость упругого кольца в магнитном поле. Выяснилось, что полученный качественный результат не меняется, т.е. по-прежнему потеря устойчивости может происходить по разным формам колебаний, хотя зона устойчивости при учете изгибной жесткости проводника существенно расширяется.

В заключении диссертационной работы приведены основные результаты и выводы.

Основные результаты и выводы

1. Впервые на основе асимптотических методов нелинейной механики дано математическое обоснование экспериментов М. Бетено и Я.Б.Дубошинского [1], в которых наблюдались плоские стационарные колебания проводящего маятника над торцом соленоида переменного тока.

2. Доказана возможность создания пассивного электромагнитного подвеса, состоящего из двух проводящих колец, запитанных током высокой частоты. При этом математически продемонстрирована устойчивость по всем возможным степеням свободы подвешиваемого проводящего тела, хотя и в достаточно узкой области технических параметров. Показано, что практическая реализация такого подвеса возможна при исключении его поворота из горизонтальной плоскости.
3. Найдены границы области устойчивости круговой конфигурации плоского упругого кольца, моделируемого нитью или тонким стержнем с током, в неоднородном осесимметричном магнитном поле, при условии, что ось поля совпадает с осью кольца в исходной недеформированной конфигурации.

Цитируемая литература

- 1) *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. - М.: Наука, 1997, с.495
- 2) *Ходжаев К.Ш., Шаталов С.Д.* О медленных движениях проводящего твердого тела в магнитном поле.// Изв. РАН МТТ, 1981, N 2, с.175-181
- 3) *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. - М.: Наука, 1988

Список работ, опубликованных по теме диссертации

- 1) *Артемяева М.С. Скубов Д.Ю.* Динамика маятниковых систем, содержащих проводящие тела, в высокочастотном магнитном поле// V Международная конф. «Нелинейные колебания механических систем». Тез. докл. – Ниж. Нов., 1999, с.12-13
- 2) *Артемяева М.С. Скубов Д.Ю.* Динамика маятниковых систем, содержащих проводящие тела, в магнитном поле высокой частоты// XXVII Международная школа ученых механиков «Анализ и синтез нелинейных колебательных механических систем». Сб. докл. -СПб., 2000, с.435-442.
- 3) *Артемяева М.С. Скубов Д.Ю.* Динамика проводящих тел маятникового типа в высокочастотном магнитном поле// Изв. АН СССР МТТ, 2001, №4, с.29-39
- 4) *Artemyeva M.S., Skubov D.Ju.* Stability of a ring circular configuration in axis-symmetrical magnetic field// Сборник трудов XXIX Летней школы "Актуальные проблемы механики", -СПб, 2002, с. 102 - 110.
- 5) *Артемяева М.С. Скубов Д.Ю.* Устойчивость тонкого кольца с током в неоднородном магнитном поле// VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тез. докл. -Пермь, 2001, с.52-53
- 6) *Artemyeva M.S.* Levitation of a closed current loop in high-frequency magnetic field//Proceedings of XXIX Summer School APM 2002, p23
- 7) *Артемяева М.С., Скубов Д.Ю.* Устойчивость и колебания левитирующего кольца с током в переменном магнитном поле// Второй международный конгресс «Нелинейный динамический анализ» (NDA'2). Тез.докл., -Москва, 2002, с.58