Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. В. ЛУПУЛЯК Ю. К. ШИНДЕР

МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник задач

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ
2003

Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. В. ЛУПУЛЯК Ю. К. ШИНДЕР

МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник задач

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ
2003

УДК 517.5 (076.1)

Лупуляк. С.В., Шиндер Ю.К. Математика. Функциональный анализ. Сборник задач. СПб. Изд-во СПбГПУ, 2003. 23 с.

Сборник задач соответствует авторскому курсу дисциплины “Функциональный анализ” направления бакалаврской подготовки 510200 “Прикладная математика и информатика”. Этот курс читается в пятом и шестом семестрах на кафедре “Прикладная математика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

В сборнике рассмотрен набор задач, необходимых для проведения практических занятий по данному курсу. При этом лекционный материал не только сопровождается многочисленными примерами, но и расширяется – некоторые темы рассматриваются исключительно на упражнениях.

Предназначен для студентов, изучающих курс “Основы функционального анализа”, преподавателей, а также всех, самостоятельно изучающих предмет.

Библиогр.: 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\exists$ – квантор существования.

$\forall$ – квантор всеобщности.

$\in$ – квантор принадлежности.

$\bigcup$ – объединение двух множеств.

$\bigcap$ – пересечение двух множеств.

$\subset$ – принадлежность одного множества другому.

$\subset\subset$ – принадлежность замыкания одного множества другому.

$\oplus$ – прямая сумма.

$\perp$ – ортогональность множеств.

$\to$ – сильная сходимость в некотором функциональном пространстве.

$\xrightarrow{w}$ – слабая сходимость в некотором функциональном пространстве.

$\overline{A}$ – замыкание множества A.

$A^{\perp}$ – ортогональное дополнение множества A.

$B_r(x)$ – шар с центром x радиуса r.

$B(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространство Y.

$B(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в себя.

$C(\overline{\Omega})$, $0 \le k \le \infty$ – пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций.

$C^k(\overline{\Omega})$, $0 \le k \le \infty$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций.

$C_0^k(\Omega)$, $0 \le k \le \infty$ – пространство непрерывно дифференцируемых финитных на Ω функций.

$D(A)$ – область определения оператора A.

$\inf$ – инфимум.

$Ker(A)$ – ядро оператора A.

$L(X,Y)$ – пространство линейных операторов, действующих их пространства X в пространство Y.

l^p, $1 \le p < \infty$ – пространство последовательностей, суммируемых со степенью p.

l^∞ – пространство ограниченных последовательностей.

$L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ – пространство функций, суммируемых на Ω со степенью p.

$L^\infty(\Omega)$ – пространство существенно ограниченных на Ω функций.

$Lin\{\cdot\}$ – линейная оболочка.

N – множество натуральных чисел.

R – множество вещественных чисел.

R^n (n=1, 2, 3,…) – пространство n мерных векторов.

$R(A)$ – образ оператора A.

sup – супремум.

X^* – пространство, сопряжённое к пространству X.

$\sigma(A)$ – спектр оператора A.

$\sigma_p(A)$ – точечный спектр оператора A.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой для данного издания послужил сборник задач [4]. Для удобства читателя здесь сохранена используемая в [4] нумерация задач. При этом новые задачи, добавленные в этот сборник, имеют цифробуквенные обозначения Кроме того, некоторые задачи помечены звёздочкой. Они предназначены для желающих более углублённо изучить предмет, и их не рекомендуется включать в программу основного курса. В конце сборника добавлены указания к решению некоторых задач основного курса (не помеченных звёздочкой).

Пособие предназначено для проведения двухсеместрового практического курса занятий по Функциональному анализу. Разделы 1-9 рекомендуется изучать в первом семестре, а разделы 10-13 – во втором. В конце разделов 9 и 13 приведены задачи, предназначенные для самостоятельной работы. Их также можно использовать для контроля знаний студентов.

1. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Пусть дана последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Верхним и нижним пределами этой последовательности назовём соответственно следующие множества:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n\in\mathrm{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\,;\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n\in\mathrm{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k\,.$$

Доказать, что $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

2. СЧЁТНОСТЬ

1. Является ли счётным множество последовательностей, состоящих из нулей и единиц?

2. Является ли счётным множество непересекающихся непустых интервалов на прямой?

3. Является ли счётным произвольное множество непустых интервалов на прямой?

3. МЕТРИКА, МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Будет ли метрическим пространством множество открытых шаров на плоскости с метрикой $\rho(A,B)=\mathrm{S}(A\Delta B)$? Здесь $\mathrm{S}(A\Delta B)$ – площадь симметрической разности шаров A и B.

2. Пусть ρ – метрика. Доказать, что $\rho_1 = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ также является метрикой. Показать, что последовательность сходится в метрике ρ_1 тогда и только тогда, когда она сходится в метрике ρ.

4. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Доказать, что открытый шар – открытое множество.

2. Показать, что любое метрическое пространство – хаусдорфово[1].

[1] Пространство называется хаусдорфовым, если оно удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа: любые две точки, не совпадающие между собой, можно окружить непересекающимися окрестностями.

3. Пусть $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$. Будет ли это метрикой? Описать структуру открытых и замкнутых множеств в таком метрическом пространстве. Какие последовательности будут сходиться в такой метрике?

4. Пусть $A\subset R^n$ – замкнутое множество. На A задана непрерывная числовая функция f (f: $A\to R$). Пусть $\alpha\in R$ – некоторое фиксированное число. Показать, что множество $A_\alpha=\{x\in A|\ f(x)\leq\alpha\}$ будет замкнутым.

5. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

1. Привести пример числовой последовательности, предельными точками которой будут все вещественные числа.

2. Показать, что если пространство сепарабельно, то любое семейство непересекающихся шаров с непустой внутренностью является не более чем счётным.

2.а(*) Показать, что если в метрическом пространстве любое семейство непересекающихся шаров с непустой внутренностью не более чем счётно, то данное пространство является сепарабельным.

3. Будет ли сепарабельным пространство вещественных чисел с метрикой

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}?$$

4. Доказать, что пространство l^p, $1\leq p<\infty$ является сепарабельным.

6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}\subset X$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1})<\infty$. Будет ли она фундаментальной?

1.а(*) Верно ли обратное утверждение: пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}\subset X$ фундаментальна, тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1})<\infty$?

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}\subset X$ фундаментальна, а её подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ сходится. Показать, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к тому же пределу.

3. Пусть последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset X$ являются фундаментальными. Показать, что сходится числовая последовательность $\lambda_n = \rho(x_n, y_n)$.

7. ПОЛНОТА

1. Будет ли полным пространство вещественных чисел с метрикой

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\,?\end{cases}$$

2. Будет ли полным пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt$?

3. Доказать, что пространство финитных на R непрерывных функций с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in R}|x(t)-y(t)|$ будет неполным.

3.а(*) Построить пополнение[2] пространства из предыдущей задачи.

3.б Доказать, что пространство l^p, $1\le p<\infty$ является полным.

3.в Доказать, что пространство l^∞ является полным.

4. Доказать, что подмножество полного метрического пространства X является полным метрическим пространством относительно индуцированной из X метрики тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.

5. Доказать, что в полном метрическом пространстве любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имеет непустое пересечение.

6. Доказать, что если в метрическом пространстве любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имеет непустое пересечение, то такое пространство является полным.

---

[2] Метрическое пространство (X,ρ_0) называется пополнением метрического пространства (Y,ρ), если

1) (X,ρ_0) является полным метрическим пространством;
2) $Y\subset X$ и множество Y является всюду плотным в пространстве (X,ρ_0).
3) Метрика ρ на пространстве Y совпадает с метрикой, индуцированной на Y из пространства (X,ρ_0).

7. Доказать теорему Бэра: полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счётного числа нигде не плотных множеств.

8. КОМПАКТНОСТЬ

1. Даны два множества в R^n, одно из которых компактно, а другое замкнуто. Доказать, что они пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно нулю. Останется ли этот результат справедливым, если

а) не предполагать компактность одного из множеств, а считать их оба замкнутыми;

б) вместо R^n взять произвольное полное метрическое пространство?

2. Даны два множества A и B в R^n, одно из которых компактно, а другое замкнуто. Доказать, что в этих множествах найдутся такие точки $a \in A$ и $b \in B$, что $\rho(a,b) = \rho(A,B)$. Останется ли этот результат справедливым, если вместо R^n взять произвольное полное метрическое пространство?

3. Доказать необходимость в теореме Арцела: для того, чтобы множество было предкомпактным в пространстве $C([a, b])$, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на отрезке $[a, b]$.

4. Доказать компактность вложения $C^1([a, b])$ в $C([a, b])$. Будет ли множество, замкнутое и ограниченное в $C^1([a, b])$, компактным в $C([a, b])$?

5. Доказать, что замкнутый единичный шар не компактен в $C([a, b])$.

6. Доказать, что множество $F = \{ f \in C([0,1]) | \, f(x) = kx \}, \quad k \in [0,1]$, является компактным в $C([0, 1])$.

7. Доказать, что любое центрированное[3] семейство компактных множеств в метрическом пространстве X имеет непустое пересечение, которое является компактным множеством.

7.а$^{(*)}$ Пусть Y – некоторое подмножество метрического пространства X, обладающее свойством, что все непрерывные функции достигают на нём своих наибольшего и наименьшего значений. Будет ли множество Y компактно в X?

[3] Семейство множеств называется центрированным, если пересечение любого конечного числа множеств из данного семейства не пусто.

9. НОРМЫ, НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Доказать, что пространство $C^1([a, b])$ банахово.

2. Является ли нормой на множестве непрерывных на отрезке [0, 1] функций величина $\|f\|_{\int} = \int_0^1 |f(x)|dx$? Если да, то будет ли она эквивалентна норме $\|f\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$?

3. Является ли нормой на линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке [0, 1] функций величина $\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$? Если да, то будет ли она эквивалентна норме $\|f\|_{C^2([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$?

4. Являются ли нормами на линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке [0, 1] функций величины $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ и $\|f\|_2 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$? Если да, то будут ли они эквивалентны норме $\|f\|_{C^1([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$?

5. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причём $(X, \|\cdot\|_1)$ – банахово пространство. Доказать, что $(X, \|\cdot\|_2)$ также является банаховым пространством.

6. Доказать, что две нормы, введённые на одном линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из норм вытекает её сходимость по другой норме.

7. Доказать, что на факторпространстве X/L (L – подпространство X) можно ввести норму с помощью равенства $\|\xi\|_{X/L} = \inf_{x\in\xi} \|x\|$.

8. Доказать, что если X – банахово пространство, то факторпространство X/L также является банаховым (относительно нормы $\|\xi\|_{X/L} = \inf_{x\in\xi} \|x\|$).

9. Пусть $p(\cdot)$ – полунорма на линейном пространстве X. Доказать, что:

а) $p(0) = 0$;

б) $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$;

в) $p(x) \geq 0$;

г) множество $L = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$ является линейным многообразием в X.

10. Пусть на линейном пространстве X задана полунорма $p(\cdot)$ и $L = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$. Доказать, что на факторпространстве X/L можно задать норму по формуле $\|\xi\|_{X/L} = p(x)$, где x – произвольный элемент из класса ξ.

11. Показать, что на линейном пространстве $C^{\infty}([a, b])$ можно ввести метрику при помощи соотношения $\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|D^k x - D^k y\|_{C([a,b])}}{\|D^k x - D^k y\|_{C([a,b])} + 1}$ и что полученное метрическое пространство будет полным.

12. Пусть Ω – некоторая область (открытое множество) в R^n. Показать, что:

а) существует последовательность компактов K_j такая, что $K_j \subset K_{j+1} \subset \Omega$, $\forall j \in N$; $\Omega = \bigcup_{j \in \mathrm{N}} K_j$;

б) на линейном пространстве $C(\Omega)$ можно ввести метрику при помощи соотношения $\rho(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|x - y\|_{C(K_j)}}{\|x - y\|_{C(K_j)} + 1}$ и полученное метрическое пространство будет полным.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть дано метрическое пространство X с метрикой ρ, $A \subset X$ – некоторое множество. Внутренностью A называется множество $\overset{\circ}{A}$, состоящее из всех точек, которые принадлежат множеству A вместе с некоторой своей окрестностью. Доказать, что $\overset{\circ}{A}$ – наибольшее открытое множество, содержащееся в A.

2. Будет ли счётным множество непересекающихся шаров с непустой внутренностью в пространстве l^2?

3. Будет ли счётным множество точек разрыва возрастающей функции?

4. Будет ли открытым либо замкнутым в пространстве $C([0, 1])$ множество всех функций, имеющих корни?

5. Будет ли открытым либо замкнутым в пространстве $C([0, 1])$ множество всех полиномов?

6. Будет ли открытым либо замкнутым в пространстве $C([0, 1])$ множество всех полиномов степени $\le k$?

7. Пусть X – банахово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – некоторая последовательность. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

8. Доказать, что в полном метрическом пространстве всякая последовательность вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

9. Доказать, что множество непрерывных функций не плотно в пространстве $L^{\infty}(E)$.

10. Привести пример последовательности, которая принадлежала бы каждому из рассматриваемой пары пространств и:

а) сходилась в m, но не сходилась в l^1;

б) сходилась в m, но не сходилась в l^2;

в) сходилась в l^2, но не сходилась в l^1.

10. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Пусть X – евклидово пространство. Показать, что выполняется тождество Аполлония: $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2, \quad \forall x, y, z \in X$.

2. Пусть X – евклидово пространство. Показать, что выполняется равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in X$.

3. Можно ли в пространстве $C([0, 1])$ ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой (и тем самым превратить его в евклидово)?

4. Пусть X – вещественное нормированное линейное пространство, и в нем выполняется равенство параллелограмма:

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),\quad \forall x,y\in X$. Доказать, что в X можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой по формуле $(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.

5. Пусть X – гильбертово пространство, а M и N – его подмножества, причём $M\subset N$. Показать, что $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

6. Пусть X – гильбертово пространство, а M – его произвольное подмножество. Показать, что $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ – наименьшее подпространство в X, содержащее M.

7. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства U, причём $M\perp N$. Доказать, что $M\oplus N$ – подпространство в U.

8. Пусть X – евклидово пространство, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортогональная система векторов в X, причём каждый элемент $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ отличен от нуля. Доказать, что она линейно независима.

9. Пусть U – гильбертово пространство; $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\overline{B_1(0)}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\overline{B_1(0)}$, причём $(x_i, y_i)\to 1$ при $i\to\infty$. Доказать, что $\|x_i-y_i\|\to 0$ при $i\to\infty$.

10. Пусть U – сепарабельное гильбертово пространство. Доказать, что всякая ортонормированная система в U не более чем счётна.

11. Доказать теорему Рисса – Фишера: пусть U – гильбертово пространство; $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – произвольная ортонормированная система векторов в U, а числа $C_1,\ldots,C_n,\ldots$ таковы, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_i^2<\infty$. Тогда существует такой элемент $f\in U$, что $C_i=(f,\varphi_i)$, и система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута относительно f.

12. Доказать следующую теорему: для того, чтобы ортонормированная система векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве U была полна, необходимо и достаточно, чтобы в U не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

13. Доказать теорему об изоморфизме гильбертовых пространств: любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.

11. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Задан оператор A: $C([0, 1])\to C([0, 1])$: $Ax=\frac{dx}{dt}$. Его областью определения является множество непрерывно дифференцируемых функций. Каковы свойства этого оператора (будет ли он инъективным, сюръективным, линейным, ограниченным)?

2. Задан оператор A: $C^1([0, 1])\to C([0, 1])$: $Ax=\frac{dx}{dt}$. Его областью определения является всё пространство непрерывно дифференцируемых функций. Каковы свойства этого оператора (будет ли он инъективным, сюръективным, линейным, ограниченным)?

3. Пусть X – нормированное пространство. Задан функционал f: $X\to R$: $f(x)=\|x\|_X$. Каковы свойства этого функционала (будет ли он инъективным, сюръективным, линейным, ограниченным, непрерывным)?

4. Задан оператор A: $C([0, 1])\to R$: $Ax=\int_0^1 x(t)dt$. Его областью определения является всё пространство непрерывно дифференцируемых функций. Каковы свойства этого оператора (будет ли он инъективным, сюръективным, линейным, ограниченным)?

5. Операторы A_1 и A_2: $l^2\to l^2$ заданы следующим образом.

Пусть $x=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Тогда $A_1x=\{0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$; $A_2x=\{x_2, x_3..., x_n,...\}$. Каковы свойства этих операторов (будут ли они инъективными, сюръективными, линейными, ограниченными)?

6. Пусть X и Y – нормированные пространства. Доказать, что для того, чтобы оператор $A\in L(X,Y)$ был ограниченным необходимо, чтобы его ядро было подпространством в X. Будет ли это условие достаточным?

7. Пусть X и Y – метрические пространства. Оператор A осуществляет отображение всего пространства X на Y. Доказать, что непрерывность оператора можно определить следующим эквивалентным способом: оператор A называется непрерывным, если прообразом открытого множества из Y является открытое множество из X.

8. Доказать, что оператор проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве является линейным ограниченным оператором, и найти его норму.

9. Пусть U – гильбертово пространство, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в нём; $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная числовая последовательность. Доказать, что равенство $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i$ определяет ограниченный линейный оператор, действующий из U в U, и найти его норму.

10. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A \in B(X, Y)$, $D(A) = X$. Всегда ли существует $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, такой, что $\|Ax_0\| = \|A\| \|x_0\|$?

11. Пусть X и Y – конечномерные нормированные пространства. Доказать, что всякий линейный оператор $A \in L(X, Y)$ будет ограниченным, и будет существовать такой элемент $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, что $\|Ax_0\| = \|A\| \|x_0\|$.

12.(*) Доказать теорему об открытом[4] отображении: линейное, непрерывное, сюръективное отображение банахова пространства X на банахово пространство Y является открытым.

13. Пусть X и Y – нормированные пространства; $A \in B(X, Y)$. Доказать, что оператор A является замкнутым[5].

14. Показать, что оператор A: $C([0, 1]) \to C([0, 1])$: $Ax = \frac{dx}{dt}$, область определения которого – это множество непрерывно дифференцируемых функций, является замкнутым.

15. Пусть X и Y – нормированные пространства. Доказать, что линейный оператор, действующий из X в Y, является замкнутым тогда и только тогда, когда в пространстве $X \times Y$[6] его график[7] будет замкнутым (линейным многообразием).

---

[4] Открытым называется отображение, переводящее открытые множества в открытые.

[5] Оператор называется замкнутым, если из условий $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

[6] Нормированное пространство $X \times Y$ состоит из всевозможных пар $[x, y]$, $x \in X$, $y \in Y$ с нормой $\|[x, y]\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

16. Доказать теорему о замкнутом графике.

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A\in L(X,Y)$, причём $D(A)=X$. Доказать, что оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он замкнут.

17. Пусть X и Y – банаховы пространства; $A\in B(X,Y)$ и обратный оператор $A^{-1}\in B\ (Y,X)$. Доказать, что $R(A)$ – подпространство в Y.

12. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

1. Доказать теорему Рисса для l^1:

а) любой элемент $\xi\in l^\infty$ задаёт на l^1 линейный ограниченный функционал по формуле $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i$, $\forall x_i\in l^1$, причём $\|f\|_{(l^1)^*}=\|\xi\|_{l^\infty}$;

б) Для любого функционала $f\in(l^1)^*$ существует единственный элемент $\xi\in l^\infty$ такой, что $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i$, $\forall x\in l^1$, причём $\|f\|_{(l^1)^*}=\|\xi\|_{l^\infty}$.

2. Пусть пространство X^* сепарабельно. Доказать, что X также сепарабельно. Будет ли справедливым обратное утверждение?

3. Показать, что пространство l^1 не является рефлексивным.

3.а(*) Привести пример функционала $f_0\in\left(l^\infty\right)^*$ такого что он не определяется элементом из l^1, то есть не существует такого $\xi\in l^1$, что $f_0(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i$, $\forall x\in l^\infty$.

4. Доказать, что если нормированное пространство X бесконечномерно, то и пространство X^* также бесконечномерно.

5. Пусть X – нормированное пространство; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$; $L=Lin\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$; x – произвольный элемент X. Доказать, что $x\in\overline{L}$ тогда и только тогда, когда из условий $f\in X^*$; $f(x_k)=0$, $k\in\mathrm{N}$ следует, что $f(x)=0$.

6. Доказать следующую теорему: если X – сепарабельное рефлексивное нормированное пространство, то из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}\subset X$ можно выбрать слабосходящуюся подпоследовательность.

---

[7] Графиком оператора A называется множество $G(A)=\{[x,y]\in X\times Y\colon\ x\in D(A),\ y=Ax\}$.

7. Пусть X – нормированное пространство, M – произвольное подмножество X, и $M^{\perp}=\left\{f\in X^{*}\,\middle|\, f(x)=0,\quad \forall x\in M\right\}$. Доказать, что $M^{\perp}$ – подпространство в пространстве X^{*}.

Пусть M – подпространство в X. Доказать, что $M=\left\{x\in X\,\middle|\, f(x)=0,\quad \forall f\in M^{\perp}\right\}$. Что представляет собой $M^{\perp}$, если X – гильбертово пространство?

8. Пусть U – гильбертово пространство, L – подпространство в нём; f – ограниченный линейный функционал, заданный на L. Доказать, что существует единственное продолжение f на всё пространство U с сохранением нормы.

9. Пусть U – гильбертово пространство; $f\in X^{*}$, $f\neq 0$. Доказать, что существует единственный $x\in X$, $\|x\|=1$, такой, что $f(x)=\|f\|$.

10. Пусть X – банахово пространство, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X^{*}$. Для любого $x\in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, который мы обозначим как $f(x)$. Доказать, что $f\in X^{*}$.

11. Доказать следующую теорему.

Пусть U – гильбертово пространство, M – выпуклое замкнутое множество, f – выпуклый, ограниченный снизу, коэрцитивный[8] и непрерывный функционал. Тогда существует точка $x_0\in M$ такая, что $f(x_0)=\inf\limits_{x\in M} f(x)$. Если f строго выпуклый[9], то такая точка единственная.

13. СОПРЯЖЁННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Оператор A: $l^2\to l^2$ задан следующим образом.

Пусть $x=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Тогда $Ax=\{0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Найти сопряжённый оператор A^{*}.

2. Оператор $A:\ L^2([0,1])\to L^2([0,1])$ задан при помощи соотношения

---

[8] Функционал f называется коэрцитивным, если $f(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$.

[9] Функционал f называется строго выпуклым, если $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$ при $\lambda\in(0,\ 1)$.

$Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$. Найти A^*.

3.(*) Пусть U – гильбертово пространство; $A \in B(U)$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. Верно ли утверждение: $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$?

4. Имеется последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in B(l^2)$. При этом каждый оператор A_n задан следующим образом. Пусть $x = \{x_1, x_2, \dots\}$. Тогда $A_n x = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. Доказать, что последовательность A_n сходится к 0 сильно. Верно ли то же самое для A_n^*?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть X – евклидово пространство, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – биортогональные системы векторов в X (т. е. $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$). Доказать, что каждая из этих систем – линейно независима.

2. Пусть X и Y – нормированные пространства, L – подпространство пространства X. В пространстве $B(X, Y)$ определим множество M по следующей формуле:

$$M = \{A \in B(X, Y) | L \subset Ker(A)\}.$$

Будет ли M подпространством в $B(X, Y)$?

3. Пусть X – банахово пространство, $A \in B(X,X)$ и $A^{-1} \in B(X,X)$. Константа $k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называется числом обусловленности оператора A. Рассмотрим уравнение $Ax = y$, где y – некоторый ненулевой элемент из X. Пусть $\widetilde{x} \in X$ – некоторое приближенное решение этого уравнения. Доказать, что относительная погрешность данного решения может быть оценена по формуле

$$\frac{1}{k}\frac{\|A\widetilde{x} - y\|}{\|y\|} \le \frac{\|\widetilde{x} - x\|}{\|x\|} \le k\frac{\|A\widetilde{x} - y\|}{\|y\|}.$$

4. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A \in B(X, Y)$ и $A^{-1} \in B(R(A), X)$. Доказать, что $R(A)$ – подпространство в Y.

5. Доказать, что ядро замкнутого оператора – замкнутое множество.

6. Пусть X и Y – банаховы пространства; $A \in L(X, Y)$. Доказать, что оператор A является замкнутым тогда и только тогда, когда $D(A)$ в норме $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ – банахово пространство.

7. Оператор A: $C^k([a,b]) \to C([a,b])$, $Ax(t) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(t) x^{(i)}(t)$, где функции φ_i непрерывны на $[a, b]$ (здесь $x^{(i)}$ – производная порядка i от функции x). Доказать, что $A \in B\left(C^k([a,b]), C([a,b])\right)$.

8. Доказать следующую теорему.

Пусть U – гильбертово пространство, M – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, f – выпуклый, ограниченный снизу и непрерывный функционал. Тогда существует точка $x_0 \in M$, такая, что $f(x_0) = \inf_{x \in M} f(x)$.

9. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A_n \in B(X, Y)$, $\forall n \in \mathrm{N}$, для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n \in \mathrm{N}}$ является фундаментальной. Доказать, что существует такой оператор $A \in B(X, Y)$, что операторы A_n сильно сходятся к A.

10. Пусть M – замкнутое, выпуклое множество в гильбертовом пространстве U. Доказать, что в M существует единственный наименьший по норме элемент.

11. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A_n \in B(X, Y)$, $\forall n \in \mathrm{N}$, $A \in B(X, Y)$, операторы A_n сильно сходятся к A, $A_n^{-1} \in B(Y, X)$, $R(A) = Y$. Доказать, что решения уравнений $A_n x_n = y$ сходятся к решению уравнения $Ax = y$ для любого $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\sup_{n \in N} \left\| A_n^{-1} \right\| < \infty$.

УКАЗАНИЯ

3.1 При доказательстве неравенства треугольника воспользоваться тем, что для любых множеств A,B и C выполнено следующее включение

$$A\Delta B \subset (A\Delta C)\cup(C\Delta B).$$

Естественно, предварительно его нужно доказать.

4.3 Для того, чтобы понять, какие множества будут открытыми, а какие − замкнутыми, вначале нужно определить вид открытых шаров в данном метрическом пространстве.

5.2 Сравните с задачей 2.3.

5.4 Счётным, всюду плотным множеством в этом пространстве будет множество всех последовательностей, имеющих конечное число элементов, которые являются рациональными числами.

7.7 Прежде всего нужно расписать на языке окрестностей определение нигде не плотного множества.

8.2 Вначале решить задачу в предположении, что оба множества будут компактными.

8.4 Второй вопрос задачи по сути сводится к следующему: Будет ли множество, замкнутое в $C^1([a, b])$, замкнуто и в $C([a, b])$?

9.3 Решение задачи основывается исключительно на применении теоремы Лагранжа: $f(x)-f(y)= f'(\xi)\,(x-y)$, $\xi\in [x,y]$.

9.8 План решения:

Так как $\|\xi\|_{X/L} = \inf\limits_{x\in\xi}\|x\|_X$, то для каждого $\xi\in X/L$ найдётся такой элемент $x\in\xi$, что $\|\xi\|_{X/L} \geq \frac{1}{2}\|x\|_X$.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность в X/L. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\xi_{n+1}-\xi_n\|_{X/L}$ сходится. Добавив к $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ещё ξ_0 – нулевой элемент пространства X/L, выберем $x_n\in \xi_{n+1}-\xi_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ так, что $\|\xi_{n+1}-\xi_n\|_{X/L} \geq \frac{1}{2}\|x_n\|_X$.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|_X$ сходится, а значит, в силу полноты пространства X, сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$. Положив $x=\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ и обозначив через ξ класс, содержащий x, получим (поскольку $\sum_{n=0}^{n-1}x_n\in\xi_n$ при каждом n)

$$\|\xi-\xi_n\|_{X/L}\le\left\|x-\sum_{k=0}^{n}x_k\right\|_X\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

то есть $\xi=\lim_{n\to\infty}\xi_n$.

10.10 Сравните с задачей 5.2.

11.3 Обратите внимание, что понятие ограниченности введено только для линейных операторов.

11.6 Для ответа на вопрос о достаточности этого условия можно использовать задачу 11 1.

11.16 Нужно рассмотреть оператор $P\in B(G(A),X)$: $P([x,Ax])=x$.

12.2 Пусть $F=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счётное множество, всюду плотное в X^*. Для каждого $n\in\mathrm{N}$ найдётся элемент $x_n\in X$ такой, что $\|x_n\|_X=1$ и $|f_n(x_n)|\ge\frac{\|f_n\|_{X^*}}{2}$. Пусть $L=\mathrm{Lin}_Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество всех конечных линейных комбинаций элементов x_n с рациональными коэффициентами. Утверждается, что L и будет требуемым счётным, всюду плотным в X множеством.

12.3 Для решения этой задачи нужно использовать задачи 12.1 и 12.2.

12.11 Для решения этой задачи нужно использовать теорию слабой сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Березинский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.** Функциональный анализ. Киев: Выща шк., 1990. 281 с.
2. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
3. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
4. **Лупуляк С.В.** Математика. Линейные пространства и операторы. Сборник задач. С-Пб., Изд. СПбГПУ, 2002, 22с.
5. **Пугачёв В.С.** Лекции по Функциональному анализу. М.: Изд. МАИ, 1996. 744 с.
6. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
7. **Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.** Задачи и упражнения по Функциональному анализу. М.: Наука, 1984. 256 с.

ЛУПУЛЯК Сергей Валерьевич
ШИНДЕР Юлия Константиновна

Математика. Функциональный анализ. Сборник задач.

Сводный темплан 2003 г.

Лицензия ЛР № 020533 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т.2; 953005 – учебная литература

Подписано в печать		Формат	60×84/16		
		Усл. печ. л.		Уч.-изд. л.	Тираж
Заказ	С11				

Отпечатано на ризографе RN2000FP
Поставщик оборудования – фирма «Р-Принт»
Телефон: (812)110-65-09
(812)315-23-04