

На правах рукописи

ПОСТОЯЛКИНА

Елена Анатольевна

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОВЫШЕННОГО
ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И
ТЕРМОУПРУГОСТИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2003

Работа выполнена на кафедре «Механика и процессы управления»
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Исполов Ю. Г.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
кандидат технических наук

Осипенко Г. С.
Махнов В. Ю.

Ведущая организация:

институт проблем машиноведения РАН

Защита диссертации состоится “___” _____ 2003 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212. 229. 13 Санкт-Петербургского государственного политехнического университета по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, корп. ___, а. ____.

Автореферат разослан “___” _____ 2003 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

Д 212. 229. 13 доктор биологических наук, профессор

Зинковский А. В.

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. При решении большинства практических задач нестационарной теории теплопроводности и связанной теории термоупругости используются их конечномерные математические модели. Широкие возможности для исследования задач предоставляет метод конечных элементов. Конечномерные модели задач теории теплопроводности и связанной термоупругости в рамках метода конечных элементов описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения таких систем дифференциальных уравнений должны учитывать свойства как исходной системы так и её математической модели.

Традиционно для решения задач нестационарной теплопроводности используются неявный метод Эйлера, метод Галёркина, метод Кранка-Николсона. Методы Галёркина и Кранка-Николсона не обладают свойством L-устойчивости, поэтому при использовании метода Галеркина, при большом шаге интегрирования, быстро убывающим составляющим точного решения, соответствуют медленно убывающие по модулю, осциллирующие компоненты численного решения; при использовании метода Кранка-Николсона, при большом значении шага интегрирования, быстро убывающим компонентам точного решения, соответствуют почти не убывающие по модулю, осциллирующие компоненты численного решения.

Установлено, что в случае значительно изменяющихся во времени параметров теплообмена использование методов Галеркина и Кранка-Николсона не позволяет получить достоверных результатов, неявный метод Эйлера, в этом случае, обладая только первым порядком точности, воспроизводит результаты с большой погрешностью.

Опыт численного интегрирования задач нестационарной теплопроводности показал, что при решении этого класса задач предпочтительнее использовать методы, обладающие совокупностью следующих свойств: высоким порядком точности, A-устойчивостью и L-устойчивостью. Кроме того, при исследовании ряда задач возникает необходимость использовать методы, позволяющие более точно описывать быстрые процессы, не ухудшая точности воспроизведения медленных составляющих решения.

Существует широкий класс неравновесных физических явлений, в которых описание процессов переноса тепла на основе линейного градиентного соотношения Фурье является недостаточным. Для их описания используется гиперболическое уравнение теплопроводности. В связи с этим представляется важным развитие методов решения задач обобщенной теории теплопроводности.

Достаточно часто задача термоупругости решается в так называемой динамической постановке, в рамках которой в уравнении теплопроводности

можно пренебречь слагаемым, зависящим от скорости движения. Но в некоторых случаях, например, при резком изменении температурного поля, при внезапном механическом воздействии, необходимо учитывать влияние этого слагаемого, т. е. рассматривать задачу связанной постановке.

Аналитическое решение задачи в связанной постановке может быть получено только при упрощающих предположениях или для конкретных задач. В общем случае получить точное решение задачи аналитически очень сложно, а иногда и невозможно. Поэтому особый интерес представляет развитие численных методов интегрирования.

Цель работы. Цель диссертационной работы заключается в следующем. Разработка новых численных методов интегрирования и организация на их основе алгоритмов численного решения задач теплопроводности. Построение алгоритмов численного решения связанной задачи термоупругости.

Методы исследования. При построении алгоритмов использовались методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методы, принадлежащие методам семейства Рунге-Кутты и метод прямого математического моделирования. Конечномерные модели задач получены методом конечных элементов. При исследовании свойств конечноэлементной модели связанной задачи термоупругости использовался метод возмущений (метод малого параметра).

Основные научные результаты. Построены новые численные методы интегрирования задач теплопроводности. Все три метода имеют третий порядок точности, обладают свойством L-устойчивости. Первый и второй предлагаемые методы абсолютно устойчивы.

Организованы численные процедуры предлагаемых методов в задачах теплопроводности.

Подтверждена высокая эффективность использования в задачах нестационарной теплопроводности второго и третьего предлагаемых методов. Подтверждена высокая эффективность использования в задачах обобщенной теории теплопроводности первого и второго предлагаемых методов.

Проведен анализ свойств конечноэлементной модели задачи связанной термоупругости. Построены алгоритмы численного решения задачи связанной теории термоупругости. Подтверждена высокая эффективность использования при решении одномерных задач алгоритма, построенного на основе метода прямого математического моделирования.

Научная новизна. Предложенные в диссертации методы численного интегрирования задач теории теплопроводности и алгоритмы численного решения задач связанной теории термоупругости являются новыми.

Практическая ценность. Построенные в диссертации методы численного интегрирования задач теории теплопроводности и алгоритмы решения задач

связанной теории термоупругости на основе методов семейства Рунге-Кутты могут быть использованы при решении промышленных задач. Методы, построенные для численного интегрирования задач теории теплопроводности могут быть использованы при решении задач теории ползучести и пластичности.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается сравнением результатов работы предлагаемых методов с точным, полученным аналитически, решением исследуемых задач и с результатами работы традиционно используемых в этих задачах методов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на:

Второй международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». Санкт-Петербург, 15-20 июня 1998 г.;

Второй международной конференции «Средства математического моделирования». Санкт-Петербург, 14-19 июня 1999 г.;

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять работ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх частей, заключения и библиографии. Диссертация изложена на 134 страницах, иллюстрирована 54 рисунками. Список литературы включает 103 работы.

2. Содержание работы

Во введении приведены обзор литературы, обоснование актуальности настоящей работы и её краткое содержание.

Первая часть работы посвящена построению новых методов численного интегрирования нестационарной задачи теплопроводности.

Дифференциальное уравнение нестационарной задачи теплопроводности имеет вид

$$k\Delta T - \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -Q(x, y, z, t), \quad (1)$$

где T - температура, t - время, c_ε - удельная теплоемкость материала, ρ - плотность материала, k - коэффициент теплопроводности, Q - интенсивность тепловыделения, Δ - оператор Лапласа. Для постановки задачи в замкнутой форме задаются начальные и граничные условия первого, второго или третьего рода.

Конечноэлементная модель нестационарной задачи теплопроводности описывается следующим матричным уравнением

$$C\dot{x} + K(t)x = F(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

где $x(t)$ - вектор-столбец узловых значений температуры, C - матрица теплоемкости, $K(t) = K_c + K_h(t)$, K_c - матрица теплопроводности, $K_h(t)$ - матрица конвекции, $F(t)$ - вектор-столбец тепловых сил. Граничные условия учтены при выводе соотношений (2).

Построение методов численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2) осуществлялось на классе методов семейства Рунге-Кутты.

Для системы уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

где $\dot{x} = [\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^N(t)]^T$, $f = [f^1(t, x), \dots, f^N(t, x)]^T$ методы Рунге-Кутты задаются следующими соотношениями

$$k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad (i=1, \dots, s), \quad (4)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

где x_n - приближенное значение $x(t_n)$, $t_n = nh$, h - шаг интегрирования, s - число стадий метода. Значения коэффициентов a_{ij} , b_i , c_i в конкретном методе Рунге-Кутты определяются таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \equiv \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}.$$

Установлено, что в случае значительно изменяющихся во времени параметров теплообмена использование методов Галеркина и Кранка-Николсона не позволяет получить достоверных результатов, неявный метод Эйлера, в этом случае, обладая только первым порядком точности, воспроизводит результаты с большой погрешностью.

Для численного интегрирования уравнения нестационарной задачи теплопроводности, как показывает опыт, предпочтительнее использовать методы, обладающие совокупностью следующих свойств: высоким порядком точности, А-устойчивостью и L-устойчивостью. Последнее требование обусловлено внутренними свойствами системы – видом собственных чисел задачи теплопроводности и позволяет адекватно описывать быстроубывающие компоненты решения.

Кроме того, при исследовании ряда задач возникает необходимость использовать методы, позволяющие более точно описывать быстрые процессы, не ухудшая точности воспроизведения медленных составляющих решения.

Были построены методы третьего порядка точности на классе трехстадийных методов семейства Рунге-Кутты. Условия, обеспечивающие указанный порядок точности метода были получены из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях h в ряде Тейлора для функции $x(t_{n+1})$, задаваемой

уравнением (3) и в разложение приближенного решения x_{n+1} в ряд Тейлора, определяемого с учетом соотношений (4), записанных с соответствующим числом слагаемых. Полученная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 b_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^3 b_i c_i &= \frac{1}{2}, \\ \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 &= \frac{1}{3}, \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{5}$$

Переходный множитель в методах Рунге-Кутты является рациональной функцией аргумента $h\lambda$

$$\rho(h\lambda) = \frac{P(h\lambda)}{Q(h\lambda)}. \tag{6}$$

Степень полиномов $P(h\lambda)$ и $Q(h\lambda)$ не превышает числа стадий метода.

Для того, чтобы метод был А-устойчивым необходимо, чтобы степень полинома в числителе дроби была меньше или равна степени полинома в знаменателе. L-устойчивость гарантирована, если степень полинома в знаменателе дроби строго меньше степени полинома в числителе. Условия на коэффициенты метода, обеспечивающие А- и L-устойчивость получаются при анализе следующей формулы

$$\rho(h\lambda) = \frac{\det(E - h\lambda A + h\lambda e b^T)}{\det(E - h\lambda A)}. \tag{7}$$

Очевидно, что при больших значениях $h\lambda$ приближенное $\rho(h\lambda)$ значение переходного множителя лучше аппроксимирует точное $\tilde{\rho}(h\lambda) = e^{h\lambda}$ при бóльшей разности степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя (6), что и обеспечивает более точное воспроизведение методом быстрых процессов.

При построении методов также учитывалось, что коэффициенты c_i таблицы Бутчера должны принадлежать промежутку $[0;1]$, в противном случае в процессе численного интегрирования будут использоваться значения величин, вычисленные на предыдущих ($c_i < 0$) или последующих ($c_i > 1$) шагах интегрирования.

Кроме того, принималось во внимание то обстоятельство, что реализация численных процедур методов не должна приводить к значительному увеличению объема вычислительной работы.

Построить метод, удовлетворяющий в полной мере всем указанным

выше многочисленным и отчасти противоречивым требованиям, не представляется возможным. Поэтому предлагаются три метода третьего порядка точности, обладающие различным сочетанием указанных свойств.

Первый предлагаемый метод является диагонально неявным. Коэффициенты метода определяются следующей таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.435866 & 0.435866 & & \\
 0.335866 & -0.1 & 0.435866 & \\
 0.535866 & -0.068805 & 0.168805 & 0.435866 \\
 \hline
 & -7.744643 & 4.051654 & 4.692989
 \end{array} \quad (8)$$

Переходный множитель метода имеет вид

$$\rho_1(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 3\alpha)h\lambda + \left(\frac{1}{2} - 3\alpha + 3\alpha^2\right)(h\lambda)^2}{(1 - \alpha h\lambda)^3}, \quad (9)$$

где $\alpha = 0.4358665$. Разность степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя равна единице.

Коэффициенты второго предлагаемого метода определяются следующей таблицей

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.238332 & 0.238332 & & \\
 0.818470 & 0 & 0.238332 & 0.580138 \\
 0.818470 & 0.656999 & -0.076861 & 0.238332 \\
 \hline
 & 0.548956 & 0.013771 & 0.437273
 \end{array} \quad (10)$$

Переходный множитель второго предлагаемого метода имеет вид

$$\rho_2(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 3\alpha)h\lambda}{1 - 3\alpha h\lambda + \left(3\alpha - \frac{1}{2}\right)(h\lambda)^2 + \left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{3}\right)(h\lambda)^3}, \quad (11)$$

где $\alpha = 0.238332$. Разность степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя равна двум.

Коэффициенты третьего предлагаемого метода определяются следующим образом

$$\begin{array}{c|ccc}
 0.32 & 0.333333 & 0 & -0.013333 \\
 0.962963 & 0.625153 & 0.333333 & 0.004477 \\
 0.962963 & 9.516331 & -8.886702 & 0.333333 \\
 \hline
 & 0.720046 & 0.271563 & 0.008391
 \end{array} \quad (12)$$

Переходный множитель метода имеет вид

$$\rho_3(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} - \frac{(h\lambda)^3}{6}}. \quad (13)$$

Разность степеней полиномов в числителе и знаменателе переходного множителя равна трем. Метод не является абсолютно устойчивым, поскольку нера-

венство $|\rho(h\lambda)| \leq 1$ нарушается при некоторых комплексных значениях $h\lambda$. Однако, метод, в частности, устойчив при $\text{Re } h\lambda \leq 0$, $\text{Im } h\lambda = 0$, что заведомо выполняется в задачах теплопроводности.

Переходные множители предлагаемых методов показаны на рис. 1.

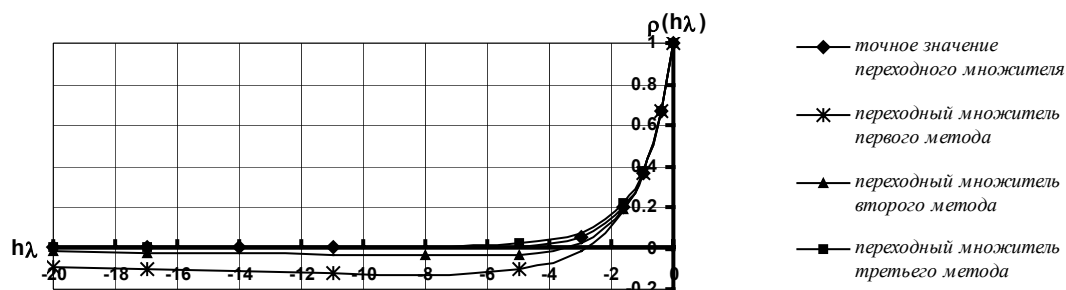


Рис. 1. Переходные множители предлагаемых методов.

Были организованы численные процедуры предлагаемых методов. При их реализации требуется на каждом шаге интегрирования решать три системы алгебраических уравнений с одинаковыми симметричными матрицами в левых частях, в то время как при непосредственном применении методов к системе дифференциальных уравнений (2) на каждом шаге интегрирования необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с несимметричной матрицей, имеющую в три раза большую размерность. Вычислительные схемы методов включают в себя итерационные процедуры. Введением в систему дополнительного параметра были увеличены скорости сходимости итерационных процессов второго и третьего предлагаемых методов. Скорость сходимости итерационного процесса характеризуется величиной r , пропорциональной отклонению приближения от истинного значения в степени равной номеру итерации. Чем меньше $|r|$, тем выше скорость сходимости. Введение в систему дополнительного параметра γ позволило улучшить скорость сходимости итерационного процесса во втором предлагаемом методе, скорость сходимости которого, после введения параметра, характеризуется величиной $|r| = 0.145$, а при $\gamma = 0$ $|r| = 0.78$ и обеспечить сходимость итерационного процесса третьего предлагаемого метода, скорость сходимости которого, характеризуется величиной $|r| = 0.38$.

Анализ качества работы построенных методов проводился на ряде тестовых задач и на примере решения модельной задачи об определении нестационарного температурного поля ротора паровой турбины. Наблюдение велось за одной из точек на поверхности ротора. Параметры теплообмена в этой точке существенно изменяются во времени.

Для того, чтобы иметь возможность оценить точность воспроизведения результатов предлагаемыми методами было построено численное решение при

достаточно малом шаге интегрирования. Это решение очень близко к точному (в дальнейшем оно названо базовым решением). Отметим, что получить точное решение задачи аналитически не представляется возможным.

Применение к задаче построенных и традиционно используемых в задачах теплопроводности методов показало, что второй и третий методы позволяют получить высокую точность расчета при достаточно больших значениях шагов интегрирования – максимальная погрешность расчета вторым методом составляет 2,5%, третьим методом 1,5%, точность воспроизведения результатов первым методом несколько ниже – максимальная погрешность расчета составляет 8%, погрешность расчета традиционно используемыми методами велика – неявный метод Эйлера дает погрешность 27%, а метод второго порядка точности – 24%. Соответствующие кривые показаны на рис. 2.

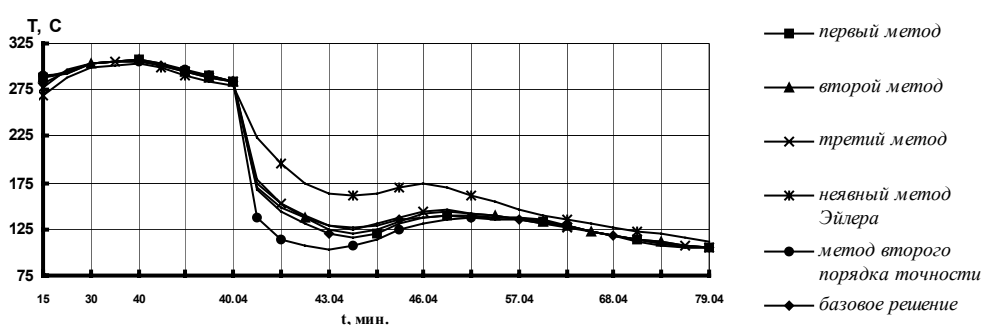


Рис. 2. Зависимость температуры от времени, полученная при больших шагах интегрирования.

Требуемая точность расчёта ($\approx 5\%$) при использовании первого предлагаемого метода, неявного метода Эйлера и метода второго порядка точности была достигнута только при уменьшении шага интегрирования. Время счета при этом увеличивалось по сравнению со временем счета вторым методом в 1,3 раза при использовании первого метода, в 1,7 раз при использовании метода второго порядка точности, почти в 3,2 раза при расчете неявным методом Эйлера.

Таким образом, проведенный анализ на примере решения модельной задачи показал, что реализация численной процедуры первого метода позволяет снизить время счета на каждом шаге интегрирования, однако погрешность расчета при этом возрастает. Необходимая точность может быть достигнута только при уменьшении значений шагов интегрирования, а, следовательно, увеличении времени счета. Это обстоятельство снижает эффективность использования первого метода. Применение к задаче второго и третьего методов подтвердило высокую эффективность их использования. В этом случае удается получить заданную погрешность расчета при больших шагах интегрирования, что позволяет снизить время счета. Наименьшее время достигается при использовании второго предлагаемого метода.

Вторая часть работы посвящена анализу работы предлагаемых методов

в задачах обобщенной теории теплопроводности. Дифференциальное уравнение обобщенной задачи теплопроводности отличается от традиционного уравнения наличием члена, учитывающего тепловую инерцию и содержащего вторую производную температуры по времени. Дифференциальное уравнение задачи обобщенной теории теплопроводности имеет вид

$$k\Delta T - \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -Q(x, y, z), \quad (14)$$

где c – скорость распространения тепла. Для постановки задачи в замкнутой форме задаются начальные и граничные условия первого, второго или третьего рода. Конечноэлементная модель нестационарной задачи теплопроводности описывается следующим матричным уравнением

$$C_T \ddot{\mathcal{G}} + C \dot{\mathcal{G}} + K \mathcal{G} = F, \quad \dot{\mathcal{G}}(0) = \Theta_0, \quad \mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0. \quad (15)$$

где $C_T = \sum_e a^{(e)r} C_T^{(e)} a^{(e)}$, $a^{(e)}$ – матрица кинематических связей элемента,

$C_T^{(e)} = \frac{k}{c^2} \int_{V^{(e)}} N^{(e)r} N^{(e)} dv$, $N^{(e)}$ – матрица функций форм конечного элемента, \mathcal{G}

– глобальный вектор узловых значений температуры. Граничные условия учтены при выводе соотношений (15).

Были организованы численные процедуры предлагаемых методов в задачах обобщенной теории теплопроводности. При их реализации требуется на каждом шаге интегрирования решать три системы алгебраических уравнений с одинаковыми симметричными матрицами в левых частях, в то время как при непосредственном применении методов к системе дифференциальных уравнений (15) на каждом шаге интегрирования необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с несимметричной матрицей, имеющую в шесть раз большую размерность. Вычислительные схемы методов включают в себя итерационные процедуры. Проведен анализ сходимости итерационных процессов. При введении в систему дополнительного параметра, скорость сходимости итерационного процесса во втором предлагаемом методе характеризуется величиной $|r| = 0.231$, скорость сходимости итерационного процесса третьего предлагаемого метода – величиной $|r| = 0.62$.

Анализ качества работы предлагаемых методов в задачах обобщенной теории теплопроводности проводился на примере решения задачи о мгновенном нагреве границы полупространства, аналитическое решение которой известно.

Решения, полученные первым и вторым предлагаемыми методами, практически совпадают с точным решением (см. рис. 3 и 4, соответственно), в то время как решения, полученные неявным методом Эйлера и методом второго



порядка точности, при том же значении шага интегрирования, (рис. 5 и 6) хоть и приближаются к точному решению, но не воспроизводят его в полной мере.

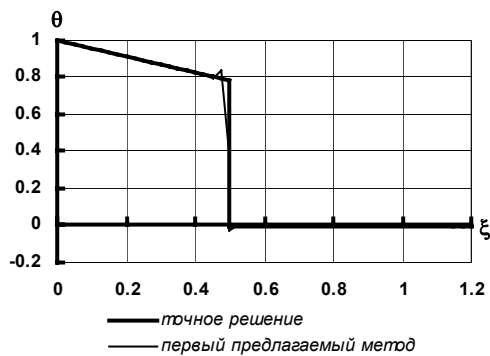


Рис. 3. Сравнение точного решения и решения, полученного первым предлагаемым методом.

Рис. 4. Сравнение точного решения и решения, полученного вторым предлагаемым методом.

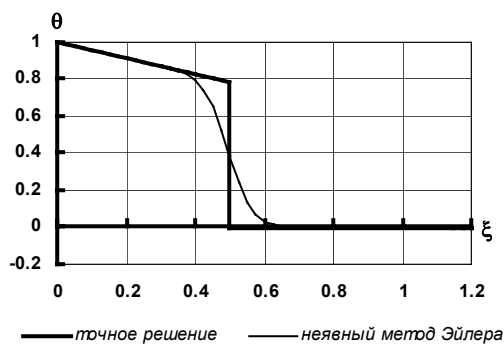


Рис. 5. Сравнение точного решения и решения, полученного неявным методом Эйлера.

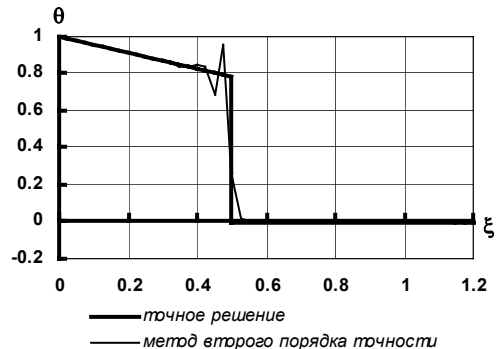


Рис. 6. Сравнение точного решения и решения, полученного методом второго порядка точности.

Наиболее высокая точность расчета была достигнута при использовании второго предлагаемого метода. Решение задачи третьим предлагаемым методом может быть получено лишь при значительном уменьшении шага интегрирования, что вызвано отсутствием абсолютной устойчивости метода.

Третья часть работы посвящена построению новых алгоритмов численного интегрирования задачи связанной теории термоупругости. Задача связанной теории термоупругости описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\underline{u}} &= \mu \Delta \underline{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla \theta + \underline{F}, \\ \rho c_\varepsilon \dot{\theta} &= k \Delta \theta + Q - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \nabla \cdot \dot{\underline{u}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\theta \equiv (T - T_0)$, T – текущая температура, T_0 – абсолютная температура в естественном состоянии, λ, μ – коэффициенты Ламе, α – температурный коэффициент линейного расширения, \underline{F} – вектор интенсивности внешних нагрузок. Для постановки задачи в замкнутой форме задаются начальные и граничные условия. Граничные условия задачи термоупругости складываются из механических и тепловых граничных условий.

Конечноэлементная модель связанной задачи термоупругости описывается следующей системой матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u} + K_1 u - C \theta &= F(t), \\ C^T \dot{u} + M_2 \dot{\theta} + K_2 \theta &= Q(t), \end{aligned} \quad u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0, \theta(0) = \theta_0, \quad (17)$$

где $u(t)$ - вектор-столбец перемещений, $\theta(t)$ - вектор-столбец температуры, M_1 - матрица масс, K_1 - матрица жесткости, M_2 - матрица теплоемкости, K_2 - матрица теплопроводности, C - матрица термоупругости, $F(t)$ - вектор-столбец сил, $Q(t)$ - вектор-столбец тепловых нагрузок. Граничные условия учитываются при выводе соотношений (17).

Путём перехода к безразмерным переменным система (17) допускает выделение малого параметра

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 \varphi'' + \tilde{K}_1 \varphi - \sqrt{\delta} \tilde{C} \bar{\vartheta} &= \tilde{F}(\eta), \\ \tilde{M}_2 \bar{\vartheta}' + \tilde{K}_2 \bar{\vartheta} + \sqrt{\delta} \tilde{C}^T \varphi' &= \tilde{Q}(\eta), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\delta = \frac{\beta^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) \rho c_\varepsilon}$. Параметр δ характеризует величину взаимодействия полей перемещений и температуры и называется параметром или коэффициентом связанности. Значения δ для основных металлов лежат в пределах 0.01...0.03.

Были получены разложения корней характеристического уравнения системы конечноэлементных уравнений связанной задачи термоупругости по степеням параметра связанности. При $\delta = 0$ корни характеристического уравнения задачи (18) разделяются на две группы – собственные числа задачи о колебаниях консервативной системы $\lambda_s^{(0)} = \pm i \Omega_s$ и собственные числа задачи теплопроводности $\lambda_s^{(0)} = -\mu_p$. Асимптотическое разложение корней характеристического уравнения по степеням параметра связанности имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \pm i \Omega_s + \delta \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_\theta} \frac{\mu_j c_{sj}^2}{\Omega_s^2 + \mu_j^2} \pm i \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_\theta} \frac{\Omega_s c_{sj}^2}{\Omega_s^2 + \mu_j^2} \right) + \dots \\ \lambda_s &= -\mu_p + \delta \mu_p \sum_{j=1}^{k_u} \frac{c_{pj}^2}{\Omega_j^2 + \mu_p^2} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, при $\delta \neq 0$ вместо пар чисто мнимых корней получаем пары комплексно сопряженных корней с малыми отрицательными вещественными частями, а вещественные отрицательные собственные числа несколько изменятся по абсолютной величине, оставаясь вещественными и отрицательными.

Были построены алгоритмы численного интегрирования связанной задачи термоупругости на основе методов семейства Рунге-Кутты. Построение

алгоритмов осуществлялось с учетом внутренних свойств механической системы. Дифференциальные уравнения конечноэлементной модели задачи (17) представляют собой связанные перекрестными слагаемыми уравнение колебаний консервативной системы и уравнение теплопроводности, которое можно рассматривать как уравнение, описывающие систему с большой диссипацией энергии. Метод численного интегрирования должен быть согласован с внутренними свойствами системы. Так для консервативных систем следует применять методы, которые сохраняли бы полную механическую энергию системы, а для систем с большой диссипацией энергии желательно использовать методы, которые адекватно описывали бы поглощение энергии. В соответствии со сказанным, к первому уравнению системы (17) нужно применить метод, сохраняющий полную механическую энергию системы в задачах о колебаниях консервативной системы. К таким методам, в частности, принадлежат метод трапеций (метод имеет второй порядок точности) и двухстадийный метод Гаусса-Лежандра четвертого порядка точности. А ко второму уравнению системы (17) следует применить метод, который бы адекватно описывал поглощение энергии в системе. В качестве такого метода был выбран метод второго порядка точности, который обладает свойством L-устойчивости. Анализ качества работы построенных алгоритмов проводился на примере связанной задачи о распространении плоской термоупругой волны, точное решение которой известно.

Сравнивая распределения напряжения по координате в точном решении и численных решениях, полученных при помощи алгоритмов, построенных на основе методов семейства Рунге-Кутты легко заметить, что хотя общий характер распределения напряжения отражается достаточно хорошо, вблизи границы полупространства вместо плавного возрастания напряжения наблюдаются неоправданные осцилляции, а скачок напряжения на фронте волны размыт. По-видимому, причина происходящего в том, что конечноэлементная модель не позволяет адекватно отразить специфику задачи – резкое изменение температурного поля и поля напряжений. Поэтому, для того, чтобы корректно описать распространение волны деформаций предлагается построить алгоритм, в котором величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние, определяются соотношениями метода прямого математического моделирования, а значения температуры при помощи метода второго порядка точности, обладающего свойством L-устойчивости. Применение полученного алгоритма к решению задачи о мгновенном нагреве границы полупространства показало, что использование соотношений метода прямого математического моделирования позволило значительно улучшить качество воспроизводимых результатов: устранить неоправданные осцилляции вблизи границы полупространства, получить четкий скачок напряжения. Алгоритм позволяет отразить

качественную особенность распространения термоупругой волны, возникающую при учете эффекта связанности.

Заключение диссертационной работы содержит основные результаты и выводы.

Основные результаты и выводы. Построены новые методы численного интегрирования нестационарной задачи теплопроводности. Все три метода принадлежат семейству Рунге-Кутты, имеют третий порядок точности, обладают свойством L-устойчивости и, за исключением третьего метода, абсолютно устойчивы. Второй и третий методы имеют более высокую точность аппроксимации точного значения переходного множителя при больших значениях произведения шага интегрирования и любого собственного числа интегрируемой системы. Разработаны вычислительные схемы методов в задачах нестационарной теплопроводности. Проведен анализ сходимости итерационных процессов, входящих в численные процедуры методов. Предложен способ организации итерационной процедуры, позволивший улучшить скорость сходимости итерационного процесса второго метода и получить сходимость итерационного процесса третьего метода. Проведен анализ качества работы построенных методов в задачах нестационарной теплопроводности. Решены ряд тестовых задач и модельная задача об определении нестационарных полей температур ротора паровой турбины, который подтвердил высокую эффективность использования предложенных методов. Наименьшее время счета, при заданной погрешности 5 %, достигается при использовании второго предлагаемого метода, что по сравнению со временем счета неявным методом Эйлера меньше в 3,2 раза, по сравнению со временем счета методом второго порядка точности – в 1,7 раз.

Рассмотрена работа предлагаемых методов в задаче обобщенной теории теплопроводности. Организованы численные процедуры методов в этом классе задач. Проведен анализ сходимости итерационных процессов, входящих в вычислительные схемы методов. Анализ качества работы предлагаемых методов проводился на примере решения задачи о мгновенном нагреве границы полупространства, аналитическое решение которой известно. Полученные результаты подтвердили высокую эффективность использования первого и второго предлагаемых методов. Наиболее высокая точность расчета достигается при использовании второго предлагаемого метода. Неявный метод Эйлера и метод второго порядка точности при том же значении шага интегрирования не воспроизводят решение в полной мере. Использование третьего предлагаемого метода для решения задач обобщенной теории теплопроводности является неэффективным.

Проведен анализ свойств конечноэлементной модели задачи связанной теории термоупругости. Доказана устойчивость решения системы уравнений

конечноэлементной модели. Получено разложение корней характеристического уравнения задачи в конечноэлементной постановке по степеням параметра связанности. Определен вид собственных чисел задачи. Построены алгоритмы численного решения связанной задачи термоупругости на основе методов семейства Рунге-Кутты и метода прямого математического моделирования. Проведен анализ качества работы построенных алгоритмов. Решена задача о мгновенном нагреве границы полупространства, аналитическое решение которой известно. Наиболее высокая точность при решении одномерных задач достигается при использовании алгоритма, построенного на основе метода прямого математического моделирования. Этот алгоритм позволяет адекватно отразить специфику рассматриваемой задачи – резкое изменение температурного поля и поля напряжений и качественную особенность распространения термоупругой волны, возникающую при учете эффекта связанности. Алгоритмы, построенные на основе методов Рунге-Кутты, являются достаточно эффективными, по крайней мере, в тех случаях, когда изменения полей напряжений и температур являются не слишком быстрыми. Эти алгоритмы могут применяться и в двух- и трехмерных задачах.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Новые методы численного интегрирования уравнений связанной задачи термоупругости. Вторая международная конференция «Дифференциальные уравнения и их применения». Тез. докл. Санкт-Петербург, 15-20 июня 1998 г, с. 120-121.
2. Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Новые методы численного интегрирования уравнений связанной задачи термоупругости. Электр. журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 3, 1998 (<http://www.neva.ru/journal>).
3. Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Численные методы повышенного порядка точности в нестационарной задаче теплопроводности. Вторая международная конференция «Средства математического моделирования». Тез. докл. Санкт-Петербург, 14-19 июня 1999 г. с. 182.
4. Постоялкина Е.А., Исполов Ю.Г., Шабров Н.Н. Метод повышенного порядка точности в расчете нестационарного температурного поля ротора паровой турбины. XXVIII неделя науки СПбГТУ. Часть III, материалы межвузовской научной конференции. СПб, 2000 г, с. 39-40.
5. Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Построение методов и организация алгоритмов численного интегрирования нестационарной задачи теплопроводности. Электр. журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2002, № 2. (<http://www.neva.ru/journal>).

