Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

И.А.Андреева

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2002

УДК 517.925

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного
технического университета

Андреева И. А.

Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка: Методические указания. — СПб.: СПбГТУ, 2002. — 48 с.

Методические указания представляют собой развернутое изложение вопросов, связанных с существованием и поиском особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Предназначены для студентов, аспирантов и преподавателей механико-математических и технических специальностей университетов. Библиогр. 7 назв.

Методические указания подготовлены при финансовой поддержке программы "Ведущие научные школы" (гракш Л/^{2}- 00-15-96021)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как говорил Исаак Ньютон, законы природы записаны на языке дифференциальных уравнений.

В частности, классическая теория нормальных систем дифференциальных уравнений, опирающаяся на теоремы сущестования и единственности Коши, описывает детерминированные процессы, происходящие в природе, технике и даже в обществе, т. е. такие, для которых состояние изучаемой системы в любой фиксированный момент определяет ее состояние в любой другой момент. Решения, описывающие такие процессы, называются обыкновенными.

При нарушении же условий теоремы Коши картина резко меняется. Точка, в любой окрестности которой такое нарушение имеет место, может стать для системы точкой неединственности, точкой ветвления, описываемого системой процесса. Решение системы, каждая точка которого является точкой неединственности, называется особым. Но задача полного интегрирования системы дифференциальных уравнений предполагает нахождение всех ее решений, а потому требует и знания методов отыскания ее особых решений. Между тем, общие руководства по дифференциальным уравнениям, в которых эти методы описываются более или менее полно, в наше время становятся библиографической редкостью и мало доступны как для молодых преподавателей, так и, в особенности, для студентов. Цель настоящей работы восполнить этот пробел.

Работа посвящена уравнениям первого порядка, причем существенная ее часть — уравнениям первого порядка, не разрешенным относительно производной. Дело в том, что такие уравнения интегрируются, как правило, методом параметризации, а здесь возникают еще и такие вопросы: 1) всякому ли решению уравнения в параметрах соответствует решение исходного уравнения, 2) каковы признаки решения уравнения в параметрах, которое порождает а) обыкновенное, б) особое решение исходного уравнения?

В данной работе делается попытка ответить и на эти вопросы.

I. Уравнения, разрешенные относительно производной

Вопрос об особых решениях дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, в детальных руководствах по интегрированию таких уравнений (см., например, [1, 2]) излагается достаточно подробно. Здесь все достаточно прозрачно, и мы начнем свою работу с изложения именно этого вопроса.

§ 1. Основные понятия

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad f \in C(G), \tag{1.1}$$

где $G \subset (\mathbb{R}^2)$ — область (она называется *областью задания* уравнения). *Решением уравнения* (1.1) называется любая функция $\varphi : I = \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{R}$ класса $C^1(I)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо переменной y, обращает его в тождество относительно $x : \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, $x \in I$. Здесь $I = \langle\alpha, \beta\rangle$ — открытый, полуоткрытый или замкнутый промежуток оси x, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$. График решения φ, т. е. кривая $y = \varphi(x)$, $x \in I$, называется *интегральной кривой уравнения.*

Основной для уравнения (1.1) является следующая *начальная задача* (*задача Коши*): задана точка $p_0 = (x_0, y_0) \in G$, требуется найти решение φ уравнения, удовлетворяющее условию

$$\varphi(x_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) называется *начальным условием* искомого решения φ. Говорят, что *решение задачи Коши* (1.1),(1.2) *единственно*, если для любых двух ее решений $\varphi_k(x)$, $x \in I_k$, $k = 1, 2$, существует $\delta > 0 : \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$, $x \in I_1 \cap I_2 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При этом точка $p_0 = (x_0, y_0)$ называется *точкой единственности* для уравнения (1.1). Множество $G'(\subset G)$, каждая точка которого есть точка единственности для уравнения (1.1), называется *множеством единственности* для этого уравнения.

Условия существования ($\exists$) и единственности (!) решения задачи Коши для уравнения (1.1) дают следующие теоремы.

Теорема 1.1 (Коши) [1. С. 36.]. *Если в уравнении* (1.1) f *и* $f'_y \in C(G)$, *то* $\forall p_0 = (x_0, y_0) \in G$ $\exists!$ *решение задачи Коши* (1.1),(1.2) $\varphi(x)$, $x \in I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Здесь число h определяется следующим образом. Пусть числа $a > 0$ и $b > 0$ таковы, что прямоугольник

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b\}$$

содержится в G, а число $M > 0$ таково, что $|f(x, y)| \leqslant M$ в R. Тогда $h = \min\{a, b/M\}$. Отрезок I_h (с таким h) называется *отрезком Коши* задачи (1.1), (1.2).

При условиях теоремы Коши область G является областью $\exists$ и ! для уравнения (1.1).

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение

$$y' = p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_n(x) \equiv f(x, y),$$

где $n \geqslant 0$ — целое, $p_i \in C(I)$, $i = \overline{0, n}$, $I = (\alpha, \beta)$, $p_0(x) \not\equiv 0$ в I. Для него область задания $G = I \times \mathbb{R}$, $f, f'_y \in C(G)$, а потому G — область $\exists$ и !

Теорема 1.2 (Пеано) [1. С. 35.]. *Если в уравнении* (1.1) $f \in C(G)$, *то* $\forall (x_0, y_0) \in G$ *задача Коши (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно решение* $\varphi(x)$, $x \in I_h$, *где* I_h *— ее отрезок Коши.*

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) $\varphi(x)$, $x \in I_h$, всегда может быть продолжено на максимальный интервал существования $I_{\max} = (\omega_-, \omega_+)$ [3. С. 24]. При условиях теоремы Коши такое продолжение единственно, а при условиях теоремы Пеано, вообще говоря, неединственно. Любое максимально продолженное решение называется *полным.*

Решение φ уравнения (1.1) называется *обыкновенным* (*особым*), если каждая его точка $(x_0, \varphi(x_0))$ есть точка единственности (неединственности) для этого уравнения.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{2/3} \equiv f(x, y).$$

Для него область задания $G = \mathbb{R}^2$. По теореме Пеано она является областью существования его решений. По теореме Коши области $G_\pm : \pm y > 0$ суть области $\exists$ и ! для него. Функция $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — его решение. На этом решении $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не существует. Следовательно, для каждой из его точек $(x_0, 0)$ единственность решения задачи

Коши теоремой Коши не гарантируется. В данном случае ее и нет: через любую точку $(x_0, 0)$, кроме решения $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, проходит еще, например, решение $y = (x - x_0)^3$, $x \in \mathbb{R}$, данного уравнения, причем $\forall \delta > 0$ эти решения различны в δ-окрестности точки x_0. Таким образом, решение $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, данного уравнения удовлетворяет определению особого решения и, следовательно, является таковым.

Семейство функций (кривых)

$$y = \varphi(x, C),\ \varphi \in C(D), \tag{1.3}$$

$D = \{(x, C), C \in \Gamma = (\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}, x \in I_C = (\alpha_C, \beta_C)\}$, называется ***общим решением*** уравнения (1.1) на множестве $G' \subset G$, если

1) $\forall p_0 = (x_0, y_0) \in G'$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет решение $C = C_0 \in \Gamma$ и притом только одно,

2) функция $y = \varphi(x, C_0)$, $x \in I_{C_0}$, есть решение уравнения (1.1).

На геометрическом языке это означает следующее:

1′) через каждую точку $p_0 \in G'$ проходит кривая семейства (1.3) и притом только одна,

2′) эта кривая является интегральной кривой уравнения (1.1).

Решение $y = \varphi(x, C_0)$, $x \in I_{C_0}$, уравнения (1.1), получающееся из его общего решения (1.3) при частном значении C_0 параметра C, называется ***частным решением*** (по отношению к общему решению (1.3)). Кроме решений семейства (1.3), уравнение (1.1) может иметь в G' решения, не входящие в это семейство. Более того, если $G' \neq G$, то оно имеет также решения в $G \setminus G'$. Процесс нахождения всех решений уравнения (1.1) называется ***интегрированием*** последнего. Общие методы интегрирования дифференциальных уравнений излагаются в общих курсах дифференциальных уравнений (см., например, [1]) и в соответствующих главах курсов математического анализа. Здесь мы остановимся на способах выделения их особых решений. Для того чтобы сформулировать признаки таких решений, напомним еще определение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.

Пусть задано семейство дифференцируемых кривых (1.3). Пусть эти кривые покрывают множество G' плоскости x, y. Пусть кривая $L : y = \psi(x)$, $\psi \in C^1(J)$, также лежит в G'. Кривая L называется ***огибающей семейства кривых*** (1.3), если

1) $\forall\, x_0 \in J\ \exists\, C_0 = C(x_0) \in \Gamma$: *а*) $(x_0, \psi(x_0)) = (x_0, \varphi(x_0, C_0))$, *б*) $\psi'(x_0)) = \varphi'_x(x_0, C_0))$,

2) $C(x_0) \not\equiv \mathrm{const}$ на любом интервале $J'\ (\subset J)$ изменения x_0 (т.е. никакая собственная часть $L' : y = \psi(x)$, $x \in J'$, кривой L не лежит на какой-либо фиксированной кривой L_{C_0} семейства (1.3)).

Пример 1.3. Семейство кривых $L_C : y = (x-C)^2$, $(x, C) \in \mathbb{R}^2$, заполняет полуплоскость $y \geqslant 0$ плоскости x, y. Линия $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — огибающая этого семейства кривых.

§ 2. Признаки особого решения

Теорема 2.1 (о решении, для которого не выполняется условие единственности Коши). *Пусть* $L : y = \psi(x)$, $x \in J$, — *интегральная кривая уравнения* (1.1) *и* $\exists$ *область* $\widetilde{G}\,(\subset G)$ *такая, что а)* $L \subset \widetilde{G}$ *или б)* $L \subset \partial\widetilde{G}$. *Пусть* $G' = \widetilde{G}$ *в случае а),* $G' = \widetilde{G} \cup L$ *в случае б) и уравнение* (1.1) *имеет на множестве* G' *общее решение* (1.3). *Пусть* $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G')$, *кроме точек кривой* L.

А. *Если решение уравнения* (1.1) $y = \psi(x)$, $x \in J$, — *частное по отношению к общему решению* (1.3), *то оно является обыкновенным решением уравнения* (1.1), *рассматриваемого на множестве* G'.

Б. *Если решение* $\psi(x)$, $x \in J$, *(равно как и его сужение на любой промежуток* $J' \subset J$*) не является частным по отношению к* (1.3), *то оно является особым решением уравнения* (1.1).

Доказательство. **А**. Будем рассматривать уравнение (1.1) на множестве G'. По определению общего решения интегральные кривые семейства (1.3) покрывают G' со свойством единственности. При условиях утверждения **А** теоремы кривая L — одна из них. По теореме Коши $G' \setminus L$ — множество единственности для уравнения (1.1), а потому в нем нет интегральных кривых уравнения (1.1), отличных от кривых семейства (1.3). Следовательно, G' — множество единственности для уравнения (1.1), рассматриваемого на G'. В частности, каждая точка $(x, \psi(x)) \in L$ есть точка единственности для (1.1), а потому $y = \psi(x)$, $x \in J$, — обыкновенное решение этого уравнения.

Б. При условиях утверждения **Б** теоремы $\forall\, x_0 \in J$ через точку $(x_0, \psi(x_0)) \in L$ проходят, по крайней мере, следующие два решения уравнения (1.1): решение $y = \psi(x)$ и некоторое частное решение

$y=\varphi(x,C_0)$ семейства (1.3), причем они различны: $\forall\,\delta>0\ \ \psi(x)\not\equiv\varphi(x,C_0)$ в $J_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)$. А это и означает, что $y=\psi(x)$, $x\in J$, — особое решение уравнения (1.1). □

Теорема 2.2 (второй достаточный признак особого решения) [1.С.49]. *Пусть* (1.3) *есть общее решение уравнения* (1.1) *на множестве* $G'\subset G$. *Если кривая* $L: y=\psi(x)$, $x\in J$, *есть огибающая семейства кривых* (1.3), *то функция* $\psi(x)$, $x\in J$, — *особое решение уравнения* (1.1).

Доказательство. Согласно п. 1) определения огибающей $\forall\,x_0\in J\ \exists\,C_0=C(x_0)$: *а*) $(x_0,\psi(x_0))=(x_0,\varphi(x_0,C_0))$, *б*) $\psi'(x_0)=\varphi'_x(x_0,C_0)=f(x_0,\varphi(x_0,C_0))=f(x_0,\psi(x_0))$. Следовательно, $\psi(x)$, $x\in J$, — решение уравнения (1.1). Согласно п. 2) определения огибающей никакая ее собственная часть L' не лежит на фиксированной кривой L_C семейства (1.3). Следовательно, через любую точку $(x_0,\psi(x_0))\in L$ проходят, по крайней мере, два различных решения уравнения (1.1): $y=\psi(x)$ и $y=\varphi(x,C(x_0))$. А это и означает, что $\psi(x)$, $x\in J$, — особое решение уравнения (1.1). □

Замечание 2.1. Условия утверждения **Б** теоремы 2.1 и условия теоремы 2.2 фактически тождественны, но высказаны разными словами.

Таким образом, мы получаем два способа выявления особых решений уравнения (1.1).

Первый способ (*способ* 1) опирается на теорему 2.1 и позволяет проверить на особенность любое решение уравнения (1.1) $y=\psi(x)$, $x\in J$, на котором не выполняются условия теоремы Коши. Для этого достаточно построить общее решение (1.3) уравнения (1.1) на множестве G', содержащем в себе кривую $L: y=\psi(x)$, $x\in J$, и применить теорему 2.1.

Второй способ (*способ* 2) опирается на теорему 2.2 и сводит задачу о существовании и нахождении особого решения уравнения (1.1), расположенного в множестве G', на котором действует его общее решение (1.3), к аналогичной задаче об огибающей семейства кривых (1.3).

Путь к решению последней задачи указывает следующая теорема.

Теорема 2.3 (первый достаточный признак огибающей) [1. С. 50]. *Пусть семейство кривых* (1.3), *где* $\varphi \in C^2(D)$, *покрывает множество* G. *Если уравнение*

$$\varphi'_C(x, C) = 0 \tag{2.1}$$

имеет решение $C = C(x)$, $x \in J$, *класса* C^1, *причем* $(x, C(x)) \in D$ $\forall x \in J$, $C'(x) \not\equiv 0$ *на любом интервале* $J' \subset J$, *то линия* L : $y = \psi(x) \equiv \varphi(x, C(x))$, $x \in J$, *является огибающей семейства кривых* (1.3).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что 1) $\forall x_0 \in J$

а) $\psi(x_0) = \varphi(x_0, C(x_0))$,

б) $\psi'(x_0) = \varphi'_x(x_0, C(x_0)) + \varphi'_C(x_0, C(x_0))C'(x_0) = \varphi'_x(x_0, C(x_0))$,

2) $C(x_0) \not\equiv \text{const}$ на любом интервале $J' \subset J$ изменения x_0. А это и означает согласно определению огибающей, что $y = \psi(x) \equiv \varphi(x, C(x))$, $x \in J$, — огибающая семейства кривых (1.3). □

§ 3. Примеры

Пример 3.1. Рассмотрим снова уравнение

$$y' = 3y^{2/3} \equiv f(x, y). \tag{3.1}$$

Ранее мы уже показали, что для него решение $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое, ибо удовлетворяет определению особого решения. Покажем, что в этом можно убедиться также способами 1 и 2.

Способ 1. Общее решение уравнения (3.1) в области $G = \mathbb{R}^2$ имеет вид $y = (x - C)^3$, $(x, C) \in \mathbb{R}^2$. Решение $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$ (равно как и его сужение на любой промежуток $J \subset \mathbb{R}$), не получается из общего ни при каком фиксированном значении параметра C. Следовательно (по теореме 2.1, п. **Б**), $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение уравнения (3.1).

Способ 2. Для уравнения (3.1) и указанного его общего решения уравнение (2.1) принимает вид: $3(x - C)^2 = 0$. Оно имеет решение $C = C(x) \equiv x$ класса $C^1(\mathbb{R})$, $C'(x) \equiv 1 \neq 0$ в $\mathbb{R}$. Следовательно (по теореме 2.3), линия $y = 3(x - C(x))^2 \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, есть огибающая семейства кривых $y = (x - C)^3$. Из этого (по теореме 2.2) следует, что функция $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение уравнения (3.1).

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$y' = \left\{ \begin{array}{ll} y\ln^2|y|, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{array} \right\} \equiv f(x,y). \qquad (3.2)$$

Здесь, как и в уравнении (3.1), функция f непрерывна в области $G = \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывна в $\mathbb{R}^2 \setminus L$, $L : y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — решение. Следовательно, и для этого уравнения области $G_\pm : \pm y > 0$ суть области $\exists$ и $!$, а решение $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, может быть как особым, так и обыкновенным. Покажем, что для него реализуется первая из этих возможностей.

Способ 1. Интегрируя уравнение в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ : y \geqslant 0$, получаем его общее решение на множестве $G' = \mathbb{R}^2_+ \setminus L_1$ ($L_1 : y \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$) в виде

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \exp\{-\frac{1}{x-C}\}, & x \neq C \\ 0, & x = C \end{array} \right\} \equiv \varphi(x,C),\ (x,C) \in \mathbb{R}^2. \qquad (3.3)$$

Линия $L : y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, лежит в G', но не может быть получена из (3.3) ни при каком значении постоянной $C \in \mathbb{R}$ (равно как и любая ее собственная часть). Следовательно (по теореме 2.1, п. **Б**), $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение уравнения (3.2).

Отметим, что интегральная прямая $L_1 : y \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, также не получается из (3.3) ни при каком значении $C \in \mathbb{R}$. Но $L_1 \subset G_+$ и, следовательно, является обыкновенной интегральной кривой. А из (3.3) она не может быть получена ни при каком значении $C \in \mathbb{R}$ лишь потому, что не лежит в G'. Она получается при $C = 0$ из общего решения уравнения (3.2)

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \exp\{\frac{C}{1-Cx}\}, & x \neq 1/C \\ 0, & x = 1/C \end{array} \right\} \equiv \varphi_1(x,C),\ (x,C) \in \mathbb{R}^2,$$

действующего на множестве $\mathbb{R}^2_+ \setminus L_0$, где $L_0 : y = \varphi(x,0)$, т. е. $y = \exp\{-\frac{1}{x}\}$ при $x \neq 0$, $y = 0$ при $x = 0$.

Способ 2. Будем рассматривать общее решение (3.3) уравнения (3.2) в полосе $G_1 : 0 \leqslant y < 1$, т. е. будем считать, что в (3.3) $(x,C) \in D : C \in \mathbb{R}$, $x \geqslant C$. В области $x > C$ $\varphi'_x(x,C) = \exp\{-\frac{1}{x-C}\}/(x-C)^2$ существует, непрерывна и стремится к нулю при $x \to C$. $\varphi'_x(C,C) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \exp\{-\frac{1}{\Delta x}\}/\Delta x = 0$. Во всей области D $\varphi'_C(x,C) = -\varphi'_x(x,C)$. Следовательно, $\varphi \in C^1(D)$, причем $\varphi'_C(x,C) = 0$ лишь при $C = x$. Но при $C = x$ формула (3.3) дает: $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. По теореме 2.3 эта линия — огибающая семейства кривых (3.3). По теореме 2.2 функция $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение уравнения (3.2).

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение

$$y' = \left\{ \begin{array}{cc} y\ln|y|, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{array} \right\} \equiv f(x,y). \tag{3.4}$$

Здесь также $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus L)$, $L:\ y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — интегральная кривая, которая может претендовать на статус особой. Но уравнение (3.4) имеет на плоскости $\mathbb{R}^2$ общее решение

$$y = \left\{ \begin{array}{cc} \pm\exp\{(\ln C)\exp x\}, & C > 0 \\ 0, & C = 0 \end{array} \right\} \equiv \varphi(x,C),\ C \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

из которого при $C = 0$ получается решение $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно (по теореме 2.1, п. **А**), оно является обыкновенным решением уравнения (3.4).

Пример 3.4. Рассмотрим уравнение

$$y' = \left\{ \begin{array}{cc} y\ln|y|, & y < 0 \\ 0, & y = 0 \\ y\ln^2|y|, & y > 0 \end{array} \right\} \equiv f(x,y). \tag{3.6}$$

Здесь также $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus L)$, $L:\ y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — единственная интегральная кривая, которая может быть особой. Уравнение (3.6) в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ : y \geqslant 0$ имеет общее решение (3.3), а в полуплоскости $\mathbb{R}^2_-\ :\ y \leqslant 0$ — общее решение (3.5) (со знаком "—" перед экспонентой при $C > 0$). Применяя к этим общим решениям уравнения (3.6) теорему 2.1, находим из (3.3), что $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение уравнения (3.6), а из (3.5), что $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — обыкновенное решение уравнения (3.6), рассматриваемого в $\mathbb{R}^2_-$. Следовательно, для уравнения (3.6), рассматриваемого во всей области задания $\mathbb{R}^2$, $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение.

§ 4. Частный случай

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(y), \quad f \in C(c, d), \ (c, d) \subset \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Его область задания $G = \mathbb{R} \times (c, d)$. Допустим сначала, что $f(y) \neq 0$ в (c, d). Тогда любое решение уравнения (4.1) $y = \varphi(x)$, $x \in I$, монотонно, а его обратная функция $x = \psi(y)$, $y \in J = \varphi(I)$, является решением уравнения

$$x' = g(y) \equiv 1/f(y). \tag{4.1'}$$

Для (4.1′) по теореме Коши $(c, d) \times \mathbb{R}$ — область единственности $\Longrightarrow$ для (4.1) G — область единственности, $\Longrightarrow$ любое его решение — обыкновенное.

Допустим теперь, что $\exists\, c_1 \in (c, d) : f(c_1) = 0$, $f(y) \neq 0$ в (c, d) при $y \neq c_1$. Тогда $y = c_1$, $x \in \mathbb{R}$, — решение уравнения (4.1). Исследуем его на "обыкновенность–особенность". Для этого будем рассматривать уравнение (4.1) в полосе $G_1 = \mathbb{R} \times (c, c_1]$, считая, что $f(y) > 0$ в (c, c_1).

Теорема 4.1 [2. С. 124]. *Пусть* $y_0 \in (c, c_1)$. *Если несобственный интеграл* $I_1 = \int\limits_{y_0}^{c_1} \frac{dy}{f(y)}$ *расходится (сходится), то* $y = c_1$, $x \in \mathbb{R}$, *— обыкновенное (особое) решение уравнения* (4.1), *рассматриваемого в полосе* G_1.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in G_1^0 = \mathbb{R} \times (c, c_1)$ — произвольная точка, $L_0 : y = \varphi_0(x)$, $x \in I = (\alpha, \beta)$, $\varphi(x_0) = y_0$, — полная (относительно области G_1^0) интегральная кривая уравнения (4.1). Она представима также в виде

$$x = \psi_0(y) \equiv x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}, \quad y \in (c, c_1) = \varphi_0(\alpha, \beta). \tag{4.2}$$

Если интеграл I_1 расходится, т.е. при $y \to c_1$ $x = \psi_0(y) \to +\infty$, то решение (4.2) уравнения (4.1′) не продолжимо на промежуток $(c, c_1]$ и, следовательно, ни одно решение уравнения (4.1) не выходит из полосы G_1^0 на прямую $y = c_1$, а потому $y = c_1$, $x \in \mathbb{R}$, — обыкновенное решение уравнения (4.1), рассматриваемого в G_1.

Пусть интеграл I_1 сходится: $I_1 = m \in \mathbb{R}$. Тогда при $y \to c_1$ $x = \psi(y) \to x_0 + m = \beta$, $\psi'(y) \to +\infty \Longrightarrow$ при $x \to \beta$ решение $\varphi_0(x) \to c_1$, $\varphi_0'(x) \to 0 \Longrightarrow$ его можно продолжить на промежуток $(\alpha, \beta]$, для чего достаточно положить $\varphi_0(\beta) = c_1$, $\varphi_0'(\beta) = 0$. Этим условиям удовлетворяет и решение $y = c_1$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, (β, c_1) — точка неединственности для (4.1). Но x_0 — произвольно $\Longrightarrow \beta = x_0 + m$ — произвольно $\Longrightarrow$ любая точка (β, c_1) решения $y = c_1$, $x \in \mathbb{R}$, — точка неединственности для (4.1) $\Longrightarrow$ это решение — особое. □

Замечание. Случай, когда $f(y) < 0$ в (c, c_1) сводится к рассматриваемому в теореме 4.1 заменой в уравнении (4.1) x на $-x$, а случай, когда $c > c_1$, — заменой y на $-y$.

Примеры. Уравнения (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6) суть уравнения вида (4.1). Для любого из них $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — решение. Проверить его на обыкновенность–особенность можно и с помощью теоремы 4.1.

Для уравнения (3.1) при любом $y_0 \neq 0$ $\displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{3y^{2/3}} = -y_0^{1/3}$ (т. е. сходится) $\Longrightarrow$ для (3.1) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое решение.

Для уравнения (3.2) при любом y_0, $|y_0| \in (0,1)$, $\displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{y \ln^2 |y|} = \frac{1}{\ln |y_0|}$ (т. е. сходится) $\Longrightarrow$ для (3.2) решение $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особое.

Для уравнения (3.4) при любом y_0, $|y_0| \in (0,1)$, $\displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{y \ln |y|} = +\infty$ (расходится) $\Longrightarrow$ для (3.4) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — обыкновенное решение.

Для уравнения (3.6) при $y_0 \in (-1, 0)$ $\displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{y \ln |y|} = +\infty$ (расходится), а при $y_0 \in (0,1)$ $\displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{y \ln |y|} = \frac{1}{\ln |y_0|}$ (сходится) $\Longrightarrow$ решение $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — обыкновенное для уравнения (3.6), рассматриваемого в полуплоскости $y \leqslant 0$, особое — для (3.6), рассматриваемого в полуплоскости $y \geqslant 0$ или на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

II. Уравнения, не разрешенные относительно производной

§ 1. Основные понятия

В этой части мы будем рассматривать уравнение

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.1}$$

предполагая, что в нем F и $F'_{y'} \in C(D)$, $D(\subset \mathbb{R}^3)$ — область, причем $F'_{y'}(x,y,y') \not\equiv 0$ в любой области $U \subset D$ (иначе в такой области U функция F не зависит от y' и, следовательно, уравнение (1.1) не является в ней дифференциальным).

Решением уравнения (1.1) называется любая функция класса C^1 $\varphi : I = \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}$, (где I — открытый, полуоткрытый или невырожденный замкнутый промежуток оси x, которая, будучи подставлена в уравнение (1.1) вместо y, обращает его в тождество относительно x: $F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \equiv 0$, $x \in I$.

График любого решения уравнения (1.1) называется ***интегральной кривой*** этого уравнения. ***Областью задания*** уравнения (1.1) называется множество G плоскости x,y такое, что $\forall\, p_0 = (x_0,y_0) \in G$ уравнение

$$F(x_0,y_0,y')=0 \tag{1.2}$$

имеет хотя бы одно решение $y'=y'_0$, $q_0=(x_0,y_0,y'_0) \in D$. Геометрически это означает, что уравнение (1.1) задает в любой точке $p_0 \in G$ хотя бы одно касательное направление y'_0 для его интегральных кривых. Для уравнения (1.1) решения уравнения (1.2) называются *допустимыми значениями* y' в точке p_0.

Задача Коши для уравнения (1.1) ставится так: задается точка $p_0=(x_0,y_0) \in G$ и допустимое для нее значение $y'=y'_0$; требуется найти решение уравнения φ, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y'_0. \tag{1.3}$$

Точка $q_0=(x_0,y_0,y'_0)$ называется ***начальной точкой*** решения φ и соответствующей ему интегральной кривой уравнения.

Условия (1.3) называются *начальными условиями* искомого решения φ, а точка $q_0=(x_0,y_0,y'_0)$ — ***начальной точкой*** решения φ и интегральной кривой $y=\varphi(x)$. Говорят, что *решение задачи Коши* (1.1), (1.3) *единственно*, если для любых двух ее решений $\varphi_k(x)$, $x \in I_k$, $k=1,2$, $\exists\delta>0 : \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$ при $x \in I_1 \cap I_2 \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$. В противном случае говорят, что оно *неединственно*.

Решение уравнения (1.1) $y = \varphi(x)$, $x \in I$, называется *обыкновенным* (*особым*), если для любой его точки $q_0 = (x_0, y_0, y_0') = (x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0))$ решение задачи Коши (1.1), (1.3) единственно (неединственно). *Интегральная кривая* уравнения (1.1) называется *обыкновенной* (*особой*), если она является его графиком обыкновенного (особого) решения.

Точка $p_0 (\in G)$ называется *точкой единственности* для уравнения (1.1), если для любого допустимого для нее значения $y' = y_0'$ решение задачи Коши (1.1), (1.3) единственно или не существует. В противном случае она называется для него точкой неединственности.

Соотношение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.4}$$

где C — произвольная постоянная, называется *общим интегралом* уравнения (1.1) на множестве $G' (\subset G)$, если оно для любой точки $p_0 = (x_0, y_0) \in G'$ и любого допустимого для нее значения $y' = y_0'$ неявно определяет решение задачи Коши (1.1), (1.3) и притом только одно.

По общему интегралу (1.4) уравнения (1.1) иногда можно найти и его особые интегральные кривые, лежащие в G' (как огибающие семейства интегральных кривых, определяемых этим интегралом).

Теорема 1.1 (второй достаточный признак огибающей) [7. С. 20]. *Пусть*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi \in C^2(D), \quad D \in \mathbb{R}^3 \text{ — область,} \tag{1.5}$$

семейство кривых, зависящее от параметра $C \in I = (a, b)$ *и покрывающее множество* G *плоскости* x, y, $G \times I \subset D$. *Пусть* $\Phi_y'(x, y, C) \neq 0$ *на* $G \times I$. *Если система уравнений*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi_C'(x, y, C) = 0, \quad (x, y, C) \in G \times I, \tag{1.6}$$

имеет решение класса C^1

$$y = \psi(x), \quad C = C(x), \quad x \in J, \tag{1.7}$$

причем $C'(x) \not\equiv 0$ *на любом интервале* $J' \subset J$, *то кривая* $y = \psi(x)$, $x \in J$, *есть огибающая семейства кривых* (1.5), *касающаяся в любой своей точке* $(x_0, \psi(x_0))$ *кривой этого семейства* $\Phi(x, y, C(x_0)) = 0$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы семейство кривых (1.5) представимо в виде

$$y = \varphi(x, C), \quad \varphi \in \mathcal{C}^2(W), \ W \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.5'}$$

(где $\forall\, C \in I\ (x, \varphi(x, C)) \in G$), и, следовательно, система (1.6) может быть переписана в виде

$$y = \varphi(x, C), \quad \Phi'_C(x, \varphi(x, C), C) = 0, \quad (x, C) \in W. \tag{1.6'}$$

При этом условие ее разрешимости в виде (1.7) означает следующее: второе из уравнений (1.6′) имеет $\mathcal{C}^1$-решение $C = C(x)$, $x \in J$, $C'(x) \not\equiv 0$ на любом интервале J' ($\subset J$), в результате чего первое из равенств (1.6′) принимает вид: $y = \psi(x) \equiv \varphi(x, C(x))$, $x \in J$, $\psi \in \mathcal{C}^1(J)$.

Но поскольку функция (1.5′) неявно определяется уравнением (1.5), то

$$\varphi'_C(x, C) \equiv -\frac{\Phi'_C(x, \varphi(x, C), C)}{\Phi'_y(x, \varphi(x, C), C)} = 0, \quad (x, C) \in W.$$

Следовательно, для семейства кривых (1.5′) уравнение $\varphi'_C(x, C) = 0$ равносильно второму из уравнений (1.6′), а потому имеет вышеописанное решение $C = C(x)$, $x \in J$. Из этого на основании теоремы $I.2.3$ вытекает, что кривая $y = \psi(x) \equiv \varphi(x, C(x))$, $x \in J$, есть огибающая семейства кривых (1.5′), касающаяся в любой своей точке $(x_0, \psi(x_0))$ кривой этого семейства $y = \varphi(x, C(x_0))$, и, следовательно, огибающая семейства кривых (1.5), касающаяся в точке $(x, \psi(x_0))$ кривой этого семейства $\Phi(x, y, C(x_0)) = 0$. □

Следствие 1.1. *Пусть* $\Phi(x, y, C) = 0$, *где* $C \in I = (a, b)$ — *произвольная постоянная, есть общий интеграл уравнения* (1.1) *на множестве* G. *Если для семейства кривых* (1.4) *выполняются условия теоремы* 1.1 *и, следовательно, оно имеет огибающую* $y = \psi(x)$, $x \in J$, *то последняя является особой интегральной кривой уравнения* (1.1).

Доказательство. Огибающая семейства интегральных кривых уравнения (1.1) всегда яляется интегральной кривой этого уравнения. При этом каждя ее точка есть точка неединственности, а потому она всегда является особой интегральной кривой уравнения (1.1). □

§ 2. Алгебраический случай

Пусть уравнение (1.1) имеет вид

$$F(x,y,y') \equiv a_0(x,y)(y')^n + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \quad (2.1)$$

где $n \geqslant 2$ — целое, функции $a_i : G \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^2$, $a_0(x,y) \neq 0$ в G. Как алгебраическое относительно y' это уравнение $\forall p = (x,y) \in G$ имеет n корней

$$y' = f_i(x,y), \quad f_i \in C(G), \quad i = \overline{1,n}, \quad (2.2)$$

и может быть переписано в виде

$$F(x,y,y') \equiv a_0(x,y)\prod_{i=1}^{n}(y' - f_i(x,y)) = 0, \quad (2.1')$$

Уравнения (2.2) называются *ветвями уравнения* (2.1). Будем предполагать, что для них выполняется следующее условие.

Условие 2.1. Среди функций f_i, $i = \overline{1,n}$, 1) нет комплексных во всей области G, точнее: $\forall i = \overline{1,n}$ $\exists$ область $G_i(\subset G)$ такая, что функция f_i вещественна на $G_i' = \overline{G}_i \cap G$; 2) нет совпадающих в какой-либо области $U \subset G$.

При выполнении условия 2.1 областью задания уравнения (2.1) является множество $G' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i'$.

Замечание 2.1. Условие 2.1 не ограничивает общности, ибо ему всегда можно удовлетворить сокращением уравнения (2.1′) на "лишние" множители. Исключается из рассмотрения лишь случай, когда все f_i комплексны во всей области G, кроме разве лишь отдельных линий. Но в этом случае либо для уравнения (2.1) область задания $G' = \varnothing$, либо его интегральными кривыми могут быть разве лишь упомянутые линии.

Из (2.1′) следует, что решениями уравнения (2.1) являются лишь 1) решения уравнений (2.2), 2) гладкие (непрерывно дифференцируемые) склейки решений различных уравнений (2.2). Такие склейки возможны лишь в точках, где

$$f_i(x,y) = f_j(x,y) \text{ при } i \neq j. \quad (2.3)$$

В силу условия 2.1 подобные равенства могут иметь место в G' разве лишь на отдельных кривых.

Кривая d ($\subset G'$), для каждой точки которой имеет место равенство вида (2.3), т.е. уравнение (2.1) имеет кратный корень относительно y', называется *дискриминантной кривой* уравнения (2.1). Она определяется системой уравнений

$$F(x,y,y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y') = 0,$$

точнее — уравнением $d(x,y) = 0$, которое получается из этой системы исключением y'.

Пусть d — дискриминантная кривая уравнения (2.1) и пусть для него выполняется также следующее условие.

Условие 2.2. $\forall i = \overline{1,n}$ $G'_i \setminus d$ — область единственности для i-го из уравнений (2.2), а $y = \varphi_i(x,C)$, $\varphi_i \in C(D_i)$, — его общее решение в ней.

При условии 2.2 $G' \setminus d$ — область единственности для уравнения (2.1) (через любую ее точку p_0 проходит единственное решение каждого из уравнений (2.2), для которого $p_0 \in G'_i \setminus d$, и каждое из этих решений имеет в p_0 свой индивидуальный наклон $y'_{0i} = f_i(x_0,y_0)$), а соотношение

$$\prod_{i=1}^{n}(y - \varphi_i(x,C)) = 0$$

представляет собой его общий интеграл в $G' \setminus d$.

Таким образом, при условии 2.2 точками неединственности для уравнения (2.1) могут быть лишь точки его дискриминантной кривой d. Как будет видно из примеров, чаще всего они являются точками ветвления интегральных кривых уравнения (2.1) или точками возврата их непрерывных склеек. Однако, если кривая d (или какая-либо ее ветвь d') является интегральной кривой двух (или нескольких) совпадающих на ней ветвей уравнения (2.1), то для нее имеет место альтернатива: *а*) если $d\,(d')$ — особая интегральная кривая хотя бы одной из упомянутых ветвей уравнения (2.1), то она является особой и для самого уравнения (2.1), *б*) в противном случае $d\,(d')$ — обыкновенная кратная интегральная кривая уравнения (2.1).

Итак, в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид (2.1), можно рекомендовать следующий алгоритм нахождения его особых решений.

1) Найти для заданного уравнения (2.1) его ветви (2.2) (что всегда возможно лишь при $n = 2$). Убедиться в том, что для них выполняется условие 2.1 или добиться этого, сократив его на не удовлетворяющие этому условию множители.

2) Найти дискриминантную кривую уравнения (2.1). Отметим, что при $n = 2$ *а*) кривая d определяется уравнением

$$d(x, y) \equiv a_1^2(x, y) - 4a_0(x, y)a_2(x, y) = 0,$$

б) множество $G' (= G'_1 = G'_2) = \{(x, y) \in G : d(x, y) \geqslant 0\}$,
в) область $G' \setminus d = \{(x, y) \in G : d(x, y) > 0\}$.

3) Убедиться в том, что области $G'_i \setminus d$, $i = \overline{1, n}$, суть области единственности для соответствующих ветвей (2.2) уравнения (2.1).

4) Проверить, существуют ли ветви кривой d, являющиеся интегральными кривыми уравнения (2.1).

5) Если дуга $d_{ij} (\subset d)$, на которой совпадают корни f_i, f_j уравнения (2.1) (и только они), является интегральной кривой соответствующих этим корням уравнений (2.2), то следует способами, изложенными в части I, § 2, выяснить, является ли она хотя бы для одного из последних особой интегральной кривой. Если да, то она является особой интегральной кривой и для уравнения (2.1). В противном случае она является для него обыкновенной (кратной) интегральной кривой.

Важное замечание. Если для уравнения (2.1) удается найти общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$, действующий на некотором множестве $G' \subset G$, то для отыскания его особых интегральных кривых, лежащих в G', можно применить теорему 1.1 и следствие 1.1 (см. далее пример 2.5).

Пример 2.1.

$$(y')^2 - 4x^2 = 0. \tag{2.4}$$

Это уравнение вида (2.1). В нем $n = 2$, его коэффициенты непрерывны в области $G = \mathbb{R}^2$. Его ветви

$$y' = \mp 2x \equiv f_{1,2}(x, y) \tag{2.5}$$

вещественны во всей области G и совпадают лишь на прямой $d : x = 0$. Для каждой из них G — область единственности, а потому $G \setminus d$: $\mp x > 0$ — множество единственности для уравнения (2.4). Его дискриминантная кривая $d : x = 0$ не является интегральной кривой уравнения (2.4) и, следовательно, оно не имеет особых решений. Выясним, чем характерна для него прямая d.

При $\forall i = 1, 2$ $y = (-1)^i x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, — общее решение i-той ветви в G. Совокупность всех интегральных кривых уравнения определяется равенством

$$(y - C)^2 = x^4, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В $G \setminus d$ это общий интеграл уравнения (2.4). Каждой же точке $p_0 = (0, y_0) \in d$ соответствует одно допустимое значение $y_0' = 0$, а через нее проходят 4 различных решения уравнения: $y = \mp x^2 + y_0$, $x \in \mathbb{R}$, — решения ветвей (2.5); $y = \mp x^2 + y_0$, $x \leqslant 0$, $y = \pm x^2 + y_0$, $x \geqslant 0$, — гладкие склейки их решений. Следовательно, для уравнения (2.4) дискриминантная кривая d есть множество точек ветвления его интегральных кривых.

Пример 2.2.

$$4(y')^2 - 9x^2 = 0. \tag{2.6}$$

Это также уравнение вида (2.1) с $n = 2$ и его коэффициенты непрерывны в области $G = \mathbb{R}^2$. Его ветви

$$y' = \mp\frac{3}{2}\sqrt{x} \equiv f_{1,2}(x, y) \tag{2.7}$$

вещественны в $G' : x \geqslant 0$ и совпадают на прямой $d : x = 0$. Для каждой из ветвей G' — множество единственности и, следовательно, $G' \setminus d : x > 0$ — множество единственности для уравнения (2.6). Прямая d не является интегральной кривой уравнения, а потому оно не имеет особых решений.

При $\forall i = 1, 2$ $y = (-1)^i x^{3/2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, — общее решение i-той ветви в G'. Совокупность всех интегральных кривых уравнения в G' имеет вид

$$(y - C)^2 = x^3, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

В $G' \setminus d$ это общий интеграл уравнения (2.6). Через каждую точку $p_0 = (0, y_0) \in d$ (при одном допустимом для нее значении $y_0' = 0$) проходят две различные интегральные кривые уравнения: ветви полукубической параболы $(y - y_0)^2 = x^3$. Следовательно, для уравнения (2.6) дискриминантная кривая d есть множество точек возврата полукубических парабол (2.8), ветви которых суть интегральные кривые ветвей (2.7) этого уравнения.

Пример 2.3.

$$(y')^2 - y^2 = 0. \tag{2.9}$$

Это также уравнение вида (2.1) второй степени относительно y'. Его коэффициенты непрерывны в области $G = \mathbb{R}^2$, его ветви

$$y' = \mp y \equiv f_{1,2}(x, y) \tag{2.10}$$

вещественны в области G и совпадают лишь на прямой $d : y = 0$. Для каждой из них G — область единственности, а потому $G \setminus d$: $\mp y > 0$ — множество единственности для уравнения (2.9). Дискриминантная кривая $d : y = 0$ — обыкновенная интегральная кривая каждой из ветвей (2.10) и, следовательно, обыкновенная (кратная) интегральная кривая уравнения (2.9).

При $\forall i = 1, 2$ $y = C\exp[(-1)^i x]$, $C \in \mathbb{R}$, — общее решение i-той ветви в G, $y^2 - C(e^x + e^{-x})y + C^2 = 0$, $\quad C \in \mathbb{R}$, — общий интеграл уравнения (2.9) в области G.

Пример 2.4.

$$(y')^2 - 4y = 0. \tag{2.11}$$

Это также уравнение вида (2.1) с $n = 2$. Его коэффициенты непрерывны в области $G = \mathbb{R}^2$, его ветви

$$y' = \mp 2\sqrt{y} \equiv f_{1,2}(x, y) \tag{2.12}$$

вещественны в $G' : y \geqslant 0$ и совпадают лишь на прямой $d : y = 0$. Для каждой из ветвей $G' \setminus d : y > 0$ — область единственности, а потому $G' \setminus d$ — область единственности и для уравнения (2.11). Прямая $d : y = 0$ — особая интегральная кривая каждой из его ветвей (2.12), а, значит, и для самого уравнения (2.11).

При $\forall i = 1, 2$ $y = (x - C)^2$, $C \in \mathbb{R}$, $(-1)^i(x - C) \geqslant 0$, — общее решение i-той ветви в G'. Для самого уравнения (2.11) $(x - C)^2 - y = 0$, $(C, x) \in \mathbb{R}^2$, — общий интеграл в G'. Его дискриминантная кривая $d : y = 0$ есть огибающая этого семейства парабол.

Пример 2.5.

$$4(y - 1) + (2 - 3y)^2(y')^2 = 0. \tag{2.13}$$

Это также алгебраическое относительно y' уравнение степени $n = 2$. Его ветви

$$y' = \pm\frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y} \qquad (2.14)$$

заданы в полосах $G_1 : \frac{2}{3} < y \leqslant 1$ и $G_2 : y < \frac{2}{3}$ плоскости x, y. Дискриминантная кривая $d : y = 1$, $x \in \mathbb{R}$, — интегральная кривая любой из ветвей, а значит и самого уравнения (2.13). Интегрируя уравнения (2.14) в полосе $G : \frac{2}{3} < y < 1$, находим их общие интегралы в этой полосе в виде

$$y\sqrt{1-y} \mp (x - C) = 0, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \pm(x - C) > 0. \qquad (2.15)$$

При $\forall\, C \in \mathbb{R}$ один из интегралов (2.15) определяет решение уравнения (2.13) $y = y(x, C)$, $x > C$, другой — решение $y = y(x, C)$, $x < C$. Любое из них при $x \to C$ обладает свойством: $y(x, C) \to 1$, $y'_x(x, C) \to 0$, а потому продолжимо на $x = C$ и удовлетворяет условиям: $y(C) = 1$, $y'(C) = 0$. Из этого следует, что формулы (2.15) при $\pm(x - C) \geqslant 0$ дают общие интегралы уравнения (2.14) в полосе G_1. Следовательно,

$$\Phi(x, y, C) \equiv (x - C)^2 - y^2(1 - y) = 0, \quad C \in \mathbb{R}, \qquad (2.16)$$

есть общий интеграл уравнения (2.13) в области G_1.

Интегральная прямая $d : y = 1$, $x \in \mathbb{R}$, лежит в G_1 и не получается из общего интеграла (2.16) ни при каком значении постоянной C. Следовательно, d — особая интегральная кривая уравнения (2.13).

Этот результат можно получить и иначе, а именно применяя к общему интегралу (2.16) уравнения (2.13) теорему 1.1 и следствие 1.1. Семейство привых (2.16) покрывает полосу G_1, причем $\Phi'_y(x, y, C) \equiv y(3y - 2) \neq 0$ в $G_1 \times \mathbb{R}$, а система уравнений $\Phi(x, y, C) = 0$, $\Phi'_C(x, y, C) \equiv 2(x - C) = 0$ имеет в $G_1 \times \mathbb{R}$ решение $y = \psi(x) \equiv 1$, $C = C(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$, причем $C'(x) \equiv 1 \neq 0$ в любом интервале $J \subset \mathbb{R}$. Из этого следует 1) на основании теоремы 1.1, что $y = 1$, $x \in \mathbb{R}$, — огибающая семейства кривых (2.16), 2) на основании следствия 1.1, что $y = 1$, $x \in \mathbb{R}$ — особое решение уравнения (2.13).

§ 3. Общий случай

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (1.1) общего вида.

3.1. Геометрическая трактовка уравнения. Сначала будем трактовать переменные x, y, y' как декартовы прямоугольные координаты точки $q \in \mathbb{R}^3$. В рамках такой трактовки уравнение (1.1), вообще говоря, определяет некоторую поверхность S, лежащую в области D. Сформулируем условие, при выполнении которого это действительно имеет место.

Условие 3.1. Пусть для (1.1) 1) $F \in C^1(D)$,
2) $S = \{q = (x, y.y') \in D : F(q) = 0\} \neq \varnothing$,
3) $\forall q \in S$ grad $F(q) = (F'_x(q), F'_y(q), F'_{y'}(q)) \neq 0$.

При выполнении этого условия $\forall q_0 = (x_0, y_0, y'_0) \in S$ $F(q_0) = 0$, grad $F(q_0) \neq 0$, а потому (согласно теореме существования неявной функции) $\exists$ окрестность U точки q_0 в D : в U уравнение (1.1) однозначно разрешимо относительно x, y или y', т. е. представимо в виде

$$x = z_1(y, y'), \quad y = z_2(x, y'), \text{ или } y' = z_3(x, y), \tag{3.1}$$

где $\forall i = \overline{1,3}$ $z_i \in C^1(V_i)$, $V_i \subset \mathbb{R}^2$ — область; при этом может случиться, что оно представимо в U двумя из этих способов или даже любым из них. Иными словами, при условии 3.1 $\forall q_0 \in S$ $\exists$ окрестность $U \subset D$: часть $S \cup U$ множества S представима хотя бы одним из уравнений (3.1) и, следовательно, представляет собой кусок C^1-гладкой поверхности. При этом все множество S есть конечное или счетное C^1-гладкое объединение таких кусков и, следовательно, представляет собой C^1-гладкую поверхность в D (2-мерное многообразие класса C^1).

Будучи C^1-гладкой, поверхность S имеет в каждой своей точке q_0 касательную плоскость Π_{q_0}. Последняя определяется уравнением

$$F'_x(q_0)(x - x_0) + F'_y(q_0)(y - y_0) + F'_{y'}(q_0)(y' - y'_0) = 0$$

так, что вектор grad $F(q_0)$ является ее нормальным вектором. Множество $K(\subset S)$, в каждой точке q которого касательная плоскость Π_q вертикальна называется *криминантой уравнения* (1.1) [5. С. 32]. Но $\forall q \in S$ Π_q вертикальна $\Leftrightarrow$ grad $F(q)$ горизонтален $\Leftrightarrow$ $F'_{y'}(q) = 0$. Следовательно, криминанта K уравнения (1.1) определяется системой уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad F'_{y'}(x, y, y' = 0, \tag{3.2}$$

а потому, вообще говоря, представляет собой кривую, лежащую на поверхности S. Например, если S сфера, то K — ее экватор.

Пусть $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — оператор вертикального проектирования точек $q(x, y, y') \in \mathbb{R}^3$ на плоскость x, y $\pi(x, y, y') = (x, y)$. Тогда согласно § 1 $G = \pi(S)$ есть область задания дифференциального уравнения (1.1). Кривая $d = \pi(K)$ называется его *дискриминантной кривой* [5. C. 32].

Криминанта K уравнения (1.1) разбивает определяемую им поверхность S на конечное или счетное число частей S_i, $i \in \mathbb{N}'$, $\mathbb{N}'$ — отрезок натурального числового ряда $\mathbb{N}$ или весь этот ряд так, что

$$S \setminus K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}'} S_i, \quad S_i \cap S_k = \emptyset \quad \text{при } i \neq k. \tag{3.3}$$

При этом $\forall i \in \mathbb{N}'$ на S_i $F'_{y'}(q) \neq 0$, а потому S_i представима уравнением

$$y' = f_i(x, y), \quad f_i \in C^1(G_i), \quad G_i = \pi(S_i) \subset G.$$

Области G_i и G_k, $i \neq k$, могут пересекаться, но, как следует из (3.3),

$$\forall p = (x, y) \in G_i \cup G_k \quad f_i(x, y) \neq f_k(x, y) \quad \text{при } i \neq k. \tag{3.4}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}'} G_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}'} \pi(S_i) = \pi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}'} S_i\right) = \pi(S \setminus K) = G \setminus d. \tag{3.5}$$

3.2. Ветви уравнения (1.1). $\forall i \in \mathbb{N}'$ дополним часть S_i поверхности S граничной дугой $K_i = \overline{S}_i \cap K$. Положим $\widetilde{S}_i = S_i \cup K_i$, $d_i = \pi(K_i)$, $\widetilde{G}_i = \pi(\widetilde{S}_i) = G_i \cup d_i$. Пусть $\tilde{f}_i$ — непрерывное продолжение f_i с G_i на $\widetilde{G}_i$. Тогда $\bigcup_{i \in \mathbb{N}'} \widetilde{S}_i = S$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}'} \widetilde{G}_i = \pi(S) = G$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}'} d_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}'} \pi(K_i) = \pi(K) = d$, а уравнения

$$y' = \tilde{f}(x, y), \quad \tilde{f}_i \in C^1(G_i) \cap C(\widetilde{G}_i), \; i \in \mathbb{N}', \tag{3.6}$$

будут уравнениями частей $\widetilde{S}_i$ поверхности S. Они называются *ветвями уравнения* (1.1).

Функции $\tilde{f}_i$ из (3.6) обладают следующими свойствами. 1) $\forall\, p = (x, y) \in G \setminus d$ в силу (3.5) число $\tilde{f}_i(p) = f_i(p)$ при любом $i \in \mathbb{N}'$, при котором $p \in G_i$, и в силу (3.4) все эти числа попарно различны, 2) $\forall\, p_0 = (x_0, y_0) \in d\ \exists\, q_0 = (x_0, y_0, y'_0) \in K$ и, следовательно, $\exists\exists\, i, j \in \mathbb{N}',\ i \neq j : q_o \in K_i \cap K_j = \tilde{S}_i \cap \tilde{S}_j$, т.е. $\tilde{f}_i(p_0) = \tilde{f}_j(p_0)(= y'_0)$. Короче: $\forall\, p \in \setminus d$ все числа $\tilde{f}_i(p)$, имеющие смысл, попарно различны, а $\forall\, p \in d$ непременно имеют место равенства вида: $\tilde{f}_i(p) = \tilde{f}_j(p)$ при $i \neq j$. Кроме того, $\forall\, i \in \mathbb{N}'$ $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}(G_i)$, а потому $G \setminus d$ — область единственности для уравнения (1.1): $\forall\, p_0 = (x_0, y_0) \in G \setminus d$ и $\forall\, i_0 \in \mathbb{N}'$, $p_0 \in G_{i_0}$, $\exists\,!$ решение уравнения (1.1) с начальной точкой $q_0 = (x_0, y_0, \tilde{f}_{i_0}(p_0))$. Зафиксируем этот результат в виде леммы.

Лемма 3.1. *$G \setminus d$ — область единственности для уравнения* (1.1).

Таким образом, для общего уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (3.1), особыми могут быть разве лишь решения (интегральные кривые), лежащие на дискриминантной кривой, т.е. в этом плане имеет место та же ситуация, что и для уравнения (2.1) в предположении, что для него $G \setminus d$ — область единственности. Однако, рекомендовать в рассматриваемом общем случае для отыскания особых решений тот же алгоритм, что и в алгебраическом случае, нельзя, ибо сами ветви (3.6) уравнения (1.1) в общем случае найти в конечном виде практически невозможно, а потому невозможно и исследовать их методами части I этой работы (см. также [5]). В общем случае для этой цели применяется метод параметрического интегрирования уравнения (1.1).

Однако, раньше, чем переходить к его изложению, приведем простой пример, иллюстрирующий предыдущие построения.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение вида (1.1)

$$F(x, y, y') \equiv x^2 + y^2 + (y' - 1)^2 - 1 = 0. \tag{3.7}$$

Условие (3.1) для него выполняется при $D = \mathbb{R}^3$, причем оно определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, y' сферу S с центром в точке $O_1(0, 0, 1)$, радиус которой равен единице. Его область задания $G = \pi(S) : x^2 + y^2 \leqslant 1$ — единичный круг плоскости x, y, его криминанта K определяется уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $y' = 1$ (т.е. представляет собой экватор сферы S), а дискриминантная кривая $d = \pi(K)$ — уравнением $x^2 + y^2 = 1$, т.е. представляет собой единичную окружность плоскости x, y. Кривая K делит сферу S на открытые полусферы $S_i : y' = 1 + (-1)^i\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in G_i : x^2 + y^2 < 1$, $i = 1, 2$. Дополняя каждую из них дугой $K_i = \overline{S}_i \cap K = K$, получаем замкнутые полусферы $\widetilde{S}_i$, $i = 1, 2$, сферы S, определяемые уравнениями

$$y' = 1 + (-1)^i\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in \widetilde{G}_i : x^2 + y^2 \leqslant 1, i = 1, 2.$$

Последние суть ветви уравнения (3.7). Их правые части $\tilde{f}_i(x, y)$, $i = 1, 2$, в $G \setminus d$, т.е. в круге $x^2 + y^2 < 1$, различны, на d, т.е. при $x^2 + y^2 = 1$, совпадают: $\tilde{f}_1(x, y) \equiv \tilde{f}_2(x, y) \equiv 1$. Наклон же самой дискриминантной кривой d равен единице лишь в точках ее пересечения с прямой $y = x$, а потому накакая ее часть d' не является интегральной кривой уравнения (3.7). Следовательно, оно не имеет особых решений. Рисуя приближенно интегральные кривые его ветвей, легко убедиться в том, что для (3.7) d — место точек возврата кривых, непрерывно склеенных в точках d из его интегральных кривых.

3.3. Параметризация поверхности S и уравнения (1.1)

Введем на S (или на ее части S_Σ) локальные координаты u, v, $w = (u, v) \in \Sigma$, $\Sigma(\subset \mathbb{R}^2)$ — область. Тогда $\forall q \in S\,(S_\Sigma)$ ее пространственные координаты x, y, y' и локальные координаты u, v будут взаимно однозначно связаны равенствами

$$T: x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad y' = h(u, v), \quad u, v \in \Sigma. \tag{3.8}$$

Эти равенства суть параметрические уравнения поверхности $S\,(S_\Sigma)$, u, v — параметры. Будем предполагать, что для отображения T выполняется следующее условие.

Условие 3.2. 1) $T : \Sigma \to S$ сюръективно, т.е. представляет собой взаимно однозначное отображение Σ на S, 2) $f, g, h \in C^1(\Sigma)$, 3) $\operatorname{rank} \partial(f, g, h)/\partial(u, v) = 2 \;\forall (u, v) \in \Sigma$.

При выполнении этого условия отображение T есть локальный диффеоморфизм Σ на S, т.е. $\forall q_0 \in S$ $\exists$ окрестность $V(\subset S)$, на которой T имеет непрерывно дифференцируемое обратное отображение $T^{-1} : V \to \Sigma$. Отметим, что для функций (3.8), определяющих T, выполняется тождество

$$F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \equiv 0, \quad (u, v) \in \Sigma. \tag{3.9}$$

Наряду с отображением T рассмотрим сквозное отображение $\pi T : \Sigma \to G$,

$$\pi T : x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad (u,v) \in \Sigma. \tag{3.10}$$

Пусть $A(u,v) = \partial(f,g)/\partial(u,v)$ — дифференциал отображения πT, $\Delta(u,v) = \det A(u,v)$. Если $\Delta(u_0,v_0) \neq 0$, то отображение πT гладко (непреывно дифференцируемо) обратимо в некоторой окрестности точки (u_0,v_0). Пусть

$$æ = \{(u,v) \in \Sigma : \Delta(u,v) = 0\}. \tag{3.11}$$

Пусть K — криминанта уравнения (1.1), d — его дискриминантная кривая. Укажем их параметрические уравнения.

Лемма 3.2 [1]. $K = T(æ)$, $d = \pi T(æ)$.

Доказательство. Пусть $w = (u,v)$, $w_0 = (u_0,v_0) \in \Sigma$, $q_0 = (x_0,y_0,y_0') = T(w_0)$, $p_0 = (x_0,y_0) = \pi(q_0) = \pi T(w_0)$.

1) Покажем сначала, что $T(æ) \subset K$. Для этого достаточно показать, что $\forall\, w_0 \in æ$ $q_0 = T(w_0) \in K$, т.е. $F'_{y'}(q_0) = 0$. Допустим противное, а именно допустим, что $\exists\, w_0 \in æ : F'_{y'}(q_0) \neq 0$. Тогда $\exists$ окрестность точки q_0 $V \subset S$: часть $S \cap V$ поверхности S представима в виде $y' = f(x,y)$, $f \in C^1(U)$, $U = \pi(V) \subset G$, так что $\pi|_V$ — диффеоморфизм V на U. Но $q_0 = T(w_0)$, а $T : \Sigma \to S$ — локальный диффеоморфизм. Следовательно, $\exists$ окрестность точки w_0 $W \subset \Sigma$ такая, что $T|_W$ — диффеоморфизм W на $T(W) \subset V$. Не ограничивая общности, будем считать, что $V = T(W)$. Тогда $T|_W$ диффеоморфизм W на V, $\pi|_V$ — диффеоморфизм V на U и, следовательно, $\pi T|_W$ — диффеоморфизм W на U. Но тогда производная $A(w)$ отображения πT имеет на W ранг 2, т.е. $\forall\, w \in W$ $\Delta(w) \neq 0$; в частности, $\Delta(w_0) \neq 0$, т.е. $w_0 \notin æ$. Таким образом, допустив противное, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\forall\, w_0 \in æ$ $q_0 = T(w_0) \in K$, а потому $T(æ) \subset K$.

2) Покажем теперь, что $K \subset T(æ)$, т.е. что $\forall\, q_0 \in K$ $w_0 = T^{-1}(q_0) \in æ$. Допустим, что $\exists\, q_0 = (x_0,y_0,y_0') \in K$: $w_0 = T^{-1}(q_0) \notin æ$. Тогда $\Delta(w_0) \neq 0$, а потому $\exists$ окрестность точки w_0 $W \subset \Sigma : \pi T|_W$ — диффеоморфизм W на $U = \pi T(w) \subset G$, т.е. отображение (3.10) имеет на W непрерывно дифференцируемое обратное отображение

$$(\pi T)^{-1} : u = u(x,y),\ v = v(x,y),\ (x,y) \in U, (\pi T)^{-1}(x_0,y_0) = w_0.$$

Но тогда, как следует из (3.8), часть $T(W)$ поверхности S представима в виде

$$y' = h(u(x,y), v(x,y)) \equiv H(x,y), \quad H \in C^1(U),$$

и, следовательно, касательная плоскость Π_q к ней нигде не вертикальна. В частности, в точке $q_0 = (x_0, y_0, y'_0) = (x_0, y_0, H(x_0, y_0))$ плоскость Π_{q_0} не вертикальна, а потому $q_0 \notin K$. Итак, допустив противное, мы пришли к противоречию. Следовательно, $K \subset T(æ)$.

Из 1) и 2) следует: $K = T(æ)$. Из этого вытекает: $d = \pi(K) = \pi T(æ)$. $\square$

В дифференциальном уравнении (1.1) независимая переменная x, искомая функция y и ее производная y' связаны соотношением

$$dy = y'dx,$$

которое часто называют *основным соотношением* между ними в этом уравнении. Будучи записано с использованием формул (3.8), оно принимает вид

$$dg(u,v) = h(u,v)df(u,v) \tag{3.12}$$

или, в развернутой форме,

$$(g'_u - hf'_u)du + (g'_v - hf'_v)dv = 0. \tag{3.13}$$

Дифференциальное уравнение (3.13) есть T-параметризация уравнения (1.1). Оно симметрично относительно переменных u и v. Его коэффициенты $M(u,v) = g'_u - hf'_u$ и $N(u,v) = g'_v - hf'_v$ непрерывны в области Σ. Множество его особых точек

$$\omega = \{w \in \Sigma : M(u,v) = N(u,v) = 0\}. \tag{3.14}$$

Необходимое условие совместимости уравнений, определяющих ω : $\Delta(w) = 0$. Следовательно, особыми для уравнения (3.13) могут быть лишь точки множества æ, т. е.

$$\omega \subset æ. \tag{3.15}$$

3.4. Параметрическое интегрирование уравнения (1.1)

Допустим, что нам удалось полностью проинтегрировать уравнение (3.13) в области Σ. Исследуем вопрос о том, каждой ли интегральной кривой уравнения (3.13) соответствует по формулам (3.10) интегральная кривая уравнения (1.1).

Пусть $w = (u, v)$ — произвольная точка области Σ, $\lambda (\subset \Sigma)$ — произвольная интегральная кривая уравнения (3.13), $L = T(\lambda)$ $(\subset S)$, $l = \pi T(\lambda) (\subset G)$. Для определенности будем считать, что λ является графиком решения $v = v(u)$, $u \in I = \langle \alpha, \beta \rangle$, уравнения (3.13), $v'(u) \in \mathcal{C}(I)$, т. е. определяется следующим уравнением

$$\lambda : w = w(u) = (u, v(u)), \quad u \in I, \quad w(u) \in \mathcal{C}^1(I). \tag{3.16}$$

Тогда L и l будут определяться следующими уравнениями

$$L = T(\lambda) : (x, y, y') = (f(w(u)), g(w(u)), h(w(u))), \; u \in I, \tag{3.17}$$

где $f(w(u))$, $g(w(u))$, $h(w(u)) \in \mathcal{C}^1(I)$ и в силу (3.9)

$$F(f(w(u)), g(w(u)), h(w(u))) \equiv 0, \quad u \in I, \tag{3.18}$$

$$l = \pi T(\lambda) : (x, y) = (f(w(u), g(w(u))) \equiv (x(u), y(u)), \quad u \in I. \tag{3.19}$$

Лемма 3.3 [4]. *Пусть λ — интегральная кривая* (3.16) *уравнения* (3.13). *При этом условии справедливо следующее утверждение: $l = \pi T(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения* (1.1) $\Longleftrightarrow$ 1) *функция $x = f(w(u))$, $u \in I$, имеет непрерывную обратную функцию $u = u(x)$, $x \in J$,* 2) *функция $\varphi(x) \equiv g(w(u(x)))$ обладает свойствами: $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$, $\varphi'(x) \equiv h(w(u(x)))$, т. е.*

$$L = T(\lambda) = \{(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \; x \in J\}. \tag{3.20}$$

Доказательство.
1) Необходимость ($\Longrightarrow$). По условию уравнения (3.19) определяют параметрически функцию $y = \varphi(x)$, $x \in J$, класса $\mathcal{C}^1$, причем $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$, $x \in J$. Из этого следует, что 1) функция $x = f(w(u))$, $u \in I$, имеет непрерывную обратную функцию $u = u(x)$, $x \in J$, 2) функция $y = \varphi(x) \equiv g(w(u(x))) \in \mathcal{C}^1(J)$. Покажем, что $\varphi'(x) \equiv h(w(u(x)))$, $x \in J$. Действительно, по условию

функция $v(u)$, $u \in I$, — решение уравнения (3.13) и, следовательно, обращает равенство (3.12) в тождество относительно $u \in I$. Из этого тождества следует:

$$\varphi'(x) \equiv \frac{dg(w(u))}{df(w(u))}\Big|_{u=u(x)} \equiv h(w(u(x))),\ x \in J. \qquad (3.21)$$

Необходимость доказана.

2) Достаточность ($\Longleftarrow$). По условию при $u = u(x)$ и $\varphi(x) \equiv g(w(u(x)))$, $x \in J$, имеет место равенство (3.20). Но $L \subset S$, а потому из равенства (3.20) вытекает тождество

$$F(x, \varphi(x)), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad x \in J.$$

Следовательно, $l = \pi(L) = \pi T(\lambda) = \{(x, \varphi(x)),\ x \in J\}$ — интегральная кривая уравнения (1.1). □

Теорема 3.1 [6. С. 36]. *Если интегральная кривая уравнения* (3.13) $\lambda \subset \Sigma \setminus æ$, *то кривая* $l = \pi T(\lambda)\,(\subset G \setminus d)$ *является интегральной кривой уравнения* (1.1).

Доказательство. Докажем эту теорему, опираясь на лемму 3.3, а именно, покажем, что при условиях данной теоремы для $l = \pi T(\lambda)$ выполняется критерий интегральной кривой уравнения (1.1), доставляемый этой леммой. По условию (в силу (3.14) и (3.15)) $\lambda \cap \omega = \varnothing$. Учитывая это и (3.16), заключаем, что на λ $N(u, v) \neq 0$, т. е. $N(w(u)) \neq 0\ \forall u \in I$.

Вычисляя производную функции $x = f(w(u)) \equiv f(u, v(u))$, $u \in I$, (с учетом того, что $v(u)$, $u \in I$, — решение уравнения (3.13)) получаем: $\forall u \in I$

$$\begin{aligned} x'(u) &= f'_u(w(u)) + f'_v(w(u))v'(u) = \\ &= \left(f'_u(w) - f'_v(w)\frac{g'_u(w) - h(w)f'_u(w)}{g'_v(w) - h(w)f'_v(w)} \right)\Bigg|_{w=w(u)} = \frac{\Delta(w(u))}{N(w(u))}. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Но $\lambda \subset \Sigma \setminus æ$, а потому (см. (3.11)) $\Delta(w(u)) \neq 0$ и (см. (3.22)) $x'(u) \neq 0$ $\forall u \in I$. Следовательно, функция $x = f(w(u))$, $u \in I$, имеет обратную функцию $u = u(x)$, $x \in J$, причем $u(x) \in C^1(J)$. Из этого следует, что функция $y = \varphi(x) \equiv g(w(u(x))) \equiv g(u(x), v(u(x))) \in C^1(J)$, причем для нее справедливо тождество (3.21). Таким образом, при условиях данной теоремы для кривой $l = \pi T(\lambda)$ выполняются условия 1), 2) леммы 3.3, а потому l — интегральная кривая уравнения (1.1). □

Теорема 3.2 [4]. *Пусть интегральная кривая уравнения* (3.13) $\lambda \subset \omega$. *Если функция* $x = f(w(u)) \equiv x(u)$, $u \in I$, *строго монотонна, причем ее производная* $x'(u)$ *имеет в* I *разве лишь изолированные нули, то кривая* $l = \pi T(\lambda)\,(\subset d)$ *является интегральной кривой уравнения* (1.1).

Доказательство. Покажем, что при условиях данной теоремы выполняются условия 1), 2) леммы 3.3. Из условий теоремы следует, что функция $x = f(w(u))$, $u \in I$, имеет непрерывную обратную функцию $u = u(x)$, $x \in J$, т.е. выполняется условие 1) леммы 3.3. Поэтому функции $\varphi(x) \equiv g(w(u(x)))$ и $\psi(x) \equiv h(w(u(x)))$ непрерывны в J. Покажем, что при условиях теоремы $\varphi \in C^1(J)$ и $\varphi'(x) \equiv \psi(x)$, $x \in J$.

Пусть $I'\,(\subset I)$ — интервал, на котором $x'(u) \neq 0$, $J' = x(I') \subset J$. Тогда $u(x) \in C^1(J')$, $\varphi(x) \in C^1(J')$, причем, поскольку $\lambda \subset \omega$, то (в силу (3.14)) на J'

$$\varphi'(x) \equiv \left[\,g'_u(w(u)) + g'_v(w(u))v'(u)\,\right]\Big|_{u=u(x)} u'(x) \equiv$$

$$\equiv \left[\,h(w(u))(f'_u(w(u)) + f'_v(w(u))v'(u))\,\right]\Big|_{u=u(x)} u'(x) \equiv$$

$$\equiv \left[\,h(w(u))x'(u)\,\right]\Big|_{u=u(x)} u'(x) \equiv h(w(u(x))) \equiv \psi(x). \tag{3.24}$$

Пусть u_0 — граница интервалов I'_1, $I'_2 \subset I$, на каждом из которых $x'(u) \neq 0$, а $x'(u_0) = 0$. Тогда $x_0 = x(u_0)$ — граница интервалов $J'_k = x(I'_k) \subset J$, $k = 1, 2$, на каждом из которых для фукции $\varphi(x)$ выполняется тождество (3.24), т.е. $\varphi'(x) \equiv \psi(x)$, $x \in J'_1 \cup J'_2$. Отсюда (в силу непрерывности $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ на J) следует: при $x \to x_0$ $\varphi'(x) \to \psi(x_0)$. Из этого (по теореме из математического анализа о пределе производной) следует, что в точке $x = x_0$ существует производная $\varphi'(x_0) = \psi(x_0)$. То же самое имеет место для односторонней производной $\varphi'(x_0)$, если $x_0 = x(u_0)$ $(\in J)$ — граничная точка J.

Из этого и вытекает, что функция $\varphi \in C^1(J)$ и $\varphi'(x) \equiv \psi(x)$, $x \in J$, т.е. выполняется условие 2) леммы 3.3. На основании этой леммы заключаем: $l = \pi T(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения (1.1). Но по условию $\lambda \subset \omega$. Следовательно (по лемме 3.2), $l \subset \pi T(\omega) \subset \pi T(æ) = d$. □

Следствие 3.1. *Пусть интегральная кривая* (3.16) *уравнения* (3.13) $\lambda \subset \omega$. *Если функция* $x = f(w(u))$ *удовлетворяет условиям теоремы 3.2 на* $I_1 = \langle \alpha, u_0]$ *и на* $I_2 = [u_0, \beta\rangle$, *а в точке* u_0 *имеет экстремум* $x_0 = x(u_0)$, *то*

1) *кривые* $l_k = \pi T(\lambda_k)$, $\lambda_k = \lambda|_{I_k}$, $k = 1, 2$, *являются интегральными кривыми уравнения* (1.1) *с общей граничной точкой* $p_0 = (x(u_0), y(u_0))$ (*см.* (3.19)),

2) *для кривой* $l = \pi T(\lambda) = l_1 \cup l_2$ *точка* p_0 *является точкой возврата.*

Доказательство. Пусть для определенности $x'(u) \geqslant 0$ на I_1, $x'(u) \leqslant 0$ на I_2. Пусть $\forall\, k = 1, 2$ $u = u_k(x)$, $x \in J_k = \langle x_k, x_0]$, — функция, обратная для функции $x = x(u)$, $u \in I_k$, $u_k(x_0) = u_0$. Тогда, как следует из теоремы 3.2, $\forall\, k = 1, 2$ кривая $l_k = \pi T(\lambda_k)$: $y = \varphi_k(x) \equiv g(w(u_k(x)))$, $x \in J_k$, — интегральная кривая уравнения (1.1), причем $\varphi_k(x_0) = g(w(u_0))$, а левая производная $\varphi_k'(x_0) = h(w(u_0))$. Это означает, что кривые l_1, l_2 имеют общую правую граничную точку $p_0 = (x_0, g(w(u_0))) = (x_0, y_0)$, в которой они имеют один и тот же наклон $y_0' = h(w(u_0))$. Из этого и следует, что для кривой $l = l_1 \cup l_2$ p_0 — точка возврата. □

Теорема 3.3 [4]. *Если интегральная кривая уравнения* (3.13) $\lambda \subset æ \setminus \omega$, *то ее* πT-*образ* l *не является интегральной кривой уравнения* (1.1) : *он вырождается в точку* $p_0 = (x_0, y_0) \in d$.

Доказательство. Пусть, по-прежнему, λ, L и l определяются соответственно уравнениями (3.16), (3.17) и (3.19). По условию на кривой λ согласно (3.11) и (3.14)

$$\Delta(w(u)) = \det A(w(u)) = \begin{vmatrix} f_u'(w(u)) & f_v'(w(u)) \\ g_u'(w(u)) & g_v'(w(u)) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (3.25)$$

$$\left(|g_u' - hf_u'| + |g_v' - hf_v'|\right)\Big|_{w=w(u)} \neq 0 \quad \forall\, u \in I. \qquad (3.26)$$

Пусть $u_0 \in I$ — любая точка, $v_0 = v(u_0)$, $w_0 = (u_0, v_0)$. Как следует из условия 3.2, $A(w_0)$ — ненулевая матрица. Пусть, для определенности, $f'_u(w_0) \neq 0$; пусть $I_0\,(\subset I)$ — окрестность u_0, на которой $f'_u(w(u)) \neq 0$. Тогда, как следует из (3.25),

$$\frac{g'_u(w(u))}{f'_u(w(u))} \equiv \frac{g'_v(w(u))}{f'_v(w(u))} \equiv k(w(u)),\ u \in I_0, \tag{3.27}$$

где $k(w(u)) \in C(I_0)$. Но функция $v = v(u)$, $u \in I_0$, — решение уравнения (3.13), а потому обращает его и равенство (3.12) в тождества относительно $u \in I_0$. Последнему (с учетом (3.27)) можно придать вид

$$[(k(w) - h(w))(f'_u(w)du + f'_v(w)dv]|_{w=w(u)} \equiv 0,\ u \in I_0, \tag{3.28}$$

где,как следует из (3.20), $k(w(u)) - h(w(u)) \neq 0$ в I_0. Из (3.28) и (3.27) следуют тождества: $df(w(u)) \equiv 0$, $dg(w(u)) \equiv 0$ в I_0. Но u_0 — произвольная точка I, а потому эти тождества справедливы в I. Из них следует: $f(w(u)) \equiv const$, $g(w(u)) \equiv const$, $u \in I$, что в силу (3.19) дает $l = \{(x_0, y_0)\}$. Но $\lambda \subset æ \setminus \omega \Longrightarrow L = T(\lambda) \subset T(æ) = K$ $\Longrightarrow l = \pi(L) \subset \pi(K) = d$. □

3.5. Обыкновенные и особые решения уравнения (1.1)

Теорема 3.4 [4]. *Если интегральная кривая уравнения* (3.13) $\lambda \subset \Sigma \setminus æ$, *то* $l = \pi T(\lambda)$ — *обыкновенная интегральная кривая уравнения* (1.1).

Доказательство. При условиях данной теоремы согласно теореме 3.1 кривая l — интегральная кривая уравнения (1.1), а согласно лемме 3.2 $L = T(\lambda) \subset S \setminus K$, $l = \pi T(\lambda) \subset G \setminus d$. Но (по лемме 3.1) $G \setminus d$ — область единственности для уравнения (1.1). Следовательно, $l = \pi T(\lambda)$ — обыкновенная интегральная кривая уравнения (1.1). □

Теорема 3.5 [4]. *Пусть интегральная кривая* (3.16) *уравнения* (3.13) $\lambda \subset \omega$ *и такова, что* $l = \pi T(\lambda)\,(\subset d)$ — *интегральная кривая уравнения* (1.1) (*см. теорему* 3.2).

1) *Если при этом* $\forall\, u \in I$ *через точку* $w(u) \in \lambda$ *проходит (с тем же или другим наклоном) интегральная кривая уравнения* (3.13) λ_u, *которая а) ни в какой окрестности точки* $w(u)$ *не совпадает с* λ, *б) такова, что* $l_u = \pi T(\lambda_u)$ — *интегральная кривая уравнения* (1.1), *то* $l = \pi T(\lambda)$ — *особая интегральная кривая уравнения* (1.1) (*огибающая семейства его интегральных кривых* $\{l_u,\ u \in I\}$).

2) *Если же ни через одну точку $w(u) \in \lambda$ вышеописанная интегральная кривая уравнения* (3.13) λ_u *не проходит, то* $l = \pi T(\lambda)$ *— обыкновенная интегральная кривая уравнения* (1.1).

Доказательство. Пусть $u_0 \in I$ — произвольная точка, $w_0 = w(u_0)\,(\in \lambda)$, $q_0 = (x_0, y_0, y_0') = T(w_0)\,(\in T(\lambda))$.

1) При условиях первого утверждения теоремы через точку w_0 проходят интегральные кривые уравнения (3.13) λ и λ_{u_0}, которые *а*) не совпадают ни в какой окрестности точки w_0, *б*) таковы, что $l = \pi T(\lambda)$ и $l_{u_0} = \pi T(\lambda_{u_0})$ — интегральные кривые уравнения (1.1). Последние имеют общую начальную точку q_0 (см. § 1), т. е. они проходят через точку $p_0 = \pi(q_0) = (x_0, y_0) \in G$ и имеют в ней один и тот же наклон y_0'. Покажем, что кривые l и l_{u_0} не совпадают ни в какой окрестности $U\,(\subset G)$ точки p_0.

Согласно лемме 3.3 (см. (3.20)), если $l = \pi T(\lambda) = \{(x, \varphi(x)), x \in J)\}$, $l_{u_0} = \pi T(\lambda_{u_0}) = \{(x, \varphi_{u_0}(x)), x \in J_{u_0}\}$ — интегральные кривые уравнения (1.1), то $L = T(\lambda) = \{(x, \varphi(x), \varphi'(x)), x \in J)\}$, $L_{u_0} = T(\lambda_{u_0}) = \{(x, \varphi_{u_0}(x), \varphi_{u_0}'(x)), x \in J_{u_0})\}$. Но λ и λ_{u_0} различны в любой окрестности $W(\subset \Sigma)$ точки w_0. Следовательно, в силу взаимной однозначности отображения T, L и L_{u_0} не совпадают ни в какой окрестности $V(\subset S)$ точки q_0. Из этого следует, что l и l_{u_0} не сопадают ни в какой окрестности $U(\subset G)$ точки p_0 (ибо, допустив противное, мы получим, что L и L_{u_0} совпадают в некоторой окрестности точки q_0). Последнее означает, что при $q_0 = (x_0, y_0, y_0') = T(w_0)$ решение задачи Коши (1.1), (1.3) неединственно (см. § 1). Но w_0 — произвольная точка λ. Следовательно, для любой точки $q_0 = (x_0, y_0, y_0') = (x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0))$ решение задачи Коши (1.1), (1.3) неединственно. А это и означает, что $l = \pi T(\lambda)$ — особая интегральная кривая уравнения (1.1), а именно огибающая семейства его интегральных кривых $\{l_u, u \in I\}$.

2) При условиях второго утверждения теоремы $\forall q_0 \in T(\lambda)$ решение задачи Коши (1.1), (1.3), как легко видеть, единственно, а потому $l = \pi T(\lambda)$ — обыкновенная интегральная кривая уравнения (1.1). □

3.6. Частные случаи.

Случай 1. Пусть уравнение (1.1) разрешено относительно y, т.е. имеет вид

$$y = g(x, y'), \quad g \in C^1(\Sigma) \tag{1.1$_1$}$$

где $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ — область, $g'_{y'}(x, y') \not\equiv 0$ в любой области $W \subset \Sigma$. Уравнение (1.1_1) определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ гладкую поверхность S. Его область задания $G = \pi(S)$, криминанта K определяется системой уравнений

$$y = g(x, y'), \quad \frac{\partial g}{\partial y'}(x, y') = 0. \tag{3.2$_1$}$$

Для уравнения (1.1_1) обычна параметризация

$$T: x = f(x, p) \equiv x, \quad y = g(x, p), \quad y' = h(x, p) \equiv p, \quad (x, p) \in \Sigma.$$

Производная отображения $T: \Sigma \to S$

$$\frac{\partial(x, y, y')}{\partial(x, p)} = \begin{pmatrix} 1 & g'_x(x, p) & 0 \\ 0 & g'_p(x, p) & 1 \end{pmatrix}^*, \quad w = (x, p,)$$

где (*) — знак транспонирования, так что условие (3.2) для него выполняется, а формулы (3.11),(3.13) и (3.14) принимают соответственно вид

$$æ: g'_p(x, p) = 0, \tag{3.11$_1$}$$

$$(g'_x(x, p) - p)dx + g'_p(x, p)dp = 0, \tag{3.13$_1$}$$

$$\omega: g'_x(x, p) - p = 0, \quad g'_p(x, p) = 0. \tag{3.14$_1$}$$

Из (3.2_1) и (3.11_1) следует (в согласии с леммой 3.2): $K = T(æ)$, а из (3.11_1) и (3.14_1) следует (в согласии с (3.15)): $\omega \subset æ$.

Пусть нам удалось полностью проинтегрировать в области Σ уравнение (3.13_1). Пусть λ — произвольная его интегральная кривая. С учетом всего сказанного в п. 3.6 для уравнений (1.1_1) и (3.13_1) лемма 3.3 и теоремы 3.1–3.5 принимают соответственно следующий вид.

Лемма 3.3$_1$. А. *Пусть λ — график решения $x = x(p)$, $p \in I$, уравнения* (3.13$_1$). *При этом условии справедливо утверждение: $l = \pi T(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения* (1.1$_1$) $\Longleftrightarrow$ 1) *функция $x = x(p)$, $p \in I$, имеет непрерывную обратную функцию $p = p(x)$, $x \in J$,* 2) *функция $\varphi(x) \equiv g(x, p(x))$, $x \in J$, обладает свойствами: $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi'(x) \equiv p(x)$, $x \in J$, т. е. имеет место равенство* (3.20).

Б. *Пусть λ — график решения $p = p(x)$, $x \in J$, уравнения* (3.13$_1$) *(и, следовательно, $p'(x)$ непрерывна в J). При этом условии $l = \pi T(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения* (1.1$_1$) $\Longleftrightarrow$ *функция $\varphi(x) \equiv g(x, p(x))$, $x \in J$, обладает свойством: $\varphi'(x) \equiv p(x)$, $x \in J$, т. е. выполняется равенство* (3.20).

Теорема 3.1$_1$. *Если $\lambda \subset \Sigma \setminus æ$, то*

1) *λ — график решения $p = p(x)$, $x \in I$, уравнения* (1.1$_1$),

2) *$l = \pi T(\lambda) : y = \varphi(x) \equiv g(x, p(x))$, $x \in I$, — обыкновенная интегральная кривая уравнения* (1.1$_1$).

Это утверждение есть объединенная формулировка для случая 1 теорем 3.1 и 3.4.

Теорема 3.2$_1$. *Пусть $\lambda \subset \omega$.*

А. *Если $\lambda : x = x(p)$, $p \in I$, причем функция $x(p)$ строго монотонна в I, а $x'(p)$ имеет в I разве лишь изолированные нули, то $l = \pi T(\lambda)$ ($\subset d$) — интегральная кривая уравнения* (1.1$_1$).

Б. *Если $\lambda : p = p(x)$, $x \in J$ (причем $p'(x) \in C(J)$), то $l = \pi T(\lambda) : y = \varphi(x) \equiv g(x, p(x))$, $x \in J$, — интегральная кривая уравнения* (1.1$_1$).

Теорема 3.3$_1$. *Если $\lambda \subset æ \setminus \omega$, то $l = \pi T(\lambda) = \{p_0\}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in d$.*

Доказательство. Это утверждение есть повторение теоремы 3.3. В данном частном случае оно почти очевидно. Действительно, если $\lambda \subset æ \setminus \omega$, то, как следует из (3.11$_1$), (3.13$_1$) и (3.14$_1$), на λ $g'_p(x, p) \equiv 0$, $g'_x(x, p) - p \neq 0$, т.е. на λ $dx(p) \equiv 0$, т.е. λ определяется уравнением $x = x(p) \equiv x_0$, $p \in J$. Это означает, что функция $x = f(x(p), p) \equiv x(p) \equiv x_0$, $p \in J$, не обратима, т.е. условие 1) леммы 3.3 не выполняется, а потому $l = \pi T(\lambda)$ не является интегральной кривой уравнения (1.1$_1$).

Далее из доказанного следует согласно (3.8$_1$), что

$$T(\lambda) = \{(x_0, g(x_0, p), p), p \in J\}$$

и, следовательно, $l = \pi T(\lambda) = \{(x_0, g(x_0, p)), p \in J\}$, а тождество $g'_p(x,p)\big|_{(x,p)\in\lambda} \equiv 0$ принимает вид $g'_p(x_0, p)) \equiv 0, p \in J$. Из него следует, что $g(x_0, p)) \equiv \mathrm{const}\,, p \in J$, а тогда выражение для l принимает вид $l = \pi T(\lambda) = \{(x_0, y_0)\}$. Но $\lambda \subset æ \Longrightarrow T(\lambda) \subset T(æ) = K \Longrightarrow l = \pi T(\lambda) \subset \pi(K) = d$. □

Теорема 3.4_1 включена в теорему 3.1_1.

Теорема 3.5_1. *Пусть* $\lambda \subset \omega$ *и такова, что* $l = \pi T(\lambda)$ $(\subset d)$ — *интегральная кривая уравнения* (1.1_1). *Пусть для* λ *имеет место случай* **А** (*случай* **Б**) *теоремы* 3.2_1.

1) *Если при этом* $\forall p \in I$ $(\forall x \in J)$ *через точку* $w(p) = (x(p), p) \in \lambda$ $(w(x) = (x, p(x)) \in \lambda)$ *проходит интегральная кривая уравнения* (3.13_1) λ_p (λ_x), *которая а) ни в какой окрестности* W $(\subset \Sigma)$ *точки* $w(p)$ $(w(x))$ *не совпадает с* λ, *б) такова, что* $l_p = \pi T(\lambda_p)$ $(l_x = \pi T(\lambda_x))$ — *интегральная кривая уравнения* (1.1_1), *то* $l = \pi T(\lambda)$ — *особая интегральная кривая уравнения* (1.1_1), *огибающая семейства его интегральных кривых* $\{l_p, p \in I\}$ $(\{l_x, x \in J\})$.

2) *Если же ни через одну точку* $w(p) \in \lambda$ $(w(x) \in \lambda)$ *вышеописанная интегральная кривая уравнения* (3.13_1) *не проходит, то* $l = \pi T(\lambda)$ — *обыкновенная интегральная кривая уравнения* (1.1_1).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y = xy' + (y')^3. \tag{3.29}$$

Это уравнение вида $y = g(x, y')$. Более того, это уравнение вида $y = xy' + \psi(y')$, т.е. представляет собой уравнение Клеро [5. С. 26; 3. С. 40]. В пространстве $\mathbb{R}^3$ оно определяет гладкую линейчатую поверхность S : эта поверхность расслаивается на прямые

$$y' = C, \quad y = Cx + C^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Криминанта уравнения (3.29) определяется системой уравнений

$$y = xy' + (y')^3, \quad x + 3(y')^2 = 0.$$

Исключая из этой системы y', получаем дискриминантную кривую уравнения (3.29) в виде

$$d : 4x^3 + 27y^2 = 0.$$

Это полукубическая парабола. Ее ветви

$$d_\pm : y = \pm 2\left(-\frac{x}{3}\right)^{3/2}$$

суть интегральные кривые уравнения (3.29), в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Параметризуя уравнение (3.29) с помощью отображения

$$T : x = x, \quad y = px + p^3, \quad y' = p, \quad (p, x) \in \Sigma = \mathbb{R}^2,$$

получаем на плоскости параметров x, p уравнение

$$(x + 3p^2)dp = 0, \tag{3.30}$$

множество ω особых точек которого иммет вид

$$\omega : x + 3p^2 = 0.$$

Интегральными для (3.30) являются следующие линии:

а) $\forall C \in \mathbb{R}$ — прямая $\lambda_C : p = C$, $x \in \mathbb{R}$,

б) кривая $\lambda\,(= \omega) : x = -3p^2$, $p \in \mathbb{R}$.

Согласно лемме 3_1 (п. **Б**) каждая прямая $\lambda_C : p = p(x) \equiv C$, $x \in \mathbb{R}$, порождает интегральную прямую уравнения (3.29)

$$l_C = \pi T(\lambda_C) : y = \varphi(x) \equiv p(x)x + p^3(x) \equiv Cx + C^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

а ветви $\lambda_\pm : p = \pm\left(-\frac{x}{3}\right)^{1/2}$, $x \leqslant 0$, кривой λ порождают интегральные кривые уравнения (3.29)

$$\lambda_\pm = \pi T(\lambda_\pm)\,(= d_\pm) : y = \pm 2\left(-\frac{x}{3}\right)^{3/2}.$$

Исследуем интегральные кривые уравнения (3.29) l_C, $C \in \mathbb{R}$, и $l_\pm$ на обыкновенность–особенность. Для этого применим к их прообразам λ_C и $\lambda_\pm$ теорему 3.5_1.

$\forall C \in \mathbb{R}$ прямая λ_C не имеет общих точек с другими интегральными кривыми уравнения (3.30), исключая точку $(x_0, p_0) = (-3C^2, C)$, в которой она пересекается с параболой λ. Из этого на основании теоремы 3.5_1, п. 2, следует, что части прямой l_C, соответствующие $x < -3C^2$ и $x > -3C^2$, являются обыкновенными интегральными линиями уравнения (3.29). Напротив, через любую точку $(x_0, p_0) \in \lambda_{+(-)}$ проходит интегральная прямая уравнения (3.30) $\lambda_{p_0} : p = p_0$, $x \in \mathbb{R}$, которая отлична от $\lambda_{+(-)}$ и для которой $l_{p_0} = \pi T(\lambda_{p_0}) : y = p_0 x + p_0^3$ — интегральная кривая уравнения (3.29). Из этого на основании теоремы 3.5_1, п. 1, следует, что $l_{+(-)} = \pi T(\lambda_{+(-)}) (= d_{\pm})$ — особая интегральная кривая уравнения (3.29), огибающая семейства его интегральных прямых $\{l_C, C \leqslant 0\,(C \geqslant 0)\}$. В последнем можно убедиться непосредственно.

Случай 2. Пусть уравнение (1.1) разрешено относительно x, т.е. имеет вид

$$x = f(y, y'), \quad f \in C^1(\Sigma), \tag{1.1$_2$}$$

где $\Sigma(\subset \mathbb{R}^2)$ — область, $f'_{y'}(y, y') \not\equiv 0$ в любой области $\Sigma' \subset \Sigma$. Уравнение (1.1_2) определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, y' гладкую (непрерывно дифференцируемую) поверхность S. Его область задания $G = \pi(S)$. Его криминанта K определяется системой уравнений в $\mathbb{R}^3$

$$x = f(y, y'), \quad f'_{y'}(y, y') = 0, \tag{3.2$_2$}$$

а дискриминантная кривая $d = \pi(K)$.

Для уравнения (1.1_2) обычна параметризация

$$T : x = f(y, p), \quad y = y, \quad y' = p, \quad w = (y, p) \in \Sigma. \tag{3.8$_2$}$$

Производная отображения $T : \Sigma \to S$

$$\frac{\partial(x, y, y')}{\partial(y, p)} = \begin{pmatrix} f'_y(y, p) & 1 & 0 \\ f'_p(y, p) & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

где $(*)$ — знак транспонирования. Условие 3.2 для него выполняется, а формулы (3.11), (3.13) и (3.14) принимают, соответственно, вид

$$æ : f'_p(y, p) = 0, \tag{3.11$_2$}$$

$$(p f'_y(y, p) - 1) dy + p f'_p(y, p) dp = 0, \tag{3.13$_2$}$$

$$\omega : p f'_y(y, p) - 1 = 0, \quad f'_p(y, p) = 0. \tag{3.14$_2$}$$

Из этих формул следует: $K = T(æ)$, $\omega \subset æ$.

Пусть λ — произвольная интегральная кривая уравнения (3.13_2). Возникает вопрос о том, всегда ли ее (x,y)-образ $l = \pi T(\lambda)$ является интегральной кривой уравнения (1.1_2). Лемма 3.3 и теоремы 3.1 – 3.5, отвечающие на этот вопрос в общем случае, для частного случая 2 принимают, соответственно, следующий вид.

Лемма 3.3$_2$. А. *Пусть* λ — *график решения* $y = y(p)$, $p \in I$, *уравнения* (3.13_2). *При этом условии справедливо утверждение:* $l = \pi T(\lambda)$ — *интегральная кривая уравнения* $(1.1_2) \iff 1)$ *функция* $x = f(y(p), p)$, $p \in I$, *имеет непрерывную обратную функцию* $p = p(x)$, $x \in J$, 2) *функция* $\varphi(x) \equiv y(p(x))$, $x \in J$, *обладает свойствами:* $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi'(x) \equiv p(x)$, $x \in J$, *т. е. выполняется равенство* (3.20).

Б. *Пусть* λ — *график решения* $p = p(y)$, $y \in I$, *уравнения* (3.13_2). *При этом условии справедливо такое утверждение:* $\lambda = \pi T(\lambda)$ — *интегральная кривая уравнения* $(1.1_2) \iff 1)$ *функция* $x = f(y, p(y))$, $y \in I$, *имеет обратную функцию* $y = \varphi(x)$, $x \in J$, 2) *функция* $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi'(x) \equiv p(\varphi(x))$, $x \in J$, *т. е. имеет место равенство* (3.20).

Теорема 3.1$_2$. *Если* $\lambda \subset \Sigma \setminus æ$, *то*

1) λ *представима а) вне оси* $p = 0$ *в виде* $p = p(y)$, *б) в окрестности оси* $p = 0$ — *в виде* $y = y(p)$;

2) $l = \pi T(\lambda)$ $(\subset G \setminus d)$ *представима в виде а)* $x = f(y, p(y))$ *или б)* $x = f(y(p), p)$, $y = y(p)$ *соответственно случаям а) и б) представления* λ *и является обыкновенной интегральной кривой уравнения* (1.1_2).

Эта теорема есть объединение для случая 2 теорем 3.1 и 3.4.

Теорема 3.2$_2$. *Пусть* $\lambda \subset \omega$ *и для нее имеет место случай* **А** (*случай***Б**) *леммы* 3.3$_2$. *Если функция* $x = f(y(p), p)$, $p \in I$, (*функция* $x = f(y, p(y))$, $y \in I$), *строго монотонна, причем ее производная* $x'(p)$ $(x'(y))$ *имеет в* I *разве лишь изолированные нули, то кривая* $l = \pi T(\lambda)$ $(\subset d)$ *является интегральной кривой уравнения* (1.1_2).

Теорема 3.3$_2$. *Если* $\lambda \subset æ \setminus \omega$, *то* $l = \pi T(\lambda) = \{p_0\}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in d$.

Это повторение теоремы 3.3. Но для рассматриваемого частного случая она легко доказывается непосредственно. Действительно, из (3.11_2), (3.13_2), (3.14_2) следует, что при условиях теоремы на λ

верно тождество: $\dfrac{dy}{dp} \equiv 0 \Longrightarrow \lambda : y \equiv y_0,\ p \in I \Longrightarrow f'_p(y_0, p) \equiv 0$, $p \in I \Longrightarrow f(y_0, p) \equiv \text{const}\,,\ p \in I \Longrightarrow L = T(\lambda) = \{(f(y_0, p), y_0, p),\ p \in I\} \Longrightarrow l = \pi T(\lambda) = \{(x_0, y_0)\}$. Но $\lambda \subset æ \setminus \omega \Longrightarrow T(\lambda) \subset K \Longrightarrow l = \pi T(\lambda) \subset d$. $\Box$

Теорема 3.4_2 вошла в состав теоремы 3.1_2.

Теорема 3.5_2. *Пусть $\lambda \subset æ$ и такова, что $l = \pi T(\lambda)$ — интегральная кривая уравнения (1.1_2). Пусть для λ имеет место случай* **А** *(случай* **Б***) леммы 3.3_2.*

1) *Если при этом $\forall\, p \in I$ ($\forall\, y \in I$) через точку $w(p) = (y(p), p) \in \lambda$ ($w(y) = (y, p(y)) \in \lambda$) проходит интегральная кривая уравнения (3.13_2) λ_p (λ_y), которая а) ни в какой окрестности W ($\subset \Sigma$) точки $w(p)$ ($w(y)$) не совпадает с λ, б) такова, что $l_p = \pi T(\lambda_p)$ ($l_y = \pi T(\lambda_y)$) — интегральная кривая уравнения (1.1_2), то $l = \pi T(\lambda)$ — особая интегральная кривая уравнения (1.1_2), огибающая семейства его интегральных кривых $\{l_p,\ p \in I\}$ ($\{l_y,\ y \in I\}$).*

2) *Если же ни через одну точку $w(p)$ ($w(y)$) $\in \lambda$ вышеописанная интегральная кривая уравнения (3.13_2) не проходит, то $l = \pi T(\lambda)$ — обыкновенная интегральная кривая уравнения (1.1_2).*

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y') \equiv (y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0. \tag{3.31}$$

Здесь 1) F — аналитическая в $D = \mathbb{R}^3$, 2) $S = \{q \in D : F(q) = 0\} \neq \varnothing$, 3) grad $F(q) = (-4yy', 4(4y - xy'), 3(y')^2 - 4xy) = 0 \Longleftrightarrow y^2 + (y')^2 = 0$, 4) $F'_{y'}(q) \not\equiv 0$ в любой области $D' \subset D$.

Из этого следует, что для уравнения (3.31) на прямой $L_0 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} \subset S$ условие 3.1, обеспечивающее гладкость поверхности S, не выполняется. Поэтому будем рассматривать уравнение (3.31) в области $D' = D \setminus L_0 : y^2 + (y')^2 > 0$. Здесь оно определяет гладкую поверхность S', а при $yy' \neq 0$ может быть переписано в виде

$$x = \frac{8y^2 + (y')^3}{4yy'}, \quad (y, y') \in \Sigma : yy' \neq 0, \tag{3.31_1}$$

т.е. в виде $x = f(y, y')$.

Чтобы упростить исследование, ограничимся рассмотрением уравнения (3.31_1) в координатной четверти пространства $\mathbb{R}^3$ $R_1 : y > 0$,

$y' > 0$. Его рассмотрение в координатной четверти R', соответствующей любой другой комбинации знаков y и y', может быть произведено аналогично.

Пусть S_1 — поверхность, определяемая уравнением (3.31_1) в области R_1. Тогда $G_1 = \pi(S_1)$ — область заания уравнения (3.31_1), рассматриваемого в R_1. Криминанта K уравнения (3.31_1) определяется уравнениями

$$F(x, y, y') = 0, \quad 3(y')^2 - 4xy = 0, \quad (y, y') \in \Sigma_1,$$

и, следовательно, его дискриминантной кривой является кривая d : $y = \dfrac{4}{27}x^3$, $x > 0$.

Параметризуя поверхность S_1 с помощью отображения

$$T : x = \frac{8y^2 + p^3}{4yp}, \quad y = y, \quad y' = p, (y, p) \in \Sigma_1 : y > 0, p > 0,$$

получаем в области Σ_1 уравнение

$$(4y^2 - p^3)(pdy - 2ydp) = 0. \tag{3.32}$$

Множество его особых точек

$$\omega = \{(y, p) \in \Sigma_1 : 4y^2 - p^3 = 0\}.$$

Отметим, что при данной параметризации поверхности S_1 множество æ $= T^{-1}(K)$ (согласно (3.11_2)) определяется уравнением $\dfrac{\partial x}{\partial p}(y, p) = 0$, и, следовательно (в чем легко убедиться), совпадает с ω : æ $= \omega$.

Интегрируя уравнение (3.32), находим все его интегральные кривые в области Σ_1 : *а*) $\forall C > 0$ оно имеет интегральную кривую $\lambda_C : p^2 = 4Cy$, *б*) кроме того, оно имеет интегральную кривую λ : $p^3 = 4y^2$ $(\lambda = \omega)$.

Применяя к $\lambda_C : y = y(p) \equiv \dfrac{p^2}{4C}$ лемму 3.3_2 (п. **А**), находим: 1) функция

$$x = \frac{8y^2(p) + p^3}{4py(p)} \equiv \frac{p + 2C^2}{2C}, \quad p > 0,$$

имеет непрерывную обратную функцию $p = p(x) \equiv 2C(x - C)$, $x > C$, 2) функция

$$y = \varphi(x) \equiv y(p(x)) \equiv \frac{p^2(x)}{4C} \equiv C(x-C)^2, \quad x > C,$$

обладает свойством $\varphi'(x) = \dfrac{p(x)p'(x)}{2C} \equiv p(x)$, $x > C$, т.е. условия леммы 3.3_2 (п. **А**) выполняются. Следовательно, $\forall C > 0$ кривая

$$l_C = \pi T(\lambda_C) : y = \varphi(x) \equiv C(x-C)^2, \quad x > C,$$

— интегральная кривая уравнения (3.32).

Применяя к $\lambda : p = p(y) \equiv (4y^2)^{1/3}$, $y > 0$, лемму 3.3_2 (п. **Б**), находим: 1) функция

$$x = \frac{8y^2 + p^3(y)}{4y\,p(y)} \equiv \frac{12y^2}{4y\,(4y^2)^{1/3}} \equiv 3\left(\frac{y}{4}\right)^{1/3}, \quad y > 0,$$

имеет непрерывную обратную функцию $y = \varphi(x) \equiv \dfrac{4}{27}x^3$, $x > 0$, причем 2) $\varphi'(x) \equiv \dfrac{4}{9}x^2 \equiv p(\varphi(x))$, $x > 0$, ибо

$$p(\varphi(x)) \equiv (4\varphi^2(x))^{1/3} \equiv \left[4\left(\frac{4}{27}x^3\right)^2\right]^{1/3} \equiv \frac{4}{9}x^2, \quad x > 0,$$

т.е. условия 1), 2) леммы 3.3_2 (п. **Б**), выполняются. Следовательно, $l = \pi T(\lambda) : y = \dfrac{4}{27}x^3$, $x > 0$, — интегральная кривая уравнения (3.32).

Исследуем интегральные кривые уравнения (3.32) l_C, $C > 0$, и l на обыкновенность - особенность. Для кривых l_C, $C > 0$, это можно сделать с помощью леммы 3.1, а для кривой l — с помощью теоремы 3.5_2, в основе которой лежит определение особой интегральной кривой.

При $\forall C > 0$ кривая $l_C : p^2 = 4Cy$, $y > 0$, пересекаетя с кривой æ $(= \omega = \lambda) : p^3 = 4y^2$, $y > 0$, в единственной точке $w_0 = (y_0, p_0) = (4C^3, 4C^2) \Longrightarrow$ кривая $L_C = T(\lambda_C)$ перессекается с кривой $K = T(æ)$ в единственной точке $q_0 = T(w_0) = (3C, 4C^3, 4C^2) \Longrightarrow$ кривые $l_C =$

$\pi(L_C)$ и $d = \pi(K)$ имеют общую точку $p_0 = (3C, 4C^3)$. Нетрудно убедиться в том, что *а*) p_0 — единственная общая точка кривых $l_C : y = C(x - C)^2$, $x > 0$, и $d(= l) : y = \frac{4}{27}x^3$, $x > 0$, *б*) в точке p_0 эти кривые соприкасаются. Из этого вытекают следующие утверждения.

1) Интегральные кривые уравнения (3.32) $l_C|_{x \in (C, 3C)}$ и $l_C|_{x > 3C}$ лежат в $G_1 \setminus d$, а потому (согласно лемме 3.1) являются обыкновенными интегральными кривыми.

2) Через каждую точку $p_0 = (x_0, y_0) \in l$ проходит с тем же наклоном интегральная кривая уравнения (3.32) $l_C : y = C(x - C)^2$, $C = \frac{x_0}{3}$, которая ни в какой окрестности точки p_0 не совпадает с l. А это означает, что l — особая интегральная кривая уравнения (3.32), огибающая семейства его интегральных кривых $\{l_C, C > 0\}$.

Примечание. Линия $l_0 = \pi(L_0) : y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — интегральная кривая уравнения (3.31). Каждой ее точке $p_0 = (x_0, 0)$ соответствует одно допустимое значение $y' = 0$. Между тем, при $x_0 \neq 0$ через нее проходит, кроме l_0, интегральная кривая уравнения (3.31) $l_C : y = C(x - C)^2$, $C = x_0$, отличная от l_0 в любой окрестности точки $(x_0, 0)$, а при $x_0 = 0$ — интегральная кривая $y = \frac{4}{27}x^3$. Следовательно, $l : y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, — особая интегральная кривая уравнения (3.31).

Литература

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Высшая школа, 1974. 768 с.

2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 468 с.

3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

4. Андреев А. Ф., Андреева И. А. К вопросу о параметрическом интегрировании дифференциальных уравнений // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 4.

5. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

6. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 304 с.

7. Залгаллер В.А. Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ирина Алексеевна Андреева

Особые решения
дифференциальных уравнений
первого порядка

Учебное пособие

Подписано в печать с оригинала-макета
Ф-т 60х 84/16. Усл. печ. л. 3,0. Уч.-
изд. л. 2,6. Тираж 100 экз. Заказ Л/^{2}-

С.-Петербургский государственный технический университета
195251, С.-Петербург, Политехническая ул., 29.