На правах рукописи

МИЗИН
Денис Александрович

АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРИКЛАДНОЙ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

САКНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2003

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Научный руководитель — **доктор физико-математических наук, профессор Осипенко Георгий Сергеевич.**

Официальные оппоненты — **доктор физико-математических наук, профессор Флегонтов Александр Владимирович.**

кандидат физико-математических наук Ершов Евгений Константинович.

Ведущая организация — **Санкт-Петербургский государственный университет.**

Защита состоится 21 мая 2003 года *в 16* чае. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д *212.229,13* при Санкт-Петербургском государственном политехническом университете по адресу: *195251,* Политехническая улица, дом *29,* корпус I, ауд. 41

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Автореферат разослан 18 апреля 2003г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13
доктор биологических наук, профессор **Зинковский** А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Как правило, математические модели какого-либо процесса или явления представляют собой нелинейные системы. Нынешний период в развитии нелинейной динамики можно назвать периодом динамического хаоса. Оказалось, что существует множество простых динамических систем, которые могут вести себя довольно сложно. Примером может служить отображение, известное под названием *подкова Смейла.* Временному поведению динамической системы отвечает движение точки по канторову множеству.

В начале 70-х годов качественная теория и концепция динамического хаоса позволили предложить новый подход к некоторым классическим задачам. Например, американский метеоролог Лоренц занимался системой уравнений Навье-Стокса, которая описывает сложное поведение течения жидкости, Лоренц показал, что у системы существует аттрактор. Причем оказалось, что поведение системы на этом множестве очень сложное и обнаруживает явление динамического хаоса.

Хаотическая динамическая система объединяет в себе глобальную устойчивость (траектория не уходит из некоторой области фазового пространства) с локальной неустойчивостью - малые погрешности начальных данных нарастают, близкие траектории расходятся. Вследствие этого, для хаотических систем, в которых точное прослеживание траектории становится невозможным (сколь угодно малая ошибка в начальных данных будет экспоненциально нарастать), важной задачей является определение предсказуемости поведения системы. Одной из мер определения хаотичности динамической системы является топологическая энтропия.

Пусть M - компактное пространство. Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : M \to M$. Пусть $C = \{M(1), \ldots, M(n)\}$ - конечное открытое покрытие M. Определим множество

$$C^N = \{M(i_0 i_1 .. i_{N-1}) = \bigcap_{0}^{N-1} f^{-k}(M(i_k)) \neq 0, \quad 1 \leq i_0, \ldots, i_{N-1} \leq n\}$$

Совокупность всех множеств из C^N также образует конечное открытое покрытие. Обозначим через $k(C^N)$ мощность минимального подпокрытия, которое можно выбрать из C^N, и положим

$$h(f \mid C) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\log k\left(C^N\right)}{N}$$

Величина

$$h(f) = \sup h(f \mid C),$$

где супремум берется по всем открытым покрытиям, называется топологической энтропией отображения *f.*

По определению, энтропия является топологическим инвариантом, то есть она сохраняется при замене координат.

Топологическую энтропию трудно численно оценить, так как она стандартно определяется через открытые покрытия. Большинство оценок было получено для одномерных отображений [5], [7]. Авторы, предлагающие оценки энтропии для многомерных систем, используют подсчет числа периодических траекторий фиксированного периода [6]. опираясь на неравенство:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\log N_n}{n} \le h(f),$$

где N_n - число периодических точек периода п [1]. Но в этом случае необходимо выполнение от отображения / специального свойства разделяемое™. Немецкие авторы [9] Gary Froyland, Oliver Yunge и Gunter Ochs предложили новый подсчет верхней оценки топологической энтропии, основанный на символической динамике. Но они накладывают так же дополнительные условия на используемое покрытие С. Полученная ими оценка имеет место при условии, что покрытие *С* является *порождающим.* Это ограничение является существенным недостатком метода, так как неизвестно как проверить, что данное покрытие является порождающим. Предложенный в данной работе метод оценки топологической энтропии использует замкнутые покрытия без каких-либо специфических требований. Например, покрытие может состоять из кубов, пересекающихся на границе.

Еще одной из важных практических задач теории динамических систем является разработка конструктивных методов для исследования глобальной структуры траекторий системы.

Напомним, что бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i, -\infty < i < +\infty\}$ называется ε-траекторией отображения *f.* если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε:

$$\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого г, где ρ - метрика на *М.* Если при этом последовательность $\{x_i\}$. является периодической, то она называется ε-периодической траекторией, а точки x_i называются ε-периодическими.

Следует подчеркнуть, что, как правило, точная траектория системы редко известна, а в действительности мы находим только ε-траекторию для достаточно малых положительных ε.

Точка *x* называется ценно-рекуррентной, если *x* есть ε-периодическая для любого положительного ε*,* то есть, существует периодическая ε-траектория, проходящая через *x*. Цепно-рекуррентным множеством, *Q,* называется множество всех цепно-рекуррентных точек. Известно, что ценно-рекуррентное множество инвариантное, замкнутое и содержит возвращающиеся траектории всех типов, таких как периодические, гомоклинические и другие. Если через цепно-рекуррентную точку не проходит периодическая траектория, то существует сколь угодно малое возмущение в C° топологии, для которой эта точка будет периодической [14, 15, 17]. Подмножество $\Omega \subset Q$ называется компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Q могут быть соединены периодической ε-траекторией для любого ε *> 0,* Таким образом, ценно- рекуррентное множество *Q* может быть представлено в виде объединения непересекающихся инвариантных замкнутых компонент *Q{:*

$$Q = \bigcup_i Q_i$$

Пусть $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ ~ компоненты цепно-рекуррентного множества динамической системы. Будем говорить, что между компонентами Q_i и Q_i есть связь $Q_i \to Q_i$ если существует точка *x* такая, что $\alpha(x) \subset Q_i$, $\omega(\mathrm{x}) \subset \mathrm{Q}_i$.

Рассмотрим граф Г с множеством вершин $\{i\}$, соответствующих компонентам Q_i*,* и с множеством ребер $i \to j$ в том и только в том случае, если существует связь $Q_i \to Q_i$. Так построенный граф Г будем называть структурным графом динамической системы, а соответствующую матрицу переходов $A = (a_{ii})$ - структурной матрицей динамической системы *f,* a_{ii} =1, если существует ребро $i \to j$, иначе a_{ii} = 0.

Структурный граф Г описывает глобальную динамику системы. В частности, структурный граф содержит информацию об аттракторах и их областях притяжения.

Структурная матрица динамической системы впервые была определена в [13]. Авторы определяют здесь устойчивые связи между компонентами цепно-рекуррентного множества. А именно, пусть $Q_1, Q_2, \dots$ - компоненты цепно-рекуррентного множества, $g: M \to M$ - непрерывное отображение и расстояние $\rho(f, g) = \max_M \rho(f(x), g(x))$. Обозначим носитель функции *f-g* через $\operatorname{supp}(f - g) = \{x \in M : f(x) \neq g(x)\}$. Связь $Q_i \to Q_i$ называется устойчивой, если существует ε > 0 такое, что любое возмущение

$g,\ \rho(f,g)<\varepsilon,\ \operatorname{supp}(f-g)\subset M\setminus Q$ имеет одинаковые связи $Q_i \to Q_i$. В этой статье показано, что если динамическая система имеет конечное число компонент с устойчивыми связями, то существует конечный алгоритм построения структурной матрицы. Авторы приводят алгоритм построения структурной матрицы символического образа, которая, вообще говоря, не является структурной матрицей динамической системы. Основным недостатком предложенного метода является проверка того, что связи между компонентами устойчивые. Таким образом, возникает задача вычисления структурной матрицы без проверки устойчивости связей между компонентами. В диссертации построен алгоритм вычисления структурной матрицы динамической системы, причем требование устойчивости связей компонент цепно-рекуррентного множества снимается.

Цель работы. Целью работы является

1. Разработать и обосновать конструктивный метод нахождения оценки для топологической энтропии.
2. Разработать и обосновать конструктивный метод вычисления структурной матрицы и структурного графа динамической системы.
3. Создание компьютерно-ориентированных алгоритмов для вычисления энтропии и структурного графа.

Общая методика исследования. В работе использованы методы символической динамики и конструкция символического образа. Общая схема исследования состоит в следующем.

Пусть на компактном пространстве M действует дискретная динамическая система $f: M \to M$, где f - гомеоморфизм. Эта система строго детерминирована: задав точно начальное состояние x_m мы определим тем самым однозначно состояние x_m в любой момент времени $m: x_m = f^m(x_0)$. Дело . обстоит уже не совсем так, если мы находимся в условиях ограниченной точности. Предположим, мы пытаемся выяснить, случайной или детерминированной является изучаемая нами система, регистрируя положение фазовой точки в последовательные моменты времени при помощи некоторого прибора. Реальный прибор обладает ограниченной точностью и может показывать только конечный ряд значений. Пусть $C=\{M(1),\dots,M(n)\}$ -конечное замкнутое покрытие фазового пространства, а i_m - показание прибора при $x\in M(i_m),\ 1\le i_m \le n, m\in \mathrm{Z}$. Определим отображение φ, сопоставляющее точке з последовательность $\{i_m\}, -\infty < i_m < +\infty$ так, что

$$\nu(x)=\{i_m\} \Leftrightarrow f^m(x)\in M(i_m) \qquad (1)$$

Соотношение (1) является ключом к исследованию систем методами символической динамики. Если в последовательности $\varphi(x)$ обнаруживается простая закономерность, то мы не склонны считать изучаемую систему случайной. Если же эта последовательность достаточно сложна и "непредсказуема", то естественно приписать системе случайные свойства. Разумеется, в расчет должна приниматься не одна траектория $f^m(x)$ и отвечающая ей запись показаний прибора $\varphi(x)$, а совокупность траекторий, отвечающих свойствам изучаемой системы.

Наша задача состоит в том, чтобы оценить сложность всей системы. Одна из возможностей связана с асимптотикой числа "допустимых слов" длины N, то есть числа различных между собой отрезков записей показания прибора, соответствующих по правилу (1) при $0 \le m \le N-1$ всевозможным точкам $x \in M$. Изучение асимптотики числа "допустимых слов" при $N \to \infty$ дает возможность определить *энтропию* изучаемого отображения.

Для изучения системы при помощи соотношения (1) мы связываем ее с ориентированным графом, называемым *символическим образом* (точное определение см. ниже, стр. 7). Символический образ можно рассмотреть как конечную аппроксимацию динамической системы. Кроме того символический образ порождает символическую динамику, которая отражает некоторые черты исходной динамической системы.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Предложены новые методы исследования качественного поведения динамических систем. В частности,

1. Доказаны теоремы о свойствах энтропии последовательности симво лических образов.
2. Получен и обоснован компьютерно-ориентированный алгоритм для на хождения верхней оценки топологической энтропии динамической си стемы.
3. Доказана теорема о кодировке траекторий динамической системы на символическом образе.
4. Описаны свойства последовательности отображений структурных гра фов символических образов.
5. Доказана теорема о сходимости последовательности структурных гра фов;

6. Получен и обоснован компьютерно-ориентированный алгоритм для вычисления структурной матрицы динамической системы.

Суммируя полученные результаты, можно сформулировать две основные теоремы диссертации.

1. Для топологической энтропии.

Теорема 1 *Существует алгоритм, который дает двойную последовательность неотрицательных чисел* $\{h_{lk}\}$ *такую, что*

(a) для любого $l \in N$ *последовательность* h_{lk} *невозрастающая при* $k \to \infty$, *и существует предел* $\lim_{k\to\infty} h_{lk} := h_l$ *;*

(b) последовательность $\{h_l\}$ *неубывающая и* $h(f) \le \lim_{l\to+\infty} h_l \le +\infty$;

(c) если / - Липшицево отображение, то $h(f) \le \lim_{l\to+\infty} h_l < +\infty$.

2. Для структурной матрицы динамической системы.

Теорема 2 *Существует алгоритм, который дает двойную последовательность графов* $\{G_{lk}\}$ *такую, что*

(a) для любого $l \in N$ *последовательность графов* $\{G_{lk}\}$ *сходится к графу* G_l*;*

(b) если цепно-рекуррентное множество Q 'имеет конечное число ком понент, то последовательность графов $\{G_l\}$ *за конечное число ша гов совпадет со структурным графом* Г *динамической системы.*

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные теоретические результаты описывают свойства последовательности символических образов, порожденных подразбиением покрытий. Полученные результаты могут быть использованы для определения 1) сложности системы; 2) глобальной структуры динамической системы; 3) информации об аттракторах и их областях притяжения, а также построения фильтраций динамической системы.

Предлагаемые методы представляют собой синтез теоретических результатов и компьютерно-ориентированных алгоритмов, не требуют никакой предварительной информации о системе. Все необходимые вычисления проводятся стандартными численными методами.

Полученные результаты могут применяться в вычислении структурных характеристик динамических систем. Предложенные алгоритмы имеют компьютерную реализацию.

Апробация работы. Основные результаты были изложены на следующих конференциях и семинарах.

1. Третья международная конференция "Дифференциальные уравнения и их применения" (Санкт-Петербург, 2000).
2. Третья международная конференция "Средства для математического моделирования" (Санкт-Петербург, 2001).
3. Семинар на кафедре "Высшая математика" (СПбГПУ, 2002).
4. Семинар на кафедре "Дифференциальные уравнения" (СПбГУ, мат.-мех. фак., 2002).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1,2,3,4], список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация содержит 101 страницу машинописного текста и состоит из введения и трех глав, подразделенных на 16 параграфов, и списка литературы из 32 наименований.

Краткое содержание работы.

Диссертация начинается с введения, которое знакомит с понятиями топологическая энтропия и структурная матрица динамической системы. Приводятся примеры систем со сложным динамическим поведением. Подчеркивается актуальность выбранной темы диссертации.

Первая глава диссертации основывается на работе [11]. Осипенко Г.С. был предложен метод локализации аттрактора и ценно-рекуррентного множества. Идея состоит в том, что строится замкнутое покрытие фазового пространства (компактного многообразия), и динамическая система связывается с ориентированным графом, называемым символическим образом [4]. А именно, пусть $C = \{M(1), \ldots, M(n)\}$ - конечное покрытие компакта M замкнутыми множествами. Построим ориентированный граф G, имеющий n вершин, при этом номер вершины i соответствует ячейке $M(i)$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром $i \to j$ если, и только если, $M(i) \cap f(M(i)) \neq 0$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения f относительно покрытия C. Ясно, что символический образ зависит от покрытия C. Естественно рассматривать символический образ как конечную аппроксимацию отображения. Эта аппроксимация будет более точной при более мелком покрытии. Много полезной информации о свойствах динамической системы можно получить, исследуя ее символический образ. В частности, анализ символического образа приводит к выделению так называемых сильно связанных компонент на ориентированном графе, которые соответствуют цепно-рекуррентному множеству динамической системы. В диссертации расширяется этот алгоритм для того, чтобы вычислить оценку топологической энтропии и структурной матрицы системы.

Символический образ представляет собой конечную аппроксимацию отображения /, наследует важнейшие свойства динамической системы. При практической реализации символического образа важно достаточно точно строить образы ячеек. В первой главе описываются два возможных способа такого построения, предложенных в [3].

Вторая глава посвящена исследованию топологической энтропии. Так как стандартно топологическая энтропия $h(f)$ отображения *f* определяется через открытые покрытия, то для получения численных оценок мы вводим новую величину, которая опирается на замкнутое покрытие. Для замкнутого покрытия $C=\{M(1),\dots,M(n)\}$ фазового пространства рассматривается множество слов длины *N* (или множество кодировок):

$$\Theta_N(f,C)=\{[i_0,..,i_{N-1}]:\exists x\in M,\, f^m(x)\in M(i_m), 0\le m\le N-1\}$$

и вводится величина

$$h(f,C)=\lim_{N\to+\infty}\frac{\log|\Theta_N(f,C)|}{N}$$

где $|\Theta_N(f,C)|$ обозначает мощность множества $\Theta_N(f,C)$.

Величину $h(f,C)$ будем называть энтропией отображения *f* относительно покрытия *C*. Одним из основных результатов второй главы явилась следующая теорема, позволяющая получить оценку топологической энтропии отображения *f* при помощи специальной последовательности $\{h(f,C)\}_{k>1}$.

Будем говорить, что покрытие *D* вписано в покрытие $C(D\succ C)$, если каждый элемент покрытия *D* содержится в одном из элементов покрытия *C*. Пусть $diamM(i)=\sup(\rho(x,y):x,y\in M(i))$ есть диаметр ячейки $M(i)$, и $d=diam(C):=\max_{M(i)\in C} diamM(i))$

Теорема 3 *Пусть* $\{C_k\}$ *есть последовательность замкнутых конечных покрытий компакта M таких, что* $C_{k+1}\succ C_k$ *для любого k и* $d_k:=diam(C_k)\to 0$ *при* $k\to\infty$. *Тогда*

1. последовательность $h(f,C_k)$ *неубывающая, то есть* $h(f,C)\le h(f,C_{k+1})$

6. *топологическая энтропия отображения f не превосходит предела последовательности* $\{h(f, C_k)\}$, *то есть*

$$h(f) = \lim_{k \to +\infty} h(f, C_k) \qquad (2)$$

Дальнейшие исследования в этой главе посвящены алгоритму вычисления величины *h(f,C)*. Для этого мы объединяем конструкцию символического образа и теорию символической динамики [8].

Пусть *G* символический образ. Последовательность $\{z_k\}$ вершин графа *G* называется допустимым путем (или просто - путем), если для любого *k* граф *G* содержит ребро $z_k \to z_{k+1}$. Путь называется периодическим, если последовательность $\{z_k\}$ является периодической.

Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе *G* и е-траекториями отображения *f*: каждому допустимому пути на символическом образе можно сопоставить некоторую *е*-траекторию на фазовом пространстве и наоборот [11]. Наша задача выделить те и только те допустимые пути, которые соответствуют настоящим траекториям отображения. Для этого мы рассматриваем последовательность символических образов и вводим понятие отображения символического образа на символический образ.

Пусть $\{C_k\}$ - последовательность замкнутых покрытий *M* таких, что $C_{k+1} \succ C_k$ для $k \in \mathrm{N}$, $\{G_k\}$ - соответствующая этим покрытиям последовательность символических образов. Обозначим через P_k пространство допустимых путей на символическом образе G_k. Для каждого $l > 0$ и $k > l$ строится отображение *S* из P_k на P_l. А именно, если $\{i_m\} \in P_l, \{j_m\} \in P_k$ -допустимые последовательности вершин на графах G_l и G_k соответственно, и для любого целого *m* ячейка $M(i_m)$ покрытия C_l содержит ячейку $M(i_m)$ покрытия C_k, то по определению $S(\{j_m\}) = \{i_m\}$. Так как с ростом *k* граф G_k, а вместе с ним и пространство P_k, более точно отражают динамику системы, то для $k > l > 0$ будем иметь: $S(P_k) \subset P_l$.

Следуя монографии [8], для пространства допустимых путей P_k, мы определяем энтропию $h(P_k)$ как характеристику скорости роста различных путей конечной длины, встречающихся в последовательностях этого про странства.

Рассмотрим множество $\Psi(f, C_l)$ всех кодированных траекторий для покрытия C_l:

$$\Psi(f, C_l) := \{\{z(i)\} \in P_l : \exists x \in M, f^i(x) \in M(z(i)) \;\; \forall i \in \mathrm{Z}.$$

Второй основной результат этой главы содержится в следующей теореме.

Теорема *4 Пусть* $\{C_k\}$ *есть последовательность замкнутых покрытий пространства M таких, что каждое следующее покрытие является измельчением предыдущего и* $diam(C_k) \to 0$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда,*

1. *для любого* $k > l > 0$ $\{S(P_k)\}$ *есть последовательность вложенных друг в друга множеств, то есть* $S(P_k) \supset S(P_{k+1})$ *;*
2. *для любого натурального l множество кодированных траекторий для покрытия* C_l *совпадает с пересечением множеств* $S(P_k)$ *для всех* $k > l$
8. *энтропия отображения f относительно покрытия , совпадает с пределом последовательности , то есть*

(3)

Величины $h(S(P_k)),\ k > l$ вычисляются при помощи построения специального оснащенного графа R_{lk} путем приписывания каждому ребру символического образа G_k определенной метки - вершины символического образа G_l. Строится матрица смежностей Π_{lk} графа R_{lk}, и вычисляется логарифм максимального собственного числа λ_{lk} этой матрицы.

Таким образом, из неравенств (3) и (2) следует, что

$$h(f) \le \lim_{l \to +\infty} h(f, C_l) = \lim_{l \to +\infty} \lim_{k \to +\infty} h(S(P_k)) = \lim_{l \to +\infty} \lim_{k \to +\infty} \log \lambda_{lk}$$

Третья глава посвящена разработке алгоритма вычисления структурной матрицы динамической системы. Пусть *C* есть покрытие *M* замкнутыми множествами, *G* - соответствующий этому покрытию символический образ. Вершина символического образа называется возвратной, если существует периодический путь, проходящий через нее. Две возвратные вершины *i и j* называются эквивалентными, если существует периодический допустимый путь, проходящий через вершины *i* и *j*.

Согласно данному выше определению, множество вершин разбивается на несколько классов $\{H_k\}$ эквивалентных возвратных вершин. Ясно, что каждый периодический путь ω находится в некотором классе, который однозначно определяется до ω.

Введем отношение квазипорядка между вершинами на символическом образе. Будем писать $i \prec j$ тогда и только тогда, когда существует допустимый путь вида

$$i = i_0, i_1, i_2, \ldots, i_m = j.$$

Следовательно, вершина г будет возвратной тогда и только тогда, когда $i \prec i$, и пара возвратных вершин *i,j* будет эквивалентной тогда и только тогда, когда $i \prec j \prec i$.

По символическому образу *G* построим новый граф *G**, отождествляя эквивалентные вершины на *G* в одну. А именно, каждому классу эквивалентности H_k сопоставим на графе *G** вершину *k,* а ребро $k \to l$ будет означать, что существует допустимый путь из класса H_k в класс H_l, не проходящий через другие классы. Построенный выше граф *G** будем называть структурным графом символического образа *G*.

Пусть $\{M(i)\}$ - элементы покрытия *C*. Обозначим через $R_k = \{\cup M(i), i \in H_k\}$ - носитель класса H_k. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 *Пусть* $Q_1, Q_2, .., Q_t$ *- компоненты цепно-рекуррентного множества, G* - структурный граф для покрытия C. Тогда для каждой компоненты* Q_k *существует и единственный класс эквивалентных возвратных вершин* H_k*, носитель которого содержит компоненту* Q_k*, то есть* $R_k \supset Q_k$

Из утверждения 1 следует, что на символическом образе среди всех классов эквивалентности должны быть те, носители которых содержат компоненты цепно-рекуррентного множества (такие классы будем называть *истинными).* Причем каждый носитель может содержать несколько таких компонент. Но среди классов эквивалентности могут быть и такие, у которых носители не содержат ни одной компоненты (такие классы будем называть *ложными,* а соответствующие им вершины на структурном графе *G** ложными вершинами). Кроме того, на структурном графе символического образа могут существовать и *ложные ребра,* то есть такие ребра $i \to j$ для которых на фазовом пространстве не существует точки *x* с ω-предельным множеством в $Q_j \subset R_j$ и с α-предельным множеством в $Q_i \subset R_i$, где R_i, R_j носители компонент .

В диссертации доказано следующее утверждение H_i, H_j .

Утверждение 2 *Пусть G* - структурный граф символического образа G. Существует конечный алгоритм для построения нового (истинного) графа G**, вершины которого соответствуют только тем классам эквивалентности на символическом образе, носители которых обязательно содержат компоненту цепно-рекуррентного множества, а все ребра между вершинами являются истинными (то есть соответствуют связям между компонентами цепно-рекуррентного множества).*

Пусть $\{C_k, k \in \mathrm{N}\}$ - последовательность покрытий компакта *M* ячейками, которые являются последовательными подразбиениями исходного покрытия C_1 и диаметры множеств C_k, стремятся к нулю при стремлении *k* к бесконечности. Для каждого *k* построим истинный структурный граф G_k^{**}. В диссертации показано, что с ростом номера *k* число вершин и ребер графов G_k^{**} может разве лишь увеличиваться. Доказана главная теорема третьей главы.

Теорема 5 *Рассмотрим последовательность истинных структурных графов* $G_1^{**}, G_2^{**}, ..,$ *построенных соответственно для покрытий* $C_1, C_2, ...$ *Если динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества, то существует номер* $s > 0$ *такой, что* $G_p^{**} = \Gamma$ *для всех* $p \geq s$, *где* Γ *- структурный граф динамической системы.*

Итак, теорема 5 говорит о том, что в случае ограниченного числа компонент цепно-рекуррентного множества существует конечный алгоритм для построения структурной матрицы динамической системы.

Основные результаты и выводы.

1. Доказаны теоремы о свойствах энтропии последовательности символических образов, теорема 1a.
2. Получен и обоснован компьютерно-ориентированный алгоритм для нахождения верхней оценки топологической энтропии динамической системы, теорема 1b.
3. Доказана теорема о кодировке траекторий динамической системы на символическом образе, теорема 4.2.
4. Описаны свойства последовательности отображений структурных графов символических образов, с помощью которых строится истинный структурный граф, утверждение 2.
5. Доказана теорема о сходимости последовательности истинных структурных графов, теорема 5.
6. Получен и обоснован компьютерно-ориентированный алгоритм для вычисления структурной матрицы динамической системы.

Литература

[1] Алексеев В.М. Символическая динамика, 11-ая математическая школа. - Киев. 1976. с.128.

[2] Боуэн Р. Методы символической динамики. Новое в зарубежной науке. Математика. Москва. 1979.

[3] Моисеев А.А. Символический образ динамической системы и алгоритмы его исследования// Тезисы докладов первой международной конференции "Дифференциальные уравнения и применения". 1996. с. 152.

[4] Осипенко Г.С. О символическом образе динамической системы/ Сборник "Граничные задачи". - Перьм. 1983. с. 101-105.

[5] Block L., Keesling J. Computing the topological entropy of maps of the interval with three monotone pieces// Journal of Statistical Physics. 1992. V. 66. p. 755-774.

[6] Bowen Ryfus, Periodic points and measure for axiom A ctiffeomorphisms, Transactions of the American Mathematical Sociaty, 1971, 377-397.

[7} Collet P., Crutchfield J., Eckmann J. Computing the topological entropy of maps// Communications in mathematical physics. 1983. V. 88. p. 257-262.

[8] Douglas L., Marcus B. An introduction to symbolic dynamics and coding.- New York. 1995.

[9] Froyland Gary, Junge Oliver, Ochs Gunter. Rigorous computetion of topological entropy with respect to finite partition// Physica D. 2000. V. 154. N. 1-2. p. 68-84.

[10] Gene H., Charles P., Loan V. Matrix computations.- Moscow. 1999.

[11] Osipenko G.S. The periodic points and symbolic dynamics// in Seminar on Dynamical Systems. Birkhauser Verlag. Basel. 1994. p.261-267.

[12] Osipenko G.S. Construction of Attractors and filtrations// Conley Index Theory, Banach Center Publications. 1999. V.47. p.173-197.

[13] Osipenko G.S., Salih Aytar, Kobyakov S. The structure matrix of dynamical system// Proceedings of the third international conference " Tools for mathematical modelling". 2001. p.85-105.

[14] Pilugin S.Yu. The space of dynamical systems with C° topology. Lecture notes in math. Springer-Verlag. - N.Y. 1994.

[15] Sharkovsky A.N., Structure theory of differentiable dynamical systems and weak nonwandering points, Abh. Akad. wiss. DDR. Abt. math naturwiss. Techn. 1977. V. 4. 193-200.

[16] Shub M. Dynamical systems, filtrations and entropy// Bull. Amer. Math Soc. V.80. N. 1. p.27-41.

[17] Shub M. Stabilite globale de systems denamiques. A sterique. 1978. V. 56. p. 1-21.

Публикации автора по теме диссертации

1. Mizin D.A., Osipenko G.S., Pehlivan S. Relation between the topological entropy of the dynamic system and the entropy of the symbolic image// Proceedings of the third international conference "Differential equations and applications". 2000. p. 142-148.
2. Mizin D.A., Osipenko G.S., Kobyakov S.Yu. The estimates for the topological entropy of the dynamic system// Proceedings of the third international conference "Tools for the mathematical modelling". 2001. p. 85-105.
3. Мизин Д.А. Оценка энтропии динамической системы// Автоматика и телемеханика. 2002. N. И. с. 183-189.
4. Мизин Д.А. О глобальной структуре динамической системы// "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 2002. N. 3. с. 84-107.

Лицензия ЛР №020593 от 07.08.97.

Подписано в печать 04.04.2003. Объем в п.л. .
Тираж 100. Заказ 166

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного автором,
в типографии Издательства СПбГПУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Отпечатано на ризографе RN-2000 EP
Поставщик оборудования— фирма "Р--ПРИНТ"
Телефон: (812) 110-65-09 Факс: (812) 315-23-04