Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций

Б.И. Положинцев

Теория вероятностей

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2020

СОДЕРЖАНИЕ

1. Случайные события

Система допущений:

а) определенный комплекс условий может быть воспроизведен любое число раз. Каждое такое воспроизведение называют опытом. Обозначение E – опыт, эксперимент. Опыт E может быть произведен любое (неограниченное) число раз;

б) результатом опыта E является некоторое *элементарное событие* ω (исход, случай);

в) одно и только одно элементарное событие является результатом опыта E.

Замечание: понятие элементарного события – первичное (формально не определяется, как понятие *точки* в геометрии).

Множество всех элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, связанных с опытом E, называют пространством элементарных событий опыта E.

Пример 1. Опыт E – однократное подбрасывание однородной правильной игральной кости; на верхней ее грани может выпасть одно из чисел от 1 до 6 (число точек интерпретируем как числа): элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$; множество всех элементарных событий данного опыта $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$.

Пример 2. Опыт E – случайный (наудачу) выбор точки квадрата, при этом равновозможен выбор любой точки квадрата (элементарное событие ω). Здесь $\Omega = \{\omega\}$ – множество всех точек квадрата.

Случайные события и действия с ними (алгебра событий)

def Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – множество всех элементарных событий, связанных с опытом E. *Случайное событие – любое подмножество A множества* Ω (в дальнейшем будем говорить просто *событие*), связанное с опытом E.

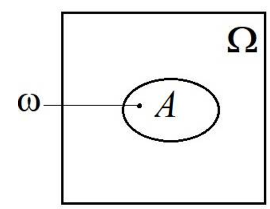
Случайные события обычно обозначают прописными буквами *A*, *B*, *C* и т.д.

Примеры:

а) событие A - выпадение четного числа на верхней грани игральной кости. Событие A произойдет, если выпадет четное число, то есть, если исходом опыта Е окажется либо ω_2, либо ω_4, либо ω_6: $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

б) событие A_1 - выпадение числа 1 на верхней грани: $A_1=\{\omega_1\}$.

в) событие A – попадание цветной точки в область A при бросании ее на белый квадрат:



def | Каждое элементарное событие, содержащееся в A, называют благоприятствующим событию A:

$$\omega\in A \Leftrightarrow (\omega \text{ } \textit{благоприятствует } A),$$

Итак, пусть A – случайное событие, связанное с опытом Е.

def | При проведении опыта Е событие A *происходит*, если результатом опыта оказывается элементарное событие ω, благоприятствующее событию A (содержащееся в A) и не происходит в противном случае.

def | Событие называют достоверным, если оно *происходит* при каждом проведении опыта Е (при любом исходе опыта). Обозначают достоверное событие Ω, ему благоприятствует любое элементарное событие ω из пространства элементарных событий $\Omega=\{\omega\}$.

def | Событие $\varnothing$ называют невозможным, если оно *не происходит* ни при одном проведении опыта Е (при любом исходе опыта). $\varnothing$ – пустое подмножество исходов опыта Е.

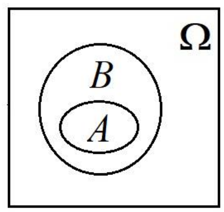
def | Пусть A и B – события, связанные с опытом Е. События A и B называются равными, равносильными или эквивалентными, если они состоят из одних и тех же элементарных событий ω:

$$\forall\ \omega\ (\omega\in A \Leftrightarrow \omega\in B) \Leftrightarrow (A = B).$$

Иначе говоря, A и B равны, если при проведении опыта Е: а) событие *B происходит* всякий раз, когда *происходит* событие A и б) событие B *не происходит* всякий раз, когда *не происходит* событие A. Равносильные (равные) события A и B происходят (или не происходят) одновременно.

def| Если событие B происходит всякий раз, как происходит событие A, то говорят, что A влечет B; каждый случай ω, благоприятствующий A, благоприятствует B:

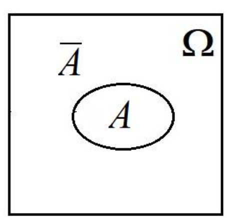
$$\forall\, \omega\ (\omega \in A \ \Rightarrow\ \omega \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B.$$



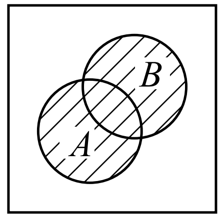
Ясно, что: а) $\forall A\ A \subseteq \Omega$; б) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)$.

def| Событие $\overline{A}$, которое происходит всякий раз, как не происходит событие A при любом проведении опыта Е, называется противоположным (дополнительным) событию A. Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$. Если A=B, то $\overline{A} = \overline{B}$.

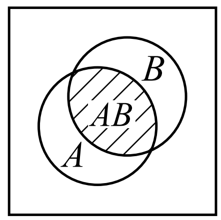
Пусть A и $\overline{A}$ связаны с опытом Е, $\Omega=\{\omega\}$ – пространство элементарных событий, тогда для любого элементарного события ω либо $\omega \in A$, либо $\omega \in \overline{A}$.



def| Сумма (объединение) событий A и B – это событие A+B ($A \bigcup B$), которое состоит из тех и только тех элементарных событий ω, которые благоприятствуют *хотя бы одному* из этих событий. Событие *A+B происходит*, если *происходит хотя бы одно* из них (A или B) и *не происходит*, если *не происходят оба* эти события.



def Произведение (пересечение) событий A и B – это событие AB ($A \bigcap B$), которое состоит из тех и только тех элементарных событий ω, которые благоприятствуют *обоим* этим событиям (и A и B). Событие AB *происходит*, если *происходят оба* эти события и *не происходит*, если *не происходит хотя бы одно* из них (или A или B).



Свойства операций сложения, умножения, дополнения:

$A+A = A$; $A+\Omega = \Omega$; $A+\varnothing = A$; $AA = A$; $A\varnothing = \varnothing$;

$A+B = B+A$– коммутативность сложения;

$(A+B) + C= A + (B+C) = A+B+C$ – ассоциативность сложения;

$AB = BA$– коммутативность умножения;

$(AB)C=A(BC) =ABC$ – ассоциативность умножения;

$(A+B)C=AC+BC$ – дистрибутивность, 1-й закон;

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$ – дистрибутивность, 2-й закон;

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B} \\ \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \end{array}\right\}$$ правила (формулы) *Де Моргана.*

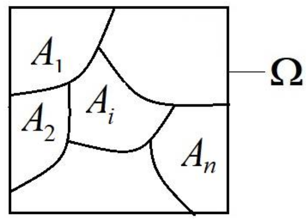
Введенные операции сложения и умножения событий (объединения и пересечения) естественно обобщаются на случай $n \geq 2$ событий (включая $n = \infty$): $\sum_{i=1}^{n} A_i$ ($\bigcup_{i=1}^{n} A_i$) и $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ($\bigcap_{i=1}^{n} A_i$) – сумма и произведение n событий $A_1,\ldots,A_n$.

Формулы *Де Моргана*: $\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$; $\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

def | События A и B называют несовместными, если их произведение есть невозможное событие: $AB = \varnothing$.

def | События $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, если $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$;

если эти события *попарно несовместны* $A_i A_j = \varnothing \ \forall (i, j\colon i \neq j)$, то они образуют *полную группу попарно несовместных событий*.



Например:

а) $A + \overline{A} = \Omega$;

б) Пусть n – общее (конечное) число всех элементарных событий $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ опыта Е, тогда события $\{\omega_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) образуют полную группу попарно несовместных событий, поскольку, по смыслу элементарного события имеем $\sum_{i=1}^{n} \{\omega_i\} = \Omega$ и $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \varnothing$ ($i \neq j$).

2. Определение вероятности

Классическое определение вероятности

$\underline{def}|$ Опыт Е проводится по классической схеме, если пространство его элементарных событий $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ конечно и события $\{\omega_i\}$ $(i = 1,\ldots,n)$ *равновозможны* (опыт Е обладает симметрией по отношению к исходам – ни один из исходов опыта Е не является предпочтительным по отношению ко всем другим). Понятие равновозможности или равновероятности считается первичным (не определяется формально).

$\underline{def}|$ (*классическое определение вероятности*)

Пусть опыт Е проводится по классической схеме, пространство его элементарных событий $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ – конечное множество, n – число всех элементарных событий (случаев или исходов опыта), $n(A)$ – число случаев, благоприятствующих событию A, тогда *вероятностью* $\mathrm{P}(A)$ *события A называется отношение*:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Замечания.

а) классическое определение вероятности основано на понятии *равновероятности*, формально не определяемом;

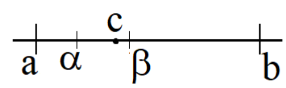
б) вероятности событий $\{\omega_i\}$, в силу классического определения вероятности, равны $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1/n$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Очевидными следствиями классического определения вероятности являются следующие свойства вероятности:

1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
2) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$;
3) $\forall A \quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$;
4) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$;
5) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$;
6) для любых A и B: $\mathrm{P}(AB) \le \mathrm{P}(A)$.

Геометрическое определение вероятности

Рассмотрим на оси абсцисс отрезок [a;b] и внутри него фиксируем отрезок [α;β]. Пусть опыт состоит в случайном бросании точки $(\cdot)$c на отрезок [a;b] (элементарное событие ω – наудачу брошенная точка попадает на некоторую точку [a;b]). Достоверным событием считается попадание $(\cdot)$c на отрезок [a;b], причем попадание $(\cdot)$c на любую точку отрезка [a;b] предполагается равновозможным.



def| Вероятность события $A=\{c\in[\alpha;\beta]\subseteq[a;b]\}$– попадание точки $(\cdot)$c на отрезок [α;β], вложенный в [a;b], *по определению* равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\textit{длина}\,[\alpha;\beta]}{\textit{длина}\,[a;b]}.$$

Аналогично определяется *геометрическая* вероятность в двумерном и трехмерном случаях.

Аксиоматическое определение вероятности

Рассмотрим опыт E, Ω – пространство его элементарных событий.

def| Множество событий F, связанных с опытом, называется σ -алгеброй, если F обладает следующими свойствами:

1. $\Omega \in F$, $\varnothing \in F$ (F содержит достоверное и невозможное события);
2. если $A \in F$ то $\overline{A} \in F$ (наряду с любым событием A, множество F содержит и противоположное событие $\overline{A}$);
3. если $A_1,\ldots, A_n,\ldots \in F$ счетное (в частности – конечное) множество событий, принадлежащих F, то $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ и $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (вместе с любым счетным набором событий их суммы и произведения принадлежат F).

$\underline{def|}$ Вероятностью P(A) события A называется числовая функция, определенная на σ-алгебре событий F и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $P(A) \geq 0$ – *аксиома неотрицательности*;
2. $P(\Omega) = 1$ – *аксиома нормированности*;
3. для любого счетного множества попарно несовместных событий $A_1,\ldots,A_n$ ($A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$) $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ – *аксиома сложения* (вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей).

Замечание: тройка (Ω, F, P) называется вероятностным пространством.

Из перечисленных аксиом могут быть выведены все формулы исчисления вероятностей.

Рассмотрим несколько примеров:

(а) $P(\varnothing)=0$

$\Omega = \Omega + \varnothing \Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega+\varnothing)=P(\Omega)+P(\varnothing) \Rightarrow 1=1+P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=0.$

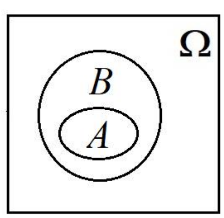
(б) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A+\overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A)+P(\overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

(в) $0 \leq P(A) \leq 1$

$0 \leq P(A)$ – аксиома неотрицательности,
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$ (т.к. $P(\overline{A}) \geq 0$).

(г) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



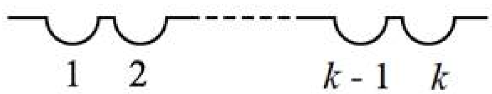
$B = A + \overline{A}B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(\overline{A}B) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ (т.к. $P(\overline{A}B) \geq 0$).

3. Элементы комбинаторики

(1) Упорядоченные комбинации по одному элементу из каждой группы.

Имеется k групп элементов: $\left\{\begin{array}{l} a_1,\ldots,a_{n_1} \\ b_1,\ldots,b_{n_2} \\ c_1,\ldots,c_{n_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1,\ldots,x_{n_k} \end{array}\right.$

Найдем *число упорядоченных комбинаций* $(a_{i_1};b_{i_2};\ldots;x_{i_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы: на первое место ставится элемент из первой группы, на второе – из второй и т.д.



При $k=2$ выбор первого элемента пары $(a_{i_1};b_{i_2})$ можно осуществить числом способов n_1, равным числу элементов первой группы, второго – числу n_2 элементов второй группы. Число способов, которыми можно образовать все упорядоченные пары $(a_{i_1};b_{i_2})$, очевидно, равно $n_1 \cdot n_2$. Действительно, составим прямоугольную таблицу, содержащую n_1 строк и n_2 столбцов. На пересечении i_1 -й строки и i_2 -го столбца будет стоять упорядоченная пара $(a_{i_1};b_{i_2})$. Каждая такая пара встречается один и только один раз, поэтому число пар будет равно $n_1 \cdot n_2$.

При $k = 3$ имеем упорядоченные тройки $(a_{i_1};b_{i_2};c_{i_3})$. Составим все пары $(a_{i_1};b_{i_2})$, примем их за элементы новой группы (их число равно $n_1 \cdot n_2$, и n_3 элементов третьей группы. Таким образом, число троек $(a_{i_1};b_{i_2};c_{i_3})$ равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

По индукции получим, что *число всех упорядоченных комбинаций* $(a_{i_1}; b_{i_2}; \ldots, x_{i_k})$ *по одному элементу из каждой группы* равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$. Полученный результат иногда называют *комбинаторным правилом умножения*.

(2) Размещения и перестановки.

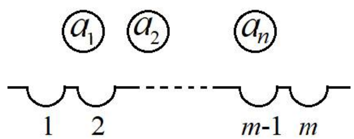
Пусть имеется n - элементное множество $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

def| *Упорядоченные m-элементные подмножества данного n-элементного множества называются размещениями из n элементов по m элементов* $(1 \le m \le n)$.

Заметим, что размещения отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком.

Найдем *число всех размещений из n элементов по m элементов*.

Для наглядности рассмотрим n различных шариков и m занумерованных лунок.



Будем размещать шарики в лунках последовательно, по одному, начиная с первой лунки, *без возвращения*: произвольно выбранный шарик изымается из исходного набора – остается в лунке – и не может быть выбран еще раз. Выбор шарика для помещения его в первую лунку можно осуществить n способами (выбирается один из всех имеющихся вначале n-шариков), во вторую – $(n-1)$ способами (выбор одного из $(n-1)$ оставшихся) и так далее; в последнюю m-ю лунку выбор возможен из $n-(m-1)$ оставшихся шариков.

Здесь воспроизводится ситуация, рассмотренная в п. (1), когда составлялись упорядоченные комбинации по одному из каждой группы: первая группа имеет n элементов, вторая $n-1$ элементов, последняя $n-(m-1)$ элементов. Искомое число комбинаций, таким образом, равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$.

Число размещений *из n элементов по m элементов* ($1 \le m \le n$) принято обозначать символом A_n^m.

Таким образом,

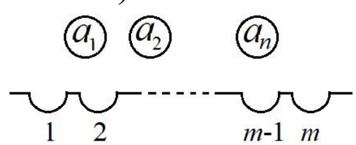
$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1 \le m \le n).$$

$\underline{def|}$ В случае $m = n$ (размещения из n элементов по n элементов). размещения называются *перестановками*. Перестановки состоят из одних и тех же n элементов и различаются только их порядком. Число *перестановок из n элементов* равно

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(3) Выбор с возвращением (размещения с повторениями).

Пусть, как в п. (2), имеем n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых составим m- элементные упорядоченные комбинации, однако выбор будем осуществлять *с возвращением* (*размещения с повторениями из n элементов по m элементов*).



В этом случае при построении каждой из m- элементных упорядоченных комбинаций вида $(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots, a_{i_m})$ выбор соответствующего элемента осуществляется из множества элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n – способами).

$$\begin{cases} a_1, \ldots, a_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1, \ldots, a_n. \end{cases}$$

Число образованных *размещений с повторениями из n элементов по m элементов* равно, очевидно, n^m. Опыт при *выборе с возвращением* можно интерпретировать как формирование сообщений длиной m символов, при условии, что в распоряжении имеется n - символьный алфавит и символы в сообщении могут повторяться. Число способов, которыми можно сформировать такое сообщение равно n^m. Ясно, что общее число таких сообщений равно n^m.

(4) Сочетания

def | m-элементные подмножества данного n-элементного множества $(1 \le m \le n)$ называются *сочетаниями*.

Сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, понятно, что порядок элементов в них не важен. Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m.

Выведем формулу для вычисления C_n^m.

Составим всевозможные сочетания из n по m (их число обозначено C_n^m). В каждом из сочетаний (содержащих по m элементов) выполним всевозможные перестановки (их число равно $P_m = m!$), получим *упорядоченные* m-элементные подмножества данного n-элементного множества, т.е. размещения из n по m, число которых равно A_n^m. Имеем $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, откуда: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m. Учтем, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^m = C_n^{n-m}$, тогда справедливо:

$$\forall\ m, n\ (0 \le m \le n) \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В известной формуле разложения бинома $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$ *биномиальные коэффициенты* C_n^m – это число сочетаний из n по m.

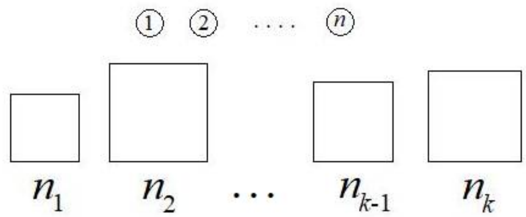
Полагая $a = b = 1$, получим: $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$: *сумма биномиальных коэффициентов равна* 2^n.

Приведем также полезное соотношение: $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$.

Задача (*о распределении n шариков по k ящикам*).

Имеется n шариков и k ящиков, вмещающих:

первый *ровно* n_1, второй $- n_2,\ldots$, k-й $-$ n_k шариков, соответственно, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Найти число способов, которыми можно распределить все шарики по ящикам.



Решение.

При $k = 2$, имеем $n_1+n_2= n$. Число способов выбора n_1 шариков из n для размещения их в первом ящике равно $C_n^{n_1} = \dfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$, при этом $n-n_1= n_2$ оставшихся шариков окажутся во втором ящике.

Таким образом, искомое число способов $m = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!}$ при $k =2$.

При $k = 3$ имеем, очевидно:

$$m = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

Обобщая (по индукции), получаем :

$$m = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Заметим, что результат может быть сформулирован в виде утверждения (теоремы) следующим образом.

Пусть $n_1, n_2, \ldots,$ n_k – целые неотрицательные числа, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$ $(n_k \geq 0)$, тогда число способов, посредством которых n элементов могут быть разделены на k групп, из которых первая содержит n_1 элементов, вторая n_2 элементов и т.д., равно

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \text{ (\textit{полиномиальные коэффициенты}).}$$

4. Условная вероятность, правило вычисления вероятностей произведений событий

Пусть A и B – два события, связанные с опытом E.

def| Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло (или просто – при условии A), называют *условной вероятностью* и обозначают $P(B/A)$.

Вероятность события B, вычисленную без каких-либо дополнительных сведений о событии A, называют безусловной вероятностью $P(B)$.

Пример. В урне имеется всего 2 белых и 3 черных шара. Опыт E: последовательно (без возвращения) вынимают 2 шара. Найдем вероятность вынуть черный шар, при условии, что первым был вынут белый шар (произошло событие A).

После того, как был вынут белый шар, в урне осталось 4 шара, из которых 3 – черных и 1– белый; общее число исходов при извлечении второго шара равно 4, а число исходов, благоприятствующих событию B равно 3. Поэтому $P(B/A)$ =3/4.

T| *Правило (теорема) умножения вероятностей*

Пусть A и B – события, связанные с опытом E, проводимым по классической схеме, тогда:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B) \qquad (*)$$

Док| Пусть n – число всех элементарных событий (случаев), связанных с опытом Е. Число случаев, благоприятствующих событию AB, равно $n(AB)$, вероятность $P(AB) = n(AB)/n$. Число случаев, благоприятствующих событию A, равно $n(A)$, вероятность $P(A) = n(A)/n$.

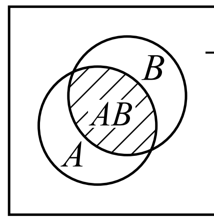
Пусть событие A произошло, тогда общее число случаев становится равным $n(A)$, из них число случаев, благоприятствующих событию B, равно $n(AB)$, вероятность $P(B/A) = n(AB)/n(A)$.

Отсюда непосредственно следует справедливость равенства $P(AB) = P(A)\,P(B/A)$, действительно:

$$P(AB) = n(AB)/n = (n(A)/n)\cdot(n(AB)/n(A)) = P(A)\,P(B/A).$$

В силу симметрии входящих в формулу символов A и B, справедлива также запись: $P(AB) = P(B)\,P(A/B)$, т.е. имеем (∗).

Правило (теорема) умножения вероятностей наглядно иллюстрируется геометрическими вероятностями.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_{AB} и выразим через них вероятности событий:
$P(AB) = S_{AB}/S$, $P(A) = S_A/S$, $P(B/A) = S_{AB}/S_A$. Подставим эти вероятности в (∗), получим $P(AB) = P(A)\,P(B/A)$.

По индукции доказывается *теорема умножения для n событий* ($n \geq 2$): пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_i) > 0$, тогда

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1\ldots A_{n-1})$$

Пример

Студент знает 10 вопросов из 20. На экзамене задали 3 вопроса. Какова вероятность того, что все 3 заданных вопроса – из числа тех 10, ответы на которые студент знал до экзамена (событие A)?

Ответ: $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2) = 10/20 \times 9/19 \times 8/18$

Другое решение: искомая вероятность равна $P(A) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$ (см. задачу ниже).

Задача (*о выборе*). Всего имеется α шаров, из которых β – черные, а остальные $\alpha - \beta$ – белые. Наугад выбирают s шаров (выборка объема s). Найти вероятность того что в этой выборке r черных шаров, а остальные $s - r$ шаров белые (событие A).

Решение: $n = C_\alpha^s$; $n(A) =$ [(число способов выбора r шаров из β черных шаров) × × (число способов выбора $s - r$ шаров из $\alpha - \beta$ белых шаров)] $= C_\beta^r \times C_{\alpha-\beta}^{s-r}$.

Таким образом, $P(A) = \dfrac{C_\beta^r C_{\alpha-\beta}^{s-r}}{C_\alpha^s}$.

5. Независимые события, независимость в совокупности

Пусть A и B – два события, связанные с опытом E.

$\underline{def|}$ Событие B не зависит от события A, если $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$: осуществление события A не влияет на вероятность события B.

Утверждение:

$$B \text{ не зависит от } A \Leftrightarrow A \text{ не зависит от } B$$

$\underline{Док|}$ Пусть B не зависит от A, $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$, найдем $\mathrm{P}(A/B)$.

По правилу умножения вероятностей:

$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B) \Rightarrow \left[\text{по условию } \mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B) \Rightarrow \mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A) \Rightarrow$ *A не зависит от B*.

Достаточность (A не зависит от $B \Rightarrow B$ не зависит от A) доказывается аналогично. Таким образом, понятие независимости двух событий *симметрично*.

Критерий (необходимое и достаточное условие) *независимости двух событий*:

$$A \text{ и } B \text{ независимые события} \Leftrightarrow \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \qquad (*)$$

Соотношение $(*)$ часто принимают в качестве *определения* независимости двух событий.

Отсюда следует определение зависимых событий:

$\underline{def|}$ A и B зависимые события $\Leftrightarrow \mathrm{P}(AB) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

Несложно доказать утверждение: если A и B независимые события, то и противоположные им события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – независимые.

Независимость n событий в совокупности

$\underline{def|}$ События $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ $(n \geq 2)$ называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества этих событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ выполняется условие $\mathrm{P}\left(\prod_{l=1}^{k} A_{i_l}\right) = \prod_{l=1}^{k} \mathrm{P}(A_{i_l})$.

Замечания

а) Иначе это определение можно сформулировать так:

События $A_1,\ldots,A_n$ $(n \geq 2)$ называются независимыми в совокупности, если каждое из этих событий не зависит от любого произведения остальных событий.

б) При $n > 2$ равенство $P(A_1,\ldots,A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$, очевидно, является необходимым, но не достаточным условием независимости в совокупности событий $A_1,\ldots,A_n$. При $n = 2$ оно является необходимым и достаточным условием.

в) Если события $A_1,\ldots,A_n$ $(n \geq 2)$ независимы в совокупности, то они попарно независимы.

г) Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности (см. пример ниже).

Пример

В урне лежат 4 одинаковые карточки с написанными на них числами 1, 6, 10, 15:

1	6	10	15

Случайно вынимается одна карточка. Пусть на этой карточке оказалось число x. Рассмотрим три события:

$A = \{\, x$ делится на $2\}$; $B = \{\, x$ делится на $3\}$; $C = \{\, x$ делится на $5\}$

Являются ли события A, B, C (а) попарно независимыми;

(б) независимыми в совокупности?

Решение

(а) $P(A) = 2/4 = 1/2$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 1/2$;

$P(AB) = 1/4$; $P(AC) = 1/4$; $P(BC) = 1/4$;

$P(AB) = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow A, B$ – независимы.

Аналогично A, C и B, C – независимы.

(б) $P(ABC) = 0 \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) \Rightarrow A, B, C$ – зависимые события, при этом они являются попарно независимыми.

6. Правило вычисления вероятностей сумм событий

$\underline{T|}$ *Правило (теорема) сложения вероятностей для несовместных событий*

Пусть несовместные события A и B связаны с опытом E, проводимым по классической схеме, тогда:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

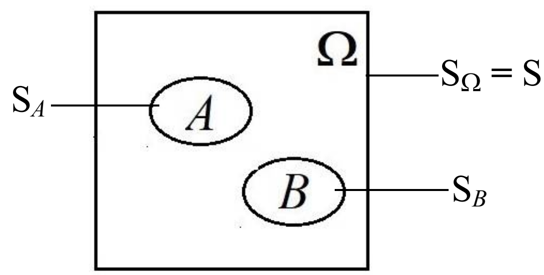
$\underline{Док|}$ Пусть n – число всех элементарных событий опыта E,

$n(A)$ и $n(B)$ – число случаев, благоприятствующих событиям A и B, соответственно.

Поскольку A и B – несовместны, $n(A+B)=n(A)+n(B)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Проиллюстрируем эту теорему с помощью геометрических вероятностей.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_B , S_{A+B}, тогда $S_{A+B}=S_A+S_B$ (т.к. A и B – несовместны). Отсюда вероятности событий: $P(A+B)=S_{A+B}/S$, $P(A)=S_A/S$, $P(B)=S_B/S\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ P(A+B)=P(A)+P(B)$$

$\underline{T|}$ *Правило (теорема) сложения вероятностей для двух произвольных событий*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

$\underline{Док|}$ $A+B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$ – попарно несовместные события, поэтому

$$P(A+B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B) \qquad (+)$$

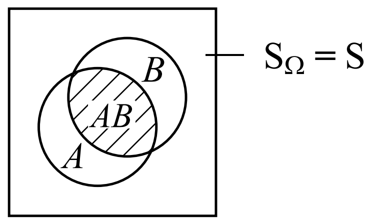
$A = AB + A\bar{B}$ (несовместные события) $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\bar{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A\bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$ (*)

$B = AB + \bar{A}B \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$ (**)

Подставляя (*) и (**) в (+), получаем $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.

Правило (теорема) сложения вероятностей наглядно иллюстрируется геометрическими вероятностями.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_B, S_{A+B}, S_{AB} и запишем $S_{A+B} = S_A + S_B - S_{AB}$.
Откуда $\mathrm{P}(A+B) = S_{A+B}/S = (S_A + S_B - S_{AB})/S = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.

T| *Обобщение правила (теоремы) сложения вероятностей для $n \geq 2$ произвольных событий* (доказывается по индукции):

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j} \mathrm{P}(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k} \mathrm{P}(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

В частности,

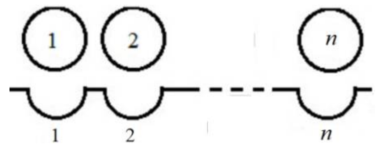
$$\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(AC) - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC).$$

Задача о совпадениях

Имеется n занумерованных шариков и n занумерованных лунок. Шарики перемешиваются и помещаются в лунки. Найти вероятность того, что хотя бы один шарик окажется “на своем месте” – в лунке с номером, совпадающим с номером шарика.

Решение

Обозначим искомое событие через A. Общее число исходов опыта – число перестановок шариков равно $n!$. Введем события A_i – i -й шарик находится “на своем месте”, а остальные размещены по лункам произвольно, тогда $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ – хотя бы один шарик “на своем месте”.



По *правилу* (*теореме*) *сложения*, вероятность события A – суммы n событий ($n \geq 2$), равна:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \qquad (*)$$

$P(A_i) = (n-1)!/n!$ – вероятность того, что i-й шарик зафиксирован на своем месте, а остальные произвольно размещены на оставшихся местах числом способов равным $(n-1)!$ – числу их перестановок,

$P(A_i A_j) = (n-2)!/n!$ – вероятность того, что i-й и j-й шарики находятся на своих местах,

...

$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = 1/n!$ – вероятность того, что *все* шарики находятся на своих местах.

В равенстве (∗) под знаком суммы стоят равные слагаемые:

сумма $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ равных слагаемых $P(A_i)$, сумма $P(A_i A_j)$, и т.д.

Число слагаемых для каждой суммы равно соответствующему числу сочетаний из n по k ($k = 1, 2, \ldots, n$), тогда:

$$P(A) = C_n^1 P(A_i) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} C_n^n P(A_1 A_2 \ldots A_n) = n \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-1}.$$

(здесь использовано разложение $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$).

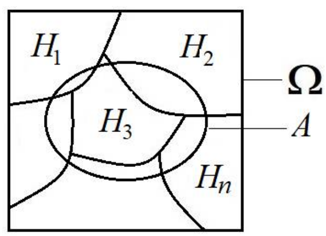
7. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Т| Формула полной вероятности

Пусть событие A и события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотезы), связаны с опытом E, причем $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$ $i \neq j$ (*гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу*); заданы вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_i)$ и условные вероятности $\mathrm{P}(A/H_i)$, тогда

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i) \text{ – } \textit{формула полной вероятности.}$$

Док| Из условия теоремы следует, что любое событие A, связанное с опытом E , может произойти *совместно с одним и только одним из событий* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (*гипотезы попарно несовместны*)



$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ – сумма попарно несовместных событий (т.к. H_i – попарно несовместны), получаем

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\sum_{i=1}^{n}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i) -$$

– формула полной вероятности

Замечания:

а) разбиение $\Omega = \sum_{i=1}^{n} H_i$ ($H_i H_j = \varnothing$ $i \neq j$) может быть счетным ($n = \infty$);

б) при применении формулы полной вероятности следует проверять выполнение условия $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) = 1$.

$\underline{T}|$ *Формулы Байеса* (*формулы вероятностей гипотез*)

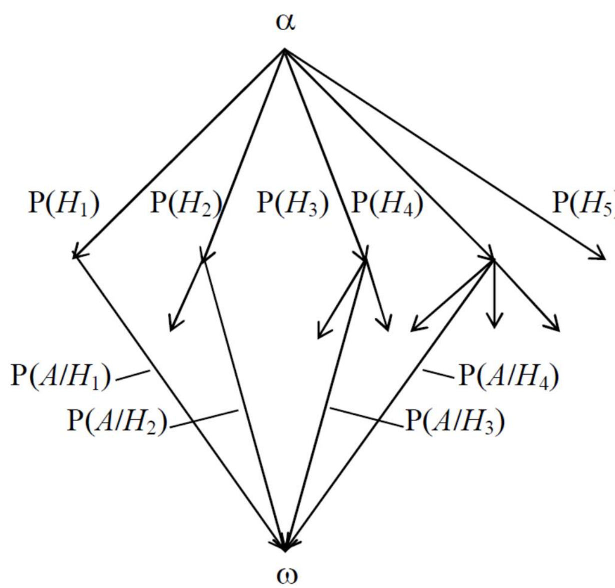
Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы и *в результате опыта событие A произошло*. По условию событие A могло произойти совместно с одним и только одним из событий H_i. Запишем:

$$\mathrm{P}(AH_i)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(H_i/A) \Rightarrow \mathrm{P}(H_i/A)=\frac{\mathrm{P}(AH_i)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}(H_i/A)=\frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i)} \quad (i=1,2,\ldots,n) \text{ – формулы Байеса.}$$

Формулы Байеса выражают *апостериорные* (*после опыта*) вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_i/A)$ через вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_i)$ и условные вероятности события A при соответствующих гипотезах $\mathrm{P}(A/H_i)$.

Рассмотрим пример.



На рисунке выше показаны различные возможные пути из начальной точки α в конечную точку ω. Гипотезы H_1, $H_2,\ldots,H_5$ соответствуют выбору пути из начальной точки. Событие A – достижение точки ω.

Вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$ заданы:
$P(H_1) = p_1 = 0{,}015$; $P(H_2) = p_2 = 0{,}22$; $P(H_3) = p_3 = 0{,}2$; $P(H_4) = p_4 = 0{,}3$;
$P(H_5) = p_5 = 0{,}265$ (заметим, что $\sum_{i=1}^{5} P(H_i) = 1$);
$P(A/H_1) = 1{,}0$; $P(A/H_2) = 0{,}1$; $P(A/H_3) = 0{,}2$; $P(A/H_4) = 0{,}15$; $P(A/H_5) = 0$.
Вычислим вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(H_i) P(A/H_i) = 0{,}015 + 0{,}022 + 0{,}04 + 0{,}045 = 0{,}122 \quad (*)$$

Пусть событие A произошло. С помощью формул Байеса установим, какой путь из начальной точки α наиболее вероятно был выбран для достижения конечной точки ω.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\, P(A/H_i)}{P(A)} \qquad (i = 1,2,\ldots,5).$$

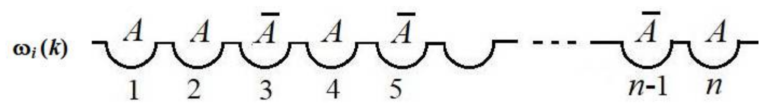
В этих формулах для разных значений i различаются только числители дробей при одном и том же знаменателе $P(A)$.
Из $(*)$ видим, что максимальной является апостериорная вероятность гипотезы $P(H_4 / A) = 0{,}045$.

8. Последовательность независимых испытаний по схеме Бернулли, биномиальные вероятности

Пусть опыт E состоит в проведении n *независимых испытаний по схеме Бернулли*: *в каждом испытании* событие A (успех) происходит с заданной вероятностью p, а противоположное ему событие $\overline{A}$ (неуспех) с вероятностью $q = 1-p$.

Определим событие $\mathrm{B}_k(n)$ как появление k успехов при проведении n испытаний, очевидно, $k = 0,1,\ldots, n$.

Обозначим вероятность этого события через $b_k(n,p) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_k(n))$ и поставим задачу: считая заданными n и p, найти $b_k(n,p)$ для всех $k = 0,1,\ldots,n$. Для определенности выберем некоторое (любое) значение k $(0 \le k \le n)$ и представим себе в качестве исходов опыта E последовательности (сообщения) длиной n символов каждое, сформированные с помощью двухбуквенного алфавита (A и $\overline{A}$) так, что каждая такая последовательность состоит точно из k символов A (k успехов) и $(n-k)$ символов $\overline{A}$ ($(n-k)$ неуспехов): При этом одна последовательность $\omega_i(k)$ отличается от другой $\omega_j(k)$ лишь тем, на каких местах из n-мест стоят k символов A и $(n-k)$ символов $\overline{A}$.



Итак, $\omega_i(k)$, i=1,2,…, r – элементарные события (исходы опыта), благоприятствующее событию $\mathrm{B}_k(n)$, тогда

$$\mathrm{B}_k(n) = \{\omega_1(k), \omega_2(k),\ldots, \omega_i(k), \omega_r(k)\}.$$

Заметим, что при данном k число r элементарных событий $\omega_i(k)$ равно числу способов, которыми можно из имеющихся n мест выделить точно k мест под букву A и $(n-k)$ мест под букву $\overline{A}$ (т. е. равно числу способов разбиения n элементов на две группы, из которых одна содержит k элементов, а вторая $(n-k)$ элементов). Таким образом, $r = C_n^k$ – число сочетаний из n по k.

По условию испытания независимы и вероятность появления успеха $\mathrm{P}(A) = p$ или неуспеха $\mathrm{P}(\overline{A}) = q$ в каждом испытании не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний, поэтому:

$\text{P}\{\omega_i(k)\} = \big[$правило умножения для независимых событий$\big] = p^k q^{n-k}$.

Имеем, $\text{B}_k(n) = \sum_{i=1}^{r}\{\omega_i(k)\}$, где $\{\omega_i(k)\} \cap \{\omega_j(k)\} = \varnothing$ ($i \neq j$);

$\text{P}(\text{B}_k) = \text{P}(\sum_{i=1}^{r}\{\omega_i(k)\}) = \sum_{i=1}^{r}\text{P}(\{\omega_i(k)\}) = \sum_{i=1}^{r} p^k q^{n-k} = \big[$число слагаемых в этой сумме равно $r = C_n^k$, а каждое слагаемое равно $p^k q^{n-k}\big] =$

$= C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0,1,\ldots,n)$.

Итак, $b_k(n,p) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ – *биномиальные вероятности* (*вероятности появления k успехов при проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли*).

<u>*Замечания*</u>

а) $\sum_{k=0}^{n} b_k(n,p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$ (разложение бинома, отсюда название – *биномиальные вероятности*);

б) общее число всех элементарных событий $\omega_i(k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, связанных с опытом E очевидно, равно 2^n (см. п.1.1. – число сообщений длиной n символов, сформированных *с возвращением* с помощью алфавита, состоящего из двух символов A и $\overline{A}$, равно 2^n).

Частные случаи

Вероятность того, что:

а) в серии из n испытаний событие A – успех не произойдет ни разу $b_0(n,p) = q^n$;

б) произойдет n раз $b_n(n,p) = p^n$;

в) произойдет один раз $b_1(n,p) = npq^{n-1}$;

г) произойдет хотя бы один раз $b_{\geq 1} = 1 - b_0(n,p) = 1 - q^n$;

д) произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз $= \sum_{k=k_1}^{k=k_2} b_k(n,p)$.

Задача

Определить необходимое число независимых испытаний n, при котором событие A – успех произойдет хотя бы один раз с вероятностью не меньшей, чем заданное значение P $(0 < P < 1)$, если вероятность появления события A в каждом испытании равна p $(0< p <1)$.

Решение

При проведении n испытаний событие A произойдет хотя бы один раз с вероятностью $1- b_0(n,p) = 1- q^n = 1- (1-p)^n$.

По условию, $1-(1-p)^n \geq P \Rightarrow (1-p)^n \leq 1-P \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \ln(1-p) \leq \ln(1-P) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

Задача

Найти *наивероятнейшее* значение числа появлений события A – успеха в серии из n испытаний по схеме Бернулли, если вероятность появления события A в отдельном испытании равна p.

Решение

Обозначим через m искомое наивероятнейшее число; ясно, что m определяется системой неравенств: $\begin{cases} b_m(n,p) \geq b_{m-1}(n,p) \\ b_m(n,p) \geq b_{m+1}(n,p). \end{cases}$

Решая систему относительно m, получим: $np - q \leq m \leq np + p$.

9. Теорема Пуассона и ее следствие – приближенное вычисление биномиальных вероятностей

Пусть вероятность успеха p_n *зависит* от числа испытаний n: при любом конкретном n и $0 \le k \le n$, имеем: $b_k(n,p_n) = C_n^k\, p_n^{\,k}\,(1-p_n)^{n-k}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ – биномиальные вероятности.

T| Теорема Пуассона

Пусть $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, при этом $np_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$ $(a > 0)$,

тогда при любом фиксированном $k \ge 0$: $b_k(n,p_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$.

Док| $np_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \;\Rightarrow np_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (α_n – бесконечно малая при $n \to\infty$), откуда $p_n = (a + \alpha_n)/n$.

Имеем: $b_k(n,p_n) = C_n^k\, p_n^k\,(1-p_n)^{n-k} = \dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \left[u^v = e^{v\ln u}\right] = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k}\,\frac{a^k}{k!}\left(1+\frac{\alpha_n}{a}\right)^k e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{a+\alpha_n}{n}\right)} = \quad (*)$$

Вычислим предел $(*)$ при $n \to\infty$:

в выражении $(*)$ заменим сомножители их пределами (или эквивалентными бесконечно малыми при $n \to\infty$),

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1;\; \left(1+\frac{\alpha_n}{a}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} 1;\; \ln\left(1-\frac{a+\alpha_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(-\left(\frac{a+\alpha_n}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n}(a+\alpha_n),$$

получим:

$$(*) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!}e^{-\frac{n-k}{n}(a+\alpha_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

Таким образом: $b_k(n,p_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$.

Следствие

Приближенная формула для вычисления биномиальных вероятностей: $b_k(n,p) \approx \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, где $a = np$, $0 \le k \le n$.

Это приближение, основанное на теореме Пуассона, рекомендуется применять при достаточно больших n и малых p, а именно, $n > 40$, $p < 1/10$, np – несколько единиц и $k << n$.

10. Полиномиальные вероятности

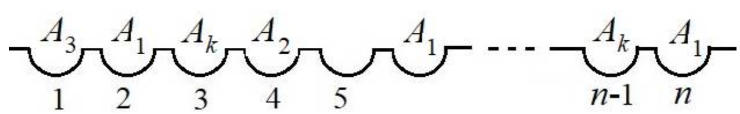
В рассмотренной в п.1.8. *схеме Бернулли* в каждом из n независимых испытаний происходит *одно из двух событий*: событие A – (успех), либо $\overline{A}$ (неуспех) с заданными вероятностями p и q, соответственно, ($p + q = 1$). Рассмотрим обобщение этой схемы.

Пусть теперь опыт E состоит в проведении n независимых испытаний в каждом из которых может произойти *одно из k событий* $A_1,\ldots,A_k$ ($k \geq 2$) с вероятностями, соответственно равными $p_1,\ldots,p_k$, причем $A_1+\ldots+A_k=\Omega$; $p_1+\ldots+p_k=1$.

Определим событие $\mathrm{B}_{n_1\ldots n_k}(n)$ следующим образом:

при проведении n независимых испытаний
событие A_1 произошло n_1 раз,
событие A_2 произошло n_2 раз,
…………………
событие A_k произошло n_k раз,
при этом $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k = n$.

Обозначим через $\omega_i(n_1, n_2,\ldots n_k)$ i-й исход опыта – элементарное событие, благоприятствующее событию $\mathrm{B}_{n_1\ldots n_k}(n)$,



тогда $\mathrm{B}_{n_1\ldots n_k}(n) = \sum\limits_{i=1}^{r}\{\omega_i(n_1,n_2,\ldots n_k)\}$ – сумма попарно несовместных событий, $\{\omega_i(n_1, n_2,\ldots n_k)\} \cap \{\omega_j(n_1, n_2,\ldots n_k)\} = \varnothing$ ($i \neq j$).

Число слагаемых r в этой сумме равно числу способов, которыми можно разместить n_1 символов A_1, n_2 символов A_2, … , n_k символов A_k в последовательности длиной n символов. Алфавит в “сообщении” состоит из k “букв” $A_1,\ldots,A_k$; r – число таких “сообщений”.

$r = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ (см. п.1.3. – задача о распределении n шариков по k ящикам, емкости которых $n_1, n_2,\ldots, n_k$ удовлетворяют условию $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k = n$).

$$P(B_{n_1 \dots n_k}(n)) = P(\sum_{i=1}^{r} \{\omega_i(n_1, n_2, \dots n_k)\}) = \sum_{i=1}^{r} P(\{\omega_i(n_1, n_2, \dots n_k)\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = [\text{сумма } r \text{ равных слагаемых}] = r \cdot (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}) =$$

$$= [\, r = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \,] = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \; p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} -$$

полиномиальные вероятности.

11. Определение одномерной случайной величины, закон распределения, функция распределения

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – множество всех элементарных событий опыта E.

def Одномерной случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$: $\Omega \xrightarrow{X} R$, определенная на пространстве элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное действительное число $X(\omega)$, при этом предполагается, что для любого $x \in R$ определена вероятность $P(X < x)$ события $X < x$.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а принимаемые ими значения – строчными буквами x, y, z и т.д.

Примеры случайных величин.

1. Опыт – проведение серии из n подбрасываний правильной монеты; случайная величина X – число выпавших гербов, множество возможных значений: $0, 1, 2, \ldots, n$ (конечное множество).
2. Опыт – подбрасывание правильной монеты до первого выпадения герба; случайная величина X – число подбрасываний до первого выпадения герба, множество возможных значений: 1, 2, … (счетное множество).
3. Опыт – измерение некоторой величины с помощью прибора с грубыми делениями; случайная величина X – ошибка, возникающая при округлении до ближайшего целого значения, множество возможных значений сплошь заполняет отрезок $[-0{,}5; +0{,}5]$.
4. Опыт – измерение времени безотказной работы прибора; случайная величина X – время от начала работы до момента отказа, множество возможных значений (теоретически) сплошь заполняет всю правую полуось – промежуток $[0;+\infty)$.

$\underline{def|}$ Закон распределения случайной величины – это функция (заданная формулой или таблицей), устанавливающая связь между отдельными значениями случайной величины (или интервалами значений) и вероятностями принять эти отдельные значения (или значения из интервала).

$\underline{def|}$ Функция распределения случайной величины $F_X(x)$ определяется следующим образом: $\forall\ x \in R\ \ F_X(x) = P(X < x)$.

Смысл функции распределения – это *вероятность события* $(-\infty < X < x)$: *случайная величина* X *приняла значение на полуоси левее точки x*, *не включая саму эту точку*.

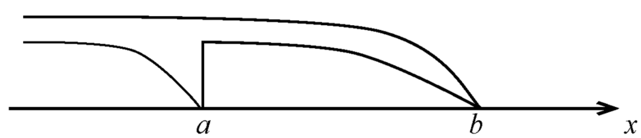
Основные свойства функции распределения:

1) $0 \le F_X(x) \le 1$ $(F_X(x) = P(X < x)$ и $0 \le P(X < x) \le 1)$;

2) $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X < x) = P(\Omega) = 1$,

$$F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X < x) = P(\varnothing) = 0;$$

3) $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$



$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b);$$

4) $\forall\ x_1 < x_2\ \ F_X(x_2) - F_X(x_1) = \big[$по свойству (3)$\big] = P(x_1 \le X < x_2) \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ таким образом, $F_X(x)$ – неубывающая функция.

12. Дискретная одномерная случайная величина: определение, закон распределения, функция распределения

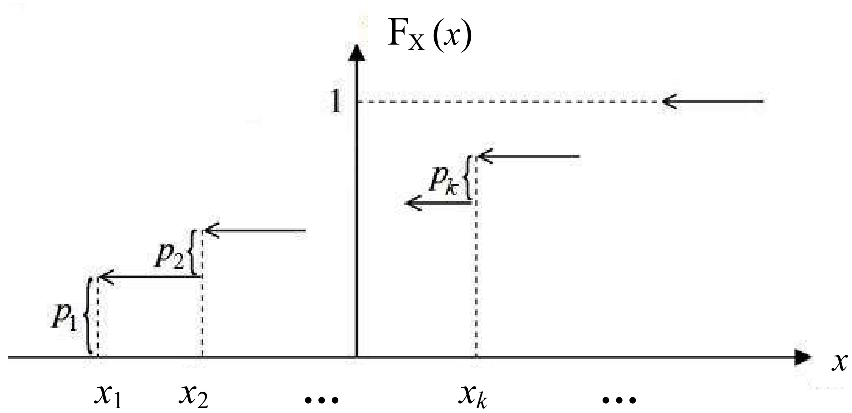
def | Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее возможных значений $\{x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k,\ldots\}$ *счетно* (в частности, конечно).

Дискретную случайную величину задают, указывая множество всех ее возможных значений и соответствующие этим значениям вероятности событий $(X = x_k)$: $p_k = P(X = x_k)$. При этом должно быть выполнено *условие нормировки* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$.
Условимся сопоставлять *нулевую вероятность* любой точке числовой оси, отличной от x_k: $\forall\, x\ \ x \neq x_k\ \ P(X = x) = 0$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно представить таблицей (рядом распределения):

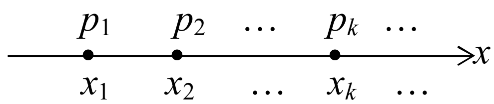
X	x_1	x_2	…	x_k	…
$p_k = P(X = x_k)$	p_1	p_2	…	p_k	…

Функция распределения дискретной случайной величины:
$F_X(x) = P(X < x) = \sum\limits_{k:\, x_k < x} p_k$; график $F_X(x)$ – ступенчатая линия со скачками p_k в точках x_k $(k = 1,2,\ldots)$:



В каждой точке $x \neq x_k$ числовой оси функция распределения $F_X(x)$ непрерывна; в точках x_k она непрерывна слева, величина скачка справа равна p_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

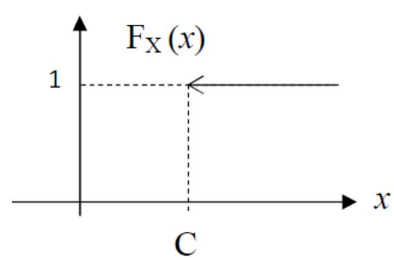
Дискретную случайную величину можно интерпретировать как систему точечных масс на числовой оси: в точках с абсциссами $x = x_k$ сосредоточены точечные массы p_k, сумма которых равна 1.



В каждой точке x числовой оси функция распределения $F_X(x)$ равна сумме точечных масс, абсциссы которых находятся *левее точки x*.

Примеры

(а) Всякую неслучайную постоянную C (C = const) можно интерпретировать как случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью, равной 1 (*вырожденное распределение*): $\begin{cases} P(X = C) = 1; \\ P(X \neq C) = 0. \end{cases}$

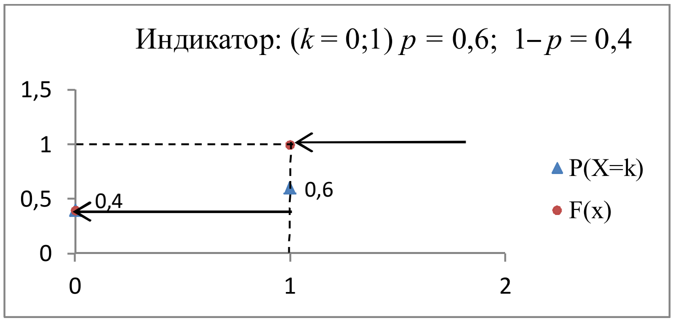


(б) Пусть при проведении опыта E событие A происходит с вероятностью p, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $1-p$. Случайная величина X_A – индикатор события A:

$$X_A = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \overline{A} \end{cases}$$

X_A	0	1
P	$1-p$	p

Ниже приведены графики $F_X(x)$ и $p_k = P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$, $(k = 0;1)$ для индикатора при $p = 0{,}6$.



Задача

В партии из 10 изделий 3 бракованных и 7 небракованных. Наудачу берется выборка из 5 изделий. Случайная величина X – число бракованных изделий в выборке. Записать закон распределения случайной величины X, построить график функции распределения $F_X(x)$.

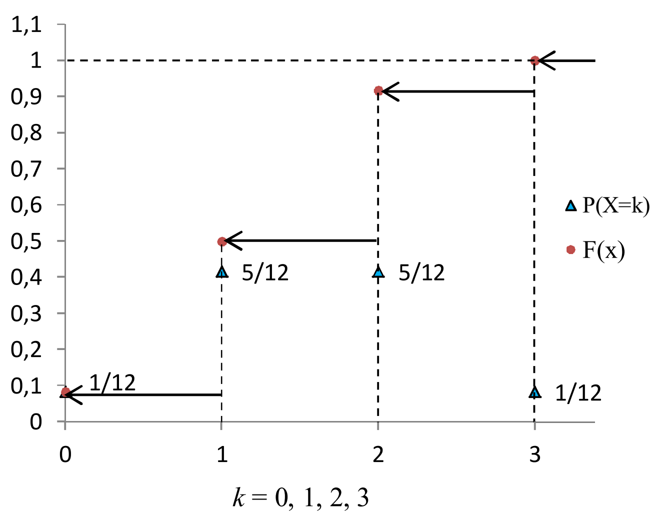
Решение

Множество возможных значений случайной величины X: {0, 1, 2, 3},

$$P(X = k) = \frac{C_3^k C_7^{5-k}}{C_{10}^5} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

X	0	1	2	3
$p_k = P(X = k)$	1/12	5/12	5/12	1/12

$$P(X = k) = p_k\,;\ \ F_X(x) = \sum_{k:\, x_k < x} p_k\,.$$



13. Математическое ожидание одномерной дискретной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина, указано множество ее возможных значений $\{ x_1, x_2, \ldots\ x_k, \ldots\}$ и задан закон распределения

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k) \ \ (\sum_k p_k = 1).$$

$\underline{def}|$ Математическим ожиданием MX дискретной случайной величины X называется *сумма произведений возможных значений* x_k *случайной величины* X *на вероятности* p_k, *соответствующие этим значениям*: $\mathrm{MX} = \sum_k x_k p_k$.

Математическое ожидание обозначают MX, M(X), M[X], m_{X}.

Если множество возможных значений бесконечно, то MX – числовой ряд. Математическое ожидание MX существует и равно сумме ряда, если этот ряд абсолютно сходится, в противном случае математическое ожидание не существует.

Заметим, что математическое ожидание – *среднее значение* случайной величины X:

$$x_{min}\sum_k p_k \le \sum_k x_k p_k \le x_{max}\sum_k p_k \Rightarrow \Big[\sum_k p_k = 1\Big] \Rightarrow x_{min} \le \sum_k x_k p_k \le x_{max}.$$

Математическое ожидание – взвешенное среднее значение случайной величины X, веса значений x_k – соответствующие вероятности p_k .

Если интерпретировать дискретную случайную величину как систему точечных масс, то MX – абсцисса центра масс этой системы:

$$x_{центра\ масс} = \sum_k x_k p_k \Big/ \sum_k p_k = \Big[\sum_k p_k = 1\Big] = \mathrm{MX}.$$

$\underline{def}|$ (*функция дискретной случайной величины*)

Пусть дана дискретная случайная величина X и функция φ, которая определена на множестве ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Функция случайной величины X – это случайная величина $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$, которая принимает значение $y_k = \varphi(x_k)$, когда X принимает значение x_k ($k = 1,2,\ldots$):

$$\forall k\ \ (\mathrm{X} = x_k) \Rightarrow (\mathrm{Y} = y_k).$$

Т| Теорема о математическом ожидании функции дискретной случайной величины

Пусть задана дискретная случайная величина X: $\{ x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots\}$, $p_k = P(X = x_k)$, и пусть $Y = \varphi(X)$ – функция случайной величины X,

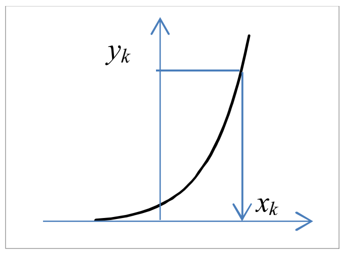
$$\text{тогда } MY = \sum_k \varphi(x_k) p_k$$

Док| (*доказательство*)

а) φ – взаимно однозначна,

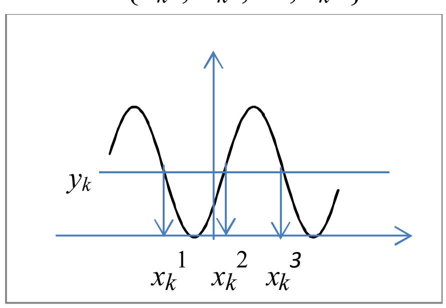
прообраз каждого y_k – одноэлементное множество $\{x_k\}$,

$$\forall k \ \ (X = x_k) = (Y = y_k),$$



откуда $MY = \sum_k y_k P(Y = y_k) = \left[P(Y = y_k) = P(X = x_k) = p_k\right] = \sum_k \varphi(x_k) p_k$.

б) φ – не взаимно однозначна, прообраз каждого y_k – не одноэлементное множество: $\{x_k^1; x_k^2; \ldots; x_k^m\}$



$$(Y = y_k) = (X = x_k^1) \cup (X = x_k^2) \cup \ldots \cup (X = x_k^m)$$

$MY = \sum_k y_k P(Y = y_k) =$

$= \left[\ P(Y = y_k) = P((X = x_k^1) \cup (X = x_k^2) \cup \ldots \cup (X = x_k^m))\ \right] = \sum_i \varphi(x_i) p_i$.

Некоторые свойства математического ожидания MX

(1) MC = C, где C – неслучайная константа P(X = C) =1:

MC = C·P(X= C) = C

(2) M(CX) = C·MX здесь Y= φ(X) = CX

$$M(CX) = \sum_k \varphi(x_k) p_k = \sum_k C x_k p_k = C \cdot MX$$

(3) M(X + Y) = M(X) + M(Y)

Предполагается, что все три математических ожидания существуют (свойство 3 будет доказано далее).

Обобщение: $M\sum_i X_i = \sum_i M(X_i)$.

14. Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть задана дискретная случайная величина X: $\{x_1, x_2, \dots x_k, \dots\}$, закон распределения $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k)$ $\left(\sum_k p_k = 1\right)$.

Запишем математическое ожидание функции $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2$ случайной величины X: $\mathrm{MY} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \sum_k (x_k - \mathrm{MX})^2 p_k$ (см. п.13. – теорема о математическом ожидании функции случайной величины).

$\underline{def|}$ Дисперсией DX дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания MX:

$$\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2.$$

Дисперсия DX – мера рассеяния значений случайной величины относительно ее математического ожидания MX. Наряду с дисперсией ($\mathrm{DX} \geq 0$), мерой рассеяния служит также *стандартное отклонение* $\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\mathrm{DX}}$ (другое название σ_{X} – среднее квадратическое отклонение). Заметим, что σ_{X} имеет размерность ту же, что случайная величина X.

Некоторые свойства дисперсии DX

(1) Формула для вычисления дисперсии: $\mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2$.

$\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{XMX} + (\mathrm{MX})^2) = \mathrm{M}(\mathrm{X})^2 - 2(\mathrm{MX})^2 + (\mathrm{MX})^2 =$
$= \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2$.

(2) $\mathrm{DC} = 0$ т.к. $\mathrm{MC}^2 - (\mathrm{MC})^2 = \mathrm{C}^2 - \mathrm{C}^2 = 0$, где C – неслучайная константа.

Иначе: Пусть X = C (C= const) – случайная величина $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{C}) = 1$ (вырожденное распределение),

тогда $\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{C} - \mathrm{MC})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{C} - \mathrm{C})^2 = 0$, т.е. $\mathrm{DC} = 0$

(3) $\mathrm{D}(\mathrm{X} + \mathrm{C}) = \mathrm{DX}$ (*дисперсия не меняется при сдвиге случайной величины на постоянную*):

$\mathrm{D}(\mathrm{X} + \mathrm{C}) = \mathrm{M}((\mathrm{X}+\mathrm{C}) - \mathrm{M}(\mathrm{X}+\mathrm{C}))^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}+\mathrm{C}-\mathrm{MX}-\mathrm{MC})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}-\mathrm{MX})^2 =$
$= \mathrm{DX}$

(4) $D(CX) = C^2\, DX$, действительно,

$D(CX) = M(CX)^2 - (MCX)^2 = C^2(MX^2 - (MX)^2) = C^2 \cdot DX$.

Замечание

Рассмотрим выражение $M(X - t\, MX)^2 = M(X^2 - 2t\, X\, MX + t^2(MX)^2) =$
$= MX^2 + (t^2 - 2t)\,(MX)^2$

Это выражение, рассматриваемое как функция t, достигает минимума при t =1, т.е. квадрат отклонения X от $t \cdot MX$ минимален при t =1 и равен дисперсии $DX = M(X - MX)^2$.

15. Производящая функция вероятностей целочисленной случайной величины; вычисление математического ожидания и дисперсии с помощью производящей функции

$\underline{def|}$ Дискретную случайную величину X будем называть *целочисленной*, если множество ее возможных значений – целые неотрицательные числа 0, 1, 2, ….

$\underline{def|}$ *Производящей функцией вероятностей* данной целочисленной случайной величины X: $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X}= k)$, $(k = 0,1,2,\ldots)$ называется функция $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (0 \le z \le 1)$.

Производящую функцию вероятностей называют также просто производящей функцией или производящей функцией распределения.

Заметим, что $\varphi(1) = \sum_k p_k = 1$; степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ сходится в области $|z| \le 1$ и $\varphi(z)$ – сумма степенного ряда: $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

Коэффициенты p_k степенного ряда равны $p_k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0,1,2,\ldots)$,

где $\varphi^{(k)}(0)$ – k-я производная функции $\varphi(z)$ в точке 0.

Таким образом, задание $\varphi(z)$ однозначно определяет вероятности $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$, т.е. закон распределения случайной величины X.

Итак, пусть дана целочисленная случайная величина X, имеющая математическое ожидание MX и дисперсию DX и пусть $\varphi(z)$ – производящая функция распределения этой случайной величины.

Дифференцируя ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ почленно, получаем

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^{k-1} \qquad (*).$$

Полагая в $(*)$ $z = 1$, получаем: $\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k = \mathrm{MX}$ – математическое ожидание случайной величины X.

Далее, умножим на z обе части (*): $z\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^k$,

продифференцируем это равенство $(z\varphi'(z))' = (\sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^k)'$,

получим $\varphi'(z) + z\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2 z^{k-1}$.

Полагая в последнем равенстве $z = 1$, имеем:

$$\varphi'(1) + \varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2 = \mathrm{MX}^2,$$

$\mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2 = [(\mathrm{MX})^2 = (\varphi'(1))^2] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$.

Итог: $\begin{cases} \mathrm{MX} = \varphi'(1) \\ \mathrm{DX} = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2. \end{cases}$

Замечания

1. Производящую функцию $\varphi(z)$ можно представить как математическое ожидание функции z^{X}: $\mathrm{M}(z^{\mathrm{X}}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \varphi(z)$ (см. п.13 – теорема о математическом ожидании функции дискретной случайной величины).
2. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(z) \geq 0 \Rightarrow \varphi(z)$ – неубывающая функция на $0 \leq z \leq 1$, причем $0 \leq \varphi(z) \leq 1$.

16. Распределения целочисленных случайных величин: Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые часто встречающиеся распределения *целочисленных случайных величин*, множество возможных значений которых – целые неотрицательные числа $0,1,2,\ldots$.

(1) *Распределение Бернулли*

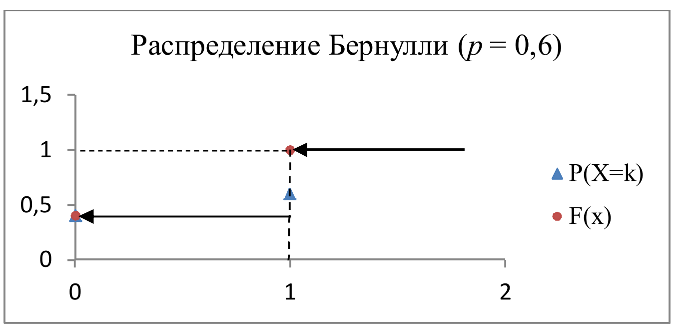
X	0	1
P	$q=1–p$	p

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=p^k(1–p)^{1-k},\quad (k=0,1)\ \text{–}\textit{распределение Бернулли}$$

$$\mathrm{MX}=0\cdot(1–p)+1\cdot p=p;\qquad \mathrm{DX}=\mathrm{MX}^2–(\mathrm{MX})^2=p–p^2=p\,(1–p)=pq.$$

Производящая функция: $\varphi(z)=\sum_k p_k z^k = q\cdot z^0+p\cdot z=pz+q.$

Случайная величина X – индикатор события (см. п.12., пример (б)) подчиняется распределению Бернулли.



(2) *Биномиальное распределение*

Случайная величина X – число успехов при проведении n независимых испытаний, p – вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1– p$ – вероятность неуспеха (см. п.8.);
множество возможных значений с.в. X: $\{0, 1, \ldots, n\}$.
Закон распределения с.в. X – *биномиальное распределение*:

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=b_k(n,p)=C_n^k\ p^k q^{n–k}\qquad k=0,1,\ldots,n$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1 \text{ – условие нормировки.}$$

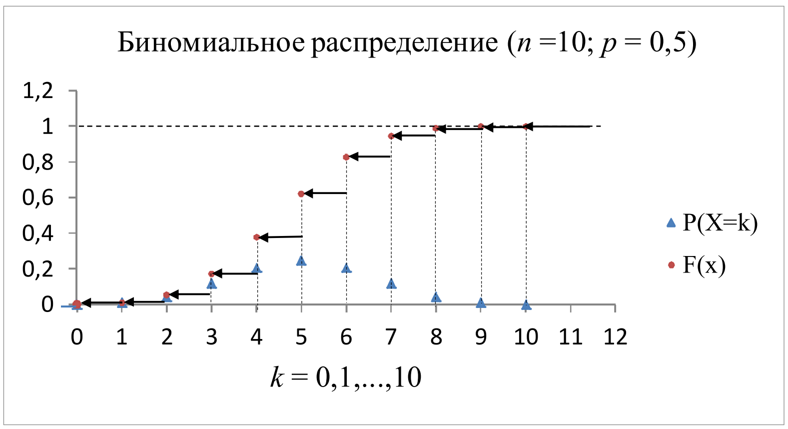
Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_k p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (pz+q)^n$;

$\varphi'(z) = np(pz+q)^{n-1}$;

$\varphi''(z) = n(n-1)p^2(pz+q)^{n-2}$.

MX= $\varphi'(1) = np$,

DX=$\varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$.



Замечание

Случайная величина X, подчиняющаяся биномиальному распределению $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – сумма n случайных величин X_i,

где $X_i = \begin{cases} 1, & A - \textit{успех} \\ 0, & \bar{A} - \textit{неуспех} \end{cases}$ – индикатор успеха в i-м испытании.

$MX_i = p \Rightarrow MX = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np$ (мат. ожидание суммы случайных величин равно сумме их мат. ожиданий см. п.13.).

(3) *Распределение Пуассона*

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a} \quad (a > 0) \quad k = 0,1,2,\ldots \text{– } \textit{распределение Пуассона}$$

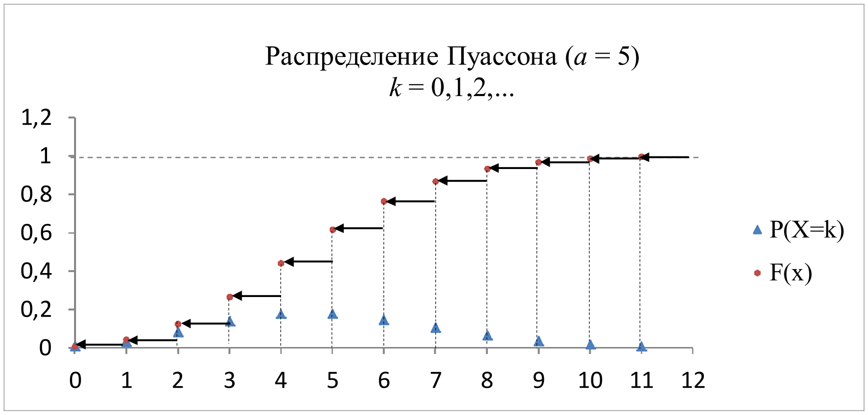
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = 1 \text{– условие нормировки.}$$

Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!} =$

$$= e^{-a}e^{az} = e^{a(z-1)}.$$

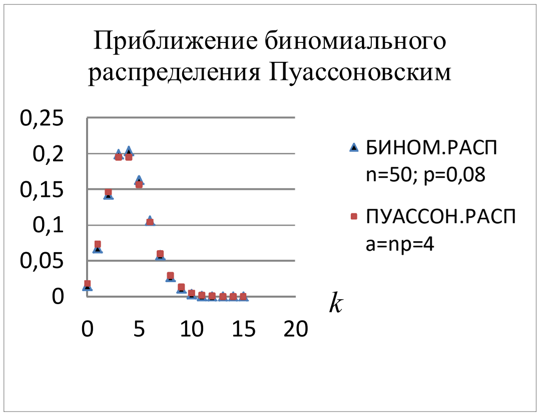
$$\varphi'(z) = a\,e^{a(z-1)}; \quad \varphi''(z) = a^2 e^{a(z-1)}.$$

MX= $\varphi'(1) = a$, DX=$\varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a$.



Замечание

Распределение Пуассона – асимптотическое (предельное) для биномиального распределения при выполнении условий теоремы Пуассона (см. п.9.).



(4) *Геометрическое распределение*

Случайная величина X – число независимых *испытаний до первого успеха*, p – вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1 – p$ – вероятность неуспеха; множество возможных значений X: $\{1, 2, \ldots\}$.

Закон распределения:

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = q^{k-1}p \qquad k = 1, 2, \ldots -$$

– *геометрическое распределение*.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\frac{1}{1-q} = 1 \text{ – условие нормировки.}$$

Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(q^{k-1}p)\, z^k = pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1} = \dfrac{pz}{1-qz}$

$\varphi'(z) = \dfrac{p}{(1-qz)^2} = p(1-qz)^{-2}$; $\varphi''(z) = -2(1-qz)^{-3}(-q)p = \dfrac{2pq}{(1-qz)^3}$

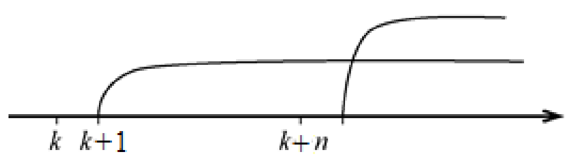
$\mathrm{MX} = \varphi'(1) = \dfrac{1}{p}$

$\mathrm{DX} = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2q+p-1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$

Замечание (о “*нестарении*” геометрического распределения)

Заметим $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} q^{i-1}p = p\dfrac{q^k}{1-q} = q^k.$

Вычислим условную вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k+n \mid \mathrm{X} > k) =$



$= \dfrac{\mathrm{P}((\mathrm{X} > k+n) \cap (\mathrm{X} > k))}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k)} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k+n)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k)} = \dfrac{q^{k+n}}{q^k} = q^n$ – *<u>не зависит от</u> k,*

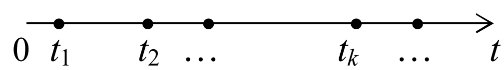
отсутствует последействие (имеет место “*нестарение*” *геометрического распределения*).

Если считать с.в. X временем безотказной работы до первого отказа, измеряемым в часах (целым неотрицательным числом), то *свойство “нестарения”* геометрического распределения означает, что вероятность работающему устройству проработать еще n часов не зависит от момента начала отсчета или от того, сколько времени (k часов) до этого момента устройство уже проработало.

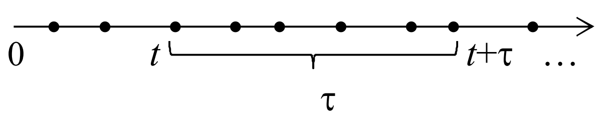
17. Простейший (стационарный пуассоновский) поток однородных событий

Потоком событий называют последовательность *однородных событий*, которые происходят одно за другим в некоторые, вообще говоря, случайные моменты времени t_n. Например: моменты времени редких ночных телефонных звонков, регистрируемых АТС; моменты регистрации счетчиком α- частиц при радиоактивном распаде; моменты времени отражения радиоволн от метеорных следов в выделенной области верхнего слоя атмосферы и т.п. Заметим, что термин *однородное событие* в понятии поток событий не означает “случайное событие”.

Последовательность *однородных событий* будем изображать на оси $0t$ последовательностью точек $\{t_n\}$ моментов времени, в которые, одно за другим, эти события происходят:



Введем целочисленную случайную величину $X_{(t;\, t+\tau)}$, такую что случайное событие ($X_{(t;\, t+\tau)} = k$) означает: в течение времени от t до $t+\tau$ поступает k событий потока ($k = 0,1,2,\ldots$).



Простейшим (стационарным пуассоновским) называют поток событий, обладающий следующими <u>*тремя свойствами*</u>: *стационарностью, ординарностью, отсутствием последействия*.

def| (1) *Стационарность*:

$$P(X_{(t;\, t+\tau)} = k) = P(X_{(0;\tau)} = k) = \left[\text{обозначим } X_{(0;\tau)} = X_\tau\right] = P(X_\tau = k) = P_k(\tau).$$

Вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от длительности τ этого промежутка и от числа k и не зависит от t – начала его отсчета.

$\underline{def|}$ (2) *Ординарность*:

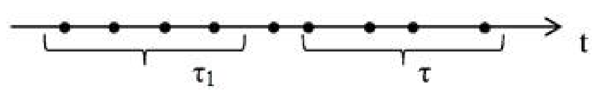
Обозначим $P_{>1}(\Delta\tau) = P_2(\Delta\tau) + P_3(\Delta\tau) + \ldots + P_i(\Delta\tau) + \ldots$ – вероятность того, что на промежутке длительностью $\Delta\tau$ произойдет более одного события потока. Среднее число событий потока, поступающих в единицу времени (интенсивность потока) обозначим λ (λ = const).

Ординарность означает выполнение условий:

$$\begin{cases} P_{>1}(\Delta\tau) = o(\Delta\tau) \\ P_1(\Delta\tau) = \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau) \qquad \left[o(\Delta\tau):\ \dfrac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \underset{\Delta\tau\to 0}{\to} 0\right] \end{cases}$$

Вероятность наступления за элементарный (малый) промежуток времени $\Delta\tau$ более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события.

$\underline{def|}$ (3) *Отсутствие последействия*:



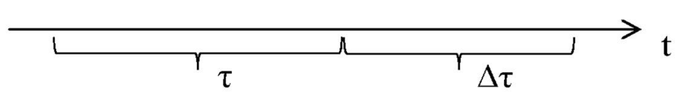
$$\forall\, m \ P((X_{\tau_1} = m) \cap (X_\tau = k)) = P(X_{\tau_1} = m) \cdot P(X_\tau = k) -$$

– *независимость* потока на непересекающихся промежутках времени. Иначе говоря, вероятность появления k событий на любом промежутке времени длительностью τ не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Поставим задачу: найти распределение $P(X_\tau = k) = P_k(\tau)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ для простейшего (стационарного пуассоновского) потока.

Решение:

Фиксируем величину τ и создадим приращение $\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – переменная).



(а) Положим $k = 0$ и найдем $P_0(\tau)$.

$P_0(\tau+\Delta\tau) = [\text{свойство (3)}] = P_0(\tau)\, P_0(\Delta\tau)$;

$P_0(\Delta\tau) = 1 - P_{\geq 1}(\Delta\tau) = [\text{свойство (2)}] = 1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)$;

$P_0(\tau+\Delta\tau) = P_0(\tau)\,(1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau))$;

$P_0(\tau+\Delta\tau) - P_0(\tau) = -\lambda\, P_0(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau).$

Разделим обе части на $\Delta\tau$ и перейдем к пределу при $\Delta\tau \to 0$

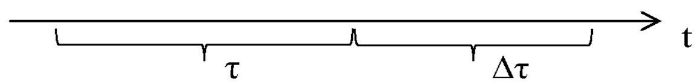
(учтем $\dfrac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \underset{\Delta\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\,P_0(\tau)}{d\tau} = -\lambda\, P_0(\tau) \;\Rightarrow\; P_0(\tau) = P_0(0)\, e^{-\lambda\tau}.$$

Начальное условие $P_0(0) = \lim\limits_{\tau\to 0} P_0(\tau) = \lim\limits_{\tau\to 0}(1-\lambda\tau+o(\tau)) = 1.$

$$\text{Таким образом,}\quad P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}.$$

(б) Найдем теперь $P_k(\tau)$ для $k \ge 0$.



Имеем: $P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)\, P_0(\Delta\tau) + P_{k-1}(\tau)\, P_1(\Delta\tau) +$

$$+ \underbrace{P_{k-2}(\tau)\, P_2(\Delta\tau) + \ldots + P_0(\tau)\, P_k(\Delta\tau)}_{o(\Delta\tau)}$$

$P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)(1-\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\,(\lambda\Delta\tau+o(\Delta\tau)) + o(\Delta\tau);$

$P_k(\tau+\Delta\tau) - P_k(\tau) = P_k(\tau)\,(-\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\,(\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + o(\Delta\tau).$

Разделим обе части на $\Delta\tau$ и перейдем к пределу при $\Delta\tau \to 0$, получим дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{d\,P_k(\tau)}{d\tau} = \lambda(\,P_{k-1}(\tau) - P_k(\tau)) \qquad (*)$$

Положим $P_{-1}(\tau) \equiv 0$, тогда уравнение справедливо для всех $k \ge 0$.

Умножим обе части $(*)$ на z^k и просуммируем по k от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d\,P_k(\tau)}{d\tau} z^k = \lambda\,(\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(\tau) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\tau) z^k);$$

заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(\tau) z^k = \varphi(\tau; z)$ – производящая функция.

Таким образом, в результате преобразований уравнения $(*)$ получаем дифференциальное уравнение для производящей функции $\varphi(\tau; z)$:

$$\varphi'_\tau(\tau; z) = \lambda(z\,\varphi(\tau; z) - \varphi(\tau; z)),$$

$$\varphi'_\tau(\tau; z) = \lambda(z-1)\,\varphi(\tau; z) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\tau; z) = \varphi(0; z)\, e^{\lambda(z-1)\tau}.$$

Начальное условие $\varphi(0; z) = P_0(0) z^0 + P_1(0) z^1 + \ldots$,

условие нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) = 1$; показано, что $P_0(0) = 1$,

поэтому $P_1(0) = P_2(0) = \ldots = 0$, следовательно $\varphi(0; z) = 1$.

Имеем, $\varphi(\tau; z) = e^{\lambda(z-1)\tau} = e^{\lambda\tau(z-1)}$ – производящая функция распределения Пуассона с параметром $\lambda\tau$ (см. п.16.), поэтому

$$P_k(\tau) = P(X_\tau = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) -$$

– распределение Пуассона.

18. Непрерывная одномерная случайная величина

def | Случайная величина X называется непрерывной, если ее возможные значения сплошь заполняют некоторый промежуток $(a; b)$ (или несколько промежутков) и существует неотрицательная интегрируемая на всей вещественной оси функция $f_X(x)$ – *плотность вероятности*, такая, что:

$$\forall[\alpha;\beta]\subseteq(a;b)\ \ P(X\in[\alpha;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx;$$

$$\forall\, x\notin (a;b)\ \ f_X(x)\equiv 0,$$

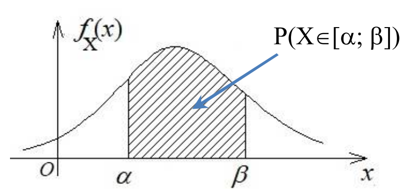
при этом выполнено условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1.$

Из определения следует: $c\in(a;b)$, $(X=c)\neq\varnothing$,

$$P(X=c)=\int_{c}^{c} f_X(x)\,dx=0.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет *отдельное* значение с из множества возможных значений *равна нулю*, *при этом событие* (X = c) *не является невозможным*.

Геометрический смысл формулы $P(X\in[\alpha;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[\alpha;\beta]$ (площадь под кривой $f_X(x)$).

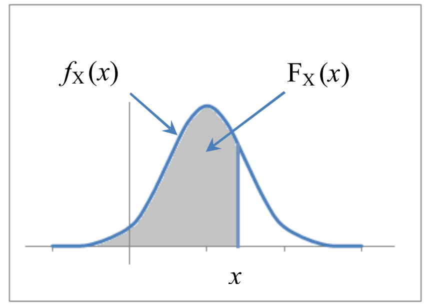


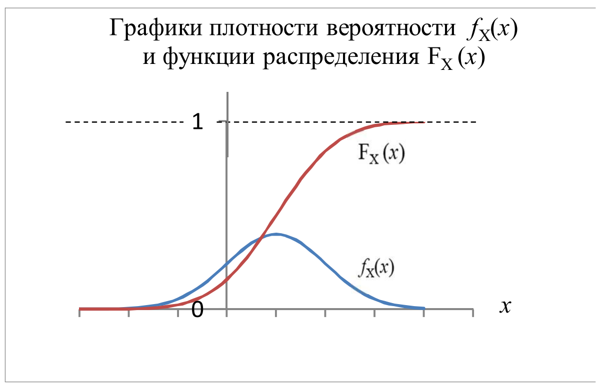
Плотность вероятности $f_X(x)$ можно также интерпретировать как линейную плотность стержня (не имеющего толщины), тогда масса части стержня, соответствующая отрезку $[\alpha;\beta]$, равна интегралу по $[\alpha;\beta]$ от плотности (при этом масса всего стержня равна 1).

Функция распределения непрерывной случайной величины

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

Геометрический смысл функции распределения непрерывной случайной величины: $F_X(x)$ в каждой точке x равна площади криволинейной трапеции, основание которой $(-\infty; x)$.





$F_X(x)$ – непрерывная функция как интеграл с переменным верхним пределом; *в каждой точке непрерывности* $f_X(x)$ *функция распределения* $F_X(x)$ *дифференцируема*:

$$\frac{d\,F_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = f_X(x).$$

Очевидно, справедливы уже упомянутые в п.1.11. свойства $F_X(x)$:

$$F_X(+\infty) = 1,\ \ F_X(-\infty) = 0.$$

Вероятность того что непрерывная с.в. X примет *отдельное значение* из множества возможных значений *равна нулю*, поэтому:

$$P(X\in[x_1; x_2]) = P(X\in(x_1; x_2]) = P(X\in[x_1; x_2)) = P(X\in(x_1; x_2)) =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = F_X(x_2) - F_X(x_1).$$

$\underline{def}|$ *Математическое ожидание непрерывной случайной величины*:

$$\mathrm{MX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\mathrm{X}}(x)\, dx$$

Математическое ожидание MX существует, если несобственный интеграл абсолютно сходится, в противном случае математическое ожидание не существует.

$\underline{T}|$ (*теорема о математическом ожидании функции непрерывной случайной величины*)

Пусть задана непрерывная случайная величина X и $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$ – функция случайной величины X ($\varphi(x)$ определена всюду на множестве возможных значений X), тогда:

$$\mathrm{MY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, f_{\mathrm{Y}}(y)\, dy = \mathrm{M}(\varphi(\mathrm{X})) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f_{\mathrm{X}}(x)\, dx .$$

(примем без доказательства; в дискретном случае теорема была доказана в п. 1.13.).

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \left[\ \mathrm{M}(\varphi(\mathrm{X})) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f_{\mathrm{X}}(x)\, dx,\ \ \varphi(x) = (x - \mathrm{MX})^2\ \right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{MX})^2 f_{\mathrm{X}}(x)\, dx .$$

Очевидно, дисперсия непрерывной случайной величины обладает всеми свойствами, указанными в п.1.14.:

1) $\mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2$ – формула для вычисления дисперсии;
2) $\mathrm{DC} = 0$, где C – неслучайная константа;
3) $\mathrm{D}(\mathrm{X} + \mathrm{C}) = \mathrm{DX}$;
4) $\mathrm{D}(\mathrm{CX}) = \mathrm{C}^2\, \mathrm{DX}$.

19. Равномерное распределение

$\underline{def|}$ Случайная величина X: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$ равномерно распределена на отрезке $[a;b]$.

Функция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x f_X(u)\,du = \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 1, & x > b \end{cases}$.

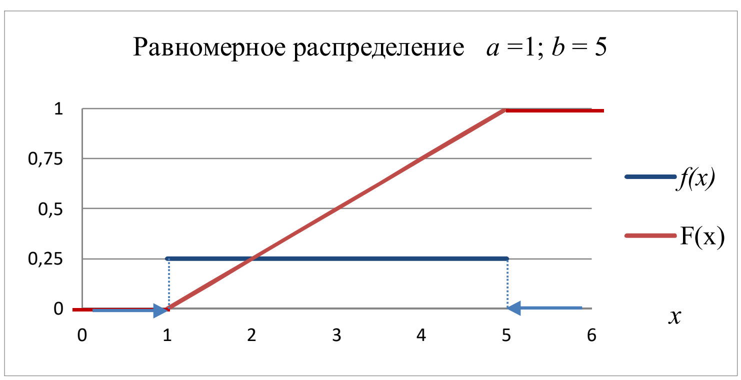
$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2$$

$$MX^2 = \int_a^b \frac{x^2\,dx}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Пример:



Для случайной величины X, равномерно распределенной на [1;5]:

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [1;5] \\ 0, & x \notin [1;5] \end{cases}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{4}, & x \in [1;5] \\ 1, & x > 5 \end{cases}$, MX =3; DX = 4/3; $\sigma_X = 2/\sqrt{3}$.

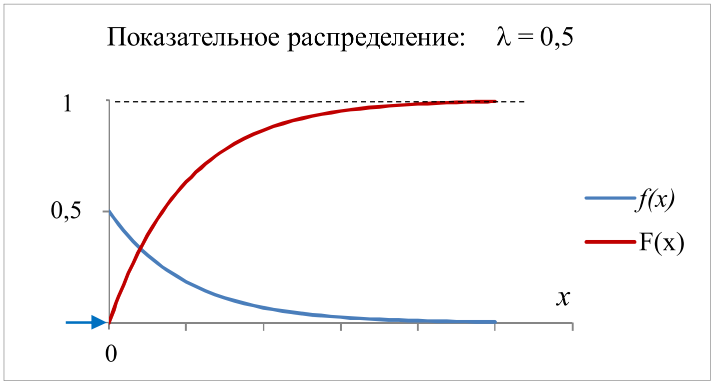
20. Показательное (экспоненциальное) распределение

def | Случайная величина X: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$

распределена по показательному (экспоненциальному) закону.

Функция распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$



******** ******** ******** ********

Справка. Определение и некоторые свойства гамма-функции:

$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$ сходится при $s > 0$ и расходится при $s \le 0$;

$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$; $\Gamma(n) = (n-1)!$ для всех натуральных n;

$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$ $(0 < s < 1)$ – формула дополнения Эйлера;

$\Gamma(1/2)\,\Gamma(1-1/2) = \dfrac{\pi}{\sin \pi/2} \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(3/2) = (1/2)\,\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

******** ******** ******** ********

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty} u e^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\,\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2$$

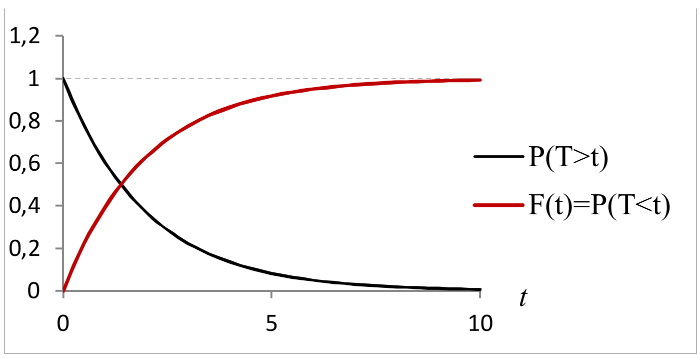
$$MX^2 = \int\limits_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^{\infty} u^2 e^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$

Замечание 1. (о “нестарении” экспоненциального распределения)

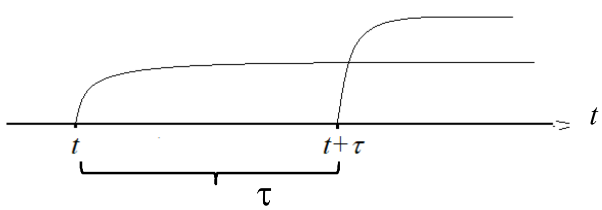
Пусть случайная величина T распределена по экспоненциальному закону. Например, время T – время безотказной работы устройства (или время жизни ядра радиоактивного элемента и т.п.).

$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\qquad F_T(t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t} f_T(u)\,du = 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (параметр $\lambda > 0$).

Смысл $F_T(t) = P(T < t)$ – вероятность того, что время безотказной работы T меньше любого произвольного $t > 0$ (отказ устройства произойдет за время, меньшее t). Вероятность противоположного события $P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\lambda t}$ – вероятность $P(T > t)$ того, что устройство безотказно проработает время, большее t, называется функцией надежности.



Условная вероятность того, что устройство безотказно проработает в течение времени $T > t + \tau$, при условии, что оно уже безотказно проработало время $T > t$ равна $P(T > t+\tau) \mid T > t) =$



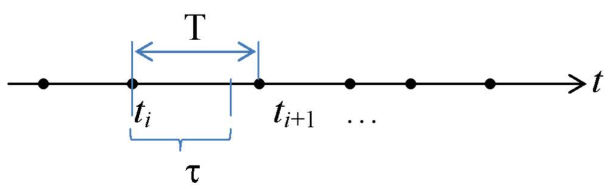
$= \dfrac{P(T > t+\tau)}{P(T > t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau} = P(T > \tau)$ – зависит только от интервала времени τ и не зависит от t – начала его отсчета (см. геометрическое распределение п.16.).

Замечание 2. (связь экспоненциального распределения с пуассоновским потоком)

Пусть имеется пуассоновский поток с интенсивностью λ (см. п.17)

$$P_k(\tau) = P(X_\tau = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Рассмотрим случайную величину $T = t_{i+1} - t_i$ – промежуток времени между любыми двумя последовательными событиями пуассоновского потока и найдем функцию распределения $F_T(\tau) = P(T < \tau)$.



Вероятность противоположного события

$$P(T > \tau) = P(X_\tau = 0) = P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}, \text{ откуда}$$

$$P(T < \tau) = F_T(\tau) = 1 - P(T > \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Таким образом, случайная величина T – интервал времени $T = t_{i+1} - t_i$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ распределена по экспоненциальному (показательному) закону.

21. Нормальное распределение

def Плотность вероятности *нормального распределения*:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty);\ m \text{ – любое вещественное},\ \sigma > 0.$$

Запись X~$N(m;\sigma)$ означает, что случайная величина X распределена нормально с параметрами m и σ.

(1) X~$N(0;1)$ – *стандартное нормальное распределение* ($m=0$; $\sigma=1$).

В этом случае $f_X(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($\varphi(x)$ – обозначение плотности вероятности *стандартного нормального распределения*).

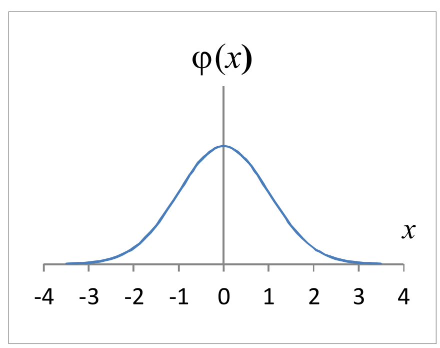
Убедимся в том, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Big[\, x^2/2 = t;\ x = \sqrt{2}\sqrt{t}\,;$$

$$dx = (1/\sqrt{2})\, t^{-1/2} dt \Big] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \Big[\Gamma(s) = \int_{0}^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx \text{ см. п. 20. } \Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma(1/2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

График функции $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ симметричен относительно $x = 0$; в точке $x = 0$ функция $\varphi(x)$ имеет максимум, равный $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, точки $x = \pm 1$ – точки перегиба кривой $y = \varphi(x)$.



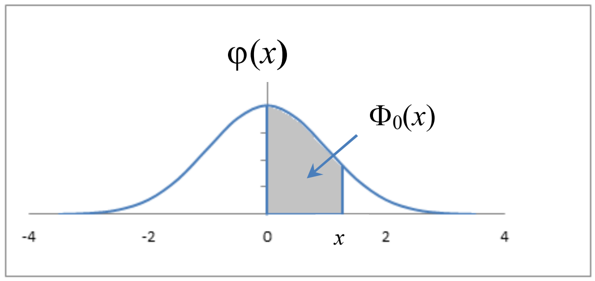
Функция распределения стандартной нормальной случайной величины X~$N(0;1)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \Phi(x) \text{ – } \textit{функция Лапласа}.$$

Очевидно, что $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt = 1/2 + \Phi_0(x)$,

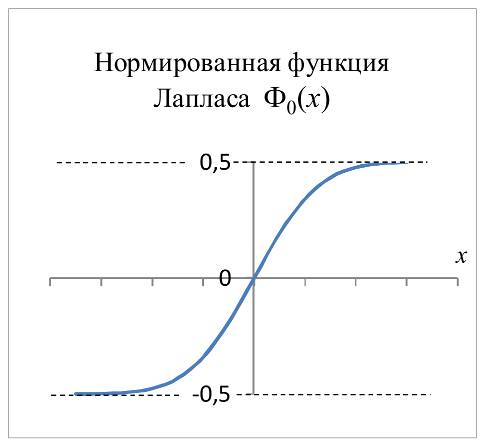
где $\Phi_0(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – *нормированная функция Лапласа*.

Функции $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ табулированы.

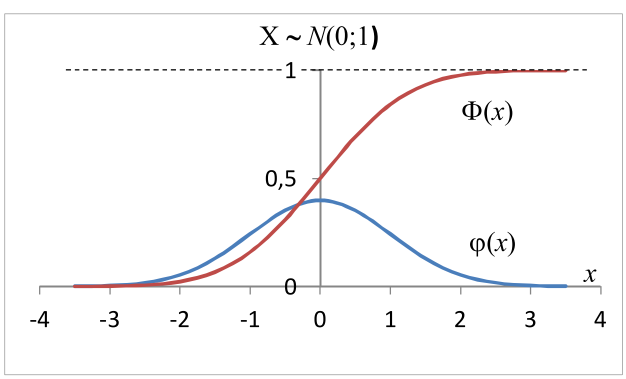


Свойства нормированной функции Лапласа $\Phi_0(x)$:

1. $\Phi_0(x)$ – монотонно возрастающая функция;
2. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ – нечетная функция. Действительно, $\Phi_0(-x) =$
$= \int_{0}^{-x} \varphi(t)\,dt = [t = -u] = -\int_{0}^{x} \varphi(u)\,du =$
$= -\Phi_0(x)$;
3. $\Phi_0(\infty) = 1/2$ – следует из условия нормировки.



Итак: $X \sim N(0;1) \;\Leftrightarrow\; F_X(x) = \Phi(x) = 1/2 + \Phi_0(x)$,



Очевидно, $P(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, откуда

$$P(|X| < x) = \Phi_0(x) - \Phi_0(-x) = 2\Phi_0(x).$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию стандартной нормальной случайной величины $X \sim N(0;1)$.

$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$ (промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, подынтегральная функция – нечетная).

$DX = MX^2 - (MX)^2$.

$$MX^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Big[\, x^2/2 = t;$$

$$x = \sqrt{2}\sqrt{t}\ ;\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}t^{-1/2}dt\,\Big] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} t^{1/2}e^{-t}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma(3/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Таким образом, установлен вероятностный смысл параметров

для $X \sim N(0;1)$: $m_X = MX = 0$; $\sigma_X^2 = DX = 1$.

(2) $X \sim N(m;\sigma)$ – *нормальное распределение с параметрами* m и σ:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty < x < +\infty);\ m \text{ – любое, } \sigma > 0.$$

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \Big[(t-m)/\sigma = u;\ dt = \sigma du;\ (t = -\infty \Rightarrow u = -\infty);$$

$$(t = x \Rightarrow u = (x-m)/\sigma)\,\Big] = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \varphi(u)\,du = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 1/2 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

$$X \sim N(m;\sigma) \Leftrightarrow F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 1/2 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Графики $f_X(x)$ и $F_X(x)$ для $X \sim N(m;\sigma)$ получаются из графиков $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ с помощью операций сдвига и растяжения/сжатия по осям координат.

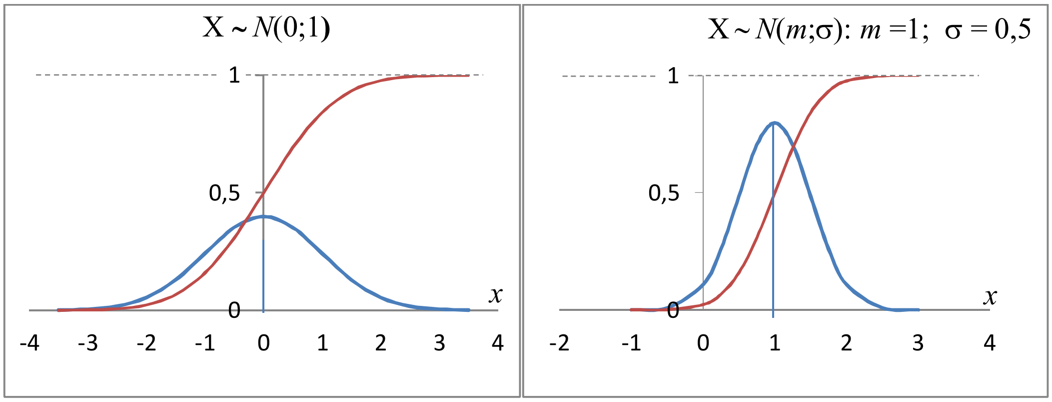


График $y = f_X(x)$ симметричен относительно точки $x = m$; в точке $x = m = \mathrm{MX}$ функция $f_X(x)$ имеет максимум; точки перегиба $x = m \pm \sigma$.

Математическое ожидание и дисперсия X~$N(m;\sigma)$:

$$\mathrm{MX} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$ – математическое ожидание,

$$\mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx - (\mathrm{MX})^2$$ – дисперсия.

Замена переменной $t = \frac{x-m}{\sigma}$ приводит к интегралам, вычисленным выше для X~$N(0;1)$. Опуская выкладки, запишем:

$$\mathrm{MX} = m; \quad \mathrm{DX} = \sigma^2.$$

Вероятностный смысл параметров распределения X~$N(m;\sigma)$: $m = \mathrm{MX}$ математическое ожидание; $\sigma = \sqrt{\mathrm{DX}}$ – стандартное отклонение случайной величины X.

Заметим, что если случайную величину X: $\mathrm{MX} = m_X$, $\mathrm{DX} = \sigma_X^2$ преобразовать (*центрировать и нормировать*), то случайная величина $\overset{\circ}{X} = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$ имеет $\mathrm{M}\overset{\circ}{X} = 0$ и $\mathrm{D}\overset{\circ}{X} = 1$.

Действительно, $\mathrm{M}\overset{\circ}{X} = \mathrm{M}\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X}\mathrm{M}(X - m_X) = 0$,

$$D\overset{\circ}{X}=D\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X^{\,2}}D(X-m_X)=\frac{1}{\sigma_X^{\,2}}DX=1.$$

Утверждение: $X\sim N(m;\sigma) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{X-m}{\sigma}\sim N(0;1).$

Док $F_{\frac{X-m}{\sigma}}(x)=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma}<x\right)=P(X<\sigma x+m)=F_X(\sigma x+m)=$

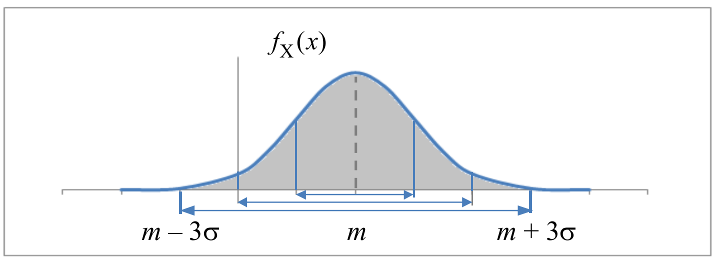
$=\Phi\left(\dfrac{(\sigma x+m)-m}{\sigma}\right)=\Phi(x)\;\Rightarrow\;\dfrac{X-m}{\sigma}\sim N(0;1)$ – необходимость доказана (достаточность доказывается аналогично).

Пусть $X\sim N(m;\sigma)$ тогда $P(x_1<X<x_2)=F_X(x_2)-F_X(x_1)=$

$=\Phi\left(\dfrac{x_2-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_1-m}{\sigma}\right)=\Phi_0\left(\dfrac{x_2-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\dfrac{x_1-m}{\sigma}\right).$

Далее, $P(|X-m|<\sigma t)=P\left(\left|\dfrac{X-m}{\sigma}\right|<t\right)=\Phi_0(t)-\Phi_0(-t)=2\Phi_0(t).$

$$t=1 \;\Rightarrow\; P(|X-m|<\sigma)=2\Phi_0(1)=0{,}6827$$
$$t=2 \;\Rightarrow\; P(|X-m|<2\sigma)=2\Phi_0(2)=0{,}9545$$
$$t=3 \;\Rightarrow\; P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi_0(3)=0{,}9973$$



"*Правило трех* σ" для нормальной случайной величины $X\sim N(m;\sigma)$:

- ✓ событие $X\in(m-3\sigma;\, m+3\sigma)$ – *практически достоверное*, его вероятность равна 0,9973
- ✓ событие $X\notin(m-3\sigma;\, m+3\sigma)$ – *практически невозможное*, его вероятность равна 0,0027

22. Начальные и центральные моменты и другие числовые характеристики одномерных случайных величин

Математическое ожидание MX и дисперсия DX – числовые характеристики одномерной случайной величины, рассмотренные в предыдущих параграфах, являются важными частными случаями более общего понятия – *моментов* случайной величины X.

def | $\alpha_k = \mathrm{M}(\mathrm{X}^k)$ называется *начальным моментом k-го порядка* случайной величины (*k – натуральное число*).

В частности, $\alpha_1 = \mathrm{MX}$; $\alpha_2 = \mathrm{MX}^2$

def | $\mu_k = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^k$ называется *центральным моментом k-го порядка* случайной величины X.

В частности, $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \mathrm{DX} = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$.

def | В качестве относительной характеристики рассеяния используют *коэффициент вариации* σ/MX (или $(\sigma/\mathrm{MX})\cdot 100\%$).

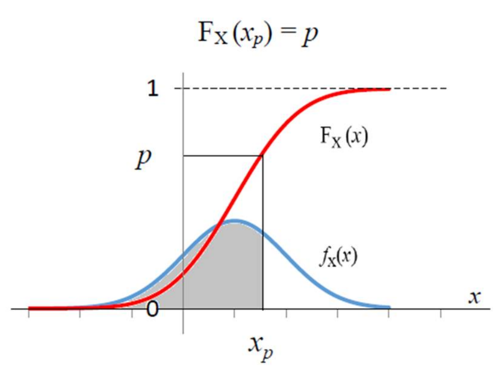
def | *Мода* Mo(X) – наиболее вероятное значение (значения) *по сравнению с соседними значениями* – для дискретной случайной величины X и точка локального максимума плотности вероятности – для непрерывной случайной величины:

$$\mathrm{Mo(X)}: \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Mo(X)}) = \max\limits_i p_i, & \text{если X} - \textit{дискретна}; \\ f_\mathrm{X}(\mathrm{Mo(X)}) = \max\limits_x f_\mathrm{X}(x), & \text{если X} - \textit{непрерывна}. \end{cases}$$

def | *Квантиль x_p порядка p* $(0 < p < 1)$ одномерного распределения – это корень уравнения $\mathrm{F_X}(x_p) = p$, где $\mathrm{F_X}(x)$ – функция распределения.

Порядок p квантили x_p – это *вероятность* того, что случайная величина X примет значение *левее точки* x_p:

$$\mathrm{F_X}(x_p) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x_p) = p = \int_{-\infty}^{x_p} f_\mathrm{X}(x)\,dx$$



Функция распределения $F_X(x)$ – неубывающая. Если X непрерывна и $F_X(x)$ строго монотонна, то уравнение $F_X(x) = p$ имеет единственный корень x_p.

Вообще говоря, уравнение $F_X(x) = p$ может иметь более одного решения, тогда в качестве квантили x_p берут наименьшее из них (либо их среднее арифметическое).

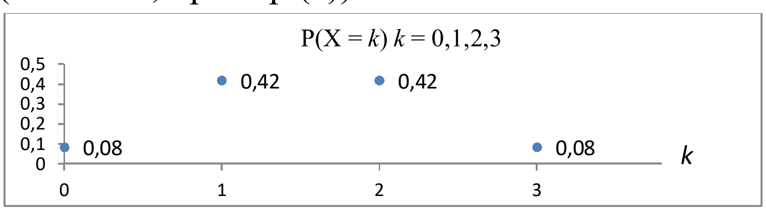
Квантили порядка 1/4 и 3/4: $x_{1/4}$ и $x_{3/4}$ – это *нижняя и верхняя квартили*, соответственно. *Интерквантильная широта* $x_{3/4} - x_{1/4}$ может служить мерой рассеяния распределения случайной величины.

def Медианой распределения случайной величины X называется любое из чисел Me(X), таких, что:

$$P(X \le Me(X)) \ge \frac{1}{2},\ P(X \ge Me(X)) \ge \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Медиана Me(X) всегда существует, но может быть не единственной.

Например, (см. п. 12., пример (в)):



Здесь $P(X \le 1) = \frac{1}{2}$, $P(X \ge 2) = \frac{1}{2}$, поэтому любое число из отрезка [1;2] удовлетворяет условиям (*) и может быть взято в качестве медианы. На практике обычно берут середину такого отрезка, в данном примере это 1,5 = Me(X).

Если случайная величина X непрерывна и $F_X(x)$ строго монотонна, то медиана – единственное решение уравнения: $F_X(MeX) = \frac{1}{2}$. Медиана Me(X) – это *значение* непрерывной случайной величины X, такое, что

$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}$. Медиана MeX $= x_{1/2}$ – квантиль порядка 1/2.

Заметим, что для $X \sim N(m; \sigma)$: $Me(X) = Mo(X) = M(X) = m$.

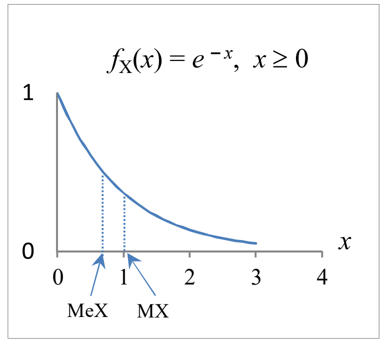
Для экспоненциального распределения

$$f_X(x) = e^{-x},\ x \ge 0\ (\lambda=1)$$

$MX = 1;\ P(X < MX) \cong 0{,}63.$

$MeX = \ln 2 \cong 0{,}69;\quad Me(X) \ne M(X);$

$P\,(X < MeX) = P\,(X > MeX) = ½.$

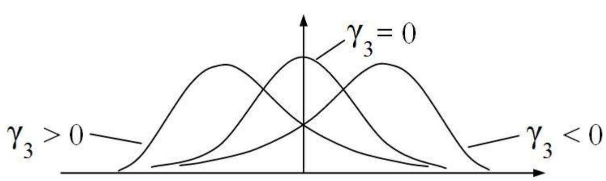


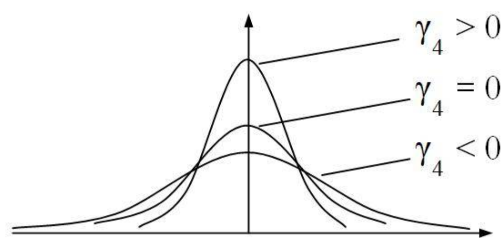
Для непрерывных распределений используются также следующие числовые характеристики:

def | *Коэффициент асимметрии (асимметрия)* $\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, где

$\mu_3 = M(X - MX)^3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^3 f_X(x)\,dx$ – третий центральный момент.

Симметричные распределения (в частности, нормальное) имеют коэффициент асимметрии $\gamma_3 = 0$. Для коэффициента асимметрии встречаются также обозначение A_X или *Sk* (от skewness – скошенность).





def | *Коэффициент эксцесса* (*эксцесс*): $\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ характеризует “островершинность” графика плотности вероятности.

Встречаются также обозначения эксцесса E_X или *Ku* (kurtosis).

Для $X \sim N(m;\sigma)$ непосредственно вычисляется

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^4 f_X(x)\,dx = 3\sigma^4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для нормального распределения $\gamma_4 = 0$ и $\gamma_3 = 0$.

23. Закон распределения функции одного случайного аргумента

Рассмотрим задачу.

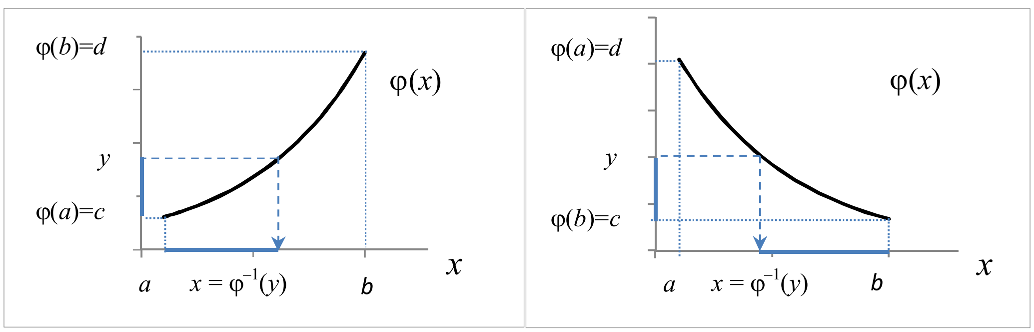
Дано: X – непрерывная случайная величина, плотность вероятности $f_X(x)$ и функция распределения $F_X(x)$ известны и Y= φ(X) – функция случайной величины X; функция φ определена и дифференцируема на множестве $(a;b)$ возможных значений случайной величины X.

Найти: $F_Y(y)$ и $f_Y(y)$.

Решение:

(а) φ – монотонно возрастающая функция на $(a;b)$ ($\Rightarrow \exists\varphi^{-1}$).

(а) **(б)**



Имеем: $y < c \Rightarrow F_Y(y) = 0$; $y > d \Rightarrow F_Y(y) = 1$

$$\forall y \in (c;d) \ \ (Y < y) = (X < \varphi^{-1}(y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = P(Y<y) = P(X< \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \left(F_X(\varphi^{-1}(y))\right)'_y = f_X(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1}(y))'_y$$

(б) φ – монотонно убывающая функция на $(a;b)$ ($\Rightarrow \exists\varphi^{-1}$).

$$\forall y \in (c;d) \ \ (Y < y) = (X > \varphi^{-1}(y)) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ F_Y(y) = P(Y<y) = P(X>\varphi^{-1}(y)) = 1-P(X<\varphi^{-1}(y)) = 1- F_X(\varphi^{-1}(y)).$$

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = -f_X(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1}(y))'_y.$$

Объединяя выражения для $f_Y(y)$, полученные в (а) и (б), получаем:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\left|(\varphi^{-1}(y))'_y\right| \text{ при } y\in (c;d),$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ при } y\notin (c;d).$$

Пример 1.

Дано: $X \sim N(m_X; \sigma_X)$, $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X{}^2}}$ $(-\infty < x < +\infty)$,

$Y = aX + b$ $(a \neq 0)$.

Найти: $f_Y(y)$.

Решение: $y = \varphi(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ $\Rightarrow$ $x = (y-b)/a = \varphi^{-1}(y)$

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))'_y \right|$$

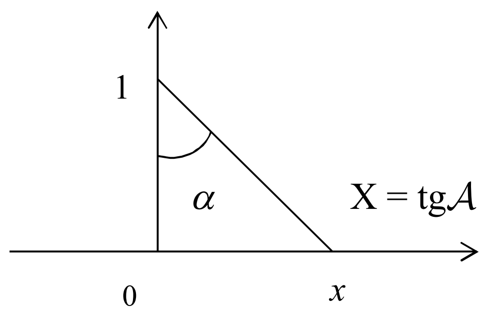
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X\,|a|} e^{-\frac{(y-(am_X+b))^2}{2\sigma_X{}^2 a^2}} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

Итог: линейное преобразование $Y = aX + b$ нормальной случайной величины $X \sim N(m_X; \sigma_X)$ приводит к нормальной случайной величине $Y \sim N((a\,m_X + b);\ \sigma_X \cdot |a|)$.

Пример 2.

Дано:

$$f_{\mathcal{A}}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, \alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}) \\ 0,\ \alpha \notin (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$



Найти: $f_X(x)$.

Решение: $x = \mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,x$,

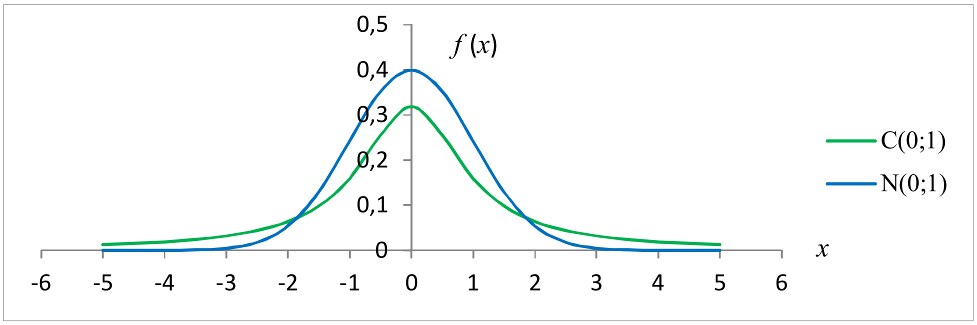
$f_X(x) = \dfrac{1}{\pi}(\,\mathrm{arctg}\,x)'_x = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(-\infty < x < +\infty)$ – распределение Коши.

Математическое ожидание MX существует при условии *абсолютной сходимости* интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$. В случае распределения Коши

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{dx^2}{\pi(1+x^2)} = \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ интеграл расходится

– математическое ожидание для распределения Коши не существует.

Графики плотностей распределений Коши C(0;1) и стандартного нормального $N(0;1)$:



Пример 3.

Дано: X – непрерывная случайная величина, функция распределения которой $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)$ – известная строго монотонная функция;
случайная величина Y – функция случайной величины X:

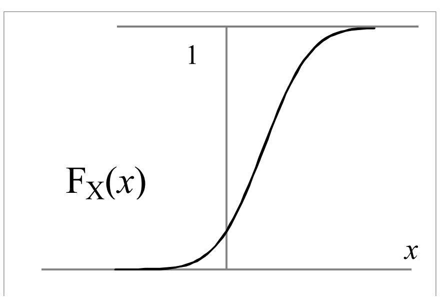
$$\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$$

Найти: $\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)$.

Решение:

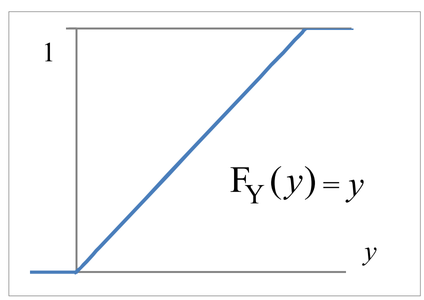
$$0 \le y \le 1:\ \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\varphi^{-1}(y)) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(y)) = y; \quad \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \mathrm{y}, & y \in [0;1] \\ 1, & y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Y – равномерно распределена на [0;1].



$\mathrm{Y} = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$

$\Rightarrow$



Преобразование $\mathrm{Y} = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$, где функция распределения $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)$ – известная *строго монотонная* функция приводит к случайной величине Y, равномерно распределенной на отрезке [0;1].

Пример 4.
Дано:

а) Y – равномерно распределена на [0;1]: $F_Y(y) = y,\ 0 \le y \le 1$;

б) $y = \mathcal{F}(x)$ $(0 \le \mathcal{F}(x) \le 1)$ – некоторая заданная функция распределения, причем $\mathcal{F}(x)$ – *строго монотонна*, поэтому существует обратная функция $x = \mathcal{F}^{-1}(y)$.

Найти функцию распределения $F_X(x)$ случайной величины X, определенной следующим образом:

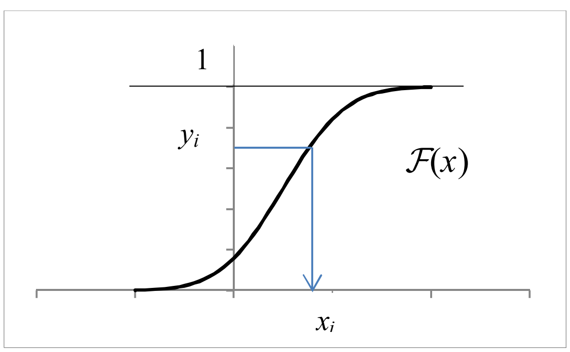
$$X = \mathcal{F}^{-1}(Y).$$

Решение:

$$F_X(x) = F_Y(\varphi^{-1}(x)) = F_Y(\mathcal{F}(x)) =$$

$$= \left[\text{по условию } F_Y(y)=y,\ 0\le y\le 1;\ 0\le\mathcal{F}(x)\le 1\right] = \mathcal{F}(x)$$

Преобразование случайной величины Y: $X = \mathcal{F}^{-1}(Y)$, где Y – равномерно распределена на [0;1], приводит к случайной величине X, функция распределения которой $F_X(x) = \mathcal{F}(x)$ – заданная функция.



Таким образом, с помощью описанного *метода обратной функции*, на основе выборки $y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$ значений случайной величины Y, равномерно распределенной на [0;1], можно получить (смоделировать) выборку $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ значений случайной величины X с заданным распределением $F_X(x) = \mathcal{F}(x)$.

24. Двумерные дискретные и непрерывные случайные величины: определения, функция распределения

Определение одномерной случайной величины см. п. 11.:

def Одномерной случайной величиной называется числовая функция X(ω), определенная на пространстве элементарных событий Ω ={ω}, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное действительное число (X(ω): $\Omega \xrightarrow{X} R$), при этом для любого $x \in R$ определена вероятность P (X < x).

Рассмотрим *двумерные* случайные величины.

def Двумерной случайной величиной (двумерным случайным вектором) называется упорядоченная пара (X,Y) одномерных случайных величин. При этом предполагается, что на всей числовой плоскости определена функция распределения (функция *совместного распределения*) двумерной случайной величины (X,Y)

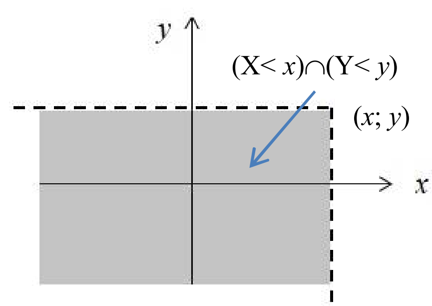
$$F_{XY}(x, y) = P((X<x)\cap(Y<y)).$$

Условились записывать вероятность произведения в виде

$P((X<x)\cap(Y<y)) = P(X<x, Y<y)$, так что $F_{XY}(x, y) = P(X<x, Y<y)$.

Значения двумерной случайной величины – упорядоченные пары чисел (координаты точек на плоскости).

Смысл двумерной функции распределения $F_{XY}(x, y)$ – это вероятность события "*случайная величина* (X,Y) *принимает значение в квадранте с вершиной в точке* (x, y) *левее и ниже точки* (x, y), *не включая саму эту точку*".



$F_{XY}(x, y)$ – это вероятность попадания случайной точки (X,Y) в "юго-западный" квадрант с вершиной в точке (x;y).

Некоторые общие свойства функции распределения $F_{XY}(x, y)$:

1. $F_{XY}(x, y)$ – не убывает по каждому аргументу при фиксированном другом аргументе;
2. $F_{XY}(+\infty, +\infty) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{XY}(x, y) = P(X<+\infty, Y<+\infty) = P(\Omega) = 1$ –

   – вероятность достоверного события;

$F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = P(\varnothing) = 0$ – вероятность невозможного события;

3. Если известна функция распределения $F_{XY}(x,y)$ двумерной случайной величины (X;Y), то функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ ее компонент – случайных величин X и Y, получаем при стремлении к $+\infty$ соответствующей переменной в $F_{XY}(x,y)$:

$$\lim_{y\to+\infty} F_{XY}(x,y) = P(X<x,\ Y<+\infty) = P((X<x)\cap\Omega) = P(X<x) = F_X(x),$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_{XY}(x,y) = P(X<+\infty,\ Y<y) = P(\Omega\cap(Y<y)) = P(Y<y) = F_Y(y).$$

Таким образом: $F_{XY}(x,+\infty) = F_X(x)$,

$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$.

Обратная задача – восстановить закон распределения двумерной случайной величины по известным законам распределения компонент решается лишь в частном случае (который будет рассмотрен далее в п. 25.).

Дискретная двумерная случайная величина

def | Двумерная случайная величина (X,Y) называется дискретной, если множество ее возможных значений $\{(x_i; y_j)\}$ счетно, в частности, конечно.

Компоненты X и Y дискретной двумерной случайной величины (X,Y) – дискретные случайные величины.

Закон распределения дискретной случайной величины (X,Y) записывают в виде: $P(X=x_i,\ Y=y_j) = p_{ij}$ ($i=1,2,\ldots$; $j=1,2,\ldots$), при этом вероятности p_{ij} должны удовлетворять *условию нормировки*

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Распределение (X,Y) можно представить также в виде таблицы (вообще говоря, бесконечной):

X \ Y	y_1	…	y_j	…
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	
…			…	
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	
…	…	…	…	…

Функция распределения двумерной случайной величины (X,Y) в любой точке (x, y) равна: $\mathrm{F}_{\mathrm{XY}}(x, y) = \sum\limits_{i:\, x_i < x} \; \sum\limits_{j:\, y_j < y} p_{i\,j}$.

Считая известным совместное двумерное распределение p_{ij}, найдем распределения компонент X и Y (маргинальные или частные распределения). Рассмотрим (для простоты) случай – множество возможных значений случайной величины (X,Y) конечно:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}= x_i, \mathrm{Y}=y_j) = p_{ij} \quad (i=1,2,\ldots, m;\; j=1,2,\ldots, n).$$

Заметим, что события $(\mathrm{Y}= y_1), (\mathrm{Y}= y_2),\ldots, (\mathrm{Y}= y_n)$ – попарно несовместны и образуют полную группу $\sum\limits_{j=1}^{n}(\mathrm{Y} = y_j) = \Omega$.

Имеем: $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}((\mathrm{X} = x_i) \cap \Omega) = \mathrm{P}((\mathrm{X} = x_i) \cap (\sum\limits_{j=1}^{n}(\mathrm{Y} = y_j)) =$

$$= \mathrm{P}(\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{X} = x_i) \cap (\mathrm{Y} = y_j)) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}((\mathrm{X} = x_i) \cap (\mathrm{Y} = y_j)) = \sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} = p_{i\bullet}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} = p_{i\bullet}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{i\,j} = p_{\bullet j}$$

Распределения компонент X *или* Y *двумерной дискретной случайной величины* (X,Y) *получаются суммированием вероятностей* $p_{i\,j} = \mathrm{P}(\mathrm{X}= x_i, \mathrm{Y}= y_j)$ *по всем значениям индекса* (j или i)*, соответствующего другой компоненте*.

Непрерывная двумерная случайная величина

def | Двумерная случайная величина (X,Y) называется непрерывной, если множество ее возможных значений сплошь заполняет некоторую область $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{R}^2$ (или несколько областей) и существует неотрицательная функция $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$, называемая двумерной плотностью вероятности, определенная на всей числовой плоскости, такая, что для любой области $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{G}$:

$$\mathrm{P}((\mathrm{X,Y}) \in \mathrm{D}) = \iint\limits_{\mathrm{D}} f_{\mathrm{XY}}(x, y)dxdy \quad \text{и} \quad \forall (x; y) \notin \mathrm{G} \quad f_{\mathrm{XY}}(x, y) \equiv 0.$$

Двумерную плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ называют также *совместной плотностью вероятности*.

Функция распределения $F_{XY}(x,y) = P(X<x,\ Y<y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv$ непрерывна на всей числовой плоскости xOy.

Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$.

В каждой точке непрерывности $f_{XY}(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y} = f_{XY}(x,y).$$

Покажем, как при заданной совместной плотности $f_{XY}(x,y)$ находятся распределения компонент X и Y:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)dudv,$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv$$ – функции распределения компонент X и Y.

Отсюда $$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy,$$

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Таким образом, получаем плотности вероятности компонент X и Y двумерной случайной величины (маргинальные или частные плотности вероятности):

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Плотности вероятности $f_X(x)$ *или* $f_Y(y)$ *компонент непрерывной случайной величины* (X,Y) *получаются интегрированием (от* $-\infty$ *до* $+\infty$*) совместной двумерной плотности* $f_{XY}(x,y)$ *по переменной, соответствующей другой компоненте.*

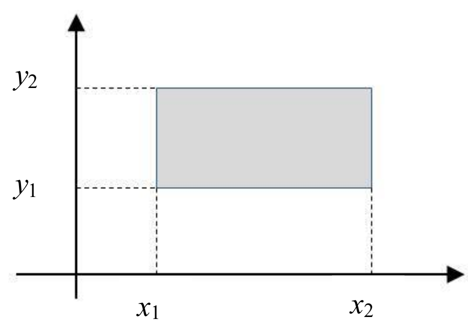
Замечание

1. Закон распределения двумерной случайной величины можно интерпретировать следующим образом:

в дискретном случае – как распределение единичной вероятностной массы между точечными массами p_{ij}, сосредоточенными в точках $(x_i\,;y_j)$, при этом $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;

в непрерывном случае – как распределение единичной вероятностной массы по плоскости (плоской пластине, не имеющей толщины), $f_{XY}(x, y)$ – поверхностная плотность, так что $f_{XY}(x, y)\,dxdy$ – масса элемента площади $dxdy$, содержащего точку (x, y), при этом $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$.

2. Пусть область D – прямоугольник $x_1 \le X \le x_2$; $y_1 \le Y \le y_2$:



Вероятность события *двумерная случайная величина* (X, Y) *принимает значение в области* D равна:

$$P((X,Y) \in D) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1).$$

25. Независимость двух случайных величин (непрерывных и дискретных)

def | Случайные величины X,Y называются *независимыми*, если функция совместного распределения $F_{XY}(x, y)$ равна произведению функций распределения компонент:

$$\forall\, x, y \;\; F_{XY}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \Leftrightarrow \text{X,Y – независимы.} \qquad (*)$$

В противном случае, $F_{XY}(x,y) \neq F_X(x)\cdot F_Y(y)$, случайные величины X,Y называются *зависимыми*.

Замечание: ранее был сформулирован критерий (*необходимое и достаточное условие*) независимости для двух событий (см. п.5.): A и B – независимые события $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A)\,P(B)$, так что в приведенном выше определении (*) речь идет о независимости событий $X< x$ и $Y< y$ для любых вещественных x и y.

Приведем определения независимости для непрерывных и дискретных случайных величин, *эквивалентные определению* (*).

def | Непрерывные случайные величины X и Y независимы, если плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ совместного распределения X и Y равна произведению плотностей вероятности распределения компонент: $\forall\, x, y \;\; f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Leftrightarrow$ X,Y – независимы (**)

Замечание

Если $F_{XY}(x, y)$ — дифференцируема и имеет место $F_{XY}(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$ (*), то

$$\forall (x,y)\;\; f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x)\, F_Y(y) = \frac{d\, F_X(x)}{dx}\,\frac{d\, F_Y(y)}{dy} = f_X(x)\cdot f_Y(y) \;\; (**).$$

С другой стороны $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv \Leftrightarrow F_{XY}(x, y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ (*).

def | Дискретные случайные величины X и Y независимы, если

$$\forall\, i, j \;\;\; p_{ij} = p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j} \quad (i = 1,2,\ldots;\; j = 1,2,\ldots),$$

где $p_{ij} = P(X = x_i,\, Y = y_j)$ – закон совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y), $p_{i\bullet} = \sum\limits_j p_{ij} = P(X = x_i)$, $p_{\bullet j} = \sum\limits_i p_{ij} = P(Y = y_j)$.

26. Числовые характеристики двумерных случайных величин, ковариация и коэффициент корреляции; пример зависимых некоррелированных случайных величин

Математическое ожидание двумерной случайной величины

def Пусть (X,Y) – двумерная случайная величина, тогда

M(X,Y) = (M(X), M(Y)) – центр распределения.

По известному совместному распределению (X,Y) находят распределения компонент, а затем вычисляют их математические ожидания M(X) и M(Y):

- в дискретном случае $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p_{i\bullet}$; $P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=p_{\bullet j}$;

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\bullet};\quad M(Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j p_{\bullet j};$$

- в непрерывном случае $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$; $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx;\quad M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy.$$

T Теорема о математическом ожидании функции двумерной случайной величины (*примем без доказательства*)

а) пусть $Z=\varphi(X,Y)$ – функция двумерной *непрерывной* случайной величины (X,Y), плотность вероятности которой $f_{XY}(x,y)$,

тогда $MZ=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f_{XY}(x,y)\,dxdy$;

б) пусть $Z=\varphi(X,Y)$ – функция двумерной *дискретной* случайной величины(X,Y), закон распределения которой $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$,

тогда $MZ=\sum_i\sum_j \varphi(x_i,y_j)p_{ij}$.

Корреляционный момент (ковариация)

def| $K_{XY} = M((X - MX)\cdot(Y - MY))$ – корреляционный момент (ковариация) случайных величин X,Y; cov(X,Y) – другое обозначение для ковариации.

$K_{XY} = M((X - MX)\cdot(Y - MY)) = M((XY - (MX)Y - XM(Y) + MXMY)) =$
$= [$теорема о математическом ожидании суммы случайных величин$] =$
$= M(XY) - MX\cdot MY$.

Формула для вычисления ковариации: $K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY$

Замечание: если X = Y, то $K_{XX} = DX$, $K_{YY} = DY$.

def| Случайные величины X,Y называются некоррелированными, если их корреляционный момент K_{XY} равен нулю

$$K_{XY} = 0 \Leftrightarrow X,Y \text{ некоррелированы.}$$

def| Если $K_{XY} \neq 0$, то X и Y коррелируют между собой.

Некоторые свойства корреляционного момента (ковариации)

(а) X, Y независимы $\Rightarrow$ X, Y некоррелированы

Док| Докажем это свойство в непрерывном случае (в дискретном – аналогично).

По условию X, Y независимы $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy =$$

$$= MX\cdot MY \Rightarrow K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY = 0.$$

(б) $K_{XY} \neq 0 \Rightarrow X, Y$ зависимы (если случайные величины X, Y коррелированные, то они зависимые). Это утверждение очевидно, т.к. согласно свойству (а) необходимым условием независимости случайных величин является их некоррелированность.

(в) $|K_{XY}| \le \sigma_X\cdot\sigma_Y$

Док| Запишем очевидное неравенство

$$\forall t \;\; M(t\cdot(X - MX) + (Y - MY))^2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(t^2(X - MX)^2 + 2t(X - MX)(Y - MY) + (Y - MY)^2) \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2\, DX + 2t\, K_{XY} + DY \ge 0$$

Квадратный трехчлен относительно переменной t неотрицателен, это означает, что его дискриминант $(K_{XY})^2 - DX\cdot DY \le 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (K_{XY})^2 \le DX\cdot DY \Rightarrow |K_{XY}| \le \sigma_X\cdot\sigma_Y.$$

(г) $K_{X+C,Y} = K_{X,Y+C} = K_{XY}.$

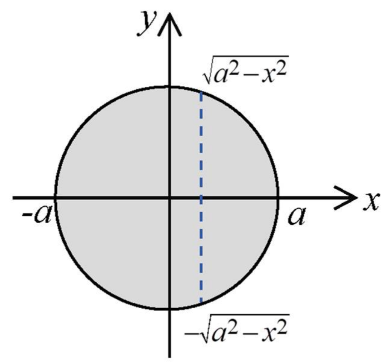
(д) $K_{CX,Y} = C\cdot K_{XY}.$

Свойства г) и д) непосредственно следуют из определения K_{XY}.

(е) $Y = aX+b \Rightarrow K_{X,aX+b} = a\cdot K_{XX} = a\cdot DX = a\cdot(\sigma_X)^2$

Рассмотрим пример *некоррелированных зависимых* случайных величин:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi a^2}, & x^2+y^2 \le a^2 \\ 0, & x^2+y^2 > a^2 \end{cases}$$



равномерное распределение на круге.

Докажем зависимость X и Y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2}dy = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}; \quad f_Y(y) = \frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2}$$

$$f_{XY}(x,y) \ne f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow X,\ Y - \textit{зависимы};$$

Докажем некоррелированность X и Y:

$K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY = \big[MX = MY = 0$ – как интегралы от нечётной функции по промежутку $[-a;a]\,\big] = M(XY) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)dxdy = \big[$перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $dxdy = rdrd\varphi\,\big] = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi \int_0^a r^3dr = 0.$

Получили $K_{XY} = 0$, это означает, что X и Y – *некоррелированы*.

Коэффициент корреляции

$\underline{def}|$ $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ – коэффициент корреляции.

Некоторые свойства коэффициента корреляции ρ_{XY} :

а) $\rho_{XX} = \rho_{YY} = 1$;

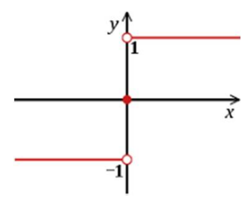
б) $\rho_{X+C,Y} = \rho_{X,Y+C} = \rho_{XY}$;

в) $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y \Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1$;

г) $\rho_{CX,Y} = \dfrac{K_{CX,Y}}{\sigma_{CX} \cdot \sigma_Y} = \dfrac{CK_{X,Y}}{|C|\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho_{XY} \dfrac{C}{|C|} = \rho_{XY}\,\mathrm{sgn}(C)$, здесь $C \neq 0$;

д) $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ $\Rightarrow$ $\rho_{X,\,aX+b} = \dfrac{a\sigma_X^2}{\sigma_X \cdot |a|\,\sigma_X} = \dfrac{a}{|a|} = \mathrm{sgn}(a)$:

Напомним, функция $y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



Таким образом, доказано утверждение:

$$Y = aX + b \Rightarrow |\rho_{XY}| = 1.$$

если Y *и* X *связаны линейной зависимостью, то* $|\rho_{XY}| = 1$,

при этом: $a > 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 1$; $a < 0 \Rightarrow \rho_{XY} = -1$.

Замечание:

Матрица $K = \begin{bmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{YX} & D_Y \end{bmatrix}$ называется ковариационной матрицей. Для двумерного распределения (MX, MY) – центр распределения, а определитель ковариационной матрицы $\det[K]$ – мера рассеяния (обобщенная дисперсия).

27. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы случайных величин

$\underline{T}|$ *Теорема о математическом ожидании суммы случайных величин*:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y),$$

предполагается, что все три математических ожидания существуют.

$\underline{Док}|$ Согласно теореме о математическом ожидании функции двумерной случайной величины (см. п. 26.) имеем:

$MZ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{XY}(x,y)dxdy$ – в непрерывном случае;

$MZ = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(x_i + y_j)p_{ij}$ – в дискретном случае.

(а) непрерывный случай:

$M(X+Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)\, f_{XY}(x,y)dxdy =$ [представляем двойной интеграл как сумму повторных и интегрируем в соответствующем порядке] $=$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy + \int\limits_{-\infty}^{\infty} ydy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy =$$

$= M(X) + M(Y).$

(б) дискретный случай:

$$M(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j)p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} =$$

$$= \sum_i x_i p_{i\bullet} + \sum_j y_j p_{\bullet j} = M(X) + M(Y).$$

Обобщение: $\quad M\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)$.

$\underline{T}|$ *Теорема о дисперсии суммы случайных величин*:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{cov}\,(X,Y).$$

$\underline{Док}|$ $\quad D(X+Y) = M(X+Y)^2 - (M(X+Y))^2 =$

$= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (MX)^2 - 2MXMY - (MY)^2 = DX + DY + 2\mathrm{cov}(X,Y).$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\mathrm{cov}\,(X,Y).$$

Обобщение: $\mathrm{D}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(\mathrm{X}_i) + \sum_{i}\sum_{j\,(j\neq i)}\operatorname{cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j)$.

Если X_i попарно независимы, то $\mathrm{D}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$; очевидно, это верно также и для попарно некоррелированных случайных величин.

28. Необходимое условие равенства единице модуля коэффициента корреляции

В п. 1.26. показано, что *если* Y *и* X *связаны линейной зависимостью, то модуль коэффициента корреляции равен единице*:

$$\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b \Rightarrow |\rho_{\mathrm{XY}}| = 1.$$

Установим, как связаны между собой Y и X, если $|\rho_{\mathrm{XY}}| = 1$ (найдем *необходимое условие* равенства единице модуля коэффициента корреляции).

Лемма: *Необходимое и достаточное условие равенства нулю дисперсии случайной величины*

Дисперсия случайной величины X равна нулю тогда и только тогда, когда X = C, где C– неслучайная постоянная (распределение X – – *вырожденное* в точке C, P(X= C) = 1):

$$\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1.$$

Док

(а) Предварительное замечание:

пусть случайная величина Z такова, что $\begin{cases} Z \geq 0 \\ \mathrm{M}Z = 0 \end{cases}$, тогда $\mathrm{P}(\mathrm{Z} = 0) = 1$.

Физический смысл математического ожидания одномерной случайной величины – абсцисса центра масс. В данном случае *вероятностная масса* распределена правее нуля, включая точку 0 (по условию $\mathrm{Z} \geq 0$), при этом *"центр масс"* MZ = 0. Это возможно, только если вся масса сосредоточена в точке 0, то есть, если Z = 0 или P(Z = 0) = 1.

(б) Докажем теперь утверждение: $\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1$.

Достаточность: $\mathrm{P(X = C)} = 1 \Rightarrow \mathrm{DX} = \mathrm{DC} = 0$ (см. п. 14.).

Необходимость: $\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 \geq 0 \\ \mathrm{DX} = \mathrm{M}((\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{Z}: \begin{cases} Z \geq 0 \\ \mathrm{M}Z = 0 \end{cases}, \text{ согласно (а) имеем } \mathrm{P(Z = 0)} = 1 \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P((X - MX) = 0)} = 1 \Rightarrow \mathrm{P(X = MX)} = 1 \Rightarrow [\mathrm{MX = C}] \Rightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1.$

$\underline{T|}$ $|\rho_{XY}| = 1 \Rightarrow P(Y = aX+b) = 1$

если модуль коэффициента корреляции равен единице, то *случайные величины* X и Y *связаны линейной зависимостью с вероятностью единица*.

$\underline{Док|}$ Пусть $\rho_{XY} = 1$ (для $\rho_{XY} = -1$ доказательство аналогично).

Рассмотрим центрированные и нормированные случайные величины

$$\overset{o}{X} = \frac{X - MX}{\sigma_X} \quad \text{и} \quad \overset{o}{Y} = \frac{Y - MY}{\sigma_Y}.$$

Очевидно, $M\overset{o}{X} = M\overset{o}{Y} = 0$; $D\overset{o}{X} = D\overset{o}{Y} = 1$;

$$\operatorname{cov}(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}) = M(\overset{o}{X}\overset{o}{Y}) - M\overset{o}{X}M\overset{o}{Y} = M\left(\frac{X - MX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - MY}{\sigma_Y}\right) = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho_{XY} = 1.$$

Далее, $D(\overset{o}{Y} - \overset{o}{X}) = D\overset{o}{Y} + D\overset{o}{X} - 2\operatorname{cov}(\overset{o}{Y}, \overset{o}{X}) = 1+1-2 = 0.$

Таким образом, $D(\overset{o}{Y} - \overset{o}{X}) = 0 \Rightarrow$ [см. Лемму] $\Rightarrow$

$\Rightarrow P((\overset{o}{Y} - \overset{o}{X}) = M(\overset{o}{Y} - \overset{o}{X})) = 1 \Rightarrow \left[M(\overset{o}{Y} - \overset{o}{X}) = 0\right] \Rightarrow P(\overset{o}{Y} - \overset{o}{X} = 0) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\frac{Y - MY}{\sigma_Y} - \frac{X - MX}{\sigma_X} = 0\right) = 1$ – случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью с вероятностью единица.

Замечание о вероятностном смысле коэффициента корреляции ρ_{XY}

Пусть даны две случайные величины Y, X.

Рассмотрим линейную функцию $aX+b$ случайной величины X. Величину $M(Y - (aX+b))^2$ – средний квадрат отклонения случайной величины Y от линейной функции $aX+b$ рассмотрим как функцию двух переменных a и b

$$M(Y - (aX+b))^2 = \Delta(a;b)$$

и поставим задачу найти значения a_0 и b_0 такие, что

$$\Delta(a_0; b_0) = \min \Delta(a;b).$$

Соответствующую линейную функцию $a_0X + b_0$ будем считать наилучшим линейным приближением случайной величины Y (наилучшим – в смысле минимума среднего квадрата отклонения).

Опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$\Delta(a_0; b_0) = \min_{(a,b)}\{M(Y-(aX+b))^2\} = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2) .$$

Полученное выражение показывает, что чем ближе ρ_{XY} к единице, тем меньше отклонение Y от a_0X+b_0 (от линейного приближения, наилучшего в указанном смысле).

Таким образом, коэффициент корреляции ρ_{XY} (безразмерная величина) – *мера близости к линейной зависимости между случайными величинами* Y, X.

29. Условный закон распределения; условное математическое ожидание (регрессия)

Дана двумерная случайная величина (X,Y).

def Условный закон распределения – закон распределения одной из случайных величин, при условии, что другая приняла одно из возможных значений.

def Условное математическое ожидание – это математическое ожидание одной из случайных величин, при условии, что другая приняла одно из возможных значений.

(а) (X,Y) – *дискретная случайная величина*

Пусть задано совместное распределение $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ($i=1,2,\ldots$; $j=1,2,\ldots$) дискретной случайной величины (X,Y) и пусть случайная величина Y приняла значение y_j (произошло событие $Y=y_j$). Найдем условную вероятность $P(X=x_i\ /\ Y=y_j)$:

$$P(X=x_i, Y=y_j)=\left[P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)\right]=P(Y=y_j)\cdot P(X=x_i\ /\ Y=y_j)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=x_i\ /\ Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Таким образом, получаем *условные законы распределения*:

$$P(X=x_i/Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\quad (i=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots);$$

$$P(Y=y_j/X=x_i)=\frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}\quad (i=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots).$$

Заметим, что для условного закона распределения случайной величины X при условии $Y=y_j$ ($j=1,2,\ldots$) выполняется условие нормировки: $\sum_i P(X=x_i\ /Y=y_j)=\sum_i\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=\frac{1}{p_{\bullet j}}\sum_i p_{ij}=1.$

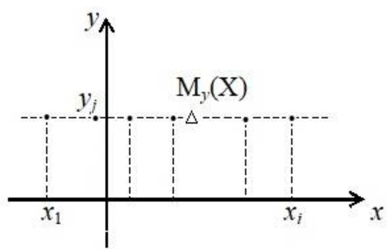
Аналогично, $\sum_j P(Y=y_j\ /\ X=x_i)=1.$

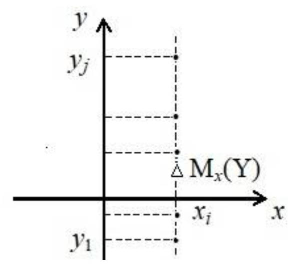
Пусть P(X$=x_i$/ Y$=y_j$) – условный закон распределения, тогда *условное математическое ожидание* M(X/Y$=y_j$) – это сумма произведений значений x_i случайной величины X на соответствующие условные вероятности:

$$M(X/Y=y_j) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i / Y=y_j) = \sum_i x_i \cdot \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

аналогично, $M(Y/X=x_i) = \sum_j y_j \cdot P(Y=y_j / X=x_i) = \sum_j y_j \cdot \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$.

Условные математические ожидания обозначают M(X/Y$=y_j$) = M_y(X) и M(Y/X$=x_i$) = M_x(Y) и называют: M_y(X) – *регрессия* X на y (или X по y); M_x(Y) – *регрессия* Y на x (или Y по x), соответственно.





Механическая трактовка:

- точка (M_y(X), y_j) – центр масс для точечных масс, распределенных на горизонтальной прямой $y = y_j$;
- точка (x_i, M_x(Y)) – центр масс для точечных масс, распределенных на вертикальной прямой $x = x_i$.

Замечание 1.

Каждому значению y_j случайной величины Y соответствует определенное значение условного математического ожидания M(X/Y $= y_j$). Таким образом, условное математическое ожидание M(X/Y$= y_j$) – случайная величина (функция случайной величины Y).

Вычислим M(M(X/Y$= y_j$)) = [по теореме о математическом ожидании функции случайной величины] = $\sum_j M(X/Y=y_j) \cdot P(Y=y_j) =$

$$= \left[\mathrm{P}(\mathrm{Y}= y_j = p_{\bullet j}\right] = \sum_j \Big(\sum_i x_i \frac{p_{ij}}{\cancel{p_{\bullet j}}}\Big)\cancel{p_{\bullet j}} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\bullet} =$$

$$= \sum_i x_i \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{MX}.$$

Аналогично, условное математическое ожидание $\mathrm{M}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}= x_i)$ –

– функция случайной величины X: $\mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}= x_i)) = \mathrm{MY}$.

Замечание 2

Если случайные величины X,Y независимы ($\forall\ i,j \quad p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$),

то условная вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{X}= x_i/\mathrm{Y}=y_j) = \dfrac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \dfrac{p_{i\bullet} \cdot \cancel{p_{\bullet j}}}{\cancel{p_{\bullet j}}} =$

$= p_{i\bullet} = \mathrm{P}(\mathrm{X}= x_i)$, при этом $\mathrm{M}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}=y_j) = \mathrm{MX}$.

(б) (X,Y) – *непрерывная случайная величина*

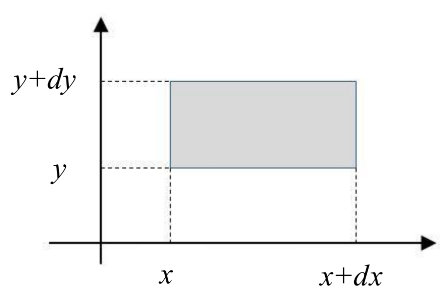
Пусть задана совместная плотность вероятности $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ непрерывной случайной величины (X,Y).

$\underline{def}|$ *Условная плотность вероятности* случайной величины X при условии $\mathrm{Y}= y$ *<u>по определению</u>* равна: $f_{\mathrm{X}}(x/y) = \dfrac{f_{\mathrm{XY}}(x, y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}$.

Приведем обоснование этого определения. Преобразуем равенство

$$f_{\mathrm{X}}(x/y) = \frac{f_{\mathrm{XY}}(x, y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)},$$

умножив левую часть на dx, а правую на $dxdy/dy$, получим:



$$f_{\mathrm{X}}(x/y) \cdot dx = \frac{f_{\mathrm{XY}}(x, y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)} \cdot \frac{dxdy}{dy} = \frac{\mathrm{P}(x < \mathrm{X} < x + dx, y < \mathrm{Y} < y + dy)}{P(y < \mathrm{Y} < y + dy)} =$$

$= \mathrm{P}(x < \mathrm{X} < x + dx / y < \mathrm{Y} < y + dy)$ – условная вероятность попадания значения случайной величины X в вертикальную полосу x, $x + dx$ при условии, что значение Y лежит в горизонтальной полосе y, $y + dy$.

Так же определяется условная плотность вероятности случайной величины Y при условии $X = x$:

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Заметим, что условные плотности вероятности удовлетворяют

условию нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x/y)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = 1$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y/x)\,dy = 1$.

Условное математическое ожидание случайной величины X при

условии $Y = y$: $M(X/Y{=}y) = M_y(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x/y)dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{XY}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx}dx.$$

Аналогично, $M(Y/X = x) = M_x(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y/x)dy$.

Графики $y = M_x(Y)$ и $x = M_y(X)$ называются линиями регрессии.

Замечание 1.

Как было указано, $M(X/Y{=}y)$ – случайная величина (функция случайной величины Y), вычислим ее математическое ожидание:

$$M(M(X/Y{=}y)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(X/Y{=}y) f_Y(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx f_Y(y)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = M(X).$$

Аналогично, $M(M(Y/X = x)) = M(Y)$.

Замечание 2.

Если X,Y независимы $[\ \forall(x,y)\ \ f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\ ]$, то

$$f_X(x/y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \quad \text{и} \quad f_Y(y/x) = f_Y(y).$$

Линиями регрессии в этом случае будут прямые линии:
горизонтальная $y = M_x(Y) = M(Y)$ и вертикальная $x = M_y(X) = M(X)$.

30. Двумерное нормальное распределение (нормальный закон на плоскости)

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}(*)$$

$$(-\infty<x<+\infty \quad -\infty<y<+\infty)$$

(плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ зависит от параметров m_X, m_Y; σ_X, σ_Y; r)

Плотности распределения компонент X и Y (маргинальные плотности, см. п. 24.): $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ и $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$.

Опуская выкладки, запишем:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \Leftrightarrow X \sim N(m_X,\sigma_X),\ \text{аналогично,} Y\sim N(m_Y,\sigma_Y).$$

Таким образом, m_X и m_Y –математические ожидания, а σ_X и σ_Y – стандартные отклонения компонент X и Y, соответственно.

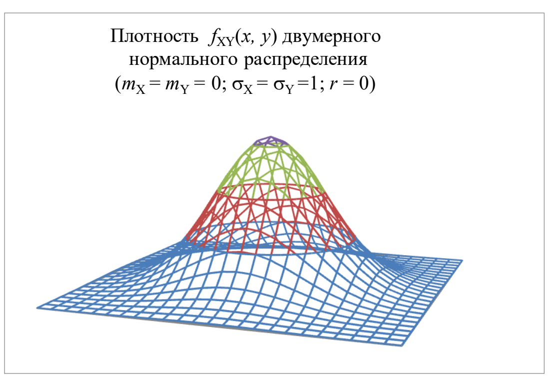
Ковариация (корреляционный момент):

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)(y-m_Y)\,f_{XY}(x,y)\,dxdy=\left[\text{опуская выкладки}\right]=\sigma_X\cdot\sigma_Y\cdot r$$

$$\Rightarrow r=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{XY},\quad r \text{ – коэффициент корреляции между X и Y.}$$

Очевидно, параметры распределения должны удовлетворять следующим ограничениям: m_X, m_Y – любые; $\sigma_X>0$, $\sigma_Y>0$; $|r|<1$.

График $z=f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$:



Критерий независимости компонент двумерной нормальной случайной величины.

Известно а) X, Y независимы $\Rightarrow$ X, Y некоррелированы; б) из некоррелированности случайных величин их независимость не следует (см. п. 26. – *пример некоррелированных зависимых случайных величин*).

В случае $r = 0$, из формулы (*) для плотности вероятности следует

$$\forall x, y \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \ \Leftrightarrow \text{X,Y – независимы.}$$

Таким образом, для *двумерной нормальной случайной величины* (X,Y) *справедливо*: X, Y н*езависимы* $\Leftrightarrow$ X, Y *некоррелированы.*

Условные законы распределения компонент двумерного случайного вектора, нормальные регрессии

Условная плотность распределения Y при условии X= x имеет вид:

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{\left(y-\left(m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)\right)\right)^2}{2\sigma_Y{}^2(1-r^2)}}$$

– нормальное распределение с параметрами

$$M_x(Y) = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X) \quad \text{и} \quad \sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$$

Заметим, что условное стандартное отклонение $\sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$ не зависит от x (“равноизменчивость” условных нормальных распределений).

Линии регрессии (линии “*нормальной регрессии*”) – прямые:

$$\text{Y на } x\text{:} \quad y = y(x) = M_x(Y) = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),$$

$$\text{X на } y\text{:} \quad x = x(y) = M_y(X) = m_X + r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y).$$

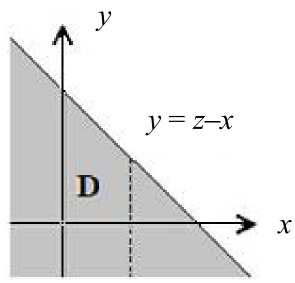
При каждом значении x имеем нормальное распределение Y с центром распределения $M_x(Y)$, лежащим на прямой

$$y = m_Y + r(\sigma_Y/\sigma_X)\cdot(x - m_X)$$

и стандартным отклонением $\sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$.

31. Распределение суммы двух непрерывных случайных величин, композиция законов распределения; композиция экспоненциальных распределений (закон Эрланга)

Пусть дана (X,Y) – непрерывная случайная величина, $f_{XY}(x,y)$ – ее плотность вероятности и стоит задача найти распределение случайной величины Z = X+Y, то есть найти $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$.



Решение: пусть z – некоторое действительное число ($-\infty < z < +\infty$), $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X+Y < z) =$

$$= \iint\limits_{D} f_{XY}(x,y)\,dxdy = \left[D = \{(x,y):\ x+y<z\}\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,.$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y, y)\,dy\,.$$

Обозначим переменную интегрирования через t и запишем:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t, z-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-t, t)\,dt\,.$$

def| *Композицией* законов распределения называют закон распределения *суммы независимых* случайных величин.

Пусть X,Y – независимы $\left[\forall\, x, y \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\right]$,

тогда $f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\cdot f_Y(z-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)\cdot f_Y(t)\,dt$ –

свертка $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Пример: *композиция нормальных законов*.

Пусть X,Y независимы; $X \sim N(m_X, \sigma_X)$, $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y)$. Можно показать, что $X+Y \sim N((m_X+m_Y), \sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2})$.

Обобщение: $X_1, X_2, \ldots X_n$ – независимы, $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N((m_1+\ldots+m_n); \sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2}).$$

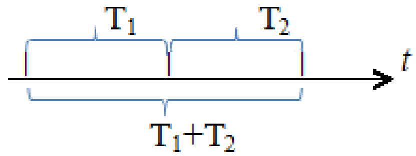
Композиция экспоненциальных распределений (закон Эрланга)

Рассмотрим задачу.

Дано: случайные величины T_1 и T_2 *независимы*, распределены по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно:

T_1: $f_{T_1}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$,

T_2: $f_{T_1}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ $t \geq 0$,



Найти: распределение суммы $T_1 + T_2$.

Решение:

(а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и пусть $\lambda_2 > \lambda_1$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-t)}\, dt = \left[\, t \geq 0;\ z-t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq z \,\right] =$$

$$= \int_0^z \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\, dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\, d(\lambda_2 - \lambda_1)t = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) \ .$$

(б) $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\, dt = \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda(\lambda z) e^{-\lambda z}$$ – распределение Эрланга 2-го порядка.

Обобщение: *распределение Эрланга k-го порядка*

Пусть $k = 3$: $T_1 + T_2 + T_3$; $\lambda_i = \lambda$ $(i = 1,2,3)$; T_i: $f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

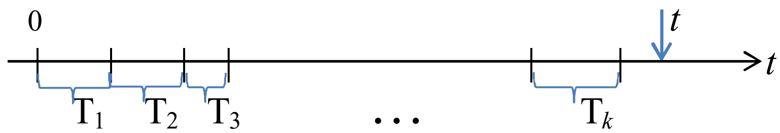
$$f_Z(z) = \int_0^z f_{T_1+T_2}(t) \cdot f_{T_3}(z-t)\, dt = \int_0^z \lambda^2 t e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(z-t)}\, dt = \lambda^3 e^{-\lambda z} \int_0^z t\, dt = \lambda \frac{(\lambda z)^2}{2!} e^{-\lambda z}$$

Пусть $k \geq 1$ и $\sum_{i=1}^{k} T_i = T$, где T_i: $f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, тогда по индукции имеем:

$f_T(t) = f_{\sum_{i=1}^{k} T_i}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0,\ \ k \geq 1)$ – плотность вероятности непрерывной случайной величины T – суммы k независимых случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное (показательное) распределение с одним и тем же параметром λ: $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$. Очевидно, $M(T) = \frac{k}{\lambda}$, $D(T) = \frac{k}{\lambda^2}$.

Это распределение применяется в задачах телекоммуникации для моделирования входящего потока вызовов.

Замечание: связь с пуассоновским потоком.



Очевидно: $(\mathrm{X}_t \geq k) = (\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i \leq t)$ – равносильные события.

Далее, (см. п.17.),

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (k = 0,1,2,\ldots)\text{ , отсюда}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_t \geq k) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}_t < k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i \leq t).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i$ – *непрерывная* случайная величина, то (см. п.18.)

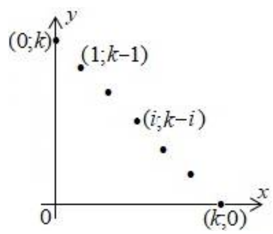
$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i \leq t) = \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i < t).$$

Итог: $\mathrm{F}_{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$ – *функция распределения* случайной величины $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_i = \mathrm{T}$, распределенной по закону Эрланга k-го порядка.

32. Распределение суммы двух целочисленных случайных слагаемых, теорема о производящей функции композиции законов распределения

Пусть (X,Y) – целочисленная двумерная случайная величина, множество ее возможных значений $\{(i,j)\}$ ($i = 0,1,\ldots$; $j = 0,1,\ldots$), задан закон совместного распределения $P(X = i,\ Y = j) = p_{ij}$ и стоит задача найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Решение:



Зафиксируем некоторое значение k, тогда

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_{i,\,k-i}\,.$$

Если X,Y независимы, то (см. п. 25.):

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)\cdot P(Y = k - i)$$

– композиция законов распределения.

Обозначим $P(X = i) = p_i^{X}$; $P(Y = j) = p_j^{Y}$ и запишем

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} p_i^{X}\cdot p_{k-i}^{Y}\,.$$

<u>*T*</u>| Теорема о производящей функции композиции законов распределения целочисленных случайных величин

Пусть X,Y – независимы и

X: $P(X = i) = p_i^{X}$; $\varphi_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{X}\cdot z^{i}$,

Y: $P(Y = j) = p_j^{Y}$; $\varphi_Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{Y}\cdot z^{j}$,

$$\varphi_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P((X + Y = k))\cdot z^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} p_i^{X}\cdot p_{k-i}^{Y}\right)\cdot z^{k},$$

тогда: $\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z)\cdot\varphi_Y(z)$.

$\underline{Док|}$ $\varphi_X(z)\cdot\varphi_Y(z)=(\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i^X\cdot z^i)\cdot(\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j^Y\cdot z^j)=[\text{перемножаем ряды}]=$

$=(p_0^X+p_0^Y)z^0+(p_0^X p_1^Y+p_1^X p_0^Y)z+\ldots+(p_0^X p_k^Y+p_1^X p_{k-1}^Y+\ldots+p_k^X p_0^Y)\cdot z^k+\ldots=$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}p_i^X\cdot p_{k-i}^Y\right)\cdot z^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P((X+Y=k))\cdot z^k=\varphi_{X+Y}(z)$.

Пример 1.

Дано: X,Y – независимы, распределены по закону Пуассона с параметрами a_1 ($a_1>0$) и a_2 ($a_2>0$), соответственно.

Найти: закон распределения Z = X+Y.

Решение: $\varphi_X(z)=e^{a_1(z-1)}$; $\varphi_Y(z)=e^{a_2(z-1)}$; $\varphi_{X+Y}(z)=e^{(a_1+a_2)(z-1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Z = X+Y распределена по закону Пуассона с параметром (a_1+a_2):

$p_k=P(Z=k)=\dfrac{(a_1+a_2)^k}{k!}e^{-(a_1+a_2)}$, $k=0,1,2\ldots$ – *распределение Пуассона*

Пример 2.

Случайная величина X – число успехов при проведении n независимых испытаний, p – вероятность успеха в каждом испытании (схема Бернулли, см. п.16.), $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ – сумма n индикаторов успеха X_i ($i=1,\ldots,n$).

Найти закон распределения $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

X_i	0	1
P	$q=1-p$	p

Решение: $\varphi_{X_i}(z)=pz+q$;

$\varphi_X(z)=\varphi_{(X_1+\ldots+X_n)}(z)=(pz+q)^n\Rightarrow p_k=P(X=k)=b_k(n;p)=$

$=C_n^k\,p^k q^{n-k}$ ($k=0,1,\ldots,n$) – *биномиальное распределение*.

33. Неравенство Чебышева

$\underline{T|}$ Неравенство Чебышева

Пусть случайная величина X имеет второй начальный момент MX^2, тогда: $\forall\varepsilon>0\ \ P(|X|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{MX^2}{\varepsilon^2}$ – *неравенство Чебышева* (∗)

Док| (X – непрерывная случайная величина)

$$MX^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f_X(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\ \geq\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\ =\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}x^2 f_X(x)\,dx\geq\varepsilon^2\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}f_X(x)\,dx=$$

$$=\varepsilon^2\,P(|X|\geq\varepsilon)\Rightarrow\ P(|X|\geq\varepsilon)\leq\frac{MX^2}{\varepsilon^2}.$$

(Для дискретной случайной величины доказательство аналогично).

Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание MX и дисперсию $DX=\sigma^2$, то, заменяя в неравенстве (∗) X на $(X-MX)$, получим другую форму *неравенства Чебышева*:

$$\forall\varepsilon>0\ \ P(|X-MX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

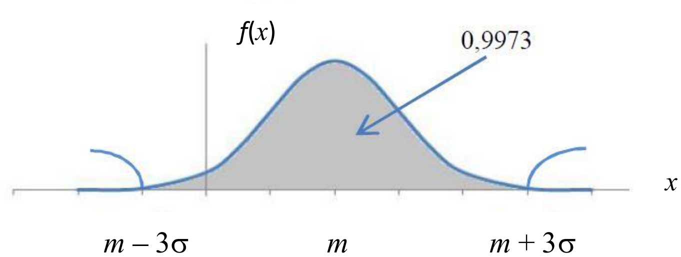
Следствие. При $\varepsilon=3\sigma$ из последнего неравенства получаем, что *для любой случайной величины* X, *имеющей математическое ожидание* MX *и дисперсию* $DX=\sigma^2$ имеет место "3-σ *оценка*" вероятности абсолютного отклонения случайной величины от ее математического ожидания на величину, *не меньшую* 3σ:

$$P(|X-MX|\geq 3\sigma)\leq 1/9.$$

Эта оценка верна для *любого* распределения (при условии ∃MX, ∃DX), однако она является довольно грубой. Так, например,

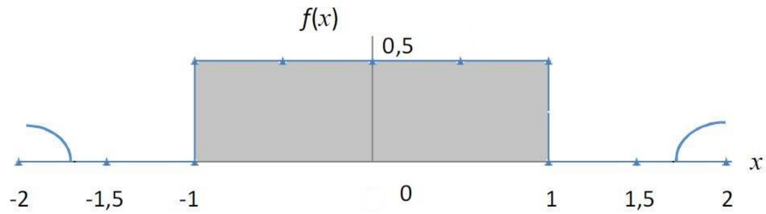
(1) для нормального распределения имеем:

$$P(|X-MX|\geq 3\sigma)=1-0{,}9973=\ 0{,}0027\leq 1/9$$



(2) для равномерного распределения: $P(|X - MX| \geq 3\sigma) = 0 \leq 1/9$

Равномерное распределение на [–1;1]:



$$3\sigma_X = 3\frac{2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}7; \quad P(|X| \geq \sqrt{3}) = 0\,.$$

34. Закон больших чисел (теорема Чебышева)

Определение независимости *двух* случайных величин – см. п.25.

$\underline{def}|$ определение независимости n случайных величин ($n \ge 2$):

(а) непрерывные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ – независимы, если $\forall(x_1, \dots, x_n)$ события $(X_1 < x_1), \dots, (X_n < x_n)$ независимы в совокупности;

(б) дискретные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ – независимы, если $\forall(x_1, \dots, x_n)$ события $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ независимы в совокупности.

Замечание:

n-мерной случайной величиной (n-мерным случайным вектором) называется система n одномерных случайных величин $X_1, \dots, X_n$, такая, что для любых вещественных $x_1, \dots, x_n$ определена вероятность произведения n событий (функция совместного распределения):

$$\forall(x_1, \dots, x_n) \quad P((X_1 < x_1), \dots, (X_n < x_n)) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Определение независимости n случайных величин $X_1, \dots, X_n$ ($n \ge 2$) может быть сформулировано так: случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, если для любых чисел $x_1, \dots, x_n$ справедливо равенство:

$$\forall(x_1, \dots, x_n) \quad F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

(*функция совместного распределения n-мерной случайной величины* ($X_1, \dots, X_n$) *равна произведению функций распределения компонент* $X_1, \dots, X_n$)

$\underline{def}|$ *определение последовательности независимых случайных величин*

Последовательность $\{X_n\}$ случайных величин называется *последовательностью взаимно независимых* случайных величин, если $\forall n$ $X_1, \dots, X_n$ независимы.

$\underline{T|}$ *Закон больших чисел (теорема Чебышева)*

Пусть $\{X_i\}$ – последовательность независимых случайных величин и пусть каждый член последовательности X_i имеет конечное математическое ожидание $MX_i = m_i$ и дисперсию $DX_i = D_i$, причем дисперсии ограничены в совокупности ($\exists C \; 0 < C < +\infty \; \forall i \; D_i \le C$), тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\to} 0. \qquad \text{(ЗБЧ)}$$

$\underline{Док|}$ Заметим: $M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$,

$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_i \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$ и запишем

неравенство Чебышева (см. п. 33.) для случайной величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \le P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

По теореме о сжатой функции при $n \to \infty$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon) = 0.$$

Замечание 1. Смысл закона больших чисел состоит в том, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического n случайных величин $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (случайной величины) от среднего арифметического их математических ожиданий $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$ (неслучайной величины) на любое фиксированное $\varepsilon > 0$ *с увеличением n становится все менее вероятным.*

Замечание 2. Доказанная теорема справедлива и для последовательности $\{X_i\}$ *попарно независимых*, а также для *попарно некоррелированных* случайных величин (поскольку при этом $D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$, см. п. 27.).

35. Сходимость по вероятности; два следствия закона больших чисел

<u>*def*|</u> Последовательность случайных величин $\{S_n\}$ называют *сходящейся по вероятности* к случайной (или неслучайной) величине S, если

$$\forall\varepsilon>0\ \mathrm{P}(|S_n-S|\geq\varepsilon)\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

или, равносильно, $\forall\varepsilon>0\ \mathrm{P}(|S_n-S|<\varepsilon)\underset{n\to+\infty}{\to}1.$

Замечание

Сходимость по вероятности $\{S_n\}$ к S означает, что *вероятность* события $(|S_n-S|\geq\varepsilon)$, состоящего в том, что S_n *оказывается вне* ε-*окрестности* S, с ростом n становится сколь угодно близкой к нулю (иначе: *вероятность* события $(|S_n-S|<\varepsilon)$, состоящего в том, что S_n *находится в* ε-*окрестности* S, с ростом n становится сколь угодно близкой к единице). Для сходимости по вероятности принято обозначение: $S_n\ \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}}S$.

<u>*T*|</u> *Следствие* 1 *из закона больших чисел.*

Пусть $\{\mathrm{X}_i\}$ – последовательность *независимых одинаково распределенных случайных величин*, имеющих математическое ожидание $\mathrm{MX}_i=m$ и дисперсию $\mathrm{DX}_i=\sigma^2$ (m и σ^2 – одни и те же для всех X_i), $\bar{\mathrm{X}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ – среднее арифметическое $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$, тогда

среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин сходится по вероятности к их математическому ожиданию:

$$\bar{\mathrm{X}}\ \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}}m.$$

<u>*Док*|</u> Подставляя $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=\bar{\mathrm{X}}$ и $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i=m$ в (ЗБЧ) см. п. 34., получаем:

$$\forall\varepsilon>0\ \mathrm{P}(|\bar{\mathrm{X}}-m|\geq\varepsilon)\underset{n\to+\infty}{\to}0\ \Leftrightarrow\ \bar{\mathrm{X}}\ \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}}m.$$

$\underline{T}|$ *Следствие* 2 *из закона больших чисел* (теорема Бернулли).

Пусть случайная величина X – число наступлений события A (успеха) при проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли, $p = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ – вероятность успеха в каждом испытании, $\dfrac{\mathrm{X}}{n}$ – относительная частота числа успехов в n испытаниях, тогда *относительная частота* $\dfrac{\mathrm{X}}{n}$ *числа успехов в n испытаниях по схеме Бернулли по вероятности сходится к вероятности успеха p в каждом испытании*:

$$\frac{\mathrm{X}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} p.$$

$\underline{\text{Док}}|$ $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ – сумма n индикаторов успеха X_i ($i = 1,\ldots,n$),

$\mathrm{MX}_i = p$; $\mathrm{DX}_i = p(1-p)$; $\dfrac{\mathrm{X}}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ – среднее арифметическое

$\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$, поэтому, в соответствии со следствием 1, имеем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \xrightarrow[n\to+\infty]{P} p \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{X}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} p.$$

36. Центральная предельная теорема

Предварительные замечания.

Рассмотрим последовательность $\{X_i\}$ независимых случайных величин ($\forall n$ $X_1, \dots, X_n$ – независимы в совокупности) с математическими ожиданиями $\{m_i\}$ и дисперсиями $\{D_i\}$.

При любом фиксированном n имеем:

$$M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} MX_i = \sum_{i=1}^{n} m_i ,$$

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \left[\text{в силу независимости } X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} D_i .$$

Случайная величина $\overset{\circ}{Y}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$ – центрированная и нормированная, ее математическое ожидание $M\overset{\circ}{Y}_n = 0$, а дисперсия $D\overset{\circ}{Y}_n = 1$.

Термин *центральная предельная теорема* (ЦПТ) вообще означает ряд теорем, утверждающих (при каких-либо условиях) справедливость предельного равенства вида:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\overset{\circ}{Y}_n < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \quad (*).$$

Если указанное предельное равенство $(*)$ имеет место, то при достаточно больших значениях n на его основе строится приближение:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}} < x\right) \approx \Phi(x).$$

Считается, что такое приближение становится приемлемым уже при $n > 30$.

$\underline{T}|$ *Центральная предельная теорема* (ЦПТ) *для независимых одинаково распределенных случайных величин* (*без доказательства*)

Пусть $\{X_i\}$ – последовательность независимых *одинаково распределенных* случайных величин, имеющих математическое ожидание m и дисперсию $\sigma^2 \neq 0$, тогда:

$$\forall x \ \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt .$$

Заметим: $M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} MX_i = nm;$ $D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = n\sigma^2.$

Символически утверждение ЦПТ записывают так:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\sim} N(nm; \sigma\sqrt{n}) \quad \text{или} \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\sim} N(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

– среднее арифметическое *любых независимых одинаково распределенных случайных величин (имеющих математическое ожидание и дисперсию)* асимптотически распределено по нормальному закону.

Две последние *символические* записи удобны для применения ЦПТ в “*допредельной*” форме – при *конечных достаточно больших значениях* n.

37. Предельная теорема Муавра-Лапласа

$\underline{T|}$ Пусть X – число успехов при проведении n независимых испытаний (по схеме Бернулли) с вероятностью p успеха в каждом испытании (MX= np, DX = npq), при этом

$\forall n$ случайная величина $\dfrac{X - MX}{\sqrt{DX}} = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ – центрированная и нормированная, тогда, согласно ЦПТ, справедливо утверждение:

$$\forall x \ \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x).$$

Иными словами, теорема утверждает, что случайная величина X – число успехов в схеме Бернулли, распределена асимптотически нормально:

$$X \underset{n\to+\infty}{\sim} N(np; \sqrt{npq}).$$

$\underline{Док|}$ Пусть X_i – индикатор появления успеха в i–м испытании:

X_i	0	1
P	q	p

$MX_i = p$, $DX_i = pq$, тогда $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – сумма n одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяет требованиям центральной предельной теоремы, откуда и следует утверждение теоремы Муавра-Лапласа.

Задача: Проведено n независимых испытаний по схеме Бернулли. Найти приближенно вероятность отклонения относительной частоты $\dfrac{X}{n}$ числа успехов от вероятности успеха p на величину, не превосходящую по абсолютной величине $\varepsilon > 0$ (величины n, p и ε заданы). Указание: использовать *предельную теорему Муавра-Лапласа.*

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = ?$$

Решение

Известно: $Y \sim N(m;\sigma)$, $P(|Y - m| \le \sigma t) = 2\Phi_o(t)$.

При достаточно больших n имеем приближенно:

$$X \underset{n\to +\infty}{\sim} N(np; \sqrt{npq}) \Leftrightarrow \frac{X}{n} \underset{n\to +\infty}{\sim} N(p; \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(|\frac{X}{n} - p| \le t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}) \approx 2\,\Phi_o(t).$$

Положим $t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} = \varepsilon$, откуда $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$; в итоге получаем:

$$P(|\frac{X}{n} - p| \le \varepsilon) \approx 2\,\Phi_o(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}).$$

Замечание.

Случайная величина X (число успехов в схеме Бернулли) подчиняется биномиальному распределению:

$$P(X = k) = b_k(n;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0,1,\ldots,n).$$

Применяя теорему Муавра-Лапласа в “допредельной” форме (при достаточно больших n), получаем *интегральную приближенную формулу Муавра-Лапласа*:

$$\sum_{k=0}^{k_m} b_k(n;p) = P(0 \le X \le k_m) \approx \Phi(\frac{k_m - np}{\sqrt{npq}}) = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{k_m - np}{\sqrt{npq}})$$

Обоснование этой формулы: поскольку $X \underset{n\to +\infty}{\sim} N(np; \sqrt{npq})$, то

$$P(0 \le X \le k_m) = P(-\infty < X \le k_m) \approx \Phi(\frac{k_m - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(-\infty) = \Phi(\frac{k_m - np}{\sqrt{npq}}).$$

Полезна также приближенная формула:

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} b_k(n;p) \approx \Phi(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}})$$

Это приближение применяют при значениях p не слишком близких к нулю или единице, величинах k_1 и k_2 – порядка несколько десятков, $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – порядка нескольких единиц (обычно в пределах от 0 до 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука. Гл. ред. Физ-мат. лит.–1988. –(Физико-математическая б-ка инженера). – 480 с.
2. Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений.//Под ред. Максимова Ю.Д.– СПб.: «Иван Федоров», 2001.– 592 с илл.
3. Калинин В.М., Тихомиров С.Р. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. СПб., 2002. 89 с.
4. Севастьянов Б.А. Вероятностные модели.–М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1992. – (Проблемы науки и техн. Прогресса). –176 с.
5. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. Изд. 3-е, перераб. и доп./ под ред. Фигурнова В.Э. –М.: ИНФРА – М. 2002. –528 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: Учебное пособие / СибГУТИ.— Новосибирск, 2009.—128 с.